

Prov. T/20-173

T  
15  
111

ESTRUCTURAS DE MODELOS  
Y TEORÍA DE HOMOTOPÍA  
EN CATEGORÍAS DE GRUPOS  
Y GRUPOIDES SIMPLICIALES

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Fecha 24-8-95  
ENTRADA NUM. 1759

TESIS DOCTORAL

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
GRANADA  
Nº Documento 49681306  
Nº Copia 21230845

JESÚS GARCÍA MIRANDA  
Departamento de Álgebra  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada  
Granada, 1995

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
28 JUL. 1995  
COMISION DE DOCTORADO

ESTRUCTURAS DE MODELOS Y TEORÍA DE HOMOTOPÍA  
EN CATEGORÍAS DE GRUPOS Y GRUPOIDES SIMPLICIALES

por  
Jesús García Miranda

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del profesor Dr. Antonio Rodríguez Garzón, titular de Álgebra de esta Universidad para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Sección Matemáticas) por la Universidad de Granada.

Vº Bº  
El Director



Aspirante al grado de Doctor



Quisiera agradecerle al director de esta Memoria, Antonio Rodríguez Garzón su orientación, apoyo y trabajo, pues sin ellos no se habría realizado la memoria.

Este agradecimiento quiero hacerlo extensivo al grupo de investigación dirigido por Antonio Martínez Cegarra en el cual he encontrado el material y las "ideas" necesarios para llevar a cabo este trabajo, y al Departamento de Álgebra dentro del cual me ha sido posible efectuarlo.

Por último quiero expresar el agradecimiento a mi familia pues siempre, y sobre todo en los momentos difíciles me ayudó y animó para que el trabajo pudiera salir adelante, y a todas las personas que de una u otra forma han colaborado o me han facilitado su realización.

# Índice General

0.1	Introducción . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Preliminares y algunos resultados para grupos y grupoides simpliciales</b>	<b>15</b>
1.1	Grupoides . . . . .	15
1.1.1	Definición y Ejemplos . . . . .	15
1.1.2	Construcciones en Grupoides . . . . .	19
1.2	Objetos simpliciales en una categoría . . . . .	23
1.2.1	La Categoría simplicial $\Delta$ . . . . .	23
1.2.2	Generalidades sobre conjuntos simpliciales . . . . .	26
1.2.3	Generalidades y algunos resultados sobre grupos simpliciales . . . . .	37
1.3	Grupoides simpliciales . . . . .	59
1.4	Categorías de modelos de Quillen: Ejemplos y construcciones . . . . .	64
1.4.1	Axiomática y ejemplos . . . . .	64
1.4.2	Teoría de homotopía en una categoría de modelos . . . . .	72
1.4.3	Algunas construcciones en la teoría de homotopía de conjuntos y grupos simpliciales . . . . .	75
1.4.4	Categorías simpliciales de modelos cerradas . . . . .	79
<b>2</b>	<b>Teoría de Homotopía para equivalencias débiles truncadas de Grupos Simpliciales</b>	<b>84</b>
2.1	Estructuras de modelos de Quillen para modelos algebraicos de espacios $r$ -conexos . . . . .	85
2.2	Estructuras de modelos de Quillen para $n$ -tipos de grupos simpliciales . . . . .	101
2.3	Estructuras de modelos para $(r, n)$ -tipos de Grupos Simpliciales	123
<b>3</b>	<b>Estructuras de modelos y teoría de homotopía en subcategorías de grupos simpliciales y categorías equivalentes</b>	<b>127</b>
3.1	Teoría de Homotopía de Serre en $[_r\mathbf{T}_n]$ . . . . .	128
3.2	Estructura simplicial de $[_r\mathbf{T}_n]$ . . . . .	138

3.3	Equivalencia de las categorías $[\mathbf{rT}_n]$ con otras categorías notables	145
3.4	Teoría de homotopía en categorías internas en grupos (trenzadas o simétricas)	152
3.5	Teoría de homotopía de módulos cruzados, 2-módulos cruzados reducidos y módulos cruzados estables	173
3.6	Clasificación de clases de homotopía de aplicaciones continuas	182
<b>4</b>	<b>Modelos algebraicos para n-tipos en categorías de diagramas</b>	<b>186</b>
4.1	Estructuras de modelos cerradas para categorías de diagramas	187
4.2	diagramas de n-tipos	195
4.3	n-tipos equivariantes	207

## 0.1 Introducción

Dados espacios topológicos  $X$  e  $Y$  y aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$ , el concepto de homotopía (o de deformación continua) de  $f$  a  $g$  determina una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$  y conduce a la llamada categoría de homotopía cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las clases de equivalencia, llamadas clases de homotopía, de aplicaciones continuas.

Una homotopía de  $f$  a  $g$  hace entonces indistinguibles estas aplicaciones para aquellos funtores, de dominio la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas y de rango una categoría algebraica (grupos, grupos abelianos, anillos,...), que son invariantes bajo deformación continua. El estudio de estos funtores es objetivo de la Topología Algebraica puesto que en su desarrollo, el camino que se ha mostrado rentable para abordar un problema geométrico de naturaleza global es convertirlo en primera instancia en un problema en teoría de homotopía para a continuación, utilizando funtores de la naturaleza aludida, convertirlo en un problema algebraico de eventual más fácil solución.

Ejemplos significativos de tales funtores los proporcionan los grupos de homotopía. Estos conducen al concepto de homotopía débil (una aplicación continua  $f$  es una equivalencia débil si  $\pi_0(f)$  es una biyección y para todo  $q \geq 1$ ,  $\pi_q(f)$  es un isomorfismo) y la relación de homotopía débil induce una relación de equivalencia para la que la clase de equivalencia de un espacio es llamada su "tipo de homotopía".

La obtención de modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios, i.e., objetos de naturaleza algebraica que reflejan oportunamente la geometría de los espacios en cuestión, y la clasificación del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de  $X$  en  $Y$  en términos de los correspondientes modelos de  $X$  e  $Y$ , son los objetivos principales de la Teoría de Homotopía Algebraica cuyo último fin es (Whitehead, [67]) "*to construct a purely algebraic theory which is equivalent to Homotopy Theory in the same way that Analytic is equivalent to pure Projective Geometry*".

Los primeros modelos con información algebraica sobre tipos de homotopía fueron los complejos de cadenas de grupos abelianos. En su estudio, que supuso una de las fuentes para el desarrollo del Algebra Homológica, tuvo lugar un proceso de algebraización de la teoría de homotopía topológica que, en primera instancia, produjo el concepto de homotopía entre aplicaciones de cadena. Así, al igual que para espacios y aplicaciones continuas entre ellos, una homotopía entre dos aplicaciones de cadena  $f, g : C \rightarrow D$  se define por una aplicación desde un cilindro,  $C \otimes I \rightarrow D$ , en donde

$I : \dots 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , con  $\delta_1(n) = (-n, n)$ , juega el papel de intervalo unidad.

Otros precedentes clásicos en esta problemática de modelar algebraicamente las categorías de espacios por su tipo de homotopía son, de una parte, los resultados de Eilenberg y Mac Lane, [34], mostrando a la categoría de grupos (abelianos si  $n \geq 2$ ) como una categoría de modelos algebraicos para la categoría de homotopía de CW-complejos con un único grupo de homotopía no nulo en dimensión  $n$ , y, de otra parte, los resultados de Mac Lane Whitehead, [52], en los que la categoría de módulos cruzados de grupos se mostró adecuada para modelar algebraicamente la categoría de homotopía de CW-complejos conexos con grupos de homotopía triviales en dimensiones mayores o iguales que 3 (la categoría de 2-tipos 0, en su terminología original, de 3-tipos).

La obtención de nuevos y más adecuados modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios ha conducido con el tiempo, de forma ineludible, al intento de “hacer teoría de homotopía” con tales modelos algebraicos con el objetivo ya apuntado de utilizar, para el estudio de objetos geométricos, métodos algebraicos que aparecen más simples que aquellos del mundo de los espacios y las aplicaciones entre ellos.

La categoría de grupos simpliciales proporciona modelos algebraicos para todos los tipos de homotopía conexos y constituye un ejemplo notable de categoría algebraica en la que se dispone de una teoría de homotopía útil en el sentido anteriormente aludido. Esta teoría fue desarrollada por Kan, [48], (c.f. Curtis [29]), mostrándose de hecho una equivalencia entre la categoría de homotopía de la categoría de grupos simpliciales (i.e., la localización con respecto a las equivalencias débiles de grupos simpliciales) y la categoría de homotopía standar de los CW-complejos conexos.

La teoría de homotopía en la categoría de grupos simpliciales, junto con la desarrollada en la categoría de conjuntos simpliciales, [54], constituyeron ejemplos importantes en donde asentar el desarrollo de una teoría de homotopía abstracta, esto es, el desarrollo en un ambiente categórico abstracto de los conceptos y resultados fundamentales que conforman tanto la teoría de homotopía topológica como la simplicial. Esta perspectiva permitiría entonces disponer, para el estudio de objetos geométricos, de lenguajes y herramientas que podrían ser más simples al ser tratados con esta óptica abstracta.

Distintas soluciones se han dado con el tiempo a esta problemática de, decidir en principio lo que debe ser una “teoría de homotopía abstracta”, y codificar a continuación al menos una parte de la estructura. En este sentido hay que citar los trabajos de Brown, [5], Anderson, [1], Heller, [43], y Baues, [3], pero sin duda, una de las teorías más extendidas y consistentes

es la desarrollada por Quillen, [58], en base a lo cual ha sido considerada con frecuencia como la teoría de homotopía abstracta básica a manejar. Destaquemos que los orígenes de la teoría de Quillen pueden ser encontrados en Teoría de Deformación y en el estudio de la cohomología de álgebras conmutativas, y que una vez desarrollada, dicha teoría fue usada de forma eficaz por Quillen, [59], en la obtención de nuevos resultados en teoría de homotopía racional.

El contexto abstracto en el que desarrollar la teoría de Quillen, llamado “categoría de modelos (para una teoría de homotopía)” es una categoría con límites y colímites y tres clases de morfismos, llamados fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, cuyo comportamiento e interacción están controlados por varios axiomas que proporcionan una medida para saber si, en un contexto dado, se tienen las bases sobre las que poder construir estructuras adicionales como cilindros, arcos, suspensiones, lazos, sucesiones (co)-fibración,..., que son construcciones consustanciales a la clásica teoría de homotopía de espacios. Además, en este ambiente abstracto se tiene un criterio, [58], para asegurar cuando, dadas dos categorías de modelos conectadas por un par de funtores adjuntos, se tiene una equivalencia entre las correspondientes teorías de homotopía asociadas en el sentido de que las categorías de homotopía sean equivalentes y además esta equivalencia preserve la estructura extra formada por los funtores lazo y suspensión y las familias de sucesiones fibración y cofibración.

En la presente memoria se estudia la existencia de estructuras de modelos de Quillen en diversas categorías de grupos y grupoides simpliciales y se analiza la teoría de homotopía resultante, mostrando de forma explícita determinadas construcciones que conforman esa teoría como las de cilindro, espacio de arcos, lazos,..., y estudiando en dichas categorías la relación de homotopía que se deduce de ellas.

La equivalencia anteriormente aludida entre la categoría de homotopía de la categoría de grupos simpliciales y la categoría de homotopía standar de los CW-complejos conexos puede verse con una perspectiva más general. La teoría desarrollada por Kan, [48], aparece como la teoría de homotopía asociada a la estructura de modelos en la categoría de los grupos simpliciales, [58], y la categoría de homotopía de los CW-complejos conexos es equivalente a la categoría de homotopía asociada a la estructura de modelos en la categoría de los espacios topológicos punteados y conexos por arcos, [58]. Entonces lo que realmente se tiene es una equivalencia entre las correspondientes teorías de homotopía asociadas a estas dos categorías de modelos ya que ambas son equivalentes, via el criterio antes citado para la equivalencia de teorías de homotopía, a la teoría de homotopía en la categoría de modelos que constituye la categoría de conjuntos simpliciales reducidos, [59].

El estudio de las propiedades geométricas de los espacios puede simplificarse si uno restringe, usando ese tipo de propiedades, la clase de los espacios a ser considerados. Esto puede hacerse imponiendo condiciones típicamente sobre el tipo de homotopía de los espacios, esto es, considerando por ejemplo espacios  $r$ -conexos,  $r \geq 0$ , (i.e., con  $\pi_q = 0$  para  $q \leq r$ ) o espacios  $n$ -coconexos,  $n \geq 0$ , (i.e., con  $\pi_q = 0$  para  $q \geq n$ ) lo que conduce de forma natural, o bien a la consideración de nociones más débiles de equivalencia débil en la categoría de grupos simpliciales y al desarrollo de una teoría de homotopía adecuada para ellas, o bien, a la consideración de otras categorías de tipo algebraico, que eventualmente pueden ser subcategorías de la categoría de los grupos simpliciales, que modelen tales espacios y en las que se tenga definida una noción de homotopía que corresponda a la de homotopía entre aplicaciones continuas de espacios.

La primera opción es analizada a lo largo del segundo capítulo de la Memoria, mostrando que existen correspondientes estructuras de modelos (i.e., adecuadas clases de fibraciones y cofibraciones) asociadas a estas nuevas nociones de equivalencias débiles de grupos simpliciales y estudiando las teorías de homotopía que de ellas se deducen. El caso más general que se estudia es el que se desprende del concepto de  $(r, n)$ -equivalencia débil de grupos simpliciales,  $0 \leq r \leq n$ , que es un morfismo  $f_\bullet$  de grupos simpliciales tal que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $r \leq q \leq n$ . El estudio de la estructura de modelos y, por tanto, de la teoría de homotopía asociada, se realiza combinando dos casos particulares, que son complementarios para  $n = r - 1$ , a saber el caso  $r = 0$  y el caso  $n \rightarrow \infty$ . Cuando ambos casos se dan simultáneamente, se obtiene por supuesto la estructura de modelos, y por tanto la teoría de homotopía, dada por Quillen a la categoría de grupos simpliciales, [58].

El caso  $n \rightarrow \infty$  es aquel en el que se consideran como equivalencias débiles aquellos morfismos  $f_\bullet$  tales que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $q \geq r$  y conduce a una estructura de modelos en la categoría de grupos simpliciales (la  $\bar{r}$ -estructura) cuya teoría de homotopía asociada es equivalente a la teoría de homotopía en la categoría de modelos que constituye la categoría de grupos simpliciales  $r$ -reducidos, [59], y por tanto equivalente a la teoría de homotopía en la categoría de los CW-complejos  $r$ -conexos. Notemos que este tipo de equivalencias débiles han sido usadas también recientemente en [39] para dotar a la categoría de espacios topológicos punteados de una nueva estructura de modelos.

El otro caso extremo es cuando  $r = 0$ . En este caso una equivalencia débil es un morfismo  $f_\bullet$  tal que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $0 \leq q \leq n$ , y la teoría de homotopía asociada a la correspondiente estructura de modelos (la  $n$ -estructura) es equivalente a la que se deduce de la estructura de modelos en la categoría de  $n$ -hipergrupoides de grupos, [22], y ambas lo son a la

teoría de homotopía en la categoría de CW-complejos  $n$ -coconexos (i.e., con  $\pi_q = 0$  para  $q \geq n$ ). Este tipo de equivalencias débiles fueron usadas en [44] para la obtención de una estructura de modelos en el contexto de complejos cruzados de grupos; también fueron usadas para tal fin en [37], en el contexto de espacios topológicos y conjuntos simpliciales, y en [20], en el contexto de grupos simpliciales. Un ajuste en la dimensión condujo en [38] a un concepto de fibración más natural y este mismo tipo de ajuste ha llevado, en el contexto de grupos simpliciales, a un concepto de fibración ( $n$ -fibración) distinto al usado en [20]. Notemos que las construcciones del cilindro y del espacio de arcos asociadas a esta estructura conducen a un concepto de homotopía entre morfismos de grupos simpliciales que es traducido en términos de truncación de lo que es una homotopía simplicial entre tales dos morfismos.

La obtención de nuevas categorías que modelen algebraicamente tipos de homotopía de espacios ha suscitado la atención de diferentes investigadores en los últimos 40 años y ha encontrado aportaciones recientes y relevantes como las dadas en [27], [8] o [23] que vienen a generalizar el ya comentado modelo de los módulos cruzados de Mac Lane-Whitehead, [52]. Estas categorías proporcionan por tanto soluciones a la segunda opción ya comentada de cómo abordar el estudio de clases restringidas (por su tipo de homotopía) de espacios.

Una de las teorías más atractivas en esta línea es la propuesta inicialmente por Loday, [50], la cual fue posteriormente completada y clarificada en sucesivos trabajos de Steiner, [62], Porter, [57], y Bullejos-Cegarra-Duskin, [19]. La categoría en cuestión es la categoría de los llamados  $\text{cat}^n$ -grupos; esta categoría modela todos los  $(n + 1)$ -tipos conexos y en ella se satisface un teorema generalizado de Van Kampen que permite ciertos cálculos aunque la posibilidad de hacer teoría de homotopía en ella reside en destacar una conveniente estructura homotópica que, por ejemplo, para el caso de una estructura de modelos de Quillen, solo existe a nivel de conjetura (véase [22]).

La categoría de módulos cruzados de grupos encontró otra generalización en la categoría de 2-módulos cruzados de Conduché, [27], (que proporciona modelos algebraicos para la categoría de 3-tipos) y estos resultados parciales fueron extendidos a todas dimensiones por Carrasco-Cegarra en [23], ofreciendo una nueva categoría, llamada de  $n$ -hipercomplejos cruzados, que proporciona modelos algebraicos para todos los  $(n + 1)$ -tipos conexos. Esta categoría es equivalente, via una versión no abeliana dada en [23] del clásico teorema de Dold-Puppe, a la subcategoría plena de la categoría de grupos simpliciales formada por aquellos grupos simpliciales con complejo de Moore trivial en dimensiones superiores a  $n$  (la categoría de  $n$ -hipergrupoides de grupos) y ésta última (y por tanto aquella también, via la equivalencia) fue

dotada de una estructura de modelos de Quillen en [22], en la que fibraciones y equivalencias débiles fueron definidas como en grupos simpliciales, y cuya teoría de homotopía asociada es equivalente a la de los CW complejos  $n$ -coconexos.

El proceso recién aludido es, en algún sentido, dual al realizado por Quillen en [59] al dotar a la categoría de grupos simpliciales  $r$ -reducidos de una estructura de modelos, puesto que esta categoría es justamente la subcategoría plena de la de grupos simpliciales cuyos objetos tienen complejo de Moore trivial en dimensiones menores que  $r$  y la estructura en este caso fue dada definiendo cofibraciones y equivalencias débiles como en grupos simpliciales. Hemos de destacar no obstante que, en el marco del estudio sobre teoría de homotopía racional realizado en [59], la estructura definida en la categoría de grupos simpliciales  $r$ -reducidos aparece en general relativizada con respecto a un subconjunto multiplicativamente cerrado  $S$  de  $\mathbb{Z}$ . Recordemos que, dados espacios punteados 1-conexos  $X$  e  $Y$ , una equivalencia homotópica racional entre ellos es una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $\pi_*(f) \otimes \mathbb{Q} : \pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  es un isomorfismo y la localización de la categoría de los espacios 1-conexos con respecto a las equivalencias homotópicas racionales es la llamada categoría de homotopía racional. Mas en general, si  $X$  e  $Y$  son  $(r - 1)$ -conexos,  $r \geq 2$ , y  $S$  es un subconjunto multiplicativo de  $\mathbb{Z}$ , una  $S$ -equivalencia entre  $X$  e  $Y$  es una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  que induce isomorfismos para el funtor  $S^{-1}\pi_*$ ; la localización de la categoría de los espacios  $(r - 1)$ -conexos con respecto a las  $S$ -equivalencias es llamada la categoría de homotopía módulo la clase de los grupos abelianos  $S$ -torsión y su estudio es la “Teoría de homotopía de Serre módulo  $\mathcal{C}$ ” donde  $\mathcal{C}$  es la clase de los grupos abelianos de  $S$ -torsión, [61], y en [59] Quillen demostró que esta teoría de homotopía podía realizarse como la teoría de homotopía asociada a una conveniente categoría de modelos de grupos simpliciales. Mas explícitamente, Quillen demostró en [59] que la teoría de homotopía racional (que es un caso particular cuando  $r = 2$  y  $S = \mathbb{Z} - 0$ ) es equivalente a la teoría de homotopía de la categoría de modelos cerrada que constituye la categoría de grupos simpliciales reducidos y, en general (i.e.,  $r \geq 2$  y cualquier  $S$ ) la teoría de homotopía es equivalente a la teoría en la categoría de modelos que constituye la categoría de grupos simpliciales  $(r - 1)$ -reducidos con estructura relativa a  $S$ .

Las dos subcategorías comentadas de la de grupos simpliciales (la de  $n$ -hipergrupoides y la de grupos simpliciales  $r$ -reducidos) pueden ser tratadas como casos particulares y extremos ( $r = 0$  o  $n \rightarrow \infty$ ) de una situación más general consistente en considerar, para cada  $r, n$ ,  $0 \leq r \leq n$ , la subcategoría plena de la de grupos simpliciales formada por aquellos objetos con complejo de Moore trivial en dimensiones menores que  $r$  y mayores que  $n$ . Dotar a

estas categorías de una estructura de modelos y estudiar la correspondiente teoría de homotopía asociada es objeto de estudio en la primera sección del tercer capítulo de la Memoria. Además, para disponer de la perspectiva antes comentada, el estudio es abordado con la generalidad que supone relativizar la teoría con respecto a un subconjunto multiplicativo  $S$  de  $\mathbb{Z}$ .

Dentro de la problemática general de encontrar modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios, es un problema clásico, con repercusiones claras en el ámbito de la cohomología no abeliana, [17], y con soluciones parciales a lo largo del tiempo, [18], [25], la clasificación y descripción algebraica de los CW-complejos punteados conexos por arcos con dos únicos grupos de homotopía no nulos que son además consecutivos y la clasificación del conjunto de clases de homotopía entre tales tipos de espacios. El primero de estos problemas encuentra solución via las categorías  $[_r\mathbf{T}_n]$  para  $n = r + 1$ ,  $r \geq 0$ , y la equivalencia de estas, para determinados valores de  $r$ , con otras categorías de tipo algebraico y más fáciles de manejar. Destaquemos que muy recientemente (véase [24],[25]) han sido dadas otras soluciones para este mismo tipo de problemas. La teoría de homotopía que se deduce, vía las equivalencias citadas, en categorías como la de módulos cruzados, cat-grupos,... es explicitada entonces en el resto del Capítulo.

Junto a las generalizaciones, desde el punto de vista dimensional, de los resultados ya citados de Eilenberg-Mac Lane y Mac Lane-Whitehead, éstos también han sido generalizados en los últimos años en el sentido de encontrar las correspondientes versiones equivariantes, esto es, dar modelos algebraicos para la teoría de homotopía de espacios, sobre los que actúa un grupo  $H$ , y cuyos grupos de homotopía se anulan en dimensiones  $\geq 3$ .

El proceso que conduce a la consideración de modelos algebraicos para  $H$ -espacios requiere en principio la generalización de los resultados clásicos al caso no punteado y no necesariamente conexo. Así, para el caso de 1-tipos, la categoría de grupos se sustituye por la de grupoides obteniendo entonces una equivalencia de categorías de homotopía (véase [51],[64]) entre la de 1-tipos de homotopía equivariante y la de funtores sobre una conveniente categoría órbita y valuados en grupoides. Para el caso de 2-tipos, Moerdijk-Svensson, [55], sustituyen módulos cruzados de grupos por 2-grupoides (un módulo cruzado es equivalente a un 2-grupoide con un solo objeto) y obtienen la versión equivariante del resultado de Mac Lane-Whitehead mostrando una equivalencia entre las categorías de 2-tipos de homotopía equivariantes y la de homotopía de la de diagramas de 2-grupoides sobre la categoría órbita del grupo  $H$ .

El objetivo del cuarto capítulo de la Memoria es dar una versión en dimensiones superiores de este análogo equivariante del resultado de Mac Lane-Whitehead. El punto de partida es el resultado de Dwyer-Kan, [31], que

muestra a la categoría de grupoides simpliciales (con objeto de objetos constante) como una categoría que modela todos los tipos de homotopía. Entonces, utilizando una conveniente generalización del funtor complejo de Moore a esa categoría, se considera la subcategoría plena formada por aquellos objetos que tienen complejo de Moore trivial en dimensiones  $\geq n+1$ ,  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . Esta categoría proporciona una versión-no-conexa de la de modelos algebraicos de  $(n+1)$ -tipos dada en [23] y es equivalente, para  $n=0$ , a la de grupoides (1-tipos) y, para  $n=1$ , a la de 2-grupoides (2-tipos). De hecho se muestra que  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  es una categoría de modelos cerrada y que esta estructura coincide para  $n=1$ , via la equivalencia citada, con la dada a la categoría de 2-grupoides en [55]. Todos estos resultados se generalizan a las respectivas categorías de diagramas y entonces, combinando estos resultados para diagramas con la conocida equivalencia entre la categoría de  $H$ -espacios y la de diagramas de espacios indizada por la categoría órbita del grupo  $H$ , se obtiene una equivalencia entre la categoría de homotopía de la de diagramas en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  indizada por la categoría órbita del grupo y la de  $(n+1)$ -tipos de homotopía equivariante,  $n \geq 1$ . En particular, para  $n=1$ , se termina obteniendo el resultado de Moerdijk-Svensson sobre 2-tipos equivariantes, [55].

Los resultados comentados en este prólogo aparecen contenidos en los cuatro capítulos de que consta la presente Memoria; a continuación damos una descripción más detallada de los contenidos de cada uno de ellos.

El primer Capítulo constituye un compendio de resultados, unos bien conocidos y que pueden encontrarse en la literatura, otros que, aunque también conocidos, no aparecen expresamente en la bibliografía básica que usualmente se maneja y, por último, hay también resultados técnicos novedosos que son usados de forma frecuente a lo largo de la Memoria. En cualquiera de los casos, hemos considerado oportuno su inclusión en este primer capítulo para dotar a la Memoria del mayor grado de autosuficiencia en cuanto a los contenidos.

La primera sección, "Grupoides", hace un rápido repaso sobre las principales construcciones en esta categoría que nos serán de utilidad en el posterior estudio de la categoría de grupoides simpliciales y de determinadas categorías suyas.

En la segunda sección, comenzamos analizando la categoría simplicial  $\Delta$  y la de funtores sobre ella, traduciendo tal cosa en la terminología y notación usual para los objetos simpliciales en una categoría y los morfismos entre ellos. Asimismo se enuncia con esta generalidad el concepto de homotopía entre morfismos y se dan dos formulaciones equivalentes (Proposición 1.2.1). A continuación, en 1.2.2., se realiza un rápido recorrido sobre las principales definiciones y construcciones en la categoría de conjuntos simpliciales

((co)-nucleo simplicial, cara abierta, funtores (co)esqueleto y truncación, fibraciones de Kan, grupos de homotopía de un conjunto simplicial de Kan,...) y se hace un análisis un poco más detallado de los conjuntos simpliciales  $\Delta[n]$ ,  $\dot{\Delta}[n]$  y  $\Delta[n, k]$ . Especial atención se dedica en este apartado al conjunto simplicial (espacio funcional)  $L_{\bullet}^{K_{\bullet}}$  y, en particular, al conjunto  $L_{\bullet}^I$ , donde  $I = \Delta[1]$ , que es identificado con un conjunto simplicial de fácil manejo (proposición 1.2.10) que permite una nueva formulación del concepto de homotopía entre aplicaciones simpliciales (proposición 1.2.11). El apartado 1.2.3 es dedicado a la categoría de grupos simpliciales. Se empieza recordando el funtor complejo de Moore y los grupos de homotopía de un grupo simplicial y también cómo las construcciones realizadas en conjuntos (núcleo simplicial,...) se adaptan al caso de grupos. Especial dedicación se presta a la caracterización, para un morfismo  $f_{\bullet}$ , de la condición de ser fibración de Kan en una dimensión fijada y la de que el morfismo  $\pi_n(f_{\bullet})$  sea inyectivo o sobreyectivo (lemas 1.2.23, 1.2.24 y 1.2.25). Posteriormente se hace hincapié en la estructura simplicial en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y se reformula la noción de homotopía entre morfismos simpliciales (ver nota posterior a la proposición 1.2.31) y se concluye recordando las propiedades más importantes de dos subcategorías de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que son de especial relevancia en el desarrollo de la Memoria, a saber la de  $n$ -hipergrupoides de grupos y la de grupos simpliciales  $r$ -reducidos.

La tercera sección del primer Capítulo se ocupa de la subcategoría plena de la de grupoides simpliciales cuyos objetos tienen conjunto simplicial de objetos constante. Su relación con la categoría de conjuntos simpliciales via la adjunción  $G \vdash \bar{W}$  es explicitada salvando los errores tipográficos de su exposición original, [31]. La generalización del funtor complejo de Moore a esta categoría conduce a la consideración de las categorías  $\mathbf{T}_{n|}(\mathbf{Gpd})$  que serán objeto de estudio en el último Capítulo.

En la última sección se empieza recordando la axiomática de categoría de modelos cerrada y se aportan los ejemplos más típicos de tales tipos de categorías. En la demostración de la axiomática para estas categorías, es frecuente el recurso al conocido "argumento del objeto pequeño" que se asienta en la existencia de objetos secuencialmente pequeños. El reconocimiento de tales objetos en diversas categorías ha parecido oportuno también ofrecerlo aquí. A continuación se hace una exposición rápida de las construcciones homotópicas que pueden realizarse en el ambiente abstracto de una categoría de modelos cerrada y, seguidamente, se particularizan algunas de estas construcciones a los casos de conjuntos y grupos simpliciales. Finalmente se recuerda el concepto de categoría simplicial de modelos cerrada, poniendo de manifiesto que la estructura simplicial estudiada, tanto en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$

como en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , es compatible con la estructura de modelos. Este hecho será utilizado más adelante para mostrar nuevos ejemplos de categorías simpliciales de modelos cerradas.

El segundo Capítulo constituye una generalización de la estructura de modelos de Quillen en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y de la teoría de homotopía asociada. La generalización parte de considerar nociones más débiles de lo que es una equivalencia débil de grupos simpliciales, lo cual se hace truncando convenientemente este concepto. La búsqueda de nociones adecuadas de fibración y cofibración para estas nuevas equivalencias débiles y el estudio de la teoría de homotopía asociada a la estructura de modelos que ellas conforman ocupan las tres secciones del Capítulo,

En 2.1 se estudia la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  asociada a la  $\bar{r}$ -estructura,  $r \geq 0$ , que es aquella en la que las equivalencias débiles son los morfismos  $f_\bullet$  tales que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo,  $q \geq r$ . Las fibraciones y fibraciones triviales son caracterizadas en términos de propiedades de levantamiento y del complejo de Moore y tras demostrar (Teorema 2.1.6) que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  con esta estructura es una categoría de modelos cerrada, se caracterizan las cofibraciones y los objetos cofibrantes (Proposición 2.1.8). Ésto permite identificar ciertas construcciones homotópicas como las de cilindro, espacio de arcos,..., con respecto a esta estructura y comparar la teoría de homotopía resultante con la teoría de homotopía en la categoría de los grupos simpliciales  $r$ -reducidos (Teorema 2.1.13).

En la sección 2.2 se aborda el mismo problema que en 2.1 pero desde un punto de vista complementario o dual, a saber el de considerar como equivalencias débiles en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  aquellos morfismos  $f_\bullet$  tales que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo,  $0 \leq q \leq n$  (ver Proposición 2.2.2). Con convenientes nociones de fibración y cofibración se dispone de una estructura (la  $n$ -estructura) que ciertamente convierte a  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  en una categoría de modelos cerrada (Teorema 2.2.6) para lo cual se utilizan caracterizaciones, tanto de las fibraciones como de las fibraciones triviales, en términos de propiedades de levantamiento y en términos del complejo de Moore (Proposiciones 2.2.2, 2.2.4 y 2.2.5). Con las definiciones dadas, ha sido también posible caracterizar a los objetos  $n$ -cofibrantes (Proposición 2.2.8) y a las  $n$ -cofibraciones (Proposición 2.2.9 y nota posterior) y ésto ha permitido identificar construcciones homotópicas típicas (cilindros, espacios de arcos,...) para la  $n$ -estructura (Corolario 2.2.14, proposiciones 2.2.17 y 2.2.18) y también, caracterizar la relación de homotopía asociada en los términos justos de truncar una homotopía simplicial (Proposición 2.2.20).

Por último, en la sección 2.3, se combinan los resultados obtenidos en las dos secciones precedentes para obtener una estructura de modelos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (teorema 2.3.5) para la que las equivalencias débiles son aquellos

morfismos  $f_\bullet$  tales que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo,  $r \leq q \leq n$ . Se tiene así una estructura que generaliza en el sentido más amplio la estructura clásica de Quillen y cuya teoría de homotopía asociada es también analizada al final de la sección.

El tercer capítulo se ocupa de las subcategorías  $[_r\mathbf{T}_n]$  de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que son aquellas cuyos objetos tienen complejo de Moore trivial en dimensiones menores que  $r$  y mayores que  $n$ . A estas categorías se les dota de una estructura de modelos y se estudia la teoría de homotopía asociada y, para valores particulares de  $r$  y  $n$ , se muestra la equivalencia de  $[_r\mathbf{T}_n]$  con categorías notables en las que, vía la equivalencia, se estudia la correspondiente teoría de homotopía.

En la primera sección se considera la categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$  como una subcategoría de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  y considerando en ésta la estructura de modelos, relativa a un subconjunto multiplicativo  $S$  de  $\mathbb{Z}$  dada por Quillen en [59] se tiene (ver teorema 3.1.6) que  $[_r\mathbf{T}_n]$  es una categoría de modelos cerrada (a la que se denota  $[_r\mathbf{T}_n^S]$ ). Para ello, previamente se caracterizan las  $S$ -fibraciones y  $S$ -fibraciones triviales en términos del complejo de Moore y los grupos de homotopía y, posteriormente, se caracterizan las  $S$ -cofibraciones y los objetos  $S$ -cofibrantes (Proposición 3.1.7). Ésto permite entonces hacer explícitas construcciones en la teoría de homotopía asociada como las de espacios de arcos (proposición 3.1.9) y cilindro (proposición 3.1.14).

En la sección 3.2 se muestra que la categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$  es una categoría simplicial y que esta estructura es compatible con la estructura de modelos dada en la sección anterior cuando  $S = \{1\}$  (ver teorema 3.2.3). Para ello ha sido necesario previamente estudiar el carácter simplicial de la  $\bar{r}$ -estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver proposición 3.2.1). Finalmente, en el teorema 3.2.4 se describe la categoría  $Ho(_r\mathbf{T}_n^S)$ .

La sección 3.3 está dedicada a mostrar la equivalencia de las categorías  $[_r\mathbf{T}_n]$ , para valores particulares de  $r$  y  $n$  con categorías bien conocidas como son las de módulos cruzados de grupos, cat-grupos, 2-módulos cruzados reducidos, cat-grupos trenzados (braided), módulos cruzados estables y cat-grupos simétricos. A continuación, en 3.4 y 3.5 se muestra como es la estructura de modelos, vía las equivalencias, en estas categorías y se dan de forma explícita en ellas construcciones homotópicas típicas como las de cilindro (proposición 3.4.9), espacio de arcos (proposiciones 3.4.3 y 3.5.1 corolario 3.4.4), funtor de lazos, ... Finalmente se presta atención a la relación de homotopía que se deduce de la estructura de modelos en estas categorías dando caracterizaciones sencillas de la existencia de una homotopía entre morfismos en la categoría (proposiciones 3.4.10 y 3.5.2, corolarios 3.4.11, 3.4.17 y 3.5.3).

En la última sección del capítulo se aborda el problema de la clasificación del conjunto  $[X, Y]$  de clases de homotopía de aplicaciones continuas entre dos

CW-complejos  $X$  e  $Y$   $r$ -conexos y  $n$ -coconexos. En el caso general se da una descripción algebraica de tal conjunto en términos de clases de homotopía de morfismos de grupos simpliciales y para  $n = r + 1$ ,  $r \geq 1$  se da una clasificación en términos especialmente sencillos que recoge como ejemplos diversos resultados al respecto que son bien conocidos.

Finalmente, en el cuarto Capítulo, se aborda el problema de dar una versión, en todas dimensiones, del resultado de Moerdijk-Svensson acerca de la clasificación de 2-tipos de homotopía equivariantes. Para ello se empieza estudiando, en la sección 4.1, la categoría de  $I$ -diagramas sobre una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  y la existencia, bajo ciertas condiciones, de una estructura de modelos en ella (Teorema 4.1.9).

En la sección 4.2 se considera la subcategoría de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , denotada  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ , cuyos objetos tiene complejo de Moore trivial en dimensiones  $\geq n + 1$  (es decir, con solo identidades en tales dimensiones). Esta es una subcategoría reflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  lo que permite dotarla, utilizando la estructura en esta última categoría, de una estructura de modelos (Teorema 4.2.2). En particular, cuando  $n = 1$ , la categoría  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  es equivalente a la categoría  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  de 2-grupoides y, via la equivalencia, la estructura de modelos coincide con la dada a  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  en [55] (Teorema 4.2.10). Volviendo a la situación general, al final de la sección se muestra que los resultados obtenidos se generalizan a las correspondientes categorías de diagramas (Teorema 4.2.11) y entonces combinando estos resultados para diagramas con la equivalencia entre la categoría de  $H$ -espacios y la de diagramas de espacios indizada por la categoría órbita del grupo  $H$ , se obtiene, ya en la sección 4.3, una equivalencia (Teorema 4.3.3) entre la categoría de homotopía de la de diagramas en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  indizada por la categoría órbita del grupo  $H$  y la de  $(n + 1)$ -tipos de homotopía equivariante,  $n \geq 1$ . Para  $n = 1$  se obtiene entonces el resultado de Moerdijk-Svensson (corolario 4.3.4).

# Capítulo 1

## Preliminares y algunos resultados para grupos y grupoides simpliciales

En este primer capítulo se ofrece un resumen de una serie de resultados y construcciones sobre conjuntos, grupos y grupoides simpliciales (para lo cual se hace primero un breve estudio de la categoría de grupoides) a la vez que se introduce la notación que se va a utilizar en el resto de la memoria. Se hace especial hincapié en la estructura simplicial de las categorías antes mencionadas así como en algunas construcciones homotópicas y la relación de homotopía entre morfismos.

### 1.1 Grupoides

A lo largo de esta primera sección haremos un breve repaso de la categoría de grupoides y de ciertas construcciones en ella. Un detallado estudio puede verse en [6], [45].

#### 1.1.1 Definición y Ejemplos

Un grupoide es una categoría en la que todo morfismo es invertible.

Si  $\mathcal{G}$  es un grupoide,  $O$  es el conjunto de objetos y  $X$  es el conjunto de morfismos, representaremos  $\mathcal{G}$  mediante un diagrama

$$\mathcal{G} \equiv \left( X \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} O \right)$$

o simplemente  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{smallmatrix} O$ , donde  $s$  y  $t$  son las aplicaciones dominio y codominio e  $I$  es la aplicación que lleva cada objeto en la identidad sobre él mismo. Es claro que  $sI = tI = Id_O$ . En ocasiones trabajaremos como si  $O$  fuera un subconjunto de  $X$ , con la inclusión dada por la aplicación  $I$ .

La composición es entonces una aplicación  $m : X \times_O X \rightarrow O$ , y representaremos por  $x \circ y$  ó  $xy$  a la imagen bajo  $m$  del par  $(x, y)$ .

Si  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{smallmatrix} O$  es un grupoide y  $A, B \in O$ , llamaremos  $X(A, B)$  o  $Hom_{\mathcal{G}}(A, B)$  al conjunto de morfismos  $f : A \rightarrow B$ . Si  $A = B$  es fácil ver que este conjunto tiene estructura de grupo, al que se llama "grupo de automorfismos de  $\mathcal{G}$  en  $A$ ".

Denotaremos por **Gpd** a la categoría que tiene como objetos los grupoides y como morfismos los funtores entre ellos.

Notemos que si  $\mathcal{G} : X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{smallmatrix} O$  y  $\mathcal{G}' : X' \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{smallmatrix} O'$  son dos grupoides, un funtor  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  consiste de dos aplicaciones  $f_0$  y  $f_1$

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_O X & \xrightarrow{m} & X & \begin{smallmatrix} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{smallmatrix} & O \\
 \downarrow (f_1, f_1) & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
 X' \times_{O'} X' & \xrightarrow{m'} & X' & \begin{smallmatrix} \xleftarrow{I'} \\ \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{smallmatrix} & O'
 \end{array}$$

de forma que se verifiquen las siguientes igualdades:  $f_0 s = s' f_1$ ,  $f_0 t = t' f_1$ ,  $f_1 I = I' f_0$ ,  $f_1 m = m'(f_1, f_1)$ .

Veamos algunos ejemplos de grupoides:

1. El grupoide vacío  $\emptyset$ , sin objetos y sin morfismos. Este grupoide es el objeto inicial en la categoría **Gpd**.
2. El grupoide  $\{*\}$ , con un sólo objeto y un único morfismo (la identidad). Este grupoide es final en la categoría **Gpd**.
3. El grupoide "unidad", o grupoide intervalo  $I$ , con dos objetos 0 y 1, y cuatro morfismos: las dos identidades, un morfismo  $i : 0 \rightarrow 1$  y su inverso.
4. Si  $O$  es un conjunto, el grupoide discreto sobre  $O$  es aquel grupoide cuyo conjunto de objetos y de morfismos es  $O$  y las aplicaciones dominio y codominio son la identidad. Representaremos este grupoide como  $O \equiv O$ , o  $Disc(O)$ . Notemos que  $Disc$  define un funtor  $Set \rightarrow$

**Gpd** que convierte a la categoría de conjuntos en una subcategoría plena de **Gpd**.

5. Sea  $O$  un conjunto. Llamaremos  $\Delta(O)$  al grupoide que tiene como objetos el conjunto  $O$  y como morfismos el conjunto  $O \times O$ . Las aplicaciones dominio y codominio son la primera y la segunda proyección. La aplicación identidad es la diagonal y la composición la única posible. Esto define un funtor  $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ .
6. Si  $G$  es un grupo, entonces  $G$  puede ser visto como un grupoide con un solo objeto, donde la composición viene dada por la operación del grupo. De esta forma, la categoría de grupos puede ser vista como una subcategoría plena de la categoría de grupoides.
7. Grupoide fundamental de un espacio topológico:

Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y$  un subespacio suyo no vacío. Construimos el grupoide fundamental de  $X$  sobre  $Y$ ,  $\pi_1(X, Y)$ .

El conjunto de objetos es el conjunto  $Y$  y el conjunto de morfismos es el conjunto de aplicaciones continuas  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  verificando que  $\alpha(0), \alpha(1) \in Y$ , módulo la siguiente relación de equivalencia:

$\alpha \sim \beta$  si y sólo si existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que:

- $H(t, 0) = \alpha(t)$  y  $H(t, 1) = \beta(t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$
- $H(0, s) = \alpha(0)$  y  $H(1, s) = \alpha(1)$ ,  $\forall s \in [0, 1]$

Las aplicaciones dominio y codominio están definidas como sigue:

$$s([\alpha]) = \alpha(0) \quad t([\alpha]) = \alpha(1)$$

y la identidad por  $I(y) = [c_y]$  donde  $c_y(t) = y \forall t \in [0, 1]$

Si tenemos  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, Y)$ , tales que  $t[\alpha] = s[\beta]$ , definimos la composición como

$$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta] \quad \text{donde } (\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si  $Y = \{x_0\}$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo fundamental de  $X$  con base en  $x_0$ , y si  $Y = X$ ,  $\pi_1(X, X) = \pi_1(X)$  es el grupoide fundamental de  $X$ .

Notemos que si tomamos  $X = I = [0, 1]$  e  $Y = \partial X = \{0, 1\}$ , entonces  $\pi_1(X, Y)$  es justamente el grupoide intervalo definido anteriormente.

Sea  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[s]{t} O$  un grupoide. En  $O$  definimos la relación  $A \sim B$  si  $X(A, B) \neq \emptyset$ , en cuyo caso diremos que  $A$  y  $B$  están en la misma componente. Notemos que esta relación es de equivalencia. Al conjunto cociente lo llamaremos conjunto de componentes (conexas) de  $\mathcal{G}$  y lo denotaremos por  $\pi_0(\mathcal{G})$ . Es fácil observar que  $\pi_0(\mathcal{G})$  podría ser calculado como  $\pi_0(\mathcal{G}) = \text{Coigu}(s, t)$ . Si  $\pi_0(\mathcal{G}) = \{*\}$ , diremos que  $\mathcal{G}$  es conexo. Por el contrario, si  $\pi_0(\mathcal{G}) = O$ , diremos que  $\mathcal{G}$  es totalmente desconexo.

Si ahora  $A \in O$ , llamaremos  $\pi_1(\mathcal{G}, A)$  al grupo de automorfismos de  $\mathcal{G}$  en  $A$ . Es conocido que si  $A$  y  $B$  están en la misma componente, entonces  $\pi_1(\mathcal{G}, A) \cong \pi_1(\mathcal{G}, B)$ , y el isomorfismo está dado por

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{G}, A) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{G}, B) \\ y & \longmapsto & xyx^{-1} \end{array}$$

donde  $x$  es un morfismo cualquiera  $x : A \rightarrow B$ .

Como consecuencia, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{G}, A) & \longrightarrow & X(A, B) \\ y & \longmapsto & xy \end{array}$$

es una biyección.

Es claro que si  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo en la categoría **Gpd**, entonces  $f$  induce una aplicación  $\pi_0(f) : \pi_0(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{H})$  (ya que si  $A$  y  $B$  están en la misma componente, también lo están  $f_0(A)$  y  $f_0(B)$ ), y para cada  $A \in O$  un morfismo de grupos  $\pi_1(\mathcal{G}, A) \rightarrow \pi_1(\mathcal{H}, f(A))$  al que llamaremos  $\pi_1(f, A)$  o simplemente  $\pi_1(f)$ .

Las equivalencias de categorías pueden caracterizarse ahora en función de estos morfismos:

**Proposición 1.1.1.** Sean  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[s]{t} O$  y  $\mathcal{H} : Y \xrightarrow[s]{t} P$  dos grupoides y  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un funtor entre ellos. Entonces  $f$  es una equivalencia de categorías si y sólo si  $\pi_0(f)$  es biyectiva y  $\pi_1(f, A)$  es un isomorfismo para todo  $A \in O$ .

*Demostración:* Sabemos que una equivalencia de categorías es un funtor pleno, fiel y denso. Decir que  $f$  es pleno y fiel es equivalente a decir que para cada  $A, B \in O$ , la aplicación  $f_1 : X(A, B) \rightarrow Y(f_0(A), f_0(B))$  es biyectiva.

Para demostrar la proposición se utilizan los siguientes hechos de fácil comprobación:

- a)  $\pi_1(f, A)$  es isomorfismo si y sólo si para cada  $B \in O$  que esté en la misma componente que  $A$ , la aplicación  $f_1 : X(A, B) \rightarrow Y(f_0(A), f_0(B))$  es biyectiva.

- b)  $\pi_0(f)$  es inyectiva si y sólo si para cada  $A, B \in O$  que estén en componentes distintas, la aplicación  $f_1 : X(A, B) \rightarrow Y(f_0(A), f_0(B))$  es biyectiva (en este caso, ambos conjuntos son el vacío).
- c)  $\pi_0(f)$  es sobreyectiva si y sólo si  $f$  es denso, es decir, para cada  $B \in P$  existe  $A \in O$  tal que  $f(A)$  y  $B$  están en la misma componente, es decir, son isomorfos. ■

### 1.1.2 Construcciones en Grupoides

Damos ahora algunas construcciones categóricas en grupoides que nos mostrarán que la categoría de grupoides es completa y cocompleta. Aunque este resultado puede obtenerse como resultado de teoremas generales de teoría de categorías y de su relación con la categoría de grafos, preferimos dar explícitamente las construcciones. Para más detalles ver [45].

#### Cociente de grupoides

Comenzamos estudiando el grupoide cociente para lo cual necesitamos partir del concepto de subgrupoide normal. Damos previamente la definición de núcleo de un morfismo de grupoides.

**Definición 1.1.2.** Sea  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un morfismo en la categoría  $\mathbf{Gpd}$ . Se define  $\text{Ker}(f)$  como el subgrupoide de  $\mathcal{G}$  formado por aquellas morfismos  $x$  tales que  $fx$  es una identidad en  $\mathcal{H}$ .

Notemos que el conjunto de objetos de  $\text{Ker}(f)$  es igual al conjunto de objetos de  $\mathcal{G}$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[s]{t} O$  un grupoide. Un subgrupoide  $\mathcal{H} :$

$Y \xrightarrow[s]{t} P$  de  $\mathcal{G}$  es una subcategoría que es cerrada para inversos. Diremos que  $\mathcal{H}$  es un subgrupoide normal si:

- i)  $\mathcal{H}$  contiene todas las identidades (o lo que es equivalente,  $O = P$ ).
- ii) Para cada  $x \in X(A, B)$  e  $y \in Y(A, A)$ ,  $xyx^{-1} \in X(B, B)$ .

Como ejemplos, tenemos:

1. Si  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[s]{t} O$  es un grupoide, entonces el subgrupoide formado sólo por las identidades, es decir,  $O \equiv O$ , es un subgrupoide normal.

2. Si  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo en la categoría **Gpd**, entonces  $\text{Ker}(f)$  es un subgrupoide normal de  $\mathcal{G}$ .

Supongamos ahora que tenemos un grupoide  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[s]{t} O$  y un subgrupoide normal suyo  $\mathcal{H} : Y \xrightarrow[s]{t} O$ . El grupoide cociente  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  es el grupoide definido como sigue:

- El conjunto de objetos es  $\pi_0(\mathcal{H})$
- El conjunto de morfismos es  $X$  módulo la relación de equivalencia  $\equiv_Y$ , definida por:

$x \equiv_Y x'$  si existen  $y, y' \in Y$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ y \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow y' \\ & x' & \end{array}$$

es conmutativo.

Es evidente que si  $x \equiv_Y x'$  entonces  $s(x)$  y  $s(x')$  dan el mismo elemento en  $\pi_0(\mathcal{H})$ , al igual que  $t(x)$  y  $t(x')$ , lo que nos permite definir  $\bar{s}, \bar{t} : X/\equiv_Y \rightarrow \pi_0(\mathcal{H})$ . El morfismo identidad se define de manera obvia.

- La composición se define como sigue. Sean  $x, y \in X$  tales que  $\bar{t}[x] = \bar{s}[y]$ . Esto quiere decir que existe  $z \in Y(t(x), s(y))$ . Se define entonces  $[y] \circ [x] = [yzx]$ .

Es rutinario comprobar que esta composición está bien definida, y convierte a  $X/\equiv_Y \xrightarrow[\bar{t}]{\bar{s}} \pi_0(\mathcal{H})$  en un grupoide, al que denotaremos

$\mathcal{G}/\mathcal{H}$ , y que la proyección en objetos y en morfismos induce un functor  $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ .

Esta construcción verifica la siguiente propiedad universal.

**Proposición 1.1.4.** (*Propiedad universal del grupoide cociente*)

Sea  $\mathcal{G}$  un grupoide y  $\mathcal{H}$  un subgrupoide normal. Sea  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$  un morfismo de grupoides tal que  $\mathcal{H} \subseteq \text{Ker}(f)$ . Entonces existe un único morfismo de grupoides  $\hat{f} : \mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  tal que  $\hat{f}\pi = f$ . Además,  $\text{Ker}(\hat{f}) = \text{Ker}(f)/\mathcal{H}$ .

## Límites y colímites en grupoides

No es difícil comprobar que la categoría de grupoides es cerrada para límites y colímites. Nos disponemos a probarlo dando la construcción explícita de éstos. En el caso de los límites la situación es muy sencilla, pues se calculan prácticamente como en conjuntos, situación que no se da en los colímites.

**Proposición 1.1.5.** *i) Sean  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[t]{s} O$  y  $\mathcal{H} : Y \xrightarrow[t]{s} P$  dos grupoides y  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  dos morfismos entre ellos. Entonces el subgrupoide de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}' : X' \xrightarrow[t]{s} O'$  donde  $X' = \{x \in X / f_1(x) = g_1(x)\}$  y  $O' = \{A \in O / f_0(A) = g_0(A)\}$  es el igualador de  $f$  y  $g$ .*

*ii) Si  $(\mathcal{G}_\alpha : X_\alpha \xrightarrow[t]{s} O_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  es una familia de grupoides, el grupoide que tiene como objetos  $\prod_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha$  y como morfismos  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ , con la composición y aplicaciones dominio y codominio definidos coordenada a coordenada, es un producto para la familia en la categoría de grupoides.*

Por tanto deducimos que la categoría de grupoides es cerrada para límites, y éstos se calculan, tanto en objetos como en morfismos, igual que se hace en conjuntos. Ocurre lo mismo con los coproductos. Para calcular el coproducto de una familia de grupoides, basta hacer la unión disjunta de los objetos y la unión disjunta de los morfismos, y componer de la única forma posible. La construcción de los coigualadores es bastante más compleja y requiere una descripción en función de generadores y relatores.

Observemos primero que el funtor  $Obj : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Set}$  es un adjunto por la izquierda al funtor  $\Delta : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Gpd}$  y por tanto preserva colímites. Quiere decir ésto que si queremos calcular un colímite en  $\mathbf{Gpd}$ , sobre objetos se calcula igual que en conjuntos.

Sean ahora  $\mathcal{G} : X \xrightarrow[t]{s} O$  y  $\mathcal{H} : Y \xrightarrow[t]{s} P$  dos grupoides, y  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  dos funtores entre ellos. Si existe  $Coigu(f, g) = \mathcal{C} : Z \xrightarrow[t]{s} Q$ , sabemos que  $Q = Coigu(f_0, g_0)$ . Veamos quien es  $Z$ .

Consideramos el conjunto de todas las sucesiones  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  donde  $y_i \in Y$ , y  $t(y_i)$  y  $s(y_{i+1})$  son iguales en  $Q$ .

Definimos en este conjunto la relación de equivalencia generada por:

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_n) R (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}y_i, y_{i+2}, \dots, y_n)$$

si existe la composición  $y_{i+1}y_i$

$$(y_1, \dots, y_i, Id, y_{i+1}, \dots, y_n) R (y_1, \dots, y_n) \quad \text{si } n \geq 1$$

$(y_1, \dots, y_i, f_1(x), y_{i+1}, \dots, y_n)R(y_1, \dots, y_i, g_1(x), y_{i+1}, \dots, y_n)$  para  $x \in X$

El conjunto cociente es  $Z$ , el conjunto de morfismos de  $\mathcal{C}$ .

Las aplicaciones dominio y codominio están definidas por:

$$s(y_1, \dots, y_n) = [s(y_1)], \quad t(y_1, \dots, y_n) = [t(y_n)]$$

y se observa con facilidad que no dependen del representante elegido.

La composición se define

$$(y_1, \dots, y_n) \circ (z_1, \dots, z_m) = (y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \text{ si } [t(y_n)] = [s(z_1)].$$

Notemos finalmente que la definición de grupoide puede darse en términos categóricos como sigue:

Un grupoide es un par de objetos  $X, O \in \mathbf{Set}$  junto con unas aplicaciones  $s, t : X \rightarrow O$ ,  $I : O \rightarrow X$ ,  $m : X_s \times_t X \rightarrow X$  y  $(-)^{-1} : X \rightarrow X$  satisfaciendo:

- $sI = tI = Id_O$
- $sm = s\pi_1$ ,  $tm = t\pi_2$
- $s \circ (-)^{-1} = t$ ,  $t \circ (-)^{-1} = s$
- $(-)^{-1} \circ (-)^{-1} = Id_X$
- El siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_s \times_t X_s \times_t X & \xrightarrow{m \times Id} & X_s \times_t X \\ Id \times m \downarrow & & \downarrow m \\ X_s \times_t X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

- Si  $\alpha$  y  $\beta$  son las aplicaciones definidas por el cuadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ \alpha \swarrow & & \swarrow \beta \\ X_s \times_t X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ Id \swarrow & & \swarrow (-)^{-1} \\ X & \xrightarrow{s} & O \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{s} & O \end{array}$$

Entonces  $m\alpha = It$  y  $m\beta = Is$ .

- Si consideramos las aplicaciones  $\gamma$  y  $\delta$

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ \gamma \swarrow & & \swarrow \delta \\ X_s \times_t X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ Id \swarrow & & \swarrow It \\ X & \xrightarrow{s} & O \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{s} & O \end{array}$$

Entonces  $m\gamma = m\delta = Id_X$

Si en lugar de tomar la categoría **Set** tomamos otra categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ , es decir, tomamos dos objetos  $X, O \in \underline{\mathbf{C}}$  junto con morfismos  $s, t, I, m, (-)^{-1}$  satisfaciendo las identidades anteriores obtenemos un “grupoide interno en la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ ”.

Obtenemos así la categoría de grupoides internos en  $\underline{\mathbf{C}}$ , denotada  $\mathbf{Gpd}(\underline{\mathbf{C}})$ .

Un caso importante es el caso en el que  $\underline{\mathbf{C}} = \mathbf{Gp}$ , es decir, la categoría  $\mathbf{Gpd}(\mathbf{Gp})$  de grupoides internos en grupos. Un grupoide en grupos es por tanto un grupoide en el que tanto el conjunto de objetos, como el de morfismos tiene estructura de grupo, y en el que las aplicaciones dominio, rango, identidad, composición e inverso, son morfismos de grupos. Es conocido

que dado un diagrama en grupos  $G_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} G_0$ , si queremos que tenga una composición que lo convierta en categoría interna en grupos, ésta está determinada y vale  $m(x, y) = x - Isx + y$ , y existe si y sólo si  $[Ker s, Ker t] = 0$ . En este caso, la categoría obtenida es un grupoide. De ahí que a la categoría  $\mathbf{Gpd}(\mathbf{Gp})$  se le denote también por  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ . Abundaremos más en esta categoría en el Capítulo 3

## 1.2 Objetos simpliciales en una categoría

En esta sección damos algunas construcciones en las categorías  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que vamos a utilizar en el resto de la memoria. La comenzamos estudiando en general objetos simpliciales sobre una categoría para posteriormente particularizar a las categorías antes mencionadas.

### 1.2.1 La Categoría simplicial $\Delta$

La categoría simplicial  $\Delta$  es aquella cuyos objetos son los conjuntos  $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$  y los morfismos entre dos objetos  $[n]$  y  $[m]$  son las aplicaciones  $f : [n] \rightarrow [m]$  que son monótonas, es decir, si  $i \leq j$  se verifica que  $f(i) \leq f(j)$ .

Destaquemos una serie de morfismos en esta categoría: los morfismos inyectivos con dominio  $[n]$  y codominio  $[n+1]$  y los morfismos sobreyectivos con dominio  $[n]$  y codominio  $[n-1]$ .

De los primeros hay exactamente  $n+1$  (tantos como posibles elecciones del único elemento que no está en la imagen) y los llamaremos  $\delta_i^n : [n] \rightarrow [n+1]$ ,  $0 \leq i \leq n$ , o simplemente  $\delta_i$ . Están definidos como sigue:

$$\delta_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

De los segundos hay  $n - 1$ , pues cada morfismo  $h$  está determinado por el único  $i$  tal que  $h(i) = h(i + 1)$ . A este morfismo lo llamaremos  $\sigma_i^{n-1}$ , o  $\sigma_i$ , y está definido:

$$\sigma_i^{n-1}(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j - 1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

El siguiente razonamiento muestra que estos morfismos “generan” todos los morfismos de la categoría, en el sentido de que todo morfismo se puede expresar como composición finita de morfismos  $\sigma_i^n$  y  $\delta_i^n$ : Sea  $f : [n] \rightarrow [n']$ . Entonces, podemos factorizar  $f$  como una aplicación sobreyectiva  $h : [n] \rightarrow [n'']$  seguida de una inyectiva  $g : [n''] \rightarrow [n']$ . Ahora bien,  $h$  está determinada por aquellos elementos  $i$  tales que  $h(i) = h(i + 1)$ . Sean estos elementos  $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  ( $m = n - n''$ ), y supongamos que están ordenados en orden creciente. Es fácil comprobar que  $h = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}$ . Por otra parte,  $g$  está determinada por los  $p$  elementos que no están en la imagen ( $p = n' - n''$ ), y si estos elementos son  $\{j_1, j_2, \dots, j_p\}$ , entonces  $g = \delta_{j_p} \dots \delta_{j_2} \delta_{j_1}$ . De aquí deducimos que  $f = \delta_{j_p} \dots \delta_{j_1} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$ . Además, esta descomposición es única si le añadimos las condiciones  $i_k < i_{k+1}$  y  $j_k < j_{k+1}$ .

Se comprueba que las aplicaciones  $\sigma_i, \delta_i$  verifican las siguientes identidades:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} \quad i < j \\ \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} \quad i \leq j \\ \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & i < j \\ Id & i = j, i = j + 1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & i > j + 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

y que la categoría  $\Delta$  es universal respecto a estas relaciones, es decir, la categoría  $\Delta$  está “determinada” por los morfismos  $\delta_i^n, \sigma_i^n$  junto con las relaciones anteriores.

Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría. Un objeto simplicial en  $\underline{\mathbf{C}}$  es un functor  $X : \Delta^{op} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ . Sea  $X$  un objeto simplicial en  $\underline{\mathbf{C}}$  y llamemos  $X_n = X([n + 1])$ ,  $d_i = X(\delta_i)$  y  $s_i = X(\sigma_i)$ . Entonces  $X$  está determinado por los objetos  $X_n$  y los morfismos  $d_i, s_i$ , que deben de verificar las identidades que se deducen de (\*) (a estos morfismos se les suele llamar operadores cara y operadores de degeneración respectivamente). Éstas son:

$$\begin{array}{l} d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad i \leq j \\ d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & i < j \\ Id & i = j, i = j + 1 \\ s_j d_{i-1} & i > j + 1 \end{cases} \end{array}$$

Estas identidades se denominan identidades simpliciales.

Por tanto, dar un objeto simplicial en una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  es equivalente a dar una familia numerable de objetos  $(X_n)_{n \geq 0}$  junto con unos morfismos  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , satisfaciendo las identidades simpliciales.

Un objeto de esta forma lo denotaremos por  $X_\bullet$  y lo representaremos por un diagrama:

$$\cdots \begin{array}{ccccc} & & s_n & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & & s_0 & & \\ & \xrightarrow{d_{n+1}} & & \xrightarrow{d_n} & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & d_0 & & \end{array} X_{n+1} \quad X_n \quad X_{n-1} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} & & s_1 \\ & \nearrow & \\ & & s_0 \\ & \xrightarrow{d_2} & \\ & \searrow & \\ & & d_0 \end{array} X_2 \quad X_1 \quad X_0$$

Dados dos objetos simpliciales  $X_\bullet$  e  $Y_\bullet$  sobre una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ , un morfismo simplicial entre ambos es una transformación natural  $f$  entre los dos funtores o, equivalentemente, una familia de morfismos  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  que conmutan con las caras y las degeneraciones, es decir,  $f_n d_i = d_i f_{n+1}$  y  $f_{n+1} s_i = s_i f_n$ .

Obtenemos de esta forma, dada una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ , la categoría  $\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$  cuyos objetos son los objetos simpliciales en  $\underline{\mathbf{C}}$  y cuyos morfismos los morfismos simpliciales. Así, en particular, tenemos la categoría de conjuntos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , de grupos simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , de grupoides simpliciales,  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$ , etc..

Si consideramos la subcategoría plena de  $\Delta$  formada por aquellos objetos con  $n + 1$  elementos o menos, se puede definir lo que es un objeto simplicial truncado en dimensión  $n$ , y se puede considerar la categoría de objetos simpliciales sobre una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  truncados en dimensión  $n$ , a la que denotaremos  $Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}))$ . Obviamente existe un funtor  $tr^n : \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}) \rightarrow Tr^n(\mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}}))$ .

Dados dos morfismos simpliciales  $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ , una homotopía  $k_\bullet$  de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un sistema de morfismos  $k_j^n : G_n \rightarrow H_n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , satisfaciendo las siguientes identidades (1):

$d_0 k_1^n = f_{n-1} d_0$	$d_i k_j^n = k_{j-1}^{n-1} d_i \quad \text{si } i < j$	$s_i k_j^n = k_j^{n+1} s_i \quad \text{si } i \geq j$
$d_n k_n^n = g_{n-1} d_n$	$d_i k_j^n = k_j^{n-1} d_i \quad \text{si } i \geq j$	$s_i k_j^n = k_{j+1}^{n+1} s_i \quad \text{si } i < j$

Cuando exista una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$ , diremos que  $f_\bullet$  y  $g_\bullet$  son homotópicos. Veamos otra formulación equivalente del concepto de homotopía:

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría,  $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathbf{Simp}(\underline{\mathbf{C}})$ , y  $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ . Dar una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es equivalente a dar una familia de*

morfismos  $h_j^n : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ ,  $0 \leq j \leq n$ , satisfaciendo las identidades (2):

$d_0 h_0^n = f_n$	$d_{n+1} h_n^n = g_n$	$d_i h_j^n = h_{j-1}^{n-1} d_i$	si $i < j$
$s_i h_j^{n-1} = h_{j+1}^n s_i$	si $i \leq j$	$d_{j+1} h_{j+1}^n = d_{j+1} h_j^n$	
$s_i h_j^{n-1} = h_j^n s_{i-1}$	si $i > j$	$d_i h_j^n = h_j^{n-1} d_{i-1}$	si $i > j + 1$

*Demostración:* Supongamos que tenemos un sistema de morfismos  $(k_j^n)$  verificando (1). Definimos  $h_j^n$  como la composición  $h_j^n = k_{j+1}^{n+1} s_j$ . Veamos que verifican las identidades (2):

- $d_0 h_0^n = d_0 k_1^{n+1} s_0 = f_n d_0 s_0 = f_n$ .
- $d_{n+1} h_n^n = d_{n+1} k_{n+1}^{n+1} s_n = g_n d_n s_n = g_n$ .
- Si  $i < j$ , entonces  $d_i h_j^n = d_i k_{j+1}^{n+1} s_j = k_j^n d_i s_j = k_j^n s_{j-1} d_i = h_{i-1}^{n-1} d_i$ .
- $d_{j+1} h_{j+1}^n = d_{j+1} k_{j+2}^{n+1} s_{j+1} = k_{j+1}^n d_{j+1} s_{j+1} = k_{j+1}^n d_{j+1} s_j = d_{j+1} k_{j+1}^{n+1} s_j = d_{j+1} h_j^n$
- Si  $i > j + 1$ , entonces  $d_i h_j^n = d_i k_{j+1}^{n+1} s_j = k_{j+1}^n d_i s_j = k_{j+1}^n s_j d_{i-1} = h_j^{n-1} d_{i-1}$
- Si  $i \leq j$ , entonces  $s_i h_j^{n-1} = s_i k_{j+1}^n s_j = k_{j+2}^{n+1} s_i s_j = k_{j+2}^{n+1} s_{j+1} s_i = h_{j+1}^n s_i$
- Si  $i > j$ , entonces  $s_i h_j^{n-1} = s_i k_{j+1}^n s_j = k_{j+1}^{n+1} s_i s_j = k_{j+1}^{n+1} s_j s_{i-1} = h_j^n s_{i-1}$ .

Recíprocamente, si tenemos una familia de morfismos  $h_j^n$  verificando (2), definimos  $k_j^n = d_j h_{j-1}^n$ , y se comprueba de forma análoga que verifica las condiciones (1).

Queda ver que ambas construcciones son inversas la una de la otra. Supongamos que tenemos los morfismos  $h_j^n$  y definimos  $k_j^n = d_j h_{j-1}^n$  y  $h_j^{n+1} = k_{j+1}^{n+1} s_i$ . Entonces,  $h_j^n = k_{j+1}^{n+1} s_j = d_{j+1} h_{j+1}^{n+1} s_j = d_{j+1} s_{j+1} h_j^n = h_j^n$ .

La otra condición para que sean inversas se demuestra igual. ■

Dado un morfismo simplicial  $f_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ , un inverso homotópico para  $f_\bullet$  es un morfismo simplicial  $g_\bullet : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$  tal que  $f_\bullet g_\bullet$  es homotópico a  $Id_{Y_\bullet}$  y  $g_\bullet f_\bullet$  es homotópico a  $Id_{X_\bullet}$ . Un morfismo simplicial  $f_\bullet$  diremos que es una equivalencia homotópica si tiene inverso homotópico.

Es fácil comprobar que si se tiene que  $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  son homotópicos entonces, para cualquier par de morfismos,  $h_\bullet : U_\bullet \rightarrow X_\bullet$ ,  $h'_\bullet : Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet$ , los morfismos  $h'_\bullet f_\bullet h_\bullet$  y  $h'_\bullet g_\bullet h_\bullet$  son también homotópicos.

Dados  $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbb{C})$  denotaremos usualmente por  $[X_\bullet, Y_\bullet]$  al conjunto cociente de  $Hom_{\mathbf{Simp}(\mathbb{C})}(X_\bullet, Y_\bullet)$  bajo la relación de equivalencia generada por la de homotopía.

## 1.2.2 Generalidades sobre conjuntos simpliciales

Recordemos que un conjunto simplicial  $K_\bullet$  es una familia de conjuntos  $(K_n)_{n \geq 0}$  junto con aplicaciones  $d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y  $s_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , satisfaciendo las identidades simpliciales.

Damos ahora algunos conceptos y construcciones básicos sobre conjuntos simpliciales. Para más detalles, ver [29], [54], [56], [58].

Si  $K_\bullet$  es un conjunto simplicial, a los elementos de  $K_n$  los llamaremos  $n$ -símplices o símplices de dimensión  $n$ . Los 0-símplices se denominan también vértices. Si  $y \in K_n$ , diremos que  $y$  es un símplice degenerado si existe  $x \in K_{n-1}$  e  $i \in [n]$  tal que  $s_i x = y$ .

Dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , un subconjunto simplicial  $L_\bullet$  es un conjunto simplicial tal que  $L_n \subseteq K_n \quad \forall n$  y la inclusión es una aplicación simplicial. Si  $L_\bullet$  es un subconjunto simplicial de  $K_\bullet$  y  $X$  es un conjunto de símplices de  $L_\bullet$ , diremos que  $X$  genera a  $L_\bullet$  si todo símplice de  $L_\bullet$  se puede obtener a partir de uno de  $X$  mediante los operadores cara y degeneración.

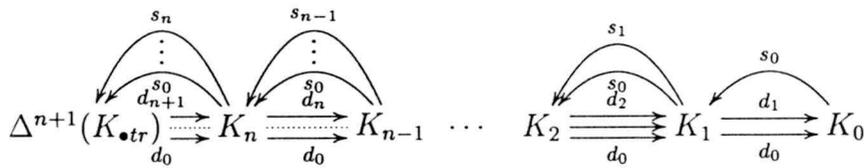
Si  $x$  es un vértice de un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , llamaremos  $x$  al subconjunto simplicial que genera y a cada uno de sus  $n$ -símplices (notemos que  $x$  tiene únicamente un  $n$ -símplice, exactamente  $s_0^n x$ ).

Dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , su  $n$ -esqueleto,  $Sk^n(K_\bullet)$ , es por definición el subconjunto simplicial de  $K_\bullet$  generado por todos los símplices (no degenerados) de dimensión menor o igual que  $n$ .

Si  $K_{\bullet, tr}$  es un conjunto simplicial truncado en dimensión  $n$ , se define el “ $(n+1)$ -ésimo núcleo simplicial” por:

$$\Delta^{n+1}(K_{\bullet, tr}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in (K_n)^{n+2} / d_i x_j = d_{j-1} x_i, i < j\}$$

Si definimos  $d_i : \Delta^{n+1}(K_{\bullet, tr}) \rightarrow K_n$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ , como la restricción de la proyección  $i$ -ésima, y  $s_i : K_n \rightarrow \Delta^{n+1}(K_{\bullet, tr})$ ,  $0 \leq i \leq n$ , de la forma  $s_i(x) = (s_{i-1} d_0 x, \dots, s_{i-1} d_{i-1} x, x, x, s_i d_{i+1} x, \dots, s_i d_n x)$ , obtenemos que



es un conjunto simplicial truncado en dimensión  $n+1$ .

Si a este conjunto simplicial truncado le repetimos el mismo proceso (calculamos su  $(n+2)$ -ésimo núcleo simplicial) y así sucesivamente, obtenemos un grupo simplicial, al que llamaremos  $cosk^n(K_{\bullet, tr})$ . Ésto determina un functor  $cosk^n : Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  que es adjunto por la derecha al functor  $tr^n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set}))$ .

Si  $K_\bullet$  es un conjunto simplicial, su  $(n+1)$ -ésimo núcleo simplicial es, por definición,  $\Delta^{n+1}(K_\bullet) = \Delta^{n+1}(tr^n(K_\bullet))$ .

Denotaremos en lo que sigue  $Cosk^n$  al functor composición  $cosk^n tr^n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ .

Dualmente, dado un conjunto simplicial truncado en dimensión  $n$ ,  $K_{\bullet, tr}$ , su  $(n+1)$ -ésimo conúcleo simplicial,  $\nabla^{n+1}(K_{\bullet, tr})$ , es el conjunto  $\prod_{i=0}^n K_n$  dividido por la relación generada por  $\mu_i s_j = \mu_{j+1} s_i$ ,  $i \leq j$ , donde  $\mu_i : K_n \rightarrow \prod_{i=0}^n K_n$  es la inyección canónica  $i$ -ésima.

Si definimos  $s_i : K_n \rightarrow \nabla^{n+1}(K_{\bullet, tr})$  como la aplicación inducida por la inyección  $i$ -ésima y  $d_j : \nabla^{n+1}(K_{\bullet, tr}) \rightarrow K_n$  como la aplicación que al componer con la inyección  $i$ -ésima nos da  $d_{j+1} s_i$  si  $i < j$  y  $d_j s_{i+1}$  si  $i \geq j$ , obtenemos que

$$\begin{array}{ccccccc} & s_n & & s_{n-1} & & & s_1 & & s_0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \nabla^{n+1}(K_{\bullet, tr}) & \xrightarrow{d_{n+1}^{s_0}} & K_n & \xrightarrow{d_n^{s_0}} & K_{n-1} & \cdots & K_2 & \xrightarrow{d_2^{s_0}} & K_1 & \xrightarrow{d_1^{s_0}} & K_0 \\ & \downarrow d_0 & & \downarrow d_0 & & & \downarrow d_0 & & \downarrow d_0 & & \downarrow d_0 \end{array}$$

es un conjunto simplicial truncado en dimensión  $n+1$ . Iterando este proceso obtenemos un functor  $sk^n : Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  que es adjunto por la izquierda al functor  $tr^n$ . Es fácil comprobar que, dado un conjunto simplicial  $K_{\bullet}$ , los conjuntos simpliciales  $sk^n(tr^n(K_{\bullet}))$  y  $Sk^n(K_{\bullet})$  son isomorfos.

Tenemos entonces un diagrama de adjunciones:

$$\begin{array}{ccccc} & & sk^n & & \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) & \xrightleftharpoons{tr^n} & Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})) & \xrightleftharpoons{sk^n} & \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \\ & \xleftarrow{cosk^n} & & \xleftarrow{tr^n} & \\ & & Cosk^n & & \end{array}$$

donde las flechas inferiores representan los adjuntos por la derecha.

Supongamos que  $K_{\bullet, tr}$  es un conjunto simplicial truncado en dimensión  $n$ . Definimos la  $k$ -ésima cara abierta en dimensión  $n+1$  de  $K_{\bullet, tr}$ ,  $\Lambda_k^{n+1}(K_{\bullet, tr})$ , como el conjunto:

$$\{(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \in (K_n)^{n+1} / d_i x_j = d_{j-1} x_i, i < j; i, j \neq k\}$$

Es claro que dada una aplicación simplicial truncada  $f_{\bullet, tr} : K_{\bullet, tr} \rightarrow L_{\bullet, tr}$ , para cada  $k, n$  en la situación  $0 \leq k \leq n$ ,  $f_{\bullet, tr}$  induce una aplicación  $\Lambda_k^{n+1}(K_{\bullet, tr}) \rightarrow \Lambda_k^{n+1}(L_{\bullet, tr})$ .

Si  $K_{\bullet}$  es un conjunto simplicial, se define  $\Lambda_k^{n+1}(K_{\bullet}) = \Lambda_k^{n+1}(tr^n(K_{\bullet}))$ .

Un conjunto simplicial  $K_{\bullet}$  se dice que es de Kan si para cualesquiera  $k, n$  en la situación  $n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$ , y cada elemento  $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(K_{\bullet})$  existe  $x \in K_n$  tal que  $d_i x = x_i$ ,  $i \neq k$ .

Una aplicación simplicial  $p_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  se dice que es una fibración de Kan si siempre que tengamos  $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(K_\bullet)$  e  $y \in L_n$  tales que  $d_i(y) = p_{n-1}(x_i)$ ,  $i \neq k$ , existe  $x \in K_n$  tal que  $p_n(x) = y$  y  $d_i(x) = x_i$ . Esto es equivalente a que la flecha punteada en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 K_n & & \\
 \swarrow & \dashrightarrow & \searrow \\
 L_n \times \Lambda_k^n(L_\bullet) & \xrightarrow{\quad} & \Lambda_k^n(K_\bullet) \\
 \downarrow p_n & & \downarrow \\
 L_n & \xrightarrow{\quad} & \Lambda_k^n(L_\bullet)
 \end{array}$$

sea sobreyectiva para cada  $k, n$  en la situación  $n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

Notemos que un conjunto simplicial  $K_\bullet$  es de Kan si y sólo si la aplicación  $K_\bullet \rightarrow *$  es una fibración de Kan.

Recordamos ahora la definición de los grupos de homotopía de un conjunto simplicial de Kan (ver [54],[29]).

Supongamos que  $K_\bullet$  es un conjunto simplicial. Dados  $x, x' \in K_n$ , se dice que son homotópicos si:

- $d_i x = d_i x'$ ,  $0 \leq i \leq n$ .
- Existe  $y \in K_{n+1}$  tal que  $d_n y = x$ ,  $d_{n+1} y = x'$  y  $d_i y = s_{n-1} d_i x$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ .

El elemento  $y$  se dice que es una homotopía de  $x$  a  $x'$  y cuando  $K_\bullet$  es de Kan se demuestra que esta relación es de equivalencia.

Si ahora tenemos  $K_\bullet$  un conjunto simplicial de Kan y  $x_0 \in K_0$  un vértice, definimos  $\pi_n(K_\bullet, x_0)$  como el conjunto  $\{x \in K_n / d_i x = x_0\}$  módulo la relación de homotopía.

Es conocido que  $\pi_n(K, x_0)$  es un grupo para  $n \geq 1$ , que es abeliano si  $n \geq 2$ .

Veamos algunos ejemplos de conjuntos simpliciales que utilizaremos posteriormente:

1. Dado un conjunto  $K$ , consideramos el conjunto simplicial  $K_\bullet$  donde  $K_n = K \forall n \geq 0$ , y los operadores cara y degeneración son la identidad. Si  $K = \emptyset$  obtenemos el objeto inicial en la categoría **Simp(Set)**. Si  $K$  tiene un solo elemento, obtenemos el objeto final en la categoría. Este conjunto simplicial lo representaremos por  $*$  o  $\{*\}$ .
2. Para cada  $n \geq 0$ ,  $\Delta[n]$  denota el siguiente conjunto simplicial:
  - El conjunto de  $m$ -símplices es el conjunto de sucesiones de enteros  $(a_0, a_1, \dots, a_m)$  satisfaciendo que  $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_m \leq n$ .

- Los operadores cara y degeneraciones son:

$$d_i(a_0, \dots, a_m) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

$$s_i(a_0, \dots, a_m) = (a_0, \dots, a_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

Al elemento  $(0, 1, \dots, n) \in (\Delta[n])_n$  se le denomina el  $n$ -símplice estandar y lo representaremos por  $\Delta_n$ . Es fácil comprobar que este símplice genera todo  $\Delta[n]$ . Por tanto, dada una aplicación simplicial  $f_\bullet : \Delta[n] \rightarrow K_\bullet$ , donde  $K_\bullet$  es un conjunto simplicial cualquiera,  $f_\bullet$  está determinada por  $f_n(\Delta_n)$ . Además, dado  $x \in K_n$  existe una (única) aplicación simplicial  $\bar{x} : \Delta[n] \rightarrow K_\bullet$  tal que  $\bar{x}(\Delta_n) = x$ . Deducimos por tanto que  $\text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Set})}(\Delta[n], K_\bullet) \cong K_n$ . Se dice entonces que  $\Delta[n]$  está libremente generado por  $\Delta_n$ .

3. Consideramos ahora el subconjunto simplicial de  $\Delta[n]$  generado por los elementos  $d_i(\Delta_n)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , es decir,  $Sk^n(\Delta[n])$ . A este conjunto simplicial se le denota  $\dot{\Delta}[n]$ . Es fácil ver que los símplices de este conjunto simplicial son los símplices de  $\Delta[n]$  que tienen  $n$  elementos distintos o menos.

Notemos también que dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , es equivalente dar un morfismo  $f_\bullet : \dot{\Delta}[n] \rightarrow K_\bullet$  a dar un elemento de  $\Delta^n(K_\bullet)$  (a saber, el elemento  $(f_{n-1}d_0\Delta_n, \dots, f_{n-1}d_n\Delta_n)$ ).

4. Por último, consideremos para cada  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , el subconjunto simplicial de  $\Delta[n]$  generado por los elementos  $d_i(\Delta_n)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $i \neq k$ , al que denotaremos  $\Delta[n, k]$ . Claramente este conjunto simplicial está también contenido en  $\dot{\Delta}[n]$ .

Para un conjunto simplicial  $K_\bullet$ , dar un morfismo  $f_\bullet : \Delta[n, k] \rightarrow K_\bullet$  es equivalente a dar un elemento de  $\Lambda_k^n(K_\bullet)$ . Como consecuencia se tiene que una aplicación simplicial  $p_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  es una fibración de Kan si para cualquier morfismo  $\Delta[n, k] \rightarrow K_\bullet$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ , y cualquier morfismo  $\Delta[n] \rightarrow L_\bullet$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n, k] & \longrightarrow & K_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow p_\bullet \\ \Delta[n] & \longrightarrow & L_\bullet \end{array}$$

sea conmutativo, existe un morfismo  $\Delta[n] \rightarrow K_\bullet$  tal que los dos triángulos que resultan son conmutativos.

Aprovechamos este hecho para hacer la siguiente definición:

**Definición 1.2.2.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría y  $\mathcal{F}$  una familia no vacía de morfismos. Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  de  $\underline{\mathbf{C}}$  diremos que tiene la RLP (propiedad de levantamiento por la derecha) respecto a los morfismos de la familia  $\mathcal{F}$  (o respecto a  $\mathcal{F}$ ) si siempre que tengamos un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{donde } g \in \mathcal{F}$$

existe un morfismo  $B \rightarrow X$  que hace los dos triángulos conmutativos.

Análogamente, diremos que  $f$  tiene la LLP respecto a  $\mathcal{F}$  (propiedad de levantamiento por la izquierda) si se da la existencia de levantamiento para cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \longrightarrow & B \end{array} \quad \text{con } g \in \mathcal{F}$$

Utilizando esta nomenclatura, podemos decir ahora que una aplicación simplicial  $p_{\bullet} : K_{\bullet} \rightarrow L_{\bullet}$  es una fibración de Kan si tiene la RLP con respecto a la familia de morfismos  $\Delta[n, k] \hookrightarrow \Delta[n]$ ,  $n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

Definimos ahora aplicaciones simpliciales  $\delta_i : \Delta[n] \rightarrow \Delta[n+1]$ ,  $0 \leq i \leq n+1$  y  $\sigma_i : \Delta[n] \rightarrow \Delta[n-1]$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Como el dominio es siempre  $\Delta[n]$ , la aplicación queda determinada conociendo la imagen de  $\Delta_n$ . Definimos entonces:

$$\delta_i(\Delta_n) = (0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1)$$

$$\sigma_i(\Delta_n) = (0, 1, \dots, i-1, i, i, i+1, \dots, n-1)$$

Es decir,  $\delta_i$  “deja igual” las coordenadas menores que  $i$  y aumenta en 1 las que son mayores o iguales que  $i$ , mientras que  $\sigma_i$  “deja igual” las que son menores o iguales que  $i$  y disminuye en 1 las que son mayores.

Notemos que las aplicaciones  $\delta_i$  son inyectivas. A la imagen de  $\Delta[n]$  por  $\delta_i$  se le suele llamar la “cara  $i$ -ésima” de  $\Delta[n+1]$  ( $\delta_i$  es por tanto la inclusión en la cara  $i$ -ésima). A  $\sigma_i$  se le denomina la “ $i$ -ésima proyección”.

Puesto que la categoría de conjuntos es una categoría completa y cocompleta y la categoría de conjuntos simpliciales es una categoría de funtores con codominio  $\mathbf{Set}$ , la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  es una categoría completa y cocompleta y los (co)límites se calculan punto a punto (o dimensión a dimensión).

En particular, si tenemos dos conjuntos simpliciales  $K_\bullet, L_\bullet$ , el producto  $K_\bullet \times L_\bullet$  en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  es el conjunto simplicial cuyo conjunto de  $n$ -símplices es  $K_n \times L_n$  y los operadores cara y degeneración están definidos coordenada a coordenada.

Dados dos conjuntos simpliciales  $K_\bullet$  y  $L_\bullet$ , se define el conjunto simplicial  $(L_\bullet)^{K_\bullet} = \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, L_\bullet)$  como el conjunto simplicial cuyo conjunto de  $n$ -símplices es  $Hom_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times \Delta[n], L_\bullet)$  y cuyos operadores cara y degeneración son:

$$d_i(f_\bullet) = f_\bullet \circ (Id_{K_\bullet} \times \delta_i), \quad s_i(f_\bullet) = f_\bullet \circ (Id_{K_\bullet} \times \sigma_i)$$

es decir,  $(d_i f_\bullet)_m(x, \tau) = f_m(x, \delta_i(\tau))$  y  $(s_i f_\bullet)_m(x, \tau) = f_m(x, \sigma_i(\tau))$ .

Notemos que, puesto que  $\Delta[0] \cong \{*\}$ , el conjunto de 0-símplices de  $(L_\bullet)^{K_\bullet}$  es justamente el conjunto de aplicaciones simpliciales  $K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  (o puede ser identificado con dicho conjunto).

Se comprueba fácilmente que estos operadores verifican las identidades simpliciales.

Tenemos además, dados tres conjuntos simpliciales  $K_\bullet, L_\bullet$  y  $M_\bullet$ , una aplicación simplicial

$$\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, L_\bullet) \times \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(L_\bullet, M_\bullet) \rightarrow \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, M_\bullet)$$

llamada "composición" y que está definida como sigue:

Supongamos que tenemos

$$(f_\bullet, g_\bullet) \in (\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, L_\bullet) \times \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(L_\bullet, M_\bullet))_n$$

es decir,  $f_\bullet : K_\bullet \times \Delta[n] \rightarrow L_\bullet$  y  $g_\bullet : L_\bullet \times \Delta[n] \rightarrow M_\bullet$ . La composición  $(g_\bullet \circ f_\bullet)$  está dada por

$$K_\bullet \times \Delta[n] \xrightarrow{(Id_{K_\bullet} \times \Delta)} K_\bullet \times \Delta[n] \times \Delta[n] \xrightarrow{(f_\bullet \times Id_{\Delta[n]})} L_\bullet \times \Delta[n] \xrightarrow{g_\bullet} M_\bullet$$

o sea, si  $x \in K_m$  y  $\tau \in (\Delta[n])_m$ ,  $(g_\bullet \circ f_\bullet)_m(x, \tau) = g_m(f_m(x, \tau), \tau)$ .

Se comprueba que la composición es asociativa y se tiene un bifunctor

$$\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(-, -) : (\mathbf{Simp}(\mathbf{Set}))^{op} \times \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$$

que también se suele denominar  $(-)^{(-)}$ .

Por otra parte, tenemos una aplicación  $K_\bullet \times \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, L_\bullet) \rightarrow L_\bullet$  que asigna a cada pareja  $(x, f_\bullet)$  donde  $x$  es un  $n$ -símplice de  $K_\bullet$  y  $f_\bullet$  es una aplicación  $K_\bullet \times \Delta[n] \rightarrow L_\bullet$ , el elemento  $f_n(x, \Delta_n)$ . Esta aplicación es conocida como la aplicación evaluación.

Veamos algunos resultados en relación con estos funtores:

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $L_\bullet$  un conjunto simplicial. Entonces existe una situación de adjunción:*

$$(- \times L_\bullet) \vdash (-)^{L_\bullet}$$

*Demostración:* Sean  $K_\bullet, M_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ . Para la demostración, construiremos dos aplicaciones

$$\phi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times L_\bullet, M_\bullet) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, (M_\bullet)^{L_\bullet})$$

$$\psi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, (M_\bullet)^{L_\bullet}) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times L_\bullet, M_\bullet)$$

que serán cada una inversa de la otra.

Sea  $f_\bullet : K_\bullet \times L_\bullet \rightarrow M_\bullet$  y definimos  $\phi(f_\bullet) : K_\bullet \rightarrow (M_\bullet)^{L_\bullet}$ , para lo cual damos  $\phi(f_\bullet)_n : K_n \rightarrow (M_\bullet^{L_\bullet})_n = \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(L_\bullet \times \Delta[n], M_\bullet)$ .

Si  $k \in K_n$ ,  $(\phi(f_\bullet)_n(k))(l, \tau) = f_m(sd(k), l)$  donde  $l \in L_m$ ,  $\tau \in (\Delta[n])_m$  y  $\tau = sd\Delta_n$  donde  $d$  es una composición de operadores cara y  $s$  es una composición de operadores degeneración.

La comprobación de que  $\phi(f_\bullet)$  es simplicial y de que  $\phi$  es natural es rutinaria.

Por otro lado, dada  $g_\bullet : K_\bullet \rightarrow M_\bullet^{L_\bullet}$ , definimos  $\psi(g_\bullet)$  como la composición:

$$K_\bullet \times L_\bullet \longrightarrow L_\bullet \times K_\bullet \xrightarrow{Id_{L_\bullet} \times g_\bullet} L_\bullet \times M_\bullet^{L_\bullet} \xrightarrow{ev} L_\bullet$$

es decir,  $\psi(g_\bullet) = n(k, l) = g_n(k)(l, \Delta_n)$ . ■

Esta proposición no es más que un caso particular del siguiente resultado.

**Proposición 1.2.4.** *Sean  $K_\bullet, L_\bullet, M_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ . Entonces tenemos un isomorfismo simplicial*

$$\underline{\mathit{Hom}}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times L_\bullet, M_\bullet) \cong \underline{\mathit{Hom}}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, M_\bullet^{L_\bullet})$$

(Notemos que este isomorfismo, a nivel de 0-símplices, nos da la proposición anterior).

*Demostración:* Veamos que los conjuntos de n-símplices de ambos conjuntos simpliciales son isomorfos.

$$(\underline{\mathit{Hom}}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times L_\bullet, M_\bullet))_n = \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times L_\bullet \times \Delta[n], M_\bullet) \cong$$

$$\cong \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times \Delta[n], M_\bullet^{L_\bullet}) = (\underline{\mathit{Hom}}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, M_\bullet^{L_\bullet}))_n$$

El resto de la demostración es rutinario. ■

Estudiamos de esta construcción un caso particularmente importante, como es el funtor  $(-)^I$ , donde  $I = \Delta[1]$ .

Comenzamos dando unos lemas referentes al conjunto simplicial  $I$ .

**Lema 1.2.5.** *Sea  $\sigma \in I_n$ ,  $\sigma \neq (0), (1)$ ,  $n \geq 1$ . Existe un único  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $\sigma \notin s_i(I_{n-1})$*

*Demostración:* Sea  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  y sea  $i$  tal que  $a_i = 0$  y  $a_{i+1} = 1$ . Si  $\sigma = s_i(b_0, \dots, b_{n-1})$ , entonces  $a_i = b_i = a_{i+1}$ , lo que es imposible, luego  $\sigma \notin s_i(I_{n-1})$ . Si  $j \neq i$  es claro que  $a_j = a_{j+1}$ , luego  $\sigma = s_j(a_0, \dots, a_j, a_{j+2}, \dots, a_n)$ . ■

**Lema 1.2.6.** *Todo  $m$ -símplice de  $I \times \Delta[n]$ ,  $m \geq n+2$ , es degenerado.*

*Demostración:* Sea  $(\sigma, \tau) \in I_m \times \Delta[n]_m$ ,  $m \geq n+2$ . Puesto que  $\Delta_n$  genera  $\Delta[n]$ , tenemos que  $\tau = s_j s_i(\tau')$ ,  $i < j$ , para algún  $\tau' \in \Delta[n]_{m-2}$  (notemos que  $\tau = s_{i_k} \dots s_{i_1} \Delta_n$ ,  $k \geq 2$ ), y por tanto  $\tau = s_i s_{j-1} \tau'$ . Por el lema 1.2.5 sabemos que  $\sigma \in s_i(I_{m-1})$  ó  $\sigma \in s_j(I_{m-1})$  de donde deducimos que  $(\sigma, \tau) \in s_i(I_{m-1} \times \Delta[n]_{m-1})$  ó  $(\sigma, \tau) \in s_j(I_{m-1} \times \Delta[n]_{m-1})$ . ■

**Lema 1.2.7.** *Los únicos  $(n+1)$ -símplices no degenerados de  $I \times \Delta[n]$  son  $\alpha_i = (s_n \dots \hat{s}_i \dots s_0 \Delta_1, s_i \Delta_n)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , e  $I \times \Delta[n]$  está generado por estos símplices.*

*Demostración:* De acuerdo con los lemas precedentes, los únicos  $(n+1)$ -símplices no degenerados serán  $(\sigma_i, s_i \Delta_n)$ , donde  $\sigma_i$  es el único  $(n+1)$ -símplice que no pertenece a la imagen de  $s_i$ . Basta ver que  $\sigma_i = s_n \dots \hat{s}_i \dots s_0 \Delta_1$  para concluir la demostración. ■

Es rutinario comprobar también el siguiente lema:

**Lema 1.2.8.** *Los elementos  $\alpha_i$  del lema 1.2.7 verifican que  $d_i(\alpha_i) = d_i(\alpha_{i-1})$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Además,  $I \times \Delta[n]$  está determinado por estas relaciones. Se verifica también que  $d_0(\alpha_0) = ((1), \Delta_n)$  y que  $d_{n+1}(\alpha_n) = ((0), \Delta_n)$ .*

Como consecuencia de estos lemas deducimos que dar una aplicación simplicial  $I \times \Delta[n] \rightarrow L_\bullet$ , para un conjunto simplicial cualquiera  $L_\bullet$ , es equivalente a dar  $n+1$  elementos de  $L_{n+1}$ ,  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , verificando que  $d_i x_i = d_i x_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Ahora bien, una aplicación simplicial  $I \times \Delta[n] \rightarrow L_\bullet$  es un  $n$ -símplice del conjunto  $L_\bullet^I$ . Por tanto, el conjunto  $L_\bullet^I$  puede ser identificado con el conjunto simplicial cuyo conjunto de  $n$ -símplices es:

$$(L_\bullet^I)_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in L_{n+1}^{n+1} / d_i x_i = d_i x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$$

Veamos como son los operadores cara y degeneración, para lo cual utilizaremos el siguiente resultado

Lema 1.2.9. Sea  $n \geq 1$ . Entonces:

$$1) \delta_i s_j \Delta_{n-1} = \begin{cases} d_{i+1} s_j \Delta_n & \text{si } j < i \\ d_i s_{j+1} \Delta_n & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

$$2) \sigma_i s_j \Delta_{n+1} = \begin{cases} s_{i+1} s_j \Delta_n & \text{si } j \leq i \\ s_i s_{j-1} \Delta_n & \text{si } j < i \end{cases}$$

Además, en cualquier conjunto simplicial

$$a) s_{n-1} \dots \hat{s}_j \dots s_0 = \begin{cases} d_{i+1} s_n \dots \hat{s}_j \dots s_0 & \text{si } j < i \\ d_i s_n \dots s_{j+1} \dots s_0 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

$$b) s_{n+1} \dots \hat{s}_j \dots s_0 = \begin{cases} s_{i+1} s_n \dots \hat{s}_j \dots s_0 & \text{si } j \leq i \\ s_i s_n \dots s_{j-1} \dots s_0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

*Demostración:* Demostremos solamente un caso, por ejemplo, cuando  $j < i$ . El resto se demuestra igual.

$$\begin{aligned} \delta_i s_j \Delta_{n-1} &= \delta_i(0, 1, \dots, j, j, j+1, \dots, n-1) = \\ &= (0, 1, \dots, j, j, j+1, \dots, i-1, i+1, \dots, n) = \\ &= d_{i+1}(0, \dots, j, j, j+1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n) = d_{i+1} s_j \Delta_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{n-1} \dots \hat{s}_j \dots s_0 &= d_{i+1} s_{i+1} s_{n-1} s_{n-2} \dots \hat{s}_j \dots s_0 = \\ &= d_{i+1} s_n s_{i+1} s_{n-2} \dots \hat{s}_j \dots s_0 = \dots = d_{i+1} s_n s_{n-1} \dots s_{i+1} s_i \dots \hat{s}_j \dots s_0 \end{aligned}$$

Podemos ya calcular cuales son los operadores cara y degeneración del conjunto simplicial  $L_\bullet^I$ . Sea  $(x_0, \dots, x_n) \in (L_\bullet^I)_n$  que se corresponde con la aplicación simplicial  $f_\bullet : I \times \Delta[n] \rightarrow L_\bullet$  (denotaremos esta correspondencia  $f_\bullet \sim (x_0, \dots, x_n)$ ) y queremos calcular  $d_i(x_0, \dots, x_n)$ . Llamemos a este elemento  $(y_0, \dots, y_{n-1})$  y veamos cuanto vale  $y_j$ .

Supongamos que  $j < i$ . Entonces,

$$\begin{aligned} y_j &\sim (d_i f_\bullet)_n(s_{n-1} \dots \hat{s}_j \dots s_0 \Delta_1, s_j \Delta_{n-1}) = \\ &= f_n(s_{n-1} \dots \hat{s}_j \dots s_0 \Delta_1, \delta_i s_j \Delta_{n-1}) = \\ &= f_n(d_{i+1} s_n \dots \hat{s}_j \dots s_0 \Delta_1, d_{i+1} s_j \Delta_n) = \\ &= f_n[d_{i+1}(s_n \dots \hat{s}_j \dots s_0 \Delta_1, s_j \Delta_n)] = \\ &= d_{i+1}[f_{n+1}(s_n \dots \hat{s}_j \dots s_0 \Delta_1, s_j \Delta_n)] \sim d_{i+1} x_j \end{aligned}$$

Razonando de forma análoga, obtenemos que, si  $j \geq i$ ,  $y_j = d_i x_{j+1}$ , y si llamamos  $(z_0, \dots, z_{n+1})$  a  $s_i(x_0, \dots, x_n)$ , resulta que  $z_j = s_{i+1} x_j$  si  $j \leq i$  y  $z_j = s_i x_{j-1}$  si  $j > i$ .

Resumiendo, tenemos:

**Proposición 1.2.10.** *Sea  $L_\bullet$  un conjunto simplicial. Entonces existe un isomorfismo natural entre  $L_\bullet^I$  y el conjunto simplicial cuyos  $n$ -símplices son el conjunto*

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in (L_{n+1})^{n+1} / d_i x_i = d_i x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$$

y los operadores cara y degeneración están definidos por

$$d_i(x_0, \dots, x_n) = (d_{i+1}x_0, \dots, d_{i+1}x_{i-1}, d_i x_{i+1}, \dots, d_i x_n), 0 \leq i \leq n,$$

$$s_i(x_0, \dots, x_n) = (s_{i+1}x_0, \dots, s_{i+1}x_i, s_i x_i, \dots, s_i x_n), 0 \leq i \leq n.$$

Por tanto, a partir de ahora utilizaremos cualquiera de las dos descripciones cuando nos refiramos a  $L_\bullet^I$ . También se puede dar una descripción del conjunto simplicial  $K_\bullet^{\Delta[n]}$  para cualquier  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .

Supongamos ahora que tenemos dos conjunto simpliciales  $K_\bullet$  y  $L_\bullet$ , y queremos dar una aplicación simplicial  $h_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet^I$ . Esto es equivalente a dar aplicaciones  $h^n : K_n \rightarrow (L_\bullet^I)_n$  satisfaciendo las identidades simpliciales. Pero dar una aplicación  $h^n : K_n \rightarrow (L_\bullet^I)_n$  es equivalente a dar  $n+1$  aplicaciones  $h_i^n : K_n \rightarrow L_{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq n$  tales que  $d_i h_i^n = d_i h_{i-1}^n$  y las identidades simpliciales se traducen en:

$$\begin{aligned} d_{i+1} h_j^n &= h_j^{n-1} d_i, & j < i &; & s_{i+1} h_j^n &= h_j^{n+1} s_i, & j \leq i \\ d_i h_{j+1}^n &= h_j^{n-1} d_i, & j \geq i &; & s_i h_{j-1}^n &= h_j^n s_i, & j > i \end{aligned}$$

Por tanto, dar  $h_\bullet$  es dar una homotopía (ver proposición 1.2.1) de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$ , donde  $f_n = d_0 h_0^n$  y  $g_n = d_{n+1} h_n^n$ .

Tengamos ahora en cuenta que una aplicación  $h_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet^I$  se corresponde, vía la adjunción  $(- \times I) \vdash (-)^I$ , con una aplicación  $k_\bullet : K_\bullet \times I \rightarrow L_\bullet$  (ver proposición 1.2.3), es decir, con un 1-símplice de  $L_\bullet^{K_\bullet}$ . Esto nos permite afirmar:

**Proposición 1.2.11.** *Sean  $K_\bullet, L_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y sean  $f_\bullet, g_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$ . Una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un 1-símplice  $k_\bullet$  del conjunto simplicial*

$$\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet, L_\bullet) = L_\bullet^{K_\bullet}$$

verificando que  $d_0 k_\bullet = f_\bullet$  y  $d_1 k_\bullet = g_\bullet$ .

*Demostración:* Sea  $k_\bullet : K_\bullet \times I \rightarrow L_\bullet$  un 1-símplice de  $L_\bullet^{K_\bullet}$  y sea  $h_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet^I$  la correspondiente aplicación por la adjunción  $(- \times I) \vdash (-)^I$ . Sabemos que  $h_\bullet$  es una homotopía entre  $f_\bullet$  y  $g_\bullet$  si y sólo si  $f_n = d_0 h_0^n$  y  $g_n = d_{n+1} h_n^n$ .

Calculemos  $d_0 k_\bullet$  y  $d_1 k_\bullet$ . Sea  $x \in K_n$ :

$$\begin{aligned} (d_0 k_\bullet)_n(x) &\sim (d_0 k_\bullet)_n(x, (0)) = k_n(x, \delta_0((0))) = k_n(x, (1)) = \\ &= h^n(x)((1), \Delta_n) = h^n(x)[d_0(s_n \dots s_1 \Delta_1, s_0 \Delta_n)] = \\ &= d_0[h^n(x)(s_n \dots s_1 \Delta_1, s_0 \Delta_n)] \sim d_0 h_0^n(k) = f_n(x) \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que  $(d_1 k_\bullet)_n(x)$  se identifica con  $g_n(x)$ . ■

### 1.2.3 Generalidades y algunos resultados sobre grupos simpliciales

A lo largo de este párrafo mezclaremos algunos resultados nuevos con construcciones y resultados bien conocidos de la categoría **Simp(Gp)** de grupos simpliciales.

Comenzamos recordando la definición del complejo de Moore y de los grupos de homotopía de un grupo simplicial.

**Definición 1.2.12.** (ver [54], [56]) Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Se define el complejo de Moore de  $G_\bullet$ ,  $N_\bullet(G_\bullet)$ , como el siguiente complejo de cadenas de grupos

$$\dots \longrightarrow N_{n+1}(G_\bullet) \xrightarrow{\bar{d}_{n+1}} N_n(G_\bullet) \xrightarrow{\bar{d}_n} \dots \xrightarrow{\bar{d}_2} N_1(G_\bullet) \xrightarrow{\bar{d}_0} N_0(G_\bullet)$$

donde  $N_n(G_\bullet) = G_n \cap \text{Ker } d_0 \cap \dots \cap \text{Ker } d_{n-1}$  y  $\bar{d}_n$  es la restricción de  $d_n$  a  $N_n(G_\bullet)$ . Normalmente, cuando no haya lugar a confusión, denotaremos a estos operadores por "d".

**Proposición 1.2.13.** Sea  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Entonces  $N_\bullet(G_\bullet)$  es un complejo de cadenas de grupos. Además,  $d_{n+1}(N_{n+1}(G_\bullet))$  es un subgrupo normal de  $N_n(G_\bullet)$ .

*Demostración:* Veamos primero que si  $x \in N_n(G_\bullet)$ , entonces  $d_n x \in N_{n-1}(G_\bullet)$ , para lo cual calculamos  $d_i(d_n x)$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ , y tenemos que  $d_i d_n x = d_{n-1} d_i x = 0$ . Además  $d_{n-1} d_n x = d_{n-1} d_{n-1} x = 0$ , lo que implica que  $\bar{d}_{n-1} \bar{d}_n = 0$  (es decir,  $d^2 = 0$ ).

Sea ahora  $x \in G_n$  e  $y \in d_{n+1}(N_{n+1}(G_\bullet))$ , es decir,  $y = d_{n+1} z$  para algún  $z \in N_{n+1}(G_\bullet)$ . Tenemos que  $x + y - z = d_{n+1}(s_n x + z - s_n x)$ , y claramente  $s_n x + z - s_n x \in N_{n+1}(G_\bullet)$ , de donde deducimos que  $d_{n+1}(N_{n+1}(G_\bullet))$  es normal en  $G_n$ , y por tanto en cualquier subgrupo suyo que lo contenga. ■

Es claro que cada morfismo de grupos simpliciales  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  induce un morfismo entre los correspondientes complejos de Moore. Por tanto,  $N_\star$  es un funtor de la categoría de grupos simpliciales a la categoría de complejos de cadenas de grupos.

**Definición 1.2.14.** Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Llamemos  $B_n(G_\bullet)$  y  $Z_n(G_\bullet)$  a los conjuntos  $B_n(G_\bullet) = d_{n+1}(N_{n+1}(G_\bullet))$  y  $Z_n(G_\bullet) = \text{Ker}(d_n) \cap N_n(G_\bullet)$ . Se define el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $G_\bullet$ ,  $\pi_n(G_\bullet)$ ,  $n \geq 0$ , como el  $n$ -ésimo grupo de homología del complejo  $N_\star(G_\bullet)$ , es decir,  $\pi_n(G_\bullet) = \frac{Z_n(G_\bullet)}{B_n(G_\bullet)}$  y  $\pi_0(G_\bullet) = \text{Coker}(d_0)$ .

Es claro que  $B_n$ ,  $Z_n$  y  $\pi_n$  son funtores de la categoría de grupos simpliciales en la categoría de grupos.

Es conocido que todo grupo simplicial, visto como conjunto simplicial es de Kan. Entonces es fácil comprobar que  $\pi_n(G_\bullet) = \pi_n(G_\bullet, 0)$  (ver [54])

**Proposición 1.2.15.** Sean  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  dos morfismos de grupos simpliciales y supongamos que existe una homotopía  $\{h_j^n\}_{0 \leq j \leq n}$  de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$ . Entonces  $\pi_n(f_\bullet) = \pi_n(g_\bullet)$ .

*Demostración:* Sea  $x \in Z_n(G_\bullet)$ . Si consideramos el elemento

$$y = (s_0 f_n(x) - h_0^n(x)) - (s_1 f_n(x) - h_1^n(x)) + \cdots + (-1)^n (s_n f_n(x) - h_n^n(x))$$

es fácil comprobar que  $y \in N_{n+1}(H_\bullet)$  y que  $d_{n+1}(y) = (-1)^n (f_n(x) - g_n(x))$ ; por tanto,  $f_n(x) - g_n(x) \in B_n(G_\bullet)$ , lo que implica que  $\pi_n(f_\bullet)[x] = \pi_n(g_\bullet)[x]$ . ■

Dado un conjunto simplicial  $K_\bullet$  denotaremos  $FK_\bullet$  al grupo simplicial que en dimensión  $n$  es el grupo libre sobre los  $n$ -símplices de  $K_\bullet$ , y con operadores cara y degeneración inducidos por los de  $K_\bullet$ . Ésto define un funtor  $F : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que es claramente adjunto por la izquierda al funtor de olvido  $U : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , que "olvida" la estructura de grupo.

Es claro que si a partir de un grupo simplicial  $G_\bullet$  calculamos  $\Delta^n(UG_\bullet)$  o  $\Lambda_k^n(UG_\bullet)$ , el conjunto que resulta tiene estructura de grupo al que denotaremos  $\Delta^n(G_\bullet)$  o  $\Lambda_k^n(G_\bullet)$ .

Podemos definir entonces, al igual que se hizo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , los funtores  $\text{cosk}^n : \text{Tr}^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (adjunto por la derecha al funtor  $n$ -truncación) y  $\text{Cosk}^n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$

Análogamente podemos definir el conúcleo simplicial (ver [23]), pero teniendo en cuenta que el coproducto en grupos no es la unión disjunta,

como en conjuntos, y que para hacer el cociente no basta tomar la relación de equivalencia generada por unas relaciones, sino la congruencia generada por tales relaciones. De esta forma, tenemos también los funtores  $sk^n : Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $Sk^n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , y se tiene la misma situación de adjunción que en conjuntos simpliciales:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Sk^n & & \\
 & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\
 \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) & \xrightleftharpoons[cosk^n]{tr^n} & Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) & \xrightleftharpoons[tr^n]{sk^n} & \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \\
 & \nwarrow & \text{---} & \swarrow & \\
 & & Cosk^n & & 
 \end{array}$$

En este caso  $Sk^n(G_\bullet)$  no es el subgrupo simplicial de  $G_\bullet$  generado por sus  $n$ -símplices. Ahora bien, existe un morfismo canónico  $Sk^n(G_\bullet) \rightarrow G_\bullet$  (el correspondiente por la adjunción  $sk^n \vdash tr^n$  al funtor  $Id : tr^n(G_\bullet) \rightarrow tr^n(G_\bullet)$ ) cuya imagen sí es el subgrupo simplicial de  $G_\bullet$  generado por sus  $n$ -símplices.

Es claro, tal y como están definidos los funtores  $U$  y  $Cosk^n$ , que dado un grupo simplicial  $G_\bullet$ ,  $Cosk^n(U(G_\bullet)) = U(Cosk^n(G_\bullet))$ , y por tanto,  $Sk^n(F(K_\bullet)) = F(Sk^n(K_\bullet))$ , ya que  $F \vdash U$  y  $Sk^n \vdash Cosk^n$ .

Estudiamos ahora cuanto valen los grupos de homotopía y el complejo de Moore del grupo simplicial  $Cosk^n(G_\bullet)$ , para un grupo simplicial  $G_\bullet$ .

**Proposición 1.2.16.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Entonces:*

$$N_q(Cosk^n(G_\bullet)) = \begin{cases} N_q(G_\bullet) & \text{si } q \leq n \\ Z_n(G_\bullet) & \text{si } q = n + 1 \\ 0 & \text{si } q \geq n + 2 \end{cases}$$

*Demostración:* Puesto que  $G_\bullet$  y  $Cosk^n(G_\bullet)$  tiene la misma  $n$ -truncación, es claro que para  $q \leq n$ ,  $N_q(G_\bullet) = N_q(Cosk^n(G_\bullet))$ .

Un elemento  $x \in N_{n+1}(Cosk^n(G_\bullet))$  será de la forma  $(x_0, \dots, x_{n+1}) \in \Delta^{n+1}(G_\bullet)$  tal que  $d_i x = 0$ ,  $0 \leq i \leq n$ , y por tanto,  $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$ . Como  $x \in \Delta^{n+1}(G_\bullet)$ , deducimos que  $d_i x_{n+1} = d_n x_i = 0$ , de donde  $x_{n+1} \in Z_n(G_\bullet)$ , es decir, los elementos de  $N_{n+1}(Cosk^n(G_\bullet))$  son de la forma  $(0, \dots, 0, x_{n+1})$ ,  $x_{n+1} \in Z_n(G_\bullet)$ , y por tanto  $N_{n+1}(Cosk^n(G_\bullet))$  puede ser identificado con  $Z_n(G_\bullet)$ .

Para calcular  $N_{n+2}(Cosk^n(G_\bullet))$  tenemos en cuenta que  $Cosk^n(G_\bullet) = Cosk^{n+1}(Cosk^n(G_\bullet))$ , pues ambos se construyen a partir del núcleo simplicial del mismo grupo simplicial truncado, de donde  $N_{n+2}(Cosk^n(G_\bullet)) = N_{n+2}(Cosk^{n+1}(Cosk^n(G_\bullet))) = Z_{n+1}(Cosk^n(G_\bullet)) = 0$ , ya que el morfismo  $N_{n+1}(Cosk^n(G_\bullet)) \rightarrow N_n(Cosk^n(G_\bullet))$  es inyectivo, pues este morfismo es la inclusión  $Z_n(G_\bullet) \hookrightarrow N_n(G_\bullet)$ .

Iterando este proceso obtenemos que  $N_q(Cosk^n(G_\bullet)) = 0$ ,  $q \geq n + 2$ . ■

Como consecuencia se tiene:

**Corolario 1.2.17.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Entonces:*

$$\pi_q(\text{Cosk}^n(G_\bullet)) = \begin{cases} \pi_q(G_\bullet) & \text{si } q \leq n-1 \\ 0 & \text{si } q \geq n \end{cases}$$

Si  $G_\bullet$  es un grupo simplicial, elegir un  $n$ -símplice de  $G_\bullet$ , es decir, un elemento de  $G_n$ , sabemos que es equivalente a dar una aplicación simplicial  $\Delta[n] \rightarrow U(G_\bullet)$ . Utilizamos ahora la adjunción  $F \vdash U$  y deducimos que dar un  $n$ -símplice de  $G_\bullet$  es equivalente a dar en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  un morfismo  $F\Delta[n] \rightarrow G_\bullet$ . Análogamente, dar un elemento de  $\Delta^n(G_\bullet)$  (resp.  $\Lambda_k^n(G_\bullet)$ ) es equivalente a dar un morfismo simplicial  $F \overset{\bullet}{\Delta}[n] \rightarrow G_\bullet$  (resp.  $F\Delta[n, k] \rightarrow G_\bullet$ ).

El razonamiento anterior nos dice que un morfismo  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  de grupos simpliciales es una fibración de Kan si y sólo si tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

Ésto nos sugiere la siguiente definición

**Definición 1.2.18.** *Un morfismo  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una fibración de Kan en dimensión  $n$  ( $n \geq 1$ ) si tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$ .*

Definimos ahora unas biyecciones en un grupo simplicial que nos van a permitir caracterizar de forma sencilla algunas clases de morfismos.

**Definición 1.2.19.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Para cada  $j$ ,  $0 \leq j < n$ , definimos  $\alpha_j : G_n \rightarrow G_n$  por:*

$$\alpha_j(x) = s_j d_{j+1} x - x + s_j d_j x$$

Veamos algunas propiedades que verifica esta aplicación:

**Proposición 1.2.20.** *La aplicación  $\alpha_j : G_n \rightarrow G_n$  es una biyección cuya inversa es ella misma y que verifica además:*

$$d_i \alpha_j = \begin{cases} \alpha_{j-1} d_i & 0 \leq i < j \\ d_{j+1} & i = j \\ d_j & i = j + 1 \\ \alpha_j d_i & j + 1 < i \leq n - 1 \end{cases}$$

*Demostración:* Si  $x \in G_n$ , entonces  $\alpha_j \alpha_j(x) =$

$$= s_j d_{j+1} (s_j d_{j+1} x - x + s_j d_j x) - (s_j d_{j+1} x - x + s_j d_j x) +$$

$$\begin{aligned}
& +s_j d_j (s_j d_{j+1} x - x + s_j d_j x) = \\
& = s_j d_{j+1} s_j d_{j+1} x - s_j d_{j+1} x - s_j d_{j+1} s_j d_j x - s_j d_j x + x - \\
& \quad - s_j d_{j+1} x + s_j d_j s_j d_{j+1} x - s_j d_j x + s_j d_j s_j d_j x = \\
& s_j d_{j+1} x - s_j d_{j+1} x - s_j d_j x + s_j d_j x + x - s_j d_{j+1} x + s_j d_{j+1} x - s_j d_j x + s_j d_j x = x.
\end{aligned}$$

Ahora:

- Si  $i < j$  entonces:

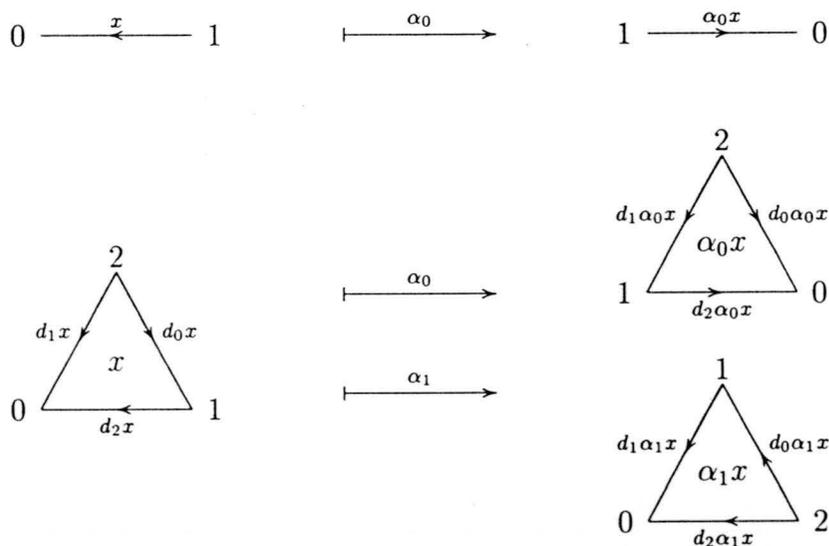
$$\begin{aligned}
d_i(\alpha_j x) &= d_i(s_j d_{j+1} x - x + s_j d_j x) = d_i s_j d_{j+1} x - d_i x + d_i s_j d_j x = \\
&= s_{j-1} d_i d_{j+1} x - d_i x + s_{j-1} d_i d_j x = s_{j-1} d_j d_i x - d_i x + s_{j-1} d_{j-1} d_i x = \alpha_{j-1}(d_i x)
\end{aligned}$$

- Si  $i > j + 1$  se razona de forma análoga.

$$- d_j \alpha_j x = d_j s_j d_{j+1} x - d_j x + d_j s_j d_j x = d_{j+1} x - d_j x + d_j x = d_{j+1} x$$

$$- d_{j+1} \alpha_j x = d_{j+1} d_j d_{j+1} x - d_{j+1} x + d_{j+1} s_j d_j x = d_{j+1} x - d_{j+1} x + d_j x = d_j x$$

Si representamos un  $n$ -símplice  $x$  como un tetraedro  $n$ -dimensional (un 1-símplice como un segmento, un 2-símplice como un triángulo, etc.) en el que los vértices están numerados desde 0 hasta  $n$ , y donde  $d_i x$  representa la cara que no contiene al vértice  $i$ , la aplicación  $\alpha_j$  que acabamos de definir representa la simetría que resulta de aplicarle al conjunto de vértices la permutación  $(j, j + 1)$ . Por ejemplo:



Notemos que estas aplicaciones no son morfismos de grupos aunque si son naturales, en el sentido de que dado  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales, entonces  $f_n \alpha_j = \alpha_j f_n$ .

De acuerdo con la proposición anterior, tenemos que:

**Lema 1.2.21.** Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial y  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Delta^n(G_\bullet)$ . Entonces  $(\alpha_{j-1}x_0, \dots, \alpha_{j-1}x_{j-1}, x_{j+1}, x_j, \alpha_j x_{j+2}, \dots, \alpha_j x_n) \in \Delta^n(G_\bullet)$ .

*Demostración:* Llamemos al anterior elemento  $(y_0, \dots, y_n)$ . Debemos probar que si  $i < k$  entonces  $d_i y_k = d_{k-1} y_i$ , para lo cual empezamos a distinguir casos:

-  $0 \leq i < k \leq j-1$ . Entonces,  $d_i y_k = d_i \alpha_{j-1} x_k = \alpha_{j-2} d_i x_k = \alpha_{j-2} d_{k-1} x_i = d_{k-1} \alpha_{j-1} x_i = d_{k-1} y_i$ .

-  $0 \leq i < k = j$ . Entonces  $d_i y_k = d_i x_{j+1} = d_j x_i = d_{j-1} \alpha_{j-1} x_i = d_{k-1} y_i$

-  $0 \leq i < j; k = j+1$ . Entonces,  $d_i y_k = d_i x_j = d_{j-1} x_i = d_j \alpha_{j-1} x_i = d_j y_i = d_{k-1} y_i$

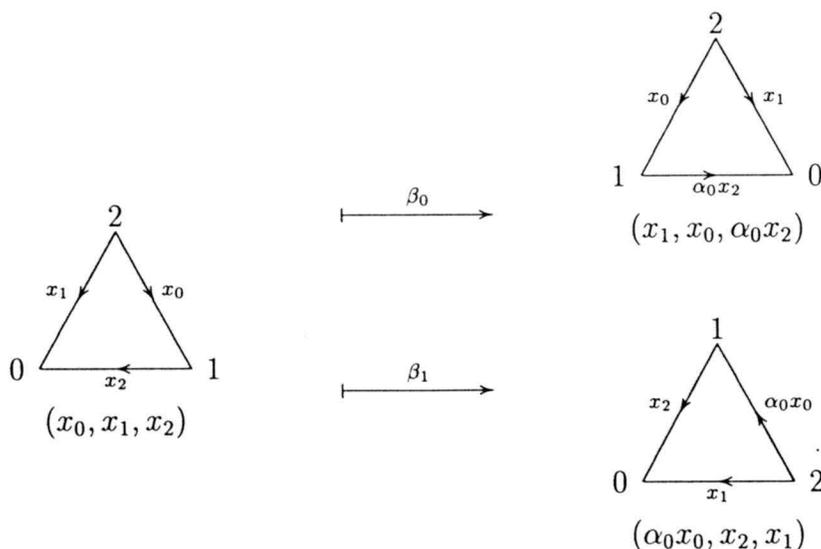
-  $0 \leq i < j; k \geq j+2$ . Entonces,  $d_i y_k = d_i \alpha_j x_k = \alpha_{j-1} d_i x_k = \alpha_{j-1} d_{k-1} x_i = d_{k-1} \alpha_{j-1} x_i = d_{k-1} y_i$

El resto de los casos se hace de manera análoga. ■

Este lema nos permite definir una aplicación  $\beta_j : \Delta^n(G_\bullet) \rightarrow \Delta^n(G_\bullet)$ , que claramente verifica que  $(\beta_j)^2 = Id_{\Delta^n(G_\bullet)}$ ; por tanto,  $\beta_j$  es una biyección y además, si  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es un morfismo de grupos simpliciales, se tiene una aplicación inducida  $\Delta^n(G_\bullet) \rightarrow \Delta^n(H_\bullet)$  y el siguiente cuadrado es conmutativo:

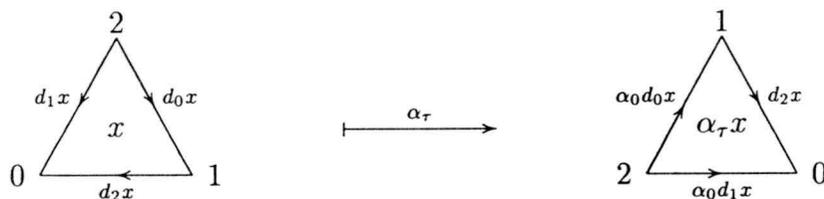
$$\begin{array}{ccc} \Delta^n(G_\bullet) & \xrightarrow{\beta_j} & \Delta^n(G_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n(H_\bullet) & \xrightarrow{\beta_j} & \Delta^n(H_\bullet) \end{array}$$

Si representamos un elemento de  $\Delta^n(G_\bullet)$  como las caras de un tetraedro n-dimensional, se tiene por ejemplo:



Notemos que  $\alpha_j$ , sobre los "vértices" de un  $n$ -símplice  $x$  actúa como la permutación  $(j, j+1)$ , y por tanto, en lugar de  $\alpha_j$  escribamos  $\alpha_{(j, j+1)}$ . Si ahora elegimos un elemento  $\tau \in S_{n+1}$  (conjunto de permutaciones del conjunto  $\{0, 1, \dots, n\}$ ), es conocido que éste puede ser expresado como composición de elementos de la forma  $(j, j+1)$ . Supongamos entonces que tenemos  $\tau = \sigma_1 \dots \sigma_k$  donde  $\sigma_i$  es una trasposición que intercambia dos números consecutivos. Definimos  $\alpha_\tau$  como la composición  $\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_k}$ . Puede comprobarse que así definida, no depende de la descomposición que elijamos.

Tenemos así, para cada  $\tau \in S_{n+1}$ ,  $\alpha_\tau : G_n \rightarrow G_n$ , de forma que  $\alpha_{\sigma\tau} = \alpha_\sigma \alpha_\tau$  y  $\alpha_{Id} = Id$ . Por ejemplo, si  $\tau = (0, 1, 2) = (0, 1)(1, 2)$ , entonces  $\alpha_\tau(x) = \alpha_0(\alpha_1(x))$ .



que como vemos es un "giro" de  $120^\circ$ .

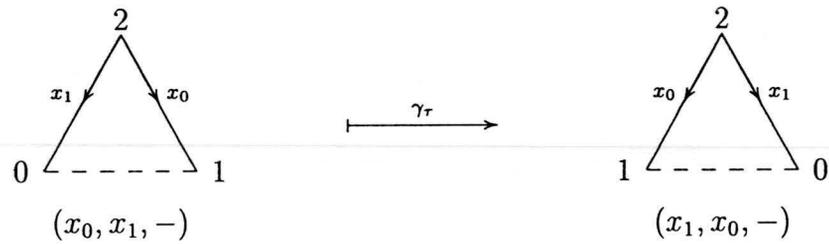
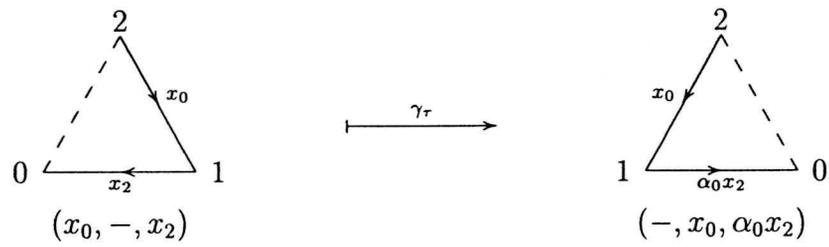
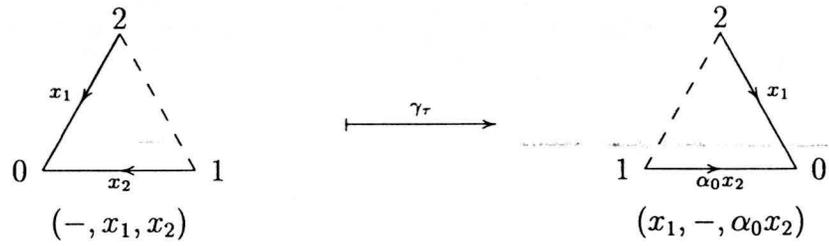
De forma análoga podemos definir, para cada  $\tau \in S_{n+1}$ ,  $\beta_\tau : \Delta^n(G_\bullet) \rightarrow \Delta^n(G_\bullet)$  y también, para cada  $\tau \in S_{n+1}$  y cada  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , biyecciones  $\gamma_\tau : \Lambda_k^n(G_\bullet) \rightarrow \Lambda_{\tau(k)}^n(G_\bullet)$ .

Así, si  $\tau = (0, 1)$ , tenemos:

$$\gamma_\tau : \Lambda_0^2(G_\bullet) \rightarrow \Lambda_1^2(G_\bullet); \quad \gamma_\tau(-, x_1, x_2) = (x_1, -, \alpha_0 x_2)$$

$$\gamma_\tau : \Lambda_1^2(G_\bullet) \rightarrow \Lambda_0^2(G_\bullet); \quad \gamma_\tau(x_0, -, x_2) = (-, x_0, \alpha_0 x_2)$$

$$\gamma_\tau : \Lambda_2^2(G_\bullet) \rightarrow \Lambda_2^2(G_\bullet); \quad \gamma_\tau(x_0, x_1, -) = (x_1, x_0, -)$$



Dado un grupo simplicial  $G_\bullet$  sabemos que:

$$G_n \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(G_p)}(F\Delta[n], G_\bullet)$$

$$\Delta^n(G_\bullet) \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(G_p)}(F\dot{\Delta}[n], G_\bullet)$$

$$\Lambda_k^n(G_\bullet) \cong \text{Hom}_{\text{Simp}(G_p)}(F\Delta[n, k], G_\bullet)$$

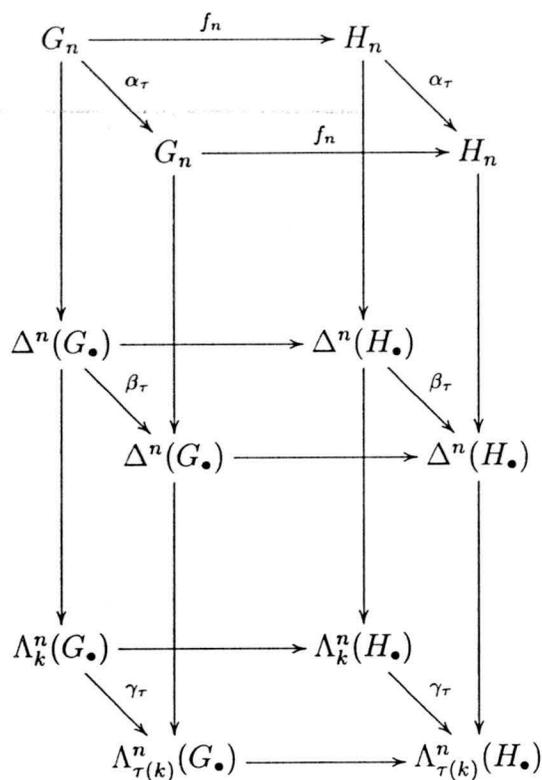
y puesto que se tiene la siguiente sucesión de morfismos (inclusiones)

$$F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$$

tenemos morfismos naturales:

$$G_n \rightarrow \Delta^n(G_\bullet) \rightarrow \Lambda_k^n(G_\bullet)$$

Es fácil comprobar que para cada  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  y cada  $\tau \in S_{n+1}$  el diagrama siguiente es conmutativo



Estas biyecciones nos permiten enunciar los siguientes resultados:

**Lema 1.2.22.** Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales y sea  $n \geq 1$ .

- i)  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$ , si y sólo si  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\Delta[n]$
- ii)  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\dot{\Delta}[n]$ ,  $0 \leq k \leq n$ , si y sólo si  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\dot{\Delta}[n]$ .

*Demostración:*

- i) Supongamos que  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ , y sea  $k$  un número entre 0 y  $n$ . Queremos ver que  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$  para lo que consideramos un diagrama

conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, k] & \longrightarrow & G_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow f_{\bullet} \\ F\Delta[n] & \longrightarrow & H_{\bullet} \end{array}$$

en el que tratamos de encontrar levantamiento, es decir, dado  $y \in H_n$  y  $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_k^n(G_{\bullet})$  tales que  $f_{n-1}x_i = d_i y$ ,  $i \neq k$ , queremos encontrar  $x \in G_n$  tal que  $f_n(x) = y$  y  $d_i x = x_i$ .

Sea  $\tau = (k, n) \in S_{n+1}$ . Entonces  $\gamma_{\tau}(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \in \Lambda_n^n(G_{\bullet})$ ,  $\alpha_{\tau}(y) \in H_n$  y ambos elementos determinan un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, n] & \longrightarrow & G_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow f_{\bullet} \\ F\Delta[n] & \longrightarrow & H_{\bullet} \end{array}$$

en el que existe un levantamiento que nos determina un elemento  $x' \in G_n$ . El elemento  $x = \alpha_{\tau}(x')$  es entonces el requerido para el primer levantamiento. La otra implicación es trivial.

ii) Se demuestra igual que i).

■

Utilizamos ahora este lema para dar algunos resultados técnicos referentes a propiedades de levantamiento y que usaremos posteriormente. Comenzamos con un lema que nos habla de la inyectividad del morfismo  $\pi_n(f_{\bullet})$ .

**Lema 1.2.23.** *Sea  $f_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales. Son equivalentes:*

i)  $\pi_n(f_{\bullet})$  es inyectiva.

ii) El morfismo punteado en el siguiente diagrama es sobreyectivo.

$$\begin{array}{ccccc} B_n(G_{\bullet}) & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & B_n(H_{\bullet}) \times_{Z_n(H_{\bullet})} Z_n(G_{\bullet}) & \longrightarrow & Z_n(G_{\bullet}) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & B_n(H_{\bullet}) & \longrightarrow & Z_n(H_{\bullet}) \end{array}$$

*Demostración:* Supongamos que  $\pi_n(f_\bullet)$  es inyectiva y sea  $(y, x)$  un elemento de  $B_n(H_\bullet) \times_{Z_n(H_\bullet)} Z_n(G_\bullet)$ . Entonces,  $\pi_n(f_\bullet)[x] = 0$  puesto que  $f_n(x) = y$  e  $y \in B_n(H_\bullet)$ , lo que implica que  $[y] = 0$ , es decir,  $y \in B_n(G_\bullet)$ ; y por tanto  $y$  es una preimagen del par  $(y, x)$ .

Recíprocamente, supongamos que el morfismo  $B_n(G_\bullet) \rightarrow B_n(H_\bullet) \times_{Z_n(H_\bullet)} Z_n(G_\bullet)$  es sobreyectivo y sea  $x \in Z_n(G_\bullet)$  tal que  $\pi_n(f_\bullet)[x] = 0$ . Entonces  $f_n(x) \in B_n(H_\bullet)$ , lo que implica que  $(f_n(x), x) \in B_n(H_\bullet) \times_{Z_n(H_\bullet)} Z_n(G_\bullet)$ , es decir,  $x \in B_n(G_\bullet)$  y por tanto,  $[x] = 0$ . ■

**Lema 1.2.24.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales*

- i)  *$f_\bullet$  es una fibración de Kan en dimensión  $n$  si y sólo si  $N_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo.*
- ii)  *$f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F \overset{\bullet}{\Delta} [n] \hookrightarrow F\Delta[n]$  si y sólo si  $Z_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo y  $\pi_{n-1}(f_\bullet)$  es inyectivo.*
- iii)  *$f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta} [n]$  si y sólo si el morfismo  $Z_{n-1}(f_\bullet)$  es sobreyectivo.*

*Demostración:*

- i) Sabemos, por el lema 1.2.22 que  $f_\bullet$  es una fibración de Kan en dimensión  $n$  si y sólo si  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ .

Supongamos que  $f_\bullet$  tiene la RLP respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\Delta[n]$  y sea  $y \in N_n(H_\bullet)$ . Sea  $\bar{y} : F\Delta[n] \rightarrow H_\bullet$  el morfismo de grupos simpliciales tal que  $\bar{y}_n(\Delta_n) = y$ . Entonces, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, n] & \xrightarrow{0} & G_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow f_\bullet \\ F\Delta[n] & \longrightarrow & H_\bullet \end{array}$$

y por tanto, existe levantamiento  $h_\bullet : F\Delta[n] \rightarrow G_\bullet$ . Sea  $x = h_n(\Delta_n)$ . El que el triángulo superior sea conmutativo, nos dice que  $x \in N_n(G_\bullet)$ , y el que lo sea el inferior que  $f_n(x) = y$ . Deducimos entonces que  $N_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo.

Recíprocamente, supongamos que  $N_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo. Sea entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, n] & \longrightarrow & G_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow f_\bullet \\ F\Delta[n] & \longrightarrow & H_\bullet \end{array}$$

lo que nos da elementos  $y \in H_n$  y  $(x_0, \dots, x_{n-1}, -) \in \Lambda_n^n(G_\bullet)$  tales que  $f_{n-1}(x_i) = d_i y$ . Puesto que  $G_\bullet$  es (como conjunto simplicial) de Kan, existe  $z \in G_n$  tal que  $d_i z = x_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Veamos que  $y - f_n(z) \in N_n(H_\bullet)$ , para lo cual tomamos  $i$  tal que  $0 \leq i \leq n-1$ , y tenemos que

$$d_i(y - f_n(z)) = d_i y - d_i f_n(z) = d_i y - f_{n-1} d_i z = d_i y - f_{n-1} x_i = 0$$

Por tanto, existe  $x' \in N_n(G_\bullet)$  tal que  $f_n(x') = y - f_n(z)$ . Tomamos  $x = x' + z$  y este elemento verifica:

$$d_i x = d_i(x' + z) = 0 + x_i = x_i, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

$$f_n(x) = f_n(x' + z) = y - f_n(z) + f_n(z) = y$$

y por tanto  $x$  define un morfismo  $F\Delta[n] \rightarrow G_\bullet$  que es el levantamiento buscado.

- ii) Supongamos que  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\overset{\bullet}{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$  y sea  $y \in Z_n(H_\bullet)$ . Es claro que  $(x_0, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \in \Delta^n(G_\bullet)$  y que  $f_{n-1}(x_i) = d_i y$ . Por tanto existe  $x \in G_n$  tal que  $d_i(x) = x_i$  (luego  $x \in Z_n(G_\bullet)$ ) y  $f_n(x) = y$ . Deducimos así que  $Z_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo.

Para probar que  $\pi_{n-1}(f_\bullet)$  es inyectivo, utilizamos el lema 1.2.23. Sea  $(y, x) \in B_{n-1}(H_\bullet) \times_{Z_{n-1}(H_\bullet)} Z_{n-1}(G_\bullet)$ . Ésto quiere decir que:

$$d_i y = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1; \quad d_i x = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1; \quad y = f_{n-1} x.$$

de donde deducimos que existe  $t \in N_n(H_\bullet)$  tal que  $y = d_n t$ . Por tanto, el elemento  $(x_0, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x) \in \Delta^n(G_\bullet)$  y  $f_{n-1}(x_i) = d_i t$ . Existe entonces  $z \in G_n$  tal que  $d_i z = 0$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $d_n z = x$  y  $f_n(z) = t$ . Por tanto,  $x = d_n z \in B_{n-1}(G_\bullet)$ , lo que implica que es una preimagen para el elemento  $(y, x)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\pi_{n-1}(f_\bullet)$  es inyectiva, que  $Z_n(f_\bullet)$  es sobreyectiva y que tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccc} F\overset{\bullet}{\Delta}[n] & \longrightarrow & G_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow f_\bullet \\ F\Delta[n] & \longrightarrow & H_\bullet \end{array}$$

en el que queremos encontrar levantamiento. Ésto quiere decir que tenemos  $(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n(G_\bullet)$  e  $y \in H_n$  tales que  $d_i y = f_{n-1}(x_i)$  y queremos encontrar  $x \in G_n$  tal que  $d_i x = x_i$  y  $f_n x = y$ .

Puesto que  $G_\bullet$  es de Kan, existe  $x' \in G_n$  que verifica que  $d_i(x') = x_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Deducimos entonces:

- a) Si  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $d_i(f_n(x') - y) = f_{n-1}(d_i x') - d_i y = f_{n-1}(x_i) - f_{n-1}(x_i) = 0$ , luego  $f_n(x') - y \in N_n(H_\bullet)$ .
- b)  $d_n(f_n(x') - y) \in B_{n-1}(H_\bullet)$ .
- c) Si  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $d_i(d_n x' - x_n) = d_{n-1} d_i x' - d_i x_n = d_{n-1} x_i - d_{n-1} x_i = 0$ , luego  $d_n x' - x_n \in Z_{n-1}(G_\bullet)$ .
- d)  $d_n(f_n(x') - y) = f_{n-1} d_n x' - f_{n-1} x_n = f_{n-1}(d_n x' - x_n)$ , de donde  $(d_n(f_n(x') - y), d_n x' - x_n) \in B_{n-1}(H_\bullet) \times_{Z_{n-1}(H_\bullet)} Z_{n-1}(G_\bullet)$ .

Usando el lema 1.2.23, deducimos que  $d_n x' - x_n \in B_{n-1}(G_\bullet)$  y por tanto, existe  $x'' \in N_n(G_\bullet)$  tal que  $d_n x'' = d_n x' - x_n$ . Sea  $z = -x'' + x'$ . Entonces:

- Si  $0 \leq i \leq n$ ,  $d_i z = -d_i x'' + d_i x' = x_i$ .
- $d_n z = -d_n x'' + d_n x' = x_n - d_n x' + d_n x' = x_n$ .

Por consiguiente  $y - f_n(z) \in Z_n(H_\bullet)$  y como  $Z_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo, encontramos  $t \in Z_n(G_\bullet)$  tal que  $f_n(t) = y - f_n(z)$ . Finalmente tomamos  $x = t + z$ , lo que nos da:

- $f_n(x) = f_n(t + z) = y - f_n(z) + f_n(z) = y$
- $d_i x = d_i t + d_i z = 0 + x_i = x_i$

como se requería.

- iii) Notemos en principio que  $Z_{n-1}(f_\bullet) = N_n(\text{Cosk}^{n-1}(f_\bullet))$ . Por otra parte, puesto que  $\Delta[n, n]$  está generado por  $(n-1)$ -símplices,  $Sk^{n-1}(\Delta[n, n]) = \Delta[n, n]$ , y por definición,  $\dot{\Delta}[n] = Sk^{n-1}\Delta[n]$ , así que  $Sk^{n-1}F\Delta[n, n] = F\Delta[n, n]$  y  $Sk^{n-1}F\Delta[n] = F\dot{\Delta}[n]$ .

Tenemos entonces que  $Z_{n-1}(f_\bullet)$  es sobreyectivo si y sólo si el morfismo  $N_n(\text{Cosk}^{n-1}(f_\bullet))$  es sobreyectivo, y por el apartado i) del lema, ésto es equivalente a que  $\text{Cosk}^{n-1}(f_\bullet)$  tenga la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ , es decir, que dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n, n] & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n-1}(G_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \text{Cosk}^{n-1}(f_\bullet) \\ F\Delta[n, ] & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n-1}(H_\bullet) \end{array}$$

exista en él un levantamiento. Utilizando la adjunción  $Sk^{n-1} \vdash \text{Cosk}^{n-1}$  se tiene que encontrar levantamiento en tal diagrama es equivalente a

encontrarlo en el siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 Sk^{n-1}(F\Delta[n, n])(= F\Delta[n, n]) & \longrightarrow & G_{\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow f_{\bullet} \\
 Sk^{n-1}(F\Delta[n])(= F\dot{\Delta}[n]) & \longrightarrow & H_{\bullet}
 \end{array}$$

de donde deducimos que  $Z_{n-1}(f_{\bullet})$  es sobreyectivo si y sólo si  $f_{\bullet}$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\dot{\Delta}[n]$  ■

A partir de este lema deducimos:

**Lema 1.2.25.** *Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales.*

- i) *Si  $f_{\bullet}$  verifica la RLP con respecto a  $F\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ , entonces  $\pi_n(f_{\bullet})$  es sobreyectivo y  $\pi_{n-1}(f_{\bullet})$  es inyectivo.*
- ii) *Si  $f_{\bullet}$  verifica la RLP con respecto a  $F\Delta[n+1, n+1] \hookrightarrow F\Delta[n+1]$ ,  $\pi_n(f_{\bullet})$  es sobreyectivo y  $\pi_{n-1}(f_{\bullet})$  es inyectivo, entonces  $f_{\bullet}$  tiene la RLP con respecto a  $F\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ .*
- iii) *Si  $f_{\bullet}$  verifica la RLP con respecto a  $F\dot{\Delta}[n+1] \hookrightarrow F\Delta[n+1]$  y  $F\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ , entonces  $f_{\bullet}$  es una fibración de Kan en dimensión  $n+1$ .*

*Demostración:*

- i) Por el lema 1.2.24, sólo es necesario probar que  $\pi_n(f_{\bullet})$  es sobreyectivo, pero eso se deduce fácilmente del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 Z_n(G_{\bullet}) & \longrightarrow & \pi_n(G_{\bullet}) \\
 Z_n(f_{\bullet}) \downarrow & & \downarrow \pi_n(f_{\bullet}) \\
 Z_n(H_{\bullet}) & \longrightarrow & \pi_n(H_{\bullet})
 \end{array}$$

- ii) Sabemos que  $N_{n+1}(f_{\bullet})$  es sobreyectivo. El siguiente diagrama nos prueba que  $B_n(f_{\bullet})$  es también sobreyectivo,

$$\begin{array}{ccc}
 N_{n+1}(G_{\bullet}) & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n(G_{\bullet}) \\
 N_{n+1}(f_{\bullet}) \downarrow & & \downarrow B_n(f_{\bullet}) \\
 N_{n+1}(H_{\bullet}) & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n(H_{\bullet})
 \end{array}$$

Deducimos entonces que  $Z_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo a partir del diagrama de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccc} B_n(G_\bullet) & \hookrightarrow & Z_n(G_\bullet) & \twoheadrightarrow & \pi_n(G_\bullet) \\ B_n(f_\bullet) \downarrow & & Z_n(f_\bullet) \downarrow & & \downarrow \pi_n(f_\bullet) \\ B_n(H_\bullet) & \hookrightarrow & Z_n(H_\bullet) & \twoheadrightarrow & \pi_n(H_\bullet) \end{array}$$

Esto, junto con que  $\pi_{n-1}(f_\bullet)$  es inyectivo, y el lema 1.2.23 nos demuestra que  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F \overset{\bullet}{\Delta} [n] \hookrightarrow F \Delta [n]$ .

iii) Puesto que  $Z_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo (ver lema 1.2.24.ii), deducimos que el morfismo  $B_n(H_\bullet) \times_{Z_n(H_\bullet)} Z_n(G_\bullet) \rightarrow B_n(H_\bullet)$  en el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} B_n(H_\bullet) \times_{Z_n(H_\bullet)} Z_n(G_\bullet) & \longrightarrow & Z_n(G_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_n(H_\bullet) & \longrightarrow & Z_n(H_\bullet) \end{array}$$

es sobreyectivo. El lema 1.2.24 nos dice también que  $\pi_n(f_\bullet)$  es inyectivo y por el lema 1.2.23 deducimos que el morfismo  $B_n(G_\bullet) \rightarrow B_n(H_\bullet) \times_{Z_n(H_\bullet)} Z_n(G_\bullet)$  es sobreyectivo, lo que nos dice que  $B_n(f_\bullet)$  es sobreyectivo.

El diagrama de sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccc} Z_{n+1}(G_\bullet) & \hookrightarrow & N_{n+1}(G_\bullet) & \twoheadrightarrow & B_n(G_\bullet) \\ Z_{n+1}(f_\bullet) \downarrow & & N_{n+1}(f_\bullet) \downarrow & & \downarrow B_n(f_\bullet) \\ Z_{n+1}(H_\bullet) & \hookrightarrow & N_{n+1}(H_\bullet) & \twoheadrightarrow & B_n(H_\bullet) \end{array}$$

nos demuestra que  $N_{n+1}(f_\bullet)$  es sobreyectivo y, por tanto, según *i*), que  $f_\bullet$  es una fibración de Kan en dimensión  $n+1$ . ■

En lo que sigue estudiaremos la estructura simplicial en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$

Sean ahora  $H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ . Definimos el grupo simplicial  $H_\bullet^{K_\bullet}$  como el grupo cuyo conjunto de  $n$ -símplices es  $\text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_\bullet \times \Delta[n], U(H_\bullet))$ , y la estructura de grupo viene inducida por la de  $H_\bullet$ . Es claro que  $U(H_\bullet^{K_\bullet}) = (U(H_\bullet))^{K_\bullet}$ .

Tenemos definido así un bifuntor

$$(-)^{(-)} : (\mathbf{Simp}(\mathbf{Set}))^{op} \times (\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

Al igual que en el caso de conjuntos simpliciales, si  $K_\bullet = I$ ,  $H_\bullet^I$  puede ser identificado con el grupo simplicial que tiene como  $n$ -símplices el grupo

$$(H_\bullet^I)_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in (H_{n+1})^{n+1} / d_i x_i = d_i x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$$

y los operadores cara y degeneración están definidos como en el caso de conjuntos simpliciales.

Puesto que hay dos aplicaciones  $\delta_0, \delta_1 : \Delta[0] \rightarrow I$  (tantas como 0-símplices tenga  $I$ ), tenemos dos morfismos de grupos simpliciales  $\partial_0, \partial_1 : (H_\bullet)^I \rightarrow (H_\bullet)^{\Delta[0]}$ , pero  $((H_\bullet)^{\Delta[0]})_n = \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(\Delta[n] \times \Delta[0], H_\bullet) \cong H_n$ . Utilizando estas identificaciones puede probarse que  $\partial_0$  y  $\partial_1$  están definidas por

$$(\partial_0)_n(x_0, \dots, x_n) = d_{n+1}x_n, \quad (\partial_1)_n(x_0, \dots, x_n) = d_0x_0$$

Al igual que en conjuntos simpliciales tenemos ahora:

**Proposición 1.2.26.** Sean  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  dos morfismos de grupos simpliciales. Una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un morfismo  $h_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet^I$  verificando que  $(\partial_0) \circ h_\bullet = g_\bullet$  y  $(\partial_1) \circ h_\bullet = f_\bullet$ .

Si  $K_\bullet$  un conjunto simplicial estudiamos a continuación el funtor  $(-)^{K_\bullet} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Supongamos que  $G_\bullet, H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y sea  $g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet^{K_\bullet}$ . Esto nos da una aplicación simplicial (a la que llamaremos  $g_\bullet$  en lugar de  $U(g_\bullet)$ ) entre los correspondientes conjuntos simpliciales subyacentes. Utilizando la adjunción que se tiene en conjuntos simpliciales entre los funtores  $(- \times K_\bullet) \vdash (-)^{K_\bullet}$  (ver proposición 1.2.3), tenemos una aplicación simplicial  $f_\bullet : G_\bullet \times K_\bullet \rightarrow H_\bullet$ , es decir, para cada  $k \in K_n$ , tenemos  $f_k : G_n \rightarrow H_n$  verificando que  $d_i(f_k(x)) = f_{d_i k}(d_i x)$  y  $s_i(f_k(x)) = f_{s_i k}(s_i x)$ .

El hecho de que la aplicación  $g_\bullet$  no es una aplicación simplicial cualquiera, sino que es morfismo de grupos simpliciales se traduce en términos de las aplicaciones  $f_k$  como sigue:

**Lema 1.2.27.** Sean  $G_\bullet, H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y sea  $g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet^{K_\bullet}$  una aplicación simplicial entre los correspondientes conjuntos subyacentes. Sea  $f_\bullet : G_\bullet \times K_\bullet \rightarrow H_\bullet$  la aplicación correspondiente por la adjunción  $(- \times K_\bullet) \vdash (-)^{K_\bullet}$ .

Entonces  $g_\bullet$  es un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  si y sólo si para cada  $k \in K_n$  la aplicación  $f_k : G_n \rightarrow H_n$  definida por  $f_k(x) = f_n(x, k)$  es un morfismo de grupos.

*Demostración:* Utilizaremos para ésto la proposición 1.2.3.

Supongamos que  $g_\bullet$  es un morfismo en grupos simpliciales y sea  $k \in K_n$ . Entonces,  $\forall x, y \in G_n$

$$\begin{aligned} f_k(x + y) &= f_n(x + y, k) = g_n(x + y)(k, \Delta_n) = [g_n(x) + g_n(y)](k, \Delta_n) = \\ &= g_n(x)(k, \Delta_n) + g_n(y)(k, \Delta_n) = f_k(x) + f_k(y). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $f_k$  es morfismo para cualquier  $k \in K_n$ , necesitamos ver que para cualesquiera  $x, y \in G_n$ , las aplicaciones simpliciales  $g_n(x + y)$ ,  $(g_n x + g_n y) : K_\bullet \times \Delta[n] \rightarrow H_\bullet$  coinciden. Para ello, sea  $(k, \sigma) \in K_n \times \Delta[n]_m$  y supongamos que podemos expresar  $\sigma = sd\Delta_n$  donde  $s$  es una composición de degeneraciones y  $d$  una composición de caras. Entonces:

$$\begin{aligned} (g_n x + g_n y)(k, \sigma) &= g_n x(k, \sigma) + g_n y(k, \sigma) = f_m(sdx, k) + f_m(sdy, k) = \\ &= f_k(sdx) + f_k(sdy) = f_k(sd(x + y)) = f_m(sd(x + y), k) = g_n(x + y)(k, \sigma) \end{aligned}$$

Esto sugiere la siguiente:

**Definición 1.2.28.** Sea  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ . Se define el grupo simplicial  $G_\bullet \otimes K_\bullet$  como sigue:

El grupo de  $n$ -símplices es  $\coprod_{k \in K_n} (G_n)_k$  donde  $(G_n)_k = G_n$ , los operadores cara,  $d_i : \coprod_{k \in K_n} (G_n) \rightarrow \coprod_{k' \in K_{n-1}} (G_{n-1})_{k'}$ , están definidos por la condición  $d_i u_k = u_{d_i k} d_i$  para cada  $k \in K_n$ , y las degeneraciones,  $s_i : \coprod_{k \in K_n} (G_n) \rightarrow \coprod_{k' \in K_{n+1}} (G_{n+1})_{k'}$  por la condición  $s_i u_k = u_{s_i k} s_i$ , donde  $u_k$  denota la inyección en el factor de índice  $k$ .

Es fácil ver que el objeto así definido es un grupo simplicial. Más aún, se tiene definido un bifunctor

$$(- \otimes -) : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \times \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

Supongamos que tenemos un morfismo de grupos simpliciales  $f_\bullet : G_\bullet \otimes K_\bullet \rightarrow H_\bullet$ . Entonces, para cada  $k \in K_n$ , tenemos  $f_k : G_n \rightarrow H_n$ , definido como la composición  $G_n \xrightarrow{u_k} \coprod_{k \in K_n} G_n \xrightarrow{f_n} H_n$ . Ésto nos da una aplicación  $f : G_\bullet \times K_\bullet \rightarrow H_\bullet$ , tal que, que para cada  $k \in K_n$ , la aplicación  $f(-, k) : G_n \rightarrow H_n$  es morfismo de grupos. Fácilmente se ve que la condición de que  $f_\bullet$  sea simplicial es equivalente a que lo sea  $f$ . Como consecuencia tenemos:

**Corolario 1.2.29.** *Dados  $G_\bullet, H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , existe una biyección entre los morfismos  $G_\bullet \otimes K_\bullet \rightarrow H_\bullet$  y las aplicaciones simpliciales  $G_\bullet \times K_\bullet \rightarrow H_\bullet$  que al fijar la segunda variable son morfismos de grupos.*

**Corolario 1.2.30.** *Sea  $K_\bullet$  un conjunto simplicial. Entonces el functor  $- \otimes K_\bullet : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es un adjunto por la izquierda al functor  $(-)^{K_\bullet} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .*

Puesto que  $H_\bullet^{K_\bullet \times L_\bullet} \cong (H_\bullet^{K_\bullet})^{L_\bullet}$  deducimos que  $G_\bullet \otimes (K_\bullet \times L_\bullet) \cong (G_\bullet \otimes K_\bullet) \otimes L_\bullet$ .

Notemos que si definimos el functor  $- \otimes K_\bullet : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  de forma análoga a como lo hemos hecho en grupos (pero utilizando el coproducto en la categoría de conjuntos), obtenemos exactamente el functor  $- \times K_\bullet$ , ya que dados dos conjuntos  $X$  e  $Y$ ,  $X \times Y \cong \coprod_{y \in Y} X$ .

Dados ahora  $G_\bullet, H_\bullet$  dos grupos simpliciales, se define el conjunto simplicial  $\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet)$  como aquel que tiene como  $n$ -símplices las aplicaciones simpliciales  $f_\bullet : G_\bullet \times \Delta[n] \rightarrow H_\bullet$  tales que al fijar la segunda variable se tiene un morfismo de grupos, y los operadores cara y degeneración se definen igual a como se hizo cuando se habló de conjuntos simpliciales. Podemos decir también utilizando el corolario 1.2.29 que el conjunto de  $n$ -símplices del conjunto simplicial  $\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet)$  es  $Hom_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet \otimes \Delta[n], H_\bullet)$ .

Análogamente al caso de conjuntos simpliciales, tenemos ahora:

**Proposición 1.2.31.** *Sean  $G_\bullet, H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ . Entonces existe una equivalencia natural:*

$$\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet \otimes K_\bullet, H_\bullet) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, (H_\bullet)^{K_\bullet})$$

Notemos que dados dos morfismos

$$f_\bullet, g_\bullet \in \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet) = (\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet))_0$$

una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un 1-símplice de  $\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet)$ ,  $k_\bullet$ , tal que  $d_0 k_\bullet = f_\bullet$  y  $d_1 k_\bullet = g_\bullet$ .

Tenemos entonces cuatro formas equivalentes de dar una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$ , donde  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$ :

1. Como una familia de morfismos  $k_j^n : G_n \rightarrow H_n, 1 \leq j \leq n$ , verificando:

$d_0 k_1^n = f_{n-1} d_0$	$d_i k_j^n = k_{j-1}^{n-1} d_i \quad \text{si } i < j$	$s_i k_j^n = k_j^{n+1} s_i \quad \text{si } i \geq j$
$d_n k_n^n = g_{n-1} d_n$	$d_i k_j^n = k_j^{n-1} d_i \quad \text{si } i \geq j$	$s_i k_j^n = k_{j+1}^{n+1} s_i \quad \text{si } i < j$

2. Como una colección de morfismos  $h_j^n : G_n \rightarrow H_{n+1}$ ,  $0 \leq j \leq n$ , satisfaciendo las identidades:

$d_0 h_0^n = f_n$	$d_{n+1} h_n^n = g_n$	$d_i h_j^n = h_{j-1}^{n-1} d_i$	$si\ i < j$
$s_i h_j^{n-1} = h_{j+1}^n s_i$	$si\ i \leq j$	$d_{j+1} h_{j+1}^n = d_{j+1} h_j^n$	
$s_i h_j^{n-1} = h_j^n s_{i-1}$	$si\ i > j$	$d_i h_j^n = h_j^{n-1} d_{i-1}$	$si\ i > j + 1$

3. Como un 1-símplexe  $k_\bullet \in (\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet))_1$  tal que  $d_0(k_\bullet) = f_\bullet$  y  $d_1(k_\bullet) = g_\bullet$ .
4. Como un morfismo  $h_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet^I$  que al componer con  $\partial_0$  y  $\partial_1$  nos da  $g_\bullet$  y  $f_\bullet$  respectivamente.

En este análisis que estamos realizando sobre la categoría de grupos simpliciales nos ocupamos finalmente de dos familias importantes de subcategorías de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Para cada  $r \geq 0$  consideramos la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  de grupos simpliciales  $r$ -reducidos. Ésta es la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  formada por aquellos grupos simpliciales  $G_\bullet$  tales que  $G_q = 0$  para  $q < r$  (o equivalentemente,  $N_q(G_\bullet) = 0$   $q < r$ ), o si se quiere tales que  $tr^{r-1}(G_\bullet) = 0$ .

Obviamente existe un functor (la inclusión) con dominio  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  y codominio  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Veamos que este functor tiene adjunto tanto por la derecha como por la izquierda.

Supongamos que tenemos  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ ,  $H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$ . Si componemos  $f_\bullet$  con el morfismo canónico  $H_\bullet \rightarrow \text{Cosk}^{r-1} H_\bullet$  obtenemos un morfismo  $G_\bullet \rightarrow \text{Cosk}^{r-1}(H_\bullet)$  que está determinado por su  $(r-1)$ -truncación (basta recordar la adjunción  $tr^{r-1} \vdash \text{cosk}^{r-1}$ ). Pero como  $tr^{r-1}(G_\bullet) = 0$ , el morfismo  $G_\bullet \rightarrow \text{Cosk}^{r-1}(H_\bullet)$  es el morfismo cero. Deducimos entonces que  $f_\bullet$  factoriza a través de  $E_r(H_\bullet) = \text{Ker}(H_\bullet \rightarrow \text{Cosk}^{r-1}(H_\bullet))$ . Tenemos entonces una biyección  $\text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r}(G_\bullet, E_r(H_\bullet))$ , lo que nos dice que el functor  $E_r : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  es adjunto por la derecha al functor inclusión.

Es conocido que el functor  $N_\bullet$  es exacto a izquierda y, por tanto se tiene que  $N_q(E_r(H_\bullet)) = \text{Ker}[N_q(H_\bullet) \rightarrow N_q(\text{Cosk}^{r-1}(H_\bullet))]$  de donde:

**Proposición 1.2.32.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Entonces:*

$$N_q(E_r(G_\bullet)) = \begin{cases} 0 & si\ q \leq r - 1 \\ Z_r(G_\bullet) & si\ q = r \\ N_q(G_\bullet) & si\ q \geq r + 1 \end{cases}$$

*Demostración:* Utilizando la proposición 1.2.16, tenemos que calcular el núcleo del siguiente morfismo de complejos de cadenas de grupos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & N_{r+1}G_\bullet & \longrightarrow & N_r G_\bullet & \longrightarrow & N_{r-1}G_\bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & N_1 G_\bullet & \longrightarrow & N_0 G_\bullet \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z_{r-1}G_\bullet & \longrightarrow & N_{r-1}G_\bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & N_1 G_\bullet & \longrightarrow & N_0 G_\bullet
\end{array}$$

de donde se deduce fácilmente el enunciado de la proposición.  $\blacksquare$

Como consecuencia se tiene:

**Corolario 1.2.33.** *Sea  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Entonces:*

$$\pi_q(E_r(G_\bullet)) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \leq r-1 \\ \pi_q(G_\bullet) & \text{si } q \geq r \end{cases}$$

De forma dual a la construcción de  $E_r$  podemos definir el funtor  $L_r$  como  $L_r(G_\bullet) = \text{Coker}[Sk^{r-1}(G_\bullet) \rightarrow G_\bullet]$ . Obtenemos así un funtor  $L_r : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  que es adjunto por la derecha al funtor de inclusión  $I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Es claro que  $L_r I = E_r I = \text{Id}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r}$ , con lo que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  es una subcategoría plena, reflexiva y correflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y por tanto, los límites y los colímites se calculan como en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Al igual que hemos definido la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  podemos definir la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_r$  de conjuntos simpliciales  $r$ -reducidos como la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  formada por aquellos conjuntos simpliciales  $K_\bullet$  tales que  $K_q$  tiene un sólo elemento para  $q \leq r-1$ .

La categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  es, como observamos anteriormente, la subcategoría de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  cuyos objetos tiene complejo de Moore trivial en dimensión menor que  $r$ . De forma complementaria (y en algún sentido dual) se puede considerar, para todo  $n \geq 0$  la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  cuyos objetos tiene complejo de Moore trivial en dimensión  $> n$ . Esta categoría es usualmente denotada por  $\mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  pues coincide con la de  $n$ -hipergrupoides de grupos en el sentido de Duskin-Glenn (ver [42]), y es una subcategoría reflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Para describir el adjunto por la izquierda al funtor de inclusión necesitamos algunos resultados previos.

**Lema 1.2.34.** *Sean  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $H_\bullet \in \mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  y  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$ . Entonces, si  $x \in B_n(G_\bullet)$ ,  $f_n(x) = 0$ , y si  $x \in \bigcap_{i=0}^n d_i^{-1}(B_n(G_\bullet))$ ,  $f_{n+1}(x) = 0$*

*Demostración:* La primera parte es trivial pues  $f_n(x) \in B_n(H_\bullet)$  y  $B_n(H_\bullet) = 0$ . En cuanto a la segunda, también es fácil, pues  $d_i f_{n+1}(x) = f_n d_i(x) = 0$ , ya que  $d_i(x) \in B_n(G_\bullet)$ . Por tanto,  $f_{n+1}(x) \in N_{n+1}(H_\bullet)$ , de donde  $f_{n+1}(x) = 0$ .  $\blacksquare$

**Lema 1.2.35.** Sea  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y supongamos que  $N_n(G_\bullet) = N_{n+1}(G_\bullet) = 0$ . Entonces  $\Delta^{n+1}(G_\bullet) \cong G_{n+1}$ .

Como consecuencia, si  $G_\bullet \in \mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ ,  $G_\bullet = \mathit{Cosk}^{n+1}(G_\bullet)$

*Demostración:* Tenemos un morfismo de grupos  $\psi : G_{n+1} \rightarrow \Delta^{n+1}(G_\bullet)$ , definido como  $\psi(x) = (d_0x, \dots, d_{n+1}x)$ .

Es claro que  $\psi$  es inyectivo pues si  $x \in \mathit{Ker}(\psi)$ , entonces  $x \in N_{n+1}(G_\bullet) = 0$ .

Por otro lado sea  $(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Delta^{n+1}(G_\bullet)$ . Por ser  $G_\bullet$  de Kan, existe  $x \in G_{n+1}$  tal que  $d_i x = x_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Por otra parte,  $d_i(d_{n+1}x - x_{n+1}) = d_n d_i x - d_n x_i = 0$ , luego  $d_{n+1}x = x_{n+1}$ , lo que implica que  $\psi(x) = (x_0, \dots, x_{n+1})$ . ■

**Proposición 1.2.36.** Sea  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Definimos  $\mathcal{P}_n(G_\bullet)$  como el siguiente grupo simplicial:

$$\mathit{cosk}^{n+1} \left( \begin{array}{ccccccc} & & \xleftarrow{s_n} & & \xleftarrow{s_{n-1}} & & \xleftarrow{s_0} \\ & & \searrow^{s_0} & & \searrow^{s_0} & & \searrow^{s_0} \\ G_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{d_n} & G_{n-1} & \cdots & G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \\ \bigcap_{i=0}^n d_i^{-1} B_n(G_\bullet) & \xrightarrow{d_0} & B_n(G_\bullet) & \xrightarrow{d_0} & & & \\ & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & & \xrightarrow{d_0} \end{array} \right)$$

Entonces  $\mathcal{P}_n$  define un funtor  $\mathcal{P}_n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  que es adjunto por la izquierda al funtor de inclusión  $J : \mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

*Demostración:* Sea  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $H_\bullet \in \mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ , y sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$ . El lema 1.2.34 nos dice que el morfismo  $\mathit{tr}^{n+1}(f_\bullet)$  factoriza a través de

$$\frac{G_{n+1}}{\bigcap_{i=0}^n d_i^{-1} B_n(G_\bullet)} \xrightarrow{d_{n+1}} \frac{G_n}{B_n(G_\bullet)} \xrightarrow{d_n} G_{n-1} \cdots \rightrightarrows G_1 \xrightarrow{d_1} G_0$$

Puesto que  $\mathit{cosk}^{n+1}(\mathit{tr}^{n+1}(H_\bullet)) = H_\bullet$  (ver lema 1.2.35), obtenemos que  $f_\bullet$  induce un morfismo  $\mathcal{P}_n(G_\bullet) \rightarrow H_\bullet$ .

Es claro que  $N_{n+1}(\mathcal{P}_n(G_\bullet)) = 0$ , pues si  $x \in N_{n+1}(G_\bullet)$ ,  $d_i x = 0$  y claramente  $0 \in B_n(G_\bullet)$ , luego  $x = 0$ . La proposición 1.2.16 nos asegura que  $\mathcal{P}_n(G_\bullet) \in \mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$ . Hemos obtenido así una aplicación

$$\mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, J(H_\bullet)) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{P}_n(G_\bullet), H_\bullet).$$

La inversa de esta aplicación es obvia y así se tiene que  $\mathcal{P}_n \vdash J$ . ■

Dado un grupo simplicial  $G_\bullet$ , se deduce fácilmente de la definición que:

$$N_q(\mathcal{P}_n G_\bullet) = \begin{cases} N_q(G_\bullet) & \text{si } q \leq n-1 \\ \frac{N_n(G_\bullet)}{B_n(G_\bullet)} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \geq n+1 \end{cases}$$

lo que implica

$$\pi_q(\mathcal{P}_n G_\bullet) = \begin{cases} \pi_q(G_\bullet) & \text{si } q \leq n \\ 0 & \text{si } q \geq n+1 \end{cases}$$

Recordamos ahora (ver [54]) dos funtores adjuntos  $G : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1 \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $\bar{W} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1$  que utilizaremos posteriormente.

**Definición 1.2.37.** Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Se define su complejo clasificador  $\bar{W}(G_\bullet)$  como el siguiente conjunto simplicial:

- El conjunto de  $n$ -símplices  $(\bar{W}(G_\bullet))_n$  es:

$$(\bar{W}(G_\bullet))_0 = \{0\}; \quad (\bar{W}(G_\bullet))_n = G_{n-1} \times \cdots \times G_1 \times G_0$$

- los operadores cara son:

$$d_0(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (g_{n-2}, \dots, g_1, g_0)$$

$$d_i(g_{n-1}, \dots, g_0) = (d_{i-1}g_{n-1}, \dots, d_1g_{n-i+1}, g_{n-i-1} + d_0g_{n-i}, g_{n-i-2}, \dots, g_0)$$

$$d_n(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (d_{n-1}g_{n-1}, \dots, d_2g_2, d_1g_1)$$

- las degeneraciones son:

$$s_0(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (0, g_{n-1}, \dots, g_1, g_0)$$

$$s_i(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (s_{i-1}g_{n-1}, \dots, s_0g_{n-i}, 0, g_{n-i-1}, \dots, g_1, g_0)$$

La comprobación de que  $\bar{W}(G_\bullet)$  es un conjunto simplicial (reducido) y de que es de Kan es rutinaria.

**Definición 1.2.38.** Sea  $K_\bullet$  un conjunto simplicial reducido (es decir, 1-reducido). Se define el grupo de lazos para  $K_\bullet$  como el grupo simplicial  $GK_\bullet$ :

-  $(GK_\bullet)_n$  es el grupo libre sobre  $K_{n+1}$  módulo la relación  $s_0x = 0$  para cada  $x \in K_n$ . Para evitar confusiones, si  $x \in K_{n+1}$ , llamaremos  $\bar{x}$  al mismo elemento visto en  $(GK_\bullet)_n$ .

- Los operadores cara:

$$d_0 \bar{x} = \overline{d_1 x} - \overline{d_0 x}$$

$$d_i \bar{x} = \overline{d_{i+1} x} \quad i \geq 1$$

- Las degeneraciones:

$$s_i \bar{x} = \overline{s_{i+1} x}$$

**Proposición 1.2.39.** El funtor  $G$  es adjunto por la izquierda al funtor  $\overline{W}$ .

*Demostración:* Construiremos, para cada  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1$  y para cada  $H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , biyecciones:

$$\phi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(GK_\bullet, H_\bullet) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1}(K_\bullet, \overline{W}(H_\bullet))$$

$$\psi : \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_1}(K_\bullet, \overline{W}(H_\bullet)) \rightarrow \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(GK_\bullet, H_\bullet)$$

Sea  $f_\bullet : GK_\bullet \rightarrow H_\bullet$ . Definimos  $(\phi(f_\bullet))_n : K_n \rightarrow (H_{n-1} \times \cdots \times H_0)$  como

$$(\phi(f_\bullet))_n(k) = (f_{n-1}(\bar{x}), f_{n-2}(\overline{d_0 x}), \dots, f_0(\overline{d_0^{n-1} x}))$$

Sea ahora  $h_\bullet : K_\bullet \rightarrow \overline{W}(H_\bullet)$ . Definimos  $(\psi(h_\bullet))_n : (GK_\bullet)_n \rightarrow H_n$

$$(\psi(h_\bullet))_n(\bar{x}) = g_n$$

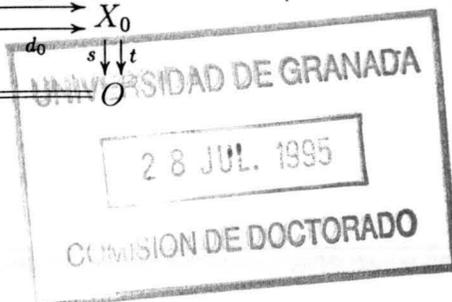
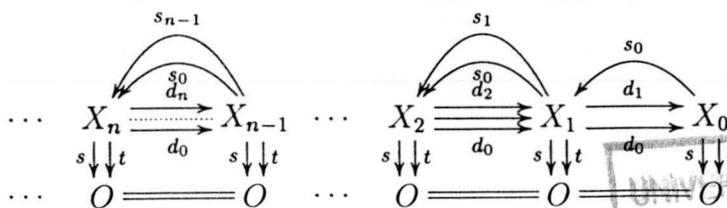
donde  $g_n$  es la primera coordenada de  $h_{n+1}(x)$ .

La demostración de que  $\phi(f_\bullet)$  y  $\psi(h_\bullet)$  son simpliciales, de la naturalidad de  $\phi$  y  $\psi$ , y de que son inversas la una de la otra es rutinaria. ■

### 1.3 Grupos simpliciales

Recordaremos a lo largo de esta sección algunos hechos relevantes en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  que es la subcategoría plena de la de grupos simpliciales  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$  (i.e. la de objetos simpliciales en la categoría de grupos) formada por aquellos  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$  cuyo conjunto simplicial de objetos es constante.

Si  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ ,  $X$  puede ser representado como un diagrama



donde  $X_i \xrightarrow[s]{t} O$  son grupoides, y

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ \downarrow t & & \downarrow t \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{s_i} & X_{n+1} \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ \downarrow t & & \downarrow t \\ O & \xlongequal{\quad} & O \end{array}$$

son funtores.

A los elementos de  $O$  los llamaremos objetos o vértices del grupoide simplicial  $X$ . Dados  $A, B \in O$ , llamaremos  $X_n(A, B)$  al conjunto de morfismos  $A \rightarrow B$  del grupoide  $X_n \xrightarrow[s]{t} O$  y  $X(A, B)$  al conjunto simplicial de morfismos de  $A$  en  $B$ . Si  $A = B$  tenemos que  $X(A, B) = X(A, A)$  es un grupo simplicial, llamado grupo (simplicial) de automorfismos en  $A$ .

Si  $A \in O$ , denotaremos  $\pi_i(X, A)$  al  $i$ -ésimo grupo de homotopía del grupo simplicial  $X(A, A)$ .

Notemos que si el conjunto  $O$  tiene sólo un elemento, lo que tenemos es un grupo simplicial, luego la categoría de grupos simpliciales puede ser vista como una subcategoría de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , de igual forma que la categoría de grupos puede ser vista como una subcategoría de la de grupoides.

Dado que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  no es la categoría de objetos simpliciales sobre una categoría, en principio no se puede asegurar que sea cerrada para límites y colímites. Sin embargo, supongamos que  $\mathbf{I}$  es una categoría pequeña, y que tenemos un funtor  $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Podemos ver el funtor  $D$  como un funtor con rango  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$  y, puesto que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$  es completa y cocompleta (ya que  $\mathbf{Gpd}$  lo es), es posible calcular tanto el límite como el colímite de  $D$ , que sabemos que se calcula punto a punto. Es fácil ver, usando que el codominio de  $D$  es  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y que tanto los límites como los colímites en  $\mathbf{Gpd}$  se calculan sobre objetos igual que en conjuntos (no depende del conjunto de morfismos, sino solamente de las aplicaciones que haya entre los objetos), que el límite y el colímite de  $D$  son objetos de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Deducimos entonces que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es completa y cocompleta y que los límites y colímites se calculan punto a punto.

Dado  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , se define su complejo de Moore,  $N_*X$ , análoga-mente a como se hizo para grupos simpliciales, es decir,  $N_*X$  es el siguiente complejo de cadenas de grupoides

$$N_*X = \left( \begin{array}{ccccccc} \cdots & N_n X & \xrightarrow{\bar{d}_n} & N_{n-1} X & \cdots & N_2 X & \xrightarrow{\bar{d}_2} & N_1 X & \xrightarrow{\bar{d}_1} & N_0 X \\ \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \xlongequal{\quad} & O \end{array} \right)$$

donde cada uno de los grupoides  $N_n X \xrightarrow[t]{s} O$  es la intersección de los núcleos (ver definición 1.1.2) de los morfismos  $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ , y  $\bar{d}_n$  es la restricción del morfismo  $d_n$ .

Notemos que  $N_0 X = X_0$  y que, para cada  $n \geq 1$ ,  $N_n X \xrightarrow[t]{s} O$  es una unión disconexa de grupos indizada en  $O$ , o dicho de otra forma, el conjunto de componentes  $\pi_0(N_n X \xrightarrow[t]{s} O) = O$ .

Si tenemos ahora  $X \in Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*)$ , podemos calcular  $cosk^n(X)$  y  $sk^n(X)$ , que en principio son solo objetos de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})$ . Pero, teniendo en cuenta que  $cosk^n(X)$  se calcula haciendo límites en  $\mathbf{Gpd}$  y  $sk^n(X)$  haciendo colímites, que sobre los objetos éstos se calculan como en conjuntos, y que  $cosk^n(O \longleftarrow O \cdots O \longrightarrow O)$  y  $sk^n(O \longleftarrow O \cdots O \longrightarrow O)$  son el conjunto simplicial constante  $O$ , deducimos que  $cosk^n(X)$  y  $sk^n(x)$  pertenecen a  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Por tanto obtenemos dos funtores  $sk^n, cosk^n : Tr^n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , y dos funtores  $Sk^n, Cosk^n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y una situación de adjunción análoga a la de conjuntos y grupos simpliciales.

Definimos ahora un functor, al que llamaremos grupoide libre, y que denotaremos  $F : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

**Definición 1.3.1.** (ver [31]) Sea  $K_\bullet$  un conjunto simplicial. Definimos  $FK_\bullet$  como el siguiente grupoide simplicial:

- El conjunto de objetos es  $\{0, 1\}$
- Para cada dimensión,  $(FK_\bullet)_n \xrightarrow[t]{s} \{0, 1\}$  es el grupoide libre con un generador  $x : 0 \rightarrow 1$  para cada  $x \in K_n$ . Es decir, si consideramos el siguiente diagrama en grupoides:

$$\left\{ * \amalg * \xrightarrow{f_x} I \right\}_{x \in K_n}$$

en el que  $f_x$  es el functor que asigna a los dos objetos de  $* \amalg *$  los objetos "0" y "1" respectivamente del grupoide  $I$ ,  $(FK_\bullet)_n \xrightarrow[t]{s} O$  es el colímite del anterior diagrama.

- Los operadores cara y degeneración están inducidos por los de  $K_\bullet$ .

Notemos que para  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , dar un morfismo  $f : FK_\bullet \rightarrow X$  es equivalente a dar dos objetos  $A, B$  de  $X$  que estén en

la misma componente (salvo que  $K_\bullet$  sea el conjunto simplicial vacío) y una aplicación simplicial  $K_\bullet \rightarrow X(A, B)$ .

Para simplificar la notación, llamaremos  $F\Delta[0, 0]$  al grupoide simplicial con un sólo objeto, y sólo la identidad.

Recordamos ahora la extensión de la adjunción

$$G : \text{Simp}(\text{Set})_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \text{Simp}(\text{Gp}) : \overline{W}$$

a la adjunción

$$G : \text{Simp}(\text{Set}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \text{Simp}(\text{Gpd})_* : \overline{W}$$

**Definición 1.3.2.** (ver [31]) Sea  $K_\bullet$  un conjunto simplicial. Definimos  $GK_\bullet$  como el grupoide simplicial que tiene como objetos el conjunto  $K_0$ , y en dimensión  $n$ ,  $(GK_\bullet)_n \xrightarrow[s]{t} K_0$  es el grupoide libre con un generador  $\overline{x} : \overline{d_0 d_2 \dots d_{n+1} x} \rightarrow \overline{d_1 d_2 \dots d_{n+1} x}$  para cada  $x \in K_{n+1}$ , dividido por la relación  $\overline{s_0 \overline{x}} = \text{Id}_{\overline{d_1 \dots d_n \overline{x}}}$  para cada  $x \in K_n$ . Los operadores cara están definidos

$$d_0 \overline{x} = \overline{d_1 x} \circ (\overline{d_0 x})^{-1} \quad d_i(\overline{x}) = \overline{d_{i+1} x}, \quad i \geq 1$$

y las degeneraciones

$$s_i \overline{x} = \overline{s_{i+1} x}$$

**Definición 1.3.3.** Sea  $X \in \text{Simp}(\text{Gpd})_*$ . Definimos  $\overline{W}X$  como el conjunto simplicial:

$$1) (\overline{W}X)_0 = O$$

2)

$$\begin{aligned} (\overline{W}X)_n &= X_{n-1} \times_t X_{n-2} \times_t \dots \times_t X_1 \times_t X_0 = \\ &= \left\{ (g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) / \begin{array}{l} g_i \in X_i \\ s(g_{i+1}) = t(g_i) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Es decir,  $(\overline{W}X)_n$  es el conjunto de sucesiones de morfismos

$$A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n$$

3) Los operadores cara están definidos:

$$-d_0(g_{n-1}, \dots, g_0) = (g_{n-2}, \dots, g_1, g_0)$$

$$-d_i(g_{n-1}, \dots, g_0) = (d_{i-1}g_{n-1}, \dots, d_1g_{n-i+1}, d_0g_{n-i}g_{n-i-1}, g_{n-i-2}, \dots, g_0)$$

$$-d_n(g_{n-1}, \dots, g_0) = (d_{n-1}g_{n-1}, \dots, d_2g_2, d_1g_1)$$

es decir, si  $A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n$  es un elemento de  $(\overline{WX})_n$ , su imagen por  $d_0$  es

$$A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-3}} A_{n-2} \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1}$$

por  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \cdots A_{n-i-2} \xrightarrow{g_{n-i-2}} A_{n-i-1} \xrightarrow{d_0 g_{n-i} g_{n-i-1}} \\ \xrightarrow{d_0 g_{n-i} g_{n-i-1}} A_{n-i+1} \xrightarrow{d_1 g_{n-i+1}} A_{n-i+2} \cdots A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n \end{aligned}$$

y por  $d_n$

$$A_1 \xrightarrow{d_1 g_1} A_2 \xrightarrow{d_2 g_2} \dots \xrightarrow{d_{n-2} g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1} g_{n-1}} A_n$$

4) Las degeneraciones:

$$-s_0(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (Id_{t_{g_{n-1}}}, g_{n-1}, \dots, g_1, g_0)$$

$$-s_i(g_{n-1}, \dots, g_1, g_0) = (s_{i-1}g_{i-1}, \dots, s_0g_{n-i}, Id_{s_{g_{n-i}}}, g_{n-i-1}, \dots, g_0)$$

es decir, la imagen de  $A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n$  por  $s_0$  es

$$A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_n \xrightarrow{Id_{A_n}} A_n$$

y por  $s_i$

$$\begin{aligned} A_0 \xrightarrow{g_0} A_1 \cdots A_{n-i-1} \xrightarrow{g_{n-i-1}} A_{n-i} \xrightarrow{Id_{A_{n-i}}} \\ \xrightarrow{Id_{A_{n-i}}} A_{n-i} \xrightarrow{s_0 g_{n-i}} A_{n-i+1} \cdots A_{n-1} \xrightarrow{s_i g_{n-1}} A_n \end{aligned}$$

Igual que en el caso de grupos simpliciales y conjuntos reducidos, se demuestra que estos dos funtores son adjuntos.

**Proposición 1.3.4.** *El funtor  $G : \text{Simp}(\text{Set}) \rightarrow \text{Simp}(\text{Gpd})$ , es adjunto por la izquierda al funtor  $\overline{W}$ .*

*Demostración:* Al igual que en la proposición 1.2.39, definiremos únicamente las biyecciones

$$\phi : \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Gpd})}(GK_\bullet, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Set})}(K_\bullet, \overline{WX})$$

$$\psi : \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Set})}(K_\bullet, \overline{WX}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Simp}(\text{Gpd})}(GK_\bullet, X)$$

para cada  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y cada  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_\bullet$ .

Sean  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ ,  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_\bullet$  y  $f : GK_\bullet \rightarrow X$ .

$$(\phi(f))_n(k) = (f_{n-1}(\bar{x}), f_{n-2}(\overline{d_0x}), \dots, f_0(\overline{d_0^{n-1}x}), n \geq 1$$

$(\phi(f))_0$  se define de manera obvia.

Sea ahora  $h : K_\bullet \rightarrow \overline{WX}$ . Entonces definimos  $\psi(h)$ :

- Sobre objetos se define como  $h_0$

- Sobre morfismos

$$(\psi(h))_n(\bar{x}) = g_n$$

donde  $g_n$  es la primera coordenada de  $h_{n+1}(x)$ . ■

Al igual que en el caso de grupos simpliciales, para cada  $n \geq 0$ , podemos considerar ahora la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_\bullet$  formada por aquellos objetos  $X$  tales que  $N_q(X)$  contiene sólo identidades para  $q \geq n + 1$ , (es decir,  $N_q(X) = O$ ,  $q \geq n + 1$ ) y que la denominaremos  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . Ésta es una subcategoría reflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_\bullet$ , y el funtor reflector  $\mathcal{P}_n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_\bullet \rightarrow \mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  se define en términos semejantes al que se definió en grupos simpliciales.

## 1.4 Categorías de modelos de Quillen: Ejemplos y construcciones

Ofrecemos en esta sección la axiomática que usualmente se maneja de categoría de modelos cerrada (ver [59]), algunos ejemplos importantes de este tipo de categorías y las construcciones homotópicas más notables que en ellas se puede realizar

### 1.4.1 Axiomática y ejemplos

**Definición 1.4.1.** (ver [59]) Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría. Diremos que en  $\underline{\mathbf{C}}$  tenemos una estructura de modelos cerrada, o que  $\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría de modelos cerrada, si en  $\underline{\mathbf{C}}$  tenemos distinguidas tres familias de morfismos, llamados fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, satisfaciendo los siguientes axiomas:

CM1)  $\underline{\mathbf{C}}$  es cerrada bajo límites y colímites finitos.

CM2) Para cada par de morfismos  $f, g$  tales que exista  $gf$ , si dos de los tres siguientes morfismos  $f$ ,  $g$  ó  $gf$  son equivalencias débiles, también lo es el tercero.

CM3) Las fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles son cerradas bajo retracts.

CM4) **Axioma de levantamiento** Los morfismos que son a la vez fibraciones y equivalencias débiles son los que tienen la RLP con respecto a las cofibraciones y los que son a la vez cofibraciones y equivalencias débiles son los que tienen la LLP con respecto a las fibraciones.

CM5) **Axioma de factorización** Todo morfismo  $f$  en  $\underline{\mathbf{C}}$  puede factorizarse como  $f = pi$  y  $f = qj$ , donde  $p$  y  $q$  son fibraciones,  $i$  y  $j$  son cofibraciones e  $i$  y  $q$  son equivalencias débiles.

Una axiomática equivalente puede verse en [58].

Es usual denominar fibraciones triviales a aquellos morfismos que son a la vez fibraciones y equivalencias débiles, y cofibraciones triviales a los que son cofibraciones y equivalencias débiles. Asimismo, un objeto  $X \in \underline{\mathbf{C}}$  se dice fibrante si el morfismo  $X \rightarrow *$  es una fibración y se dice cofibrante si el morfismo  $\emptyset \rightarrow X$  es cofibración, donde  $*$  y  $\emptyset$  denotan el objeto final e inicial respectivamente en la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$ .

Damos ahora algunos ejemplos de categorías en los que se tiene definida una estructura de modelos:

### Ejemplo 1

La categoría **Top** de espacios topológicos es una categoría de modelos cerrada con la siguiente estructura (ver [58]):

- Las fibraciones son las fibraciones en el sentido de Serre, es decir, una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es una fibración si siempre que tengamos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D_n & \longrightarrow & X \\ i_0 \downarrow & & \downarrow f \\ D_n \times I & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe levantamiento, donde  $D_n$  denota el disco unidad,  $I$  el intervalo unidad, e  $i_0$  es la aplicación definida por  $i_0(x) = (x, 1)$

- Las equivalencias débiles son las equivalencias homotópicas débiles, es decir, aquellas aplicaciones  $f : X \rightarrow Y$  tales que  $f$  induce una biyección entre el conjunto de arco-componentes de  $X$  y  $Y$  y para cada  $n \geq 1$  y  $x_0 \in X$ , el morfismo de grupos  $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$  es un isomorfismo.

- Las cofibraciones son las aplicaciones que tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

En esta categoría todo objeto es fibrante y la clase de los objetos cofibrantes contiene a los CW-complejos.

Se tiene también una estructura de modelos si consideramos la categoría de espacios topológicos punteados.

### Ejemplo 2

La categoría **Top** soporta otra estructura de modelos (ver [63]) en la que:

- Las fibraciones son las aplicaciones que tienen la RLP con respecto a las aplicaciones  $i_0 : X \rightarrow X \times I$  para cualquier espacio  $X$ .
- Las cofibraciones son las aplicaciones cerradas que tienen la LLP con respecto a  $\partial_0 : Y^I \rightarrow Y$  dada por  $\partial_0(f) = f(0)$ .
- Las equivalencias débiles son las equivalencias homotópicas.

### Ejemplo 3

Una categoría estrechamente relacionada con **Top** es la categoría de conjuntos simpliciales. Esta relación viene dada por la existencia de un par de funtores adjuntos, el complejo singular total  $S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y su adjunto por la izquierda, el funtor realización geométrica  $|\cdot| : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{Top}$  (ver [54])

Algunas propiedades resaltables de estos funtores (aparte de que son adjuntos) son:

- Si  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ ,  $|K_\bullet|$  es un CW-complejo, que tiene una n-celda por cada n-símplice no degenerado de  $K_\bullet$ . Como ningún 0-símplice es degenerado, por cada 0-símplice  $x_0 \in K_0$  tenemos un punto  $x_0 \in |K_\bullet|$
- $S(X)$  es siempre un conjunto simplicial de Kan.
- $S(X)_0 = X$ .
- $\pi_i(S(X), x_0) = \pi_i(X, x_0)$
- Si  $K_\bullet$  es de Kan,  $\pi_i(K_\bullet, x_0) = \pi_i(|K_\bullet|, x_0)$ . Esto último sugiere definir los grupos de homotopía de un conjunto simplicial que no sea de Kan  $L_\bullet$ , como los grupos de homotopía de su realización geométrica. Notemos que  $\pi_i(L_\bullet, x_0) = \pi_i(S|L_\bullet|, x_0)$ .

A partir de esta adjunción podemos decir como está dada la estructura en **Simp(Set)**:

- Las fibraciones son las fibraciones de Kan
- Las equivalencias débiles son los morfismos  $f_\bullet$  tales que  $|f_\bullet|$  es una equivalencia homotópica débil en **Top** o, si se quiere, los morfismos  $f_\bullet : K_\bullet \rightarrow L_\bullet$  tales que  $\pi_0(K_\bullet) \rightarrow \pi_0(L_\bullet)$  es una biyección y  $\pi_i(K_\bullet, x_0) \rightarrow \pi_i(L_\bullet, f_0 x_0)$ ,  $i \geq 1$  son isomorfismos.
- Las cofibraciones son las aplicaciones inyectivas.

Notemos que  $|\Delta[n]| \cong D^n$  (en particular,  $|I| \cong I$ )  $|\dot{\Delta}[n]| \cong S^{n-1}$  y  $|\Delta[n, k]| \cong S^{n-1} - D^{n-1} \cong D^{n-1}$ . Deducimos entonces que dado un morfismo

$f : X \rightarrow Y$  en **Top**,  $f$  es una fibración (resp. equivalencia débil) con la estructura del ejemplo 1 si y sólo si  $S(f)$  lo es en **Simp(Set)**.

Esta estructura es válida también para la categoría de conjunto simpliciales punteados.

Esta estructura puede ser generalizada (ver [59]) a la categoría de conjuntos simpliciales  $r$ -reducidos, **Simp(Set)<sub>r</sub>**,  $r \geq 0$ , considerando como cofibraciones las aplicaciones inyectivas, como equivalencias débiles los morfismos que son equivalencias débiles en **Simp(Set)**, y las fibraciones los morfismos que verifican la condición de ser una fibración de Kan en dimensiones mayores o iguales que  $r+1$ .

#### Ejemplo 4

Un cuarto ejemplo de categoría de modelos es la categoría de grupos simpliciales. En esta categoría las fibraciones son las fibraciones de Kan (es decir, aquellos morfismos  $f_\bullet$  tales que  $U(f_\bullet)$  es una fibración de conjuntos simpliciales. Las equivalencias débiles son los morfismos  $f_\bullet$  para los que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo,  $q \geq 0$ . Las cofibraciones son las aplicaciones libres (y sus retractos).

Recordemos que un morfismo  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  de grupos simpliciales, se dice que es una aplicación libre (ver [58]) si existen subconjuntos  $U_q \subset H_q$  para todo  $q \geq 0$ , cerrados bajo degeneraciones y tales que el morfismo  $f_q + g_q : G_q \amalg FU_q \rightarrow H_q$  sea un isomorfismo para todo  $q$ , donde  $g_q$  es el morfismo inducido por la inclusión  $U_q \hookrightarrow H_q$ . Una tal aplicación libre la denotaremos  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow G_\bullet \amalg FU_\bullet$ .

Un grupo simplicial  $G_\bullet$  se dice que es libre si el morfismo  $0 \rightarrow G_\bullet$  es una aplicación libre, es decir, si para cada  $q$ ,  $G_q$  es un grupo libre y las bases son cerradas bajo degeneraciones (ver [29]).

Los grupos simpliciales cofibrantes son los libres, mientras que todo grupo simplicial es fibrante.

La estructura de **Simp(Gp)** está muy relacionada con la de **Simp(Set)<sub>1</sub>** vía la adjunción  $G \vdash \bar{W}$  (ver proposición 1.2.39), puesto que  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si y sólo si  $\bar{W}(f_\bullet)$  lo es.

Notemos que aquí las fibraciones están caracterizadas como los morfismos que tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 1$ , y utilizando el lema 1.2.25 puede probarse fácilmente que un morfismo  $f_\bullet$  es una fibración trivial si y sólo si tiene la RLP con respecto a  $F \overset{\bullet}{\Delta} [n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ . Puede demostrarse también que  $f_\bullet$  es una fibración trivial si y sólo si  $N_\bullet(f_\bullet)$  es sobreyectivo y  $\pi_\bullet(Ker(f_\bullet)) = 0$  (ver [58]).

#### Ejemplo 5

La categoría **Gpd** soporta también una estructura de modelos, con la estructura definida como sigue:

Supongamos que  $\mathcal{G} : X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} O$  y  $\mathcal{H} : X' \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} O'$  son dos grupoides y que  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo entre ellos. Entonces:

-  $f$  es una fibración si para cada  $B \in O$  y cada  $y \in X'(A, f_0(B))$ , existe  $x \in X(A', B)$  tal que  $f_1(x) = y$  es decir,  $f$  es una fibración de grupoides (ver [45]).

Notemos que si consideramos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$  como conjuntos simpliciales truncados, la condición de que  $f$  sea una fibración de grupoides es equivalente a que en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} & O \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\ X' & \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} & O' \end{array}$$

se verifique la condición de Kan.

-  $f$  es una equivalencia débil si es una equivalencia de categorías  
-  $f$  es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibrationes triviales.

Notemos que  $f$  es una fibración si y sólo si  $f$  tiene la RLP con respecto al morfismo  $* \hookrightarrow I$ , y una fibración trivial si y sólo si tiene la RLP con respecto a  $\emptyset \hookrightarrow *$  y  $* \amalg * \hookrightarrow I$ .

### Ejemplo 6

La categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  tiene una estructura de modelos cerrada (ver [31]), donde la estructura viene dada en función de la estructura de  $\mathbf{Gpd}$  y la de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Si  $X, X' \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y  $f : X \rightarrow X'$ ,  $f$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si la aplicación inducida entre los grupoides  $X_0 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} O$  y

$X'_0 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} O'$  es una fibración (resp. equivalencia débil), y para cada  $A \in O$ , el morfismo  $X(A, A) \rightarrow X'(f(A), f(A))$  es una fibración (resp. equivalencia débil) de grupos simpliciales y  $f$  es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibrationes triviales.

Se verifica que  $f$  es una fibración si y sólo si  $f$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[n, k] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ , y que  $f$  es una fibración trivial si y sólo si  $f$  tiene la RLP respecto a  $F\overset{\bullet}{\Delta}[n] \hookrightarrow F\Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ , y  $F\Delta[0, 0] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[0]$ .

Esta estructura está relacionada con la estructura de conjuntos simpliciales vía la adjunción  $G \vdash \overline{W}$  (ver sección 1.3) de la misma forma que lo están las de grupos simpliciales y conjuntos simpliciales reducidos.

### Ejemplo 7

Un ejemplo trivial de categoría de modelos cerrada es el de una categoría finitamente completa y cocompleta en el que todo morfismo es fibración y cofibración y las equivalencias débiles son los isomorfismos.

Si observamos, en los ejemplos que hemos citado, las fibraciones (triviales) aparecen como los morfismos que tiene la RLP con respecto a una familia de morfismos. Los dominios de estos morfismos tiene una propiedad común que permite en muchas ocasiones utilizar el mismo tipo de argumento para demostrar que se verifican los axiomas CM4 y CM5 (ver [60] para un tratamiento general). Resaltamos ahora esta propiedad.

**Definición 1.4.2.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría y  $X$  un objeto de dicha categoría. Diremos que  $X$  es secuencialmente pequeño si para cualquier sistema directo  $\{Y_n, j_n : Y_n \rightarrow Y_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , (es decir, un functor  $(\mathbb{N}, \leq) \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ ) se verifica que  $\text{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, \varinjlim Y_n) \cong \varinjlim(\text{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y_n))$

Analicemos a continuación cuales son los objetos secuencialmente pequeños en algunas categorías:

1. La categoría de conjuntos.

Recordemos que en esta categoría, si tenemos un sistema directo

$$Y_0 \xrightarrow{j_0} Y_1 \xrightarrow{j_1} \dots \xrightarrow{j_{n-1}} Y_n \xrightarrow{j_n} Y_{n+1} \xrightarrow{j_{n+1}} \dots$$

el límite directo  $Y_\infty$  es el conjunto  $\coprod_{n=0}^{\infty} Y_n$  (es decir, la unión disjunta de ellos) módulo la relación de equivalencia generada por  $xRj_n(x)$ , donde  $x \in Y_n$ . Notemos que si cada una de las aplicaciones  $j_n$  son inclusiones, el límite directo es exactamente la unión de todos los conjuntos  $Y_n$ .

En este caso, los conjuntos secuencialmente pequeños son los conjuntos finitos. En efecto, si  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  es un conjunto finito y tomamos una aplicación  $f : X \rightarrow Y_\infty$ , tenemos que  $f(x_i) \in Y_{n_i}$ . Tomando  $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ , tenemos que  $f$  factoriza a través de  $Y_n$ , de donde  $f \in \varinjlim(\text{Hom}(X, Y_n))$ . Con esto demostramos que la aplicación canónica  $\psi : \varinjlim(\text{Hom}(X, Y_n)) \rightarrow \text{Hom}(X, \varinjlim Y_n)$  es sobreyectiva.

Supongamos que tenemos ahora  $f, g \in \varinjlim(\text{Hom}(X, Y_n))$  tales que  $\psi(f) = \psi(g)$ . Esto quiere decir que tenemos  $f : X \rightarrow Y_n$  y  $g : X \rightarrow Y_m$  (suponemos  $n \leq m$ ) tales que  $q_n f = q_m g$  donde  $q_n : Y_n \rightarrow Y_\infty$  es el morfismo canónico, o sea, para cada  $x_i \in X$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$  son iguales "en el límite", o lo que es lo mismo, existe  $q_i \geq m$  tal que  $j_{n, q_i} f(x_i) = j_{m, q_i} g(x_i)$  donde  $j_{n, q_i} = j_{q_i-1} \dots j_{n+1} j_n$ . Claramente, al ser

$X$  finito, existe  $k$  tal que  $j_{k,k}f = f_{m,k}g$ , lo que nos dice que  $f = g$  (vistas en  $\lim_{\rightarrow}(\text{Hom}(X, Y_n))$ ).

Recíprocamente, si  $X$  es infinito, existen  $X_n \subseteq X$  tales que  $X_n \subsetneq X_{n+1}$  y  $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = X$ , de donde  $X = \lim_{\rightarrow} X_n$ . Es claro que  $\text{Id}_X : X \rightarrow X$  no factoriza a través de ningún  $X_n$ .

## 2. La categoría de grupos

En este caso los objetos pequeños son los grupos finitamente generados. Basta tener en cuenta que si se tiene un sistema dirigido en la categoría de grupos

$$G_0 \xrightarrow{h_0} G_1 \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_{n-1}} G_n \xrightarrow{h_n} G_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} \dots$$

el límite directo se calcula "igual" que en conjuntos, es decir, se calcula el límite directo del sistema anterior olvidando la estructura de grupo. El conjunto resultante tiene una estructura de grupo inducida por la de los grupos  $G_n$  y los morfismos  $h_n$ . Ahora se razona igual que en el ejemplo anterior.

## 3. La categoría de grupoides.

En esta categoría los objetos secuencialmente pequeños son los grupoides con un conjunto finito de objetos y tales que el conjunto de morfismos es finitamente generado. La demostración de este hecho es fácil, ya que los objetos y los morfismos del límite directo de un sistema dirigido de grupoides es el límite directo (calculado en conjuntos) de los sistemas dirigidos de los conjuntos de objetos y de morfismos respectivamente.

## 4. La categoría de conjuntos simpliciales.

Los conjuntos simpliciales secuencialmente pequeños son los conjuntos simpliciales finitos i.e., los que tienen solamente un número finito de símlices no degenerados (es decir, aquellos con un conjunto finito de símlices que genera todo el conjunto simplicial). Ésto es consecuencia de que una aplicación simplicial está determinada por la imagen de los símlices no degenerados y de que los límites directos en conjuntos simpliciales se calculan dimensión a dimensión.

En particular deducimos que  $\Delta[n]$ ,  $\dot{\Delta}[n]$  y  $\Delta[n, k]$  son secuencialmente pequeños.

5. La categoría de grupos simpliciales.

Los objetos secuencialmente pequeños son los grupos simpliciales  $G_\bullet$  que admiten un conjunto finito de símlices que generan  $G_\bullet$  en el sentido de que el menor subgrupo simplicial de  $G_\bullet$  que contiene a tal conjunto es  $G_\bullet$ .

Por tanto,  $F\Delta[n]$ ,  $F\dot{\Delta}[n]$  y  $F\Delta[n, k]$  son secuencialmente pequeños.

6. La categoría de grupoides simpliciales.

Los objetos secuencialmente pequeños son los grupoides simpliciales finitamente generados.

Al igual que para grupos simpliciales, tenemos que  $F\Delta[n]$ ,  $F\dot{\Delta}[n]$  y  $F\Delta[n, k]$  son secuencialmente pequeños.

7. La categoría de espacios topológicos.

No diremos exactamente quienes son los espacios topológicos secuencialmente pequeños. Veremos que si tomamos una clase especial de sistemas directos (aquellos en que los morfismos  $j_n : Y_n \rightarrow Y_{n+1}$  son inclusiones), entonces (bajo algunas condiciones) los objetos para los que se verifica la condición de ser secuencialmente pequeño son los espacios secuencialmente compactos (si partiéramos de sistemas dirigidos generales, tendríamos los espacios compactos)

Recordemos que dado un sistema directo en la categoría **Top**

$$Y_0 \xrightarrow{j_0} Y_1 \xrightarrow{j_1} \dots \xrightarrow{j_{n-1}} Y_n \xrightarrow{j_n} Y_{n+1} \xrightarrow{j_{n+1}} \dots$$

el límite directo es el conjunto  $Y_\infty$  (calculado en la categoría **Set**) con la topología final para la familia de aplicaciones  $q_n : Y_n \rightarrow Y_\infty$  (es decir,  $A \subseteq Y_\infty$  es abierto si y sólo si  $q_n^{-1}(A)$  es abierto en  $Y_n$ ,  $\forall n$ ).

**Lema 1.4.3.** *Sea  $Y \in \mathbf{Top}$ . Supongamos que  $Y$  es  $T_1$  y sean  $Y_n \subseteq Y$  tales que  $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ ,  $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$  y se verifica que  $A \subseteq Y$  es abierto si y sólo si  $A \cap Y_n$  es abierto para todo  $n$  (es decir,  $Y = \lim_{\rightarrow} Y_n$ ). Entonces, dado  $K \subseteq Y$  compacto, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subseteq Y_n$ .*

*Demostración:* Supongamos que para todo  $n$ ,  $K \not\subseteq Y_n$ , es decir, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in K$  y  $x_n \notin Y_n$ .

Puesto que  $x_n \in K$  y  $K$  es compacto (de hecho utilizamos únicamente que  $K$  es secuencialmente compacto), tenemos que  $x_n \rightarrow x$  para algún  $x \in K$ . En realidad, es una parcial suya la que converge.

Es claro que dado  $m \in \mathbb{N}$  y  $n \geq m$ ,  $x_n \notin Y_m$  pues si  $x_n \in Y_m$  entonces  $x_n \in Y_n$ . También es claro que existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in Y_{m_0}$ , luego si  $n \geq m_0$  se tiene que  $x_n \neq x$  (si  $x_n = x$  entonces  $x_n \in Y_{m_0} \subseteq Y_n$ ).

Sea  $\mathcal{U}$  un abierto que contiene a  $x$ , es decir,  $\mathcal{U} \cap Y_n$  es un abierto en  $Y_n$ . Veamos que  $\mathcal{V} = \mathcal{U} - \{x_{m_0}, x_{m_0+1}, \dots\}$  es un abierto, para lo cual debemos ver que  $\mathcal{V} \cap Y_n$  es abierto.

$$\mathcal{V} \cap Y_n = (\mathcal{U} - \{x_{m_0}, x_{m_0+1}, \dots\}) \cap Y_n = \mathcal{U} \cap Y_n - \{x_{m_0}, \dots\}.$$

Por lo dicho anteriormente, deducimos que

$$\mathcal{V} \cap Y_n = \mathcal{U} \cap Y_n - \{x_{m_0}, \dots, x_{n-1}\}$$

Como  $Y$  es  $T_1$ ,  $x_{m_0}, \dots, x_{n-1}$  son cerrados, luego  $\{x_{m_0}, \dots, x_{n-1}\}^c$  es abierto, de donde

$$\mathcal{U} \cap Y_n - \{x_{m_0}, \dots, x_{n-1}\} = \mathcal{U} \cap Y_n \cap \{x_{m_0}, \dots, x_{n-1}\}^c \text{ es abierto en } Y_n.$$

Deducimos por tanto que  $\mathcal{V}$  es un abierto en  $Y$  que contiene a  $x$ . Si ésto fuera así, como  $x_n \rightarrow x$ , debería existir  $m_1$  tal que si  $n \geq m_1$  el elemento  $x_n$  estuviera en  $\mathcal{V}$ , lo cual es absurdo.

Por tanto, debe existir  $n$  tal que  $K \subseteq Y_n$ . ■

Por tanto, si  $K$  es un compacto, tenemos un sistema directo

$$Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_n \subseteq Y_{n+1} \subseteq \dots$$

y una aplicación continua  $f : K \rightarrow \lim_{\rightarrow} Y_n$ , como  $f(K)$  es compacto,  $f$  factoriza a través de algún espacio  $Y_n$ .

Más adelante, en la demostración de algunos teoremas veremos la utilidad de los objetos secuencialmente pequeños.

### 1.4.2 Teoría de homotopía en una categoría de modelos

Cuando a una categoría se le dota de una estructura de modelos cerrada, el objetivo es hacer "teoría de homotopía" en ella. En una categoría de modelos cerrada se puede hablar de homotopías entre aplicaciones, cilindros, arcos, suspensiones, lazos, etc., y se puede construir la categoría de homotopía asociada, que se obtiene, o bien localizando respecto a la clase de equivalencias

débiles o bien dividiendo por la relación de homotopía. Precisemos un poco más estos conceptos y construcciones (ver [58])

De ahora en adelante,  $\underline{\mathbf{C}}$  denotará una categoría de modelos cerrada.

Dado  $X \in \underline{\mathbf{C}}$ , un cilindro para  $X$  es un objeto  $X \times I$  junto con una factorización del morfismo codiagonal  $\nabla : X \amalg X \rightarrow X$  de la forma

$$X \amalg X \xrightarrow{i_0+i_1} X \times I \xrightarrow{\sigma} X$$

donde  $i_0 + i_1$  es una cofibración y  $\sigma$  es una equivalencia débil. Dualmente, un espacio de arcos o cocilindro para un objeto  $Y \in \underline{\mathbf{C}}$  es un objeto  $Y^I$  junto con una factorización del morfismo diagonal  $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$  de la forma

$$Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} Y \times Y$$

donde  $s$  es una equivalencia débil y  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración.

Notemos que en la categoría  $\mathbf{Top}$ , con la estructura de Quillen, dados dos espacios topológicos  $X, Y$  ( $X$  cofibrante), el espacio producto  $X \times I$  es un cilindro para  $X$  y el espacio  $Y^I$  de aplicaciones continuas  $I \rightarrow Y$  es un espacio de arcos para  $Y$ .

El hecho de tener un cilindro (resp. espacio de arcos) permite medir homotopías. Así una homotopía por la izquierda (resp. por la derecha) entre dos morfismos en  $\underline{\mathbf{C}}$   $f, g : X \rightarrow Y$ , es una aplicación  $k : X \times I \rightarrow Y$  (resp.  $h : X \rightarrow Y^I$ ) tal que  $ki_0 = f$  y  $ki_1 = g$  (resp.  $\partial_0 h = g$  y  $\partial_1 h = f$ ).

Es claro que ambos conceptos coinciden con el concepto de homotopía usual en espacios topológicos.

Las relaciones de homotopía por la derecha y por la izquierda no son en general de equivalencia. Sí lo son cuando  $X$  es cofibrante e  $Y$  es fibrante, en cuyo caso, además, coinciden.

Si nos quedamos con los objetos que son a la vez fibrantes y cofibrantes y como morfismos entre dos objetos  $X$  e  $Y$  tomamos las clases de homotopía de morfismos  $X \rightarrow Y$ , obtenemos una categoría (es fácil ver que la composición en  $\underline{\mathbf{C}}$  induce una composición bien definida entre las clases de homotopía de morfismos) que se conoce como la categoría de homotopía de  $\underline{\mathbf{C}}$  asociada a la estructura de modelos en cuestión, y que se denota  $Ho(\underline{\mathbf{C}})$ .

Esta categoría (o una equivalente a ésta) puede también obtenerse localizando, en el sentido de Gabriel-Zisman (ver [40]), la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  con respecto a la clase de las equivalencias débiles (es decir, invirtiendo tales morfismos).

Cuando la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  es punteada, se pueden definir un par de funtores adjuntos  $\Sigma : Ho(\underline{\mathbf{C}}) \rightleftarrows Ho(\underline{\mathbf{C}}) : \Omega$ .

Para definir  $\Sigma X$  se toma un cilindro para  $X$ ,  $X \times I$  y se calcula la cofibra del morfismo  $i_0 + i_1 : X \amalg X \rightarrow X \times I$ . Puesto que el cilindro de un objeto

no es único,  $\Sigma X$  no es único, pero está determinado salvo equivalencia débil. Por tanto, en la categoría de homotopía está determinado salvo isomorfismo. Análogamente se define  $\Omega Y$  como la fibra del morfismo  $(\partial_0, \partial_1) : Y^I \rightarrow Y \times Y$  donde  $Y^I$  es un espacio de arcos para  $Y$ .

Además, para cada  $X \in Ho(\underline{\mathbf{C}})$ ,  $\Sigma^n X$  es un objeto cogrupo y  $\Omega^n X$  es un objeto grupo, en el sentido de que tenemos funtores

$$\begin{array}{ccc} Ho(\underline{\mathbf{C}}) & \longrightarrow & \mathbf{Gp} \\ Y & \longmapsto & Hom_{Ho(\underline{\mathbf{C}})}(\Sigma^n X, Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Ho(\underline{\mathbf{C}}) & \longrightarrow & \mathbf{Gp} \\ Y & \longmapsto & Hom_{Ho(\underline{\mathbf{C}})}(Y, \Omega^n X) \end{array}$$

La categoría de homotopía asociada a  $\underline{\mathbf{C}}$  junto con estas estructuras que hemos recordado de forma breve como son los funtores lazo y suspensión y también las familias de sucesiones fibración y cofibración, constituyen lo que Quillen denominó la teoría de homotopía asociada a la estructura de modelos.

El siguiente teorema, probado por Quillen en [58], proporciona un criterio para saber cuando dos categorías de modelos relacionadas por un par de funtores adjuntos tienen teorías de homotopía equivalentes en el sentido de que las categorías de homotopía sean equivalentes y esta equivalencia preserve la estructura extra aludida.

**Teorema 1.4.4.** ([58]) Sean  $\underline{\mathbf{C}}$  y  $\underline{\mathbf{C}}'$  dos categorías de modelos cerradas conectadas por dos funtores adjuntos

$$L : \underline{\mathbf{C}} \rightleftarrows \underline{\mathbf{C}}' : R$$

Supongamos que el adjunto a derecha ( $R$ ) preserva fibraciones y equivalencias débiles entre objetos fibrantes, y que el adjunto a izquierda preserva cofibraciones y equivalencias débiles entre objetos cofibrantes. Entonces  $L$  y  $R$  inducen una adjunción entre las categorías de homotopía

$$L : Ho(\underline{\mathbf{C}}) \rightleftarrows Ho(\underline{\mathbf{C}}') : R$$

Si además se tiene que un morfismo  $LX \rightarrow Y$  es equivalencia débil si y sólo si lo es el correspondiente morfismo  $X \rightarrow RY$  para cualesquiera  $X \in \underline{\mathbf{C}}$  cofibrante e  $Y \in \underline{\mathbf{C}}'$  fibrante, entonces la unidad y counidad de la adjunción inducida son isomorfismos, y por tanto, se tiene una equivalencia entre las categorías de homotopía.

Si además  $\underline{\mathbf{C}}$  y  $\underline{\mathbf{C}}'$  son punteadas, se tiene, no sólo una equivalencia de categorías, sino una equivalencia de teorías de homotopía i.e. la equivalencia preserva los funtores suspensión y lazo y las sucesiones fibración y cofibración.

### 1.4.3 Algunas construcciones en la teoría de homotopía de conjuntos y grupos simpliciales

Resaltaremos en este párrafo algunas construcciones en la teoría de homotopía de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que nos serán de utilidad a lo largo de la memoria.

En el caso de espacios topológicos las construcciones anteriores son clásicas en la teoría de homotopía de espacios.

Si tenemos ahora  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , entonces  $K_\bullet \times I$  es un cilindro para  $K_\bullet$  y  $K_\bullet^I$  es un espacio de arcos cuando  $K_\bullet$  es un conjunto simplicial de Kan (es decir, fibrante).

Notemos además que la adjunción

$$|| : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightleftarrows \mathbf{Top} : S$$

verifica las hipótesis del teorema 1.4.4, y por tanto, las categorías de homotopía  $Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Set}))$  y  $Ho(\mathbf{Top})$  son equivalentes.

Supongamos ahora que  $G_\bullet$  es un grupo simplicial cofibrante (es decir, libre). Veamos que  $G_\bullet \otimes I$  es un cilindro para  $G_\bullet$ . Sea  $i_0 : G_\bullet \rightarrow G_\bullet \otimes I$  la aplicación dada por  $(i_0)_n = u_{(1)}$  (es decir, la inclusión correspondiente al  $n$ -símplice  $(1) \in I$ ) e  $i_1$  la inclusión correspondiente al  $n$ -símplice  $(0)$ . Es fácil comprobar que  $i_0 + i_1$  es una cofibración ( $(G_\bullet \otimes I)_n = G_n \amalg G_n \amalg \left( \coprod_{\tau \neq (0),(1)} G_n \right)$ ,

y como  $G_n$  es libre, esta última parte es también libre). Veamos que  $\sigma : G_\bullet \otimes I \rightarrow G_\bullet$  es una equivalencia débil, donde  $\sigma$  es la aplicación definida por  $\sigma_n u_\tau = Id_{G_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \tau \in I_n$ , para lo cual veremos que  $\sigma$  tiene una inversa homotópica; ésto junto con la proposición 1.2.15 nos dará lo que buscamos.

Es claro que  $\sigma i_0 = \sigma i_1 = Id_{G_\bullet}$ . Veamos que  $i_0 \sigma$  es homotópico a  $Id_{G_\bullet \otimes I}$ . Consideramos el 1-símplice de  $I^I$   $((0, 0, 1), (0, 0, 1))$ ; se tiene que

$$d_0((0, 0, 1), (0, 0, 1)) = (0, 1) = \Delta_1 \text{ y } d_1((0, 0, 1), (0, 0, 1)) = (0)$$

Pero un 1-símplice de  $I^I$  es una aplicación simplicial  $I \rightarrow I^I$ , o equivalentemente, una aplicación simplicial  $I \times I \rightarrow I$ . Esta aplicación simplicial induce una aplicación  $G_\bullet \otimes (I \times I) \rightarrow G_\bullet \otimes I$ , y como  $G_\bullet \otimes (I \times I) \cong (G_\bullet \otimes I) \otimes I$ , tenemos una aplicación  $k_\bullet : (G_\bullet \otimes I) \otimes I \rightarrow G_\bullet \otimes I$  y podemos comprobar que  $d_1(k_\bullet) = i_1 \sigma$  y que  $d_0(k_\bullet) = Id_{G_\bullet \otimes I}$ , es decir,  $k_\bullet$  es una homotopía entre  $i_1 \sigma$  e  $Id_{G_\bullet \otimes I}$ . Con ésto probamos que  $\sigma$  es una equivalencia homotópica y, por tanto, una equivalencia débil.

Notemos que si tenemos  $G_\bullet, H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $k_\bullet : G_\bullet \otimes I \rightarrow H_\bullet$ , entonces  $k_\bullet i_0 = d_1(k_\bullet)$  y  $k_\bullet i_1 = d_0(k_\bullet)$ .

Para cualquier grupo simplicial  $H_\bullet$  (que es fibrante), el grupo simplicial  $H_\bullet^I$  es un espacio de arcos para  $H_\bullet$ . En efecto, tenemos el morfismo  $s : H_\bullet \rightarrow H_\bullet^I$  definido por  $s(x) = (s_0x, \dots, s_nx)$  que es una equivalencia débil. De hecho es una equivalencia homotópica, lo cual se demuestra igual que en el caso anterior.

Para ver que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración, sean  $(x, y) \in N_n(H_\bullet \times H_\bullet) = N_n(H_\bullet) \times N_n(H_\bullet)$ . Entonces tenemos que  $(y, x, 0, \dots, 0, -) \in \Lambda_{n+1}^{n+1}(H_\bullet)$ , y como  $H_\bullet$  es de Kan, existe  $x_0 \in H_{n+1}$  tal que  $d_0x_0 = y$ ,  $d_1x_0 = x$ ,  $d_ix_0 = 0$ ,  $2 \leq i \leq n$ . El elemento  $(x_0, s_1x, \dots, s_nx) \in N_n(H_\bullet^I)$  y  $(\partial_0, \partial_1)(x_0, s_1x, \dots, s_nx) = (d_{n+1}s_nx, d_0x_0) = (x, y)$ .

Por tanto, en grupos simpliciales, la relación de homotopía que teníamos definida (ver sección 1.2.3) coincide con la relación de homotopía por la izquierda y por la derecha (cuando el dominio es un grupo simplicial cofibrante) que se deduce de la estructura de modelos.

Estudiemos brevemente el functor de lazos  $\Omega$ . Recordemos que para calcular  $\Omega H_\bullet$  se tomaba la fibra (es decir, el núcleo) del morfismo  $(\partial_0, \partial_1) : H_\bullet^I \rightarrow H_\bullet \times H_\bullet$ ; por tanto, tenemos que

$$(\Omega H_\bullet)_n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in (H_{n+1})^{n+1} / \begin{array}{l} d_ix_i = d_ix_{i-1} \\ d_0x_0 = 0 \\ d_{n+1}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

El functor  $\Omega$  puede ser descrito como sigue. Sea  $H_\bullet$  un grupo simplicial y sea  $PH_\bullet = Ker(\partial_0)$ . Es claro que  $\partial_0$  es una fibración (pues tanto  $(\partial_0, \partial_1) : H_\bullet^I \rightarrow H_\bullet \times H_\bullet$  como la proyección  $H_\bullet \times H_\bullet \rightarrow H_\bullet$  lo son) y una equivalencia débil (pues  $s$  es una inversa homotópica). Entonces  $\partial_0$  es una fibración trivial, lo que nos dice que  $\pi_q(PH_\bullet) = 0$ ,  $q \geq 0$  (ver Ejemplo 4 de la sección 1.4.1). Tenemos entonces que  $\partial_1 : PH_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una fibración cuya fibra es exactamente  $\Omega H_\bullet$ . Como el functor  $N_\star$  es exacto a izquierda y  $\partial_1$  es una fibración tenemos una sucesión exacta corta de complejos de cadenas de grupos (salvo en dimensión 0)

$$0 \rightarrow N_\star(\Omega H_\bullet) \rightarrow N_\star(PH_\bullet) \rightarrow N_\star(H_\bullet) \rightarrow 0$$

que conduce a una sucesión exacta larga en los grupos de homotopía

$$\dots \longrightarrow \pi_{n+1}(PH_\bullet) \longrightarrow \pi_{n+1}(H_\bullet) \longrightarrow \pi_n(\Omega H_\bullet) \longrightarrow \pi_n(PH_\bullet) \longrightarrow \dots$$

y puesto que  $\pi_{n+1}(PH_\bullet) = \pi_n(PH_\bullet) = 0$  deducimos que

$$\pi_n(H_\bullet) \cong \pi_{n-1}(\Omega H_\bullet) \quad \forall n \geq 1.$$

Por otra parte, en [29] se define, para un grupo simplicial  $H_\bullet$ , su grupo de lazos  $\Omega' H_\bullet$  de forma diferente. Recordemos como está definido  $\Omega' H_\bullet$ .

Si  $H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , se define  $P'H_\bullet$  como el grupo simplicial cuyos  $n$ -símplices vienen dados por:

$$(P'(H_\bullet))_n = \{x \in H_{n+1} / d_1 \dots d_{n+1}x = 0\}$$

y los operadores  $d_i$  y  $s_i$  son la restricción de  $d_{i+1}$  y  $s_{i+1}$ .

Las aplicaciones  $d_0 : (P'H_\bullet)_n \rightarrow H_n$  inducen un morfismo simplicial  $d_0 : P'H_\bullet \rightarrow H_\bullet$  que claramente es fibración y  $\Omega'H_\bullet$  es por definición la fibra de  $d_0$ , es decir,

$$(\Omega'H_\bullet)_n = \{x \in H_{n+1} / d_1 \dots d_{n+1}x = 0, d_0x = 0\}$$

Se comprueba que  $\pi_i(P'H_\bullet) = 0 \forall i \geq 0$ , y un razonamiento análogo al que acabamos de usar nos permite afirmar que  $\pi_n(H_\bullet) \cong \pi_{n-1}(\Omega'H_\bullet) \forall n \geq 1$ , aunque, un cálculo directo, nos muestra que  $N_n(H_\bullet) = N_{n-1}(\Omega'H_\bullet)$ ,  $n \geq 1$  lo que implica la afirmación anterior.

Por tanto, los grupos de homotopía de  $\Omega H_\bullet$  y  $\Omega' H_\bullet$  son isomorfos. Veamos que existe una equivalencia débil  $\varphi_\bullet : \Omega' H_\bullet \rightarrow \Omega H_\bullet$  y para ello definimos  $\varphi_\bullet : P'H_\bullet \rightarrow PH_\bullet$  como sigue:

$\varphi_n(x) = (x_0, \dots, x_n)$  donde  $x_0 = x$  y  $x_i = s_{i-1}d_i x_{i-1}$ ,  $i \geq 1$ . Se deduce fácilmente que

$$d_i x_i = d_i s_{i-1} d_i x_{i-1} = d_i x_{i-1}$$

y además,

$$\begin{aligned} d_{n+1}x_n &= d_{n+1}s_{n-1}d_n x_{n-1} = s_{n-1}d_n d_n x_{n-1} = s_{n-1}d_n d_{n+1}s_{n-2}d_{n-1}x_{n-2} = \\ &= s_{n-1}s_{n-2}d_{n-1}d_n d_{n-1}x_{n-2} = s_{n-1}s_{n-2}d_{n-1}d_n d_{n+1}x_{n-2} = \\ &\dots\dots\dots \\ &s_{n-1} \dots s_0 d_1 \dots d_{n+1}x_0 = 0 \end{aligned}$$

Necesitamos comprobar que los diagramas siguientes son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} (P'H_\bullet)_n & \xrightarrow{d_i} & (P'H_\bullet)_{n-1} & & (P'H_\bullet)_n & \xrightarrow{s_i} & (P'H_\bullet)_{n+1} \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n+1} \\ (PH_\bullet)_n & \xrightarrow{d_i} & (PH_\bullet)_{n-1} & & (PH_\bullet)_n & \xrightarrow{s_i} & (PH_\bullet)_{n+1} \end{array}$$

para lo cual utilizamos la descripción de los operadores cara y degeneración en  $P'H_\bullet$  y  $PH_\bullet$ .

Notemos que  $\varphi_n(x) = (x, s_0 d_1 x, \dots, s_{n-1} \dots s_0 d_1 \dots d_n x)$  de donde deducimos que

$$\varphi_{n-1}(d_i x) = \varphi_{n-1}d_{i+1}x = (d_{i+1}x, s_0 d_1 d_{i+1}x, \dots, s_{n-2} \dots s_0 d_1 \dots d_{n-1}d_{i+1}x) =$$

$$\begin{aligned}
&= (d_{i+1}x_0, d_{i+1}s_0d_1x, \dots, d_{i+1}s_{i-2} \dots s_0d_1 \dots d_{i-1}x, \\
&, d_i s_i s_{i-1} \dots s_0 d_1 \dots d_{i+1}x, \dots, d_i s_i s_{n-2} \dots s_0 d_1 \dots d_{n-1} d_{i+1}x) = \\
&= (d_{i+1}x_0, d_{i+1}s_0d_1x, \dots, d_{i+1}s_{i-2} \dots s_0d_1 \dots d_{i-1}x, \\
&, d_i s_i s_{i-1} \dots s_0, d_1 \dots d_{i+1}x, \dots, d_i s_{n-1} s_{n-2} \dots s_0 d_1 \dots d_n x) = \\
&d_i(x, s_0 d_1 x, \dots, s_{n-1} \dots s_0 d_1 \dots d_n x) = d_i \varphi_n(x)
\end{aligned}$$

Para las degeneraciones se razona de manera análoga y, por tanto,  $\varphi_\bullet$  es una morfismo simplicial.

Además, si  $x \in (\Omega' H_\bullet)_n$ , se tiene que  $\varphi_n(x) \in (\Omega H_\bullet)_n$ .

Por otra parte, si  $x \in (P' H_\bullet)_n$ , se tiene que  $(\partial_1)_n(\varphi_n x) = d_0 x$ , luego el siguiente diagrama de fibraciones es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega' H_\bullet & \hookrightarrow & P' H_\bullet & \xrightarrow{d_0} & H_\bullet \\
\varphi_\bullet \downarrow & & \varphi_\bullet \downarrow & & \parallel \\
\Omega H_\bullet & \hookrightarrow & P H_\bullet & \xrightarrow{\partial_1} & H_\bullet
\end{array}$$

Si escribimos las sucesiones exactas largas asociadas (teniendo en cuenta que  $\pi_n(P' H_\bullet) = \pi_n(P H_\bullet) = 0$ ) tenemos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_{n+1}(H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_n(\Omega' H_\bullet) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_n(H_\bullet) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \parallel & & \parallel & & \downarrow \pi_n(\varphi) & & \parallel & & \parallel & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_{n+1}(H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_n(\Omega H_\bullet) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_n(H_\bullet) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

lo que nos dice que  $\pi_n(\varphi)$  es un isomorfismo.

Tenemos entonces dos funtores  $\Omega, \Omega' : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que determinan el mismo funtor de lazos en la categoría de homotopía  $\Omega : Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \rightarrow Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$ .

El funtor  $\Omega : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  tiene un adjunto por la izquierda, el funtor  $\Sigma : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , definido como

$$\Sigma G_\bullet = \text{Coker}(G_\bullet \amalg G_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} G_\bullet \otimes I)$$

es decir,  $(\Sigma G_\bullet)_n = \coprod_{\tau \neq (0),(1)} G_n$ .

Este funtor induce el funtor suspensión  $\Sigma$  en  $Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$ .

#### 1.4.4 Categorías simpliciales de modelos cerradas

Estudiamos ahora las categorías de modelos que tienen además una estructura simplicial (en un sentido que ahora precisaremos) y en las que ambas estructuras son compatibles.

Recordamos que una categoría simplicial (ver [58]) es una categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  en la que se tiene definido un funtor

$$\underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(-, -) : \underline{\mathbf{C}}^{op} \times \underline{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$$

junto con una aplicación

$$\underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y) \times \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(Y, Z) \rightarrow \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Z)$$

llamada composición, de forma que:

- la composición es asociativa
- $\underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y) \cong (\underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y))_0$  para cualesquiera  $X, Y \in \underline{\mathbf{C}}$ .
- Si  $f \in \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y) (= \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y)_0)$  y  $g \in \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(Y, Z)_n$  entonces  $g \circ s_0^n f = \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(f, Z)_n(g)$ .

Es claro que las categorías  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  son categorías simpliciales (ver secciones 1.2.2 y 1.2.3).

Si  $\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría simplicial y tenemos  $Y \in \underline{\mathbf{C}}$  y  $K_{\bullet} \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , se define  $Y^{K_{\bullet}}$  como un objeto en la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  (si existe) junto con una aplicación  $\beta : K_{\bullet} \rightarrow \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(Y^{K_{\bullet}}, Y)$  de forma que, para cualquier  $X$ , exista un isomorfismo de conjuntos simpliciales

$$\psi : \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y^{K_{\bullet}}) \rightarrow (\underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y))^{K_{\bullet}}$$

cuya aplicación correspondiente, por la adjunción de la proposición 1.2.3 es la composición

$$\begin{array}{ccc} \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y^{K_{\bullet}}) \times K_{\bullet} & \xrightarrow{Id \times \beta} & \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y^{K_{\bullet}}) \times \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(Y^{K_{\bullet}}, Y) \\ & & \downarrow \circ \\ & & \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y) \end{array}$$

Dualmente, se define  $X \otimes K_{\bullet}$  para  $X \in \underline{\mathbf{C}}$  y  $K_{\bullet} \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , como un objeto de  $\underline{\mathbf{C}}$  junto con una aplicación  $\alpha : K_{\bullet} \rightarrow \underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, X \otimes K_{\bullet})$  tal que, para todo  $Y \in \underline{\mathbf{C}}$ , la aplicación siguiente

$$\underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X \otimes K_{\bullet}, Y) \rightarrow (\underline{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(X, Y))^{K_{\bullet}}$$

que es la aplicación adjunta (ver proposición 1.2.3) a la composición

$$K_{\bullet} \times \underline{Hom}_{\underline{C}}(X \otimes K_{\bullet}, Y) \xrightarrow{\alpha \times Id} \underline{Hom}_{\underline{C}}(X, X \otimes K_{\bullet}) \times \underline{Hom}_{\underline{C}}(X \otimes K_{\bullet}, Y)$$

$$\downarrow \circ$$

$$\underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y)$$

sea un isomorfismo.

Dado  $L_{\bullet} \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y  $K_{\bullet} \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , entonces podemos definir  $L_{\bullet} \otimes K_{\bullet}$  como  $L_{\bullet} \times K_{\bullet}$ . Para definir  $\alpha : K_{\bullet} \rightarrow (L_{\bullet} \times K_{\bullet})^{L_{\bullet}}$  (notemos que  $\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_{\bullet}, L_{\bullet}) = L_{\bullet}^{K_{\bullet}}$ ) damos su aplicación adjunta  $Id_{L_{\bullet} \times K_{\bullet}} : L_{\bullet} \times K_{\bullet} \rightarrow L_{\bullet} \times K_{\bullet}$ .

El objeto  $L_{\bullet}^{K_{\bullet}}$  lo tenemos ya definido. La aplicación  $\beta : K_{\bullet} \rightarrow (L_{\bullet})^{L_{\bullet}^{K_{\bullet}}}$  es la adjunta de la aplicación  $ev : K_{\bullet} \times \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_{\bullet}, L_{\bullet}) \rightarrow L_{\bullet}$ .

En la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  tenemos ya definidos  $G_{\bullet} \otimes K_{\bullet}$  y  $H_{\bullet}^{K_{\bullet}}$ . La aplicación  $\alpha : K_{\bullet} \rightarrow \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_{\bullet}, G_{\bullet} \otimes K_{\bullet})$  está definida como sigue:

Si  $x \in K_n$ ,  $\alpha_x : G_{\bullet} \otimes \Delta[n] \rightarrow G_{\bullet} \otimes K_{\bullet}$ , luego para cada  $\tau \in (\Delta[n])_m$  debemos dar una aplicación  $G_m \rightarrow (G_{\bullet} \otimes K_{\bullet})_m$ . Ésta es la inclusión en la componente correspondiente a  $sd(x) \in K_m$ , si  $\tau = sd\Delta_n$ .

Veamos como se define  $\beta : K_{\bullet} \rightarrow \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(H_{\bullet}^{K_{\bullet}}, H_{\bullet})$

Sea  $x \in K_n$ . Necesitamos dar  $\beta_x : H_{\bullet}^{K_{\bullet}} \otimes \Delta[n] \rightarrow H_{\bullet}$ , es decir, para cada  $m \geq 0$  hay que dar una aplicación  $(\beta_x)_m : (H_{\bullet}^{K_{\bullet}} \times \Delta[n])_m \rightarrow H_m$ , y por tanto, si  $\tau \in (\Delta[n])_m$  hace falta dar una aplicación  $(H_{\bullet}^{K_{\bullet}})_m \rightarrow H_m$ . Supongamos que  $\tau = sd\Delta[n]$ ; entonces esta última aplicación es la que hace corresponder a  $f_{\bullet} : K_{\bullet} \times \Delta[m] \rightarrow H_{\bullet}$  el elemento  $f_m(sdx, \Delta_m)$ .

Supongamos que  $\underline{C}$  es una categoría simplicial para la que existen los objetos distinguidos  $X \otimes K_{\bullet}$  y  $X^{K_{\bullet}}$ . Puesto que  $\underline{Hom}_{\underline{C}}(X \otimes K_{\bullet}, Y) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})}(K_{\bullet}, \underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y))$ , dar un n-símplice de  $\underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y)$  es equivalente a una aplicación simplicial  $\Delta[n] \rightarrow \underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y)$ , y por tanto, una aplicación  $X \otimes \Delta[n] \rightarrow Y$

Dualmente, se tiene también que los n-símplices de  $\underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y)$  se corresponden con los morfismos  $X \rightarrow Y^{\Delta[n]}$ .

Dados  $f, g \in \underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y)$ , se dice que son simplicialmente homotópicos si son homotópicos vistos como 0-símplices de  $\underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y)$ , es decir, si existe  $k \in (\underline{Hom}_{\underline{C}}(X, Y))_1$  tal que  $d_0 k = f$  y  $d_1 k = g$ .

En el caso de conjuntos y grupos simpliciales, hemos visto que este concepto coincide con el de homotopía entre aplicaciones simpliciales.

Recordemos por último el concepto de categoría simplicial de modelos cerrada (ver [58]).

Una categoría simplicial de modelos cerrada es una categoría simplicial  $\underline{C}$ , con una estructura de modelos cerrada tal que, para cada  $X \in \underline{C}$  y

$K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , existen objetos  $X \otimes K_\bullet$  y  $X^{K_\bullet}$ , y además, para cada cofibración  $i : A \rightarrow B$  y cada fibración  $p : X \rightarrow Y$ , el morfismo punteado en el siguiente diagrama (que se obtiene por la propiedad universal del cuadrado cartesiano que en él aparece)

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{Hom}(B, X) & & \\
 \downarrow & \searrow^{i^*} & \\
 \underline{Hom}(A, X) \times_{\underline{Hom}(A, Y)} \underline{Hom}(B, Y) & \longrightarrow & \underline{Hom}(A, X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{Hom}(B, Y) & \longrightarrow & \underline{Hom}(A, Y)
 \end{array}$$

$p_*$

es una fibración de Kan, que además es equivalencia débil si, o bien  $i$ , o bien  $p$  lo es.

Ésto último es equivalente a que siempre que se tenga una fibración  $p : X \rightarrow Y$  en  $\underline{\mathbf{C}}$ , el morfismo punteado en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X^{\Delta[n]} & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 X^{\Delta[n]} \times_{Y^{\Delta[n]}} Y^{\Delta[n]} & \longrightarrow & X^{\Delta[n]} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y^{\Delta[n]} & \longrightarrow & Y^{\Delta[n]}
 \end{array}$$

sea una fibración (que además sea equivalencia débil cuando lo sea  $p$ ) y que el del siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 X^{\Delta[1]} & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 X^{\Delta[1, k]} \times_{Y^{\Delta[1, k]}} Y^{\Delta[1]} & \longrightarrow & X^{\Delta[1, k]} \quad k = 0, 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y^{\Delta[1]} & \longrightarrow & Y^{\Delta[1, k]}
 \end{array}$$

sea una fibración trivial.

También es equivalente a un resultado análogo para cofibraciones, a saber, que si  $i : A \rightarrow B$  es una cofibración en  $\underline{\mathbf{C}}$  el morfismo definido por el cuadrado

cocartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes \dot{\Delta}[n] & \longrightarrow & A \otimes \Delta[n] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B \otimes \dot{\Delta}[n] & \longrightarrow & A \otimes \Delta[n] \amalg_{A \otimes \dot{\Delta}[n]} B \otimes \dot{\Delta}[n] \\
 & \searrow & \searrow \\
 & & B \otimes \Delta[n]
 \end{array}$$

es una cofibración (que es equivalencia débil cuando  $i$  lo sea) y el morfismo definido por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes \Delta[1, k] & \longrightarrow & A \otimes \Delta[1] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B \otimes \Delta[1, k] & \longrightarrow & A \otimes \Delta[1] \amalg_{A \otimes \Delta[1, k]} B \otimes \Delta[1, k] \\
 & \searrow & \searrow \\
 & & B \otimes \Delta[1]
 \end{array} \quad k = 0, 1$$

es una cofibración trivial.

En conjuntos simpliciales no es difícil ver que si  $i_{\bullet} : A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet}$  es una cofibración (es decir, una aplicación inyectiva) también lo es la aplicación  $(A_{\bullet} \times \Delta[n]) \amalg_{A_{\bullet} \times \dot{\Delta}[n]} (B_{\bullet} \times \dot{\Delta}[n]) \rightarrow B_{\bullet} \times \Delta[n]$ .

Si  $i_{\bullet}$  es cofibración trivial, lo es  $i_{\bullet} \times Id_{\dot{\Delta}[n]}$ , luego lo es su opuesta en el cuadrado cocartesiano. También, por ser  $i_{\bullet}$  cofibración trivial, lo es  $i_{\bullet} \times Id_{\Delta[n]}$ , luego aplicando el axioma CM2, deducimos que  $(A_{\bullet} \times \Delta[n]) \amalg_{A_{\bullet} \times \dot{\Delta}[n]} (B_{\bullet} \times \dot{\Delta}[n]) \rightarrow B_{\bullet} \times \Delta[n]$  es equivalencia débil.

Para probar que el morfismo que aparece en el segundo diagrama es cofibración trivial se razona de forma parecida a como lo hemos hecho ahora, pero teniendo en cuenta que los morfismos  $A_{\bullet} \times \Delta[1, k] \rightarrow A_{\bullet} \times I$  y  $B_{\bullet} \times \Delta[1, k] \rightarrow B_{\bullet} \times I$ ,  $k = 0, 1$  son cofibraciones triviales, pues son los morfismos  $i_0$  e  $i_1$  que aparecen en la definición del cilindro para la estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ .

Dado que se verifica esta condición para las cofibraciones, se verifica su equivalente para las fibraciones, lo que implica que en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  también es cierta, ya que todas las construcciones que aparecen ( $X^{\Delta[n]}$ ,  $X^{\dot{\Delta}[n]}$ , cuadrados cartesianos, etc.) así como las fibraciones y equivalencias débiles son "iguales" en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  y en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Por tanto, las categorías **Simp(Set)** y **Simp(Gp)** son categorías simpliciales de modelos cerradas. La categoría **Top**, con la siguiente definición del funtor *Hom*

$$[\underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)]_n = Hom_{\mathbf{Top}}(X \times |\Delta[n]|, Y)$$

es también una categoría simplicial de modelos cerrada (ver [58]).

Destaquemos finalmente que en una categoría simplicial de modelos cerrada, se tienen tres relaciones de homotopía: La relación de homotopía simplicial, la relación de homotopía por la izquierda y la relación de homotopía por la derecha. Es un hecho general (ver [58]) que la relación de homotopía simplicial implica las otras dos, y que cuando el dominio de los morfismos es cofibrante y el codominio es fibrante, las tres relaciones son de equivalencia y coinciden (algo que ya habíamos contrastado en **Simp(Set)** y **Simp(Gp)**).

## Capítulo 2

# Teoría de Homotopía para equivalencias débiles truncadas de Grupos Simpliciales

En este capítulo se toma la categoría de grupos simpliciales y en ella se generaliza por dos caminos duales la estructura de modelos clásica de esta categoría tomando nociones más débiles de lo que es una equivalencia débil de grupos simpliciales que se obtienen “truncando” convenientemente dicho concepto. Más precisamente, para cada  $r \geq 0$  y cada  $n \geq 0$  se toma, por una parte, como equivalencias débiles los morfismos  $f_\bullet$  tales que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $q \geq r$  y por otra, los morfismos que inducen isomorfismo en los grupos de homotopía  $\pi_q$ ,  $0 \leq q \leq n$  y se les “acompaña” de convenientes nociones de fibración y cofibración, obteniéndose en ambos casos estructuras de modelos (teoremas 2.1.6 y 2.2.6) que se denominan la  $\bar{r}$ -estructura y la  $n$ -estructura respectivamente y que permiten recuperar, cuando  $r = 0$  en el primer caso y cuando  $n \rightarrow \infty$  en el segundo, la estructura clásica de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Estas estructuras de modelos están muy relacionadas con las que existen en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  (ver [59]) y  $\mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  (ver [21]). De hecho, se prueba que las teorías de homotopía asociadas son equivalentes (teoremas 2.1.13 y 2.2.12).

Las construcciones de cilindros y espacios de arcos que se obtienen a partir de las caracterizaciones de las fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles permiten identificar la relación de homotopía que se derivan de la estructura de modelos, obteniendo, en el caso de la  $n$ -estructura que esta relación se expresa justamente en términos de una homotopía simplicial truncada.

Por último, se combinan ambas estructuras para obtener la llamada  $(r, n)$ -

estructura para cada  $r, n$  en la situación  $0 \leq r \leq n$  y se utilizan los resultados obtenidos anteriormente para analizar la teoría de homotopía asociada.

## 2.1 Estructuras de modelos de Quillen para modelos algebraicos de espacios $r$ -conexos

En esta sección abordamos el estudio de la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  asociada a la  $\bar{r}$ -estructura, que a continuación proponemos.

Dado  $r \geq 0$ , consideramos las siguientes familias de morfismos en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ :

**Definición 2.1.1.** Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales. Diremos que  $f_{\bullet}$  es:

- i) una  $\bar{r}$ -fibración si es una fibración de Kan en dimensiones  $\geq r + 1$ .
- ii) una  $\bar{r}$ -equivalencia débil si  $\pi_q(f_{\bullet})$  es un isomorfismo para  $q \geq r$ .
- iii) una  $\bar{r}$ -cofibración si tiene la RLP con respecto a las  $\bar{r}$ -fibraciones triviales.

La estructura que determinan estas familias de morfismos la llamaremos la " $\bar{r}$ -estructura". Notemos que, para  $r = 0$ , estas definiciones coinciden con las que determinan la estructura usual en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver sección ??). Es claro que todo grupo simplicial es  $\bar{r}$ -fibrante, y que se tienen las siguientes secuencias de inclusiones:

$$\begin{aligned} \{fibs.\} &\subseteq \{\bar{1} - fibs.\} \subseteq \dots \subseteq \{\bar{r} - fibs.\} \subseteq \{\overline{r+1} - fibs.\} \subseteq \dots \\ \{fibs. \text{ triv.}\} &\subseteq \{\bar{1} - fibs. \text{ triv.}\} \subseteq \dots \subseteq \{\bar{r} - fibs. \text{ triv.}\} \subseteq \\ &\quad \{\overline{r+1} - fibs. \text{ triv.}\} \subseteq \dots \end{aligned}$$

Damos ahora dos caracterizaciones de las  $\bar{r}$ -fibraciones de grupos simpliciales, en términos de propiedades de levantamiento y en términos del complejo de Moore, que se deducen fácilmente de los lemas 1.2.24 y 1.2.25

**Proposición 2.1.2.** Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces son equivalentes:

- i)  $f_{\bullet}$  es una  $\bar{r}$ -fibración.
- ii)  $f_{\bullet}$  tiene la RLP con respecto a las familias de morfismos  $F\Delta[q, q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $q \geq r + 1$ .
- iii)  $N_q(f_{\bullet})$  es sobreyectivo para  $q \geq r + 1$ .

Basándonos en esta proposición, obtenemos la sucesión exacta larga asociada a una  $\bar{r}$ -fibración.

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  una  $\bar{r}$ -fibración de grupos simpliciales. Llamemos  $I$  a la imagen de la aplicación entre complejos de cadenas  $N_\bullet(f_\bullet)$ , y  $H_\bullet(I)$  a su homología. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{r+1}(Ker f_\bullet) \longrightarrow \pi_{r+1}(G_\bullet) \longrightarrow \pi_{r+1}(H_\bullet) \longrightarrow \\ \longrightarrow \pi_r(Ker f_\bullet) \longrightarrow \pi_r(G_\bullet) \longrightarrow H_r(I) \end{aligned}$$

y una factorización del morfismo  $\pi_r(f_\bullet)$ ,  $\pi_r(G_\bullet) \longrightarrow H_r(I) \xrightarrow{\gamma} \pi_r(H_\bullet)$ , donde  $\gamma$  es inyectivo.

*Demostración:* Consideramos la sucesión exacta corta de complejos de cadenas de grupos no abelianos

$$0 \longrightarrow N_\bullet(Ker f_\bullet) \longrightarrow N_\bullet(G_\bullet) \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

Es claro que  $B_q(I) = Imag(d_{q+1})$  es un subgrupo normal de  $I_q$ , y por tanto, de  $Z_q(I) = Ker(d_q)$ . Tenemos pues, asociada a la sucesión anterior, una sucesión exacta larga en los grupos de homología

$$\rightarrow \pi_q(Ker f_\bullet) \rightarrow \pi_q(G_\bullet) \rightarrow H_q(I) \rightarrow \pi_{q-1}(Ker f_\bullet) \rightarrow \pi_{q-1}(G_\bullet) \rightarrow$$

Ahora bien, puesto que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración, se tiene que  $I_q = N_q(H_\bullet)$  para  $q \geq r+1$ , de donde  $H_q(I) = \pi_q(H_\bullet)$  para  $q \geq r+2$ , y claramente se tiene que  $B_{r+1}(I) = B_{r+1}(H_\bullet)$  y  $Z_{r+1}(I) = Z_{r+1}(H_\bullet)$  lo que nos dice que  $H_{r+1}(I) = \pi_{r+1}(H_\bullet)$

Esto nos da la sucesión

$$\cdots \longrightarrow \pi_{q+1}(H_\bullet) \longrightarrow \pi_q(Ker f_\bullet) \longrightarrow \pi_q(G_\bullet) \longrightarrow \pi_q(H_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_{r+1}(G_\bullet) \longrightarrow \pi_{r+1}(H_\bullet) \longrightarrow \pi_r(Ker f_\bullet) \longrightarrow \pi_r(G_\bullet) \longrightarrow H_r(I)$$

La existencia de  $\gamma$  es clara, pues  $\gamma$  es el morfismo inducido por la inclusión  $I \hookrightarrow N_\bullet(H_\bullet)$

El que  $\gamma$  sea inyectivo se deduce fácilmente del siguiente diagrama de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccc} B_r(I) & \longrightarrow & Z_r(I) & \longrightarrow & H_r(I) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \gamma \\ B_r(H_\bullet) & \longrightarrow & Z_r(H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_r(H_\bullet) \end{array}$$

■

Esta proposición nos permite dar una caracterización de las  $\bar{r}$ -fibraciones triviales en términos de propiedades de levantamiento, así como en términos del complejo de Moore y los grupos de homotopía.

**Proposición 2.1.4.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces son equivalentes:*

- i)  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial.
- ii)  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a las familias de morfismos  $F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $q \geq r + 1$ , y  $F\Delta[r + 1, r + 1] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta} [r + 1]$ .
- iii)  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo para  $q \geq r + 1$ ,  $\pi_q(Ker f_\bullet) = 0$  para  $q \geq r$  y  $\pi_r(f_\bullet)$  es sobreyectivo.

*Demostración:*

i)  $\Rightarrow$  ii) Por el lema 1.2.25, deducimos fácilmente que  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a los morfismos  $F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $q \geq r + 1$ . Queda probar utilizando el lema 1.2.24 que el morfismo  $Z_r(G_\bullet) \rightarrow Z_r(H_\bullet)$  es sobreyectivo, lo cual puede deducirse a partir del siguiente diagrama de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & B_r(G_\bullet) & \longrightarrow & Z_r(G_\bullet) & \longrightarrow & \pi_r(G_\bullet) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \scriptstyle |r & & \\
 0 & \longrightarrow & B_r(H_\bullet) & \longrightarrow & Z_r(H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_r(H_\bullet) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

ii)  $\Rightarrow$  i) Es claro, en virtud del lema 1.2.25 que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $q \geq r + 1$  y que  $\pi_r(f_\bullet)$  es inyectivo. La propiedad de levantamiento por la derecha con respecto a  $F\Delta[r + 1, r + 1] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta} [r + 1]$ , junto con el lema 1.2.24 implican directamente que  $Z_r(f_\bullet)$  es sobreyectivo, y por lo tanto  $\pi_r(f_\bullet)$  también, lo que nos da finalmente que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil.

Por otro lado el lema 1.2.24 nos dice también que  $f_\bullet$  es una fibración de Kan en dimensiones mayores que  $r + 1$ . La condición de Kan en dimensión  $r + 1$  (es decir, tener la propiedad de levantamiento por la derecha respecto a  $F\Delta[r + 1, r + 1] \hookrightarrow F\Delta[r + 1]$ ) se obtiene a partir de que  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[r + 1, r + 1] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta} [r + 1]$  y  $F \overset{\bullet}{\Delta} [r + 1] \hookrightarrow F\Delta[r + 1]$ .

i)  $\Rightarrow$  iii) La proposición 2.1.2 nos asegura que  $N_{q+1}(f_\bullet)$  es sobreyectivo para  $q \geq r$ . Utilizamos ahora la sucesión exacta larga obtenida en la proposición 2.1.3 para deducir que  $\pi_q(Ker f_\bullet) = 0$  para  $q \geq r$ . Por último, es evidente que  $\pi_r(f_\bullet)$  es sobreyectivo.

iii)  $\Rightarrow$  i) Dado que  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo para  $q \geq r + 1$ , podemos construir la sucesión exacta que obtuvimos en la proposición 2.1.3, en la que sustituimos  $\pi_q(Ker f_\bullet)$  por 0

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & \pi_{q+2}(H_\bullet) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_{q+1}(G_\bullet) & \rightarrow & \pi_{q+1}(H_\bullet) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_{r+1}(G_\bullet) & \rightarrow & \pi_{r+1}(H_\bullet) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \pi_r(G_\bullet) & \rightarrow & H_r(I) \\ & & & & & & & & & & & \searrow & \downarrow \\ & & & & & & & & & & & & \pi_r(H_\bullet) \end{array}$$

De aquí deducimos que  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $q \geq r$ , y por tanto que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil. La proposición 2.1.2 nos dice que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración. ■

De esta proposición deducimos que los morfismos  $F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \hookrightarrow F \Delta [q]$ ,  $q \geq r + 1$  y  $F \Delta [r + 1, k] \hookrightarrow F \overset{\bullet}{\Delta} [r + 1]$ ,  $0 \leq k \leq r + 1$ , son  $\bar{r}$ -cofibraciones.

Damos ahora un lema, referente al comportamiento de las  $\bar{r}$ -cofibraciones y las  $\bar{r}$ -equivalencias débiles con respecto a determinados colímites, que necesitaremos en la demostración del siguiente teorema.

**Lema 2.1.5.** i) Si  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración de grupos simpliciales y  $G_\bullet \rightarrow K_\bullet$  un morfismo cualquiera, entonces el morfismo inducido en el pushout  $K_\bullet \rightarrow H_\bullet \amalg_{G_\bullet} K_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración (el opuesto en un pushout de una  $\bar{r}$ -cofibración es una  $\bar{r}$ -cofibración).

ii) Si  $\{f_{i_\bullet} : G_{i_\bullet} \rightarrow H_{i_\bullet}\}_{i \in I}$  es una familia de  $\bar{r}$ -cofibraciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , el morfismo inducido  $\amalg_{i \in I} G_{i_\bullet} \rightarrow \amalg_{i \in I} H_{i_\bullet}$  es una  $\bar{r}$ -cofibración (el coproducto de  $\bar{r}$ -cofibraciones es una  $\bar{r}$ -cofibración).

iii) Si  $G_{0_\bullet} \rightarrow G_{1_\bullet} \rightarrow \cdots \rightarrow G_{n_\bullet} \rightarrow \dots$  es una sucesión de  $\bar{r}$ -cofibraciones (respectivamente,  $\bar{r}$ -equivalencias débiles) de grupos simpliciales, entonces, el morfismo  $G_{0_\bullet} \rightarrow \lim_{\rightarrow} G_{n_\bullet}$  es una  $\bar{r}$ -cofibración (respectivamente  $\bar{r}$ -equivalencia débil)

*Demostración:*

i) Necesitamos encontrar levantamiento en cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} K_{\bullet} & \xrightarrow{u_{\bullet}} & X_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow g_{\bullet} \\ H_{\bullet} \coprod_{G_{\bullet}} K_{\bullet} & \longrightarrow & Y_{\bullet} \end{array} \quad \text{donde } g_{\bullet} \text{ es una } \bar{r}\text{-fibración trivial.}$$

Para ésto, consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} G_{\bullet} & \longrightarrow & K_{\bullet} & \xrightarrow{u_{\bullet}} & X_{\bullet} \\ \downarrow f_{\bullet} & & \downarrow s_{\bullet} & \nearrow t_{\bullet} & \downarrow g_{\bullet} \\ H_{\bullet} & \longrightarrow & H_{\bullet} \coprod_{G_{\bullet}} K_{\bullet} & \longrightarrow & Y_{\bullet} \end{array}$$

donde el morfismo  $s_{\bullet}$  existe por ser  $f_{\bullet}$  una  $\bar{r}$ -cofibración. Los morfismos  $u_{\bullet}$  y  $s_{\bullet}$  determinan entonces un morfismo  $t_{\bullet} : H_{\bullet} \coprod_{G_{\bullet}} K_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$ , que es el levantamiento buscado.

La parte ii) y la parte iii) relativa a las  $\bar{r}$ -cofibraciones se demuestra de manera análoga. En lo referente a las  $\bar{r}$ -equivalencias débiles, es suficiente tener en cuenta que  $\pi_q(\lim_{\rightarrow} G_{n\bullet}) \cong \lim_{\rightarrow}(\pi_q(G_{n\bullet})) \forall q \geq 0$ . ■

Con ésto, estamos ya en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.6.** *Con las definiciones de  $\bar{r}$ -fibración,  $\bar{r}$ -equivalencia débil y  $\bar{r}$ -cofibración,  $r \geq 0$ , la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es una categoría de modelos cerrada.*

*Demostración:* Los axiomas CM1, CM2 y CM3 se verifican claramente.

Probemos a continuación la parte de CM5 que consiste en factorizar un morfismo como una  $\bar{r}$ -cofibración seguido de una  $\bar{r}$ -fibración trivial. Usaremos el argumento del objeto pequeño para lo cual construimos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} G_{\bullet} & \xrightarrow{i_{0\bullet}} & G_{0\bullet} & \xrightarrow{i_{1\bullet}} & G_{1\bullet} & \longrightarrow \cdots & \xrightarrow{i_{n\bullet}} & G_{n\bullet} & \longrightarrow \cdots \\ \downarrow f_{\bullet} & & \downarrow q_{0\bullet} & \nearrow q_{1\bullet} & \nearrow q_{n\bullet} & & & \nearrow & \\ H_{\bullet} & & & & & & & & \end{array}$$

donde, supuesto obtenido  $G_{n\bullet}$ , obtenemos  $G_{n+1\bullet}$ ,  $i_{n+1\bullet}$  y  $q_{n+1\bullet}$  como sigue:

Primero tomamos todos los diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \longrightarrow G_{n\bullet} & & F \Delta[r+1, r+1] \longrightarrow G_{n\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F \Delta[q] \xrightarrow{\beta_\lambda} H_\bullet & q \geq r+1; & F \overset{\bullet}{\Delta} [r+1] \xrightarrow{\beta_\mu} H_\bullet
 \end{array}
 \quad (\lambda) \qquad (\mu)$$

en los que no existe levantamiento, y definimos  $G_{n+1\bullet}$  e  $i_{n+1\bullet}$  mediante el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 (\coprod_\lambda F \overset{\bullet}{\Delta} [q]) \coprod (\coprod_\mu F \Delta[r+1, r+1]) & \longrightarrow & G_{n\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow i_{n+1\bullet} \\
 (\coprod_\lambda F \Delta[q]) \coprod (\coprod_\mu F \overset{\bullet}{\Delta} [r+1]) & \longrightarrow & G_{n+1\bullet}
 \end{array}
 \quad (1)$$

Notemos que  $i_{n+1\bullet}$  es una  $\bar{r}$ -cofibración de acuerdo con el lema 2.1.5. Posteriormente definimos  $q_{n+1\bullet}$  a partir de la propiedad universal del anterior diagrama

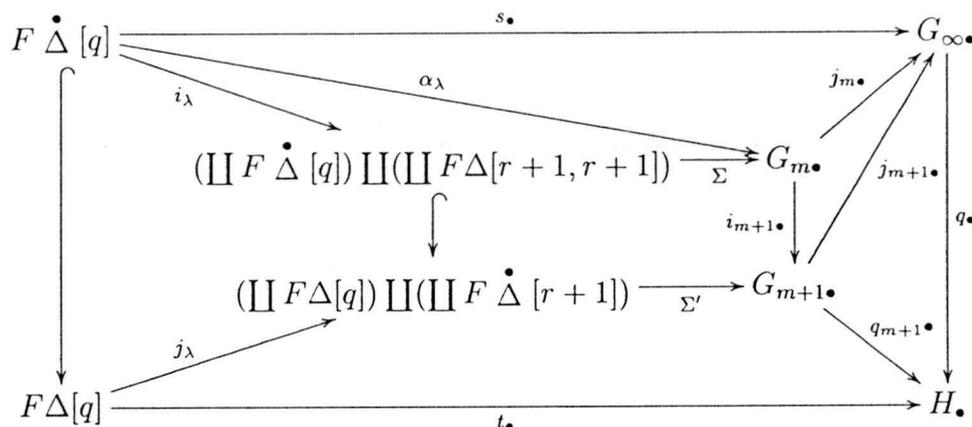
$$\begin{array}{ccc}
 (\coprod_\lambda F \overset{\bullet}{\Delta} [q]) \coprod (\coprod_\mu F \Delta[r+1, r+1]) & \longrightarrow & G_{n\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow i_{n+1\bullet} \\
 (\coprod_\lambda F \Delta[q]) \coprod (\coprod_\mu F \overset{\bullet}{\Delta} [r+1]) & \longrightarrow & G_{n+1\bullet} \\
 & \searrow (\sum_\lambda \beta_\lambda) + (\sum_\mu \beta_\mu) & \searrow q_{n+1\bullet} \\
 & & H_\bullet
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} q_{n\bullet} \\ \dots \\ q_{n+1\bullet} \end{array}$$

Si tomamos  $G_{\infty\bullet} = \varinjlim(G_{n\bullet})$  y  $q_\bullet = \varinjlim(q_{n\bullet})$ , tenemos una factorización  $f_\bullet = q_\bullet \cdot i_\bullet$ , donde  $i_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración, de acuerdo con el lema 2.1.5. Veamos que  $q_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial. Para comprobarlo consideramos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 F \overset{\bullet}{\Delta} [q] & \xrightarrow{s_\bullet} & G_{\infty\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow q_\bullet \\
 F \Delta[q] & \xrightarrow{t_\bullet} & H_\bullet
 \end{array}
 \quad (2)$$

en el que tratamos de encontrar un levantamiento, para lo cual construimos

el siguiente diagrama



que se obtiene en los siguientes pasos:

- Dado que  $F \dot{\Delta} [q]$  es secuencialmente pequeño, el morfismo  $s_{\bullet}$  factoriza a través de algún  $G_{m \bullet}$ , puesto que

$$\text{Hom}(F \dot{\Delta} [q], G_{\infty \bullet}) \cong \varinjlim \text{Hom}(F \dot{\Delta} [q], G_{n \bullet})$$

y el límite directo en conjuntos en este caso es la unión (notemos que puesto que  $i_{m \bullet}$  es inyectiva,  $i_{m \bullet}^* : \text{Hom}(F \dot{\Delta} [q], G_{m \bullet}) \rightarrow \text{Hom}(F \dot{\Delta} [q], G_{m+1 \bullet})$  es también inyectiva). Tenemos por tanto  $s_{\bullet} = j_{m \bullet} \alpha_{\lambda}$ . Observemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F \dot{\Delta} [q] & \longrightarrow & G_{m \bullet} \\ \downarrow & & \downarrow q_{\bullet} j_{m \bullet} \\ F \Delta [q] & \xrightarrow{t_{\bullet}} & H_{\bullet} \end{array}$$

y si en éste existe levantamiento  $u_{\bullet}$ , entonces  $j_{m \bullet} u_{\bullet}$  es un levantamiento en el diagrama (2). En caso contrario, tal diagrama es uno de los considerados anteriormente en la definición de  $G_{m+1 \bullet}$ .

- La última observación nos permite factorizar  $\alpha_{\lambda}$  a través de  $(\coprod_{\lambda} F \dot{\Delta} [q]) \coprod (\coprod_{\mu} F \Delta [r+1, 0])$ , donde este último objeto es el que aparece en la definición de  $G_{m+1 \bullet}$ .

- Para el mismo índice  $\lambda$  correspondiente al último diagrama consideramos la inclusión  $j_{\lambda} : F \Delta [q] \hookrightarrow (\coprod_{\lambda} F \Delta [q]) \coprod (\coprod_{\mu} F \dot{\Delta} [r+1])$ , lo que nos da un

cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 F \dot{\Delta} [q] & \xrightarrow{i_\lambda} & (\coprod_\lambda F \dot{\Delta} [q]) \amalg (\coprod_\mu F \Delta[r+1, r+1]) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F \Delta[q] & \xrightarrow{j_\lambda} & (\coprod_\lambda F \Delta[q]) \amalg (\coprod_\mu F \dot{\Delta} [r+1])
 \end{array}$$

- Utilizamos ahora como está definido  $G_{m+1}$ . Por definición del límite directo,  $j_{m+1} = j_{m+1} \cdot i_{m+1}$  y  $q_{m+1} = q \cdot j_{m+1}$ .

Es claro ahora que  $j_{m+1} \cdot \Sigma' j_\lambda$  es un levantamiento en el diagrama inicial. Si partimos de un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 F \dot{\Delta} [q] & \xrightarrow{s_\bullet} & G_\infty \\
 \downarrow & & \downarrow q_\bullet \\
 F \Delta[q] & \xrightarrow{t_\bullet} & H_\bullet
 \end{array}$$

se razona de la misma forma

Con esto demostramos que el morfismo  $q_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial

Para factorizar un morfismo  $f_\bullet$  como una  $\bar{r}$ -cofibración trivial seguido de una  $\bar{r}$ -fibración seguimos los siguientes pasos:

1. Factorizamos  $f_\bullet$  como  $f_\bullet = p_\bullet \cdot j_\bullet$ , donde  $p_\bullet$  es una fibración y  $j_\bullet$  es una cofibración trivial. Utilizamos para ello la estructura de modelos de grupos simpliciales. Notemos que  $p_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración y que  $j_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil.
2. Utilizamos la parte de CM5 que ya hemos probado para factorizar  $j_\bullet$  como  $j_\bullet = q_\bullet \cdot i_\bullet$  donde  $q_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial e  $i_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración

Dado que  $q_\bullet$  y  $q_\bullet \cdot i_\bullet = j_\bullet$  son  $\bar{r}$ -equivalencias débiles, también lo es  $i_\bullet$ , por lo que este último morfismo es una  $\bar{r}$ -cofibración trivial. Además, tanto  $p_\bullet$  como  $q_\bullet$  son  $\bar{r}$ -fibraciones triviales, lo que implica que  $p_\bullet \cdot q_\bullet$  es también. Con esto podemos afirmar que la factorización buscada es  $f_\bullet = (p_\bullet \cdot q_\bullet) \cdot i_\bullet$ .

Por último, de CM4 sólo hay que probar que existe levantamiento en cada diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 X_\bullet & \xrightarrow{u_\bullet} & G_\bullet \\
 g_\bullet \downarrow & & \downarrow f_\bullet \\
 Y_\bullet & \xrightarrow{v_\bullet} & H_\bullet
 \end{array}
 \quad \text{donde } g_\bullet \text{ es una } \bar{r}\text{-cofibración trivial y } f_\bullet \text{ es una } \bar{r}\text{-fibración}$$

puesto que la otra parte se verifica por definición de  $\bar{r}$ -cofibración.

Para ésto, utilizamos un argumento análogo al utilizado en la demostración de la primera parte de CM5 para factorizar  $g_\bullet$  como  $g_\bullet = q_\bullet i_\bullet$ , donde  $q_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración e  $i_\bullet$  tiene la LLP con respecto a todas las  $\bar{r}$ -fibraciones. Además, por el lema 2.1.5 iii),  $i_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil. Ésto implica que  $q_\bullet$  es también una  $\bar{r}$ -equivalencia débil, puesto que  $g_\bullet$  lo es, y nos permite encontrar levantamiento  $s_\bullet$  en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \xrightarrow{i_\bullet} & X_\infty \\ g_\bullet \downarrow & \nearrow s_\bullet & \downarrow q_\bullet \\ Y_\bullet & \xlongequal{\quad} & Y_\bullet \end{array}$$

ya que  $q_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial y  $g_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración.

Como  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración e  $i_\bullet$  tiene la LLP respecto a las  $\bar{r}$ -fibraciones, existe levantamiento  $t_\bullet$  en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_\bullet & \xrightarrow{u_\bullet} & G_\bullet \\ i_\bullet \downarrow & \nearrow t_\bullet & \downarrow f_\bullet \\ X_\infty & \xrightarrow{v_\bullet q_\bullet} & H_\bullet \end{array}$$

El morfismo  $t_\bullet s_\bullet$  es el levantamiento buscado, pues:

- $t_\bullet s_\bullet g_\bullet = t_\bullet i_\bullet = u_\bullet$
- $f_\bullet t_\bullet s_\bullet = v_\bullet q_\bullet s_\bullet = v_\bullet Id_{Y_\bullet} = v_\bullet$

■

Una vez visto el teorema, hacemos un estudio de las  $\bar{r}$ -cofibraciones, lo que nos permitirá dar algunas construcciones homotópicas en esta categoría. Empezamos remarcando una serie de inclusiones que complementan las dadas al comienzo de la sección:

$$\{cofib.\} \supseteq \cdots \supseteq \{\bar{r} - cofib.\} \supseteq \{\overline{r+1} - cofib.\} \supseteq \dots$$

$$\{cofib. triv.\} \supseteq \cdots \supseteq \{\bar{r} - cofib. triv.\} \supseteq \{\overline{r+1} - cofib. triv.\} \supseteq \dots$$

Caracterizamos ahora las  $\bar{r}$ -cofibraciones. Para esto empezamos con un lema

**Lema 2.1.7.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración si y sólo si  $f_\bullet$  es retracto de una aplicación libre que sea  $\bar{r}$ -cofibración*

*Demostración:* Puesto que las  $\bar{r}$ -cofibraciones son cerradas bajo retracts una de las dos implicaciones es trivial. Demostremos la otra.

Supongamos que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración. Realizamos la factorización de  $f_\bullet$  como una  $\bar{r}$ -cofibración  $i_\bullet$  seguida de una  $\bar{r}$ -fibración trivial  $p_\bullet$  tal y como se ha hecho en la demostración del teorema 2.1.6. Es fácil comprobar que los morfismos  $F \dot{\Delta}[q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $q \geq r+1$  y  $F\Delta[r+1, r+1] \hookrightarrow F \dot{\Delta}[r+1]$  son aplicaciones libres. De aquí deducimos que los morfismos  $i_{n+1\bullet} : G_n \rightarrow G_{n+1\bullet}$  son aplicaciones libres, pues el coproducto de aplicaciones libres lo es, y el opuesto en un cuadrado cocartisiano a una aplicación libre es también libre. Por último, tenemos también que  $i_\bullet$  es libre (aparte de ser  $\bar{r}$ -cofibración).

A partir de aquí obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \xrightarrow{i_\bullet} & G_{\infty\bullet} \\ f_\bullet \downarrow & & \downarrow p_\bullet \\ H_\bullet & \xlongequal{\quad} & H_\bullet \end{array}$$

en el que existe levantamiento  $s_\bullet : H_\bullet \rightarrow G_{\infty\bullet}$  puesto que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración y  $p_\bullet$  una  $\bar{r}$ -fibración trivial. El siguiente diagrama nos muestra que  $f_\bullet$  es un retracto de  $i_\bullet$ .

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \xlongequal{\quad} & G_\bullet \\ f_\bullet \downarrow & & \downarrow i_\bullet \\ H_\bullet & \xrightleftharpoons[s_\bullet]{p_\bullet} & G_{\infty\bullet} \end{array}$$

■

Y damos ya la caracterización de las  $\bar{r}$ -cofibraciones.

**Proposición 2.1.8.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración si y sólo si se verifican las siguientes tres condiciones:*

- i)  $f_\bullet$  es una cofibración.
- ii)  $tr^{r-1}(f_\bullet)$  es un isomorfismo.
- iii) Para cada  $y \in H_r$  existen  $x_0, \dots, x_r \in G_r$  tal que  $(f_r(x_0), \dots, f_r(x_r), y) \in \Delta^{r+1}(H_\bullet)$ .

*Demostración:* Supongamos primeramente que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración. Acabamos de notar que  $f_\bullet$  es entonces una cofibración y, por tanto, un retracto

de una aplicación libre. Para simplificar haremos la demostración en el caso de que  $f_\bullet$  sea una aplicación libre, lo que implica que  $H_q \cong G_q \amalg FU_q$  para todo  $q$ . Probemos ahora que se verifica la condición *ii*). Notemos que probar esto es equivalente a ver que  $U_0 = U_1 = \dots = U_{r-1} = \emptyset$ , lo cual lo haremos por inducción.

Supongamos que  $U_0 = \dots = U_{n-1} = \emptyset$ ,  $0 \leq n \leq r-1$  (notemos que esta condición, para  $n=0$  no dice nada, lo cual nos permite realizar el primer paso de la inducción). Sea  $V_\bullet$  el siguiente grupo simplicial:

$$V_\bullet = \text{cosk}^n(FU_n \rightrightarrows 0 \rightrightarrows \dots \rightrightarrows 0).$$

Como consecuencia de las proposiciones 2.1.4 y 1.2.16, el morfismo  $0 \rightarrow V_\bullet$  es una  $\overline{n+1}$ -fibración trivial y, por tanto, una  $\bar{r}$ -fibración trivial.

Sea  $g_\bullet : G_\bullet \amalg FU_\bullet \rightarrow V_\bullet$  el morfismo correspondiente por la adjunción  $tr^n \vdash \text{cosk}^n$  al morfismo  $tr^n(G_\bullet \amalg FU_\bullet) \rightarrow (FU_n \rightrightarrows 0 \rightrightarrows \dots \rightrightarrows 0)$ , que en dimensión  $n$  es el inducido por el morfismo 0 y la identidad. Obtengamos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \longrightarrow & 0 \\ f_\bullet \downarrow & & \downarrow \\ G_\bullet \amalg FU_\bullet & \xrightarrow{g_\bullet} & V_\bullet \end{array}$$

en el que existe levantamiento. Si ahora tomamos  $u \in FU_n$ , deducimos que  $u = g_n(u) = 0$ , lo que implica que  $U_n = \emptyset$ .

Veamos por último que se verifica la condición *iii*). Para probarlo, observemos que el morfismo  $\text{Cosk}^r(G_\bullet) \rightarrow 0$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial y, por tanto, el morfismo punteado  $h_\bullet$  del siguiente diagrama existe y hace los dos triángulos conmutativos.

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \longrightarrow & \text{Cosk}^r(G_\bullet) \\ f_\bullet \downarrow & \nearrow h_\bullet & \downarrow \\ H_\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sea ahora  $y \in H_r$ . Consideramos los elementos  $x_j = d_j s_r h_r(y)$ ,  $0 \leq j \leq r$ , y comprobemos que  $(y_0, \dots, y_r, y_{r+1}) \in \Delta^{r+1}(H_\bullet)$ , donde  $y_j = f_r(x_j)$ ,  $0 \leq j \leq r$  e  $y_{r+1} = y$ .

En el caso  $i < j \leq r$  se tiene:

$$\begin{aligned} d_i y_j &= d_i f_r d_j s_r h_r(y) = d_i d_j f_{r-1} s_r h_r(y) = \\ &= d_{j-1} d_i f_{r-1} s_r h_r(y) = d_{j-1} f_r d_i s_r h_r(y) = d_{j-1} y_i \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} d_i y_{r+1} &= d_i d_{r+1} s_r(y) = f_{r-1} h_{r-1} d_i d_{r+1} s_r(y) = \\ &= f_{r-1} h_{r-1} d_r d_i s_r(y) = d_r f_r d_i s_r h_r(y) = d_r y_i \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $f_\bullet$  no es una aplicación libre, sino un retracts de una aplicación libre,  $g_\bullet : Z_\bullet \rightarrow Z_\bullet \amalg FU_\bullet$ , y que por el lema 2.1.7 podemos suponer que es  $\bar{r}$ -cofibración, y por tanto, verifica las tres condiciones del enunciado.

Tenemos entonces un diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \begin{array}{c} \xleftarrow{t_\bullet} \\ \xrightarrow{s_\bullet} \end{array} & Z_\bullet \\ f_\bullet \downarrow & & \downarrow g_\bullet \\ H_\bullet & \begin{array}{c} \xleftarrow{v_\bullet} \\ \xrightarrow{u_\bullet} \end{array} & Z_\bullet \amalg FU_\bullet \end{array}$$

en el que  $t_\bullet s_\bullet = Id_{G_\bullet}$ ,  $v_\bullet u_\bullet = Id_{H_\bullet}$ ,  $u_\bullet f_\bullet = g_\bullet s_\bullet$  y  $v_\bullet g_\bullet = f_\bullet t_\bullet$ .

Es claro que  $tr^{r-1}(f_\bullet)$  es un isomorfismo pues  $tr^{r-1}(g_\bullet)$  lo es.

Por otra parte, sea  $y \in H_r$ . Tomamos  $u_r(y) \in Z_r \amalg FU_r$ . Por lo demostrado hasta ahora, existen  $y_0, \dots, y_r \in Z_r$  tales que  $(g_r(y_0), \dots, g_r(y_r), u_r(y)) \in \Delta^{r+1}(Z_\bullet \amalg FU_\bullet)$ . Si tomamos  $x_i = t_r(y_i)$  tenemos que  $f_r(x_i) = f_r t_r(y_i) = v_r g_r(y_i)$  y por tanto  $(f_r(x_0), \dots, f_r(x_r), y) = (v_r(g_r y_0), \dots, v_r(g_r y_r), v_r(u_r y))$  que claramente pertenece a  $\Delta^{r+1}(H_\bullet)$ .

De todo ésto concluimos que si  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración, se verifica *i)*, *ii)* y *iii)*.

Recíprocamente, supongamos que  $f_\bullet$  es un morfismo de grupos simpliciales que verifica las condiciones *i)*, *ii)* y *iii)*. Veamos que  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración.

Por *i)*,  $f_\bullet$  es un retracts de una aplicación libre. Supondremos que  $f_\bullet$  es libre, es decir,  $f_\bullet$  es de la forma  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow G_\bullet \amalg FU_\bullet$ . Además,  $U_0 = \dots = U_{r-1} = \emptyset$ , puesto que  $tr^{r-1}(f_\bullet)$  es un isomorfismo. Necesitamos probar que la flecha punteada  $h_\bullet$  existe en cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \xrightarrow{\alpha_\bullet} & X_\bullet \\ f_\bullet \downarrow & \nearrow h_\bullet & \downarrow g_\bullet \\ G_\bullet \amalg FU_\bullet & \xrightarrow{\beta_\bullet} & Y_\bullet \end{array} \quad \text{donde } g_\bullet \text{ es una } \bar{r}\text{-fibración trivial}$$

Notemos primero que si  $h_\bullet$  existe, su restricción a  $G_\bullet$  coincide con  $\alpha_\bullet$ , por lo que sólo necesitamos definir  $h_\bullet$  sobre  $FU_\bullet$ , y para ésto es suficiente definirlo sobre  $U_\bullet$ . Definimos primero  $h_r : U_r \rightarrow X_r$  y posteriormente definimos  $h_n$ ,  $n \geq r+1$ .

Sea pues  $y \in U_r$ . Por hipótesis, podemos encontrar  $x_0, \dots, x_r \in G_r$  tal que  $(x_0, \dots, x_r, y) \in \Delta^{r+1}(G_\bullet \amalg FU_\bullet)$  (o si preferimos,  $(f_r(x_0), \dots, f_r(x_r), y) \in \Delta^{r+1}(G_\bullet \amalg FU_\bullet)$ ). Es claro que se verifican las tres condiciones siguientes:

- 1.-  $(\alpha_r(x_0), \dots, \alpha_r(x_r), -) \in \Lambda_{r+1}^{r+1}(X_\bullet)$ .
- 2.-  $(\beta_r(x_0), \dots, \beta_r(x_r), \beta_r(y)) \in \Delta^{r+1}(Y_\bullet)$ .
- 3.-  $g_r(\alpha_r(x_i)) = \beta_r(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq r$ .

Utilizamos ahora que  $g_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[r+1, r+1] \rightarrow F\dot{\Delta}[r+1]$  para obtener un elemento  $x \in X_r$  tal que  $g_r(x) = \beta_r(y)$  y  $(\alpha_r(x_0), \dots, \alpha_r(x_r), x) \in \Delta^{r+1}(X_\bullet)$ . Definimos entonces  $h_r(y) = x$ .

Supongamos que tenemos definido  $h_n$ , y queremos definir  $h_{n+1}$ . Sea entonces  $y \in U_{n+1}$ . Distinguimos dos casos:

a) El elemento  $y$  es degenerado, es decir,  $y = s_j(y')$  para algún elemento  $y' \in U_n$ . En este caso definimos  $h_{n+1}(y) = s_j h_n(y')$ . Antes de continuar veamos que no depende de la elección del elemento  $y'$ , es decir, que si tenemos que  $y = s_j(y') = s_i(y'')$ ,  $i \neq j$  entonces  $s_j h_n(y') = s_i h_n(y'')$ .

Supondremos por ejemplo que  $i < j$ . Sea entonces  $z = d_j(y'')$ . Se verifica que:

$$s_j s_i z = s_j s_i d_j y'' = s_j d_{j+1} s_i y'' = s_j d_{j+1} s_j y' = s_j y' = y$$

luego  $y = s_j s_i z = s_i s_{j-1} z$  lo que implica que  $s_i z = y'$  y que  $s_{j-1} z = y''$ .

Y de aquí obtenemos que

$$s_j h_n y' = s_j h_n s_i z = s_j s_i h_{n-1} z = s_i s_{j-1} h_{n-1} z = s_i h_n s_{j-1} z = s_i h_n y''$$

b) El elemento  $y$  no es degenerado. Es fácil comprobar que

$$(\beta_{n+1}(y), (h_n d_0 y, \dots, h_n d_{n+1} y)) \in Y_{n+1} \times_{\Delta^{n+1}(Y_\bullet)} \Delta^{n+1}(X_\bullet).$$

Puesto que  $g_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial, y utilizando la caracterización dada en la proposición 2.1.4, obtenemos un elemento  $x \in X_{n+1}$  tal que  $d_i x = h_n d_i y$  y  $g_{n+1}(x) = \beta_{n+1}(y)$ . Definimos  $h_{n+1}(y) = x$ .

Hasta el momento tenemos definido, para cada  $n \geq r$ , un morfismo de grupos  $h_n : G_n \amalg FU_n \rightarrow X_n$ , y por la forma de definirlo es claro que  $h_n f_n = \alpha_n$  y que  $g_n h_n = \beta_n$ .

Veamos que la aplicación  $h_\bullet : G_\bullet \amalg FU_\bullet \rightarrow X_\bullet$  es simplicial, para lo cual debermos probar que  $h_n d_i = d_i h_{n+1}$  y que  $h_{n+1} s_j = s_j h_n$ . Puesto que todo lo que aparecen son morfismos de grupos con dominio un coproducto, bastará comprobar las identidades para su restricción a cada uno de los sumandos directos, y por la forma de definir  $h_\bullet$  sólo hay que demostrar que

$h_n d_i = d_i h_{n+1}$  para la restricción a la parte libre. Lo demostraremos por inducción:

Si  $y \in U_r$  tenemos que  $d_i h_r(y) = d_i x = d_r(\alpha_r(x_i)) = \alpha_{r-1}(d_r x_i) = h_{r-1}(d_r x_i) = h_{r-1} d_i y$ .

Supongamos que  $y \in U_{n+1}$ . Debemos distinguir dos casos:

-  $y$  es degenerado, es decir,  $y = s_j(y')$  en cuyo caso, si  $i < j$  tenemos que  $h_n d_i y = h_n d_i s_j y' = h_n s_{j-1} d_i y' = s_{j-1} h_{n-1} d_i y' = s_{j-1} d_i h_n y' = d_i s_j h_n y' = d_i h_{n+1} y$ , si  $i = j, j + 1$  tenemos que  $h_n d_i y = h_n y' = d_i s_j h_n y' = d_i h_{n+1} y$ , y si  $i > j + 1$  se razona igual que en el primer caso.

-  $y$  no es degenerado, en cuyo caso  $d_i h_{n+1} y = d_i x = h_n d_i y$ .

Por tanto, la aplicación  $h_\bullet$  es el levantamiento buscado. ■

Como consecuencia, tenemos que:

**Corolario 2.1.9.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo entre dos grupos simpliciales  $r$ -reducidos. Entonces  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración si y sólo si  $f_\bullet$  es una cofibración.*

*Demostración:* Si  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración, claramente es una cofibración.

Supongamos entonces que  $f_\bullet$  es una cofibración. Necesitamos comprobar que se verifican las condiciones *ii*) y *iii*) de la proposición anterior.

La condición *ii*) es evidente, puesto que  $tr^{n-1}(G_\bullet) = tr^{n-1}(H_\bullet) = 0$ . La condición *iii*) también es fácil, ya que dado  $y \in H_r$ , el elemento  $(0, \dots, 0, y)$  pertenece a  $\Delta^{r+1}(H_\bullet)$ . ■

A partir de ésto, tenemos la siguiente caracterización de los objetos  $\bar{r}$ -cofibrantes.

**Corolario 2.1.10.** *Un grupo simplicial es  $\bar{r}$ -cofibrante si y sólo si es libre y  $r$ -reducido.*

Recordemos que el funtor de inclusión  $I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  tiene un adjunto por la derecha  $E_r$ . Utilizamos ahora esta adjunción para comparar la teoría de homotopía asociada a  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  con la  $\bar{r}$ -estructura, y la teoría de homotopía asociada a  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  con la estructura definida en [59]

Resaltamos primero algunas propiedades de estos dos funtores:

**Proposición 2.1.11.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ . Entonces:*

*i)  $f_\bullet$  es una cofibración si y sólo si  $I(f_\bullet)$  es una  $\bar{r}$ -cofibración.*

ii)  $f_\bullet$  es una equivalencia débil si y sólo si  $I(f_\bullet)$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil.

iii)  $f_\bullet$  es una fibración si y sólo si  $I(f_\bullet)$  es una  $\bar{r}$ -fibración.

*Demostración:*

- i) Si  $I(f_\bullet)$  es una  $\bar{r}$ -cofibración, entonces es una cofibración, lo que implica que  $f_\bullet$  es una cofibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  por definición de la estructura en esta categoría. El recíproco es claro de acuerdo con el corolario 2.1.9.
- ii) Es trivial
- iii) Se deduce fácilmente a partir de las caracterizaciones de las  $\bar{r}$ -fibraciones y de las fibraciones en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ .

■

Notemos que los apartados *i)* y *ii)* podían haberse hecho si consideramos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  la estructura clásica, sin embargo, para el apartado *iii)* sólo tendríamos una implicación ( $I(f_\bullet)$  fibración  $\Rightarrow f_\bullet$  fibración). El morfismo  $0 \rightarrow K(A, r)$ , para un grupo abeliano cualquiera  $A$ , nos muestra que el recíproco de esta implicación es falso.

**Proposición 2.1.12.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Entonces:*

i)  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibración si y sólo si  $E_r f_\bullet$  es una fibración.

ii)  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil si y sólo si  $E_r f_\bullet$  es una equivalencia débil.

*Demostración:* Es claro si tenemos en cuenta que  $N_q(E_r G_\bullet) = N_q(G_\bullet)$ ,  $q \geq r + 1$  y que  $\pi_q(E_r G_\bullet) = \pi_q(G_\bullet)$ ,  $q \geq r$ . ■

Notemos que aquí ninguna de las dos equivalencias es cierta si consideramos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  la estructura clásica, sino sólo una implicación ( $f_\bullet$  fibración (equivalencia débil)  $\Rightarrow E_r f_\bullet$  fibración (equivalencia débil)), y el mismo ejemplo de antes sirve para comprobar que el recíproco no es cierto.

Es claro que la unidad de la adjunción ( $G_\bullet \rightarrow E_r I G_\bullet$ ) es la identidad, y que la counidad ( $I E_r H_\bullet \rightarrow H_\bullet$ ) es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil. Por tanto, de acuerdo con el teorema 3 §4([58]) tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.13.** *La adjunción  $I \vdash E_r$  induce, para cada  $r \geq 0$ , una equivalencia de categorías*

$$Ho_{\bar{r}}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \cong Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r)$$

y una equivalencia entre la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  asociada a la  $\bar{r}$ -estructura y la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ .

Veamos ahora algunas construcciones propias de la teoría de homotopía que acabamos de obtener.

Supongamos que  $G_\bullet$  es un grupo simplicial  $\bar{r}$ -cofibrante y construimos el siguiente cilindro de  $G_\bullet$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver sección 1.4.3).

$$G_\bullet \amalg G_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} G_\bullet \otimes I \xrightarrow{\sigma} G_\bullet$$

Esta construcción da un cilindro para la  $\bar{r}$ -estructura, puesto que  $\sigma$  es una equivalencia débil (de hecho es un retracts fuerte de deformación) y por tanto una  $\bar{r}$ -equivalencia débil, e  $i_0 + i_1$  es una  $\bar{r}$ -cofibración, como puede deducirse fácilmente del corolario 2.1.9 ya que  $i_0 + i_1$  es una cofibración ( $G_\bullet$  es cofibrante y esta construcción da un cilindro para la estructura clásica) y tanto  $G_\bullet \amalg G_\bullet$  como  $G_\bullet \otimes I$  son  $r$ -reducidos.

Si ahora  $H_\bullet$  es un grupo simplicial cualquiera, y por tanto  $\bar{r}$ -fibrante ( $G_\bullet$  sigue siendo  $\bar{r}$ -cofibrante), tenemos que  $Hom_{Ho \bar{r}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(G_\bullet, H_\bullet) \cong \pi(G_\bullet, H_\bullet)$ , donde  $\pi(G_\bullet, H_\bullet)$  es el conjunto de morfismos de  $G_\bullet$  a  $H_\bullet$  módulo la relación de homotopía deducida de la  $\bar{r}$ -estructura. Por otra parte, por el teorema 2.1.13 tenemos que

$$Hom_{Ho \bar{r}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(G_\bullet, H_\bullet) \cong Hom_{Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r)}(G_\bullet, E_r H_\bullet)$$

y este conjunto es (ver [59] prop. 3.6) el conjunto  $[G_\bullet, E_r H_\bullet]$ , es decir, el conjunto de clases de homotopía simplicial de aplicaciones de  $G_\bullet$  hasta  $E_r H_\bullet$ . Ahora bien, puesto que  $G_\bullet \otimes I$  es un cilindro para la  $\bar{r}$ -estructura, este conjunto coincide con el conjunto  $[G_\bullet, H_\bullet]$ .

Dado  $H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , el grupo simplicial  $H_\bullet^I$  (ver secciones 1.2.3 y 1.4.3) es un espacio de arcos de  $H_\bullet$  para la  $\bar{r}$ -estructura, pues tenemos una factorización del morfismo diagonal

$$H_\bullet \xrightarrow{\rho} H_\bullet^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} H_\bullet \times H_\bullet$$

donde  $\rho$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil (ya que es una equivalencia débil) y  $(\partial_0, \partial_1)$  es una  $\bar{r}$ -fibración (puesto que es una fibración).

Dado que tanto el cilindro como el espacio de arcos para la  $\bar{r}$ -estructura coinciden con las mismas construcciones para la estructura clásica, los funtores  $\Omega$  (o  $\Omega'$ ) y  $\Sigma$  inducen los funtores lazo y suspensión,  $\Omega^{\bar{r}}$  y  $\Sigma^{\bar{r}}$  en la categoría de homotopía  $Ho \bar{r}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$

Por otra parte, dado  $H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , existe un morfismo (la inclusión)  $E_{r+1} H_\bullet \rightarrow H_\bullet$ , lo que nos da otro morfismo  $\Omega E_{r+1} H_\bullet \rightarrow \Omega H_\bullet$ , y puesto que

$\Omega E_{r+1}H_\bullet$  es  $r$ -reducido, tenemos un morfismo  $\psi_{H_\bullet} : \Omega E_{r+1}H_\bullet \rightarrow E_r\Omega H_\bullet$ . Es fácil comprobar que  $\psi_{H_\bullet}$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil. También el morfismo inclusión  $E_r\Omega H_\bullet \rightarrow \Omega H_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil (basta ver que al aplicarle  $E_r$  nos da la identidad, y utilizar la proposición 2.1.12). Tenemos entonces transformaciones naturales  $\Omega E_{r+1} \Rightarrow E_r\Omega \Rightarrow \Omega$  que inducen equivalencias naturales a nivel de la categoría de homotopía  $\Omega^{\bar{r}} \cong E_r\Omega \cong \Omega E_{r+1}$ .

**Proposición 2.1.14.** *Los funtores  $\Sigma, \Omega : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  inducen una adjunción*

$$\Sigma : Ho_{\bar{r}-1}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \xrightleftharpoons{\quad} Ho_{\bar{r}}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) : \Omega$$

*Demostración:* El functor  $\Omega$  aplica  $\bar{r}$ -equivalencias débiles en  $\overline{r-1}$ -equivalencias débiles. Induce pues un functor  $\Omega : Ho_{\bar{r}}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \rightarrow Ho_{\bar{r}-1}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$ .

Por otra parte, el functor  $\Sigma$  induce un functor  $\Sigma^{\bar{r}-1} : Ho_{\bar{r}-1}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \rightarrow Ho_{\bar{r}-1}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$  y la identidad induce otro functor  $Ho_{\bar{r}-1}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \rightarrow Ho_{\bar{r}}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$  ya que toda  $(\bar{r}-1)$ -equivalencia débil es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil. La composición nos da un functor al que llamaremos  $\Sigma$  que es adjunto por la izquierda al functor  $\Omega$  pues dados  $G_\bullet, H_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  se tiene:

$$\begin{aligned} Hom_{Ho_{\bar{r}}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(\Sigma G_\bullet, H_\bullet) &\cong Hom_{Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(\Sigma G_\bullet, E_r H_\bullet) \cong \\ &\cong Hom_{Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(G_\bullet, \Omega E_r H_\bullet) \cong Hom_{Ho(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(G_\bullet, E_{r-1}\Omega H_\bullet) \cong \\ &\cong Hom_{Ho_{\bar{r}-1}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(G_\bullet, \Omega H_\bullet) \end{aligned}$$

■

## 2.2 Estructuras de modelos de Quillen para $n$ -tipos de grupos simpliciales

En un proceso dual al desarrollado en la sección anterior, proponemos la siguiente estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Dado  $n \geq 0$ , consideramos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  las siguientes clases de morfismos:

**Definición 2.2.1.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales.*

- i)  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración si  $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$  es una fibración de grupos simpliciales.*

ii)  $f_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil si  $\text{Cosk}^{n+1}(f_\bullet)$  es una equivalencia débil de grupos simpliciales.

iii)  $f_\bullet$  es una  $n$ -cofibración si tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones triviales.

Es claro que todo grupo simplicial es  $n$ -fibrante y que, cuando  $n$  "tiende" a  $\infty$ , la estructura definida coincide con la estructura clásica de  $\text{Simp}(\text{Gp})$ .

Damos ahora una definición equivalente de las  $n$ -fibraciones y  $n$ -equivalencias débiles en términos del complejo de Moore y los grupos de homotopía.

**Proposición 2.2.2.** Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales

i)  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración si y sólo si  $Z_{n+1}(f_\bullet)$  y  $N_q(f_\bullet)$ ,  $1 \leq q \leq n+1$ , son sobrejectivos.

ii)  $f_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil si y sólo si  $\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $0 \leq q \leq n$

*Demostración:* Es suficiente tener en cuenta la proposición 1.2.16 y su corolario y como son las fibraciones y equivalencias débiles en  $\text{Simp}(\text{Gp})$ . ■

Esta caracterización de las fibraciones nos permite definir la sucesión exacta larga asociada a una  $n$ -fibración de forma análoga a como se hizo con las  $\bar{r}$ -fibraciones.

**Proposición 2.2.3.** Si  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una  $n$ -fibración,  $I$  es la imagen de la aplicación  $N_\star(f_\bullet)$  y  $H_\star(I)$  es la homología del complejo de grupos (no abelianos en general)  $I$ , entonces tenemos una sucesión exacta larga

$$\rightarrow \pi_{n+1}(G_\bullet) \rightarrow H_{n+1}(I) \rightarrow \pi_n(\text{Ker } f_\bullet) \rightarrow \pi_n(G_\bullet) \rightarrow \pi_n(H_\bullet) \rightarrow \dots$$

y una factorización del morfismo  $\pi_{n+1}(f_\bullet)$ ,

$$\pi_{n+1}(G_\bullet) \xrightarrow{\epsilon} H_{n+1}(I) \xrightarrow{\gamma} \pi_{n+1}(H_\bullet),$$

donde tanto  $\epsilon$  como  $\gamma$  son sobrejectivos.

*Demostración:* La existencia de la sucesión exacta larga se hace igual que en la proposición 2.1.3, así como la factorización de  $\pi_{n+1}(f_\bullet)$ . La sobrejectividad

de  $\epsilon$  y  $\gamma$  se deduce a partir del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 B_{n+1}(G_\bullet) & \longrightarrow & Z_{n+1}(G_\bullet) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(G_\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \epsilon \\
 B_{n+1}(I) & \longrightarrow & Z_{n+1}(I) & \longrightarrow & H_{n+1}(I) \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow \gamma \\
 B_{n+1}(H_\bullet) & \longrightarrow & Z_{n+1}(H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(H_\bullet)
 \end{array}$$

■

La sucesión exacta larga nos permite también dar una caracterización de las  $n$ -fibraciones triviales en términos del complejo de Moore y los grupos de homotopía

**Proposición 2.2.4.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración trivial si y sólo si  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo,  $0 \leq q \leq n+1$ , y  $\pi_q(\text{Ker } f_\bullet) = 0$ ,  $0 \leq q \leq n$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración trivial. Entonces  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo para  $1 \leq q \leq n+1$ . Veamos que  $N_0(f_\bullet)$  es sobreyectivo. Para ésto, necesitamos primero comprobar que  $B_0(f_\bullet)$  lo es, pero esto es claro, como puede verse en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 N_1(G_\bullet) & \longrightarrow & B_0(G_\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow B_0(f_\bullet) \\
 N_1(H_\bullet) & \longrightarrow & B_0(H_\bullet)
 \end{array}$$

Por otra parte,  $B_0(G_\bullet) = \text{Ker}(G_0 \rightarrow \pi_0(G_\bullet))$ , ya que:

- 1)  $\pi_0(G_\bullet) = \text{Coker}(N_1(G_\bullet) \xrightarrow{d} G_0)$
- 2)  $B_0(G_\bullet) = \text{Imag}(d)$
- 3)  $B_0(G_\bullet)$  es un subgrupo normal de  $G_0$

El siguiente diagrama de sucesiones exactas cortas nos prueba que  $N_0(f_\bullet)$  (que es igual a  $f_0$ ) es sobreyectivo.

$$\begin{array}{ccccc}
B_0(G_\bullet) & \hookrightarrow & G_0 & \longrightarrow & \pi_0(G_\bullet) \\
\downarrow & & \downarrow f_0 & & \downarrow \wr \\
B_0(H_\bullet) & \hookrightarrow & H_0 & \longrightarrow & \pi_0(H_\bullet)
\end{array}$$

La sucesión exacta larga construida en la proposición 2.2.3 nos demuestra que  $\pi_q(\text{Ker } f_\bullet) = 0$  para  $0 \leq q \leq n$ .

Recíprocamente, supongamos que  $N_q(f_\bullet)$ ,  $0 \leq q \leq n+1$ , es sobreyectiva y que  $\pi_q(\text{Ker } f_\bullet) = 0$ ,  $0 \leq q \leq n$ . La primera condición nos asegura la existencia de la sucesión exacta larga, y la segunda nos permite afirmar que  $\pi_q(f_\bullet)$ ,  $0 \leq q \leq n$ , es isomorfismo y que los morfismos  $\epsilon$  y  $\gamma$  son sobreyectivos. Queda por tanto probar que  $Z_{n+1}(f_\bullet)$  es sobreyectivo, lo cual se deduce del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
B_{n+1}(G_\bullet) & \hookrightarrow & Z_{n+1}(G_\bullet) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(G_\bullet) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \epsilon \\
B_{n+1}(I) & \hookrightarrow & Z_{n+1}(I) & \longrightarrow & H_{n+1}(I)
\end{array}$$

y de que  $Z_{n+1}(I) = Z_{n+1}(H_\bullet)$  ■

También pueden ser caracterizadas las  $n$ -fibraciones y las  $n$ -fibraciones triviales en términos de propiedades de levantamiento respecto a familias de morfismos con dominio secuencialmente pequeño como sigue:

**Proposición 2.2.5.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales.*

- i)  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración si y sólo si  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[q, q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $1 \leq q \leq n+1$ , y con respecto a  $F\Delta[n+2, n+2] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[n+2]$ .
- ii)  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración trivial si y sólo si  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $F\overset{\bullet}{\Delta}[q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $0 \leq q \leq n+1$ .

*Demostración:* Utilizaremos a lo largo de esta demostración la caracterización de las fibraciones y fibraciones triviales de grupos simpliciales, así como la adjunción  $Sk^{n+1} \vdash Cosk^{n+1}$  (ver sección 1.2.3)

Probemos primero i). En este caso, tenemos que  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración si y sólo si  $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$  es una fibración, lo que es equivalente a que  $Cosk^{n+1}(f_\bullet)$  tenga la RLP con respecto a  $F\Delta[q, q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $1 \leq q$ . Pero ésto es equivalente a que  $f_\bullet$  tenga la RLP con respecto a  $Sk^{n+1}F\Delta[q, q] \hookrightarrow Sk^{n+1}F\Delta[q]$ ,  $1 \leq$

$q$ , pues cada diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} X_{\bullet} & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}(G_{\bullet}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{\bullet} & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}(H_{\bullet}) \end{array}$$

es equivalente a uno

$$\begin{array}{ccc} \text{Sk}^{n+1}(X_{\bullet}) & \longrightarrow & G_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sk}^{n+1}(Y_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{\bullet} \end{array}$$

y encontrar levantamiento en uno es equivalente a encontrarlo en el otro.

Identifiquemos ahora cuanto vale  $\text{Sk}^{n+1}F\Delta[q, q]$  y  $\text{Sk}^{n+1}F\Delta[q]$ .

$\text{Sk}^{n+1}F\Delta[q, q] = F\Delta[q, q]$  y  $\text{Sk}^{n+1}F\Delta[q] = F\Delta[q]$  si  $q \leq n+1$ .

$\text{Sk}^{n+1}F\Delta[n+2, n+2] = F\Delta[n+2, n+2]$  y  $\text{Sk}^{n+1}F\Delta[n+2] = F\overset{\bullet}{\Delta}[n+2]$ .

$\text{Sk}^{n+1}F\Delta[q, n+1] = \text{Sk}^{n+1}F\Delta[q]$  si  $q \geq n+3$ .

Por tanto, y teniendo en cuenta que todo morfismo tiene la propiedad de levantamiento respecto a un isomorfismo, obtenemos que  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -fibración si y sólo si se cumplen las propiedades mencionadas.

Para la parte *ii*) se procede de igual forma, pero teniendo en cuenta además que:

$\text{Sk}^{n+1}F\overset{\bullet}{\Delta}[q] = \text{Sk}^{n+1}F\Delta[q]$  si  $q \geq n+2$  y

$\text{Sk}^{n+1}F\overset{\bullet}{\Delta}[q] = F\overset{\bullet}{\Delta}[q]$  si  $q \leq n+1$ . ■

Notemos que se dan las siguientes inclusiones de clases de morfismos:

$$\{\text{fibs triv.}\} \subseteq \dots \subseteq \{(n+1) - \text{fibs triv.}\} \subseteq \{n - \text{fibs triv.}\} \subseteq \dots$$

$$\dots \subseteq \{n - \text{cof.}\} \subseteq \{(n+1) - \text{cof.}\} \subseteq \dots \{\text{cof.}\}$$

Un lema análogo al lema 2.1.5 podría ser enunciado y demostrado ahora. Con él es posible ya demostrar el siguiente:

**Teorema 2.2.6.** *Para cada  $n \geq 0$ , la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , con la estructura dada en la definición 2.2.1, es una categoría de modelos cerrada (a esta estructura se le llamará la “ $n$ -estructura”).*

*Demostración:* Es conocido que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  verifica el axioma CM1. Una mitad de CM4 se verifica por definición. CM2 y CM3 se comprueban fácilmente a partir de la adjunción  $\text{Sk}^{n+1} \vdash \text{Cosk}^{n+1}$ .

La demostración de la parte de CM5 que nos da la factorización de un morfismo como una  $n$ -cofibración seguido de una  $n$ -fibración trivial se hace igual que en el teorema 2.1.6

Obtengamos ahora la factorización de un morfismo  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  como una  $n$ -cofibración trivial seguido de una  $n$ -fibración.

Si  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -fibración, la factorización es trivial  $f_{\bullet} = f_{\bullet} Id_{G_{\bullet}}$ . Supongamos entonces que  $f_{\bullet}$  no es una  $n$ -fibración. Esto quiere decir que o bien  $N_q(f_{\bullet})$  no es sobreyectivo para algún  $q$ ,  $1 \leq q \leq n+1$ , o bien que  $Z_{n+1}(f_{\bullet})$  no es sobreyectivo (ver proposición 2.2.2). Sea  $Y_q = \{y \in N_q(H_{\bullet}) - f_q(N_q(G_{\bullet}))\}$ ,  $1 \leq q \leq n+1$  (es decir, los elementos de  $N_q(H_{\bullet})$  que no tienen preimagen). Análogamente, sea  $Y_0 = \{y \in Z_{n+1}(H_{\bullet}) - f_{n+1}(N_{n+1}(G_{\bullet}))\}$ . Es claro que si  $y \in Z_{n+1}(H_{\bullet})$ , entonces,  $(0, \dots, 0, y) \in \Delta^{n+2}(H_{\bullet})$ , lo que nos determina un morfismo  $n_y : F \overset{\bullet}{\Delta} [n+2] \rightarrow H_{\bullet}$  que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[n+2, n+2] & \xrightarrow{0} & G_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow f_{\bullet} \\ F \overset{\bullet}{\Delta} [n+2] & \xrightarrow{n_y} & H_{\bullet} \end{array}$$

Análogamente, si  $y \in N_q(H_{\bullet})$  nos determina un morfismo  $\bar{y} : F\Delta[q] \rightarrow H_{\bullet}$  que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Delta[q, q] & \xrightarrow{0} & G_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow f_{\bullet} \\ F\Delta[q] & \xrightarrow{\bar{y}} & H_{\bullet} \end{array}$$

A partir de aquí, definimos el grupo simplicial  $U_{\bullet}$  y el morfismo  $j_{\bullet}$  mediante el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_{y \in Y_0} F\Delta[n+2, n+2]) \coprod (\coprod_{y \in Y_q} F\Delta[q, q]) & \xrightarrow{0} & G_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow j_{\bullet} \\ (\coprod_{y \in Y_0} F \overset{\bullet}{\Delta} [n+2]) \coprod (\coprod_{y \in Y_q} F\Delta[q]) & \longrightarrow & U_{\bullet} \end{array}$$

y  $p_*$  a partir de la propiedad universal del anterior diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (\coprod_{y \in Y_0} F\Delta[n+2, n+2]) \amalg (\coprod_{y \in Y_q} F\Delta[q, q]) & \xrightarrow{0} & G_* \\
 \downarrow & & \downarrow j_* \\
 (\coprod_{y \in Y_0} F\Delta[n+2]) \amalg (\coprod_{y \in Y_n} F\Delta[q]) & \longrightarrow & U_* \\
 & \searrow \Sigma n_y + \Sigma \bar{y} & \downarrow p_* \\
 & & H_*
 \end{array}$$

$f_*$

y hemos obtenido una factorización de  $f_*$  como  $f_* = p_* j_*$ .

Necesitamos probar que  $j_*$  es una  $n$ -cofibración trivial y que  $p_*$  es una  $n$ -fibración.

Veamos que  $j_*$  es una  $n$ -cofibración trivial, para lo cual lo expresamos como composición de dos morfismos  $\alpha_* : G_* \rightarrow T_*$  y  $\beta_* : T_* \rightarrow U_*$ , que se obtienen a partir de los siguientes cuadrados cocartesianos:

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{y \in Y_q} F\Delta[q, q] & \longrightarrow & G_* \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\
 \coprod_{y \in Y_q} F\Delta[q] & \longrightarrow & T_*
 \end{array} \quad 1 \leq q \leq n+1$$

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{y \in Y_0} F\Delta[n+2, n+2] & \longrightarrow & G_* \xrightarrow{\alpha_*} T_* \\
 \downarrow & & \downarrow \beta_* \\
 \coprod_{y \in Y_0} F\Delta[n+2] & \longrightarrow & H_*
 \end{array}$$

Es fácil comprobar que efectivamente se tiene que  $j_* = \beta_* \alpha_*$ .

Utilizando la estructura clásica en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  obtenemos que  $\alpha_*$  es una cofibración trivial, ya que cada uno de los morfismos  $F\Delta[q, q] \hookrightarrow F\Delta[q]$  lo son. Además,  $\alpha_*$  es una  $n$ -cofibración, pues así lo son  $F\Delta[q, q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ .

Veamos ahora que  $\beta_*$  es también una  $n$ -cofibración trivial. El mismo argumento para  $\alpha_*$  nos muestra que  $\beta_*$  es una  $n$ -cofibración. Para comprobar que es una  $n$ -equivalencia débil consideramos los siguientes diagramas

cocartesianos:

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{y \in Y_0} F\Delta[n+2, n+2] & \longrightarrow & T_{\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow \beta_{\bullet} \\
 \coprod_{y \in Y_0} F\dot{\Delta}[n+2] & \longrightarrow & G_{\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow \gamma_{\bullet} \\
 \coprod_{y \in Y_0} F\Delta[n+2] & \longrightarrow & P_{\bullet}
 \end{array}$$

Dado que  $F\dot{\Delta}[n+2]$  y  $F\Delta[n+2]$  tienen la misma  $(n+1)$ -truncación,  $G_{\bullet}$  y  $P_{\bullet}$  también la tienen, por lo que  $\gamma_{\bullet}$  es una  $n$ -equivalencia débil. Además por el mismo motivo que  $\alpha_{\bullet}$  es una  $n$ -equivalencia débil lo es  $\gamma_{\bullet}\beta_{\bullet}$ , lo que implica (recordar axioma CM2) que  $\beta_{\bullet}$  es una  $n$ -equivalencia débil.

Por tanto,  $j_{\bullet} = \beta_{\bullet}\alpha_{\bullet}$  es una  $n$ -cofibración trivial.

Veamos ahora que  $p_{\bullet}$  es una  $n$ -fibración, para lo cual utilizamos la caracterización dada en la proposición 2.2.2

Sea  $q$  un número natural  $1 \leq q \leq n+1$ , y sea  $z \in N_q(H_{\bullet})$ .

Si  $z \notin Y_q$ , entonces existe  $x \in N_q(G_{\bullet})$  tal que  $f_q(x) = z$ . Tenemos que  $j_q(x) \in N_q(U_{\bullet})$  y  $p_q(j_q(x)) = f_q(x) = z$ .

Si  $z \in Y_q$ . La composición

$$F\Delta[q] \hookrightarrow \left( \coprod_{y \in Y_0} F\dot{\Delta}[n+2] \right) \coprod \left( \coprod_{y \in Y_q} F\Delta[q] \right) \rightarrow U_{\bullet}$$

nos determina un elemento  $z' \in U_q$ . El hecho de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 F\Delta[q, q] \hookrightarrow (\coprod F\Delta[n+2, n+2]) \coprod (\coprod F\Delta[q, q]) & \xrightarrow{0} & G_{\bullet} \\
 \downarrow & & \downarrow j_{\bullet} \\
 F\Delta[q] \hookrightarrow (\coprod F\dot{\Delta}[n+2]) \coprod (\coprod F\Delta[q]) & \longrightarrow & U_{\bullet}
 \end{array}$$

sea conmutativo nos dice que  $z' \in N_q(U_{\bullet})$ , mientras que el que lo sea

$$\begin{array}{ccc}
 F\Delta[q] \hookrightarrow (\coprod F\dot{\Delta}[n+2]) \coprod (\coprod F\Delta[q]) & \longrightarrow & U_{\bullet} \\
 \searrow \bar{z} & & \downarrow p_{\bullet} \\
 & & H_{\bullet}
 \end{array}$$

nos dice que  $p_q(z') = z$ .

Deducimos por tanto que  $N_q(p_\bullet)$ ,  $1 \leq q \leq n + 1$ , es sobreyectivo. De forma semejante se prueba que  $Z_{n+1}(p_\bullet)$  es también sobreyectivo, con lo que demostramos que  $p_\bullet$  es una  $n$ -fibración.

Notemos que la aplicación  $j_\bullet$  que hemos obtenido (en los dos casos) tiene la LLP con respecto a las  $n$ -fibraciones.

Finalmente, la parte de CM4 que queda por probar se hace como en el teorema 2.1.6 ■

Estudiamos ahora, igual que en la sección precedente, quienes son las  $n$ -cofibraciones y los objetos  $n$ -cofibrantes. Para hacerlo necesitamos extender el funtor  $Sk^q$  a un contexto un poco más general que el de grupos simpliciales. Notemos que a la hora de definir el esqueleto de un grupo simplicial (o más en general, de un objeto simplicial sobre una categoría) no necesitamos los operadores “cara”. Por tanto, si tenemos una familia de grupos  $G_\bullet = \{G_m, m \geq 0\}$  junto con unos morfismos  $s_i : G_m \rightarrow G_{m+1}$  que verifican las identidades usuales  $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ ,  $i \leq j$ , podemos definir  $Sk^q(G_\bullet)$  tal y como se define en grupos simpliciales, pero “olvidándonos” de las caras.

Es claro que a partir de esta definición, y de como se construye el esqueleto en grupos simpliciales, se tiene el siguiente lema:

**Lema 2.2.7.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial tal que en cada dimensión  $G_n$  es el producto libre de dos grupos, es decir,  $G_n = H_n \amalg K_n$ , verificando además que tanto  $H_\bullet$  como  $K_\bullet$  son cerrados bajo degeneraciones. Entonces  $(Sk^q(G_\bullet))_n = (Sk^q(H_\bullet))_n \amalg (Sk^q(K_\bullet))_n$*

**Proposición 2.2.8.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial. Entonces  $G_\bullet$  es  $n$ -cofibrante si y sólo si  $G_\bullet$  es cofibrante (es decir,  $G_\bullet$  es un grupo simplicial libre) y  $G_\bullet = Sk^{n+1}(G_\bullet)$*

*Demostración:* Supongamos que  $G_\bullet$  es  $n$ -cofibrante. Hemos visto ya que  $G_\bullet$  es cofibrante. Además, el morfismo canónico  $i_\bullet : Sk^{n+1}G_\bullet \rightarrow G_\bullet$  es una  $n$ -fibración trivial, puesto que  $Cosk^{n+1}(i_\bullet)$  es la identidad, y por tanto una fibración trivial. Por tanto, existe un levantamiento  $j_\bullet$  en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & Sk^{n+1}G_\bullet \\
 \downarrow & \nearrow j_\bullet & \downarrow i_\bullet \\
 G_\bullet & \xlongequal{\quad} & G_\bullet
 \end{array}$$

Es claro que  $i_\bullet j_\bullet = Id_{G_\bullet}$ . Comprobemos que  $j_\bullet i_\bullet = Id_{Sk^{n+1}G_\bullet}$ . Para ver esto, notemos que  $j_\bullet i_\bullet$  tiene como dominio  $Sk^{n+1}G_\bullet$ , y por tanto está determinado por su  $(n+1)$ -truncación, que como se puede apreciar es  $Id_{tr^{n+1}(G_\bullet)}$ . Es decir,

$j_{\bullet}i_{\bullet}$  es el único morfismo con dominio y codominio  $Sk^{n+1}G_{\bullet}$  y cuya  $(n+1)$ -truncación es la identidad, o sea,  $j_{\bullet}i_{\bullet} = Id_{Sk^{n+1}G_{\bullet}}$ . Con ésto demostramos que  $G_{\bullet} \cong Sk^{n+1}G_{\bullet}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $G_{\bullet}$  es un grupo simplicial libre que coincide con su  $(n+1)$ -esqueleto, y queremos probar que es  $n$ -cofibrante, para lo cual debemos encontrar levantamiento en cualquier diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow f_{\bullet} \\ G_{\bullet} & \longrightarrow & B_{\bullet} \end{array} \quad \text{donde } f_{\bullet} \text{ es una } n\text{-fibración trivial}$$

Pero como  $G_{\bullet} = Sk^{n+1}G_{\bullet}$ , encontrar levantamiento en el anterior diagrama es equivalente a encontrarlo en el siguiente

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Cosk^{n+1}A_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow Cosk^{n+1}f_{\bullet} \\ G_{\bullet} & \longrightarrow & Cosk^{n+1}B_{\bullet} \end{array}$$

y aquí existe puesto que  $G_{\bullet}$  es cofibrante y  $Cosk^{n+1}(f_{\bullet})$  es una fibración trivial. ■

**Proposición 2.2.9.** *Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet}$  una cofibración de grupos simpliciales. Entonces  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -cofibración si y sólo si cada elemento de  $U_q$  es un símlice degenerado para  $q \geq n+2$  (es decir,  $Sk^{n+1}FU_{\bullet} = FU_{\bullet}$ ).*

*Demostración:* Supongamos que  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -cofibración. Es claro que el grupo de  $n$ -símplices del conúcleo de  $f_{\bullet}$  es  $FU_n$ , puesto que el conúcleo se calcula dimensión a dimensión. Por tanto, llamaremos  $FU_{\bullet}$  al conúcleo de  $f_{\bullet}$ . Además, como  $U_{\bullet}$  es cerrado bajo degeneraciones, estos operadores en  $FU_{\bullet}$  son la restricción de los mismos en  $G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet}$ . Dado que  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -cofibración, su conúcleo  $FU_{\bullet}$  es  $n$ -cofibrante, de donde  $Sk^{n+1}(FU_{\bullet}) = FU_{\bullet}$ , lo que implica que  $U_q$  tiene únicamente símplices degenerados para  $q \geq n+2$ .

Recíprocamente, supongamos que  $Sk^{n+1}FU_{\bullet} = FU_{\bullet}$ . En este caso usando el lema 2.2.7, tenemos que  $Sk^{n+1}(G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet}) = Sk_{n+1}G_{\bullet} \amalg Sk^{n+1}FU_{\bullet} = Sk^{n+1}G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet}$ . Necesitamos probar que  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -cofibración, para lo cual necesitamos encontrar levantamiento  $t_{\bullet}$  en un diagrama cualquiera de la forma

$$\begin{array}{ccc} G_{\bullet} & \xrightarrow{\alpha} & A_{\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow g_{\bullet} \\ G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet} & \xrightarrow{\beta} & B_{\bullet} \end{array} \quad \text{donde } g_{\bullet} \text{ es una } n\text{-fibración trivial.}$$

Para ésto consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 G_{\bullet} & \longrightarrow & A_{\bullet} & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}A_{\bullet} \\
 f_{\bullet} \downarrow & & \downarrow g_{\bullet} & \nearrow & \downarrow \text{Cosk}^{n+1}g_{\bullet} \\
 G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet} & \longrightarrow & B_{\bullet} & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1}B_{\bullet}
 \end{array}$$

en el que la flecha punteada existe puesto que  $\text{Cosk}^{n+1}(g_{\bullet})$  es una fibración trivial y  $f_{\bullet}$  es una cofibración.

Usamos ahora la adjunción  $Sk^{n+1} \vdash \text{Cosk}^{n+1}$ , lo que nos da el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Sk^{n+1}G_{\bullet} & \longrightarrow & A_{\bullet} \\
 \downarrow & \nearrow h_{\bullet} & \downarrow g_{\bullet} \\
 Sk^{n+1}G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet} & \longrightarrow & B_{\bullet}
 \end{array}$$

Estamos en condiciones de definir  $t_m : G_m \amalg FU_m \rightarrow A_m$ . Para hacerlo, basta definir sus restricciones a  $G_m$  y a  $FU_m$ . Definimos entonces:

Si  $x \in G_m$ ,  $t_m(x) = \alpha_m(x)$ , y si  $x \in U_m$ ,  $t_m(x) = h_m(x)$ . Queda comprobar que la aplicación así definida es simplicial. Claramente  $t_{\bullet}$  conmuta con las degeneraciones, por tanto sólo resta probar que  $d_i t_m(x) = t_{m-1} d_i(x)$  para cualquier  $x \in G_m \amalg FU_m$ . Notemos que si  $m \leq n+1$ , la igualdad anterior es claramente cierta, así como si  $x \in G_m$  para cualquier  $m$ . Por tanto, es suficiente probarlo en el caso de que tengamos  $x \in U_m$ ,  $m \geq n+2$ . Distinguiremos dos casos:

1.  $d_i(x) \in U_{m-1}$ .

En este caso es fácil, pues se tiene:

$$t_{m-1} d_i(x) = h_{m-1} d_i(x) = d_i h_m(x) = d_i t_m(x)$$

2.  $d_i(x) \notin U_{m-1}$ .

Por hipótesis tenemos que  $x = s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_k}(y)$  para algún  $y \in U_{n+1}$ , de donde  $d_i(x) = d_i s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_k}(y) = s_{j_0} s_{j_1} \dots s_{j_k} d_j(y)$ , después de intercambiar los operadores  $s$  y  $d$  mediante las identidades simpliciales. Deducimos entonces:

$$\begin{aligned}
 t_{m-1} d_i(x) &= t_{m-1} s_{j_0} \dots s_{j_k} d_j(y) = s_{j_0} \dots s_{j_k} t_n d_j(y) = \\
 &= s_{j_0} \dots s_{j_k} d_j t_{n+1}(y) = d_i s_{i_0} \dots s_{i_k} t_{n+1}(y) = d_i t_m s_{i_0} \dots s_{i_k}(y) = d_i t_m(x)
 \end{aligned}$$

Ahora se podría enunciar y demostrar un lema análogo al lema 2.1.7 y como consecuencia se tendría que un morfismo  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una  $n$ -cofibración si y sólo si  $f_\bullet$  es un retracto de una aplicación libre que verifica la condición de la proposición anterior.

Vamos a relacionar ahora la estructura que se tiene en  $\mathbf{n-Hyppgd}(\mathbf{Gp})$  (véase [21]) y la  $n$ -estructura de grupos simpliciales y, consecuentemente, las teorías de homotopía asociadas. Utilizaremos para ello la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  (ver proposición 1.2.36)

**Proposición 2.2.10.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{n-Hyppgd}(\mathbf{Gp})$ . Entonces  $f_\bullet$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si y sólo si  $J(f_\bullet)$  es una  $n$ -fibración (resp.  $n$ -equivalencia débil).*

*Demostración:* Por definición,  $f_\bullet$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si y sólo si  $J(f_\bullet)$  lo es. A partir de las caracterizaciones que se tienen de las fibraciones (resp. equivalencias débiles) y de las  $n$ -fibraciones (resp.  $n$ -equivalencias débiles) es fácil ver la equivalencia entre fibraciones y  $n$ -fibraciones (resp. equivalencias débiles y  $n$ -equivalencias débiles) para morfismos en  $\mathbf{n-Hyppgd}(\mathbf{Gp})$ . ■

**Proposición 2.2.11.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo de grupos simpliciales.*

- i) Si  $f_\bullet$  es una  $n$ -cofibración, entonces  $\mathcal{P}_n(f_\bullet)$  es una cofibración.*
- ii)  $f_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil si y sólo si  $\mathcal{P}_n(f_\bullet)$  es una equivalencia débil.*
- iii) Si  $f_\bullet$  es una  $n$ -fibración, entonces  $\mathcal{P}_n(f_\bullet)$  es una fibración.*

*Demostración:* *i)* se obtiene a partir de que  $\mathcal{P}_n$  lleva cofibraciones de grupos simpliciales en cofibraciones en  $\mathbf{n-Hyppgd}(\mathbf{Gp})$  y de que toda  $n$ -cofibración es una cofibración.

Para *ii)* y *iii)* basta tener en cuenta la relación entre  $N_q(G_\bullet)$  y  $N_q(\mathcal{P}_n G_\bullet)$ , así como entre  $\pi_q(G_\bullet)$  y  $\pi_q(\mathcal{P}_n G_\bullet)$ . ■

Tanto la unidad como la counidad de la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  son equivalencias débiles en las correspondientes categorías, por lo que usando el teorema 3 §4 [58] tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.12.** *La adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  induce, para cada  $n \geq 0$ , una equivalencia de categorías*

$$Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})) \cong Ho(\mathbf{n-Hyppgd}(\mathbf{Gp}))$$

*y una equivalencia entre la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  asociada a la  $n$ -estructura y la teoría de homotopía en  $\mathbf{n-Hyppgd}(\mathbf{Gp})$ .*

Estudiaremos a continuación diversas construcciones concernientes a la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  asociada a la  $n$ -estructura.

**Proposición 2.2.13.** Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial y  $G_\bullet \otimes_n I$  el grupo simplicial definido por el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I_0) & \xrightarrow{\alpha_\bullet} & G_\bullet \otimes I_0 \\ Sk^{n+1}(i_0+i_1) \downarrow & & \downarrow \bar{i}_0+\bar{i}_1 \\ Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I) & \xrightarrow{\beta_\bullet} & G_\bullet \otimes_n I \end{array}$$

(donde  $I_0 = \dot{\Delta}[1]$ ).

Entonces existe una  $n$ -equivalencia débil,  $\bar{\sigma}_\bullet : G_\bullet \otimes_n I \rightarrow G_\bullet$ , tal que  $\bar{\sigma}_\bullet(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = \nabla$

*Demostración:* Claramente  $tr^{n+1}(\alpha_\bullet) = Id$ , de donde  $tr^{n+1}(\beta_\bullet) = Id$ , lo que implica que  $\beta_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil. Por otra parte, tenemos morfismos  $\epsilon_\bullet : Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I) \rightarrow G_\bullet \otimes I$  y  $i_0 + i_1 : G_\bullet \otimes I_0 \rightarrow G_\bullet \otimes I$  (notemos que  $G_\bullet \otimes I_0 \cong G_\bullet \amalg G_\bullet$ ) que verifican  $\epsilon_\bullet(Sk^{n+1}(i_0 + i_1)) = (i_0 + i_1)\alpha_\bullet$ , puesto que su  $(n+1)$ -truncación es en ambos casos  $tr^{n+1}(i_0 + i_1)$ .

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I_0) & \xrightarrow{\alpha_\bullet} & G_\bullet \otimes I_0 \\ Sk^{n+1}(i_0+i_1) \downarrow & & \downarrow \bar{i}_0+\bar{i}_1 \\ Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I) & \xrightarrow{\beta_\bullet} & G_\bullet \otimes_n I \end{array} \begin{array}{l} \searrow^{i_0+i_1} \\ \searrow^{\gamma_\bullet} \\ \searrow^{\epsilon_\bullet} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ G_\bullet \otimes I \end{array}$$

Existe entonces  $\gamma_\bullet : G_\bullet \otimes_n I \rightarrow G_\bullet \otimes I$ , y dado que  $\beta_\bullet$  y  $\epsilon_\bullet$  son  $n$ -equivalencias débiles, también lo es  $\gamma_\bullet$ . La aplicación buscada  $\bar{\sigma}_\bullet$  es entonces la composición  $G_\bullet \otimes_n I \xrightarrow{\gamma_\bullet} G_\bullet \otimes I \xrightarrow{\sigma_\bullet} G_\bullet$ , que es  $n$ -equivalencia débil puesto que  $\sigma_\bullet$  lo es. Además  $\bar{\sigma}_\bullet(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = \sigma_\bullet \gamma_\bullet(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = \sigma_\bullet(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = \nabla$  ■

Notemos que esta construcción define un funtor  $- \otimes_n I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

**Corolario 2.2.14.** Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial  $n$ -cofibrante. Entonces  $G_\bullet \otimes_n I$  es un cilindro para  $G_\bullet$  (con la  $n$ -estructura).

*Demostración:* De acuerdo con la proposición anterior, basta solamente comprobar que  $\bar{i}_0 + \bar{i}_1$  es una  $n$ -cofibración. Como  $G_\bullet$  es  $n$ -cofibrante, es cofibrante, y por tanto  $i_0 + i_1$  es una cofibración de grupos simpliciales, de

donde  $Sk^{n+1}(i_0 + i_1)$  es una  $n$ -cofibración. Dado que  $\bar{i}_0 + \bar{i}_1$  es el opuesto en un cuadrado cocartesiano a  $Sk^{n+1}(i_0 + i_1)$ , deducimos que  $\bar{i}_0 + \bar{i}_1$  es una  $n$ -cofibración. ■

Una vez obtenido un cilindro podemos definir un funtor  ${}^n\Sigma : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que nos da el funtor suspensión en la correspondiente categoría de homotopía como sigue:

$${}^n\Sigma(G_\bullet) = \mathit{Coker}(G_\bullet \otimes I_0 \xrightarrow{\bar{i}_0 + \bar{i}_1} G_\bullet \otimes_n I)$$

La relación entre el funtor  $\Sigma$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver sección 1.4.3) y  ${}^n\Sigma$  viene dada en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.15.** *Dado  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  ${}^n\Sigma(G_\bullet) \cong Sk^{n+1}(\Sigma G_\bullet)$ .*

*Demostración:* Tenemos que

$$\begin{aligned} {}^n\Sigma(G_\bullet) &= \mathit{Coker}(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) \cong \mathit{Coker}(Sk^{n+1}(i_0 + i_1)) \cong \\ &\cong Sk^{n+1}(\mathit{Coker}(i_0 + i_1)) = Sk^{n+1}(\Sigma G_\bullet) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que los conúcleos de dos morfismos opuestos en un cuadrado cocartesiano son isomorfos y que el funtor  $Sk^{n+1}$  es un adjunto por la izquierda y por tanto preserva colímites. ■

Construimos ahora un adjunto al funtor  $-\otimes_n I$  que nos proporcionará un espacio de arcos asociado a un grupo simplicial  $H_\bullet$ .

**Proposición 2.2.16.** *Sea  $H_\bullet$  un grupo simplicial y definimos  ${}_n H_\bullet^I$  mediante el siguiente diagrama cartesiano*

$$\begin{array}{ccc} {}_n H_\bullet^I & \longrightarrow & (\mathit{Cosk}^{n+1} H_\bullet)^I \\ (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \downarrow & & \downarrow (\partial_0, \partial_1) \\ H_\bullet^{I_0} & \longrightarrow & (\mathit{Cosk}^{n+1} H_\bullet)^{I_0} \end{array}$$

*Esta construcción define un funtor  ${}_n(-)^I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  que es adjunto por la derecha al funtor  $-\otimes_n I$ .*

*Demostración:* Claramente la construcción es functorial. Veamos entonces que si  $G_\bullet$  y  $H_\bullet$  son dos grupos simpliciales,  $\mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet \otimes_n I, H_\bullet) \cong \mathit{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, {}_n H_\bullet^I)$ . Ésto es cierto pues dar un morfismo  $G_\bullet \otimes_n I \rightarrow H_\bullet$

es equivalente a dar dos morfismos  $Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I) \rightarrow H_\bullet$  y  $G_\bullet \otimes I_0 \rightarrow H_\bullet$  tales que el siguiente cuadrado sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I_0) & \xrightarrow{\alpha_\bullet} & G_\bullet \otimes I_0 \\ Sk^{n+1}(i_0+i_1) \downarrow & & \downarrow \\ Sk^{n+1}(G_\bullet \otimes I) & \longrightarrow & H_\bullet \end{array}$$

Ésto último es equivalente a dar dos morfismos  $G_\bullet \otimes I_0 \rightarrow H_\bullet$  y  $G_\bullet \otimes I \rightarrow Cosk^{n+1}H_\bullet$  tales que conmute el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet \otimes I_0 & \longrightarrow & G_\bullet \otimes I \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_\bullet & \longrightarrow & Cosk^{n+1}H_\bullet \end{array}$$

y ésto equivale a dar dos morfismos  $G_\bullet \rightarrow H_\bullet^{I_0}$  y  $G_\bullet \rightarrow (Cosk^{n+1}H_\bullet)^I$  que hagan conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \longrightarrow & (Cosk^{n+1}H_\bullet)^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_\bullet^{I_0} & \longrightarrow & (Cosk^{n+1}H_\bullet)^{I_0} \end{array}$$

que equivale precisamente a dar un morfismo  $G_\bullet \rightarrow {}_nH_\bullet^I$  ■

**Proposición 2.2.17.** *El objeto  ${}_nH_\bullet^I$  definido en la proposición 2.2.16 es un espacio de arcos para  $H_\bullet$  (con respecto a la  $n$ -estructura).*

*Demostración:* Veamos primero que existe un morfismo  $\gamma_\bullet : H_\bullet^I \rightarrow {}_nH_\bullet^I$  que es una  $n$ -equivalencia débil. Este morfismo se obtiene a partir de los morfismos canónicos  $H_\bullet^I \rightarrow H_\bullet^{I_0}$  y  $H_\bullet^I \rightarrow (Cosk^{n+1}H_\bullet)^I$ . Comprobemos ahora que los morfismos  $H_\bullet^I \rightarrow (Cosk^{n+1}H_\bullet)^I$  y  ${}_nH_\bullet^I \rightarrow (Cosk^{n+1}H_\bullet)^I$  son  $n$ -equivalencias débiles.

El primero es  $n$ -equivalencia débil pues lo podemos incluir en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet^I & \longrightarrow & (Cosk^{n+1}H_\bullet)^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_\bullet & \longrightarrow & Cosk^{n+1}H_\bullet \end{array}$$

donde los morfismos verticales son equivalencias débiles y el morfismo horizontal inferior es  $n$ -equivalencia débil pues su  $(n+1)$ -coesqueleto es la identidad (ver definición 2.2.1).

Que el segundo es una  $n$ -equivalencia débil se deduce del hecho de que es el opuesto en un cuadrado cartesiano a un morfismo cuya  $(n+1)$ -truncación es un isomorfismo (notemos que  $H_{\bullet}^{I_0} \cong H_{\bullet} \times H_{\bullet}$  y por tanto  $tr^{n+1}(H_{\bullet}^{I_0}) \cong tr^{n+1}(H_{\bullet} \times H_{\bullet}) = tr^{n+1}(Cosk^{n+1}(H_{\bullet}) \times Cosk^{n+1}(H_{\bullet})) \cong (Cosk^{n+1}(H_{\bullet}))^{I_0}$ ).

El axioma CM2, junto con estos dos últimos hechos nos prueba que  $\gamma_{\bullet}$  es una  $n$ -equivalencia débil.

Comprobemos ahora que el morfismo  $(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  es una  $n$ -fibración. En realidad, vamos a comprobar que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una  $n$ -fibración, lo cual nos implicará claramente lo que queremos. Es claro que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración (recordemos que  $(-)^I$  nos da un espacio de arcos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ) y por tanto sólo necesitamos probar que  $Z_{n+1}(\partial_0, \partial_1)$  es sobreyectivo (ver proposición 2.2.2).

De acuerdo con las identificaciones dadas en la sección 1.2.3, podemos escribir

$$[(Cosk^{n+1}H_{\bullet})^I]_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in (H_{n+1})^{n+1} / d_i x_i = d_i x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$$

mientras que  $[(Cosk^{n+1}H_{\bullet})^I]_{n+1}$  es el conjunto

$$\left\{ \left( \begin{array}{ccccc} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0n+1} & x_{0n+2} \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1n+1} & x_{1n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+10} & x_{n+11} & \cdots & x_{n+1n+1} & x_{n+1n+2} \end{array} \right) / \begin{array}{l} x_{ij} \in H_{n+1} \\ d_k x_{ij} = d_{j-1} x_{ik} \quad k < j \\ x_{ii+1} = x_{i+i+1} \end{array} \right\}$$

donde los operadores cara están definidos como sigue:

$$d_k(x_{ij}) = (x_{0k+1}, \dots, x_{k-1k+1}, x_{k+1k}, \dots, x_{n+1k})$$

Por otra parte  $[(Cosk^{n+1}H_{\bullet})^{I_0}]_{n+1} = (Cosk^{n+1}H_{\bullet})_{n+1} \times (Cosk^{n+1}H_{\bullet})_{n+1} = H_{n+1} \times H_{n+1}$ , y el morfismo  $(\partial_0, \partial_1)_{n+1}$  está definido por

$$(\partial_0, \partial_1)_{n+1} \left[ \left( \begin{array}{ccccc} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0n+1} & x_{0n+2} \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1n+1} x_{1n+2} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n+10} & x_{n+11} & \cdots & x_{n+1n+1} & x_{n+1n+2} \end{array} \right) \right] = (x_{00}, x_{n+1n+2})$$

A partir de las definiciones anteriores se deduce que  $Z_{n+1}((\text{Cosk}^{n+1}H_\bullet)')$  es

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n+1} & x_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{n+1} & x_{n+2} \end{pmatrix} / d_i x_j = 0 \right\}$$

Supongamos que tenemos  $(x, y) \in Z_{n+1}((\text{Cosk}^{n+1}H_\bullet)^{I_0})$  que sabemos que es igual a  $Z_{n+1}(H_\bullet) \times Z_{n+1}(H_\bullet)$ . Entonces el elemento

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{pmatrix}$$

pertenece a  $Z_{n+1}((\text{Cosk}^{n+1}H_\bullet)^I)$  y claramente su imagen por  $Z_{n+1}(\partial_0, \partial_1)$  es el elemento  $(x, y)$  del que partíamos así que  $Z_{n+1}(\partial_0, \partial_1)$  es sobreyectivo como se requería.

Tenemos entonces una factorización del morfismo diagonal

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet & \xrightarrow{\Delta} & H_\bullet \times H_\bullet = H_\bullet^{I_0} \\ & \searrow \bar{s}_\bullet & \nearrow (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1) \\ & s_\bullet & \\ & H_\bullet^I & \xrightarrow{\gamma_\bullet} & {}_n H_\bullet^I \end{array}$$

donde  $\bar{s}_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil puesto que  $s_\bullet$  lo es y  $(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  es una  $n$ -fibración.

Con esto concluimos que  ${}_n H_\bullet^I$  es un espacio de arcos para  $H_\bullet$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  con la  $n$ -estructura. ■

Esta construcción permite definir un funtor

$${}^n \Omega : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$$

como  ${}^n \Omega H_\bullet = \text{Ker}(\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1)$  y este determina el funtor de lazos en la categoría  $H_{0n}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$ . Es claro que  ${}^n \Omega$  es adjunto por la derecha al funtor  ${}^n \Sigma$  y,

razonando de forma análoga a como se hizo en la proposición 2.2.15, obtenemos que  ${}^n\Omega H_\bullet \cong \Omega \text{Cosk}^{n+1} H_\bullet$ , donde  $\Omega$  es el funtor de lazos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver sección 1.4.3).

Damos ahora una construcción alternativa del cilindro para la  $n$ -estructura que será utilizada posteriormente.

**Proposición 2.2.18.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial  $n$ -cofibrante y sea  $G_\bullet \otimes'_n I$  el grupo simplicial definido por el siguiente cuadrado cocartesiano*

$$\begin{array}{ccc} Sk^n G_\bullet \otimes I_0 & \longrightarrow & G_\bullet \otimes I_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sk^n G_\bullet \otimes I & \longrightarrow & G_\bullet \otimes'_n I \end{array}$$

Entonces  $G_\bullet \otimes'_n I$  es un cilindro para  $G_\bullet$  con la  $n$ -estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

*Demostración:* Notemos en principio que

$$(G_\bullet \otimes'_n I)_q = \begin{cases} \coprod_{i=0}^{q+1} G_q & \text{si } q \leq n \\ G_q \coprod (\coprod_{i=1}^q (Sk^n G_\bullet)_q) \coprod G_q & \text{si } q \geq n+1 \end{cases}$$

Puesto que  $I_0 = \Delta[1, 0] \coprod \Delta[1, 1]$ , podemos construir  $G_\bullet \otimes'_n I$  en dos pasos, mediante dos diagramas cocartesianos:

Primero construimos un grupo simplicial  $Q_\bullet$  mediante el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccc} Sk^n G_\bullet \otimes \Delta[1, 0] & \longrightarrow & G_\bullet \otimes \Delta[1, 0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sk^n G_\bullet \otimes I & \longrightarrow & Q_\bullet \end{array}$$

y una vez construido este objeto construimos el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{array}{ccccc} Sk^n G_\bullet \otimes \Delta[1, 1] & \longrightarrow & Sk^n G_\bullet \otimes I & \longrightarrow & Q_\bullet \\ \downarrow & & & & \downarrow \alpha_\bullet \\ G_\bullet \otimes \Delta[1, 1] & \longrightarrow & & \longrightarrow & P_\bullet \end{array}$$

Es fácil ver entonces, utilizando las correspondientes propiedades universales, que  $P_\bullet \cong G_\bullet \otimes'_n I$

Los morfismos  $i_0 : G_\bullet \otimes \Delta[1, 0] \rightarrow G_\bullet \otimes I$  y  $Sk^n G_\bullet \otimes I \rightarrow G_\bullet \otimes I$  determinan un único morfismo  $\epsilon_\bullet : Q_\bullet \rightarrow G_\bullet \otimes I$ , que junto con  $i_1 : G_\bullet \otimes \Delta[1, 1] \rightarrow G_\bullet \otimes I$  determinan un morfismo  $\gamma'_\bullet : G_\bullet \otimes'_n I \rightarrow G_\bullet \otimes I$ .

Nuestro primer objetivo es probar que  $\gamma'_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil, lo cual lo hacemos en las siguientes etapas:

- 1) El morfismo  $Sk^n G_\bullet \otimes \Delta[1, 0] \rightarrow Sk^n G_\bullet \otimes I$  es una cofibración trivial, luego también lo es  $G_\bullet \otimes \Delta[1, 0] \rightarrow Q_\bullet$ . Sabemos también que  $i_0$  es una equivalencia débil de donde deducimos que  $\epsilon_\bullet$  es una equivalencia débil.
- 2) Utilizando la nota preliminar es claro que  $tr^n \gamma'_\bullet = Id$ , con lo que  $\gamma'_\bullet$  es una  $(n-1)$ -equivalencia débil.
- 3)  $\epsilon_\bullet$  es la composición de los morfismos  $\alpha_\bullet : Q_\bullet \rightarrow G_\bullet \otimes'_n I$  y  $\gamma'_\bullet : G_\bullet \otimes'_n I \rightarrow G_\bullet \otimes I$ , lo que nos da el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 N_{n+1}Q_\bullet & \xrightarrow{d_{n+1}} & N_n Q_\bullet & \xrightarrow{d_n} & N_{n-1}Q_\bullet \\
 \downarrow N_{n+1}(\alpha_\bullet) & & \parallel & & \parallel \\
 N_{n+1}(G_\bullet \otimes'_n I) & \xrightarrow{d'_{n+1}} & N_n(G_\bullet \otimes'_n I) & \xrightarrow{d'_n} & N_{n-1}(G_\bullet \otimes'_n I) \\
 \downarrow N_{n+1}(\gamma'_\bullet) & & \parallel & & \parallel \\
 N_{n+1}(G_\bullet \otimes I) & \xrightarrow{d''_{n+1}} & N_n(G_\bullet \otimes I) & \xrightarrow{d''_n} & N_{n-1}(G_\bullet \otimes I)
 \end{array}$$

De donde deducimos:

- $Ker d_n = Ker d'_n = Ker d''_n$
- $Imag d_{n+1} \subseteq Imag d'_{n+1} \subseteq Imag d''_{n+1}$
- $Imag d_{n+1} = Imag d''_{n+1}$ , puesto que  $\epsilon_\bullet$  es una equivalencia débil.

Fácilmente se concluye entonces que  $\gamma'_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil.

El segundo objetivo es probar que el morfismo  $Sk^n G_\bullet \otimes I_0 \rightarrow Sk^n G_\bullet \otimes I$  es una  $n$ -cofibración. Para ello utilizaremos el lema 1.2.5 y la caracterización de las  $n$ -cofibraciones (ver proposición 2.2.9).

Puesto que  $G_\bullet$  es cofibrante,  $Sk^n G_\bullet$  también es  $(n-1)$ -cofibrante, y por tanto  $Sk^n G_\bullet = FU_\bullet$  donde  $U_m$  contiene únicamente simplices degenerados para  $m \geq n+1$ . Además,  $(Sk^n G_\bullet \otimes I_0)_m = FU_m^{(0)} \amalg FU_m^{(1)}$  y  $(Sk^n G_\bullet \otimes I)_m = \amalg_{\tau \in I_m} FU_m^\tau$  donde  $U_m^\tau = U_m$ .

Probar que el morfismo anterior es una  $n$ -cofibración es equivalente a probar que cada  $x^\tau \in U_m^\tau$ ,  $m \geq n+2$ ,  $\tau \neq (0), (1)$  es un simplece degenerado.

Supongamos que tenemos  $x^\tau$  en las condiciones anteriores. Entonces  $x \in U_m$  es un elemento degenerado, es decir,  $x = s_i y$ ,  $y \in U_{m-1}$ , y a vez  $y$  es degenerado, luego  $x = s_i s_j z$ ,  $z \in U_{m-2}$  (suponemos, por ejemplo que  $i \leq j$ ,

lo que implica que  $i \neq j + 1$ ). Por el lema 1.2.5, o bien  $\tau = s_i \tau_1$  o bien  $\tau = s_{j+1} \tau_2$ . Si se da el primero, tendríamos que  $x^\tau = s_i((s_j z)^{\tau_1})$ , y si se da el segundo,  $x^\tau = s_{j+1}((s_i z)^{\tau_2})$ . En cualquiera de los casos,  $x^\tau$  es un elemento degenerado.

Por último, para comprobar que la construcción en cuestión es efectivamente un cilindro, trabajamos con el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Sk^n G_\bullet \otimes I_0 & \longrightarrow & G_\bullet \otimes I_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \bar{i}_0 + \bar{i}_1' \\
 Sk^n G_\bullet \otimes I & \longrightarrow & G_\bullet \otimes_n I \\
 & \searrow \gamma'_\bullet & \downarrow \sigma_\bullet \\
 & & G_\bullet \otimes I \xrightarrow{\sigma_\bullet} G_\bullet
 \end{array}$$

y observamos que  $\bar{i}_0 + \bar{i}_1'$  es una  $n$ -cofibración pues es el opuesto en un cuadrado cocartesiano a una  $n$ -cofibración, como acabamos de probar y que  $\bar{\sigma}_\bullet$  es una  $n$ -equivalencia débil, pues es la composición de una  $n$ -equivalencia débil  $\gamma'_\bullet$  y una equivalencia débil  $\sigma_\bullet$ . ■

Un razonamiento análogo al de la proposición 2.2.15 nos permite probar que  $Coker(\bar{i}_0 + \bar{i}_1') \cong \Sigma(Sk^n G_\bullet)$ , y puesto que el functor suspensión está determinado de forma única salvo equivalencia débil (en este caso  $n$ -equivalencia débil), o lo que es lo mismo, en la categoría de homotopía está determinado salvo isomorfismo, tenemos, a nivel de la categoría de homotopía  $Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$  una equivalencia natural  ${}^n\Sigma \cong Sk^{n+1}\Sigma \cong \Sigma Sk^n$ .

Estudiamos ahora como es la relación de homotopía en grupos simpliciales asociada a la  $n$ -estructura.

Recordemos (ver secciones 1.2.1 ó 1.2.3) que dados  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  dos morfismos de grupos simpliciales, dar una homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es equivalente a dar una familia de morfismos de grupos  $\{k_i^p : G_p \rightarrow H_p, p \geq 1, 1 \leq i \leq p\}$  satisfaciendo las siguientes identidades

$d_0 k_1^p = f_{p-1} d_0$	$d_i k_j^p = k_{j-1}^{p-1} d_i \quad si \ i < j$	$s_i k_j^p = k_j^{p+1} s_i \quad si \ i \leq j$
$d_p k_p^p = g_{p-1} d_p$	$d_i k_j^p = k_j^{p-1} d_i \quad si \ i \geq j$	$s_i k_j^p = k_{j+1}^{p+1} s_i \quad si \ i > j$

o bien otra familia  $\{h_j^q : G_q \rightarrow H_{q+1}, 0 \leq j \leq q\}$  satisfaciendo:

$d_0 h_0^q = f_q$	$d_{q+1} h_q^q = g_q$	$d_i h_j^q = h_{j-1}^{q-1} d_i \quad si \ i < j$
$s_i h_j^{q-1} = h_{j+1}^q s_i \quad si \ i \leq j$	$d_{j+1} h_{j+1}^q = d_{j+1} h_j^q$	$d_i h_j^q = h_j^{q-1} d_{i-1} \quad si \ i > j + 1$
$s_i h_j^{q-1} = h_j^q s_{i-1} \quad si \ i > j$		

que se correspondían respectivamente a dar un morfismo  $k_\bullet : G_\bullet \otimes I \rightarrow H_\bullet$  tal que  $k_\bullet i_0 = f_\bullet$  y  $k_\bullet i_1 = g_\bullet$  y a dar un morfismo  $h_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet^I$  tal que  $\partial_0 h_\bullet = g_\bullet$  y  $\partial_1 h_\bullet = f_\bullet$ . La adjunción  $- \otimes I \vdash (-)^I$  nos da la equivalencia entre los dos sistemas.

El objetivo es ahora comprobar que al “truncar” convenientemente estas dos familias de morfismos se tienen las relaciones de homotopía asociadas a los dos cilindros estudiados para la  $n$ -estructura.

**Definición 2.2.19.** Sean  $G_\bullet, H_\bullet$  dos grupos simpliciales y  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  dos morfismos entre ellos:

i) Una  $n$ -homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un sistema de morfismos  $\{k_i^p : G_p \rightarrow H_p, 1 \leq p \leq n+1, 1 \leq i \leq p\}$  satisfaciendo las identidades:

$d_0 k_1^p = f_{p-1} d_0$	$d_i k_j^p = k_{j-1}^{p-1} d_i \quad \text{si } i < j$	$s_i k_j^p = k_j^{p+1} s_i \quad \text{si } i \leq j$
$d_p k_p^p = g_{p-1} d_p$	$d_i k_j^p = k_j^{p-1} d_i \quad \text{si } i \geq j$	$s_i k_j^p = k_{j+1}^{p+1} s_i \quad \text{si } i > j$

ii) Una  $n'$ -homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  es un sistema de morfismos  $h_j^q : G_q \rightarrow H_{q+1}, 0 \leq q \leq n, 0 \leq j \leq q$ , satisfaciendo las identidades:

$d_0 h_0^q = f_q$	$d_{q+1} h_q^q = g_q$	$d_i h_j^q = h_{j-1}^{q-1} d_i \quad \text{si } i < j$
$s_i h_j^{q-1} = h_{j+1}^q s_i \quad \text{si } i \leq j$	$d_{j+1} h_{j+1}^q = d_{j+1} h_j^q$	$d_i h_j^q = h_j^{q-1} d_{i-1} \quad \text{si } i > j+1$
$s_i h_j^{q-1} = h_j^q s_{i-1} \quad \text{si } i > j$		

**Proposición 2.2.20.** Sean  $G_\bullet, H_\bullet$  dos grupos simpliciales, y  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  dos morfismos entre ellos. Entonces:

i) Existe una  $n$ -homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  si y sólo si existe un morfismo  $k_\bullet : G_\bullet \otimes_n I \rightarrow H_\bullet$  tal que  $k_\bullet(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = f_\bullet + g_\bullet$ .

ii) Existe una  $n'$ -homotopía de  $f_\bullet$  a  $g_\bullet$  si y sólo si existe un morfismo  $k'_\bullet : G_\bullet \otimes'_n I \rightarrow H_\bullet$  tal que  $k'_\bullet(\bar{i}'_0 + \bar{i}'_1) = f_\bullet + g_\bullet$ .

*Demostración:* Supongamos que tenemos una  $n$ -homotopía  $(k_i^p)$ . Es fácil construir a partir de ella una aplicación  $tr^{n+1}(G_\bullet \otimes I) \rightarrow tr^{n+1}H_\bullet$ . Para ello debemos definir  $k_q : (G_\bullet \otimes I)_q \rightarrow H_q, 0 \leq q \leq n+1$ , y dado que  $(G_\bullet \otimes I)_q = \coprod_{i=0}^{q+1} (G_q)_i, (G_q)_i = G_q$ , es suficiente con definir la restricción de  $k_q$  a  $(G_q)_i$ , es decir, debemos definir  $k_{q,i} : (G_q)_i \rightarrow H_q$ , y esto lo hacemos como sigue:

$$k_{q,i} = \begin{cases} g_q & \text{si } i = 0 \\ k_i^q & \text{si } 1 \leq i \leq q \\ f_q & \text{si } i = q+1 \end{cases}$$

Las identidades simpliciales son consecuencia de las identidades que satisface la familia  $\{k_i^p\}$

Tenemos entonces  $k_{\bullet, tr} : tr^{n+1}(G_{\bullet} \otimes I) \rightarrow tr^{n+1}H_{\bullet}$  tal que  $k_{\bullet, tr} tr^{n+1}(i_0 + i_1) = tr^{n+1}(g_{\bullet} + f_{\bullet})$ . Utilizando la adjunción  $sk^{n+1} \vdash tr^{n+1}$  y sabiendo que  $sk^{n+1} tr^{n+1} = Sk^{n+1}$  obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1}(G_{\bullet} \otimes I_0) & \longrightarrow & G_{\bullet} \otimes I_0 \\ sk^{n+1}(i_0+i_1) \downarrow & & \downarrow f_{\bullet}+g_{\bullet} \\ Sk^{n+1}(G_{\bullet} \otimes I) & \longrightarrow & H_{\bullet} \end{array}$$

que nos determina un morfismo  $k_{\bullet} : G_{\bullet} \otimes_n I \rightarrow H_{\bullet}$  que satisface la condición requerida.

Recíprocamente, dado  $k_{\bullet} : G_{\bullet} \otimes_n I \rightarrow H_{\bullet}$  tal que  $k_{\bullet}(\bar{i}_0 + \bar{i}_1) = g_{\bullet} + f_{\bullet}$ , componemos con  $\beta_{\bullet}$  (ver proposición 2.2.13) lo que nos da un morfismo  $k_{\bullet}\beta_{\bullet} : Sk^{n+1}(G_{\bullet} \otimes I) \rightarrow H_{\bullet}$ , que queda determinado por su  $(n+1)$ -truncación. Definimos entonces  $k_i^q$ ,  $1 \leq q \leq n+1$ ,  $1 \leq i \leq q$  como la restricción de  $k_q\beta_q$  a  $(G_q)_i$ .

La parte *ii*) se demuestra de forma análoga, pero utilizando la construcción adjunta a  $G_{\bullet} \otimes'_n I$ . ■

A partir de ahora, una  $n$ -homotopía de  $f_{\bullet}$  a  $g_{\bullet}$  será indistintamente tanto una familia de morfismos de grupos  $\{k_i^p, 1 \leq p \leq n+1, 1 \leq i \leq p\}$  satisfaciendo de la definición 2.2.19.i) como un morfismo de grupos simpliciales  $k_{\bullet} : G_{\bullet} \otimes_n I \rightarrow H_{\bullet}$ . Una observación semejante se aplica a las  $n'$ -homotopías.

**Proposición 2.2.21.** *Sea  $G_{\bullet}$  un grupo simplicial y consideramos los morfismos  $\bar{i}_0, \bar{i}_1 : G_{\bullet} \rightarrow G_{\bullet} \otimes_n I$ . Entonces existe una  $n'$ -homotopía  $k'_{\bullet} : G_{\bullet} \otimes'_n I \rightarrow G_{\bullet} \otimes_n I$  de  $\bar{i}_0$  a  $\bar{i}_1$ .*

*Demostración:* Notemos primero que  $tr^{n+1}(G_{\bullet} \otimes_n I) = tr^{n+1}(G_{\bullet} \otimes I)$  y que  $tr^{n+1}(\bar{i}_k) = tr^{n+1}(i_k)$ ,  $k = 0, 1$ . Necesitamos entonces, utilizando la proposición 2.2.20.ii) una familia de morfismos  $h_j^q : G_q \rightarrow (G_{\bullet} \otimes_n I)_{q+1} = (G_{\bullet} \otimes I)_{q+1}$ ,  $0 \leq q \leq n$ ,  $0 \leq j \leq q$ , satisfaciendo las condiciones dadas en la definición 2.2.19.ii). Pero esta familia existe pues basta considerar  $Id : G_{\bullet} \otimes I \rightarrow G_{\bullet} \otimes I$ , que nos da una homotopía de  $i_0$  a  $i_1$ , y por tanto, una familia de morfismos  $h_j^q : G_q \rightarrow (G_{\bullet} \otimes I)_{q+1}$ ,  $q \geq 0$ ,  $0 \leq j \leq q$ . ■

Como consecuencia inmediata tenemos:

**Corolario 2.2.22.** *Sean  $G_{\bullet}$  y  $H_{\bullet}$  dos grupos simpliciales y  $f_{\bullet}, g_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  dos morfismos entre ellos. Si existe una  $n$ -homotopía de  $f_{\bullet}$  a  $g_{\bullet}$ , entonces existe una  $n'$ -homotopía de  $f_{\bullet}$  a  $g_{\bullet}$ .*

*Demostración:* Dada una  $n$ -homotopía  $G_{\bullet} \otimes_n I \rightarrow H_{\bullet}$  es suficiente componer con  $k'_{\bullet}$  de la proposición anterior. ■

**Corolario 2.2.23.** *Sea  $G_{\bullet}$  un grupo simplicial  $n$ -cofibrante,  $H_{\bullet}$  un grupo simplicial cualquiera y  $f_{\bullet}, g_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  dos morfismos. Entonces existe una  $n$ -homotopía de  $f_{\bullet}$  a  $g_{\bullet}$  si y sólo si existe una  $n'$ -homotopía de  $f_{\bullet}$  a  $g_{\bullet}$ .*

*Demostración:* Basta tener en cuenta que, al ser  $G_{\bullet}$   $n$ -cofibrante, ambas relaciones coinciden con la relación de homotopía a la izquierda que se deriva de la  $n$ -estructura. ■

## 2.3 Estructuras de modelos para $(r, n)$ -tipos de Grupos Simpliciales

Combinamos ahora los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores para dar una estructura de modelos (y por tanto una teoría de homotopía) para equivalencias débiles “truncadas en ambas direcciones” de grupos simpliciales.

Consideramos entonces para cada  $r, n$ ,  $0 \leq r \leq n$ , las siguientes clases de morfismos:

**Definición 2.3.1.** *Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales.*

- i)  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -fibración si  $\text{Cosk}^{n+1}(f_{\bullet})$  es una  $\bar{r}$ -fibración.*
- ii)  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -equivalencia débil si  $\text{Cosk}^{n+1}(f_{\bullet})$  es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil.*
- iii)  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -cofibración si es a la vez una  $\bar{r}$ -cofibración y una  $n$ -cofibración*

Notemos que todo grupo simplicial es  $(r, n)$ -fibrante, y que los grupos simpliciales  $(r, n)$ -cofibrantes son los grupos simpliciales libres,  $r$ -reducidos y que coinciden con su  $(n + 1)$ -esqueleto.

Como consecuencia inmediata del valor de los grupos de homotopía del  $(n + 1)$ -coesqueleto de un grupo simplicial, obtenemos:

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -equivalencia débil si y sólo si  $\pi_q(f_{\bullet})$  es un isomorfismo para  $r \leq q \leq n$ .*

Al igual que en las secciones precedentes podemos caracterizar las  $(r, n)$ -fibraciones y las  $(r, n)$ -fibraciones triviales en términos de propiedades de levantamiento y en términos del complejo de Moore y los grupos de homotopía.

**Proposición 2.3.3.** *Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces son equivalentes:*

- i)  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -fibración.*
- ii)  $f_{\bullet}$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[q, q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $r + 1 \leq q \leq n + 1$ , y con respecto a  $F\Delta[n + 2, n + 2] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[n + 2]$ .*
- iii)  $N_q(f_{\bullet})$ ,  $r + 1 \leq q \leq n + 1$ , y  $Z_{n+1}(f_{\bullet})$  son sobreyectivos.*

*Demostración:* La demostración de la equivalencia entre *i)* y *ii)* se hace de forma semejante a como se demostró el apartado *i)* en la proposición 2.2.5, pero utilizando ahora las caracterizaciones de  $\bar{r}$ -fibración dadas en la proposición 2.1.2.

La equivalencia entre *ii)* y *iii)* es consecuencia inmediata del lema 1.2.24 ■

**Proposición 2.3.4.** *Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales. Entonces son equivalentes:*

- i)  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -fibración trivial.*
- ii)  $f_{\bullet}$  tiene la RLP con respecto a  $F\Delta[r + 1, r + 1] \hookrightarrow F\overset{\bullet}{\Delta}[r + 1]$  y  $F\overset{\bullet}{\Delta}[q] \hookrightarrow F\Delta[q]$ ,  $r + 1 \leq q \leq n + 1$ .*
- iii)  $N_q(f_{\bullet})$ ,  $r + 1 \leq q \leq n + 1$ , es sobreyectivo,  $\pi_q(\text{Ker } f_{\bullet}) = 0$ ,  $r \leq q \leq n$ , y  $\pi_r(f_{\bullet})$  es sobreyectivo.*

*Demostración:* Al igual que en la proposición anterior, la equivalencia entre *i)* y *ii)* se hace utilizando argumentos semejantes a los de la proposición 2.2.5 teniendo en cuenta la caracterización de las  $\bar{r}$ -fibraciones triviales dadas en la proposición 2.1.4.

La equivalencia entre *i)* y *iii)* se demuestra igual que las proposiciones 2.1.4 y 2.2.4. ■

Al igual que en la sección anterior, se tiene un lema análogo al lema 2.1.5 que se utiliza en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 2.3.5.** Para cada  $r, n$ ,  $0 \leq r \leq n$ , la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es una categoría de modelos cerrada con la estructura dada en la definición 2.3.1.

*Demostración:* El teorema se demuestra exactamente igual que se demostró el teorema 2.2.6. Tan sólo hay que hacer en este caso la parte de CM5 que en aquel teorema era trivial (por la definición de las  $n$ -cofibraciones), y que consiste en encontrar levantamiento en cada diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} G_{\bullet} & \xrightarrow{\alpha_{\bullet}} & X_{\bullet} \\ f_{\bullet} \downarrow & & \downarrow g_{\bullet} \\ H_{\bullet} & \xrightarrow{\beta_{\bullet}} & Y_{\bullet} \end{array}$$

donde  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -cofibración y  $g_{\bullet}$  una  $(r, n)$ -fibración trivial. Para encontrarlo, primero buscamos un levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_{\bullet} & \longrightarrow & \mathit{Cosk}^{n+1} X_{\bullet} \\ f_{\bullet} \downarrow & & \downarrow \mathit{Cosk}^{n+1} g_{\bullet} \\ H_{\bullet} & \longrightarrow & \mathit{Cosk}^{n+1} Y_{\bullet} \end{array}$$

que existe pues  $f_{\bullet}$  es una  $\bar{r}$ -cofibración y  $\mathit{Cosk}^{n+1} g_{\bullet}$  es una  $\bar{r}$ -fibración trivial. Esto nos da por la adjunción  $Sk^{n+1} \vdash \mathit{Cosk}^{n+1}$  un levantamiento en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Sk^{n+1} G_{\bullet} & \longrightarrow & X_{\bullet} \\ Sk^{n+1} f_{\bullet} \downarrow & & \downarrow g_{\bullet} \\ Sk^{n+1} H_{\bullet} & \longrightarrow & Y_{\bullet} \end{array}$$

Tenemos ahora en cuenta que  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -cofibración; ésto quiere decir que  $f_{\bullet}$  es un retracto de una aplicación libre  $G_{\bullet} \rightarrow G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet}$  en la que  $Sk^{n+1}(G_{\bullet} \amalg FU_{\bullet}) = (Sk^{n+1} G_{\bullet}) \amalg FU_{\bullet}$ . En el caso de que sea libre un razonamiento análogo al de la proposición 2.2.9 nos permite encontrar el levantamiento en el diagrama de partida. ■

Destacamos algunos resultados de fácil demostración y que utilizaremos en lo que sigue.

**Proposición 2.3.6.** Sea  $f_{\bullet} : G_{\bullet} \rightarrow H_{\bullet}$  un morfismo de grupos simpliciales.

- i) Si  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -fibración entonces  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -fibración.
- ii) Si  $f_{\bullet}$  es una  $n$ -equivalencia débil entonces  $f_{\bullet}$  es una  $(r, n)$ -equivalencia débil.

iii) Si  $G_\bullet$  y  $H_\bullet$  son  $r$ -reducidos, entonces  $f_\bullet$  es una  $(r, n)$ -cofibración si y sólo si  $f_\bullet$  es una  $n$ -cofibración.

*Demostración:* Los apartados i) y ii) son claros si tenemos en cuenta que toda fibración (resp. equivalencia débil) es una  $\bar{r}$ -fibración (resp.  $\bar{r}$ -equivalencia débil), y la definición de  $(r, n)$ -fibración y  $(r, n)$ -equivalencia débil.

La implicación hacia la derecha del apartado iii) es trivial (ver definición 2.3.1).

Supongamos ahora que  $f_\bullet$  es una  $n$ -cofibración. Sabemos que  $f_\bullet$  es una cofibración y, por el corolario 2.1.9,  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración. Deducimos por tanto que  $f_\bullet$  es una  $(r, n)$ -cofibración. ■

Damos ahora de forma resumida algunas construcciones homotópicas en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  con la estructura que acabamos de definir.

**Proposición 2.3.7.** *Sea  $G_\bullet$  un grupo simplicial  $(r, n)$ -cofibrante. Entonces tanto  $G_\bullet \otimes_n I$  como  $G_\bullet \otimes'_n I$  (ver proposiciones 2.2.13 y 2.2.18) son cilindros para  $G_\bullet$  con la  $(r, n)$ -estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .*

*Demostración:* Notemos que tanto  $G_\bullet \amalg G_\bullet (= G_\bullet \otimes I_0)$  como  $G_\bullet \otimes_n I$  y  $G_\bullet \otimes'_n I$  son  $r$ -reducidos. Utilizamos ahora la proposición 2.3.6. ■

**Proposición 2.3.8.** *Sea  $H_\bullet$  un grupo simplicial. Entonces  ${}_n H_\bullet^I$  (ver proposición 2.2.17) es un espacio de arcos para  $H_\bullet$  con la  $(r, n)$ -estructura en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .*

*Demostración:* Es suficiente utilizar las proposiciones 2.2.17 y 2.3.6. ■

Puesto que las construcciones del cilindro y del espacio de arcos son iguales para la  $n$ -estructura y para la  $(r, n)$ -estructura, los funtores  ${}^n \Sigma$  y  ${}^n \Omega$  inducen los funtores suspensión y lazo en la categoría de homotopía  $Ho_{(r, n)}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))$ , que denotaremos por  ${}^{(r, n)} \Sigma$  y  ${}^{(r, n)} \Omega$ . Además, tal y como se hizo en las secciones precedentes, puede probarse que en la categoría de homotopía se tienen equivalencias naturales:

$${}^{(r, n)} \Sigma \cong \Sigma S k^n \cong S k^{n+1} \Sigma \cong \Sigma L_r$$

$${}^{(r, n)} \Omega \cong E_{r+1} \Omega \cong \Omega E_r \cong \Omega C o s k^{n+1}$$

Por último, destaquemos que si  $G_\bullet$  es  $(r, n)$ -cofibrante y  $H_\bullet$  es cualquier grupo simplicial, las relaciones de homotopía por la izquierda (o por la derecha) deducidas de la  $(r, n)$ -estructura coinciden con las relaciones de homotopía por la izquierda (o por la derecha) deducidas de la  $n$ -estructura, ya que el cilindro y el espacio de arcos son el mismo en los dos casos. Deducimos entonces finalmente que

$$Hom_{Ho_{(r, n)}(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(G_\bullet, H_\bullet) \cong Hom_{Ho_n(\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}))}(G_\bullet, H_\bullet).$$

## Capítulo 3

# Estructuras de modelos y teoría de homotopía en subcategorías de grupos simpliciales y categorías equivalentes

Se considera en este capítulo, para cada  $r, n$  en la situación  $0 \leq r \leq n$  la categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$  (que es la intersección de las categorías  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  y  $n - \mathbf{Hypgd}(\mathbf{Gp})$ ) a la que se dota, para cada sistema multiplicativo  $S \subseteq \mathbb{Z}$  ( $S = \{1\}$  si  $r = 0$ ) de una estructura de modelos cerrada (la  $S$ -estructura) basándonos en la estructura que tiene  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  (ver [59]).

Posteriormente, y apoyándonos en la  $\bar{r}$ -estructura vemos que las categorías  $[_r\mathbf{T}_n]$  con la estructura anterior para  $S = \{1\}$  son categorías simpliciales de modelos cerradas (teorema 3.2.3) lo que nos permite dar una descripción de la categoría  $Ho\left([_r\mathbf{T}_n^S]\right)$  (teorema 3.2.4).

Luego, para valores particulares de  $r$  y  $n$  se muestra la equivalencia de las categorías  $[_r\mathbf{T}_n]$  con categorías conocidas, como las de módulos cruzados de grupos, cat-grupos, 2-módulos cruzados reducidos, cat-grupos trenzados, módulos cruzados estables y cat-grupos simétricos. Estas equivalencias posibilitan definir estructuras de modelos en estas categorías, en las cuales se dan algunas construcciones homotópicas (proposiciones 3.4.9, 3.5.1, etc.) y se caracterizan las homotopías en términos particularmente simples (proposiciones 3.4.10 y 3.5.2, corolarios 3.4.11, 3.4.17 y 3.5.3).

En la última sección se utilizan los resultados anteriores para tratar un problema clásico dentro de la topología algebraica, como es el de clasificar clases de homotopía de aplicaciones continuas entre dos CW-complejos  $X$  e  $Y$ , dándose una descripción algebraica de este conjunto en el caso de que

$X$  e  $Y$  sean espacios  $r$ -conexos y  $n$ -coconexos, que es especialmente sencilla cuando  $n = r + 1$ .

### 3.1 Teoría de Homotopía de Serre en $[_r\mathbf{T}_n]$

En esta sección dotamos, para cada sistema multiplicativo de  $\mathbb{Z}$  a la categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$  de una estructura de modelos

Supongamos que  $S$  es un sistema multiplicativo de  $\mathbb{Z}$ . Un grupo abeliano  $A$  se dice que es  $S$ -libre de torsión si el morfismo  $A \rightarrow S^{-1}A$  es inyectivo, se dice que es  $S$ -divisible si tal morfismo es sobreyectivo, que es  $S$ -torsión si es el morfismo cero y, por último, se dice que es  $S$ -únicamente divisible si es biyectivo.

Recordemos que para cada  $r \geq 0$  y cada sistema multiplicativo de  $\mathbb{Z}$ ,  $S$  ( $S = \{1\}$  si  $r = 0$ ), se tiene una estructura de modelos (que llamaremos la  $S$ -estructura) en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  que está definida (ver [59]):

- Las  $S$ -cofibraciones son los morfismos que son cofibraciones de grupos simpliciales

- Las  $S$ -equivalencias débiles son los morfismos  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  tales que  $S^{-1}\pi_q(f_\bullet)$  es un isomorfismo para  $q \geq r$

- Las  $S$ -fibraciones son los morfismos que tienen la RLP con respecto a las  $S$ -cofibraciones triviales.

Las  $S$ -fibraciones y  $S$ -fibraciones triviales se tienen caracterizadas como sigue:

**Proposición 3.1.1.** ([59] prop 3.3 y 3.4) Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ . Entonces:

i)  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración si y sólo si  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo para  $q \geq r + 1$ ,  $\pi_q(\text{Ker } f_\bullet)$  es  $S$ -únicamente divisible y  $\text{Coker}(\pi_r(f_\bullet))$  es  $S$ -libre de torsión.

ii)  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración trivial si y sólo si es una equivalencia débil sobreyectiva (es decir, es una fibración trivial en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ )

Nótese que las fibraciones triviales no dependen del subconjunto  $S$ .

Ahora, para cada  $r, n$  en la situación  $0 \leq r \leq n$ , consideramos la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ , denotada  $[_r\mathbf{T}_n]$ , formada por aquellos grupos simpliciales  $r$ -reducidos  $G_\bullet$  tales que  $N_q(G_\bullet) = 0$ ,  $q \geq n + 1$ . Ésta es una subcategoría reflexiva de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ , donde el functor reflector  $\mathcal{P}_n$  es la restricción del mismo functor  $\mathcal{P}_n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  (ver proposición 1.2.36)

La categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$  es una categoría completa y cocompleta. Los límites se calculan como en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  (es decir, punto a punto), mientras que los colímites se calculan aplicando el funtor  $\mathcal{P}_n$  al colímite hecho en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ .

Si tenemos  $G_\bullet, H_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$ , denotaremos  $G_\bullet \amalg H_\bullet$  al coproducto de ambos objetos en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ , mientras que llamaremos  $G_\bullet * H_\bullet$  a su coproducto hecho en la categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$ . Es claro, de acuerdo con la observación anterior que  $G_\bullet * H_\bullet = \mathcal{P}_n(G_\bullet \amalg H_\bullet)$ .

Notemos que, para  $r = 0$ , la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  es justamente la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , mientras que  $[_0\mathbf{T}_n]$  es la categoría  $\mathbf{n-Hypgd}(\mathbf{Gp})$  considerada en la secciones 1.2.3 y 2.2. Por otra parte, cuando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos la categoría  $[_r\mathbf{T}_\infty]$ , que es exactamente la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ . Es obvio que  $[_0\mathbf{T}_\infty] = \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ .

Ahora, para cada sistema multiplicativo  $S \subseteq \mathbb{Z}$  proponemos la siguiente estructura en  $[_r\mathbf{T}_n]$  (cuando  $r = 0$ , tomamos  $S = \{1\}$ ).

**Definición 3.1.2.** Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n]$  y  $J : [_r\mathbf{T}_n] \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  el funtor inclusión.

- i)  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración si  $J(f_\bullet)$  es una  $S$ -fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ .
- ii)  $f_\bullet$  es una  $S$ -equivalencia débil si  $J(f_\bullet)$  es una  $S$ -equivalencia débil en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ .
- iii)  $f_\bullet$  es una  $S$ -cofibración si tiene la LLP con respecto a las  $S$ -fibraciones triviales.

Es claro que si  $f_\bullet$  es un morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n]$  entonces  $f_\bullet$  es una  $S$ -equivalencia débil si y sólo si  $S^{-1}(\pi_q(f_\bullet))$  es un isomorfismo,  $r \leq q \leq n$ .

Utilizando que  $\mathcal{P}_n$  es adjunto por la izquierda a  $J$ , se demuestra fácilmente que  $\mathcal{P}_n$  preserva  $S$ -cofibraciones. Por otra parte, teniendo en cuenta el valor de  $\pi_q(\mathcal{P}_n(G_\bullet))$  se deduce fácilmente que  $\mathcal{P}_n$  preserva  $S$ -equivalencias débiles.

Como consecuencia inmediata de la proposición 3.1.1.i) tenemos:

**Proposición 3.1.3.** Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n]$ . Entonces  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración si y sólo si  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo para  $r + 1 \leq q \leq n$ ,  $\pi_q(\text{Ker } f_\bullet)$  es  $S$ -únicamente divisible para  $r \leq q \leq n$  y  $\text{Coker}(\pi_r(f_\bullet))$  es  $S$ -libre de torsión.

Ésto nos dice que:

**Corolario 3.1.4.** Sea  $G_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$ . Entonces  $G_\bullet$  es  $S$ -fibrante si y sólo si los grupos de homotopía de  $G_\bullet$  son  $S$ -únicamente divisibles. En particular, si  $S = \{1\}$ , todo objeto de  $[_r\mathbf{T}_n]$  es fibrante.

También tenemos una caracterización de las  $S$ -fibraciones triviales. Para ello utilizamos el funtor  $L_r : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  (ver sección 1.2.3) y el funtor  $\mathcal{P}_n$ .

**Proposición 3.1.5.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n]$ . Entonces son equivalentes:*

*i)  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración trivial.*

*ii)  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $\mathcal{P}_n L_r F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \rightarrow \mathcal{P}_n L_r F \Delta [q]$ ,  $r \leq q \leq n + 1$ .*

*iii)  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo y  $\pi_q(\text{Ker}(f_\bullet)) = 0$  para  $r \leq q \leq n$ .*

*Demostración:* Sabemos que  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración trivial si y sólo si  $f_\bullet$  es una equivalencia débil sobreyectiva, es decir,  $f_\bullet$  es una fibración trivial de grupos simpliciales, y ésto es equivalente (ver sección 1.4.1 ejemplo 4) a que  $f_\bullet$  tenga la RLP con respecto a  $F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \hookrightarrow F \Delta [q]$ ,  $q \geq 0$ . Utilizando el lema 1.2.24, y teniendo en cuenta que  $G_\bullet, H_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$ , y por tanto que  $B_q(H_\bullet) = Z_q(H_\bullet) = N_q(H_\bullet) = 0$ ,  $q \geq n + 1$ ,  $q \leq r - 1$ , deducimos que  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración trivial si y sólo si  $f_\bullet$  (visto como un morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ) tiene la RLP con respecto a  $F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \hookrightarrow F \Delta [q]$ ,  $r \leq q \leq n + 1$ . Utilizamos ahora que el funtor de inclusión  $[_r\mathbf{T}_n] \hookrightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es adjunto por la derecha al funtor  $\mathcal{P}_n L_r$  y obtenemos que  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración trivial si y sólo si  $f_\bullet$  tiene la RLP con respecto a  $\mathcal{P}_n L_r F \overset{\bullet}{\Delta} [q] \rightarrow \mathcal{P}_n L_r F \Delta [q]$ ,  $r \leq q \leq n + 1$ . Así hemos probado la equivalencia entre i) y ii).

Para la equivalencia entre i) y iii) tenemos en cuenta que  $f_\bullet$  es una  $S$ -fibración trivial si y sólo si  $N_q(f_\bullet)$  es sobreyectivo y  $\pi_q(\text{Ker}(f_\bullet)) = 0$ ,  $q \geq 0$ . Pero como  $N_q(G_\bullet) = N_q(H_\bullet) = 0$ ,  $q \geq n + 1$ ,  $q \leq r - 1$ , la condición de sobreyectividad en dimensiones mayores que  $n$  y menores que  $r$  es vacía. También es claro (puesto que  $\text{Ker}(f_\bullet) \in [_r\mathbf{T}_n]$ ) que  $\pi_q(\text{Ker}(f_\bullet)) = 0$ ,  $q \geq n + 1$ ,  $q \leq r - 1$ . Por tanto deducimos que  $f_\bullet$  es  $S$ -fibración trivial si y sólo si se da la condición iii). ■

Notemos que las  $S$ -fibraciones triviales no dependen del subconjunto  $S$ , y por tanto tampoco dependen las  $S$ -cofibraciones.

Probamos ya que la estructura dada en la definición 3.1.2 dota a la categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$  de una estructura de modelos.

**Teorema 3.1.6.** *La categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$ ,  $0 \leq r \leq n$ , con la estructura dada en la definición 3.1.2 es una categoría de modelos cerrada (esta categoría de modelos cerrada se denotará  $[_r\mathbf{T}_n^S]$ ).*

*Demostración:* El axioma CM1 ya hemos observado que se verifica. Los axiomas CM2 y CM3 se comprueban fácilmente usando la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$ .

Probemos el axioma CM5. Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo y tratemos de factorizarlo como una  $S$ -cofibración trivial seguido por una  $S$ -fibración. Para ésto, consideramos la siguiente factorización del morfismo  $J(f_\bullet)$  en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ ,

$$\begin{array}{ccc} J(G_\bullet) & \xrightarrow{J(f_\bullet)} & J(H_\bullet) \\ & \searrow j_\bullet & \nearrow p_\bullet \\ & T_\bullet & \end{array}$$

donde  $j_\bullet$  es una  $S$ -cofibración trivial y  $p_\bullet$  es una  $S$ -fibración. Aplicando  $\mathcal{P}_n$  obtenemos una factorización de  $f_\bullet$ .

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \xrightarrow{f_\bullet} & H_\bullet \\ & \searrow \mathcal{P}_n(j_\bullet) & \nearrow \mathcal{P}_n(p_\bullet) \\ & \mathcal{P}_n(T_\bullet) & \end{array}$$

donde  $\mathcal{P}_n(j_\bullet)$  es una  $S$ -cofibración trivial, ya que  $\mathcal{P}_n$  preserva  $S$ -cofibraciones y  $S$ -equivalencias débiles. Además,  $\mathcal{P}_n(j_\bullet)$  tiene la LLP con respecto a las  $S$ -fibraciones, ya que, dado un diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \longrightarrow & A_\bullet \\ \mathcal{P}_n(j_\bullet) \downarrow & & \downarrow g_\bullet \\ \mathcal{P}_n(T_\bullet) & \longrightarrow & B_\bullet \end{array} \quad \text{donde } g_\bullet \text{ es una } S\text{-fibración}$$

construimos por la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  un diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \longrightarrow & J(A_\bullet) \\ j_\bullet \downarrow & & \downarrow J(g_\bullet) \\ T_\bullet & \longrightarrow & J(B_\bullet) \end{array}$$

en el que existe levantamiento, y por tanto, hay levantamiento en el diagrama requerido.

Veamos que  $\mathcal{P}_n(p_\bullet)$  es una  $S$ -fibración.

Puesto que  $p_\bullet$  es una  $S$ -fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ , tenemos que  $N_q(p_\bullet)$  es sobreyectivo para  $q > r$ , luego  $N_q(\mathcal{P}_n(p_\bullet))$  es sobreyectivo para  $r + 1 \leq q \leq n$ . Por otra parte, como  $\pi_r(p_\bullet) = \pi_r(\mathcal{P}_n(p_\bullet))$  y  $\text{Coker}(\pi_r(p_\bullet))$  es  $S$ -libre de torsión deducimos que  $\text{Coker}(\pi_r(\mathcal{P}_n(p_\bullet)))$  es también  $S$ -libre de torsión. Probemos que  $\pi_q(\text{Ker}(\mathcal{P}_n(p_\bullet)))$  es  $S$ -únicamente divisible para  $r \leq q \leq n$ .

Sea  $K_\bullet = \text{Ker}(p_\bullet)$  y  $K'_\bullet = \text{Ker}(\mathcal{P}_n(p_\bullet))$ . Dado que  $N_q(p_\bullet)$  y  $N_q(\mathcal{P}_n(p_\bullet))$  son sobreyectivos para  $q \geq r + 1$  tenemos un diagrama de sucesiones exactas largas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_n(K_\bullet) & \longrightarrow & \pi_n(T_\bullet) & \longrightarrow & \pi_n(H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(K_\bullet) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi_n(K'_\bullet) & \longrightarrow & \pi_n(\mathcal{P}_n(T_\bullet)) & \longrightarrow & \pi_n(H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(K'_\bullet) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

de donde deducimos que  $\pi_n(K_\bullet) \cong \pi_n(K'_\bullet)$ . Es claro que para  $q \leq n - 1$ ,  $\pi_q(K_\bullet) = \pi_q(K'_\bullet)$ . Por tanto,  $\pi_q(K'_\bullet)$  es  $S$ -únicamente divisible para  $r \leq q \leq n$ .

La otra parte de CM5 se prueba de forma análoga, factorizando el morfismo en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  y aplicando el funtor  $\mathcal{P}_n$  a la factorización obtenida.

Queda por probar que dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \longrightarrow & A_\bullet \\ i_\bullet \downarrow & & \downarrow q_\bullet \\ H_\bullet & \longrightarrow & B_\bullet \end{array}$$

donde  $i_\bullet$  es una  $S$ -cofibración trivial y  $q_\bullet$  es una  $S$ -fibración, existe levantamiento. Un razonamiento análogo al usado en el teorema 2.1.6 nos da el levantamiento buscado. ■

Damos por último una caracterización de las  $S$ -cofibraciones.

**Proposición 3.1.7.** *Sea  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  un morfismo en  $[_r\mathbf{T}_n]$ . Entonces  $f_\bullet$  es una  $S$ -cofibración si y sólo si  $f_\bullet$  es retracto de un morfismo  $\mathcal{P}_n(j_\bullet) : G_\bullet \rightarrow \mathcal{P}_n(T_\bullet)$  donde  $j_\bullet : G_\bullet \rightarrow T_\bullet$  es una aplicación libre.*

*En particular,  $G_\bullet$  es  $S$ -cofibrante si y sólo si es retracto de  $\mathcal{P}_n(F_\bullet)$  donde  $F_\bullet$  es un grupo simplicial libre  $r$ -reducido.*

*Demostración:* Supongamos que  $f_\bullet$  es una  $S$ -cofibración.

Factorizamos  $f_\bullet$  como una  $S$ -cofibración,  $j_\bullet$ , seguido por una  $S$ -fibración trivial,  $p_\bullet$ , en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ . El morfismo  $j_\bullet$  es una aplicación libre, pues al hacer la factorización en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  (por el argumento del objeto pequeño) la  $S$ -cofibración que resulta es libre. Tenemos entonces  $f_\bullet = \mathcal{P}_n(p_\bullet)\mathcal{P}_n(j_\bullet)$ . Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \xrightarrow{\mathcal{P}_n(j_\bullet)} & \mathcal{P}_n(T_\bullet) \\ f_\bullet \downarrow & \nearrow s_\bullet & \downarrow \mathcal{P}_n(p_\bullet) \\ H_\bullet & \xlongequal{\quad} & H_\bullet \end{array}$$

y puesto que  $f_\bullet$  es una  $S$ -cofibración y  $\mathcal{P}_n(p_\bullet)$  es una  $S$ -fibración trivial (ver la demostración del teorema 3.1.6), el morfismo  $s_\bullet$  existe.

Esto nos da un diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\bullet & \xlongequal{\quad} & G_\bullet \\ f_\bullet \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_n(j_\bullet) \\ H_\bullet & \xrightleftharpoons[s_\bullet]{\mathcal{P}_n(p_\bullet)} & \mathcal{P}_n(T_\bullet) \end{array}$$

que nos prueba que  $f_\bullet$  es un retracts de  $\mathcal{P}_n(j_\bullet)$

Recíprocamente, si  $f_\bullet$  es retracts de  $\mathcal{P}_n(j_\bullet)$  donde  $j_\bullet$  es una aplicación libre, entonces, dado que  $\mathcal{P}_n$  preserva  $S$ -cofibraciones deducimos que  $\mathcal{P}_n(j_\bullet)$  es una  $S$ -cofibración. El axioma CM3 nos dice que  $f_\bullet$  es entonces una  $S$ -cofibración. ■

Explicitamos ahora algunas construcciones homotópicas asociadas a la categoría de modelos  $[_r\mathbf{T}_n^S]$ .

Comenzamos con un lema que más tarde generalizaremos.

**Lema 3.1.8.** *Sea  $H_\bullet \in [_0\mathbf{T}_n] \subseteq \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . Entonces  $H_\bullet^I \in [_0\mathbf{T}_n]$ .*

*Demostración:* Recordemos (ver sección 1.2.3) que

$$(H_\bullet^I)_q = \{(x_0, \dots, x_q) \in (H_{q+1})^{q+1} / d : ix_i = d_i x_{i-1}, 1 \leq i \leq q\}$$

Probaremos que si  $N_q(H_\bullet) = N_{q+1}(H_\bullet) = 0$ , entonces  $N_q(H_\bullet^I) = 0$ . El resto de la demostración es evidente.

Supongamos entonces que  $H_\bullet$  es un grupo simplicial tal que  $N_q(H_\bullet) = 0$  y  $N_{q+1}(H_\bullet) = 0$ , y supongamos que tenemos  $(x_0, \dots, x_q) \in N_q(H_\bullet^I)$ . Esto quiere decir que tenemos  $x_i \in H_{q+1}$ ,  $0 \leq i \leq q$  verificando:

$$\begin{array}{cccccc} & d_0 x_1 = 0 & d_0 x_2 = 0 & \dots & d_0 x_{q-1} = 0 & d_0 x_q = 0 \\ d_1 x_0 & = & d_1 x_1 & & d_1 x_{q-1} = 0 & d_1 x_q = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{q-1} x_0 = 0 & d_{q-1} x_1 = 0 & d_{q-1} x_2 = 0 & \dots & d_{q-1} x_{q-1} & d_{q-1} x_q = 0 \\ d_q x_0 = 0 & d_q x_1 = 0 & d_q x_2 = 0 & \dots & d_q x_{q-1} = & d_q x_q \end{array}$$

Entonces, si  $0 \leq i \leq q-1$  tenemos que  $d_i d_{q+1} x_q = d_x d_i x_q = 0$ , luego  $d_{q+1} x \in N_q(H_\bullet)$ , de donde  $d_{q+1} x_q = 0$ . Pero esto implica que  $d_i x_q = 0$  para  $i \neq 0$ , de donde  $\alpha_{(q,q+1)} x_q \in N_{q+1}(H_\bullet)$ , (ver sección 1.2.3 para la definición de las aplicaciones  $\alpha$ ) y por tanto  $\alpha_{(q,q+1)} x_q = 0$ , es decir,  $x_q = 0$ . Tenemos ahora que  $d_i x_{q-1} = 0$ ,  $i \neq q-1$ , luego  $\alpha_{(q-1,q+1)} x_{q-1} = 0$ . Razonando

de esta forma llegamos a que  $x_1 = \dots = x_q = 0$ , y una vez probado ésto deducimos fácilmente que  $d_0x_0 \in N_q(H_\bullet)$ , pues  $d_id_0x_0 = d_0d_{i+1}x_0 = 0$  para  $0 \leq i \leq q-1$ , lo que implica que  $d_0x_0 = 0$ , que era lo que faltaba para que  $x_0$  fuera un elemento de  $N_{q+1}(H_\bullet)$ , y por tanto  $x_0$  vale también 0. Así pues  $x_i = 0$ ,  $0 \leq i \leq q$ . ■

Utilizaremos a continuación el funtor  $E_r$  (ver sección 1.2.3).

**Proposición 3.1.9.** *Sea  $H_\bullet \in [r\mathbf{T}_n]$  un objeto  $S$ -fibrante. Entonces  $H_\bullet^I = E_r(H_\bullet^I)$  es un espacio de arcos para  $H_\bullet$ .*

*Demostración:* Por el lema anterior, tenemos que  $H_\bullet^I \in [0\mathbf{T}_n]$  (de hecho,  $H_\bullet^I \in [r-1\mathbf{T}_n]$ ), luego  $E_r(H_\bullet) \in [r\mathbf{T}_n]$ .

Consideremos la factorización del morfismo diagonal (en  $[0\mathbf{T}_n]$  o en grupos simpliciales)  $H_\bullet \xrightarrow{s} H_\bullet^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} H_\bullet \times H_\bullet$  y apliquémosle el funtor  $E_r$ ; ésto da una factorización del morfismo diagonal en  $[r\mathbf{T}_n]$

$$H_\bullet \xrightarrow{E_r s} E_r(H_\bullet^I) = H_\bullet^I \xrightarrow{E_r(\partial_0, \partial_1)} H_\bullet \times H_\bullet$$

donde hemos utilizado que  $E_r$  es adjunto por la derecha, y por tanto preserva productos, y que  $E_r(H_\bullet) = H_\bullet$ .

Puesto que  $s$  es una equivalencia débil, también lo es  $E_r s$  (ver corolario 1.2.33), luego es una  $S$ -equivalencia débil.

Veamos que si  $H_\bullet$  es  $S$ -fibrante entonces  $E_r(\partial_0, \partial_1)$  es una  $S$ -fibración para lo cual usaremos proposición 3.1.3

Vimos en la sección 1.4.3 que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración, luego el morfismo  $N_q(E_r(\partial_0, \partial_1))$  es sobreyectivo para  $r+1 \leq q$ . Necesitamos entonces demostrar que  $\pi_q(Ker(E_r(\partial_0, \partial_1)))$  es  $S$ -únicamente divisible para  $r \leq q \leq n$  y que  $Coker(\pi_r(E_r(\partial_0, \partial_1)))$  es  $S$ -libre de torsión.

Probemos lo primero. Para ello, llamemos  $K_\bullet$  al núcleo de  $E_r(\partial_0, \partial_1)$ , y consideremos la siguiente sucesión fibración:

$$K_\bullet \hookrightarrow H_\bullet^I \xrightarrow{E_r(\partial_0, \partial_1)} H_\bullet \times H_\bullet$$

de la que obtenemos la sucesión exacta larga

$$\rightarrow \pi_q(H_\bullet^I) \rightarrow \pi_q(H_\bullet \times H_\bullet) \rightarrow \pi_{q-1}(K_\bullet) \rightarrow \pi_{q-1}(H_\bullet^I) \rightarrow \pi_{q-1}(H_\bullet \times H_\bullet) \rightarrow$$

y otra que resulta de aplicar el funtor  $S^{-1}$  a esta sucesión.

Puesto que  $H_\bullet$  es  $S$ -fibrante, tenemos que  $\pi_q(H_\bullet) \cong S^{-1}\pi_q(H_\bullet)$ ,  $r \leq q \leq n$ , y como para  $q$  comprendido entre  $r$  y  $n$  tenemos que  $\pi_q(H_\bullet) \cong \pi_q(H_\bullet^I)$ , deducimos que  $\pi_q(H_\bullet^I) \cong S^{-1}\pi_q(H_\bullet^I)$ ,  $r \leq q \leq n$ . Por otra parte,

$$\pi_q(H_\bullet \times H_\bullet) \cong \pi_q(H_\bullet) \times \pi_q(H_\bullet) \cong S^{-1}\pi_q(H_\bullet) \times S^{-1}\pi_q(H_\bullet) \cong S^{-1}\pi_q(H_\bullet \times H_\bullet)$$

luego tenemos un diagrama de sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_{q+1}(H_\bullet^I) & \longrightarrow & \pi_{q+1}(H_\bullet \times H_\bullet) & \longrightarrow & \pi_q(K_\bullet) & \longrightarrow \\ & \downarrow |r & & \downarrow |r & & \downarrow & \\ \longrightarrow & S^{-1}\pi_{q+1}(H_\bullet^I) & \longrightarrow & S^{-1}\pi_{q+1}(H_\bullet \times H_\bullet) & \longrightarrow & S^{-1}\pi_q(K_\bullet) & \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow & \pi_q(K_\bullet) & \longrightarrow & \pi_q(H_\bullet^I) & \longrightarrow & \pi_q(H_\bullet \times H_\bullet) & \longrightarrow \dots \\ & \downarrow & & \downarrow |r & & \downarrow |r & \\ \longrightarrow & S^{-1}\pi_q(K_\bullet) & \longrightarrow & S^{-1}\pi_q(H_\bullet^I) & \longrightarrow & S^{-1}\pi_q(H_\bullet \times H_\bullet) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

que nos prueba que  $\pi_q(K_\bullet)$  es  $S$ -únicamente divisible para  $r \leq q \leq n$ .

Si  $C = \text{Coker}(\pi_r(E_r(\partial_0, \partial_1)))$ , el siguiente diagrama nos muestra que es  $S$ -libre de torsión

$$\begin{array}{ccccc} \pi_r(H_\bullet^I) & \longrightarrow & \pi_r(H_\bullet \times H_\bullet) & \longrightarrow & C \\ \downarrow |r & & \downarrow |r & & \downarrow \\ S^{-1}\pi_r(H_\bullet^I) & \longrightarrow & S^{-1}\pi_r(H_\bullet \times H_\bullet) & \longrightarrow & S^{-1}C \end{array}$$

pues de él deducimos que  $S^{-1}(C) \cong C$ . ■

La anterior construcción determina un funtor  $(-)^I : [r\mathbf{T}_n] \rightarrow [r\mathbf{T}_n]$ , que induce un funtor  $\underline{\Omega} : [r\mathbf{T}_n] \rightarrow [r\mathbf{T}_n]$  definido como

$$\underline{\Omega}(H_\bullet) = \text{Ker}(H_\bullet^I \rightarrow H_\bullet \times H_\bullet).$$

Dado que  $E_r$  es adjunto por la derecha, preserva límites, luego  $\text{Ker}(E_r(\partial_0, \partial_1)) \cong E_r(\text{Ker}(\partial_0, \partial_1))$  lo que nos dice que  $\underline{\Omega}(H_\bullet) \cong E_r(\Omega(H_\bullet))$ .

Recordemos que el funtor  $\underline{\Omega}$  es débilmente equivalente al funtor  $\Omega'$  (ver sección 1.4.3), de donde  $\underline{\Omega} \cong E_r\Omega$  y  $E_r\Omega'$  determinan el mismo funtor de lazos en  $\text{Ho}([r\mathbf{T}_n^S])$ .

Notemos, por ejemplo, que si  $H_\bullet \in [r\mathbf{T}_{r+1}]$ , entonces el funtor  $E_r\Omega' : [r\mathbf{T}_{r+1}] \rightarrow [r\mathbf{T}_{r+1}]$  está dado como  $E_r\Omega'(H_\bullet) = \text{K}(\pi_{r+1}(H_\bullet), r)$ , o que si

$H_\bullet \in [r\mathbf{T}_r]$ , entonces el espacio de arcos de  $H_\bullet$  es el propio  $H_\bullet$ , luego el funtor de lazos es el funtor cero.

Haremos a continuación la construcción cilindro en  $[r\mathbf{T}_n^S]$ . Notemos que si  $G_\bullet \in [r\mathbf{T}_n]$ , entonces  $G_\bullet \otimes I \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ .

**Definición 3.1.10.** Sea  $G_\bullet \in [r\mathbf{T}_n]$ . Definimos  $G_\bullet \otimes I$  como el objeto  $\mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes I)$ .

Es claro que así hemos definido un funtor  $-\otimes I : [r\mathbf{T}_n] \rightarrow [r\mathbf{T}_n]$ .

**Proposición 3.1.11.** El funtor  $-\otimes I : [0\mathbf{T}_n] \rightarrow [0\mathbf{T}_n]$  es adjunto por la izquierda al funtor  $(-)^I$ .

*Demostración:* Tenemos, para  $G_\bullet, H_\bullet \in [0\mathbf{T}_n]$  que:

$$\text{Hom}_{[0\mathbf{T}_n]}(G_\bullet \otimes I, H_\bullet) \stackrel{(1)}{=} \text{Hom}_{[0\mathbf{T}_n]}(\mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes I), H_\bullet) \cong^{(2)}$$

$$\text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet \otimes I, H_\bullet) \cong^{(3)} \text{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet^I) \stackrel{(4)}{=} \text{Hom}_{[0\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, H_\bullet^I)$$

En (1) hemos utilizado la definición de  $G_\bullet \otimes I$

En (2) usamos la adjunción  $\mathcal{P}_n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightleftarrows [0\mathbf{T}_n] : J$

En (3) utilizamos la adjunción  $-\otimes I : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightleftarrows \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) : (-)^I$

En (4) utilizamos el lema 3.1.8, junto con el hecho de que  $[0\mathbf{T}_n]$  es una subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ . ■

**Corolario 3.1.12.** El funtor  $-\otimes I : [r\mathbf{T}_n] \rightarrow [r\mathbf{T}_n]$  es adjunto por la izquierda al funtor  $(-)^I : [r\mathbf{T}_n] \rightarrow [r\mathbf{T}_n]$ .

*Demostración:* Dados  $G_\bullet, H_\bullet \in [r\mathbf{T}_n]$  tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{[r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet \otimes I, H_\bullet) &= \text{Hom}_{[0\mathbf{T}_n]}(G_\bullet \otimes I, H_\bullet) \cong \text{Hom}_{[0\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, H_\bullet^I) \cong \\ &\cong \text{Hom}_{[r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, E_r(H_\bullet^I)) = \text{Hom}_{[r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, H_\bullet^I) \end{aligned}$$

**Proposición 3.1.13.** Dado  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathcal{P}_n(G_\bullet) \otimes I \cong \mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes I)$ .

*Demostración:* Tenemos las siguientes adjunciones:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) & & \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \\ \mathcal{P}_n \downarrow \uparrow J & & -\otimes I \downarrow \uparrow (-)^I \\ [0\mathbf{T}_n] & & \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \\ -\otimes I \downarrow \uparrow (-)^I & & \mathcal{P}_n \downarrow \uparrow J \\ [0\mathbf{T}_n] & & [0\mathbf{T}_n] \end{array}$$

Dado  $H_\bullet \in [{}_0\mathbf{T}_n]$  tenemos que  $J(H_\bullet^I) = (J(H_\bullet))^I$ , de donde deducimos que para un grupo simplicial  $G_\bullet$ ,  $\mathcal{P}_n(G_\bullet) \otimes I \cong \mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes I)$ . ■

**Proposición 3.1.14.** *Sea  $G_\bullet \in [{}_r\mathbf{T}_n]$  un objeto  $S$ -cofibrante. Entonces  $G_\bullet \otimes I$  es un cilindro para  $G_\bullet$  en  $[{}_r\mathbf{T}_n^S]$ .*

*Demostración:* Consideramos la factorización del morfismo codiagonal (en  $\text{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ )

$$G_\bullet \amalg G_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} G_\bullet \otimes I \xrightarrow{\sigma} G_\bullet$$

y le aplicamos el functor  $\mathcal{P}_n$ , con lo que obtenemos:

$$G_\bullet * G_\bullet \xrightarrow{i_0+i_1} G_\bullet \otimes I \xrightarrow{\mathcal{P}_n(\sigma)} G_\bullet$$

donde hemos denotado de nuevo  $i_0 + i_1$  a  $\mathcal{P}_n(i_0 + i_1)$ .

Puesto que  $\sigma$  es una equivalencia débil,  $\mathcal{P}_n(\sigma)$  es una  $S$ -equivalencia débil.

Veamos que cuando  $G_\bullet$  es  $S$ -cofibrante,  $i_0 + i_1$  es una  $S$ -cofibración. Supongamos en principio que  $G_\bullet = \mathcal{P}_n(F_\bullet)$  donde  $F_\bullet$  es un grupo simplicial libre  $r$ -reducido. Entonces,  $G_\bullet * G_\bullet = \mathcal{P}_n(F_\bullet) * \mathcal{P}_n(F_\bullet) = \mathcal{P}_n(F_\bullet \amalg F_\bullet)$ , y usando la proposición 3.1.14 obtenemos que  $G_\bullet \otimes I = \mathcal{P}_n(F_\bullet) \otimes I \cong \mathcal{P}_n(F_\bullet \otimes I)$ , lo que nos dice que  $i_0 + i_1 : G_\bullet * G_\bullet \rightarrow G_\bullet \otimes I$  es la imagen bajo  $\mathcal{P}_n$  del mismo morfismo  $F_\bullet \amalg F_\bullet \rightarrow F_\bullet \otimes I$ , y éste es una  $S$ -cofibración, pues  $F_\bullet$  es cofibrante. Dado que  $\mathcal{P}_n$  preserva cofibraciones, deducimos que  $i_0 + i_1$  es una  $S$ -cofibración.

Si ahora  $G_\bullet$  es un retracto de  $G'_\bullet = \mathcal{P}_n(F_\bullet)$  donde  $F_\bullet$  es un grupo simplicial libre  $r$ -reducido se tiene que  $G_\bullet * G_\bullet$  es un retracto de  $G'_\bullet * G'_\bullet$  y  $G_\bullet \otimes I$  es un retracto de  $G'_\bullet \otimes I$  (ya que  $-\otimes I$  es un functor), y por tanto  $i_0 + i_1$  es un retracto de  $i'_0 + i'_1$ ; como este último morfismo es una  $S$ -cofibración, también lo es  $i_0 + i_1$ . ■

Notemos que dados  $G_\bullet, H_\bullet \in [{}_r\mathbf{T}_n]$ , dos morfismos  $f_\bullet, g_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  son simplicialmente homotópicos si existe un morfismo simplicial  $k_\bullet : G_\bullet \otimes I \rightarrow H_\bullet$  tal que  $k_\bullet i_0 = f_\bullet$  y  $k_\bullet i_1 = g_\bullet$ . Usando la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$ , ésto es equivalente a dar un morfismo en  $[{}_0\mathbf{T}_n]$   $\underline{k}_\bullet : G_\bullet \otimes I \rightarrow H_\bullet$  (éste morfismo claramente está en  $[{}_r\mathbf{T}_n]$ ) tal que  $\underline{k}_\bullet i_0 = f_\bullet$  y  $\underline{k}_\bullet i_1 = g_\bullet$ , o un morfismo  $\underline{k}_\bullet' : G_\bullet \rightarrow H_\bullet^I$  tal que  $\partial_0 \underline{k}_\bullet' = f_\bullet$  y  $\partial_1 \underline{k}_\bullet' = g_\bullet$ .

Podemos también definir el functor  $\underline{\Sigma} : [{}_r\mathbf{T}_n] \rightarrow [{}_r\mathbf{T}_n]$  como el functor que asocia a cada  $G_\bullet \in [{}_r\mathbf{T}_n]$  el conúcleo (hecho en esta categoría) del morfismo  $G_\bullet * G_\bullet \rightarrow G_\bullet \otimes I$ , y puesto que  $\mathcal{P}_n$  preserva colímites, es claro que  $\underline{\Sigma} G_\bullet \cong \mathcal{P}_n(\Sigma G_\bullet)$ .

El functor  $\underline{\Sigma}$  que acabamos de definir es claramente adjunto al functor  $\underline{\Omega}$ , e induce el functor suspensión en la categoría  $Ho([{}_r\mathbf{T}_n^S])$ .

### 3.2 Estructura simplicial de $[_r\mathbf{T}_n]$

El objetivo de esta sección es probar que la estructura que acabamos de dar a la categoría  $[_r\mathbf{T}_n]$  (cuando  $S = \{1\}$ ) es una estructura simplicial en el sentido recordado en la sección 1.4.4.

Comenzamos robando que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  con la  $\bar{r}$ -estructura (ver sección 2.1) es una categoría simplicial de modelos cerrada. Puesto que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  con la estructura clásica lo es, sólo necesitamos probar las condiciones de compatibilidad entre la estructura de modelos (la  $\bar{r}$ -estructura) y la estructura simplicial. Esta compatibilidad vimos (ver sección 1.4.4) que se podía enunciar de tres maneras equivalentes. Demostraremos que se tiene la referente a las cofibraciones. Debemos entonces probar que dada una  $\bar{r}$ -cofibración  $i_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  de grupos simpliciales, el morfismo  $u_\bullet + v_\bullet$

$$\begin{array}{ccc}
 G_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n] & \longrightarrow & G_\bullet \otimes \Delta[n] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n] & \longrightarrow & G_\bullet \otimes \Delta[n] \amalg_{G_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n]} H_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n] \\
 & \searrow^{u_\bullet} & \searrow^{v_\bullet} \\
 & & H_\bullet \otimes \Delta[n]
 \end{array}$$

$\xrightarrow{u_\bullet + v_\bullet}$

es una  $\bar{r}$ -cofibración y el morfismo  $s_\bullet + t_\bullet$

$$\begin{array}{ccc}
 G_\bullet \otimes \Delta[1, k] & \longrightarrow & G_\bullet \otimes \Delta[1] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_\bullet \otimes \Delta[1, k] & \longrightarrow & G_\bullet \otimes \Delta[1] \amalg_{G_\bullet \otimes \Delta[1, k]} H_\bullet \otimes \Delta[1, k] \\
 & \searrow^{s_\bullet} & \searrow^{t_\bullet} \\
 & & H_\bullet \otimes \Delta[1]
 \end{array}$$

$\xrightarrow{s_\bullet + t_\bullet}$

$k = 0, 1$

es una  $\bar{r}$ -cofibración trivial.

Si además  $i_\bullet$  es una equivalencia débil, entonces  $u_\bullet + v_\bullet$  debe serlo.

Supongamos entonces que  $i_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración, y para simplificar, supondremos que es una aplicación libre. Entonces  $i_\bullet$  es una cofibración, y como  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ , con la estructura clásica es una categoría simplicial de

modelos cerrada, deducimos que  $u_\bullet + v_\bullet$  es una cofibración de grupos simpliciales. Debemos probar entonces (ver proposición 2.1.8) que  $tr^{r-1}(u_\bullet + v_\bullet)$  es un isomorfismo y que dado  $y \in (H_\bullet \otimes \Delta[n])_r$  existen  $x_0, \dots, x_r \in G_\bullet \otimes \Delta[n] \amalg_{G_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n]} H_\bullet \otimes \dot{\Delta}[n]$  tales que  $(x_0, \dots, x_r, y) \in \Delta^{r+1}(H_\bullet \otimes \Delta[n])$  (donde para simplificar, hemos identificado  $x_i$  con su imagen por  $u_r + v_r$ , ya que  $u_r + v_r$  es inyectiva).

Veamos la primera condición, para lo cual escribamos el diagrama (I) en dimensión  $q < r$ , teniendo en cuenta que entonces  $i_q$  es un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_q} G_q & \xlongequal{\quad} & \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_q} G_q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_q} G_q & \xlongequal{\quad} & \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_q} G_q \\
 & \searrow^{u_q} & \swarrow_{v_q} \\
 & & \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_q} G_q \\
 & \searrow^{u_q} & \swarrow_{u_q + v_q} \\
 & & \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_q} G_q
 \end{array}$$

de donde deducimos fácilmente que  $u_q + v_q$  es un isomorfismo para  $q < r$ .

Necesitamos probar la segunda condición. Escribimos el diagrama (I) en dimensión  $r$  donde representamos  $H_r$  como  $G_r \amalg FU_r$ . y la aplicación  $i_r$  es la inclusión.

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_r} G_r & \xrightarrow{\quad} & \left[ \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_r} G_r \right] \amalg \left[ \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_r} FU_r \right] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_r} G_r & \xrightarrow{\quad} & \left[ \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_r} (G_r \amalg FU_r) \right] \amalg \left[ \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_r - (\dot{\Delta}[n])_r} G_r \right] \\
 \searrow^{u_r} & & \downarrow^{u_r + v_r} \\
 \left[ \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_r} (G_r \amalg FU_r) \right] \amalg \left[ \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_r - (\dot{\Delta}[n])_r} G_r \right] & & \left[ \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_r - (\dot{\Delta}[n])_r} FU_r \right] \\
 & & \swarrow^{v_r}
 \end{array}$$

Es suficiente probar que la condición se verifica para los elementos básicos de  $\coprod_{\tau \in (\Delta[n])_r - (\dot{\Delta}[n])_r} FU_r$ . Dado un elemento  $y \in G_r \amalg FU_r$ , llamaremos  $y^\tau$  al elemento  $u_\tau y$ , donde  $u_\tau$  es la inyección correspondiente al elemento  $\tau$ .

Sea  $y \in U_r$  y  $\tau \in (\Delta[n])_r - (\dot{\Delta}[n])_r$ . Como  $i_\bullet$  es una cofibración existen  $x_0, \dots, x_r \in G_r$  tales que  $(x_0, \dots, x_r, y) \in \Delta^{r+1}(G_\bullet \amalg FU_r)$ . Sean  $x'_i = x_i^{s_r d_i \tau}$ ,  $0 \leq i \leq r$ . Entonces es claro que

$$x'_i \in \left[ \coprod_{\tau \in (\dot{\Delta}[n])_r} (G_r \amalg FU_r) \right] \amalg \left[ \coprod_{\tau \in (\Delta[n])_r - (\dot{\Delta}[n])_r} G_r \right]$$

Además, si  $0 \leq i < j \leq r$ , tenemos que  $d_i x'_j = d_i x_j^{s_r d_j \tau} = (d_i x_j)^{d_i s_r d_j \tau} = (d_{j-1} x_i)^{s_{r-1} d_i d_j \tau} = (d_{j-1} x_i)^{d_{j-1} s_r d_i \tau} = d_{j-1} x'_i$  y que  $d_i y^\tau = (d_i y)^{d_i \tau} = (d_r x_i)^{d_r s_r d_i \tau} = d_r x'_i$ , con lo que probamos que  $(x'_0, \dots, x'_r, y^\tau) \in \Delta^{r+1}((G_\bullet \amalg FU_\bullet) \otimes \Delta[n])$ .

Por tanto, concluimos que  $u_\bullet + v_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración.

Se demuestra de forma análoga que  $s_\bullet + t_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración. Como además  $s_\bullet + t_\bullet$  es una equivalencia débil, concluimos que  $s_\bullet + t_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración trivial.

Por último, si  $i_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración trivial, entonces es una cofibración trivial, luego  $u_\bullet + v_\bullet$  es también cofibración trivial, lo que implica que es una  $\bar{r}$ -equivalencia débil. Hemos probado ya que es  $\bar{r}$ -cofibración, luego  $u_\bullet + v_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -cofibración trivial.

Todo ésto se resume en la siguiente:

**Proposición 3.2.1.** *La categoría  $\text{Simp}(\mathbf{Gp})$  con la  $\bar{r}$ -estructura (ver sección 2.1) es una categoría simplicial de modelos cerrada.*

Demostremos a continuación que  ${}_{[r}\mathbf{T}_n]$  con la estructura dada en la definición 3.1.2 (en el caso de que  $S = \{1\}$ ) es una categoría simplicial de modelos cerrada.

Empezamos con la siguiente proposición, que es una generalización del lema 3.1.8.

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $H_\bullet \in {}_{[0}\mathbf{T}_n] \subseteq \text{Simp}(\mathbf{Gp})$  y  $K_\bullet \in \text{Simp}(\text{Set})$ . Entonces  $H_\bullet^{K_\bullet} \in {}_{[0}\mathbf{T}_n]$  (cuando  $K_\bullet = I$  obtenemos el lema 3.1.8)*

*Demostración:* Probemos que  $N_{n+1}(H_\bullet^{K_\bullet}) = 0$ . Para ésto, tomemos  $f_\bullet \in N_{n+1}(H_\bullet^{K_\bullet})$  y veamos que  $f_\bullet$ , que es una aplicación simplicial  $f_\bullet : K_\bullet \times \Delta[n+1] \rightarrow H_\bullet$ , es la aplicación constantemente cero.

En la demostración usaremos que para  $0 \leq i \leq n+1$  se verifica que  $d_i \Delta_{n+1} = \delta_i \Delta_n$  y que para  $0 \leq j \leq n$ ,  $d_j \delta_{n+1} \Delta_n = \delta_j d_n \Delta_n$  donde  $\delta_i$  son las aplicaciones simpliciales definidas en la sección 1.2.2 y  $\Delta_n$  es el  $n$ -símplice estándar. Su comprobación puede hacerse fácilmente de forma análoga a como se hizo la del lema 1.2.9.

Haremos la demostración en varios pasos:

-  $f_{n+1}(x, \Delta_{n+1}) = 0$  para cualquier  $x \in K_{n+1}$ .

En efecto, sea  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Tenemos que  $d_i(f_{n+1}(x, \Delta_{n+1})) = f_n(d_i x, d_i \Delta_{n+1}) = f_n(d_i x, \delta_i(\Delta_n)) = (d_i f_\bullet)_n(d_i x, \Delta_n) = 0$ , ya que  $f_\bullet \in N_{n+1}(H_\bullet^{K_\bullet})$ . De aquí deducimos que  $f_{n+1}(x, \Delta_{n+1}) \in N_{n+1}(H_\bullet)$ , luego  $f_{n+1}(x, \Delta_{n+1}) = 0$ .

- Para  $j$  tal que  $0 \leq j \leq n$  y para cada  $x \in K_{n+1}$ ,  $f_{n+1}(x, s_j(\delta_{n+1}\Delta_n)) = 0$ .

En efecto, supongamos que  $i < j$ . En este caso,

$$\begin{aligned} d_i f_{n+1}(x, s_j(\delta_{n+1}\Delta_n)) &= f_n(d_i x, d_i s_j(\delta_{n+1}\Delta_n)) = \\ &= f_n(d_i x, s_{j-1} d_i(\delta_{n+1}\Delta_n)) = f_n(d_i x, s_{j-1} \delta_i(d_n \Delta_n)) = \\ &= f_n(d_i x, \delta_i s_{j-1}(d_n \Delta_n)) = (d_i f_\bullet)_n(d_i x, s_{j-1}(d_n \Delta_n)) = 0 \end{aligned}$$

Si  $j+1 < i \leq n$  se razona de forma análoga

Para  $i = j, j+1$  tenemos que

$$\begin{aligned} d_i f_{n+1}(x, s_j(\delta_{n+1}\Delta_n)) &= f_n(d_i x, d_i s_j(\delta_{n+1}\Delta_n)) = f_n(d_i x, \delta_{n+1}\Delta_n) = \\ &= f_n(d_i x, (0, 1, \dots, n)) = f_n(d_{n+1} s_n d_i x, d_{n+1}\Delta_{n+1}) = \\ &= d_{n+1}(f_{n+1}(s_n d_i x, \Delta_{n+1})) = 0. \end{aligned}$$

En definitiva  $f_{n+1}(x, s_j(\delta_n \Delta_n)) \in N_{n+1}(H_\bullet) = 0$ .

-  $f_n(x, \tau) = 0$  para cualesquiera  $x \in K_n$ ,  $\tau \in (\Delta[n+1])_n$

Ésto es claro pues todo elemento de  $(\Delta[n+1])_n$  salvo el  $(0, 1, \dots, n)$  pertenece a  $\delta_i(\Delta[n]_n)$  para algún  $i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , y por tanto

$$f_n(x, \tau) = f_n(x, \delta_i(\tau')) = (d_i f_\bullet)_n(x, \tau') = 0$$

De aquí se deduce que  $f_q = 0$  para  $q \leq n$ .

-  $f_q = 0, q \geq n$ .

Ésto lo probamos por inducción. Para  $q = n$  ya lo tenemos. Suponemos que  $f_q = 0$  y sean  $(x, \tau) \in K_{q+1} \times (\Delta[n+1])_{q+1}$ . Entonces,  $d_i(f_{q+1}(x, \tau)) = f_q(d_i x, d_i \tau) = 0$ , luego  $f_{q+1}(x, \tau) \in N_{q+1}(H_\bullet)$  de donde deducimos que  $f_{q+1}(x, \tau) = 0$ .

Todo esto prueba que  $N_{n+1}(H_\bullet^{K_\bullet}) = 0$ . De forma análoga se demuestra que para  $q \geq n+2$ ,  $N_q(H_\bullet^{K_\bullet}) = 0$  y por tanto que  $H_\bullet^{K_\bullet} \in [0\mathbf{T}_n]$ . ■

Esta proposición nos permite definir la estructura simplicial en  $[_r\mathbf{T}_n]$ .

Si  $G_\bullet, H_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$  definimos  $\underline{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, H_\bullet)$  como el conjunto simplicial  $\underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet)$ . Ésto define un funtor

$$\underline{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n]}(-, -) : [_r\mathbf{T}_n]^{op} \times [_r\mathbf{T}_n] \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$$

Si ahora  $G_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$  y  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , definimos  $G_\bullet \otimes K_\bullet = \mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes K_\bullet)$ . Puesto que  $G_\bullet \otimes K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$  obtenemos que  $G_\bullet \otimes K_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$  y, por tanto, tenemos un funtor:

$$-\otimes - : [_r\mathbf{T}_n] \times \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) \rightarrow [_r\mathbf{T}_n]$$

Dualmente, dado  $H_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$  y  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  definimos  $H_\bullet^{K_\bullet}$  como  $H_\bullet^{K_\bullet} = E_r(H_\bullet^{K_\bullet})$ . La proposición 3.2.2 nos asegura que  $H_\bullet^{K_\bullet} \in [_r\mathbf{T}_n]$  y por tanto tenemos un funtor

$$(-)^{(-)} : \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})^{op} \times [_r\mathbf{T}_n] \rightarrow [_r\mathbf{T}_n]$$

y tenemos definidas aplicaciones simpliciales

$$\alpha_\bullet : K_\bullet \rightarrow \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, G_\bullet \otimes K_\bullet) \rightarrow \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, \mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes K_\bullet)) = \underline{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, G_\bullet \otimes K_\bullet)$$

$$\beta_\bullet : K_\bullet \rightarrow \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(H_\bullet^{K_\bullet}, H_\bullet) \rightarrow \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(E_r(H_\bullet^{K_\bullet}), H_\bullet) = \underline{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n]}(H_\bullet^{K_\bullet}, H_\bullet)$$

Veamos que los funtores  $-\otimes K_\bullet$  y  $(-)^{K_\bullet}$  son "simplicialmente" adjuntos, esto es, que dados  $G_\bullet, H_\bullet \in [_r\mathbf{T}_n]$  se tiene que

$$\underline{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet \otimes K_\bullet, H_\bullet) \cong \underline{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, H_\bullet^{K_\bullet})$$

$$\begin{aligned} & [\underline{Hom}_{[_r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet \otimes K_\bullet, H_\bullet)]_q = \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}((G_\bullet \otimes K_\bullet) \otimes \Delta[q], H_\bullet) = \\ & = \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes K_\bullet) \otimes \Delta[q], H_\bullet) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes K_\bullet), H_\bullet^{\Delta[q]}) = \\ & = \underline{Hom}_{[_0\mathbf{T}_n]}(\mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes K_\bullet), H_\bullet^{\Delta[q]}) \cong \\ & \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet \otimes K_\bullet, H_\bullet^{\Delta[q]}) \cong \\ & \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, (H_\bullet^{\Delta[q]})^{K_\bullet}) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet^{\Delta[q] \times K_\bullet}) \cong \\ & \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, (H_\bullet^{K_\bullet})^{\Delta[q]}) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet \otimes \Delta[q], H_\bullet^{K_\bullet}) \cong \\ & \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r}(G_\bullet \otimes \Delta[q], E_r(H_\bullet^{K_\bullet})) = \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet \otimes \Delta[q], H_\bullet^{K_\bullet}) = \end{aligned}$$

$$= [\underline{Hom}_{[r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, H_\bullet^{K_\bullet})]_q$$

Tenemos pues que  $[r\mathbf{T}_n]$  es una categoría simplicial y que para cada  $G_\bullet, H_\bullet \in [r\mathbf{T}_n]$  y cada  $K_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  tenemos definido  $G_\bullet \otimes K_\bullet$  y  $H_\bullet^{K_\bullet}$ . Queda por tanto ver la compatibilidad entre las dos estructuras (la estructura simplicial y la estructura de modelos), lo que hacemos en el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.3.** *Para cada  $r, n; 0 \leq r \leq n$  la categoría  $[r\mathbf{T}_n]$  con la estructura de modelos dada en la definición 3.1.2, y con los funtores*

$$\underline{Hom}_{[r\mathbf{T}_n]}(G_\bullet, H_\bullet) = \underline{Hom}_{\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})}(G_\bullet, H_\bullet)$$

$$G_\bullet \otimes K_\bullet = \mathcal{P}_n(G_\bullet \otimes K_\bullet) \quad \text{y} \quad H_\bullet^{K_\bullet} = E_r(H_\bullet^{K_\bullet})$$

es una categoría simplicial de modelos cerrada

*Demostración:*

Para probar el teorema sólo necesitamos comprobar que dado un morfismo un morfismo  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  que sea una fibration (trivial) en  $[r\mathbf{T}_n]$  entonces el morfismo  $\gamma_\bullet : G_\bullet^{\Delta[q]} \rightarrow G_\bullet^{\Delta[q]} \times_{H_\bullet^{\Delta[q]}} H_\bullet^{\Delta[q]}$  es una fibration (trivial), y  $\gamma'_\bullet : G_\bullet^{\Delta[1]} \rightarrow G_\bullet^{\Delta[1,k]} \times_{H_\bullet^{\Delta[1,k]}} H_\bullet^{\Delta[1]}$  es una fibration trivial.

Suponemos pues que  $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$  es una fibration, y tenemos que por la definición 3.1.2  $f_\bullet$  es una fibration en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ , y por la proposición 2.1.11  $f_\bullet$  es una  $\bar{r}$ -fibration. Puesto que  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  es una categoría simplicial de modelos cerrada con la  $\bar{r}$ -estructura deducimos que el morfismo  $\delta_\bullet$

$$\begin{array}{ccc}
 G_\bullet^{\Delta[q]} & & \\
 \delta_\bullet \swarrow \cdots & \searrow & \\
 G_\bullet^{\Delta[q]} \times_{H_\bullet^{\Delta[q]}} H_\bullet^{\Delta[q]} & \longrightarrow & G_\bullet^{\Delta[q]} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_\bullet^{\Delta[q]} & \longrightarrow & H_\bullet^{\Delta[q]}
 \end{array}$$

es una  $\bar{r}$ -fibración. Aplicamos  $E_r$  al anterior diagrama y obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 G_{\bullet}^{\Delta[q]} & & \\
 \downarrow E_r \delta_{\bullet} & \searrow & \\
 E_r \left[ G_{\bullet}^{\Delta[q]} \times_{H_{\bullet}^{\Delta[q]}} H_{\bullet}^{\Delta[q]} \right] & \xrightarrow{\quad} & G_{\bullet}^{\Delta[q]} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\bullet}^{\Delta[q]} & \xrightarrow{\quad} & H_{\bullet}^{\Delta[q]}
 \end{array}$$

Puesto que  $E_r$  es adjunto por la derecha (al functor inclusión) preserva límites, en particular, cuadrados cartesianos, luego

$$E_r \left[ G_{\bullet}^{\Delta[q]} \times_{H_{\bullet}^{\Delta[q]}} H_{\bullet}^{\Delta[q]} \right] = G_{\bullet}^{\Delta[q]} \times_{H_{\bullet}^{\Delta[q]}} H_{\bullet}^{\Delta[q]}$$

de donde  $E_r \delta_{\bullet} = \gamma_{\bullet}$ . Sabemos (ver proposición 2.1.12) que  $E_r$  preserva fibraciones (si consideramos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  la  $\bar{r}$ -estructura) de donde  $\gamma_{\bullet}$  es una fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_r$ . Si recordamos la definición 3.1.2 vemos que estamos diciendo justamente que  $\gamma_{\bullet}$  es una fibración en  $[_r\mathbf{T}_n]$ .

El razonamiento para comprobar que  $\gamma_{\bullet}$  es una fibración trivial cuando lo sea  $f_{\bullet}$  es análogo

De forma semejante se prueba que  $\gamma'_{\bullet}$  es una fibración trivial en  $[_r\mathbf{T}_n]$ . ■

Como consecuencia de esto tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.4.** *La categoría de homotopía  $Ho \left( [_r\mathbf{T}_n^S] \right)$  es equivalente a la categoría cuyos objetos son los retracts de los objetos  $\mathcal{P}_n(F_{\bullet})$  donde  $F_{\bullet}$  es un grupo simplicial  $\bar{r}$ -cofibrante con grupos de homotopía  $S$ -únicamente divisibles y cuyos morfismos son las clases de homotopía simplicial de morfismos de grupos simpliciales.*

*Demostración:* Sabemos (ver corolario 3.1.4 y proposición 3.1.7) que los objetos fibrantes y cofibrantes son los retracts de los grupos  $\mathcal{P}_n(F_{\bullet})$  donde  $F_{\bullet}$  es un grupo simplicial  $\bar{r}$ -cofibrante y con grupos de homotopía  $S$ -únicamente divisibles.

Si  $G_{\bullet}$  es un grupo fibrante (resp. cofibrante) en  $[_r\mathbf{T}_n^S]$ , entonces es fibrante (resp. cofibrante) en  $[_r\mathbf{T}_n]$  cuando  $S = \{1\}$ , y como las construcciones de espacio de arcos y cilindro coinciden (para estos objetos) en las categorías de modelos  $[_r\mathbf{T}_n]$  y  $[_r\mathbf{T}_n^S]$  tenemos que el conjunto  $Hom_{Ho([_r\mathbf{T}_n^S])}(G_{\bullet}, H_{\bullet})$ , que es

igual al conjunto de clases de homotopía por la derecha (o por la izquierda) en  $[_r\mathbf{T}_n^S]$  de morfismos de  $G_\bullet$  a  $H_\bullet$ , coincide con el conjunto de clases de homotopía por la derecha (o por la izquierda) en  $[_r\mathbf{T}_n]$  de morfismos de  $G_\bullet$  hasta  $H_\bullet$ . Dado que  $[_r\mathbf{T}_n]$  es una categoría simplicial de modelos cerrada (ver teorema 3.2.3) las relaciones de homotopía por la izquierda por la derecha y simplicial coinciden (ver sección 1.4.4) para  $G_\bullet$  cofibrante y  $H_\bullet$  fibrante.

Por tanto,  $Hom_{Ho([_r\mathbf{T}_n^S])}(G_\bullet, H_\bullet)$  es el conjunto de clases de homotopía simplicial de morfismos de grupos simpliciales de  $G_\bullet$  a  $H_\bullet$ . ■

### 3.3 Equivalencia de las categorías $[_r\mathbf{T}_n]$ con otras categorías notables

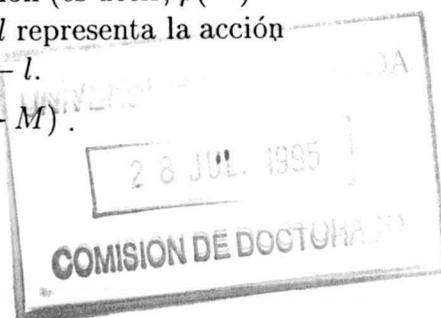
En esta sección estudiamos las categorías  $[_r\mathbf{T}_n]$  para valores particulares de  $r$  y  $n$ , mostrando su equivalencia con otras categorías bien conocidas en las que, posteriormente, desarrollaremos la correspondiente teoría de homotopía.

El primer caso a estudiar es aquel en que  $r = n$ . Las categorías  $[_r\mathbf{T}_r]$  son equivalentes a la categoría de grupos (abelianos si  $r \geq 1$ ) y, como es bien conocido la equivalencia está dada asociando a cada  $G_\bullet \in [_r\mathbf{T}_r]$  el grupo  $\pi_r(G_\bullet)$ . El cuasi-inverso asocia a cada grupo  $\pi$  el complejo de Eilenberg-MacLane  $K(\pi, r)$ .

Si  $r = 0$  (en cuyo caso  $S = \{1\}$ ) la estructura de modelos en  $[_0\mathbf{T}_0]$  proporciona una estructura de modelos en la categoría de grupos en la que las equivalencias débiles son los isomorfismos y todo morfismo es una fibrición y una cofibración (ver Ejemplo 7 sección 1.4.1). Para  $r \geq 1$  la estructura de modelos en  $[_r\mathbf{T}_r]$  determina una estructura de modelos en la categoría de grupos abelianos en la que las equivalencias débiles son los morfismos  $f : A \rightarrow B$  tales que  $S^{-1}f : S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B$  es un isomorfismo y las fibriciones son los morfismos  $f$  tales que  $K = Ker(f)$  es  $S$ -únicamente divisible (i.e.  $K \cong S^{-1}(K)$ ) y  $C = Coker(f)$  es  $S$ -libre de torsión (i.e.  $C \rightarrow S^{-1}C$  es inyectivo). Nótese que las fibriciones triviales son justamente los isomorfismos y por tanto todo morfismo es una cofibración.

A continuación estudiaremos el caso  $r = 0, n = 1$ . Para ello empezaremos recordando la categoría de módulos cruzados de grupos, a la que denotaremos  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$ . Un objeto de esta categoría es una pareja de grupos  $L, M$  en la que  $M$  actúa sobre  $L$  y un morfismo  $\rho : L \rightarrow M$  que es de  $M$ -grupos si consideramos que  $M$  actúa sobre sí mismo por conjugación (es decir,  $\rho^{(m)l} = m + \rho(l) - m$  para cualesquiera  $l \in L, m \in M$ , donde  ${}^m l$  representa la acción de  $M$  sobre  $L$ ), y verificando además que  $\rho^{(l)l'} = l + l' - l$ .

Un objeto  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  lo representaremos  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$ .



Dados dos módulos cruzados  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$ ,  $\mathcal{L}' : (L' \xrightarrow{\rho'} M')$ , un morfismo  $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  es un diagrama conmutativo de homomorfismos de grupos:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho} & M \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ L' & \xrightarrow{\rho'} & M' \end{array}$$

en el que  $\phi_1(m'l) = \phi_0(m)\phi_1(l)$

Esta categoría es equivalente a la categoría  $[_0\mathbf{T}_1]$  y la equivalencia está dada por el funtor  $\Psi : [_0\mathbf{T}_1] \rightarrow \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  cuya definición recordamos a continuación.

Dado  $G_\bullet \in [_0\mathbf{T}_1]$ ,  $\Psi(G_\bullet)$  es el módulo cruzado

$$\Psi(G_\bullet) : (N_1(G_\bullet) \xrightarrow{d_1} G_0)$$

con la acción dada por  ${}^x y = s_0 x + y - s_0 x$ .

Su cuasi-inverso, al que llamaremos  $\Psi^{-1}$  asocia a cada módulo cruzado  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$  el grupo simplicial

$$\text{cosk}^2 \left[ \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{s_1} & \\ \Lambda_2 & \xrightleftharpoons[d_0]{s_0, d_2} & L \times M \xrightarrow{d_1} M \\ & \xrightarrow{s_0} & \end{array} \right]$$

donde  $L \times M$  es el producto semidirecto de  $L$  y  $M$ ,

$$\Lambda_2 = \{((l, m), (l', m)) \in (L \times M)^2\},$$

y los operadores cara y degeneración están dados:

$$d_0(l, m) = m; \quad d_1(l, m) = \rho(l) + m; \quad s_0(m) = (0, m)$$

$$d_0((l, m), (l', m)) = (l, m); \quad d_1((l, m), (l', m)) = (l', m)$$

$$d_2((l, m), (l', m)) = (l' - l, \rho(l) + m)$$

$$s_0(l, m) = ((l, m), (l, m)); \quad s_1(l, m) = ((0, m), (l, m))$$

Por otra parte, la categoría  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  es también equivalente a la categoría  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  en la que los objetos son categorías (grupoides) internos en grupos (ver sección 1.1.2), es decir, categorías (o grupoides) en los que el conjunto de objetos y de morfismos tiene estructura de grupo y las aplicaciones dominio, codominio, identidad y composición son morfismos de grupos. Recordemos

que una categoría interna en grupos puede ser dada como un diagrama en

grupos  $A \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O$  donde  $sI = tI = Id_O$  y  $[Ker s, Ker t] = 0$ , en cuyo caso, la composición de dos elementos  $x, y \in A$  tales que  $s(x) = t(y)$  viene dada por  $x \circ y = x - Isx + y = y - Ity + x$ . Es fácil comprobar que en este caso,  $x^{-1} = Isx - x + Itx$  es el inverso de  $x$  para la composición.

Los objetos de esta categoría se suelen llamar cat-grupos

La equivalencia entre  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  viene dada por el funtor  $\Phi : \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  que recordamos a continuación.

Dado  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$  un módulo cruzado,  $\Phi(\mathcal{L})$  es la siguiente categoría:

$$L \times M \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} M$$

donde  $s(l, m) = m$ ,  $t(l, m) = \rho(l) + m$ ,  $I(m) = (0, m)$ . Es fácil comprobar que la composición de dos morfismos es  $(l', m') \circ (l, m) = (l', \rho(l) + m) \circ (l, m) = (l' + l, m)$ .

Recíprocamente, dado  $\mathcal{G} : A \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O \in \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ ,  $\Phi^{-1}(\mathcal{G})$  es el

módulo cruzado  $Ker s \xrightarrow{t} O$  donde la acción viene dada por  ${}^x l = I(x) + l - I(x)$ .

Es claro que la composición  $\Phi\Psi : {}_{[0}\mathbf{T}_1] \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  es el funtor grupoide fundamental, mientras que su cuasi-inverso  $\Psi^{-1}\Phi^{-1} : \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow {}_{[0}\mathbf{T}_1]$  es el funtor nervio.

Consideramos ahora la categoría de 2-módulos cruzados reducidos (ver [27]), a la que denotaremos por  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  y en la que los objetos son módulos cruzados  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$ , junto con una aplicación  $\{-, -\} : M \times M \rightarrow L$  (a la que llamemos corchete) satisfaciendo:

1.  $\rho\{m, m'\} = m + m' - m - m'$ .
2.  $\{\rho(l), m\} = l - {}^m l$ .
3.  $\{m, \rho(l)\} = {}^m l - l$ .
4.  $\{m, m' + m''\} = \{m, m'\} + {}^{m'}\{m, m''\}$ .
5.  $\{m + m', m''\} = {}^m\{m', m''\} + \{m, m''\}$ .

Un morfismo  $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  entre dos objetos de esta categoría es un morfismo de módulos cruzados que verifica que  $\phi_1\{m, m'\} = \{\phi_0(m), \phi_0(m')\}$ .

Obviamente, existe un functor de olvido  $U : \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$ .

Las categorías  $[_1\mathbf{T}_2]$  y  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  son equivalentes, y la equivalencia entre ambas viene dada por el functor  $\Psi : [_1\mathbf{T}_2] \rightarrow \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$ , que a continuación detallamos.

Dado  $G_\bullet \in [_1\mathbf{T}_2]$ ,  $\Psi(G_\bullet)$  es el 2-módulo cruzado reducido

$$\Psi(G_\bullet) : (N_2(G_\bullet) \xrightarrow{d_2} N_1(G_\bullet), \{-, -\})$$

donde la aplicación  $\{-, -\} : N_1(G_\bullet) \times N_1(G_\bullet) \rightarrow N_2(G_\bullet)$  está definida por

$$\{x, x'\} = s_1(x - x' - x) + s_0x - s_1x' - s_0x.$$

El cuasi-inverso  $\Psi^{-1} : \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp}) \rightarrow [_1\mathbf{T}_2]$  es el siguiente functor:

Si  $(\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M), \{-, -\})$  es un 2-módulo cruzado reducido,  $\Psi^{-1}(\mathcal{L})$  es el siguiente grupo simplicial

$$\text{cosk}^3 \left[ \Lambda_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} (L \rtimes M) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} M \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 0 \right]$$

donde  $L \rtimes M$  es el producto semidirecto según la acción de  $M$  sobre  $L$ ,  $(L \rtimes M) \rtimes M$  es el producto semidirecto según la acción  ${}^m(l, m') = (l - \{m, m'\}, m + m' - m)$  y  $\Lambda_3$  está definido

$$\Lambda_3 = \{((l, m, m'), (l', m'', m'), (l'', m'' - m, m + m')) \in ((L \rtimes M) \rtimes M)^3\};$$

los operadores cara vienen dados por

$$d_0(l, m, m') = m'; \quad d_1(l, m, m') = m + m'; \quad d_2(l, m, m') = \rho(l) + m$$

y si  $\Gamma = ((l, m, m'), (l', m'', m'), (l'', m'' - m, m + m')) \in \Lambda_3$ ,  $d_0, d_1$  y  $d_2$  son las proyecciones y  $d_3(\Gamma) = (l'' + m'' - m l - l', \rho(l' + m'' - m - \rho(l)), \rho(l) + m)$ ; las degeneraciones son

$$s_0(m) = (0, 0, m); \quad s_1(m) = (0, m, 0)$$

$$s_0(l, m, m') = ((l, m, m'), (l, m, m'), (0, 0, m + m'))$$

$$s_1(l, m, m') = ((0, 0, m'), (l, m, m'), (l, m, m'))$$

$$s_2(l, m, m') = ((0, m', 0), (0, m + m', 0), (l, m, m'))$$

A su vez, estas dos categorías son equivalentes a la categoría  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  de categorías internas en grupos trenzadas (véase [27], [18])

Un objeto de  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  es una categoría interna en grupos

$$\mathcal{G} : A \begin{array}{c} \xleftarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{I} \end{array} O$$

junto con una aplicación  $O \times O \xrightarrow{\tau} A$  a la que se conoce como cuasi-simetría que verifica:

a)  $s\tau_{p,q} = p + q; \quad t\tau_{p,q} = q + p:$

b) Dados  $x, y \in A; \quad x : p \rightarrow p', \quad y : q \rightarrow q'$ , el siguiente cuadrado es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} p + q & \xrightarrow{x+y} & p' + q' \\ \tau_{p,q} \downarrow & & \downarrow \tau_{p',q'} \\ q + p & \xrightarrow{y+x} & q' + p' \end{array}$$

c) Axioma del hexágono:

Para cualesquiera  $p, q, n \in O$  los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} & p + (q + n) & \\ & \parallel & \\ (p + q) + n & \longleftarrow & p + (n + q) \\ \uparrow & & \parallel \\ n + (p + q) & & (p + q) + n \\ \parallel & \nearrow & \\ (n + p) + q & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & (p + q) + n & \\ & \parallel & \\ p + (q + n) & \longleftarrow & (q + p) + n \\ \uparrow & & \parallel \\ (q + n) + p & & q + (p + n) \\ \parallel & \nearrow & \\ q + (n + p) & & \end{array}$$

d)  $\tau_{0,p} = \tau_{p,0} = I_p$

Un morfismo  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  es un morfismo de cat-grupos que es compatible con  $\tau$ , en el sentido de que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} O \times O & \xrightarrow{\tau} & A \\ f_0 \times f_0 \downarrow & & \downarrow f \\ O' \times O' & \xrightarrow{\tau'} & A' \end{array}$$

La equivalencia entre  $2 - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  está dada por el funtor  $\Phi : 2 - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$ , que asocia a cada 2-módulo cruzado reducido  $(\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M), \{-, -\})$  el cat-grupo trenzado  $\Phi(\mathcal{L}) : (L \times M \xrightarrow[t]{s} M, \tau)$  donde  $L \times M \xrightarrow[t]{s} M$  es el cat-grupo asociado al módulo cruzado  $L \xrightarrow{\rho} M$ , y  $\tau : M \times M \rightarrow L \times M$  está dada por  $\tau_{m,m'} = (\{m', m\}, m + m')$ .

El inverso,  $\Phi^{-1}$ , asocia a cada cat-grupo trenzado  $\mathcal{G} : A \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{array} O$  el módulo cruzado asociado al cat-grupo  $\mathcal{G}$  junto con la aplicación

$$\begin{array}{l} O \times O \xrightarrow{\{-, -\}} \text{Ker } s \\ (p, q) \longmapsto \tau_{q,p} - I_p - I_q \end{array}$$

Por último, si se considera la subcategoría de  $2 - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  formada por aquellos 2-módulos cruzados reducidos  $(\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M), \{-, -\})$  tales que  $\{m, m'\} + \{m', m\} = 0$ , se tiene la categoría de módulos cruzados estables (ver [27]) a la que denotaremos  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ . El funtor  $\Phi$  nos da una equivalencia de categorías  $\Phi : \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ , donde  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  es la subcategoría de  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  formada por aquellos cat-grupos trenzados  $(\mathcal{G}, \tau)$  para los que  $\tau_{p,q}^{-1} = \tau_{q,p}$ . En este caso, la aplicación  $\tau$  diremos que es una simetría y los objetos de  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  les llamaremos cat-grupos simétricos.

A su vez estas categorías ( $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) son equivalentes a las categorías  $[_r\mathbf{T}_{r+1}]$ ,  $r \geq 2$ . La equivalencia  $\Psi : [_r\mathbf{T}_{r+1}] \rightarrow \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  es la que lleva cada grupo simplicial  $G_\bullet \in [_r\mathbf{T}_{r+1}]$  en el módulo cruzado estable  $N_{r+1}(G_\bullet) \xrightarrow{d_{r+1}} N_n(G_\bullet)$  con la acción definida  $xy = s_r x + y - s_r x$ , y la aplicación  $\{-, -\} : N_n(G_\bullet) \times N_n(G_\bullet) \rightarrow N_{n+1}(G_\bullet)$  dada por:

$$\{x, x'\} = s_{r-1}x' + s_r x - s_{r-1}x' + s_r(x' - x - x')$$

Aparte de todo ésto, tenemos el funtor  $\Omega' : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  (ver sección 1.4.3). Este funtor, restringido a  $[_r\mathbf{T}_{r+1}]$  nos da un funtor  $\Omega' : [_r\mathbf{T}_{r+1}] \rightarrow [_{r-1}\mathbf{T}_r]$ ,  $\forall r \geq 1$ . Ésto nos da un diagrama conmutativo de funtores

en el que todas las flechas horizontales son equivalencias de categorías:

$$\begin{array}{ccccc}
 [r\mathbf{T}_{r+1}] & \xrightarrow{\Psi} & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \\
 \Omega' \downarrow & & \parallel & & \parallel \\
 [r-1\mathbf{T}_r] & \xrightarrow{\Psi} & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 [3\mathbf{T}_4] & \xrightarrow{\Psi} & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \\
 \Omega' \downarrow & & \parallel & & \parallel \\
 [2\mathbf{T}_3] & \xrightarrow{\Psi} & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \\
 \Omega' \downarrow & & \text{In} \downarrow & & \text{In} \downarrow \\
 [1\mathbf{T}_2] & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp}) \\
 \Omega' \downarrow & & U \downarrow & & U \downarrow \\
 [0\mathbf{T}_1] & \xrightarrow{\Psi} & \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})
 \end{array}$$

Podemos ver entonces el functor  $\Omega' : [r\mathbf{T}_{r+1}] \rightarrow [r-1\mathbf{T}_r]$  como una equivalencia de categorías si  $r \geq 3$ , como un encaje pleno para  $r = 2$ , y como un functor de olvido para  $r = 1$ .

Notemos que puesto que las categorías  $[r\mathbf{T}_{r+1}]$  son todas categorías de modelos cerradas, también lo son las categorías siguientes:

$\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$ ,  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ .

Es importante observar que, aunque en principio tenemos en  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  infinitas estructuras de modelos (una para cada  $r \geq 2$ ), sin embargo, puesto que dado un morfismo  $f_{\bullet} \in [r\mathbf{T}_{r+1}]$  se tiene que  $f_{\bullet}$  es una fibration (resp. equivalencia débil) si y sólo si lo es  $\Omega' f_{\bullet}$ , deducimos que todas las estructuras dadas en  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  coinciden. Además tenemos que un morfismo  $f_{\bullet} \in \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $f_{\bullet} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) es una  $S$ -fibración o  $S$ -equivalencia débil si y sólo si  $\text{In}(f_{\bullet})$  lo es en  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$ ). Análogamente, si  $S = \{1\}$ , un morfismo  $f_{\bullet} \in \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $f_{\bullet} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$ ) es una fibration o equivalencia débil si y sólo si  $U(f_{\bullet})$  lo es en  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ ).

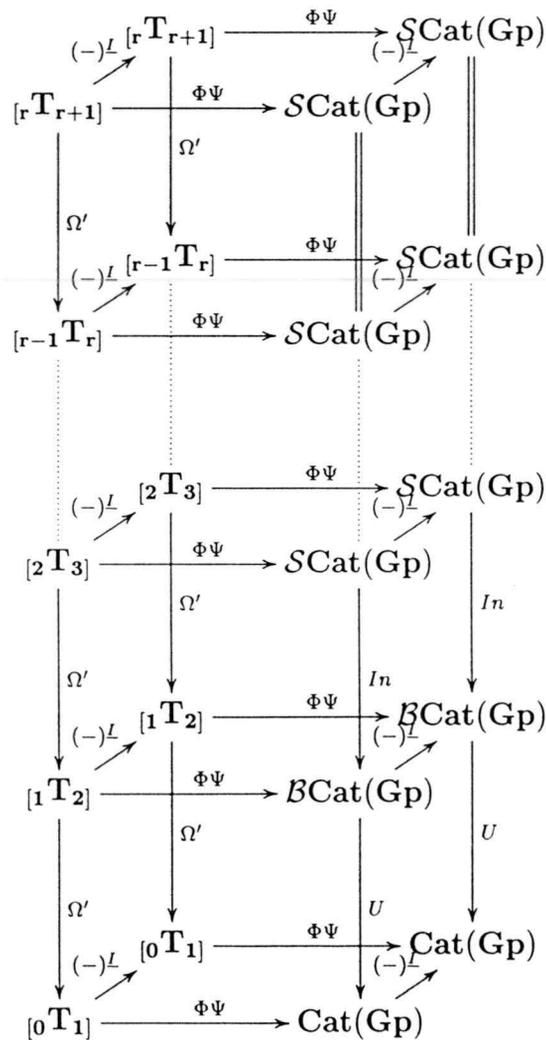
En definitiva tenemos que la  $S$ -estructura en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  está determinada por la  $S$ -estructura de  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (por la de  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  o  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  si  $S = \{1\}$ ).

### 3.4 Teoría de homotopía en categorías internas en grupos (trenzadas o simétricas)

Nos disponemos ahora a estudiar con cierto detalle la teoría de homotopía asociada a la estructura de modelos en cada una de las categorías siguientes:

$$\text{Cat}(\text{Gp}), \text{BCat}(\text{Gp}), \text{SCat}(\text{Gp})$$

En las categorías  $[_r\mathbf{T}_{r+1}]$  hemos construido el espacio de arcos asociado a cada objeto. De hecho, hemos definido un functor  $(-)^L : [_r\mathbf{T}_{r+1}] \rightarrow [_r\mathbf{T}_{r+1}]$ . Ésto nos da, para cada  $r \geq 0$  un espacio de arcos en la correspondiente categoría  $\text{Cat}(\text{Gp})$ ,  $\text{BCat}(\text{Gp})$ ,  $\text{SCat}(\text{Gp})$ , inducido por la equivalencia. Dicho de otra forma, tenemos un diagrama



donde los funtores  $(-)^L$  de las caras derechas del diagrama están definidos como las composiciones

$$\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \xrightarrow{(\Phi\Psi)^{-1}} [r\mathbf{T}_{r+1}] \xrightarrow{(-)^L} [r\mathbf{T}_{r+1}] \xrightarrow{\Phi\Psi} \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$$

para  $r \geq 2$ ,

$$\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp}) \xrightarrow{(\Phi\Psi)^{-1}} [1\mathbf{T}_2] \xrightarrow{(-)^L} [1\mathbf{T}_2] \xrightarrow{\Phi\Psi} \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$$

y

$$\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp}) \xrightarrow{(\Phi\Psi)^{-1}} [0\mathbf{T}_1] \xrightarrow{(-)^L} [0\mathbf{T}_1] \xrightarrow{\Phi\Psi} \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$$

Es importante hacer notar que las caras de la derecha y de la izquierda no son conmutativas, es decir, no lo son cada uno de los cuadrados siguientes:

$$\begin{array}{ccc} [r\mathbf{T}_{r+1}] & \xrightarrow{(-)^L} & [r\mathbf{T}_{r+1}] & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{(-)^L} & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \\ \Omega' \downarrow & & \downarrow \Omega' & \parallel & & \parallel \\ [r-1\mathbf{T}_r] & \xrightarrow{(-)^L} & [r-1\mathbf{T}_r] & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) & \xrightarrow{(-)^L} & \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \end{array}$$

Por tanto, tenemos definidos “muchos” espacios de arcos en la categoría  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ . Para elegir uno, estudiamos primero como es el espacio de arcos en la categoría  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ .

Supongamos que tenemos  $H_\bullet \in [0\mathbf{T}_1] \cong \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ . Entonces, por la equivalencia  $[0\mathbf{T}_1] \cong \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  tenemos que a  $H_\bullet$  le corresponde el cat-grupo

$$\mathcal{H} : H_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} H_0 .$$

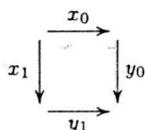
Es claro que tenemos un funtor  $U : \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Gpd}$ . Este funtor verifica claramente la siguiente proposición (ver la estructura de modelos de  $\mathbf{Gpd}$  dada en la sección 1.4.1 ejemplo 5).

**Proposición 3.4.1.** *Sea  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  un morfismo en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ . Entonces  $f$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si y sólo si  $U(f)$  es una fibración (resp. equivalencia débil) de grupoides.*

Sabemos que  $H_\bullet^L = H_\bullet^I$  es un espacio de arcos para  $H_\bullet$ . Puesto que  $H_\bullet \in [0\mathbf{T}_1]$  tenemos que  $H_2 \cong \left( \text{Nerv} \left( \begin{array}{c} H_1 \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} H_0 \right) \right)_2$ , luego  $H_2 \cong$

$\{(x, y) \in (H_1)^2 / d_1x = d_0y\}$ , y los operadores cara y degeneración son  $d_0(x, y) = x$ ;  $d_1(x, y) = y \circ x$ ;  $d_2(x, y) = y$ ;  $s_0(x) = (x, s_0d_1x)$ ;  $s_1(x) = (s_0d_0x, x)$ .

Si ahora queremos calcular  $\mathcal{H}^I$ , necesitamos hallar  $(H_\bullet^I)_0$  y  $(H_\bullet^I)_1$ . El primero sabemos que es  $H_1$ . El segundo son parejas  $((x_0, y_0), (x_1, y_1)) \in H_2^2$  tales que  $d_1(x_0, y_0) = d_1(x_1, y_1)$  y como  $d_1$  aplica una pareja de elementos en la composición, tenemos que  $(H_\bullet^I)_1$  es el conjunto de cuadrados conmutativos

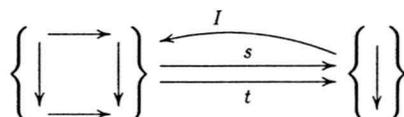


y las caras y degeneraciones vienen dadas por

$$d_0[(x_0, y_0), (x_1, y_1)] = d_0(x_1, y_1) = x_1; \quad d_1[(x_0, y_0), (x_1, y_1)] = d_2(x_0, y_0) = y_0$$

$$s_0(x) = [s_1(x), s_0(x)] = [(s_0d_0x, x), (x, s_0d_1x)]$$

Por tanto,  $\mathcal{H}^I$  es el cat-grupo



donde

$$s \left( \begin{array}{ccc} \rightarrow & & \rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow & & \rightarrow \end{array} \right) = \downarrow \square; \quad t \left( \begin{array}{ccc} \rightarrow & & \rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow & & \rightarrow \end{array} \right) = \square \downarrow; \quad I \left( \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) = \downarrow \overline{\square} \downarrow$$

Es decir,  $\mathcal{H}^I$  es el cat-grupo que tiene como objetos el conjunto de morfismos de  $\mathcal{H}$  y como morfismos, los cuadrados conmutativos.

Se tiene además una factorización del morfismo diagonal

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{H}^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

(notemos que aunque normalmente hemos llamado  $s$  al morfismo con dominio un objeto y codominio su espacio de arcos, en esta ocasión lo hemos llamado  $\sigma$  para no confundirlo con la aplicación "dominio" de un cat-grupo) y si tenemos en cuenta como estaba definido  $\sigma : H_\bullet \rightarrow H_\bullet^I$  y  $(\partial_0, \partial_1); H_\bullet^I \rightarrow H_\bullet \times H_\bullet$ , llegamos a la conclusión de que:

$$\sigma_0(\cdot) = (\cdot \xlongequal{\quad} \cdot), \quad \sigma_1(x) = \left( \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{x} & \cdot \\ \parallel & & \parallel \\ \cdot & \xrightarrow{x} & \cdot \end{array} \right)$$

$$(\partial_0, \partial_1)_0(x) = (t(x), s(x)) \in H_0 \times H_0$$

$$(\partial_0, \partial_1)_1 \left( \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{x} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{y} & \cdot \end{array} \right) = (y, x) \in H_1 \times H_1$$

Calculemos ahora  $\Omega(\mathcal{H}) = \text{Ker}(\partial_0, \partial_1)$ . Se observa fácilmente que

$$(\Omega(\mathcal{H}))_0 = \{x \in H_1 / s(x) = t(x) = 0\} = \pi_1(\mathcal{H})$$

mientras que  $(\Omega(\mathcal{H}))_1$  es el conjunto de cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xlongequal{\quad} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xlongequal{\quad} & 0 \end{array}$$

que puede ser identificado con  $\pi_1(\mathcal{H})$ , ya que las dos flechas verticales deben ser iguales.

Por tanto,  $\Omega(\mathcal{H}) \cong (\pi_1(\mathcal{H}) \xlongequal{\quad} \pi_1(\mathcal{H}))$

Veamos ahora que esta construcción de espacio de arcos es válida también para cat-grupos trenzados y cat-grupos simétricos.

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $\mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ). Entonces  $(U\mathcal{H})^I \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $(U\mathcal{H})^I \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ),*

*Demostración:* Escribiremos  $\mathcal{H}$  por  $U\mathcal{H}$ . Supongamos que  $\tau$  es la (cuasi)-

simetría de  $\mathcal{H} : H_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} H_0$ . Necesitamos definir una (cuasi)-simetría en

$\mathcal{H}^I$ , para lo cual, para cada  $x, y \in (\mathcal{H}^I)_0 = H_1$  debemos dar un morfismo  $\tau'_{x,y} : x + y \rightarrow y + x$ . Este morfismo es el cuadrado conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} sx + sy & \xrightarrow{\tau_{sx, sy}} & sy + sx \\ x+y \downarrow & & \downarrow y+x \\ tx + ty & \xrightarrow{\tau_{tx, ty}} & ty + tx \end{array}$$

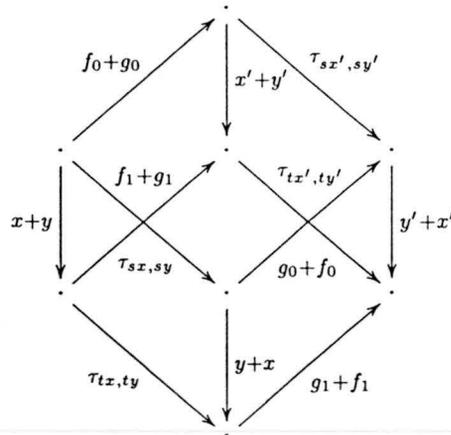
Veamos que  $\tau'$  verifica las condiciones de ser una (cuasi)-simetría. Comprobaremos una de ellas, por ejemplo, la naturalidad, que nos dice que si tenemos  $f : x \rightarrow x'$  y  $g : y \rightarrow y'$ , entonces, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & x' + y' & & \\ & \nearrow f+g & & \searrow \tau'_{x', y'} & \\ x + y & & & & y' + x' \\ & \searrow \tau'_{x, y} & & \nearrow g+f & \\ & & y + x & & \end{array}$$

Ahora bien, los morfismos  $f : x \rightarrow x'$  y  $g : y \rightarrow y'$  son cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} sx & \xrightarrow{f_0} & sx' \\ x \downarrow & & \downarrow x' \\ tx & \xrightarrow{f_1} & tx' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} sy & \xrightarrow{g_0} & sy' \\ y \downarrow & & \downarrow y' \\ ty & \xrightarrow{g_1} & ty' \end{array}$$

y por tanto hemos de probar que en el siguiente diagrama



los dos rombos son conmutativos, es decir,  $\tau_{sx', sy'}(f_0 + g_0) = (g_0 + f_0)\tau_{sx, sy}$  y  $\tau_{tx', ty'}(f_1 + g_1) = (g_1 + f_1)\tau_{tx, ty}$ . Pero teniendo en cuenta que  $sx = sf_0$ ,  $sx' = tf_0$ ,  $sy = sg_0$ ,  $sy' = tg_0$ ,  $tx = sf_1$ ,  $tx' = tf_1$ ,  $ty = sg_1$ ,  $ty' = tg_1$  se ve fácilmente que las identidades anteriores son justamente las condiciones de naturalidad de  $\tau$  respecto a los morfismos  $f_0, g_0$  por un lado y  $f_1, g_1$  por otro.

Se comprueba así como la naturalidad de  $\tau$  implica la naturalidad de  $\tau'$ .

De forma análoga se comprueba que cada una de las propiedades que verifica  $\tau$  las verifica también  $\tau'$ , y por tanto, si  $\tau$  es una (cuasi)-simetría también lo es  $\tau'$ . ■

**Proposición 3.4.3.** *Sea  $\mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ). Entonces  $\mathcal{H}^I$  es un espacio de arcos para  $\mathcal{H}$  en la categoría  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).*

*Demostración:* Dado  $\mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  tenemos una factorización del morfismo diagonal en  $\mathcal{Cat}(\mathbf{Gp})$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{H}^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

Hay que comprobar que los morfismos  $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^I$  y  $(\partial_0, \partial_1) : \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  preservan la (cuasi)-simetría, lo cual es fácil. Comprobémoslo en el primero de los casos, esto es, que  $\sigma_1(\tau_{p,q}) = \tau'_{\sigma_0(p), \sigma_0(q)}$ . Teniendo en cuenta que  $\sigma_0(p) = I(p)$  (la identidad en el "objeto"  $p$ ) se obtiene que

$$\tau'_{\sigma_0(p), \sigma_1(p)} = \left( \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\tau_{p,q}} & \cdot \\ \parallel & & \parallel \\ \cdot & \xrightarrow{\tau_{p,q}} & \cdot \end{array} \right) = \sigma_1(\tau_{p,q})$$

Análogamente se prueba que  $(\partial_0, \partial_1)$  preservan la (cuasi)-simetría.

Es claro que  $\sigma$  es una equivalencia débil (pues  $U(\sigma)$  lo es) y que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración. ■

**Corolario 3.4.4.** *Si  $\mathcal{H}$  es un objeto  $S$ -fibrante en la categoría  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) entonces  $\mathcal{H}^I$  es un espacio de arcos para  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).*

*Demostración:* Es claro que tenemos una factorización del morfismo diagonal

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{H}^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

donde  $\sigma$  es una equivalencia débil (y por tanto una  $S$ -equivalencia débil) y  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración. Queda por tanto ver que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una  $S$ -fibración, es decir,  $\pi_i(\text{Ker}(\partial_0, \partial_1))$ ,  $i = 0, 1$  son  $S$ -únicamente divisibles y  $\text{Coker}(\pi_0(\partial_0, \partial_1))$  es  $S$ -libre de torsión.

La primera parte es clara, pues  $\pi_0(\text{Ker}(\partial_0, \partial_1)) = \pi_1(\mathcal{H})$  que es  $S$ -únicamente divisible pues  $\mathcal{H}$  es  $S$ -fibrante y  $\pi_1(\text{Ker}(\partial_0, \partial_1)) = 0$ .

Por otra parte, dado que  $\pi_0(\mathcal{H}^I) \cong \pi_0(\mathcal{H})$  es claro que el morfismo  $\pi_0(\partial_0, \partial_1)$  es el morfismo diagonal  $\Delta : \pi_0(\mathcal{H}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{H}) \times \pi_0(\mathcal{H})$ , cuyo conúcleo es  $\pi_0(\mathcal{H})$  que claramente es  $S$ -libre de torsión, pues es  $S$ -únicamente divisible (ya que  $\mathcal{H}$  es fibrante). ■

**Corolario 3.4.5.** *Dado  $H_\bullet \in {}_1\mathbf{T}_2$ , la construcción "espacio de arcos" hecha en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})^S$  determina por la equivalencia  ${}_1\mathbf{T}_2 \cong \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  un funtor de lazos en  ${}_1\mathbf{T}_2^S$  que puede ser descrito por  $\Omega(H_\bullet) = K(\pi_2(H_\bullet), 1)$ .*

*Dado  $H_\bullet \in {}_r\mathbf{T}_{r+1}$ ,  $r \geq 2$  la construcción anterior determina vía la equivalencia  ${}_r\mathbf{T}_{r+1} \cong \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  un funtor de lazos en  ${}_r\mathbf{T}_{r+1}^S$  que puede ser descrito como  $\Omega(H_\bullet) = K(\pi_{r+1}(H_\bullet), r)$ .*

De la misma forma que hemos hecho con la construcción espacio de arcos haremos una construcción cilindro en la categoría  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  que veremos que es válida también en las categorías  $\mathbf{BCat}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathbf{SCat}(\mathbf{Gp})$ .

Damos primero algunos resultados referentes a los objetos cofibrantes.

**Proposición 3.4.6.** *Sea  $G_\bullet \in [r-1]\mathbf{T}_r$ ,  $r \geq 1$  un objeto cofibrante. Entonces  $\Omega'(G_\bullet) \in [r-1]\mathbf{T}_r$  es también cofibrante*

*Demostración:* Por la proposición 3.1.7 sabemos que  $G_\bullet$  es un retracto de  $\mathcal{P}_{r+1}(F_\bullet)$  donde  $F_\bullet$  es un grupo simplicial ( $r$ -reducido) libre. Supongamos que  $G_\bullet$  es exactamente  $\mathcal{P}_{r+1}(F_\bullet)$ .

Veamos que  $\Omega'(F_\bullet)$  es un grupo simplicial libre. Recordemos que para calcular  $\Omega'(F_\bullet)$  se obtenía primero el grupo simplicial  $P'(F_\bullet)$  cuyo conjunto de  $n$ -símplices era  $\{x \in F_{n+1} / d_1 \dots d_{n+1}x = 0\}$ . Dado que  $F_0 = \{0\}$  se tiene que  $(P'(F_\bullet))_n = F_{n+1}$ , y como las degeneraciones en  $P'(F_\bullet)$  son las mismas que en  $F_\bullet$  (salvo  $s_0$ ) deducimos que  $P'(F_\bullet)$  es un grupo simplicial libre.

Posteriormente, se tomaba  $\Omega'(F_\bullet)$  como el núcleo del morfismo  $d_0 : P'(F_\bullet) \rightarrow F_\bullet$ , luego  $\Omega'(F_\bullet)$  es un subgrupo simplicial de  $P'(F_\bullet)$ , y por tanto (ver [59]) libre.

Es claro que  $\Omega'\mathcal{P}_{r+1}$  es naturalmente equivalente a  $\mathcal{P}_r\Omega'$ , pues para cada  $G_\bullet \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$ ,  $\Omega'\mathcal{P}_{r+1}G_\bullet$  y  $\mathcal{P}_r\Omega'G_\bullet$  tienen el mismo complejo de Moore, y por tanto son isomorfos.

Se tiene entonces que  $\Omega'(G_\bullet) = \Omega'(\mathcal{P}_{r+1}F_\bullet) \cong \mathcal{P}_r(\Omega'F_\bullet)$ , de donde deducimos (ver proposición 3.1.7) que  $\Omega'(G_\bullet)$  es cofibrante en  $[r-1]\mathbf{T}_r$ . ■

Como consecuencia se tiene:

**Corolario 3.4.7.** *Supongamos que  $\mathcal{G}$  es un objeto cofibrante en  $\mathbf{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathbf{SCat}(\mathbf{Gp})$ ), entonces  $U(\mathcal{G})$  es cofibrante en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ .*

Dado  $\mathcal{G} : \left( \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{s_0} & \\ G_1 & \xrightarrow{d_0} & G_0 \\ & \xrightarrow{d_1} & \end{array} \right) \in \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  y tomando

$$G_\bullet = \mathit{Nerv} \left( \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{s_0} & \\ G_1 & \xrightarrow{d_0} & G_0 \\ & \xrightarrow{d_1} & \end{array} \right)$$

podemos considerar  $\mathcal{G} \otimes I = \Phi\Psi(G_\bullet \otimes I)$  y se tiene que

$$\mathcal{G} \otimes I \equiv \left( \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{s_0} & \\ \frac{G_1 \amalg G_1 \amalg G_1}{B_1(G_\bullet \otimes I)} & \xrightarrow{d_0} & G_0 \amalg G_0 \\ & \xrightarrow{d_1} & \end{array} \right)$$

El siguiente teorema nos asegura que esta construcción es válida también en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ .

**Teorema 3.4.8.** *Sea  $\mathcal{G} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{G} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ). Entonces  $U(\mathcal{G}) \otimes L \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $U(\mathcal{G}) \otimes I \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).*

*Demostración:* Escribiremos  $\mathcal{G} \otimes I$  en lugar de  $U(\mathcal{G}) \otimes I$  y en lo que sigue, para mayor comodidad, identificaremos los objetos de  $[_0\mathbf{T}_1]$  y  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ . Tenemos entonces que

$$\mathcal{G} \otimes I = \mathcal{P}_1 \left( \dots G_2 \amalg G_2 \amalg G_2 \amalg G_2 \xrightleftharpoons[d_2]{d_0} G_1 \amalg G_1 \amalg G_1 \xrightarrow[d_1]{d_0} G_0 \amalg G_0 \right)$$

donde  $G_\bullet = \text{Nerv}(\mathcal{G})$

Llamemos  $u_0, u_1 : G_0 \rightarrow G_0 \amalg G_0$  a las dos inyecciones canónicas, donde  $u_0$  indica la correspondiente al elemento (1) de  $I_0$  y  $u_1$  a la correspondiente al otro 0-símplice;  $v_0, v_1, v_2 : G_1 \rightarrow G_1 \amalg G_1 \amalg G_1$  denotan las tres inyecciones correspondientes cada una a un 1-símplice de  $I$  (el subíndice indica el número de ceros del tal 1-símplice) y  $w_0, w_1, w_2, w_3 : G_2 \rightarrow G_2 \amalg G_2 \amalg G_2 \amalg G_2$  denotan las cuatro inyecciones siguiendo el mismo criterio que antes.

Indistintamente llamaremos  $v_i$  tanto a los morfismos anteriores como a los inducidos  $v_i : G_1 \rightarrow \frac{G_1 \amalg G_1 \amalg G_1}{B_1(G_\bullet \times I)}$ .

Es claro que tenemos las siguientes identidades:

$$s_0 u_0 = v_0 s_0; \quad s_0 u_1 = v_2 s_0$$

$$s_0 v_0 = w_0 s_0; \quad s_0 v_1 = w_2 s_0; \quad s_0 v_2 = w_3 s_0; \quad s_1 v_0 = w_0 s_1; \quad s_1 v_1 = w_1 s_1; \quad s_1 v_2 = w_3 s_1$$

$$d_0 v_0 = u_0 d_0; \quad d_0 v_1 = u_0 d_0; \quad d_0 v_2 = u_1 d_0; \quad d_1 v_0 = u_0 d_1; \quad d_1 v_1 = u_1 d_1; \quad d_1 v_2 = u_1 d_1$$

$$d_0 w_0 = v_0 d_0; \quad d_0 w_1 = v_0 d_0; \quad d_0 w_2 = v_1 d_0; \quad d_0 w_3 = v_2 d_0$$

$$d_1 w_0 = v_0 d_1; \quad d_1 w_1 = v_1 d_1; \quad d_1 w_2 = v_1 d_1; \quad d_1 w_3 = v_2 d_1$$

$$d_2 w_0 = v_0 d_2; \quad d_2 w_1 = v_1 d_2; \quad d_2 w_2 = v_2 d_2; \quad d_2 w_3 = v_2 d_2$$

Dado ahora  $x : p \rightarrow q \in G_1$  queremos probar que los siguientes cuadrados

$$\begin{array}{ccc} u_0 p \xrightarrow{v_1 s_0 p} u_1 p & u_0 p \xrightarrow{v_0 s_0 p} u_0 p & u_0 p \xrightarrow{v_1 s_0 p} u_1 p \\ v_1 x \downarrow & v_0 x \downarrow & v_0 x \downarrow \\ u_1 q \xrightarrow{v_2 s_0 q} u_1 q & u_0 p \xrightarrow{v_1 s_0 q} u_1 q & u_0 p \xrightarrow{v_1 s_0 q} u_1 q \\ & v_1 x \downarrow & v_2 x \downarrow \end{array}$$

son conmutativos en  $\mathcal{G} \otimes I$ , es decir, hemos de comprobar que  $v_2x \circ v_1s_0p = v_1x$ ;  $v_1s_0q \circ v_0x = v_1x$ ;  $v_1s_0q \circ v_0x = v_2x \circ v_1s_0p$

Dada la expresión que tiene la composición en un cat-grupo, la primera condición es equivalente a que  $v_2x - s_0d_0v_2x + v_1s_0p = v_1x$ . Teniendo en cuenta que  $s_0d_0v_2x = s_0u_1d_0x = s_0u_1p = v_2s_0p$  lo que hay que probar es que el elemento  $y = -v_1x + v_2x - v_2s_0p + v_1s_0p = 0$ .

Sea entonces  $t \in G_2$  tal que  $d_0t = s_0p$  y  $d_2t = x$  que existe puesto que  $d_1s_0p = p = d_0x$  (es decir,  $(s_0p, -, x) \in \Lambda_1^2(G_\bullet)$ ) y  $G_\bullet$  es de Kan. Tomamos  $u = -w_1t + w_2t - w_2s_0^2p + w_1s_0^2p$  y se verifica que:

$$d_0u = -v_0d_0t + v_1d_0t - v_1d_0s_0^2p + v_0d_0s_0^2p = -v_0s_0p + v_1s_0p - v_1s_0p + v_0s_0p = 0$$

$$d_1u = -v_1d_1t + v_1d_1t - v_1d_1s_0^2p + v_1d_1s_0^2p = 0$$

$$d_2u = -v_1d_2t + v_2d_2t - v_2d_2s_0^2p + v_1d_2s_0^2p = -v_1x + v_2x - v_2d_2s_1s_0p + v_1d_2s_1s_0p = -v_1x + v_2x - v_2s_0p + v_1s_0p = y$$

De aquí deducimos que  $y \in B_1(G_\bullet \otimes I)$ , y por tanto  $y = 0$  como queríamos.

La conmutatividad en el segundo cuadrado se demuestra igual. Ahora hay que probar que  $v_1s_0q - v_0s_0q + v_0x - v_1x = 0$ , para lo cual tomamos  $t \in G_2$  tal que  $d_1t = s_0q$  y  $d_2t = x$ , y posteriormente el elemento  $u = w_1s_0^2q - w_0s_0^2q + w_0t - w_1t$ .

La conmutatividad en el tercero es clara a partir de la de los otros dos.

Si ahora, dado  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$  le asociamos  $\beta, \gamma \in \{0, 1, 2\}$  de la forma siguiente

Si  $\alpha = 0$ , entonces  $\beta = \gamma = 1$ .

Si  $\alpha = 1$  entonces  $\beta = 1$  y  $\gamma = 2$

Si  $\alpha = 2$  entonces  $\beta = \gamma = 2$ .

tenemos que para cualquier morfismo  $x : p \rightarrow q \in G_1$  y cualquier  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$  el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} u_{\beta-1}p & \xrightarrow{v_{\beta}p} & u_1p \\ v_{\alpha}x \downarrow & & \downarrow v_2x \\ u_{\gamma-1}q & \xrightarrow{v_{\gamma}q} & u_1q \end{array}$$

Sean ahora  $x_i : p_i \rightarrow q_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donde  $x_i \in G_1$ . Entonces, el siguiente diagrama en  $\mathcal{G} \otimes I$  es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} u_{\beta_1-1}p_1 + \cdots + u_{\beta_n-1}p_n & \xrightarrow{v_{\beta_1}s_0p_1 + \cdots + v_{\beta_n}s_0p_n} & u_1(p_1 + \cdots + p_n) \\ \downarrow v_{\alpha_1}x_1 + \cdots + v_{\alpha_n}x_n & & \downarrow v_2(x_1 + \cdots + x_n) \\ u_{\gamma_1-1}q_1 + \cdots + u_{\gamma_n-1}q_n & \xrightarrow{v_{\gamma_1}s_0q_1 + \cdots + v_{\gamma_n}s_0q_n} & u_1(q_1 + \cdots + q_n) \end{array}$$

como puede probarse por inducción. Para  $n = 1$  el resultado es cierto como acabamos de ver. Supuesto cierto para  $n$ , se demuestra para  $n + 1$  descomponiendo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 u_{\beta_1-1}p_1 + \cdots + u_{\beta_{n+1}-1}p_{n+1} & \xrightarrow{v_{\beta_1} s_0 p_1 + \cdots + v_{\beta_{n+1}} s_0 p_{n+1}} & u_1(p_1 + \cdots + p_{n+1}) \\
 \downarrow v_{\alpha_1} x_1 + \cdots + v_{\alpha_{n+1}} x_{n+1} & & \downarrow v_2(x_1 + \cdots + x_{n+1}) \\
 u_{\gamma_1-1}q_1 + \cdots + u_{\gamma_{n+1}-1}q_{n+1} & \xrightarrow{v_{\gamma_1} s_0 q_1 + \cdots + v_{\gamma_{n+1}} s_0 q_{n+1}} & u_1(q_1 + \cdots + q_{n+1})
 \end{array}$$

como suma de dos diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 u_{\beta_1-1}p_1 + \cdots + u_{\beta_n-1}p_n & \xrightarrow{v_{\beta_1} s_0 p_1 + \cdots + v_{\beta_n} s_0 p_n} & u_1(p_1 + \cdots + p_n) \\
 \downarrow v_{\alpha_1} x_1 + \cdots + v_{\alpha_n} x_n & & \downarrow v_2(x_1 + \cdots + x_n) \\
 u_{\gamma_1-1}q_1 + \cdots + u_{\gamma_n-1}q_n & \xrightarrow{v_{\gamma_1} s_0 q_1 + \cdots + v_{\gamma_n} s_0 q_n} & u_1(q_1 + \cdots + q_n)
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
 u_{\beta_{n+1}-1}p_{n+1} & \xrightarrow{v_{\beta_{n+1}} s_0 p_{n+1}} & u_1 p_{n+1} \\
 \downarrow v_{\alpha_{n+1}} x_{n+1} & & \downarrow v_2 x_{n+1} \\
 u_{\gamma_{n+1}-1}q_{n+1} & \xrightarrow{v_{\gamma_{n+1}} s_0 q_{n+1}} & u_1 q_{n+1}
 \end{array}$$

Sean ahora  $p, q \in G_0 \amalg G_0$ . Entonces  $p = \sum_{i=1}^n u_{\delta_i} p_i$  y  $q = \sum_{j=1}^m u_{\delta'_j} q_j$  donde  $\delta_i$  y  $\delta'_j$  valen 0 ó 1. Definimos  $\tau'_{p,q}$  como la composición

$$\begin{array}{ccc}
 p + q & \xrightarrow{\tau'_{p,q}} & q + p \\
 \downarrow \sum_{i=1}^n v_{\delta_{i+1}} s_0 p_i + \sum_{j=1}^m v_{\delta'_{j+1}} s_0 q_j & & \uparrow \\
 \sum_{i=1}^n u_1 p_i + \sum_{j=1}^m u_1 q_j & \xrightarrow{v_2(\tau(\sum p_i, \sum q_j))} & \sum_{j=1}^m u_1 q_j + \sum_{i=1}^n u_1 p_i
 \end{array}$$

y se comprueba de forma rutinaria que  $\tau'_{p,q}$  está bien definido. Necesitamos comprobar que  $\tau'$  verifica los axiomas de (cuasi)-simetría.

Comprobemos la naturalidad. Sean entonces  $x : p \rightarrow q$  e  $y : p' \rightarrow q'$ . Entonces, el siguiente cuadrado debe ser conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p + q & \xrightarrow{\tau'_{p,q}} & q + p \\ x+y \downarrow & & \downarrow y+x \\ p' + q' & \xrightarrow{\tau'_{p',q'}} & q' + p' \end{array}$$

Los elementos  $x$  e  $y$  sabemos que son de la forma  $x = \sum_{i=1}^n v_{\alpha_i} x_i$ ;  $y = \sum_{j=1}^m v_{\alpha'_j} y_j$  donde  $x_i : p_i \rightarrow q_i$ ,  $y_j : p'_j \rightarrow q'_j \in G_1$  y  $p = \sum_{i=1}^n u_{\beta_i-1} p_i$ ,  $q = \sum_{i=1}^n u_{\gamma_i-1} q_i$ ,  $p' = \sum_{j=1}^m u_{\beta'_j-1} p'_j$ ,  $q' = \sum_{j=1}^m u_{\gamma'_j-1} q'_j$ .

A partir de esto formamos los tres diagramas siguientes:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} p + q & \xrightarrow{\sum_{i=1}^n v_{\beta_i} s_0 p_i + \sum_{j=1}^m v_{\beta'_j} s_0 q_j} & u_1 \left( \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{j=1}^m q_j \right) \\ \downarrow x+y & & \downarrow v_2 \left( \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j \right) \\ p' + q' & \xrightarrow{\sum_{i=1}^n v_{\gamma_i} s_0 p'_i + \sum_{j=1}^m v_{\gamma'_j} s_0 q'_j} & u_1 \left( \sum_{i=1}^n p'_i + \sum_{j=1}^m q'_j \right) \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} u_1 \left( \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{j=1}^m q_j \right) & \xrightarrow{v_2(\tau(\sum p_i, \sum q_j))} & u_1 \left( \sum_{j=1}^m q_j + \sum_{i=1}^n p_i \right) \\ \downarrow v_2 \left( \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j \right) & & \downarrow v_2 \left( \sum_{j=1}^m y_j + \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ u_1 \left( \sum_{i=1}^n p'_i + \sum_{j=1}^m q'_j \right) & \xrightarrow{v_2(\tau(\sum p'_i, \sum q'_j))} & u_1 \left( \sum_{j=1}^m q'_j + \sum_{i=1}^n p'_i \right) \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} u_1 \left( \sum_{j=1}^m q_j + \sum_{i=1}^n p_i \right) & \xrightarrow{\left( \sum_{j=1}^m v_{\beta'_j} s_0 q_j + \sum_{i=1}^n v_{\beta_i} s_0 p_i \right)^{-1}} & q + p \\ \downarrow v_2 \left( \sum_{j=1}^m y_j + \sum_{i=1}^n x_i \right) & \dashrightarrow & \downarrow y+x \\ u_1 \left( \sum_{j=1}^m q'_j + \sum_{i=1}^n p'_i \right) & \xrightarrow{\left( \sum_{j=1}^m v_{\gamma'_j} s_0 q'_j + \sum_{i=1}^n v_{\gamma_i} s_0 p'_i \right)^{-1}} & q' + p' \end{array}$$

que son conmutativos. El (2) lo es por la naturalidad de  $\tau$ , mientras que (1) y (3) por lo visto anteriormente. A partir de ahí deducimos la naturalidad de  $\tau'$ , pues tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} p + q & \xrightarrow{\tau'_{p,q}} & \cdot & \xrightarrow{\tau'_{p,q}} & \cdot & \xrightarrow{\tau'_{p,q}} & q + p \\ \downarrow x+y & (1) & \downarrow & (2) & \downarrow & (3) & \downarrow y+x \\ p' + q' & \xrightarrow{\tau'_{p',q'}} & \cdot & \xrightarrow{\tau'_{p',q'}} & \cdot & \xrightarrow{\tau'_{p',q'}} & q' + p' \end{array}$$

El resto de los axiomas se demuestra de forma análoga. ■

Como consecuencia de este teorema tenemos:

**Proposición 3.4.9.** *Si  $\mathcal{G}$  es  $S$ -cofibrante en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) entonces  $U(\mathcal{G}) \otimes I (= \mathcal{G} \otimes I)$  es un cilindro para  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).*

*Demostración:* Necesitamos una factorización del morfismo codiagonal  $\nabla : \mathcal{G} * \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  de la forma

$$\mathcal{G} * \mathcal{G} \xrightarrow{i_0+i_1} \mathcal{G} \otimes I \xrightarrow{\bar{\sigma}} \mathcal{G}$$

en la que  $\bar{\sigma}$  sea una  $S$ -equivalencia débil e  $i_0 + i_1$  una  $S$ -cofibración.

Puesto que  $U(\mathcal{G})$  es cofibrante en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  (ver corolario 3.4.7)  $U(\mathcal{G}) \otimes I$  es un cilindro para  $U(\mathcal{G})$  en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ , luego tenemos una factorización

$$U(\mathcal{G}) * U(\mathcal{G}) \xrightarrow{i_0+i_1} U(\mathcal{G}) \otimes I \xrightarrow{\sigma} U(\mathcal{G})$$

donde  $i_0 + i_1$  es una cofibración y  $\sigma$  es una equivalencia débil.

Veamos que  $\sigma$  es un morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ , para lo cual debemos comprobar que  $\sigma$  preserva la (cuasi)-simetría, es decir, dados  $p, q \in G_0 \amalg G_0$  se verifica que  $\sigma_1(\tau'_{p,q}) = \tau_{\sigma_0 p, \sigma_0 q}$ . Recordemos que  $\sigma$  está definido por las condiciones  $\sigma_0 u_i = Id_{G_0}$ ,  $i = 0, 1$ ;  $\sigma_1 v_j = Id_{G_1}$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

Si suponemos que  $p = \sum_{i=0}^n u_{\delta_i} p_i$  y que  $q = \sum_{j=1}^m u_{\delta'_j} q_j$  tenemos definido  $\tau'_{p,q}$  por medio del siguiente diagrama (ver teorema 3.4.8)

$$\begin{array}{ccc}
 p + q & \xrightarrow{\tau'_{p,q}} & q + p \\
 \downarrow \sum_{i=1}^n v_{\delta_i+1} s_0 p_i + \sum_{j=1}^m v_{\delta'_j+1} s_0 q_j & & \uparrow (\sum_{j=1}^m v_{\delta'_j+1} s_0 q_j + \sum_{i=1}^n v_{\delta_i+1} s_0 p_i)^{-1} \\
 \sum_{i=1}^n u_1 p_i + \sum_{j=1}^m u_1 q_j & \xrightarrow{v_2(\tau(\sum p_i, \sum q_j))} & \sum_{j=1}^m u_1 q_j + \sum_{i=1}^n u_1 p_i
 \end{array}$$

Si le aplicamos  $\sigma$  al anterior diagrama teniendo en cuenta la observación anterior obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{j=1}^m q_j & \xrightarrow{\sigma_1(\tau'_{p,q})} & \sum_{j=1}^m q_j + \sum_{i=1}^n p_i \\
 \downarrow Id & & \uparrow Id \\
 \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{j=1}^m q_j & \xrightarrow{\tau(\sum p_i, \sum q_j)} & \sum_{j=1}^m q_j + \sum_{i=1}^n p_i
 \end{array}$$

es decir,  $\sigma_1(\tau'_{p,q}) = \tau(\sum p_i, \sum q_j)$ , y puesto que  $\sum_{i=1}^n p_i = \sigma_0(p)$  y  $\sum_{j=1}^m q_j = \sigma_0(q)$  obtenemos que  $\sigma$  es un morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ . Por tanto, podemos tomar  $\bar{\sigma} = \sigma$ .

Demostremos ahora que los morfismos  $i_0, i_1 : U(\mathcal{G}) \rightarrow U(\mathcal{G}) \otimes I$  son también morfismos en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ . Recordemos cuales eran estos morfismos:

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} & G_0 \\
 v_0 \downarrow & & u_0 \downarrow \\
 \frac{G_1 \amalg G_1 \amalg G_1}{B_1(G_* \otimes I)} & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} & G_0 \amalg G_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} & G_0 \\
 v_2 \downarrow & & u_1 \downarrow \\
 \frac{G_1 \amalg G_1 \amalg G_1}{B_1(G_* \otimes I)} & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \end{array} & G_0 \amalg G_0
 \end{array}$$

El primer diagrama representa al morfismo  $i_0$  mientras que el segundo representa a  $i_1$ .

Que  $i_1$  es un morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  es fácil, pues si  $p, q \in G_0$  debemos probar que  $v_2(\tau_{p,q}) = \tau'_{u_1p, u_1q}$ , lo cual es claro, pues la definición de  $\tau'_{u_1p, u_1q}$  se hacía a partir del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} u_1p + u_1q & \xrightarrow{\tau'_{u_1p, u_1q}} & u_1q + u_1p \\ \downarrow Id & & (Id)^{-1} \uparrow \\ u_1p + u_1q & \xrightarrow{v_2(\tau_{p,q})} & u_1q + u_1p \end{array}$$

Para probar que  $i_0$  es un morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  necesitamos comprobar  $v_0(\tau_{p,q}) = \tau'_{u_0p, u_0q}$ , es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} u_0(p+q) & \xrightarrow{v_0(\tau_{p,q})} & u_0(q+p) \\ \downarrow v_{1s_0(p+q)} & & (v_{1s_0(q+p)})^{-1} \uparrow \\ u_1(p+q) & \xrightarrow{v_2(\tau_{p,q})} & u_1(q+p) \end{array}$$

lo cual ya se hizo en la demostración del teorema 3.4.8.

Tenemos entonces morfismos  $i_0, i_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes I$  en la categoría  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ , lo que nos da una factorización del morfismo codiagonal en una de estas dos categorías

$$\mathcal{G} * \mathcal{G} \xrightarrow{i_0+i_1} \mathcal{G} \otimes I \xrightarrow{\bar{\sigma}} \mathcal{G}$$

Queda comprobar ahora que  $i_0 + i_1 : \mathcal{G} * \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes I$  es una  $S$ -cofibración, para lo cual tomamos un diagrama conmutativo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} * \mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha+\beta} & \mathcal{X} \\ i_0+i_1 \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{G} \otimes I & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} \end{array} \quad \text{donde } f \text{ es una } S\text{-fibración trivial}$$

lo que nos da dos diagramas conmutativos en  $\mathcal{Cat}(\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} U(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{X} \\ i_0 \downarrow & & \downarrow f \\ U(\mathcal{G}) \otimes I & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{X} \\ i_1 \downarrow & & \downarrow f \\ U(\mathcal{G}) \otimes I & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} \end{array}$$

a partir de los cuales construimos otro diagrama en  $\text{Cat}(\mathbf{Gp})$

$$\begin{array}{ccc} U(\mathcal{G}) * U(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha+\beta} & \mathcal{X} \\ i_0+i_1 \downarrow & & \downarrow f \\ U(\mathcal{G}) \otimes I & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Notemos que aunque hallamos llamado igual a los morfismos  $i_0 + i_1 : \mathcal{G} * \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes I$  e  $i_0 + i_1 : U(\mathcal{G}) * U(\mathcal{G}) \rightarrow U(\mathcal{G}) \otimes I$  en general no es el mismo morfismo, pues  $\mathcal{G} * \mathcal{G}$  es distinto de  $U(\mathcal{G}) * U(\mathcal{G})$ , o más precisamente,  $U(\mathcal{G} * \mathcal{G})$  (con el coproducto hecho en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) es distinto de  $U(\mathcal{G}) * U(\mathcal{G})$ . Idéntica observación para  $\alpha + \beta$ .

En este último diagrama es claro que  $i_0 + i_1$  es una cofibración y que  $f$  es una fibración trivial de donde existe levantamiento  $k : U(\mathcal{G}) \otimes I \rightarrow \mathcal{X}$  (en realidad, el codominio de  $f$  es  $U(\mathcal{X})$ , pero lo hemos identificado con  $\mathcal{X}$ ).

Dado que  $U(\mathcal{G}) \otimes I = \mathcal{G} \otimes I$  tenemos que  $k$  es una aplicación  $k : \mathcal{G} \otimes I \rightarrow \mathcal{X}$ . Necesitamos comprobar por último que:

- $k$  es un morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ .
- $k$  hace conmutativos los dos triángulos del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} * \mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha+\beta} & \mathcal{X} \\ i_0+i_1 \downarrow & \nearrow k & \downarrow f \\ \mathcal{G} \otimes I & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Realmente sólo hay que probar que hace conmutativo el triángulo superior, pues el otro claramente es conmutativo (ya que es el mismo triángulo en  $\text{Cat}(\mathbf{Gp})$  y en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).

Para comprobar lo primero necesitamos ver que dados  $p, q \in G_0 \amalg G_0$ , se verifica que  $k_1(\tau'_{p,q}) = \tau_{k_0p, k_0q}$ . Tenemos que  $f_1(k_1(\tau'_{p,q})) = \gamma_1(\tau'_{p,q}) = \tau_{\gamma_0p, \gamma_0q}$  pues  $fk = \gamma$  y  $\gamma$  preserva la (cuasi)-simetría.

Por otra parte,  $f_1(\tau_{k_0p, k_0q}) = \tau_{f_0k_0p, f_0k_0q} = \tau_{\gamma_0p, \gamma_0q}$  donde hemos utilizado que  $f$  preserva también la simetría y que  $fk = \gamma$ .

Además, puesto que  $\tau'_{p,q} : p+q \rightarrow q+p$  tenemos que  $k_1(\tau'_{p,q}) : k_0(p+q) \rightarrow k_0(q+p)$  mientras que  $\tau_{k_0p, k_0q} : k_0(p+q) \rightarrow k_0(q+p)$ . Por tanto hemos visto que  $k_1(\tau'_{p,q}), \tau_{k_0p, k_0q} \in \text{Hom}_{\mathcal{X}}(k_0(p+q), k_0(q+p))$  y que  $f_1(k_1(\tau'_{p,q})) = f_1(\tau_{k_0p, k_0q})$ . Como  $f$  es una equivalencia de categorías (es una equivalencia débil) deducimos que  $k_1(\tau'_{p,q}) = \tau_{k_0p, k_0q}$ .

Para comprobar lo segundo, es decir, que  $\alpha + \beta = k(i_0 + i_1)$ , puesto que el dominio de ambos morfismos (ya hemos visto que ambos son morfismos) es un coproducto sólo hay que comprobar que  $\alpha = ki_0$  y que  $\beta = ki_1$ , lo cual

es cierto pues esas igualdades se dan en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  y los morfismos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $ki_0$  y  $ki_1$  "coinciden" en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  y en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  ( $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ). ■

Vamos a estudiar ahora la relación de homotopía que se deduce de la estructura de modelos que tenemos en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ . Empezamos trabajando en la categoría  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ .

Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ , y consideramos  $\mathcal{H}^I$  el espacio de arcos de  $\mathcal{H}$ . Recordemos (ver sección 1.4.2) que si tenemos  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  dos morfismos en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ , un morfismo  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$  verificando que  $\partial_0 h = g$  y  $\partial_1 h = f$ , es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^I & \xleftarrow{s} & \mathcal{H} \\ \uparrow h & \searrow (\partial_0, \partial_1) & \uparrow \Delta \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{(g, f)} & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \end{array}$$

da una homotopía por la derecha de  $f$  a  $g$ . Identifiquemos esta relación.

**Proposición 3.4.10.** *Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ , y sean  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ . Entonces existe una homotopía por la derecha  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$  de  $f$  a  $g$  si y sólo si existe una transformación natural  $\alpha$  del funtor  $f$  al funtor  $g$  que es morfismo de grupos.*

*Demostración:* Supongamos que tenemos  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$  tal que  $\partial_0 h = g$  y  $\partial_1 h = f$ . Sea  $p \in G_0$  y definimos  $\alpha_p = h_0(p)$ . Puesto que  $g_0(p) = \partial_0(h_0(p)) = d_1(h_0(p))$  (recordar como está definido  $\partial_0$ ) y  $f_0(p) = \partial_1(h_0(p)) = d_0(h_0(p))$  tenemos que  $\alpha_p : f_0(p) \rightarrow g_0(p)$ .

Necesitamos ahora que para cualquier  $x : p \rightarrow q \in G_1$  el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f_0(p) & \xrightarrow{f_1(x)} & f_0(q) \\ \alpha_p \downarrow & & \downarrow \alpha_q \\ g_0(p) & \xrightarrow{g_1(x)} & g_0(q) \end{array}$$

Teniendo en cuenta que  $h_1(x) : h_0(p) \rightarrow h_0(q)$  y de que  $\partial_0(h_1(x)) = g_1(x)$  y  $\partial_1(h_1(x)) = f_1(x)$  deducimos que  $h_1(x)$  es el anterior diagrama y como  $h_1(x) \in (\mathcal{H}^I)_1$  deducimos que es conmutativo.

Es evidente que  $\alpha$  es morfismo de grupos.

Recíprocamente, si tenemos  $\alpha : f \Rightarrow g$  una transformación natural que es morfismo de grupos definimos  $h_0 : G_0 \rightarrow (\mathcal{H}^I)_0$  como  $h_0(p) = \alpha_p$  y  $h_1 :$

$G_1 \rightarrow (\mathcal{H}^I)_1$  como

$$h_1(x) = \begin{pmatrix} f_0(p) \xrightarrow{f_1(x)} f_0(q) \\ h_0(p) \downarrow \qquad \qquad \downarrow h_0(q) \\ g_0(p) \xrightarrow{g_1(x)} g_0(q) \end{pmatrix}$$

Es claro entonces que  $h$  es un morfismo en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  y que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & \\ G_1 & \xrightarrow{\quad} & G_0 \\ & \begin{array}{c} \downarrow h_1 \\ \downarrow h_0 \end{array} & \\ (g_1, f_1) & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & H_1 & (g_0, f_0) \\ & \begin{array}{c} \downarrow (\partial_0, \partial_1) \chi (\partial_0, \partial_1) \\ \downarrow \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & \\ H_1 \times H_1 & \xrightarrow{\quad} & H_0 \times H_0 \end{array}$$

lo que nos prueba que  $h$  es una homotopía por la derecha de  $f$  a  $g$ . ■

Recordemos que dar un morfismo  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$  verificando que  $\partial_0 h = g$  y  $\partial_1 h = f$  es equivalente a dar un morfismo  $k : \mathcal{G} \otimes I \rightarrow \mathcal{H}$  satisfaciendo  $ki_0 = f$  y  $ki_1 = g$ , luego es equivalente dar una transformación natural de  $f$  a  $g$  a dar un morfismo  $k : \mathcal{G} \otimes I \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $k(i_0 + i_1) = (f + g)$ .

Cuando el objeto  $\mathcal{G}$  es cofibrante y  $\mathcal{H}$  es fibrante (esto último ocurre siempre) las relaciones de homotopía por la izquierda y por la derecha coinciden, y son iguales a las que se derivan del cilindro o del espacio de arcos que hemos considerado. Por tanto tenemos:

**Corolario 3.4.11.** Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  con  $\mathcal{G}$  cofibrante, y sean  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ . Entonces  $f$  y  $g$  son homotópicos por la derecha si y sólo si son homotópicos por la izquierda si y sólo si existe una transformación natural de  $f$  a  $g$  que es morfismo de grupos.

Veamos ahora que ocurre con la relación de homotopía en  $\mathbf{BCat}(\mathbf{Gp})$  y en  $\mathbf{SCat}(\mathbf{Gp})$ .

**Proposición 3.4.12.** Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ). Entonces dar una homotopía por la derecha  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$  de  $f$  a  $g$  es equivalente a dar una transformación natural  $\alpha$  de  $f$  a  $g$  que sea morfismo de grupos.

*Demostración:* Supongamos que tenemos una homotopía por la derecha de  $f$  a  $g$ ,  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$ . Es claro que  $h$  es también una homotopía de  $f$  a  $g$  vistos estos morfismos en la categoría  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ , y por la proposición 3.4.10 tenemos una transformación natural de  $f$  a  $g$  que es morfismo de grupos.

Recíprocamente, supongamos que tenemos  $\alpha$  una transformación natural de  $f$  a  $g$  que es morfismo de grupos. Otra vez por la proposición 3.4.10 tenemos un morfismo  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I \in \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  tal que  $\partial_0 h = g$  y  $\partial_1 h = f$ . Recordemos que  $h$  estaba definido por  $h_0(p) = \alpha_p : f_0(p) \rightarrow g_0(p)$  y

$$h_1(x) = \begin{pmatrix} f_0(p) \xrightarrow{f_1(x)} f_0(q) \\ \alpha_p \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha_q \\ g_0(p) \xrightarrow{g_1(x)} g_0(q) \end{pmatrix} \quad \text{si } x : p \rightarrow q$$

Necesitamos únicamente probar que  $h$  es compatible con las (cuasi)-simetrías que tenemos en  $\mathcal{G}$  y en  $\mathcal{H}^I$ .

Sean entonces  $p, q \in G_0$ . Queremos probar que  $h_1(\tau_{p,q}) = \tau'_{h_0p, h_0q}$ .

Por definición (ver teorema 3.4.2) tenemos

$$\tau'_{h_0p, h_0q} = \begin{pmatrix} f_0(p) + f_0(q) \xrightarrow{\tau_{f_0p, f_0q}} f_0(q) + f_0(p) \\ h_0(p) + h_0(q) \downarrow \qquad \qquad \downarrow h_0(q) + h_0(p) \\ g_0(p) + g_0(q) \xrightarrow{\tau_{g_0p, g_0q}} g_0(q) + g_0(p) \end{pmatrix}$$

mientras que

$$h_1(\tau_{p,q}) = \begin{pmatrix} f_0(p) + f_0(q) \xrightarrow{f_1(\tau_{p,q})} f_0(q) + f_0(p) \\ \alpha_{p+q} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha_{q+p} \\ g_0(p) + g_0(q) \xrightarrow{g_1(\tau_{p,q})} g_0(q) + g_0(p) \end{pmatrix}$$

y por tanto sólo hay que probar que

$$f_1(\tau_{p,q}) = \tau_{f_0p, f_0q}, \quad g_1(\tau_{p,q}) = \tau_{g_0p, g_0q}, \quad \alpha_{p+q} = h_0(p) + h_0(q) \quad \text{y} \quad \alpha_{q+p} = h_0(q) + h_0(p).$$

Las dos primeras igualdades son ciertas pues tanto  $f$  como  $g$  son morfismos en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ , mientras que las dos últimas lo son por definición de  $h_0$ . ■

Esta proposición que acabamos de demostrar podría haber sido enunciada de esta forma equivalente que ahora damos como corolario.

**Corolario 3.4.13.** Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) y sea  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}'$  un morfismo en  $\mathcal{Cat}(\mathbf{Gp})$ . Entonces  $h$  es un morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) si y sólo si  $\partial_0 h, \partial_1 h \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\partial_0 h, \partial_1 h \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).

*Demostración:* Es claro que si  $h \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  entonces  $\partial_0 h, \partial_1 h \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  y lo mismo para  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$

Supongamos entonces que  $\partial_0 h, \partial_1 h \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ). La demostración de la proposición anterior es justamente demostrar que  $h \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  o que  $h \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ . ■

Este corolario tiene un resultado dual

**Proposición 3.4.14.** Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) y sea  $k : \mathcal{G} \otimes I \rightarrow \mathcal{H}$  un morfismo en  $\mathcal{Cat}(\mathbf{Gp})$ . Entonces  $k$  es un morfismo en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) si y sólo si  $ki_0, ki_1 \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $ki_0, ki_1 \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).

*Demostración:* Hay una implicación que es clara, y es que si  $k \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $k \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) entonces tanto  $ki_0$  como  $ki_1$  son morfismos en  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) pues  $i_0$  e  $i_1$  lo son.

Supongamos entonces que  $ki_0$  y  $ki_1$  son morfismos bien en la categoría  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  bien en  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  (a estos morfismos los llamaremos  $f$  y  $g$  respectivamente, lo cual quiere decir que  $k_0 u_0 = f_0$ ,  $k_0 u_1 = g_0$ ,  $k_1 v_0 = f_1$  y  $k_1 v_2 = g_1$ ) y queremos probar que  $k$  preserva la (cuasi)-simetría definida en la demostración del teorema 3.4.8, es decir,  $k_1(\tau'_{p,q}) = \tau_{k_0 p, k_0 q}$ . Tomemos  $p, q \in G_0$  y veamos que se da la condición anterior para las parejas de elementos  $u_1 p, u_1 q$ ;  $u_0 p, u_1 q$ ;  $u_0 p, u_0 q$ .

En el primer caso es trivial, por definición de  $\tau'$  (ver teorema 3.4.8) ya que  $k_1(\tau'_{u_1 p, u_1 q}) = k_1(v_2 \tau_{p,q}) = g_1(\tau_{p,q}) = \tau_{g_0 p, g_0 q} = \tau_{k_0 u_1 p, k_0 u_1 q}$ .

En el segundo caso hemos de probar que  $k_1(\tau'_{u_0 p, u_1 q}) = \tau_{f_0 p, g_0 q}$ . Recordemos que  $\tau'_{u_0 p, u_1 q}$  estaba definido (ver teorema 3.4.8) como la composición

$$u_0 p + u_1 q \xrightarrow{v_1 s_0 p + Id} u_1 p + u_1 q \xrightarrow{v_2(\tau_{p,q})} u_1 q + u_1 p \xrightarrow{Id + (v_1 s_0 p)^{-1}} u_1 q + u_0 p$$

y si le aplicamos  $k_1$ , obtenemos que  $k_1(\tau'_{u_0 p, u_1 q})$  es la composición

$$f_0 p + g_0 q \xrightarrow{k_1 v_1 s_0 p + Id} g_0 p + g_0 q \xrightarrow{g_1(\tau_{p,q})} g_0 q + g_0 p \xrightarrow{Id + (k_1 v_1 s_0 p)^{-1}} g_0 q + f_0 p$$

de forma que lo que hay que probar es que el siguiente cuadrado es conmutativo (donde hemos tenido en cuenta que  $g_1(\tau_{p,q}) = \tau_{(g_0p,g_0q)}$ )

$$\begin{array}{ccc} f_0p + g_0q & \xrightarrow{\tau_{(f_0p,g_0q)}} & g_0q + f_0p \\ \downarrow k_1v_1s_0p + Id & & Id + k_1v_1s_0p \downarrow \\ g_0p + g_0q & \xrightarrow{\tau_{(g_0p,g_0q)}} & g_0q + g_0p \end{array}$$

lo cual es cierto pues el cuadrado no es más que  $\tau'_{(k_1v_1s_0p, Id)}$ , y por tanto es conmutativo. En este cuadrado  $\tau'$  denota la (cuasi)-simetría definida en  $\mathcal{H}^I$  (véase la demostración del teorema 3.4.2).

Para probar que  $k_1(\tau'_{u_0p,u_0q}) = \tau_{f_0p,f_0q}$  se razona de forma análoga.

La demostración en el caso general se haría por inducción sobre la longitud de las palabras de  $p$  y  $q$ , aplicando repetidas veces que se verifica el axioma del hexágono. Veamos como se haría en el caso de que  $p$  tenga longitud 2 y  $q$  longitud 1 por ejemplo.

Tenemos  $p = u_0p_0 + u_1p_1$  y  $q = u_0q_0$ . Entonces se tiene que  $\tau'_{p,q} = (\tau'_{u_0p_0,u_0q_0} + Id_{u_1p_1}) \circ (Id_{u_0p_0} + \tau'_{u_1p_1,u_0q_0})$  de donde:

$$\begin{aligned} k_1(\tau'_{p,q}) &= k_1(\tau'_{u_0p_0,u_0q_0} + Id_{u_1p_1}) \circ k_1(Id_{u_0p_0} + \tau'_{u_1p_1,u_0q_0}) = \\ &= [k_1(\tau'_{u_0p_0,u_0q_0}) + Id_{k_0(u_1p_1)}] \circ [(Id_{k_0(u_0p_0)} + k_1(\tau'_{u_1p_1,u_0q_0}))] = \\ &= [\tau_{(k_0u_0p_0,k_0u_0q_0)} + Id_{k_0(u_1p_1)}] \circ [(Id_{k_0(u_0p_0)} + \tau_{(k_0u_1p_1,k_0u_0q_0)})] = \\ &= \tau_{(k_0u_0p_0+k_0u_1p_1,k_0u_0q_0)} = \tau_{k_0p,k_0q} \end{aligned}$$

Como ya hemos dicho, si tomáramos ahora  $p, q \in G_0 \amalg G_0$  arbitrarios, entonces  $p$  sería de la forma  $p = \sum_{i=1}^n u_i p_i$  mientras que  $q = \sum_{j=1}^m u_j q_j$  para algunos  $p_i, q_j \in G_0$  y la demostración se haría por inducción sobre  $n$  y  $m$  razonando de manera análoga al caso que hemos hecho. ■

Como consecuencia de estos dos últimos resultados tenemos:

**Corolario 3.4.15.** *El funtor  $(- \otimes I) : \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $(- \otimes I) : \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) es adjunto por la izquierda al funtor  $(-)^I : \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $(-)^I : \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ).*

*Demostración:* Recordemos que a nivel de  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  se tiene la anterior adjunción (pues los funtores  $(- \otimes I)$  y  $(-)^I$  son los trasladados por la equivalencia  $[_0\mathbf{T}_1] \cong \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  de los funtores  $(-\underline{\otimes}I)$  y  $(-)^I$ ), por tanto tenemos una biyección

$$\phi : \text{Hom}_{\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G} \otimes I, \mathcal{H}) \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G}, \mathcal{H}^I) : \varphi$$

para cualesquiera cat-grupos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ .

Recordemos que si tenemos  $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$  y llamamos  $f = \partial_1 h$  y  $g = \partial_0 h$  su aplicación adjunta  $\varphi(h) = k : \mathcal{G} \otimes I \rightarrow \mathcal{H}$  está definida

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{G_1 \amalg G_1 \amalg G_1}{B_1(G_*)} & \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & G_0 \amalg G_0 \\
 \downarrow k_1 & & \downarrow k_0 \\
 H_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & H_0
 \end{array}$$

con las condiciones  $k_0 u_0 = f_0$ ,  $k_0 u_1 = g_0$ ,  $k_1 v_0 = f_1$ ,  $k_1 v_2 = g_1$  y  $k_1 v_1$  se define para un elemento  $x : p \rightarrow q$  como:

$$k_1(x) = \left( \begin{array}{ccc} f_0(p) & \xrightarrow{f_0(x)} & f_0(q) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \xrightarrow{h_0(q)} & \vdots \\ \vdots & & g_0(q) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} f_0(p) & \cdots & \vdots \\ \downarrow h_0(p) & & \vdots \\ g_0(p) & \xrightarrow{g_0(x)} & g_0(q) \end{array} \right)$$

donde

$$\left( \begin{array}{ccc} f_0(p) & \xrightarrow{f_0(x)} & f_0(q) \\ \downarrow h_0(p) & & \downarrow h_0(q) \\ g_0(p) & \xrightarrow{g_0(x)} & g_0(q) \end{array} \right) = h_1(x)$$

Recíprocamente, dada  $k : \mathcal{G} \otimes I \rightarrow \mathcal{H}$  se define  $\phi(k) = h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}^I$

$$h_0(p) = \left( f_0(p) \xrightarrow{k_1 v_1 s_0 p} g_0(p) \right) \quad h_1(x : p \rightarrow q) = \left( \begin{array}{ccc} f_0(p) & \xrightarrow{f_1(x)} & f_0(q) \\ \downarrow h_0(p) & & \downarrow h_0(q) \\ g_0(p) & \xrightarrow{g_1(x)} & g_0(q) \end{array} \right)$$

Se observa claramente que  $\partial_1 h = k i_0$  y  $\partial_0 h = k i_1$ .

Ahora necesitamos comprobar que si tenemos  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  y  $k \in \text{Hom}_{\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G} \otimes I, \mathcal{H})$  entonces

$k \in \text{Hom}_{\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G} \otimes I, \mathcal{H})$  si y sólo si  $h = \phi(k) \in \text{Hom}_{\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G}, \mathcal{H}^I)$ ,

y un resultado análogo para  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ .

La proposición 3.4.14 y el corolario 3.4.13 nos dicen que se verifica que  $k \in \text{Hom}_{\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G} \otimes I, \mathcal{H})$  si y sólo si  $ki_0, ki_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  si y sólo si  $\partial_1 h, \partial_0 h \in \text{Hom}_{\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  si y sólo si  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})}(\mathcal{G}, \mathcal{H}')$ . ■

Como consecuencia de todo lo anterior tenemos que:

**Corolario 3.4.16.** Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  cat-grupos, cat-grupos trenzados o cat-grupos simétricos y sean  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  dos morfismos en la categoría correspondiente. Entonces dar una transformación natural (que sea morfismo de grupos) de  $f$  a  $g$  es equivalente a dar un morfismo  $k : \mathcal{G} \otimes I \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $ki_0 = f$  y  $ki_1 = g$ .

**Corolario 3.4.17.** Sean  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ), y supongamos que  $\mathcal{G}$  es  $S$ -cofibrante y  $\mathcal{H}$  es  $S$ -fibrante, y sean  $f, g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ . Entonces  $f$  es homotópico por la derecha a  $g$  si y sólo si  $f$  es homotópico por la izquierda a  $g$  si y sólo si  $f$  y  $g$  son simplicialmente homotópicos (vistos como morfismos en  $[_r\mathbf{T}_{r+1}]$ ) si y sólo si existe una transformación natural de  $f$  a  $g$  que sea morfismo de grupos.

**Corolario 3.4.18.** Dados  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$ ) donde  $\mathcal{G}$  es  $S$ -cofibrante y  $\mathcal{H}$  es  $S$ -fibrante, entonces

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp}))}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \text{ o } \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}))}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = [\mathcal{G}, \mathcal{H}]$$

donde  $[\mathcal{G}, \mathcal{H}]$  denota el conjunto de clases de isomorfismos naturales de funtores “trenzados” (resp. “simétricos”) de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{H}$ .

### 3.5 Teoría de homotopía de módulos cruzados, 2-módulos cruzados reducidos y módulos cruzados estables

Al igual que hemos identificado construcciones de espacio de arcos y cilindro en las categorías  $\mathcal{Cat}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathcal{BCat}(\mathbf{Gp})$  y  $\mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  así como las homotopías entre morfismos en estas categorías, habiendo obtenido una expresión sencilla del espacio de arcos (en términos de cuadrados conmutativos) así como del concepto de homotopía (en términos de transformaciones naturales), identificamos ahora estas construcciones en las categorías  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$ ,  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  y  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ .

Empezamos recordando de forma breve cual es la estructura de modelos en estas categorías. Dados  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$ ,  $\mathcal{L}' : (L' \xrightarrow{\rho'} M') \in \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$

y un morfismo  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  se tiene que  $f$  es una fibriación si  $f_1 : L \rightarrow L'$  es sobreyectivo,  $f$  es una equivalencia débil si los morfismos  $Coker(\rho) \rightarrow Coker(\rho')$  y  $Ker(\rho) \rightarrow Ker(\bar{\rho})$  son isomorfismos, y una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibriaciones triviales.

En el caso de que  $f$  sea un morfismo en  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{red}(\mathbf{Gp})$  o  $\chi\mathbf{M}_{st}(\mathbf{Gp})$  y  $S$  un sistema multiplicativo de  $\mathbb{Z}$  entonces  $f$  es una equivalencia débil si los morfismos  $S^{-1}Coker(\rho) \rightarrow S^{-1}Coker(\rho')$  y  $S^{-1}Ker(\rho) \rightarrow S^{-1}Ker(\rho')$  son isomorfismos,  $f$  es una fibriación si  $f_1$  es sobreyectivo,  $Coker(\rho)$  es  $S$ -libre de torsión y si consideramos  $\bar{\rho}$  como la restricción del morfismo  $\rho$  a  $Ker(f_1) \rightarrow Ker(f_0)$  entonces  $Coker(\bar{\rho})$  y  $Ker(\bar{\rho})$  son  $S$ -únicamente divisibles y  $f$  es una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibriaciones triviales.

Supongamos que partimos de un modulo cruzado  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$  y sea

$\Phi(\mathcal{L}) : \left( L \times M \begin{array}{c} \xleftarrow{I} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} M \right)$  el cat-grupos asociado. Si ahora calculamos  $(\Phi(\mathcal{L}))^I$  obtenemos el cat-grupo cuyos objetos son los elementos de  $L \times M$  y cuyos morfismo son los cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{(l,m)} & \rho(l) + m \\ (l_1,m) \downarrow & & \downarrow (l',\rho(l)+m) \\ \rho(l_1) + m & \xrightarrow{(l_2,\rho(l_1)+m)} & \rho(l' + l) + m \end{array}$$

Puesto que las dos composiciones que aparecen son  $(l' + l, m)$  y  $(l_2 + l_1, m)$ , decir que el cuadrado es conmutativo es equivalente a decir que  $l' + l - l_1 - l_2 = 0$ . Los morfismos  $s, t$  e  $I$  están definidos por:

$$I(l, m) = \left( \begin{array}{ccc} m & \xlongequal{\quad} & m \\ \downarrow (l,m) & & \downarrow (l,m) \\ \rho(l) + m & \xlongequal{\quad} & \rho(l) + m \end{array} \right)$$

$$(s, t) \left( \begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{(l,m)} & \rho(l) + m \\ (l_1,m) \downarrow & & \downarrow (l',\rho(l)+m) \\ \rho(l_1) + m & \xrightarrow{(l_2,\rho(l_1)+m)} & \rho(l' + l) + m \end{array} \right) = ((l_1, m), (l', \rho(l) + m))$$

mientras que  $(\partial_0, \partial_1)$  es

$$(\partial_0, \partial_1)(l, m) = (\rho(l) + m, m)$$

$$(\partial_0, \partial_1) \left( \begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{(l,m)} & \rho(l) + m \\ (l_1, m) \downarrow & & \downarrow (l', \rho(l) + m) \\ \rho(l_1) + m & \xrightarrow{(l_2, \rho(l_1) + m)} & \rho(l' + l) + m \end{array} \right) = ((l_2, \rho(l_1) + m), (l, m))$$

El espacio de arcos  $\mathcal{L}^I$  es entonces  $\Phi^{-1}(\Phi(\mathcal{L})^I)$ , que a continuación describimos, para lo cual calculamos  $Ker(s)$

$$Ker(s) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{(l,0)} & \rho(l) \\ & \searrow (l_2,0) & \downarrow (l', \rho(l)) \\ & & \rho(l' + l) \end{array} \right\} \equiv \{(l, l', l_2) \in L^3 / l' + l - l_2 = 0\} \equiv L^2$$

Teniendo en cuenta que  $(l', \rho(l)) + (l'_1, \rho(l_1)) = (l' + \rho(l)l'_1, \rho(l) + \rho(l_1)) = (l' + l - l'_1 - l, \rho(l) + \rho(l_1))$  deducimos que la suma en  $L^2$  está dada por  $(l', l) + (l'_1 l_1) = (l' + l + l'_1 - l, l + l_1)$ , es decir, tenemos que  $Ker(s) \cong L \times L$  donde  $L$  actúa sobre sí mismo por conjugación.

La aplicación  $\bar{\rho} : L \times L \rightarrow L \times M$  viene dada por

$$\bar{\rho}(l', l) = \bar{\rho} \left( \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{(l,0)} & \rho(l) \\ & \searrow (l_2,0) & \downarrow (l', \rho(l)) \\ & & \rho(l' + l) \end{array} \right) = (l', \rho(l))$$

Por último, la acción de  $L \times M$  sobre  $L \times L$  viene dada por

$$\begin{aligned} (l_1, m)(l', l) &= I(l_1, m) + (l', m) - I(l_1, m) = \left( \begin{array}{ccc} m & \xlongequal{\quad} & m \\ \downarrow (l_1, m) & & \downarrow (l_1, m) \\ \rho(l_1) + m & \xlongequal{\quad} & \rho(l_1) + m \end{array} \right) + \\ &+ \left( \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{(l,0)} & \rho(l) \\ \parallel & & \downarrow (l', \rho(l)) \\ 0 & \xrightarrow{(l'+l,0)} & \rho(l' + l) \end{array} \right) - \left( \begin{array}{ccc} m & \xlongequal{\quad} & m \\ \downarrow (l_1, m) & & \downarrow (l_1, m) \\ \rho(l_1) + m & \xlongequal{\quad} & \rho(l_1) + m \end{array} \right) = \\ &\left( \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{(m, l, 0)} & m + \rho(l) - m \\ \parallel & & \downarrow (l_1 + m l' - m + \rho(l) - m, l_1, \rho(m l)) \\ 0 & \xrightarrow{(\rho(l_1) + m l' + l, 0)} & \rho(l_1) + m + \rho(l' + l) - m - \rho(l_1) \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$= (l_1 + {}^m l' - {}^{m+\rho(l)-m} l_1, {}^m l)$$

Podemos resumir ésto en la siguiente proposición.

**Proposición 3.5.1.** Sea  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$  un módulo cruzado. Entonces el módulo cruzado  $\mathcal{L}^I : \left( \begin{array}{ccc} L \times L & \xrightarrow{\bar{\rho}} & L \times M \\ (l', l) & \longmapsto & (l', \rho(l)) \end{array} \right)$  donde  $L \times L$  es el producto semidirecto con acción de  $L$  sobre sí mismo por conjugación y la acción de  $L \times M$  sobre  $L \times L$  está definida por

$$({}^{l_1, m})(l', l) = (l_1 + {}^m l' - {}^{m+\rho(l)-m} l_1, {}^m l)$$

es un espacio de arcos para  $\mathcal{L}$ .

*Demostración:* Es rutinario comprobar que el objeto así definido es un módulo cruzado.

La factorización del morfismo diagonal

$$\mathcal{L} \xrightarrow{s} \mathcal{L}^I \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} \mathcal{L} \times \mathcal{L}$$

está dada por

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho} & M \\ s_1 \downarrow & & \downarrow s_0 \\ L \times L & \xrightarrow{\bar{\rho}} & L \times M \\ (\partial_0, \partial_1)_1 \downarrow & & \downarrow (\partial_0, \partial_1)_1 \\ L \times L & \xrightarrow{\rho \times \rho} & M \times M \end{array}$$

donde

$$s_0(m) = (0, m); \quad s_1(l) = (0, l)$$

$$(\partial_0, \partial_1)_0(l, m) = (\rho(l) + m, m); \quad (\partial_0, \partial_1)_1(l', l) = (l' + l, l)$$

Es fácil comprobar que todos los morfismos que aparecen son efectivamente morfismos en  $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$ . Veamos algunas de estas comprobaciones:

- $s_0 \rho(l) = (0, \rho(l)) = \bar{\rho}(0, l) = \bar{\rho} s_1(l)$
- $s_0(m) s_1(l) = ({}^{0, m})(0, l) = (0, {}^m l) = s_1({}^m l)$

También es claro que  $s$  es una equivalencia débil (i.e.  $\text{Ker}(\rho) \cong \text{Ker}(\bar{\rho})$  y  $\text{Coker}(\rho) \cong \text{Coker}(\bar{\rho})$ ) y que  $(\partial_0, \partial_1)$  es una fibración. ■

Asociado a este espacio de arcos hay una relación de homotopía (la relación de homotopía por la derecha). Sabemos que dados dos módulos cruzados  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$ ,  $\mathcal{L}' : (L' \xrightarrow{\rho'} M')$ , y dos aplicaciones  $f, g : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ , una homotopía por la derecha de  $f$  a  $g$  es un morfismo  $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  verificando que  $\partial_0 h = g$  y  $\partial_1 h = f$ . Veamos que quiere decir esto.

**Proposición 3.5.2.** *Sea,  $\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M)$ ,  $\mathcal{L}' : (L' \xrightarrow{\rho'} M') \in \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$ , y sean  $f, g : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  dos morfismos entre ellos. Existe una homotopía de  $f$  a  $g$  si y sólo si existe una  $f_0$ -derivación  $\eta : M \rightarrow L'$  tal que  $\eta\rho = g_1 - f_1$  y  $\bar{\rho}\eta = g_0 - f_0$ .*

*Demostración:* Recordemos en principio que una aplicación  $\eta : M \rightarrow L'$  se dice que es una  $f_0$ -derivación si para cualesquiera  $m, m' \in M$  se verifica que  $\eta(m + m') = \eta(m) + f_0(x)\eta(m')$ . Notemos que si  $\eta$  es una  $f_0$ -derivación entonces  $\eta(0) = 0$  y  $\eta(-m) = -(-f_0(m)\eta(m))$ .

Supongamos ya que  $h$  es una homotopía de  $f$  a  $g$ , es decir, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\rho} & M \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_0 \\
 L' \times L' & \xrightarrow{\bar{\rho}} & L' \times M' \\
 \downarrow (\partial_0, \partial_1)_1 & & \downarrow (\partial_0, \partial_1)_0 \\
 L' \times L' & \xrightarrow{\rho' \times \rho'} & M' \times M'
 \end{array}$$

$(g_1, f_1)$    $(g_0, f_0)$

Si  $h_0(m) = (l', m')$  entonces escribiremos  $h_{0,0}(m) = l'$  y  $h_{0,1}(m) = m'$ , es decir,  $h_0(m) = (h_{0,0}(m), h_{0,1}(m))$ . Análogamente, escribiremos  $h_1(l) = (h_{1,0}(l), h_{1,1}(l))$ .

Notemos que puesto que

$$\begin{aligned}
 (g_0(m), f_0(m)) &= (\partial_0, \partial_1)_0(h_0(m)) = (\partial_0, \partial_1)_0(h_{0,0}(m), h_{0,1}(m)) = \\
 &= (\rho'(h_{0,0}(m)) + h_{0,1}(m), h_{0,1}(m))
 \end{aligned}$$

se tiene que  $h_{0,1} = f_0$  y  $\rho'h_{0,0} = g_0 - f_0$  y como

$$(g_1(l), f_1(l)) = (\partial_0, \partial_1)_1(h_1(l)) = (\partial_0, \partial_1)_1(h_{1,0}(l), h_{1,1}(l)) =$$

$$= (h_{1,0}(l) + h_{1,1}(l), h_{1,1}(l))$$

se tiene también que  $h_{1,1} = f_1$  y  $h_{1,0} = g_1 - f_1$

Consideramos la aplicación  $\xi : L' \times M' \rightarrow L'$  definida por

$$\begin{array}{ccc} L' \times M' & \longrightarrow & L' \\ (l', m') & \longmapsto & l' \end{array}$$

Esta aplicación verifica que

$$\xi((l', m') + (l'_1, m'_1)) = \xi(l', m') + m'_1 \xi(l'_1, m'_1)$$

ya que  $\xi((l', m') + (l'_1, m'_1)) = \xi(l' + m'_1 l'_1, m' + m'_1) = l' + m'_1 l'_1 = \xi(l', m') + m'_1 \xi(l'_1, m'_1)$ .

Sea ahora  $\eta : M \rightarrow L'$  definida como  $\eta = \xi h_0 = h_{0,0}$ . Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \eta(m + m') &= \xi h_0(m + m') = \xi(h_0(m) + h_0(m')) = \\ &= \xi(h_0(m)) + h_{0,1} \xi(h_0(m')) = \eta(m) + f_0(m) \eta(m') \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \eta \rho(l) &= \xi h_0 \rho(l) = \xi \bar{\rho} h_1(l) = \xi \bar{\rho}(h_{1,0}(l), h_{1,1}(l)) = \\ &= \xi \bar{\rho}(g_1(l) - f_1(l), f_1(l)) = \xi(g_1(l) - f_1(l), \rho(f_1(l))) = g_1(l) - f_1(l) \end{aligned}$$

y

$$\rho' \eta(m) = \rho' \xi h_0(m) = \rho' \xi(h_{0,0}(m), h_{0,1}(m)) = \rho'(h_{0,0}(m)) = g_0(m) - f_0(m)$$

como queríamos.

Recíprocamente, supongamos que tenemos  $\eta : L \rightarrow M'$  una  $f_0$ -derivación

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho} & M \\ f_1 \downarrow & \eta \swarrow & \downarrow f_0 \\ L' & \xrightarrow{\rho'} & M' \end{array}$$

tal que  $\eta \rho = g_1 - f_1$  y  $\rho' \eta = g_0 - f_0$ . Definimos entonces  $h_0 : M \rightarrow L' \times M'$  y  $h_1 : L \rightarrow L' \times L'$  como

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & L' \times M' \\ m & \longmapsto & (\eta(m), f_0(m)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & L' \times L' \\ l & \longmapsto & (\eta \rho(l), f_1(l)) \end{array}$$

y veamos que  $h$  es una homotopía. Tenemos que

$$h_0\rho(l) = (\eta\rho(l), f_0\rho(l)) = (\eta\rho(l), \rho' f_1(l)) = \bar{\rho}(\eta\rho(l), f_1(l)) = \bar{\rho}h_1(l)$$

$$\begin{aligned} h_0(m + m') &= (\eta(m + m'), f_0(m + m')) = \\ &= (\eta(m) + f_0^{(m)}\eta(m'), f_0(m) + f_0(m')) = (\eta(m), f_0(m)) + (\eta(m'), f_0(m')) = \\ &= h_0(m) + h_0(m') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1(l + l') &= (\eta\rho(l + l'), f_1(l + l')) = (\eta(\rho(l) + \rho(l')), f_1(l + l')) = \\ &= (\eta\rho(l) + f_0^{(\rho(l))}\eta\rho(l'), f_1(l + l')) = (\eta\rho(l) + \rho' f_1(l)\eta\rho(l'), f_1(l + l')) = \\ &= (\eta\rho(l) + f_1(l) + \eta\rho(l') - f_1(l), f_1(l) + f_1(l')) = (\eta\rho(l), f_1(l)) + (\eta\rho(l'), f_1(l')) = \\ &= h_1(l) + h_1(l') \end{aligned}$$

Se tiene que  $h_1(m'l) = (\eta\rho(m'l), f_1(m'l))$ . Para probar que  $h_1(m'l) = h_0^{(m)}h_1(l)$  calculamos  $\eta\rho(m'l)$

$$\begin{aligned} \eta\rho(m'l) &= \eta(m + \rho(l) - m) = \eta(m) + f_0^{(m)}\eta(\rho(l) - m) = \\ &= \eta(m) + f_0^{(m)} [\eta\rho(l) + f_0^{(\rho(l))}\eta(-m)] = \\ &= \eta(m) + f_0^{(m)} [\eta\rho(l) + f_0^{(\rho(l)) - f_0^{(m)}}(-\eta(m))] = \\ &= \eta(m) + f_0^{(m)}\eta\rho(l) - (f_0^{(m)} + \rho' f_1(l) - f_0^{(m)})\eta(m) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} h_0^{(m)}h_1(l) &= (\eta^{(m), f_0^{(m)}})(\eta\rho(l), f_1(l)) = \\ &= \left( \eta(m) + f_0^{(m)}\eta\rho(l) - (f_0^{(m)} + \rho' f_1(l) - f_0^{(m)})\eta(m), f_0^{(m)} f_1(l) \right) \end{aligned}$$

y como  $f$  es un morfismo de módulos cruzados y por tanto  $f_1(m'l) = f_0^{(m)} f_1(l)$  se deduce fácilmente que  $h_1(m'l) = h_0^{(m)}h_1(l)$ .

Tal y como está definido es fácil comprobar que  $(\partial_0, \partial_1)h = (g, f)$ .

Por tanto,  $h$  es una homotopía de  $f$  a  $g$ . ■

Si ahora, dado un módulo cruzado  $\mathcal{L} : L \xrightarrow{\rho} M$  tomamos el módulo cruzado  $\Omega(\mathcal{L}) = Ker(\partial_0, \partial_1)$  obtenemos el módulo cruzado de lazos asociado a un módulo cruzado  $\mathcal{L}$ , y que puede ser descrito como  $\Omega(\mathcal{L}) : 0 \xrightarrow{0} Ker(\rho)$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{L} : K \xrightarrow{\rho} M$  es un 2-módulo cruzado reducido o un módulo cruzado estable, y calculamos  $(U(\mathcal{L}))^I$  (al que llamaremos, cuando no haya lugar a confusión  $\mathcal{L}^I$ ). Entonces, en este módulo cruzado existe un corchete que lo convierte en un 2-módulo cruzado reducido o un módulo cruzado estable, según el caso. Este corchete viene de la (cuasi)-simetría que había en  $(\Phi(\mathcal{L}))^I$  (ver teorema 3.4.2). Veamos como se define este corchete.

Este corchete será una aplicación  $\{-, -\} : (L \times M) \times (L \times M) \rightarrow L \times L$ , que sabemos está definida como

$$\{(l, m), (l', m')\} = \tau'_{(l', m'), (l, m)} - I_{(l, m)} - I_{(l', m')}$$

Teniendo en cuenta que  $\tau'_{(l', m'), (l, m)}$  es el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\tau} & \cdot \\ (l' + m', m' + m) \downarrow & & \downarrow (l + m', m + m') \\ \cdot & \xrightarrow{\tau} & \cdot \end{array}$$

obtenemos que  $\tau'_{(l', m'), (l, m)} - I_{(l, m)} - I_{(l', m')} =$

$$\begin{aligned} &= \left( \begin{array}{ccc} m' + m & \xrightarrow{\tau_{m', m}} & m + m' \\ \downarrow (l' + m', m' + m) & & \downarrow (l + m', m + m') \\ \rho(l') + m' + \rho(l) + m & \xrightarrow{\tau} & \rho(l_1) + m + \rho(l') + m' \end{array} \right) - \\ &- \left( \begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{(0, m)} & m \\ \downarrow (l, m) & & \downarrow (l, m) \\ \rho(l) + m & \xrightarrow{(0, \rho(l) + m)} & \rho(l) + m \end{array} \right) - \left( \begin{array}{ccc} m' & \xrightarrow{(0, m')} & m' \\ \downarrow (l', m') & & \downarrow (l', m') \\ \rho(l') + m' & \xrightarrow{(0, \rho(l') + m')} & \rho(l') + m' \end{array} \right) \\ &- \left( \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{({}^m l, 0)} & m + \rho(l) - m \\ \parallel & & \downarrow (l_1 + m' - m + \rho(l) - m, \rho({}^m l)) \\ 0 & \xrightarrow{(\rho(l_1) + m', l, 0)} & \rho(l_1) + m + \rho(l' + l) - m - \rho(l_1) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Como  $\tau_{m', m} = (\{m, m'\}, m' + m)$  deducimos que

$$\tau_{m', m} - (0, m) - (0, m') = (\{m, m'\}, 0)$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}
& (l + {}^m l', m + m') - (l, m) - (l', m') = \\
& = (l + {}^m l', m + m') + (-{}^m l, -m) + (-{}^{m'} l', -m') = \\
& = (l + {}^m l' - {}^{m+m'} l - {}^{m+m'} l', m + m' - m - m') = \\
& = (l + {}^m l' - {}^{m+m'} l - {}^{m+m'} l', m + m' - m - m') = \\
& = (l + {}^m l' + \rho\{m, m'\}(-{}^{m'} l - l'), m + m' - m - m') = \\
& = (l + {}^m l' + \{m, m'\} - {}^{m'} l - l' - \rho\{m, m'\}, m + m' - m - m')
\end{aligned}$$

de donde deducimos que  $\{(l, m), (l', m')\}$  vale

$$(l + {}^m l' + \{m, m'\} - {}^{m'} l - l' - \rho\{m, m'\}, \{m, m'\})$$

y el objeto  $\mathcal{L}^I$  con el corchete así definido es un 2-módulo cruzado reducido o un módulo cruzado estable (dependiendo de lo que sea  $\mathcal{L}$ ). Además, si  $\mathcal{L} \in \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{L} \in \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ ) entonces  $\mathcal{L}^I$  es un espacio de arcos para  $\mathcal{L}$ . Los morfismos  $s : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^I$  y  $(\partial_0, \partial_1) : \mathcal{L}^I \rightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{L}$  son “los mismos” que en el caso de módulos cruzados.

Como consecuencia de ésto, de la proposición 3.5.2 y de los resultados de la sección anterior tenemos:

**Corolario 3.5.3.** *Supongamos que tenemos  $(\mathcal{L} : (L \xrightarrow{\rho} M), \{-, -\})$  y  $(\mathcal{L}' : (L' \xrightarrow{\rho'} M'), \{-, -\})$  dos 2-módulos cruzados reducidos (resp. módulos cruzados estables) y sean  $f, g : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  dos morfismos entre ellos. Entonces existe una homotopía por la derecha  $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'^I$  si y sólo si existe una  $f_0$ -derivación  $\eta : M \rightarrow L'$  tal que  $\rho'\eta = g_0 - f_0$  y  $\eta\rho = g_1 - f_1$ .*

**Corolario 3.5.4.** *Sean  $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ ) y sea  $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'^I$  un morfismo en  $\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$ . Entonces  $h$  es un morfismo en  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ ) si y sólo si  $\partial_0 h, \partial_1 h$  son morfismos en  $\mathbf{2} - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ ).*

Podría darse también en módulos cruzados una construcción del cilindro  $\mathcal{L} \otimes I$  que valiera también para 2-módulos cruzados reducidos y módulos cruzados estables, y obtendríamos resultados análogos a los últimos de la sección anterior. No obstante, la descripción explícita de este objeto es bastante complicada (ímplicitamente lo tenemos dado como  $\mathcal{L} \otimes I = \Phi^{-1}(\Phi(\mathcal{L}) \otimes)$ ). Podemos eso sí concluir que

**Corolario 3.5.5.** *Dados  $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  donde  $\mathcal{L}$  es cofibrante. Entonces:*

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp}))}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = [\mathcal{L}, \mathcal{L}']$$

donde  $[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$  denota el conjunto de clases de homotopía de morfismos de módulos cruzados de  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{L}'$ .

**Corolario 3.5.6.** *Sean  $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in 2 - \chi\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{Gp})$  (resp.  $\chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$ ) donde  $\mathcal{L}$  es  $S$ -cofibrante y  $\mathcal{L}'$  es  $S$ -fibrante. Entonces*

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp}))}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = [\mathcal{L}, \mathcal{L}'] \quad \text{Hom}_{\text{Ho}(\chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp}))}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = [\mathcal{L}, \mathcal{L}']$$

donde  $[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$  denota el conjunto de clases de homotopía de morfismos de 2-módulos cruzados reducidos (resp. módulos cruzados estables) de  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{L}'$ .

### 3.6 Clasificación de clases de homotopía de aplicaciones continuas

La clasificación del conjunto  $[X, Y]$  de clases de homotopía de aplicaciones continuas punteadas entre dos CW-complejos  $X$  e  $Y$  es un problema clásico dentro de la Topología Algebraica que ha ido encontrando soluciones parciales a lo largo del tiempo. Así, por ejemplo:

1. Si  $X$  verifica que  $\pi_i(X) = 0 \forall i \neq 1$  e  $Y$  tiene un único grupo de homotopía no nulo en dimensión  $n \geq 2$ , entonces

$$[X, Y] \cong H^n(\pi_1(X), \pi_n(Y))$$

el  $n$ -ésimo grupo de comohología de Eilenberg-Mac Lane de  $\pi_1(X)$  con coeficientes en  $\pi_n(Y)$  (ver [35])

2. Si  $X$  es un CW-complejo e  $Y$  un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo  $(\pi, n)$  entonces

$$[X, Y] \cong H^n(X, \pi) \text{ cohomología singular de } X \text{ con coeficientes en } \pi.$$

3. Si  $X$  e  $Y$  son espacios de Eilenberg-Mac Lane de tipo  $(\pi, n)$ , entonces

$$[X, Y] \cong \text{Hom}_{\mathbf{Gp}}(\pi_n(X), \pi_n(Y)).$$

4. Si  $X$  e  $Y$  son tales que  $\pi_j(X) = \pi_j(Y) = 0, \forall j \neq 1, 2$ , entonces

$$[X, Y] \rho[\rho(X), \rho(Y)]$$

donde el segundo miembro es el conjunto de clases de homotopía de morfismos de módulos cruzados ([65]) o bien

$$[X, Y] \cong [\rho_2(X), \rho_2(Y)]$$

donde el segundo miembro es el conjunto de clases de isomorfía de funtores monoidales entre grupos categóricos (ver [25]).

5. Si  $X$  e  $Y$  son tales que  $\pi_j(X) = \pi_j(Y) = 0 \forall j \neq 2, 3$  entonces

$$[X, Y] = [\rho_3(X), \rho_3(Y)]$$

donde el segundo miembro denota el conjunto de clases de isomorfía de funtores monoidales trenzados (braided) entre grupos categóricos trenzados (ver [25]).

Utilizamos ahora los resultados de este capítulo para dar una descripción algebraica del conjunto  $[X, Y]$  cuando  $X$  e  $Y$  sean CW-complejos  $r$ -conexos y  $n$ -coconexos.

Sean  $X$  e  $Y$  dos CW-complejos con únicos grupos de homotopía no nulos  $\pi_i, r \leq i \leq n$ .

Si  $\mathcal{T}_r$  es la categoría de espacios topológicos  $(r-1)$ -conexos, la categoría  $Ho(\mathcal{T}_r)$  es equivalente a la categoría cuyos objetos son los CW-complejos punteados y  $(r-1)$ -conexos, y cuyos morfismos son las clases de homotopía de aplicaciones continuas que preservan el punto (ver [59]). Además, la teoría de homotopía en  $\mathcal{T}_r$  es equivalente a la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1}$ , y la equivalencia está dada por la equivalencia de ambas teorías con la de conjuntos simpliciales  $r$ -reducidos vía las adjunciones

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_r & & \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_r \\
 \downarrow \uparrow E_r & & \downarrow \uparrow \bar{w} \\
 \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) & & \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1} \\
 \downarrow \uparrow s & & \\
 \mathcal{T}_r & & 
 \end{array}$$

Para más detalles ver [59]

En particular se tiene que si  $X, Y$  son CW-complejos  $(r-1)$ -conexos

$$[X, Y] = \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{T}_r)}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\text{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1})}(GE_r S(X), GE_r S(Y))$$

y esto último, de acuerdo con [59] §2 proposición 3.6 es el conjunto

$$[GE_r S(X), GE_r S(Y)]$$

de clases de homotopía simplicial de morfismos de grupos simpliciales. Si tomamos  $\text{Ho}(\mathcal{T}_r)|_{n-cc}$  la subcategoría plena de  $\text{Ho}(\mathcal{T}_r)$  formada por los objetos  $n$ -coconexos se tiene

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{T}_r)|_{n-cc}}(X, Y) \cong \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\text{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1})|(n-1)-cc}(GE_r S(X), GE_r S(Y)) = \\ &= [GE_r S(X), GE_r S(Y)] \end{aligned}$$

Consideramos ahora la categoría  ${}_{[r-1]\mathbf{T}_{n-1}}$ . Esta categoría está relacionada con  $\text{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1}$  por la adjunción

$$\begin{array}{c} \text{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1} \\ \mathcal{P}_{n-1} \downarrow \uparrow J \\ {}_{[r-1]\mathbf{T}_{n-1}} \end{array}$$

e induce una equivalencia de categorías

$$\text{Ho}({}_{[r-1]\mathbf{T}_{n-1}}) \cong \text{Ho}(\text{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1}|_{(n-1)-cc})$$

luego  $[X, Y]$  puede ser identificado con

$$[GE_r S(X), GE_r S(Y)] \cong \text{Hom}_{\text{Ho}({}_{[r-1]\mathbf{T}_{n-1}})}(\mathcal{P}_{n-1} GE_r S(X), \mathcal{P}_{n-1} GE_r S(Y))$$

y esto último, teniendo en cuenta que  $GE_r S(X)$  es libre, y por tanto (ver proposición 3.1.7)  $\mathcal{P}_{n-1} GE_r S(X)$  es cofibrante es el conjunto

$$[\mathcal{P}_{n-1} GE_r S(X), \mathcal{P}_{n-1} GE_r S(Y)]$$

de clases de homotopía de morfismos de grupos simpliciales entre ellos (ver teorema 3.2.4)

Veamos ahora algunos casos particulares:

- Si  $r = 1$  y  $n = 2$ , es decir,  $X$  e  $Y$  son CW-complejos con grupos de homotopía nulos en dimensiones distintas de 1 y 2, entonces

$$[X, Y] \cong \text{Hom}_{\text{Ho}({}_{\{0\}\mathbf{T}_1})}(\mathcal{P}_1 GE_1 S(X), \mathcal{P}_1 GE_1 S(Y))$$

Si llamamos  $\rho_1$  al funtor  $\Psi\mathcal{P}_1GE_1S$  y  $\gamma_1$  a la composición  $\Phi\rho_1$  donde  $\Psi : [0\mathbf{T}_1] \rightarrow \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp})$  y  $\Phi : \chi\mathbf{M}(\mathbf{Gp}) \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{Gp})$  son las equivalencias dadas en la sección 3.3 tenemos que

$$[X, Y] \cong [\rho_1(X), \rho_1(Y)]$$

donde el último conjunto denota el conjunto de clases de homotopía de morfismos de módulos cruzados (donde las homotopías vienen dadas en términos de derivaciones, ver proposición 3.5.2) y que

$$[X, Y] \cong [\gamma_1(X), \gamma_1(Y)]$$

es decir, clases de isomorfismos naturales de morfismos de  $\gamma_1(X)$  a  $\gamma_1(Y)$ .

- Si  $r = 2$  y  $n = 3$ , o sea,  $X$  e  $Y$  son CW-complejos con grupos de homotopía nulos en dimensiones distintas de 2 y 3 y si definimos  $\rho_2 = \Psi\mathcal{P}_2GE_2S$  y  $\gamma_2 = \Phi\rho_2$  se tienen isomorfismos naturales

$$[X, Y] \cong [\rho_2(X), \rho_2(Y)] \cong [\gamma_2(X), \gamma_2(Y)]$$

es decir, clases de homotopía de morfismos de 2-módulos cruzados reducidos de  $\rho_2(X)$  a  $\rho_2(Y)$  (donde las homotopías, igual que en el caso anterior vienen dadas en términos de derivaciones (ver corolario 3.5.3)) o clases de isomorfismos naturales de morfismos de cat-grupos trenzados de  $\gamma_2(X)$  a  $\gamma_2(Y)$

- Si  $n = r + 1$  y  $r \geq 3$ , es decir,  $X$  e  $Y$  son CW-complejos con grupos de homotopía nulos en dimensiones distintas de  $r$  y  $r + 1$ , y consideramos los funtores  $\rho_r : \mathbf{Top} \rightarrow \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp})$  y  $\gamma_r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp})$  definidos como las composiciones

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{Simp}(\mathbf{Set}) & & \mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})_{r-1} & & [2\mathbf{T}_3] \\ & \nearrow S & & \searrow E_r & \nearrow G & \searrow p_r & \nearrow (\Omega')^{r-3} \\ \mathbf{Top} & & & \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})_r & & [r-1\mathbf{T}_r] & \xrightarrow{\Psi} \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp}) \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ & & & & & & \rho_r \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \xrightarrow{\rho_r} & \chi\mathbf{M}_{\text{st}}(\mathbf{Gp}) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{SCat}(\mathbf{Gp}) \\ & \searrow & \nearrow \gamma_r \\ & & \end{array}$$

entonces tenemos isomorfismos

$$[X, Y] \cong [\rho_r(X), \rho_r(Y)] \cong [\gamma_r(X), \gamma_r(Y)]$$

donde el último conjunto denota clases de isomorfismos naturales de morfismos de cat-grupos simétricos.

## Capítulo 4

# Modelos algebraicos para $n$ -tipos en categorías de diagramas

En esta sección abandonamos el caso conexo para encontrar modelos algebraicos para la teoría de homotopía de espacios sobre los que actúa un grupo  $H$ . Necesitamos por ello considerar grupoides simpliciales en lugar de grupos simpliciales.

Se pretende obtener una versión en todas dimensiones del resultado de Moerdijk-Svensson, [55], sobre clasificación de 2-tipos de homotopía equivariantes.

Estudiamos primero cuando, dada una categoría de modelos cerrada  $\underline{\mathbf{C}}$ , la categoría de  $\mathbf{I}$ -diagramas sobre  $\underline{\mathbf{C}}$  (a la que se denomina  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$ ) hereda la estructura de modelos de  $\underline{\mathbf{C}}$ . Los resultados obtenidos se particularizan para la categoría  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  (“versión” no conexa de la categoría  $n - \mathbf{Hypgd}(\mathbf{Gp})$ ) y se prueba la equivalencia de la categoría  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  con  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$  (teorema 4.2.8).

Posteriormente estudiamos el caso en que  $\mathbf{I}$  se la categoría órbita  $\mathbf{O}(H)$  asociada a un grupo  $H$ , y se combinan los resultados anteriores con la equivalencia entre la categoría de  $H$ -espacios y la de diagramas de espacios indizada en la categoría  $\mathbf{O}(H)$  para obtener una equivalencia de categorías  $H$ - $(n + 1)$ -tipos  $\simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-}\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd}))$  que en el caso  $n = 1$  nos da el resultado de Moerdijk-Svensson.

## 4.1 Estructuras de modelos cerradas para categorías de diagramas

En esta sección estudiamos como dotar a la categoría de  $\mathbf{I}$ -diagramas en  $\underline{\mathbf{C}}$  de una estructura de modelos (cuando  $\underline{\mathbf{C}}$  la tenga), para lo cual comenzamos recordando cual es la categoría de  $\mathbf{I}$ -diagramas en  $\underline{\mathbf{C}}$ .

**Definición 4.1.1.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría arbitraria e  $\mathbf{I}$  una categoría pequeña. La categoría de  $\mathbf{I}$ -diagramas en  $\underline{\mathbf{C}}$ , denotada por  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$ , es la categoría de funtores  $X : \mathbf{I}^{op} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ . Por tanto, dar un  $\mathbf{I}$ -diagrama en  $\underline{\mathbf{C}}$  es dar un objeto  $X(i) = X_i$  de  $\underline{\mathbf{C}}$  para cada objeto  $i \in \mathbf{I}$  y un morfismo  $u^* = X(u) : X_j \rightarrow X_i$  para cada morfismo  $u : i \rightarrow j$  tal que  $(uv)^* = v^*u^*$  e  $(Id)^* = Id$ .

Es claro que para cada categoría de diagramas  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$  y para cada objeto  $j \in \mathbf{I}$ , existe un funtor evaluación,  $j^* : \mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ , definido por  $j^*(X) = X(j)$ . Puesto que  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría de funtores, los límites y los colímites se calculan punto a punto, es decir, para cada  $j \in \mathbf{I}$  el funtor  $j^*$  preserva límites y colímites. Ésto no obstante puede deducirse fácilmente de las dos siguientes proposiciones:

**Proposición 4.1.2.** Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría cerrada bajo productos e  $\mathbf{I}$  una categoría pequeña. Entonces, para cada  $j \in \mathbf{I}$ , el funtor  $j^*$  tiene un adjunto por la derecha,  $j_*$ .

*Demostración:* Comenzamos definiendo el funtor  $j_* : \underline{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$ .

Dado  $A \in \underline{\mathbf{C}}$ ,  $j_*(A)$  debe ser un objeto de  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$ , es decir,  $j_*(A)$  es un funtor  $j_*(A) : \mathbf{I}^{op} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$ , que se define como sigue:

Para cada objeto  $i \in \mathbf{I}$ ,  $j_*(A)(i) = \prod_{u:j \rightarrow i} A_u$  donde  $A_u = A$

Para cada morfismo  $v : i \rightarrow i'$  debemos definir un morfismo  $\prod_{u':j \rightarrow i'} A_{u'} \rightarrow$

$\prod_{u:j \rightarrow i} A_u$ . y como el morfismo tiene rango un producto, basta definir para

cada morfismo  $u : j \rightarrow i$  un morfismo  $\prod_{u':j \rightarrow i'} A_{u'} \rightarrow A$ . Este morfismo es  $\pi_{vu}$ ,

es decir, la proyección correspondiente al factor  $vu : j \rightarrow i'$

Una vez definido  $j_*$  sobre objetos, lo definimos sobre morfismos, es decir, dado  $f : A \rightarrow B$ , debemos definir  $j_*(f)$  que ha de ser una transformación natural  $j_*(A) \Rightarrow j_*(B)$ . Por tanto, para cada  $i \in \mathbf{I}$  necesitamos un morfismo  $(j_*(f))_i : \prod_{u:j \rightarrow i} A_u \rightarrow \prod_{u:j \rightarrow i} B_u$  y este morfismo es el inducido por  $f$  para cada  $u : j \rightarrow i$ . Es clara la naturalidad de  $j_*(f)$ .

Veamos ahora que son funtores adjuntos, para lo cual vamos a definir, para cada  $X \in \mathbf{I-C}$  y para cada  $A \in \underline{\mathbf{C}}$ , biyecciones

$$\alpha : \text{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(j^*(X), A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{I-C}}(X, j_*(A))$$

$$\beta : \text{Hom}_{\mathbf{I-C}}(X, j_*(A)) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{\mathbf{C}}}(j^*(X), A).$$

Sea  $h : X_j \rightarrow A$  y queremos definir  $\alpha_h : X \Rightarrow j_*(A)$ , para lo cual necesitamos para cada  $i \in \mathbf{I}$  un morfismo  $(\alpha_h)_i : X_i \rightarrow j_*(A)(i) = \prod_{u:j \rightarrow i} A$ ; éste queda definido por la condición de que  $\pi_u \circ (\alpha_h)_i = f \circ X(u)$ .

Sea ahora  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{I-C}}(X, j_*(A))$ . Definimos  $\beta_g$  como la composición

$$X_j \xrightarrow{h_j} \prod_{u:j \rightarrow j} A \xrightarrow{\pi_{Id_j}} A$$

La demostración de la naturalidad de  $\alpha$  y  $\beta$ , así como la comprobación de que una es la inversa de la otra es rutinaria. Concluimos por tanto que  $j_*$  es un adjunto a derecha del funtor  $j^*$ . ■

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría cerrada bajo coproductos e  $\mathbf{I}$  una categoría pequeña. Entonces, para cada  $j \in \mathbf{I}$ , el funtor  $j^*$  tiene un adjunto por la izquierda,  $j_!$ .*

*Demostración:* Sea  $A \in \underline{\mathbf{C}}$ . Definimos  $j_!(A)$  como el funtor que asocia a cada  $i \in \mathbf{I}$  el objeto de  $\underline{\mathbf{C}}$ ,  $\prod_{u:i \rightarrow j} A_u$ , donde  $A_u = A$ . El resto de la demostración es análogo a la de la proposición 4.1.2 ■

Supongamos ahora que partimos de una categoría de modelos cerrada  $\underline{\mathbf{C}}$  y de una categoría pequeña  $\mathbf{I}$ . Queremos dotar a la categoría  $\mathbf{I-C}$  de una estructura de modelos (ver [43] para una estructura de modelos en  $\mathbf{I-Simp}(\text{Set})$ , o [55] para  $\mathbf{I-2-Gpd}$ ). Para ello, proponemos la siguiente definición:

**Definición 4.1.4.** *Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría completa y cocompleta en la que se tiene una estructura de modelos cerrada y sea  $\mathbf{I-C}$  la categoría de  $\mathbf{I}$ -diagramas en  $\underline{\mathbf{C}}$  para una categoría pequeña  $\mathbf{I}$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{I-C}$ . Diremos que:*

- i)  $f$  es una fibración si  $j^*(f)$  es una fibración en  $\underline{\mathbf{C}}$  para todo  $j \in \mathbf{I}$ .
- ii)  $f$  es una equivalencia débil si  $j^*(f)$  es una equivalencia débil en  $\underline{\mathbf{C}}$  para todo  $j \in \mathbf{I}$ .
- iii)  $f$  es una cofibración si tiene la LLP respecto a las fibraciones triviales.

Damos ahora unos resultados que nos hablan del comportamiento de estos funtores  $j_*$ ,  $j^*$  y  $j!$  respecto a las fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles.

**Lema 4.1.5.** *Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría de modelos cerrada que además es completa y cocompleta y sea  $\mathbf{I}$  una categoría pequeña. Entonces, para cada  $j \in \mathbf{I}$ , el functor  $j_*$  preserva fibraciones y fibraciones triviales.*

*Demostración:* Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\underline{\mathbf{C}}$  y supongamos que es una fibración (resp. fibración trivial). Queremos ver que  $j_*(f)$  es una fibración (resp. fibración trivial), para lo cual debemos calcular  $i^*(j_*(f))$  para cualquier  $i \in \mathbf{I}$ , y ver si es o no fibración (resp. fibración trivial). Ahora bien,  $i^*(j_*(f)) = \prod_{u:j \rightarrow i} f$ , y puesto que en una categoría de modelos cerrada el producto de fibraciones (resp. fibraciones triviales) es una fibración (resp. fibración trivial) deducimos que  $j_*(f)$  es una fibración (resp. fibración trivial). ■

**Lema 4.1.6.** *Si  $\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría de modelos completa y cocompleta e  $\mathbf{I}$  es una categoría pequeña, para cada  $j \in \mathbf{I}$  el functor  $j^*$  preserva cofibraciones y cofibraciones triviales.*

*Demostración:* Sea  $f : X \rightarrow Y$  una cofibración en  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$  y sea  $j \in \mathbf{I}$  un objeto de  $\mathbf{I}$ . Para probar que  $j^*(f)$  es una cofibración, debemos encontrar levantamiento en cada diagrama de la forma:

$$\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & A \\ j^*(f) \downarrow & & \downarrow g \\ Y_j & \longrightarrow & B \end{array} \quad \text{donde } g \text{ es una fibración trivial.}$$

Por la adjunción  $j^* \vdash j_*$ , encontrar levantamiento en el diagrama anterior es equivalente a encontrarlo en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & j_*(A) \\ f \downarrow & & \downarrow j_*(g) \\ Y & \longrightarrow & j_*(B) \end{array}$$

y en este diagrama es posible encontrarlo pues  $f$  es una cofibración y  $j_*(g)$  es una fibración trivial, de acuerdo con el lema 4.1.5.

Puesto que  $j^*$  preserva cofibraciones y equivalencias débiles, es evidente que  $j^*$  preserva cofibraciones triviales. ■

**Lema 4.1.7.** *En las mismas condiciones del lema 4.1.6, el functor  $j_!$  preserva cofibraciones y cofibraciones triviales.*

*Demostración:* Supongamos que  $f : A \rightarrow B$  es una cofibración en  $\underline{\mathbf{C}}$ . Para probar que  $j_!(f)$  es una cofibración en  $\mathbf{I-C}$  debemos encontrar levantamiento en cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccc} j_!(A) & \longrightarrow & X \\ j_!(f) \downarrow & & \downarrow g \\ j_!(B) & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{donde } g \text{ es una fibración trivial en } \mathbf{I-C},$$

lo cual es fácil, utilizando la adjunción  $j_! \vdash j^*$  y las definiciones de fibración y equivalencia débil en  $\mathbf{I-C}$ .

Supongamos ahora que  $f : A \rightarrow B$  es una cofibración trivial. Acabamos de ver que  $j_!(f)$  es una cofibración. Por otra parte,  $i^*(j_!(f)) = \coprod_{u:i \rightarrow j} f$ , y puesto que el coproducto de cofibraciones triviales en una categoría de modelos es siempre una cofibración trivial, deducimos que  $i^*(j_!(f))$  es una cofibración trivial para cada  $i \in \mathbf{I}$ , y por tanto una equivalencia débil, lo que implica (ver definición 4.1.4) que  $j_!(f)$  es una equivalencia débil. Así deducimos que  $j_!(f)$  es una cofibración trivial. ■

Por último damos un lema referente al comportamiento de las cofibraciones y cofibraciones triviales en  $\mathbf{I-C}$  respecto a algunos colímites:

**Lema 4.1.8.** *i) Si  $f : X \rightarrow Y$  es una cofibración (resp. cofibración trivial) en  $\mathbf{I-C}$  y  $X \rightarrow Z$  es un morfismo cualquiera, entonces el morfismo  $\hat{f} : Z \rightarrow Y \coprod_X Z$  es también una cofibración (resp. cofibración trivial).*

*ii) Si  $\{f_k : X_k \rightarrow Y_k\}_{k \in K}$  es una familia de cofibraciones (resp. cofibraciones triviales) en  $\mathbf{I-C}$ , el morfismo  $\coprod_{k \in K} f_k : \coprod_{k \in K} X_k \rightarrow \coprod_{k \in K} Y_k$  es una cofibración (resp. cofibración trivial).*

*iii) Si  $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow \dots$  es una sucesión de cofibraciones (resp. equivalencias débiles) en  $\mathbf{I-C}$ , el morfismo  $X_0 \rightarrow \lim_{\rightarrow} X_n$  es una cofibración (resp. cofibración trivial).*

*Demostración:* Probemos i) y el resto se hace de manera análoga.

Partimos de una cofibración  $f : X \rightarrow Y$ , y necesitamos encontrar levantamiento en cualquier diagrama

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & U \\ \hat{f} \downarrow & & \downarrow g \\ Y \coprod_X Z & \longrightarrow & V \end{array} \quad \text{donde } g \text{ es una fibración trivial}$$

para lo cual encontramos levantamiento  $s : Y \rightarrow U$  en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{u} & U \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \longrightarrow & Y \coprod_X Z & \longrightarrow & V \end{array}$$

y los morfismos  $u$  y  $s$  determinarán el levantamiento en el diagrama (1), lo que probará que  $\hat{f}$  es una cofibración.

Si ahora el morfismo  $f$  es una cofibración trivial, sabemos, por lo que acabamos de probar que  $\hat{f}$  es una cofibración. Veamos que es equivalencia débil para ello, sea  $j \in \mathbf{I}$  y consideremos el diagrama en  $\underline{\mathbf{C}}$

$$\begin{array}{ccc} j^*(X) & \longrightarrow & j^*(Z) \\ j^*(f) \downarrow & & \downarrow j^*(\hat{f}) \\ j^*(Y) & \longrightarrow & j^*(Y \coprod_X Z) \end{array}$$

Dado que los límites en las categorías de diagramas se calculan punto a punto, este diagrama es cocartesiano. Además,  $j^*(f)$  es una equivalencia débil (ver definición 4.1.4) y una cofibración (ver lema 4.1.6), de donde  $j^*(f)$  es una cofibración trivial. Usamos ahora que  $\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría de modelos cerrada para concluir que  $j^*(\hat{f})$  es una cofibración trivial, y por tanto una equivalencia débil para cualquier  $j \in \mathbf{I}$ . Ésto nos prueba que  $\hat{f}$  es una cofibración trivial. ■

Vamos a demostrar ya el teorema principal de esta sección, que nos da unas condiciones suficientes sobre la categoría  $\underline{\mathbf{C}}$  y su estructura de modelos para que la categoría de  $\mathbf{I}$ -diagramas en  $\underline{\mathbf{C}}$  tenga también una estructura de modelos con las definiciones dadas en la definición 4.1.4.

**Teorema 4.1.9.** *Sea  $\underline{\mathbf{C}}$  una categoría de modelos cerrada completa y co-completa. Sean  $\{A_\lambda \rightarrow B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  y  $\{A_\gamma \rightarrow B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  dos familias de morfismos*

en  $\underline{\mathbf{C}}$  de forma que tanto  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  como  $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  son secuencialmente pequeños. Supongamos que un morfismo  $f$  en  $\underline{\mathbf{C}}$  es una fibrición (resp. fibrición trivial) si y sólo si  $f$  tiene la RLP con respecto a  $\{A_\lambda \rightarrow B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  (resp.  $\{A_\gamma \rightarrow B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ). Entonces la categoría  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$  es una categoría de modelos cerrada con la estructura dada en la definición 4.1.4.

Antes de entrar en la demostración del teorema hacemos dos resultados previos.

**Lema 4.1.10.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{I}\text{-}\underline{\mathbf{C}}$ . Entonces  $f$  es una fibrición (resp. fibrición trivial) si y sólo si tiene la RLP con respecto a  $\{j_!A_\lambda \rightarrow j_!B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda, j \in \mathbf{I}}$  (resp.  $\{j_!A_\gamma \rightarrow j_!B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma, j \in \mathbf{I}}$ ).*

*Demostración:* Supongamos que  $f$  es una fibrición y que tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} j_!A_\lambda & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ j_!B_\lambda & \longrightarrow & Y \end{array}$$

el cual determina, por la adjunción  $j_! \vdash j^*$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_\lambda & \longrightarrow & j^*(X) \\ \downarrow & & \downarrow j^*(f) \\ B_\lambda & \longrightarrow & j_!(B) \end{array}$$

en el que existe levantamiento puesto que  $j^*(f)$  es una fibrición. Por tanto, en el diagrama de partida existe también levantamiento. Recíprocamente, si  $f$  tiene la RLP respecto a  $\{j_!A_\lambda \rightarrow j_!B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda, j \in \mathbf{I}}$  y queremos probar que es una fibrición, debemos demostrar que  $j^*(f)$  es una fibrición para cada  $j \in \mathbf{I}$ , lo que quiere decir que para cada  $j \in \mathbf{I}$  debemos encontrar levantamiento en cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_\lambda & \longrightarrow & j^*(X) \\ \downarrow & & \downarrow j^*(f) \\ B_\lambda & \longrightarrow & j_!(B) \end{array}$$

y un razonamiento semejante al anterior nos muestra que el levantamiento existe. ■

**Lema 4.1.11.** *Los objetos  $j_!A_\lambda$  y  $j_!A_\gamma$  son secuencialmente pequeños.*

*Demostración:* Se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{I-C}}(j^!A_\lambda, \lim_{\rightarrow} X_n) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_\lambda, j^* \lim_{\rightarrow} X_n) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_\lambda, \lim_{\rightarrow} j^* X_n) \cong \\ &\cong \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_\lambda, j^* X_n) \cong \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_{\mathbf{I-C}}(j^!A_\lambda, X_n) \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $j^*$  preserva colímites puesto que tiene adjunto por la derecha. ■

Demostremos a continuación el teorema 4.1.9

*Demostración:* Probemos que se verifican los axiomas CM1-5. Es claro que CM1, CM2 y CM3 se verifican en este caso. Probemos CM5, para lo cual usaremos el argumento del objeto pequeño.

Comenzamos probando la parte de CM5 factorizando cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$  como una cofibración trivial seguido de una fibración. Para ello, consideramos todos los diagramas conmutativos de la forma

$$(\mu) \quad \begin{array}{ccc} j^!A_\lambda & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ j^!B_\lambda & \longrightarrow & Y \end{array}$$

y definimos el objeto  $X_0$  y el morfismo  $k_0$  mediante el siguiente diagrama cocartesiano:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\mu} j^!A_\lambda & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow k_0 \\ \coprod_{\mu} j^!B_\lambda & \longrightarrow & X_0 \end{array}$$

y el morfismo  $p_0$  por la correspondiente propiedad universal

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\mu} j^!A_\lambda & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow k_0 \\ \coprod_{\mu} j^!B_\lambda & \longrightarrow & X_0 \end{array} \begin{array}{c} \searrow f \\ \downarrow p_0 \\ \longrightarrow Y \end{array}$$

Dado que  $A_\lambda \rightarrow B_\lambda$  son cofibraciones triviales en  $\mathbf{C}$  (y por tanto tienen la LLP con respecto a las fibraciones triviales por estar en una categoría



nos dice que  $p$  es también una equivalencia débil, y por tanto en los siguientes diagramas existen levantamientos  $s$  y  $t$

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{v} & U_\infty \\
 u \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\
 V & \xlongequal{\quad} & V
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & X \\
 v \downarrow & \nearrow t & \downarrow f \\
 U_\infty & \xrightarrow{p} & V \longrightarrow Y
 \end{array}$$

El morfismo  $ts$  es finalmente un levantamiento en el diagrama de partida. ■

## 4.2 diagramas de n-tipos

En esta sección consideramos la subcategoría de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  cuyos objetos tiene complejo de Moore trivial en dimensiones  $> n$  (en el sentido de que contiene sólo identidades) y la dotamos de una estructura de modelos a partir de la estructura de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .

Recordemos que la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  (ver sección 1.4.1) tiene una estructura de modelos que está definida a partir de las estructuras de  $\mathbf{Gpd}$  y de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gp})$  y que la teoría de homotopía asociada a dicha estructura es equivalente a la teoría de homotopía en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  (ver [31]).

Sea  $X$  un objeto de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .  $X$  podemos representarlo mediante un diagrama simplicial

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & s_{n-1} & & s_1 & & s_0 \\
 & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\
 \cdots & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} & \cdots & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\
 & \downarrow s & \downarrow t & \downarrow t \\
 \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \xlongequal{\quad} & O
 \end{array}$$

y el complejo de Moore de  $X$  (ver sección 1.3) como el siguiente complejo de cadenas de grupoides

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & N_n X & \xrightarrow{\bar{d}_n} & N_{n-1} X & \cdots & N_2 X & \xrightarrow{\bar{d}_2} & N_1 X & \xrightarrow{\bar{d}_1} & N_0 X \\
 & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \xlongequal{\quad} & O
 \end{array}$$

Denotaremos por  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  a la subcategoría plena de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  formada por aquellos objetos  $X$  tales que  $N_q(X)$  contiene sólo identidades para  $q \geq n + 1$ . Esta subcategoría de  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  es una subcategoría

reflexiva, y el functor reflector  $\mathcal{P}_n : \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_* \rightarrow \mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ , adjunto por la izquierda a la inclusión  $J$  está definido, para cada  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  como la imagen por el functor  $\text{cosk}^{n+1}$  del siguiente grupoide simplicial truncado

$$\left( \begin{array}{ccccccc} X_{n+1} & \rightrightarrows & X_n & \rightrightarrows & X_{n-1} & \rightrightarrows & \cdots \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0 \\ \bigcap_{i=1}^{n+1} d_i^{-1}(d_{n+1}N_{n+1}X) & \rightrightarrows & d_{n+1}(N_{n+1}X) & \rightrightarrows & \cdots & \rightrightarrows & \cdots \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0 \\ s \downarrow t & & s \downarrow t & & s \downarrow t & & \cdots s \downarrow t \quad s \downarrow t \\ O & \rightrightarrows & O & \rightrightarrows & O & \rightrightarrows & \cdots \rightrightarrows O \rightrightarrows O \end{array} \right)$$

En la misma línea que la utilizada en [22] para el caso de grupos simpliciales, utilizamos ahora la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$  para definir en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  una estructura de modelos:

**Definición 4.2.1.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . Diremos que:

- i)  $f$  es una *fibración* si  $Jf$  es una *fibración* en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .
- ii)  $f$  es una *equivalencia débil* si  $Jf$  es una *equivalencia débil* en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ .
- iii)  $f$  es una *cofibración* si tiene la *LLP* con respecto a las *fibraciones triviales*.

**Teorema 4.2.2.** Con las definiciones anteriores, la categoría  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  es una categoría de modelos cerrada.

*Demostración:* El axioma CM1 se verifica claramente. Los límites se calculan como en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , y los colímites se calculan en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , y “pasamos” a  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  por el functor  $\mathcal{P}_n$ . Los axiomas CM2 y CM3 se demuestran fácilmente usando la adjunción  $\mathcal{P}_n \vdash J$ .

Para la demostración de CM5 usaremos que el functor  $\mathcal{P}_n$  preserva fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles. Entonces, si queremos factorizar un morfismo  $f$  como una cofibración (resp. cofibración trivial) seguido de una fibración trivial (resp. fibración), realizamos esa factorización en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , es decir, ponemos  $f = pi$  donde  $p$  es una fibración trivial (resp. fibración) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , e  $i$  es una cofibración (resp. cofibración trivial) en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ , y puesto que  $\mathcal{P}_n(f) = f$ , tenemos que  $f = \mathcal{P}_n(p)\mathcal{P}_n(i)$  es la factorización buscada.

Para demostrar CM4, supongamos que tenemos un diagrama conmutativo en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ u \downarrow & & \downarrow f \\ V & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{donde } u \text{ es una cofibración trivial y } f \text{ es una fibración.}$$

y factorizamos  $u$  como  $u = \mathcal{P}_n(p)\mathcal{P}_n(i)$  como acabamos de indicar, donde  $p$  es una cofibración trivial en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  e  $i$  es una fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$ . Es fácil comprobar que  $\mathcal{P}_n(p)$  tiene la propiedad de levantamiento respecto a las fibraciones. Utilizamos ahora un argumento análogo al usado en el teorema 2.1.6, y concluimos que el axioma CM4 se verifica en esta categoría. ■

Usando la caracterización que tenemos de las fibraciones y las fibraciones triviales en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  (ver sección 1.4.1 ejemplo 6), obtenemos fácilmente que:

**Proposición 4.2.3.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ .*

- i)  *$f$  es una fibración si y sólo si tiene la RLP respecto a  $\mathcal{P}_n F \Delta[q, q] \rightarrow \mathcal{P}_n F \Delta[q]$ ,  $q \geq 0$ .*
- ii)  *$f$  es una fibración trivial si y sólo si tiene la RLP respecto a  $\mathcal{P}_n F \overset{\bullet}{\Delta}[q] \rightarrow \mathcal{P}_n F \Delta[q]$ ,  $q \geq 0$ , y  $\mathcal{P}_n F \Delta[0, 0] \rightarrow \mathcal{P}_n F \overset{\bullet}{\Delta}[0]$ .*

*Demostración:* La demostración es clara si tenemos en cuenta la equivalencia entre diagramas en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

y diagramas en  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$  de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{P}_n V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

siempre que  $X, Y \in \mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . ■

Notemos que  $\mathcal{P}_n F \Delta[q, q] \rightarrow \mathcal{P}_n F \Delta[q]$  es un isomorfismo para  $q \geq n + 1$ , y que  $\mathcal{P}_n F \Delta[q] \rightarrow \mathcal{P}_n F \Delta[q]$  es isomorfismo para  $q > n + 1$ , y por tanto la propiedad de levantamiento respecto a esos morfismos no dice nada y puede ser suprimida de la proposición anterior.

Como consecuencia inmediata de esta proposición y del teorema 4.1.9, tenemos:

**Corolario 4.2.4.** *Si  $\mathbf{I}$  es una categoría pequeña, la categoría  $\mathbf{I-T}_n(\mathbf{Gpd})$ , con las definiciones dadas en la definición 4.1.4 es una categoría de modelos cerrada.*

Estudiamos a continuación la categoría  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$  y la comparamos con la categoría de 2-grupoide estudiada en [55]. Nuestro objetivo será probar que ambas son equivalentes y que la estructura de modelos en  $\mathbf{2 - Gpd}$  definida en [55] coincide, vía esta equivalencia, con la que acabamos dar a  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$ .

Recordemos que un 2-Grupoide es un grupoide  $X$  en el que para cada dos morfismos  $f, g : A \rightarrow B$  existe un conjunto de “deformaciones” o 2-celdas, que representaremos como sigue:

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \quad \text{o} \quad \alpha : f \Rightarrow g$$

de forma que para cada dos objetos  $A$  y  $B$ , el conjunto de morfismos de  $A$  en  $B$ ,  $X(A, B)$ , sea el conjunto de objetos de un nuevo grupoide donde los morfismos sean las deformaciones. A la composición en este grupoide la llamaremos composición vertical. Si tenemos  $\alpha : f \rightarrow g$  y  $\beta : g \rightarrow h$ , a la composición vertical de  $\alpha$  y  $\beta$  la denotaremos  $\beta * \alpha$  o  $\beta \cdot \alpha$ .

También existe una composición horizontal, de forma que si tenemos deformaciones

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \quad \text{y} \quad B \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{l} \end{array} C$$

le asociamos una deformación, que llamaremos  $\gamma \circ \alpha : kf \rightarrow lg$  o simplemente  $\gamma \alpha : kf \rightarrow lg$ .

Las composiciones vertical y horizontal están relacionadas, de forma que si tenemos un diagrama

$$A \begin{array}{ccc} \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \alpha & & \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{g} & \longrightarrow & \xrightarrow{l} \\ \Downarrow \beta & & \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{h} & & \xrightarrow{m} \end{array} B \begin{array}{ccc} \xrightarrow{k} & & \xrightarrow{l} \\ \Downarrow \gamma & & \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{l} & \longrightarrow & \xrightarrow{m} \\ \Downarrow \delta & & \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{m} & & \xrightarrow{m} \end{array} C$$

entonces  $(\delta \circ \beta) * (\gamma \circ \alpha) = (\delta * \gamma) \circ (\beta * \alpha)$  es decir,

$$\left[ \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{kf} & \\ A & \Downarrow \beta \alpha & C \\ & \xrightarrow{lg} & \\ & \Downarrow \delta \beta & \\ & \xrightarrow{mh} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ A & \Downarrow * \alpha & B \\ & \xrightarrow{h} & \\ & \Downarrow * \alpha & \\ & \xrightarrow{m} & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{k} & \\ B & \Downarrow * \gamma & C \\ & \xrightarrow{m} & \end{array} \right]$$

que es la condición necesaria para que un 2-Grupoide sea una categoría interna en la categoría de grupoides.

Si  $X$  es un 2-grupoide,  $X$  lo representaremos por medio de un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ & \xrightarrow{d_1} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xlongequal{\quad} & O \\ \downarrow t & & \downarrow t \end{array}$$

donde  $O$  es el conjunto de objetos,  $X_0$  el conjunto de morfismos y  $X_1$  el conjunto de deformaciones. Aquí tanto  $X_0 \xrightarrow{s} O$  como  $X_1 \xrightarrow{s} O$  y como

$X_1 \xrightarrow[d_1]{d_0} X_0$  son grupoides, donde la composición en el primero es la composición que tiene  $X$  por ser grupoide, en el segundo es la composición horizontal de deformaciones y en el tercero la composición vertical de éstas.

Es conocido que en un 2-grupoide la composición vertical está determinada por la horizontal, pues:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ A & \Downarrow \alpha & B \\ & \xrightarrow{g} & \\ & \Downarrow \beta & \\ & \xrightarrow{h} & \end{array} = \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{g} & \\ A & \Downarrow \beta & B \\ & \xrightarrow{h} & \\ & \Downarrow \beta & \\ & \xrightarrow{h} & \end{array} \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{g^{-1}} & \\ B & \Downarrow * & A \\ & \xrightarrow{g^{-1}} & \\ & \Downarrow * & \\ & \xrightarrow{g^{-1}} & \end{array} \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ A & \Downarrow \alpha & B \\ & \xrightarrow{g} & \\ & \Downarrow \alpha & \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

es decir,  $\beta \cdot \alpha = \alpha \circ (s_0 g^{-1}) \circ \beta$ .

Los morfismos entre dos objetos en esta categoría son los morfismos entre esos mismos objetos en la categoría  $\mathbf{Gpd}(\mathbf{Gpd})$  (la categoría  $\mathbf{2-Gpd}$  es una subcategoría plena de  $\mathbf{Gpd}(\mathbf{Gpd})$ ) es decir, dados  $X, Y \in \mathbf{2-Gpd}$ ,

$$X = \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O & \xlongequal{\quad} & O \\ \downarrow t & & \downarrow t \end{array} \right) \quad Y = \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ Y_1 & \xrightarrow{d_1} & Y_0 \\ & \xrightarrow{d_0} & \\ \downarrow s & \downarrow t & \downarrow s \\ O' & \xlongequal{\quad} & O \\ \downarrow t & & \downarrow t \end{array} \right)$$

un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  consiste en tres aplicaciones  $\varphi_{0,0} = \varphi_{1,0} : O \rightarrow O'$ ,  $\varphi_{0,1} : X_0 \rightarrow Y_0$  y  $\varphi_{1,1} : X_1 \rightarrow Y_1$  de forma que:

$$\varphi_{0,*} : \left( X_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O \right) \rightarrow \left( Y_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O \right)$$

$$\varphi_{1,*} : \left( X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O \right) \rightarrow \left( Y_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O \right)$$

y

$$\varphi_{*,1} : \left( X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_0 \right) \rightarrow \left( Y_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} Y_0 \right)$$

sean morfismos en la categoría **Gpd**.

Recordemos la estructura de modelos en  $\mathbf{2 - Gpd}$  dada en [55].

- Un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  se dice una fibración (de Grothendieck) si siempre que tengamos un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_{0,0}(B) & \\ g \nearrow & & \searrow \varphi_{0,1}(f) \\ A & \xrightarrow{h} & \varphi_{0,0}(C) \\ & \alpha \Uparrow & \end{array}$$

existe  $\beta \in Y_1$  tal que  $\varphi_{1,1}(\beta) = \alpha$ .

- Un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  se dice una equivalencia débil si los morfismos  $\varphi_{0,*}$ ,  $\varphi_{1,*}$  y  $\varphi_{*,1}$  son equivalencias débiles de grupoides.

- Un morfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  se dice una cofibración si tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Damos por último dos resultados que nos permitirán probar la equivalencia buscada.

**Lema 4.2.5.** *Sea  $X \in \mathbf{Simp}(\mathbf{Gpd})_*$  y sean  $\alpha, \beta \in N_1 X$  tales que  $\alpha\beta$  existe. Entonces tenemos que  $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}((s_0 d_1 \alpha)\beta(s_0 d_1 \alpha^{-1}))^{-1} \in d_2 N_2 X$ . En particular, si  $X \in \mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$ , dicho elemento es una identidad.*

*Demostración:* Sea  $f = d_1 \alpha$ ,  $g = d_1 \beta$  y  $A = s_0(\alpha)(= t_0(\alpha))$ , lo que implica que  $d_0 \alpha = d_1 \alpha = Id_A$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha\beta\alpha^{-1}(s_0 f)\beta^{-1}(s_0 f^{-1}) = \\ &= (d_2 s_1 \alpha)(d_2 s_1 \beta)(d_2 s_1 \alpha^{-1})(d_2 s_0 \alpha)(d_2 s_1 \beta^{-1})(d_2 s_0 \alpha^{-1}) = d_2(\epsilon) \end{aligned}$$

donde  $\epsilon = s_1 \alpha s_1 \beta s_1 \alpha^{-1} s_0 \alpha s_1 \beta^{-1} s_0 \alpha^{-1}$

Además  $d_0(\epsilon) = s_0(Id_A) s_0(Id_A) s_0(Id_A) \alpha s_0(Id_A) \alpha^{-1}$  y

$d_1(\epsilon) = \alpha\beta\alpha^{-1}\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$  que son identidades, lo que implica que  $\epsilon \in N_2 X$  ■

Lema 4.2.6. Sea  $X$  un grupoide simplicial truncado a nivel 1

$$X = \left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s_0} & \\ X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 \\ & \xrightarrow{d_1} & \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{=} & O \\ & \downarrow t & \downarrow t \end{array} \right)$$

Entonces existe una composición vertical que lo convierte en un 2-grupoide si y sólo si para cada  $\alpha, \beta \in N_1X$  tales que  $s(\alpha) = s(\beta)$ , se tiene que  $\alpha\beta\alpha^{-1} = (s_0d_1\alpha)\beta(s_0d_1\alpha^{-1})$ .

*Demostración:* Supongamos que existe una composición vertical, y sean  $\alpha$  y  $\beta$  como sigue:

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_A} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{f} \end{array} A \quad A \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_A} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{f} \end{array} A$$

Entonces tenemos:

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \left[ A \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_A} \\ \Downarrow \alpha^{-1} \\ \xrightarrow{f^{-1}} \end{array} A \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_A} \\ \parallel \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_A} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{f} \end{array} A \right] =$$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_A} \\ \parallel \\ \xrightarrow{fgf^{-1}} \end{array} A = (s_0d_1\alpha)\beta(s_0d_1\alpha^{-1})$$

Supongamos ahora que para cada  $\alpha, \beta \in N_1X$  que se puedan componer se verifica que  $\alpha\beta\alpha^{-1} = (s_0d_1\alpha)\beta(s_0d_1\alpha^{-1})$ .

Sean  $\alpha : f \Rightarrow g$  y  $\beta : g \Rightarrow h$ . Sabemos que si existe una composición vertical ésta está definida por  $\beta * \alpha = \alpha s_0g^{-1} \beta$ . Definimos entonces la composición vertical de esa forma, y suponemos que tenemos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X_1$  en la situación siguiente:

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{h} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{l} \\ \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{m} \end{array} C$$

Sea  $\epsilon = s_0gs_0f^{-1} \alpha s_0g^{-1}$  y  $\epsilon' = s_0l^{-1} \delta$ .

Se verifica que:

$$\begin{aligned} s_0 d_1 \epsilon^{-1} \epsilon &= s_0 d_1 (s_0 g \alpha^{-1} s_0 f s_0 g^{-1}) s_0 g s_0 f^{-1} \alpha s_0 g^{-1} = \\ &= s_0 g s_0 g^{-1} s_0 f s_0 g^{-1} s_0 g s_0 f^{-1} \alpha s_0 g^{-1} = \alpha s_0 g^{-1}. \end{aligned}$$

y además:

$$d_0 \epsilon = g f^{-1} f g^{-1} = Id_B \quad d_0 \epsilon' = l^{-1} l = Id_B$$

y por tanto  $\epsilon \epsilon' \epsilon^{-1} = (s_0 d_1 \epsilon) \epsilon' (s_0 d_1 \epsilon^{-1})$ , lo que implica que

$$(s_0 d_1 \epsilon^{-1}) \epsilon \epsilon' = \epsilon' (s_0 d_1 \epsilon^{-1}) \epsilon,$$

es decir:

$$\alpha s_0 g^{-1} s_0 l^{-1} \delta = s_0 l^{-1} \delta \alpha s_0 g^{-1}$$

Y por tanto, deducimos que:

$$\begin{aligned} (\delta \beta) * (\gamma \alpha) &= \gamma \alpha (s_0 d_1 (\gamma \alpha)^{-1}) \delta \beta = \gamma \alpha s_0 g^{-1} s_0 l^{-1} \delta \beta = \\ &= \gamma s_0 l^{-1} \delta \alpha s_0 g^{-1} \beta = (\delta * \gamma) (\beta * \alpha) \end{aligned}$$

Como consecuencia tenemos que:

**Corolario 4.2.7.** Si  $X \in \mathbf{T}_{1|}(\mathbf{Gpd})$ , entonces  $tr^1(X) \in \mathbf{2 - Gpd}$

*Demostración:* Por el lema 4.2.6, para que  $tr^1(X)$  pertenezca a  $\mathbf{2 - Gpd}$  es necesario y suficiente que para cada  $\alpha, \beta \in N_1 X$  componibles, el elemento  $\alpha \beta \alpha^{-1} = (s_0 d_1 \alpha) \beta (s_0 d_1 \alpha^{-1})$  sea una identidad, lo cual es consecuencia inmediata del lema 4.2.5

Ahora ya podemos probar la equivalencia buscada:

**Teorema 4.2.8.** El funtor  $tr^1 : \mathbf{T}_{1|}(\mathbf{Gpd}) \rightarrow \mathbf{2 - Gpd}$  es una equivalencia de categorías con cuasi-inverso el funtor  $Nerv : \mathbf{2 - Gpd} \rightarrow \mathbf{T}_{1|}(\mathbf{Gpd})$ .

*Demostración:* Recordemos primero como está definido el nervio de un 2-Grupoide. Si  $X \in \mathbf{2 - Gpd}$ , entonces  $Nerv(X)$  es el siguiente grupoide simplicial

$$\begin{array}{ccccccc} \rightrightarrows (Nerv X)_n & \xrightarrow[d_0]{d_n} & (Nerv X)_{n-1} & \xrightarrow[d_0]{d_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow[d_0]{d_2} & (Nerv X)_1 & \xrightarrow[d_0]{d_1} & (Nerv X)_0 \\ \begin{array}{c} s \downarrow \downarrow t \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} & & \begin{array}{c} s \downarrow \downarrow t \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} & & \cdots & & \begin{array}{c} s \downarrow \downarrow t \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} & & \begin{array}{c} s \downarrow \downarrow t \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \\ \hline O & & O & & \cdots & & O & & O \end{array}$$

donde  $(Nerv X)_0 = X_0$ ,  $(Nerv X)_1 = X_1$  y  $(Nerv X)_n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X_1^n / d_1 \alpha_j = d_0 \alpha_{j+1}\}$

los operadores cara y degeneración están definidos como sigue:

$$d_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-i-1}, \alpha_{n-i+1} \circ \alpha_{n-i}, \alpha_{n-i+2}, \dots, \alpha_n), \quad 0 \leq i \leq n$$

$$s_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-i}, s_0 d_1 \alpha_{n-i}, \alpha_{n-i+1}, \dots, \alpha_n), \quad 0 \leq i \leq n$$

y  $s(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = s(\alpha_1)$  y  $t(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = t(\alpha_1)$ .

Es claro ahora que  $tr^1 \circ Nerv = Id_{2-Gpd}$ . Por otra parte, si  $X \in T_1(Gpd)$ , se tiene que  $Nerv(tr^1 X)$  y  $X$  son isomorfos al tener la misma 1-truncación. ■

Recordemos ahora como está definido el funtor nervio 2-dimensional  $\mathcal{N} : 2-Gpd \rightarrow Simp(Set)$  dado en [55]. Si  $X \in 2-Gpd$   $\mathcal{N}X$  está definido por

$$\mathcal{N}X = \text{cosk}^3 \left( \begin{array}{cccc} \mathcal{N}_3 X & \rightrightarrows & \mathcal{N}_2 X & \rightrightarrows & \mathcal{N}_1 X & \rightrightarrows & \mathcal{N}_0 X \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ O & = & O & = & O & = & O \end{array} \right)$$

donde  $\mathcal{N}X_0 = O$ ,  $\mathcal{N}X_1 = X_0$ ,  $\mathcal{N}X_2$  es el conjunto de diagramas de la forma:

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ A_0 & \xrightarrow{h} & A_2 \end{array} \quad \alpha \Uparrow$$

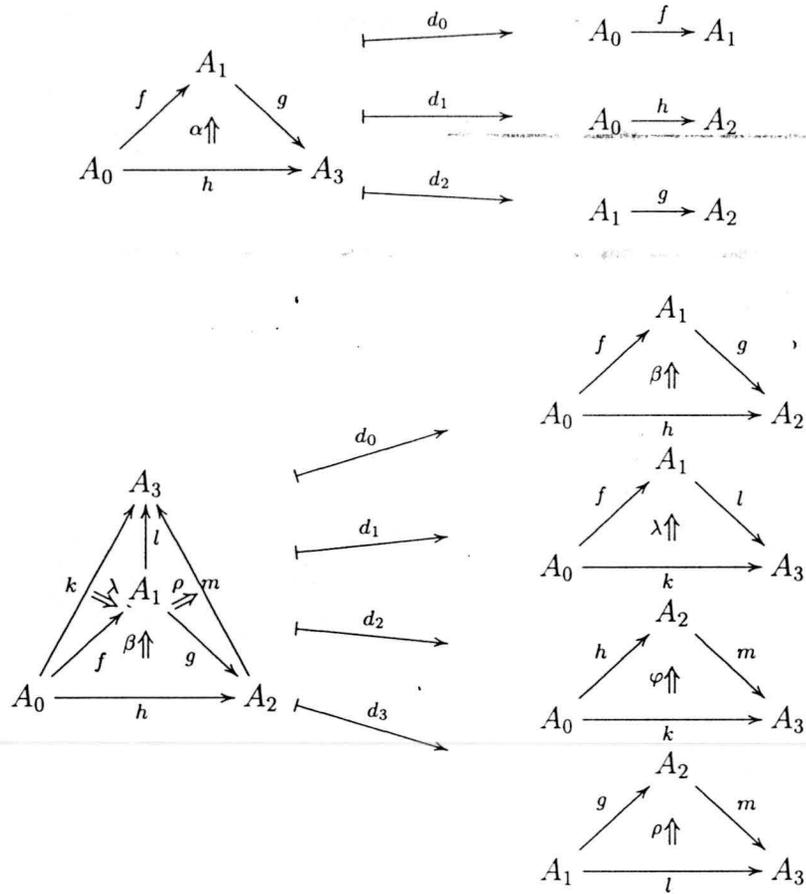
y  $\mathcal{N}X_3$  es el conjunto de "tetraedros" conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & A_3 & \\ & \uparrow l & \\ k \nearrow & A_1 & \searrow \rho m \\ \lambda \Rightarrow & & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ A_0 & \xrightarrow{h} & A_2 \end{array} \quad \beta \Uparrow$$

en el sentido de que tenemos deformaciones  $\lambda : k \Rightarrow lf$ ,  $\rho : l \Rightarrow mg$ ,  $\beta : h \Rightarrow gf$  y  $\phi : k \Rightarrow mh$  de forma que el siguiente cuadrado es conmutativo

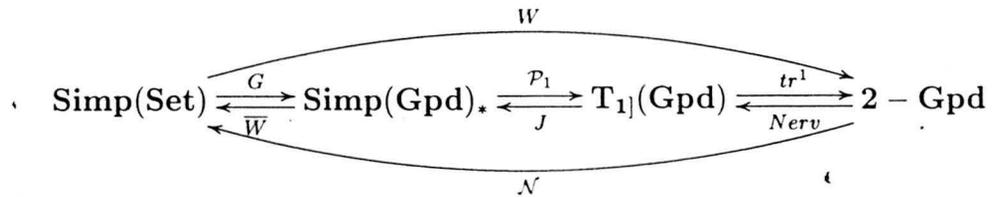
$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\phi} & m \circ h \\ \lambda \downarrow & & \downarrow s_0 m \circ \beta \\ l \circ f & \xrightarrow{\rho \circ s_0 f} & m \circ g \circ f \end{array}$$

Los operadores cara están definidos



Este funtor  $\mathcal{N}$  tiene un adjunto por la izquierda que es descrito explícitamente en [55] y determina, junto a la estructura de modelos en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , la estructura de modelos en  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  puesto que  $f \in \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  es una fibración (resp. equivalencia débil) si y sólo si  $\mathcal{N}f$  es una fibración (resp. equivalencia débil) (ver proposición 2.1 [55] y téngase en cuenta que  $\mathcal{N}$  refleja fibraciones como puede verse con un cálculo directo).

Deducimos entonces que tenemos dos situaciones de adjunción entre las categorías  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  y  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , tal y como muestra el siguiente diagrama:



donde la adjunción  $tr^1 \vdash Nerv$  es la equivalencia que acabamos de probar, la adjunción  $\mathcal{P}_1 \vdash J$  es la definida al comienzo de la sección y la adjunción  $G \vdash \overline{W}$  fue recordada en la proposición 1.3.4.

Estas dos adjunciones coinciden como consecuencia de:

**Proposición 4.2.9.** *Existe una equivalencia natural  $\tau : \overline{W}JNerv \Rightarrow \mathcal{N}$*

*Demostración:* Dado  $X \in \mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$  definimos  $(\tau)_X : \overline{W}JNerv(X) \rightarrow \mathcal{N}(X)$  como sigue:

- $(\tau_X)_0 = Id.$
- $(\tau_X)_1 = Id.$
- $(\tau_X)_2$  está definida como sigue:

$$(\tau_X)_2 \left( A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} C \right) = \left( \begin{array}{ccc} & B & \\ f \nearrow & & \searrow h \\ A & \xrightarrow{gf} & C \\ & \alpha \Uparrow & \end{array} \right)$$

- Mientras que  $(\tau_X)_3$

$$(\tau_X)_3 \left( A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} C \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{l} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{m} \end{array} D \right) = \left( \begin{array}{ccc} & & D \\ & & \uparrow lh \\ & kgf(\beta*\alpha)f \nearrow & \\ & B & \searrow \gamma h \\ f \nearrow & & \searrow h \\ A & \xrightarrow{gf} & C \\ & \alpha \Uparrow & \end{array} \right)$$

Es rutinario comprobar que  $(\tau_X)_0$ ,  $(\tau_X)_1$ ,  $(\tau_X)_2$  y  $(\tau_X)_3$  son biyecciones que conmutan con las caras y las degeneraciones, y por tanto tenemos que  $tr^3(\overline{W}JNerv(X)) \cong tr^3(\mathcal{N}(X))$ , y de aquí, como  $\overline{W}Cosk^n \cong Cosk^{n+1}\overline{W}$  (ver [23]) se tiene que  $\mathcal{N}(X) = cosk^3 tr^3 \mathcal{N}(X) \cong cosk^3 tr^3 \overline{W}JNerv(X) = \overline{W}Cosk^2 JNerv(X) = \overline{W}JCosk^2 Nerv(X) = \overline{W}JNerv(X)$  ■

Tenemos ahora dos estructuras de modelos en  $\mathbf{2} - \mathbf{Gpd}$ . Por una parte, la definida en [55] y por otra, la que se deduce de la que hay en  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$  vía la equivalencia estudiada en el teorema 4.2.8. Veamos que ambas coinciden:

**Teorema 4.2.10.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathbf{2-Gpd}$ . Entonces  $f$  es una fibración, cofibración o equivalencia débil (con la estructura definida en [55]) si y sólo si  $Nerv(f)$  es una fibración, cofibración o equivalencia débil en  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$  (con la estructura dada en la definición 4.2.1)*

*Demostración:* Sea  $f \in \mathbf{2-Gpd}$ . Sabemos que  $f$  es una fibración si y sólo si  $\mathcal{N}f$  es una fibración en  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  (ver [55]), pero ésto, por la proposición anterior es equivalente a que  $\overline{W}JNerv f$  sea una fibración. Puesto que  $\overline{W}$  preserva y refleja fibraciones, deducimos que  $f$  es fibración si y sólo si  $JNerv(f)$  lo es, y por la definición 4.2.1 concluimos que  $f$  es una fibración si y sólo si  $Nerv(f)$  es una fibración en  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$ .

De manera análoga se prueba que  $f$  es una equivalencia débil en  $\mathbf{2-Gpd}$  si y sólo si  $Nerv(f)$  es una fibración en  $\mathbf{T}_1(\mathbf{Gpd})$ .

Por último, la equivalencia para las cofibraciones se deduce fácilmente del hecho de que en ambos casos están caracterizadas por tener la LLP respecto a las fibraciones triviales. ■

Dejamos el caso de  $\mathbf{2-Gpd}$ , y volvemos al general de  $\mathbf{T}_n(\mathbf{Gpd})$ . Si aplicamos “punto a punto” los funtores  $\mathcal{P}_n G \vdash \overline{W}J$  a diagramas de conjuntos simpliciales y de grupoides simpliciales, obtenemos una situación de adjunción inducida

$$\mathbf{I-Simp}(\mathbf{Set}) \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \xleftarrow{\overline{W}} \end{array} \mathbf{I-Simp}(\mathbf{Gpd})_* \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{P}_n} \\ \xleftarrow{J} \end{array} \mathbf{I-T}_n(\mathbf{Gpd})$$

Puesto que las fibraciones y equivalencias débiles en las categorías de diagramas están definidas “punto a punto” (ver definición 4.1.4), es claro que  $\mathcal{P}_n G$  preserva y refleja equivalencias débiles, y que  $\overline{W}J$  preserva y refleja fibraciones y equivalencias débiles. Ésto último implica que  $\mathcal{P}_n G$  preserva cofibraciones.

Deducimos por tanto, usando ([58], §4, th.3) que:

**Teorema 4.2.11.** *Los funtores  $\mathcal{P}_n G$  y  $\overline{W}J$  inducen funtores adjuntos al nivel de las categorías de homotopía*

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{I-Simp}(\mathbf{Set})) \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \xleftarrow{\overline{W}} \end{array} \mathbf{Ho}(\mathbf{I-Simp}(\mathbf{Gpd})_*) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{P}_n} \\ \xleftarrow{J} \end{array} \mathbf{Ho}(\mathbf{I-T}_n(\mathbf{Gpd}))$$

Además, para cada  $X \in \mathbf{I-T}_n(\mathbf{Gpd})$  y cada  $\mathbf{I}$ -conjunto simplicial cofibrante  $Y$  existe una biyección natural

$$[Y, \overline{W}JX] \cong [\mathcal{P}_n GY, X].$$

Ahora definimos la categoría **I-n-tipos** como la subcategoría plena de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{I-Simp}(\mathbf{Sets}))$  formada por aquellos diagramas de conjuntos simpliciales  $X$  tales que  $\pi_k(X(i), x_0) = 0$  para  $i \in \mathbf{I}$ ,  $x_0 \in X(i)_0$  y  $k > n$ . Obtenemos entonces como corolario:

**Corolario 4.2.12.** *Los funtores  $\mathcal{P}_n G$  y  $\overline{W}J$  inducen una equivalencia de categorías entre  $\mathbf{Ho}(\mathbf{I-T}_n(\mathbf{Gpd}))$  y **I-(n+1)-tipos**.*

### 4.3 n-tipos equivariantes

El objetivo de esta sección es particularizar los resultados obtenidos en las secciones precedentes para **I**-diagramas e **I**-tipos al caso en que **I** es la categoría órbita asociada a un grupo.

De ahora en adelante,  $H$  denota un grupo fijo. Recordemos que un  $H$ -espacio  $X$  es un espacio  $X$  sobre el que actúa  $H$  de forma continua. Un morfismo entre  $H$ -espacios es una aplicación continua que preserva la acción. Si denotamos  $H\text{-Top}$  a la categoría de  $H$ -espacios, esta categoría es una categoría de modelos cerrada (ver [4] y [32]), donde las equivalencias débiles son aquellos morfismos  $f : X \rightarrow Y$  tales que para cada subgrupo  $K \subseteq H$ , la aplicación  $X^K \rightarrow Y^K$  (donde  $X^K$  es el conjunto de puntos fijos por  $K$ ) es una equivalencia homotópica débil, las fibraciones son aquellos morfismos  $X \rightarrow Y$  tales que para cada subgrupo de  $H$ ,  $K$ , la aplicación  $X^K \rightarrow Y^K$  es una fibración de Serre, y las cofibraciones son las aplicaciones que tienen la LLP con respecto a las fibraciones triviales.

Se define la categoría  $H\text{-n-tipos}$  como la categoría cuyos objetos son los  $H$ -CW-complejos  $X$  tales que  $\pi_i(X^K, x) = 0$  para cada subgrupo  $K \subseteq H$ , para cada punto  $x \in X^K$  e  $i \geq n + 1$ , y cuyos morfismos son las clases de homotopía de  $H$ -morfismos.

Sea ahora  $\mathbf{O}(H)$  la categoría órbita asociada al grupo  $H$  es decir, la categoría cuyos objetos son los  $H$ -conjuntos por la izquierda de la forma  $H/K : K \subseteq H$  un subgrupo y cuyos morfismos son las aplicaciones  $H/K \rightarrow H/K'$  que preservan la acción (es decir, aplicaciones equivariantes). Usamos esta categoría como categoría de índices y formamos la categoría  $\mathbf{O}(H)\text{-Simp}(\mathbf{Set})$ . Esta categoría está estrechamente relacionada con la categoría  $H\text{-Top}$  mediante adecuadas nociones tanto del funtor complejo singular  $S : H\text{-Top} \rightarrow \mathbf{O}(H) - \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$  como de la realización geométrica  $\epsilon : \mathbf{O}(H) \rightarrow H\text{-Top}$  (ver [36]).

Recordemos la definición de estos dos funtores:

Si  $X$  es un  $H$ -espacio, se define  $S(X) \in \mathbf{O}(H) - \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , para lo cual necesitamos dar un funtor  $S(X) : (\mathbf{O}(H))^{op} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ . Este funtor

está dado por

$$S(X)(H/K) = S(X^K)$$

Si ahora  $X$  es un funtor  $X : (\mathbf{O}(H))^{op} \rightarrow \mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ , se considera el  $H$ -conjunto bisimplicial  $\phi(X)$  (objeto simplicial en la categoría  $\mathbf{Simp}(\mathbf{Set})$ ) cuyo conjunto de  $(n, m)$ -símplices es una terna formada por:

- Un elemento de  $(Nerv(\mathbf{O}(H)))_n$ , es decir, una sucesión de aplicaciones equivariantes

$$\frac{H}{K_0} \rightarrow \frac{H}{K_1} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{H}{K_n}$$

- Un  $m$ -símplice  $x$  del conjunto simplicial  $X\left(\frac{H}{K_n}\right)$

- Un elemento  $z \in \frac{H}{K_0}$

Los operadores  $d_i : (\phi(X))_{n,m} \rightarrow (\phi(X))_{n-1,m}$  se definen aplicando el mismo operador  $d_i$  al elemento de  $(Nerv(\mathbf{O}(H)))_n$ , con lo que obtenemos un elemento de  $(Nerv(\mathbf{O}(H)))_{n-1}$ , mientras que  $d_i : (\phi(X))_{n,m} \rightarrow (\phi(X))_{n,m-1}$  se calcula aplicando  $d_i$  al elemento  $x \in (X(H/K_n))_m$ . Por último,  $H$  actúa sobre este conjunto bisimplicial multiplicando en la última coordenada.

Los operadores degeneración se definen de forma análoga.

Resaltemos algunas propiedades de estos funtores:

- Los funtores  $S$  y  $\epsilon$  preservan equivalencias débiles.
- $S$  lleva inclusiones en cofibraciones.
- Inducen una equivalencia a nivel de categorías de homotopía

$$\mathbf{Ho}(H\text{-Top}) \simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-Simp}(\mathbf{Sets}))$$

Relacionamos a continuación estos hechos con la teoría desarrollada en las secciones precedentes. Comenzamos con una definición:

**Definición 4.3.1.** Sea  $X$  un  $\mathbf{O}(H)$ -diagrama en  $\mathbf{T}_{n|}(\mathbf{Gpd})$ . Definimos su  $H$ -espacio clasificador como  $B_H(X) = \epsilon \overline{W} J(X)$

Tenemos entonces dos funtores:

$$\mathcal{P}_n GS : H\text{-Top} \rightarrow \mathbf{O}(H)\text{-T}_{n|}(\mathbf{Gpd}) \text{ y } B_H : \mathbf{O}(H)\text{-T}_{n|}(\mathbf{Gpd}) \rightarrow H\text{-Top}$$

y como consecuencia de las propiedades anteriores, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.2.** Los funtores  $\mathcal{P}_n GS$  y  $B_H$  verifican:

- i) Preservan equivalencias débiles.

ii)  $\mathcal{P}_nGS$  preserva cofibraciones.

iii) Inducen funtores adjuntos a nivel de las categorías de homotopía

$$\text{Ho}(H\text{-Top}) \rightleftarrows \text{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-T}_{n|}(\text{Gpd}))$$

iv) Si  $T$  es un  $H$ -CW-complejo y  $X \in \mathbf{O}(H)\text{-T}_{n|}(\text{Gpd})$ , existe un isomorfismo natural:

$$[T, B_H(X)] \cong [\mathcal{P}_nGS(T), X]$$

*Demostración:*

i) Es claro puesto que  $\overline{W}J$  y  $\mathcal{P}_nG$  preservan equivalencias débiles para cualquier categoría pequeña  $\mathbf{I}$ , en particular para  $\mathbf{I}=\mathbf{O}(H)$ . Dado que tanto  $S$  como  $\epsilon$  las preservan, deducimos i).

ii) Veamos que  $S$  preserva cofibraciones. El resto se deduce de que  $\mathcal{P}_n$  y  $G$  también las preservan. El que  $S$  preserva cofibraciones se deduce de que toda cofibración en  $H\text{-Top}$  es inyectiva, y por tanto  $S$  lleva cofibraciones en cofibraciones.

iii) Sabemos por el teorema 4.2.11 que  $\mathcal{P}_nG$  y  $\overline{W}J$  inducen adjunciones

$$\text{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-Simp}(\text{Set})) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathcal{P}_nG} \\ \xleftarrow{\overline{W}J} \end{matrix} \text{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-T}_{n|}(\text{Gpd}))$$

Basta entonces componer esta adjunción con la equivalencia antes anunciada

$$\text{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-Simp}(\text{Sets})) \begin{matrix} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{\epsilon} \end{matrix} \text{Ho}(H\text{-Top})$$

iv) Es claro utilizando la adjunción obtenida en iii), si tenemos en cuenta que si  $T$  es un  $H$ -espacio cofibrante, el apartado ii) nos dice que  $\mathcal{P}_nGS(T)$  es también cofibrante. ■

**Teorema 4.3.3.** *Existe una equivalencia de categorías*

$$H\text{-(n+1)-tipos} \simeq \text{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-T}_{n|}(\text{Gpd}))$$

*Demostración:* La equivalencia  $\mathbf{Ho}(H\text{-Top}) \simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-Simp}(\mathbf{Sets}))$  restringida a la subcategoría  $\mathbf{O}(H)\text{-(n+1)tipos}$  nos da una equivalencia

$$H\text{-(n+1) - tipos} \simeq \mathbf{O}(H)\text{-(n+1) - tipos}$$

que junto con la equivalencia

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{O}(H)\text{-T}_{n]}(\mathbf{Gpd})) \simeq \mathbf{O}(H)\text{-(n+1)-tipos}$$

que se deduce del corolario del teorema 4.2.11 nos da la equivalencia buscada. ■

Finalmente y como caso particular, tenemos:

**Corolario 4.3.4.** ([55] th.5.1) *La categoría de 2-tipos de homotopía H-equivariante es equivalente a la categoría de homotopía de  $\mathbf{O}(H)$ -diagramas de 2-grupoides*

*Demostración:* Basta aplicar el teorema anterior para  $n = 1$  y utilizar la equivalencia entre  $\mathbf{2 - Gpd}$  y  $\mathbf{T}_{1]}(\mathbf{Gpd})$  dada en el teorema 4.2.8. ■

## Bibliografía

- [1] D.W. ANDERSON, Axiomatic homotopy theory, *Springer L.N. in Math.* 741 (1978), 520-547.
- [2] M. ARTIN, B. MAZUR, On the Van Kampen theorem, *Topology* 5 (1966), 170-189.
- [3] H.J. BAUES, Algebraic homotopy, (*Cambridge University Press*, 1989).
- [4] G.E. BREDON , Equivariant cohomology theories, *Springer L.N. in Math.* 34 (1967).
- [5] K.S. BROWN, Abstrac homotopy theory and generalized sheaf cohomology, *Trans. Amer. Soc.* 186 (1973), 419-458.
- [6] R.BROWN, Fibrations of groupoids, *J. of Algebra* 15 (1970), 103-132.
- [7] R. BROWN, Some non-abelian methods in homotopy theory and homological algebra, *Cat. Topology Proc. Conf. Toledo* (1984).
- [8] R.BROWN, N.D. GILBERT, Algebraic models of 3-types and automorphism structures for crossed modules, *Proc. London Math. Soc.* (3) 59 (1989), 51-73.
- [9] R. BROWN, M. GOLASINSKI, A model structure for the homotopy category of crossed complexes, *Cahiers Topologie Géom. Diff. Catégoriques* XXX (1989), 61-82.
- [10] R. BROWN, J.L. LODAY, Van Kampen theorems for diagrams of spaces, *Topology* 26 (1987), 311-335.
- [11] R. BROWN, J.L. LODAY, Homotopical extension and Hurewicz theorems for n-cubes of spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) 54, (1987), 176-192.

- [12] R. BROWN, P.J. HIGGINS, The equivalence of  $\infty$ -groupoids and crossed complexes, *Cahiers de Top. et Géom. Diff. Cat.* 22 (1981), 370-386.
- [13] R. BROWN, P.J. HIGGINS, Crossed complexes and chain complexes with operators. *Math Proc. Camb. Phil. Soc.* 107 (1990), 33-57.
- [14] R. BROWN, P.J. HIGGINS, The classifying space of a crossed complex, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1991), 95-119.
- [15] R. BROWN, C.B. SPENCER,  $G$ -groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group. *Proc. Kon. Ned. Acad. v. Wet.* 79 (1976) 296-302.
- [16] R. BROWN, C.B. SPENCER, Double groupoids and crossed modules, *Cah. de Top. et Geom. Diff.* vol. XVII-4 (1987), 343-362.
- [17] M. BULLEJOS, A.M. CEGARRA, A 3-dimensional non-abelian cohomology with applications to homotopy classification of continuous maps. *Canadian Journal of Mathematics*, 43 (2) (1991), 265-296.
- [18] M. BULLEJOS, P. CARRASCO, A.M. CEGARRA, Cohomology with coefficients in symmetric cat-groups. An extension of Eilenberg-MacLane's classification theorem. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 114 (1993), 163-189.
- [19] M.BULLEJOS, A.M.CEGARRA, J. DUSKIN, On  $\text{Cat}^n$ -groups and homotopy types, *J. of Pure and Applied Algebra* 86 (1993), 135-154.
- [20] J.G. CABELLO, Estructuras de modelos de Quillen para categorías que modelan algebraicamente tipos de homotopía de espacios, Tesis doctoral de la Univ. de Granada (1993).
- [21] J.G. CABELLO, A.R. GARZON, Quillen's theory for algebraic models of  $n$ -types, *Extracta Mathematicae* 9 (1) (1994), 42-47.
- [22] J.G. CABELLO, A.R. GARZON, Closed model structures for algebraic models of  $n$ -types, *J. Pure Appl. Algebra* (1995).
- [23] P. CARRASCO, A.M CEGARRA, Group theoretic algebraic models for homotopy types, *J. Pure Appl. Algebra* 75 (1991), 195-235.
- [24] P. CARRASCO, A.M. CEGARRA, Applications de la notion du Nerf d'une Gr-catégorie (tressée), *C.R. Acad. Sc. Paris* (1995).

- [25] P. CARRASCO, A.M. CEGARRA, (Braided) tensor structures on homotopy groupoids and nerves of (braided) categorical groups. (1995), Por aparecer.
- [26] A.M. CEGARRA, M. BULLEJOS, A.R. GARZON, Higher dimensional obstruction theory in algebraic categories, *J. Pure and Appl. Algebra*, 49 (1987), 43-102.
- [27] D. CONDUICHE, Modules croisés généralisés de longueur 2, *J. Pure Appl. Algebra* 34 (1984), 155-178.
- [28] S.E. CRANS, On combinatorial models for higher dimensional homotopies, Univ. of Utrecht Ph. D. thesis (1995).
- [29] E.B. CURTIS, Simplicial homotopy theory, *Advances in Math*, 6 (1971), 107-209.
- [30] A. DOLD , D. PUPPE, Homologie nicht-additiver funktoren, *Ann. Ist. Fourier* 11 (1961), 201-312.
- [31] W. G. DWYER, D.M. KAN, Homotopy theory and simplicial groupoids. *Proc. Konic. Neder. Akad.* 87 (1984), 379-389.
- [32] W.G. DWYER, D.M. KAN, Equivariant homotopy classification, *J. Pure Appl. Algebra* 35 (1985), 269-285.
- [33] D.A. EDWARDS, H.M. HASTINGS, Cech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology, *Springer L.N. in Math.* 542 (1976).
- [34] S. EILENBERG, S. MAC LANE, Relations between homology and homotopy groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 29 (1943)
- [35] S. EILENBERG, S. MAC LANE, On the groups  $H(\pi, n)$  III. *Annals of Math.* 58 (1953), 513-557.
- [36] A.D. ELMENDORF, Systems of fixed point sets, *Trans. A.M.S.* 277 (1983), 275-284.
- [37] C. ELVIRA,  $n$ -tipos y cohomotopía, Tesis doctoral de la Universidad de Zaragoza (1991).
- [38] C. ELVIRA, L.J. HERNANDEZ, Closed model categories for the  $n$ -type of spaces and simplicial set, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1995).

- [39] J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNANDEZ, M.T. RIVAS, A closed model category for  $(n - 1)$ -connected spaces, Preprint (1995).
- [40] P. GABRIEL, M. ZISMAN, Calculus of fractions and homotopy theory, (Springer, Berlin, 1967).
- [41] A.R. GARZON, J.G. MIRANDA, Models for homotopy  $n$ -types in diagram categories, *Applied Categorical Structures* (1995).
- [42] P. GLENN, Realization of cohomology classes in arbitrary exact categories, *J. Pure Appl. Algebra* 25 (1982), 33-107.
- [43] A. HELLER, Homotopy theories, *Memoirs A.M.S.* 383 (1988).
- [44] L.J. HERNANDEZ, T. PORTER, Categorical models of  $n$ -types for pro-crossed complexes and  $J_n$ -prospaces, *Springer L.N. in Math* 1509 (1992), 148-185.
- [45] P.J. HIGGINS, Notes on Categories and Groupoids, *Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies* 32 (1971).
- [46] A. JOYAL, R. STREET, Braided tensor categories, *Advances in Math.* (1) 82 (1991), 20-78.
- [47] D.M. KAN, A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.* 67 (2) (1958), 282-312.
- [48] D.M. KAN, On homotopy theory and c.s.s. groups, *Ann. of Math.* 68(1) (1958), 38-53.
- [49] G.M. KELLY, R.H. STREET, Review of the elements of 2-categories, *L.N. in Math.* 420 (1974), 75-103.
- [50] J.L. LODAY, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *J. Pure Appl. Algebra* 24 (1982), 179-202.
- [51] W. LUCK, Equivariant Eilenberg-Mac Lane spaces  $K(G, \mu, 1)$  for possibly non-connected or empty fixed point sets, *Manuscripta Math.* 58 (1967), 67-75.
- [52] S. MAC LANE, J.H.C. WHITEHEAD, On the 3-type of a complex, *Proc. Nat. Acac. Sci. USA* 30 (1956), 41-48.
- [53] J.A. MARTIN NUÑEZ, Grupoides como una categoría de modelos cerrada. Preprint (1993).