APRENDER GRAFOS HACIENDO TRENZAS

Una Innovación Educativa en Combinatoria

Veronica Albanese

Granada, 2015

Titulo:

APRENDER GRAFOS HACIENDO TRENZAS.

Una Innovación Educativa en Combinatoria

Autora:

Veronica Albanese

1ª edición

ISBN: **978-84-608-2848-8**

Depósito Legal: **GR 13-18-2015**

Impreso en España

Editado por la Autora

Imprime:

Copistería Martín. Urquiza

Avenida de Madrid 20, local 5

18012, Granada

Para citar: Albanese, V. (2015). *Aprender Grafos Haciendo Trenzas*. Una Innovación Educativa en Combinatoria. Granada: La Autora.

RESUMEN

En este libro presentamos una innovación educativa en el área de matemáticas dirigida a estudiantes de Bachillerato e inspirada en la observación de los trabajos artesanales de trenzado en las artesanías tradicionales de la región de Salta (Argentina). A partir de la observación de dicho trabajo, se propone a los estudiantes la representación gráfica y modelización del proceso seguido en el trenzado, así como el análisis de algunas propiedades matemáticas de los modelos construidos y su generalización.

Esta innovación didáctica abarca principalmente contenidos matemáticos del campo de la combinatoria; específicamente los de grafo, partición y permutación, pero también involucra otros diferentes objetos matemáticos y su simbolización. Aunque la combinatoria es una parte con aparentemente poco peso en el currículo de Bachillerato es la base de la matemática discreta y pone en juego muchos objetos y procesos matemáticos. Es además un tema privilegiado para poner en práctica la resolución de problemas, uno de los ejes del actual currículo de matemáticas.

En el primer capítulo se describe brevemente de donde ha surgido la idea de la innovación, se justifica la importancia del razonamiento combinatorio para el estudiante, se analiza la presencia de los contenidos de interés en del currículo básico y se realiza un análisis didáctico del tema de combinatoria.

En el segundo se describen los objetivos de la innovación en relación con las expectativas curriculares, el material utilizado y el diseño de la actividad constituido por diversas tareas.

Aunque la experiencia está pensada para trabajar con los estudiantes de Bachillerato, no se ha podido llevar a cabo en este nivel. Por ello se presenta la evaluación de una experiencia realizada con un grupo de profesores de educación secundaria en formación.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. JUSTIFICACIÓN Y RELEVANCIA

1.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a justificar y contextualizar la innovación propuesta. Primero describimos brevemente las motivaciones e ideas que han dado origen a la innovación: la experiencia docente previa de la autora en Argentina y la investigación previa en Etnomatemática, que proporciona el marco teórico de nuestro trabajo. Después revisamos indicaciones de diversos investigadores que remarcan la importancia de una formación en combinatoria en distintos niveles educativos, y en particular en Bachillerato. Miramos el lugar que la combinatoria ocupa en los documentos legislativos que regulan los currículos educativos en España, haciendo referencia a la ley que se publica unos meses antes de la presentación de este trabajo. Finalmente realizamos un análisis de contenido de la combinatoria que será nuestra referencia para el trabajo que desarrollamos en los siguientes capítulos.

1.2 MOTIVACIÓN PERSONAL

La idea de la innovación que presentamos en este trabajo proviene de Argentina y su cultura, donde he vivido un año. La motivación para esta elección es de carácter personal: mi experiencia docente en educación secundaria se ha realizado en la ciudad de Buenos Aires y en ese entonces empezaron mis intereses hacia la investigación y la innovación en la docencia. Esta experiencia ha condicionado que la elección del artefacto alrededor del cual se organiza la innovación se estableciera en el entorno artesanal argentino, que tuve ocasión de conocer en ese periodo.

Otro acontecimiento de carácter personal que ha motivado el tema concierne a la elección del tipo de artesanía en que nos basamos. Desde la adolescencia había estado muy atraída por los quehaceres manuales que implicaban cualquier forma de tejido y trenzado, aprendiendo a bordar, hacer croché, utilizar las agujas, realizar pulseras con varias técnicas. Siempre he estado fascinada por las ingeniosas maneras en que estas técnicas se traducían en lenguaje escrito -bajo la forma de esquemas, dibujos y códigos- en los periódicos especializados del macramé. En todas estas formas de representación descubría ideas matemáticas implícitas que podían ser útiles en el aula.

Cuando se ha presentado la ocasión de entrar en contacto con unos artesanos que elaboraban varias formas de trenzados, me he entusiasmado mucho con la idea. Mi interés personal y mis anteriores destrezas en las manualidades han sido muy provechosos a la hora de diseñar la innovación y el material.

Finalmente parto de mi experiencia anterior de investigación didáctica en el campo de la Etnomatemática (que describo brevemente a continuación) y en el cual realicé mi tesis doctoral (Albanese, 2014) y escribí algunos artículos que se mencionarán a lo largo del trabajo. Esta experiencia de investigación me enseñó mucho sobre la docencia.

1.3. ETNOMATEMÁTICA

La Etnomatemática es un programa de investigación en educación matemática que hunde sus raíces en cuestiones filosóficas, históricas y sobre todo antropológicas sobre el conocimiento, en particular, el conocimiento matemático (D'Ambrosio, 2008) y sobre su aprendizaje (Bishop, 1999).

El origen de esta área de investigación se sitúa en las investigaciones de antropólogos culturales durante la primera mitad del siglo XX, cuando estos descubrieron y difundieron en la comunidad científica las diversas formas de entender y hacer matemáticas que caracterizaban a algunos pueblos indígenas.

Asimismo el estudio de la historia de las matemáticas evidencia el desarrollo y evolución de las ideas y conceptos matemáticos que utilizan hoy en día los especialistas de la disciplina y en particular sus profundas diferencias con las ideas y conceptos que se manejaron en otras épocas y regiones geográficas.

Estas dos líneas de investigación refuerzan la concepción de que el conocimiento matemático es producto de la mente humana, en su sentido comunitario, y está fuertemente influenciado por los factores sociales y culturales que caracterizan la sociedad, el momento histórico y legado cultural de donde surge y evoluciona tal conocimiento.

La clave de este marco es que existen y pueden coexistir contemporáneamente diferentes formas de entender y hacer matemáticas, sin que haya una jerarquía de validez o efectividad entre una y otra, porque esta evaluación depende del contexto en donde se aplica ese conocimiento (Barton, 1999). En la recopilación realizada por Barton (2008) se explica y manifiesta como la visión del mundo, la formulación de los problemas, y las formas de comunicación que existen en matemáticas, entendidas en su acepción más amplia, puede ser muy distintas pero igualmente valiosas en el contexto en que se utilizan.

Ahora bien, la Etnomatemática se propone llevar a la educación estas reflexiones y lo hace de manera contextualizada, a menudo original, creativa, si bien a veces sin conseguir del todo los objetivos que se propone (no se puede olvidar que existen varias posturas críticas dentro -como afuera- del mismo marco de la Etnomatemática).

Una de las posibilidades que se investigan desde la Etnomatemática es buscar similitudes y diferencias entre las matemáticas practicadas por grupos culturales determinados, como los gremios -en nuestro caso el artesanal- y la “matemática formal”. El análisis de la actividad matemática de los artesanos explícita o implícita permite aprovecharla a la hora de diseñar actividades y tareas para el aula escolar que tengan conexión con la vida cotidiana y la práctica respetando la visión matemática de quien maneja originariamente los conceptos implicados.

La finalidad de estas innovaciones didácticas sería interesar a los estudiantes por los productos culturales y aumentar su valoración hacia la matemática como instrumento que permite analizar estas actividades y productos. Indirectamente se pretende mejorar las actitudes de los alumnos hacia la matemática y de este modo su aprendizaje, pues es sabido la influencia de las actitudes en el mismo.

Los trenzados que elegimos como objeto de esta innovación fueron estudiados desde esta perspectiva. El diseño de las actividades que detallaremos en el capítulo siguiente se propone respetar estos principios de la Etnomatemática. Por ejemplo se presenta de forma fiel la modelización del trenzado sin imponer la concepción escolar sobre la artesanal. Asimismo se relaciona el contexto práctico y el entorno en donde ha surgido la artesanía con el conocimiento matemático. Finalmente se induce en los estudiantes la actividad de modelización de una forma progresiva como parte de la actividad que se realiza en el aula.

1.4. RAZONAMIENTO COMBINATORIO, Y SU IMPORTANCIA EN LA FORMACIÓN DEL ESTUDIANTE

El principal contenido matemático implícito en la innovación docente que presentamos es de tipo combinatorio; (entendida la combinatoria en un sentido amplio). Esta rama de las matemáticas estudia los conjuntos finitos (o discretos) y las configuraciones que pueden obtenerse a partir de sus elementos mediante ciertas transformaciones que cambian su estructura (permutaciones de sus elementos) o su composición (obtención de muestras o subconjuntos) (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994).

Una de las razones por las que existen posibilidades prácticamente inagotables de crear construcciones discretas, llamadas *configuraciones combinatorias*, es que las acciones mencionadas se pueden aplicar más de una vez, y en las combinaciones más diversas. Dichas configuraciones son el objeto de estudio de la Combinatoria, especialmente los procesos de formación y recuentos de las mismas.

De acuerdo a Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), actualmente la Combinatoria es un amplio campo de la Matemática con numerosas aplicaciones teóricas y prácticas, que ha tenido profundas implicaciones en el desarrollo de varias disciplinas y en particular de algunas ramas de la Matemática.

Aunque usualmente pensamos que la combinatoria se reduce al aprendizaje de las fórmulas de variaciones, combinaciones y permutaciones, Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1997) indican que la combinatoria es el arte de contar sin contar e incluye diferentes tipos de problemas: *problemas de existencia* (ver si existe o no una configuración dada), *problemas de recuento* (calcular el número de soluciones de un problema particular), *problemas de optimización* (encontrar una solución óptima a una problema y *problemas de enumeración* (listar sistemáticamente todas las posibles soluciones a un problema).

Generalmente asociamos la Combinatoria a la probabilidad, pues la capacidad de análisis combinatorio es necesaria en muchos problemas de esta materia. Kapur (1970) menciona que la Combinatoria brinda oportunidades a los estudiantes de realizar actividades características de la Matemática como hacer conjeturas, generalizar, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, entre otras. Además, crea en el estudiante la costumbre de examinar todas las posibilidades, enumerarlas y hallar la mejor alternativa, contribuyendo al pensamiento sistémico.

Veremos también en el análisis de contenido que, además de lo que usualmente conocemos como operaciones combinatorias (variaciones, combinaciones y permutaciones), la combinatoria elemental incluye numerosos conceptos, propiedades y lenguaje específico.

La combinatoria se caracteriza también por el empleo de estrategias para la resolución de los problemas descritos e introduce el estudiante a una forma de razonamiento denominado justamente combinatorio. Mencionamos, por ejemplo, el método de recuento basado en la construcción de una correspondencia entre el conjunto a determinar y un subconjunto de los números naturales, o la sistematización del recuento con el uso de diagramas a árbol.

Este contenido nos parece relevante para los estudiantes de secundaria, pues en el trabajo de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) se evidencian razones, basadas en estudios de psicología cognitiva, de las cuales resulta la importancia de educar niños y sobretodo adolescentes en el razonamiento combinatorio. Los autores argumentan, por ejemplo, que muchos de los errores frecuentes en el trabajo con la probabilidad son debidos a falta de razonamiento combinatorio.

Describen además una serie de errores en los estudiantes de educación secundaria, tales como: no considerar el orden cuando hay que considerarlo o al contrario, enumerar de manera no sistemática, confundir el tipo de elementos que hay que combinar (por ejemplo, distinguibles con indistinguibles).

El discurso de estos autores parte de los estudios de Piaget e Inhelder (1951) que han demostrado que los esquemas combinatorios juegan un papel importante en el desarrollo de las operaciones formales en los adolescentes. Ahora bien, la intuición combinatoria -como toda intuición de impronta matemática- mejora notablemente en cuanto se estimula su desarrollo, pero en el caso de la combinatoria este proceso no es espontaneo y necesita de una enseñanza previa.

Según Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), debido a que la Combinatoria se encuentra aislada del currículo español, a la dificultad propia del tema de Combinatoria y que, por lo general, su enseñanza se presente sin conexión con los demás temas del currículo, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y, cuando se enseña el tema, se basa principalmente en el aprendizaje de las fórmulas de combinatoria y en la realización de ejercicios estereotipados. Podemos entonces afirmar que una educación que mire al desarrollo cognitivo del estudiantes tendría que contemplar actividades que impulsen la incorporación del razonamiento combinatorio como herramienta para la resolución de problemas.

Interés del estudio de grafos

En nuestro trabajo aparecerán algunos grafos como elementos de representación y modelización del trabajo artesanal. Asimismo Coriat, Sancho, Gonzalvo y Marín (1989), indican que el estudio y utilización de grafos proporciona instrumentos, aproximaciones y estrategias para conseguir una educación que favorece el desarrollo en los estudiantes de competencias cuales aprender a pensar, afrontar situaciones nuevas y manejar la información de forma adecuada.

Estos autores insisten en las potencialidades de los grafos como representación gráfica en su función modelizadora de la realidad. Precisan que una gráfica es un grafo cuando se constituye solo de puntos (nodos) y flechas (aristas). Desde el punto de vista matemático un grafo es un conjunto de nudos, también llamados vértices, unidos por enlaces (segmentos o flechas) llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. En nuestro trabajo consideraremos solo algunas propiedades y relaciones sencillas en los mismos.

Esta sería una definición intuitiva general, aunque puede haber grafos sin aristas (sólo con vértices aislados) que se denominan grafos vacíos y otros en que las aristas pueden tener una dirección (grafo orientado). Los puntos más importantes de los grafos son la cantidad y conectividad entre vértices, el número de aristas total y que convergen en un vértice. Dos grafos son isomorfos si estas características no cambian por transformaciones topológicas (estiramientos o acortamientos).

Algunos autores como Vergel, Molina y Echeverri (2005) resaltan el interés de su uso incluso desde el comienzo de la educación secundaria. Se basan en que en las teorías de Piaget sobre la intuición geométrica el autor afirma que las primeras intuiciones espaciales son de tipo topológico, es decir, intuiciones sobre las propiedades globales del espacio independientes de la forma y el tamaño.

Recurrir a los grafos para la modelización de un problema necesita de tres fases: la identificación de los elementos (nudos) y de sus relaciones (aristas), que lleva a la construcción del grafo que describe la situación planteada; la reformulación de la pregunta en términos de encontrar alguna propiedad del grafo; la resolución en el grafo.

La primera fase implica un nivel de generalización alto, pero conlleva la ventaja que la resolución después suele ser bastante intuitiva. Además muchos problemas aparentemente distintos se revelan equivalentes con lo cual se fomenta la transferibilidad de los conocimientos entre situaciones y contextos diversos.

1.5. PRESENCIA DEL TEMA EN LAS ORIENTACIONES CURRICULARES

Nuestro trabajo se fundamenta también en el hecho de que en el Currículo Base de la LOMCE (MECD, 2015) -BOE 3 de enero del 2015, RD 1105/2014- se incluyen explícitamente contenidos de combinatoria en los diferentes niveles de ESO y Bachillerato. En la Tabla 1.1 recogemos los que aparecen dentro del Bloque 5 "Estadística y probabilidad", en todos los niveles.

Observamos que la mayoría de los contenidos hacen referencia a técnicas de recuento y al uso de diagramas a árbol, al servicio del cálculo de la probabilidad, por ejemplo, para enumerar los resultados de un espacio muestral y para resolución de problemas mediante la regla de Laplace. También se mencionan las tablas de recuento en 1º y 2º de la ESO. Las fórmulas de las permutaciones y factorial de un número aparecen en 3º curso y las de combinaciones y variaciones en 4º curso. De nuevo se repiten en Bachillerato; hay que tener en cuenta también que en el estudio de las distribuciones discretas de probabilidad, como la distribución binomial que se incluye en este nivel, los alumnos necesitan usar combinatoria.

Tabla 1.1. Contenidos combinatorios en el Bloque de Estadística y Probabilidad

1º y 2º ESO	Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos (p. 413).
3º ESO matemática académica	Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número (p. 394).
4º ESO matemática académica	Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento (p. 398).
4º ESO matemática aplicada	Técnicas de recuentos como los diagrama en árbol (p. 407).
Bachillerato (ambas modalidades)	Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades (p. 422 y p. 385).

Asimismo destacamos en la Tabla 1.2 algunos contenidos del Bloque 2 "Números y álgebra" que se pueden relacionar indirectamente con la combinatoria. Pues la combinatoria es un tema propicio al estudio de regularidades y propiedades, así como al uso del lenguaje algebraico.

Tabla 1.2. Contenidos combinatorio en el Bloque de "Números y álgebra"

3º ESO matemática académica y aplicada	Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico. (p. 392 y 401)

Si bien los criterios de evaluación de este contenido indican las expresiones simbólicas y el álgebra como medio matemático para tratar este contenido, no hay que olvidar que la combinatoria también proporciona un amplio abanico de técnicas para investigar relaciones entre conjuntos de números, en particular con sus subconjuntos y que describiremos en el análisis de contenido.

Cabe destacar, además, que el estudio de la Combinatoria contribuye al desarrollo de contenidos del Bloque 1 "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" que es trasversal y común a toda la etapa. En la Tabla 1.3 mencionamos esos contenidos:

Tabla 1.3. Contenidos del Bloque de "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" que se ejercitan con la combinatoria

ESO	– Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. .... – a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. (p. 391 y p. 409)
Bachillerato (matemáticas)	– Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes. Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc. Razonamiento deductivo e inductivo Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos. – Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. (p. 414)
Bachillerato (matemáticas aplicadas a las ciencias sociales)	– Análisis de los resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos. (p. 382)

El desarrollo del razonamiento combinatorio ofrece de manera privilegiada el alcance de muchos de los contenidos expuestos en esta tabla.

En la tesis de Espinoza (2011) se muestra, además, la presencia de la Combinatoria en los libros de texto españoles de educación secundaria de la etapa especialmente en el tema de probabilidad. Sin embargo la mayoría usa la calculadora como único recurso didáctico. Por tanto la actividad que proponemos puede contribuir a aumentar los recursos que incorporen los estudiantes a su trabajo con la combinatoria.

Los estándares estadunidenses

Para completar este apartado ponemos de manifiesto que en los Principios y Estándares para le educación matemática (NCTM, 2000) de Estados Unidos, hay tres áreas que integran a la combinatoria y matemática discreta y son: la combinatoria, la interacción y recursión y los grafos. Nos interesan la primera y la última.

> La combinatoria es la matemática de contar sistemáticamente. La iteración y la recursión se utilizan para modelizar el cambio secuencial paso a paso. Los grafos se usan para modelizar y resolver problemas de caminos, redes y relaciones entre un número finito de objetos (NCTM, 2000, p. 33).

Con respecto a la combinatoria, en la etapa K 9-12 los conceptos de permutación y combinación aparecen en el bloque de "Número y operaciones" como una evolución del trabajo con listas organizadas y con diagramas a árboles que se aprenden a manejar en los niveles anteriores.

> Las listas organizadas y los diagramas de árbol que los estudiantes utilizaron en los niveles elemental y medio para el recuento de resultados o calcular probabilidades, pueden usarse ahora para trabajar con permutaciones y combinaciones (NCTM, 2000, p. 298).

El empleo de grafos en la etapa K 9-12 se inserta en el bloque de "Geometría" con la expectativa de utilizarlo para modelizar y resolver problemas (p. 312) y precisamente para la búsqueda de soluciones óptimas cuando los problemas tratan de caminos, redes o relaciones entre un número finito de objetos.

Observamos que, a diferencia del currículo base español donde los grafos aparecen solo como árboles para la sistematización en problemas de recuento, en los Principios y Estándares el estudio de grafos se plantea de una forma más completa, abarcando varias nociones relacionadas a la propia teoría de grafos.

> El que sigue es un problema de Matemática Discreta. Se pueden utilizar grafos para hallar las soluciones óptimas de problemas relativos a caminos, redes o relaciones entre un número finito de objetos (NCTM, 2000, p. 321).

Asimismo los Principios y Estándares insisten en la importancia de que el estudiante, en esta etapa, adquiera una visión global de las matemáticas y evidencia el potencial de los temas de combinatoria y grafos para el desarrollo de las conexiones entre varias ramas de esta disciplina. El hecho de que en el currículo español tales contenidos se encuentran en el bloque de probabilidad mientras en los Principios y Estándares estadunidenses estos se encuentran en otros bloques es una clara señal de las potencialidades que estos temas presentan a la hora de crear conexiones.

1.6. ANÁLISIS DIDÁCTICO

La noción de análisis didáctico en la investigación en Didáctica de la Matemática tiene multíplices significados. Aquí nos orientamos a considerarlo como un "procedimiento de diseño, desarrollo y evaluación para un tema matemático concreto, fundamentado en la noción de currículo, sostenido por los organizadores curriculares" (Lupiañez, 2009, p. 34-35), que realiza el profesor para planificar, llevar a cabo y valorar su práctica docente.

El análisis didáctico se articula en análisis conceptual, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, manteniendo una correspondencia directa con las cuatro dimensiones del currículo, cultural-conceptual (cómo se entiende el conocimiento), cognitiva (cómo se interpreta el aprendizaje), normativa (cómo se interpreta la enseñanza), social (como se evalúa el dominio y utilizo de lo alcanzado).

1.6.1 ANÁLISIS DE CONTENIDO

El análisis de contenido tiene el propósito de describir la estructura matemática del tópico en cuestión como herramienta para la planificación del profesor (Rico, Lupiañez y Molina, 2013). Este análisis permite al profesor identificar los componentes del significado de los conceptos que intervienen en un tema y proporciona una descripción estructurada, tanto conceptual como procedimental del mismo. Los organizadores que aquí emplearemos para ello son: *estructura conceptual*, *sistema de representación* y *fenomenología*. A su vez la estructura conceptual se compone del campo conceptual y del campo procedimental.

Campo conceptual

A continuación se presentan los componentes del campo conceptual, donde diferenciamos Hechos, Conceptos y Estructuras:

Hechos

Siguiendo a Rico (1995), los hechos son unidades de información dadas al estudiante para que las recuerde y se pueden clasificar en términos, notaciones, convenios y resultados.

Términos: Son las palabras con que se indican los conceptos o las relaciones entre ellos. Pueden ser específicos de matemáticas, o bien tomados del lenguaje ordinario, pero usados con sentido matemático. Entre otros, hemos encontrado los siguientes asociados a nuestra propuesta:

- Grafo, vértice o nodo;
- Bucle, Camino. Ciclo, Circuito, Paseo
- Grafo completo, conexo, orientado (dígrafo), no orientado
- Orden y medida del grafo
- Nexos/Aristas/arcos
- Conjunto, elemento, subconjunto
- Aplicación, imagen, rango; aplicación biyectiva, inyectiva, sobreyectiva
- Unión, intersección, complemento
- Partición
- Factorial
- Número combinatorio
- Permutaciones con/sin repetición u ordinarias
- Variaciones con/sin repetición u ordinarias
- Combinaciones con/sin repetición

Notaciones: Son los símbolos que se utilizan en matemáticas para expresar los conceptos, datos, resultados -y las relaciones entre ellos- en forma abreviada. Estos tienen una función instrumental, ya que permiten trabajar con ellos. Algunos ejemplos en el tema son los siguientes:

- El punto • para nudos/vértices
- La flecha → para nexo o arista orientado. La línea si no es orientado
- V conjunto de vértices o nudos
- E conjunto de aristas (pareja ordenadas de V)
- $G=(V, E)$ para el grafo
- |V| orden del grafo
- S_n para el conjunto de n elementos
- $n!$ factorial de n
- $V_{n,k}$ número de variaciones ordinaria configuraciones ordenadas de k elementos tomados de un conjunto de n elementos ($k<n$).
- $VR_{n,k}$ número de variaciones con repetición o configuraciones ordenadas de k elementos, tomados de un conjunto de n elementos, de forma que cada elemento puede estar más de una vez.
- P_n número de permutaciones ordinarias o configuraciones ordenadas de todos los elementos de un conjunto de n elementos.
- $P_{n,r}$ número de permutaciones con repetición o configuraciones ordenadas, $r=(r_1,r_2,r_3...,r_p)$, con $r_1+r_2+r_3+...+r_p=n$, distintos conjuntos ordenados de n elementos con r_i elementos repetidos
- $C_{m,n}$ número de combinaciones ordinarias o subconjunto de k elementos elegidos entre n elementos ($k<n$).

- $CR_{n,k}$ número de combinaciones con repetición o subconjuntos de *k* elementos de un conjunto de *n* elementos, de forma que cada elemento puede estar hasta k veces.
- $\binom{n}{k}$ número combinatorio

Convenios: Son acuerdos sobre cómo se manipulan los símbolos y representaciones que permiten, entre otros, presentar un resultado o información de manera precisa. Algunos ejemplos son los siguientes:

- El número de permutaciones del conjunto vacío *0!=1*
- Una partición de un conjunto está formada por subconjuntos disjuntos cuya unión es igual al conjunto original
- Llamamos biyectiva a una aplicación tal que a cada elemento de un conjunto corresponde uno y solo un elemento del conjunto imagen.
- Llamamos medida del grafo al número de aristas.
- Llamamos orden del grafo al número de vértices.

Resultados: Son unidades de información que se obtienen mediante relaciones entre términos, y que el estudiante ha de memorizar. Unos ejemplos de ellos son las formulas para calcular el número de combinaciones, permutaciones y variaciones.

- Reglas de la suma y del producto
- Variaciones sin repetición $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Variaciones con repetición $VR_{n,k} = n^k$
- Permutaciones sin repetición $P_n = n!$
- Permutaciones con repetición $PR^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$
- Combinaciones sin repetición $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- Combinaciones con repetición $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Otros ejemplos serían:

→ El número de subconjuntos con el mismo número de elementos en una partición ha de ser un divisor del cardinal del conjunto.

→ En un grafo orientado la dirección de los caminos o circuitos no cambia por transformaciones topológicas.

→ En una partición el cardinal del conjunto total es igual a la suma de los cardinales de los subconjuntos que forman la partición.

Conceptos

Los conceptos (Rico, 1997) describen regularidades o relaciones de un grupo de hechos. Tienen asociados símbolos para representarlos; se pueden definir. A continuación se presentan los más importantes en el tema:

- Conjunto; cardinal de un conjunto; orden, permutación.
- Grafo, nodos, aristas caminos, circuitos, bucles.
- Orden y medida de un grafo.
- Subconjunto vacío, conjunto total.
- Unión e intersección de conjuntos, partición.
- Aplicación, original e imagen.
- Composición de aplicaciones.
- Población, tamaño de la población, muestra, tamaño de la muestra.
- Modelos combinatorios: modelo muestral (población, muestra, muestreo ordenado/no ordenado, remplazo); modelo distributivo (correspondencia, aplicación); modelo partitivo (conjunto, subconjunto, unión).
- Operaciones combinatorias: combinaciones, variaciones, permutaciones.

Estructuras

Las *estructuras conceptuales* agrupan conceptos y relaciones entre conceptos. Las que aparecen en nuestra innovación son principalmente tres:

→ La teoría de conjuntos

- Conjunto, elementos, cardinal, orden
- Conjuntos complementarios, unión, intersección
- Conjunto vacío, total
- Algebra de conjuntos
- Partición
- Aplicaciones y sus elementos
- Tipos de aplicaciones; composición de aplicaciones

→ Grafos:

- Vértices y aristas
- Caminos, circuitos
- Orden y medida del grafo
- Grafo dirigido y no dirigido
- Grafos simples, conexos, completos, etc.

→ Operaciones combinatorias:

- Permutaciones, con o sin repetición
- Variaciones, con o sin repetición
- Combinaciones, con o sin repetición

- Modelos combinatorios (colocación, partición y selección)

Campo procedimental

Además de los conceptos y propiedades son importante también los procedimientos (algoritmos, estrategias, técnicas de cálculo) que son objeto de enseñanza (Godino, Batanero y Font, 2003). Por su parte Rico (1997) diferencia tres niveles de complejidad en los procedimientos que son *destrezas*, *razonamientos* y *estrategias.*

Destrezas

Implican el dominio de los hechos y procedimientos, y manipulan símbolos y transformaciones. Algunos de los ejemplos en el tema son:

- Utilización correcta de los términos matemáticos básicos en el tema.
- Representación de aristas, caminos y circuitos en un grafo.
- Manejo de operaciones con factorial y número combinatorio.
- Realización de operaciones aritméticas.
- Organización de los datos.
- Creación y lectura de representaciones gráficas sencillas.
- Aplicar una simbolización a los vértices de un grafo siguiendo el orden alfabético.
- Indicar adecuadamente el sentido de movimiento entre los vértices de un grafo mediante una flecha.
- Reconocer circuitos en un grafo.

Razonamientos

Suponen establecer relaciones de inferencia entre conceptos, deducir unos conceptos de otros y establecer nuevas relaciones entre ellos.

- Análisis de caso sencillos de trenzado e identificación de su representación en un grafo dado.
- Identificación de regularidades sencillas en un grafo dado.
- Identificación de elementos que se permutan entre sí, dentro de un grafo que representa un trenzado.
- Análisis de ejemplos u contraejemplos que cumplen una propiedad.
- Enumeración sistemática.
- Aplicación creativa de la regla de la suma y producto.
- Aplicación del principio de inclusión y exclusión.

Estrategias

Se ejecutan sobre la red de conceptos, empleando los diversos sistemas de representación. No solo requieren el dominio de los conceptos, sino que también requieren creatividad para hallar las nuevas relaciones. Algunos ejemplos serían:

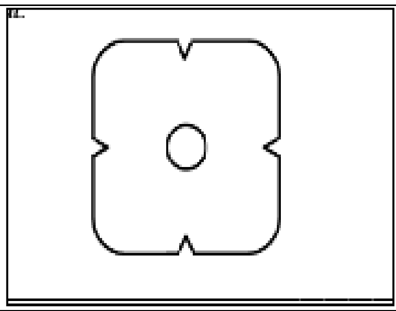
- Recursión (el procedimiento contiene una versión de sí mismo como subprocedimiento; reducir el problema a uno más sencillo, razonar sobre lo hecho, expresar la reducción en forma de algoritmo o expresión recurrente.
- Inducción (definir un objeto en términos de unos o varios ejemplos más simple de sí mismo).
- Inducción completa [Verificar f(1); Comprobar que f(k-1) implica f(k); deducir que se verifica f(n), para todo n natural].
- Recuento exhaustivo o enumeración sistemática.
- Matematización y modelización (construcción de un grafo para modelizar una situación).

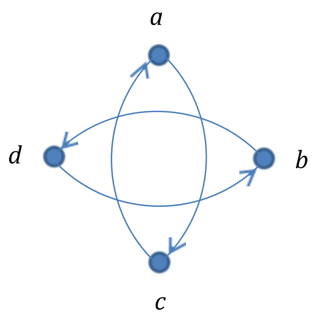
Sistemas de representación

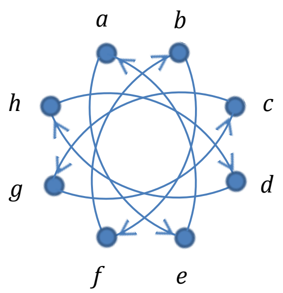
Por representación se entiende cualquier forma que empleamos para hacer presente un objeto matemático abstracto. Diversas representaciones permiten destacar diferentes particularidades del objeto (concepto, propiedad, procedimiento) al que se hace referencia, a la vez que facilitan la compresión y el trabajo con el mismo. A continuación exponemos las distintas formas de representación que encontramos en nuestra actividad

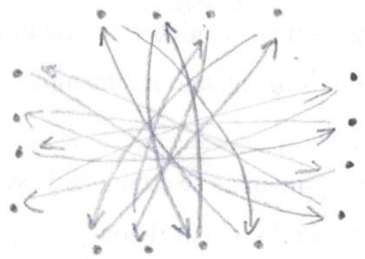
→ *Simbólico*: incluye símbolos y expresiones algebraicas que representan conceptos, operaciones, resultados, datos. En el apartado de notaciones se detallan los que usamos en combinatoria. En la innovación utilizaremos letras para simbolizar los vértices, las permutaciones de vértices y las particiones del conjunto de vértices.

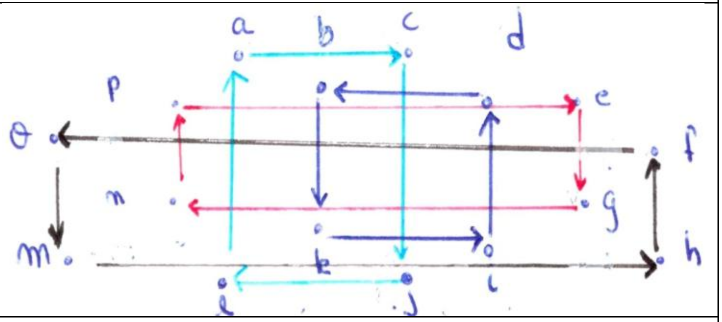
→ *Verbal*: serían todos los términos, las palabras que utilizamos para referirnos a los conceptos, operaciones etc. Incluyen todas las descritas en el apartado anterior.











a	***b***	***c***	***d***	Movimiento con respecto a la posición de las muescas	Permutación de hilos
1	2	3	4	*(a, c) (d, b)*	(1,3) (4,2)
3	4	1	2	*(a, c) (d, b)*	(3,1) (2,4)
1	2	3	4	*(a, c) (d, b)*	(1,3) (4,2)

Figura 1.1. Algunas representaciones usadas en el diseño o análisis de la actividad

→ *Gráfico:* los grafos y los diagramas en árbol son representaciones gráficas que tienen un papel clave en combinatoria. En nuestra innovación hemos usado fundamentalmente grafos, pero también fotografías, esquemas (de la carta).

→ *Tablas:* en combinatoria serían una ayuda para el recuento sistemático. Nosotros las hemos utilizado en el Capítulo 2 para realizar un análisis de la actividad.

→ *Manipulativo:* en la innovación que presentamos proponemos una novedosa representación manipulativa para trabajar con el concepto de grafo. Nos referimos a la carta, los hilos del trenzado y las muestras de material de artesanía.

Para aclarar estos tipos de representación mostramos en la Figura 1.1 algunos ejemplos de estos tipos utilizados en la innovación.

Fenomenología

La Fenomenología mira a las relaciones entre las matemáticas y las experiencias del mundo físico. Esta incluye situaciones (medios donde las estructuras matemáticas tienen regular uso) y contextos (marco en donde las matemáticas tienen unas funciones para resolver necesidades que se presentan).

Para las situaciones, en el marco de las evaluaciones PISA (OECD, 2012), se distingue entre personales, educativas o laborales, públicas y científicas.

→ *Personal*: las situaciones personales se centran en las actividades del individuo, su familia y su grupo de iguales. Pueden ser relacionadas a la salud, los juegos, el ocio, etc.

→ *Laborales o educativas*: los problemas clasificados en esta categoría se centran en el mundo laboral. Abarca aspectos como la gestión de presupuestos, la planificación, el control de calidad, el diseño, y la toma de decisiones.

→ *Públicas*: se centran en los aspectos relacionados con la comunidad, en sus distintos niveles, local, nacional o global. Alcanza aspectos como el transporte, la política y las elecciones, la demografía, la economía, la prensa o publicidad.

→ *Científicas*: aplicación de las matemáticas al mundo natural y a temas relacionados con la ciencia y la tecnología: física, genética, química, ecología, informática, etc.

En el caso de nuestra innovación podemos darle un doble carácter. Por un lado se trata de una situación laboral, ya que analizamos el trabajo realizado en una comunidad artesanal desde un punto de vista matemático. También podemos verlo como un contexto social para el caso de los profesores con los que se realizó la experiencia, pues se centra en una práctica artesanal en su propia comunidad.

Es posible encontrar otros contextos en cualquiera de los tipos anteriores donde se destaca el uso de la combinatoria (ver Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1997 para otros ejemplos):

Personal: cálculo de probabilidades en cuestiones de la vida diaria. Matemática recreativa; manualidades.

Laboral: la optimización (el estudio de caminos mínimos, o de menor coste); la planificación de proyectos; almacenamiento y codificación de la información.

Público: juegos de azar (loterías); previsión de ganancia o de valor esperado de una empresa o de un país; problemas de gestión de transporte y tráfico.

Científico: planificación de investigaciones; el cálculo de probabilidades; la mecánica de partículas los modelos de Bose- Einstein y Fermi-Dirac; enumeración de simetrías en cristalografía; movimiento Browniano.

1.6.2 ANÁLISIS COGNITIVO

El análisis cognitivo se ocupa de las cuestiones inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje y comprende los siguientes apartados: a) las *expectativas* de aprendizaje, es decir lo que se pretende del estudiante y que se describen en términos de objetivos y competencias; b) las *limitaciones* del aprendizaje, que describe los errores y dificultades que los estudiantes pueden encontrarse al trabajar el tema y que el profesor tiene que tener en cuenta y posiblemente prevenir o resolver para facilitar el aprendizaje; y c) las *oportunidades* de aprendizaje, que son los tipos de tareas que se propone para conseguir los objetivos. A continuación describimos las limitaciones y las oportunidades de aprendizaje. Las expectativas de aprendizaje se incluyen en el Capítulo 2, donde se analiza con detalle el diseño de la innovación.

Limitaciones del aprendizaje

Las principales limitaciones que podemos esperar en la innovción son de tres tipos: ligadas a las operaciones combinatorias, ligadas al estudio de grafos y generales (ligadas a la actividad de modelización y resolución de problemas).

De tipo combinatorio

Vemos algunas dificultades ligadas a la resolución de problemas combinatorios que hemos recopilado a partir de las investigaciones descritas por Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994).

- La sistematización de la enumeración: son muchos los estudiantes que, incluso llegado el periodo de las operaciones formales siguen estrategias no sistemáticas, con el resultado de repetir elementos o no llegar a dar una lista completa.
- La identificación del conjunto a enumerar: se debe a la interpretación del enunciado de los problemas, de modo que no se comprende la naturaleza del conjunto o no se identifican sus elementos.
- La comprensión de las condiciones de la partición: número de partes, elementos en cada parte, etc.
- La elección de la notación que sea apropiada: esta es una dificultad que puede darse en nuestro trabajo si no se es capaz de simbolizar los grafos construidos.
- La percepción de los parámetros que intervienen en el enunciado como variables.

Algunos errores que se han detectado en los estudiantes a la hora de resolver problemas combinatorios son (Navarro-Pelayo, Batanero, Godino, 1996; Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997):

- Error en reconocer el modelo matemático del enunciado, por ejemplo cambiar una selección por una partición.
- Error de orden, considerar relevante el orden cuando no lo es o viceversa, que equivale a confundir variaciones por combinaciones.
- Error de repetición, cuando se repiten elementos en caso que se contemple esta posibilidad en el enunciado o viceversa.
- Confundir el tipo de objetos, por ejemplo no distinguirlo cuando hay tipos diferentes, o sí hacerlo cuando son iguales.
- Errores en el uso de las formulas, no recordar el significado de los parámetros, o equivocarse en las formulas.

Muchos de los errores que se enumeran están relacionados a no comprender el esquema que se proporciona en la Figura 1.2.

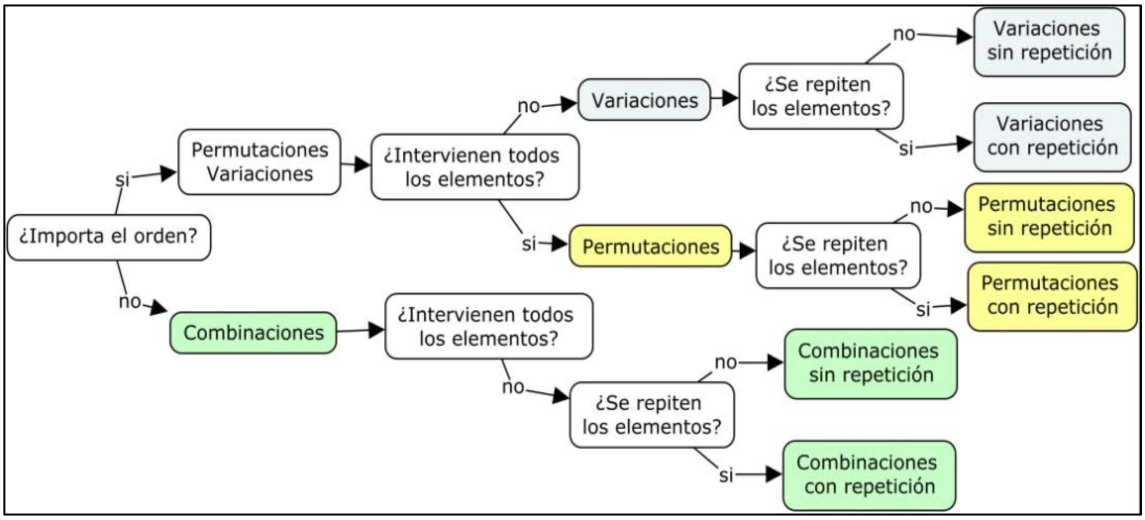


Figura 1.2 Mapa de los interrogantes para distinguir las operaciones combinatorias.

Sobre grafos

Las principales dificultades serían las siguientes

- Identificar los vértices y su número a partir de la actividad propuesta.
- Identificar las aristas, caminos y circuitos.
- Crear un grafo que se ajuste a las condiciones del problema.
- Simbolizar adecuadamente los elementos del grafo.
- Identificar las propiedades que ha de cumplir el grafo para que represente la situación.
- Generalizar propiedades de un grafo a otro de orden superior.

Algunos errores que se han visto al realizar la actividad son:

- Error en el número de vértices o en la identificación de las aristas.
- Confundir el tipo de circuitos que cumplen la condición pedida (disjuntos o no disjuntos).
- Confundir el sentido del movimiento en un grafo orientado.
- No identificar la simetría de los circuitos.

Sobre resolución de problemas

Puesto que se trata de una actividad de modelización y resolución de problemas podemos encontrar las siguientes dificultades:

- Dificultad en abstraer la realidad (actividad artesanal) para llegar al modelo matemático.

- Dificultad en el trabajo con el modelo matemático (con grafos, particiones y permutaciones).
- Dificultad al cambiar de una representación del modelo a otra diferente.
- La fijación de variables en los problemas complejos, para establecer un método de contar con una restricción añadida y luego prescindir de ella generalizando.
- La generalización a partir de unos casos particulares (recursión).
- Considerar el problema como un conjunto de enunciados particulares a los cuales aplicar un razonamiento de inducción.

En consecuencia, se puede esperar los siguientes errores

- Error al construir el modelo de grafo, partición o permutación que represente la actividad artesanal.
- Fallo en la generalización (muy amplia o al contrario).
- Error al transformar una representación a otra.
- Error al fijar las variables.
- Razonamiento inductivo incompleto.

1.6.3 ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Existen diferentes variables que se pueden tener en consideración cuando se quiere realizar un análisis de las tareas, por ejemplo la adecuación, la secuenciación, los materiales, la gestión del aula, la complejidad y el rol en el proceso de aprendizaje (Rico, Lupiañez, y Molina, 2013; Caraballo, Lupiañez y Rico, 2011).

En esta sección presentamos clasificaciones para estas últimas dos variables.

En función de la complejidad, las tareas pueden ser de *reproducción*, si se pretende que el estudiante aplique directamente un concepto o un procedimiento; de *conexión*, cuando implican el manejo de más conceptos o sistemas de representación que el estudiante debe relacionar; de *reflexión* cuando lo aprendido se aplica a situaciones o problemas nuevas y se pretende generalizar o justificar conclusiones.

Ahora clasificamos las tareas atendiendo al papel que adquieren en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ponemos especial atención a la motivación del estudiante y otorgamos un papel central a la construcción de su conocimiento. Dividimos el proceso de aprendizaje en tres fases: una primera fase inicial; una fase de desarrollo y una fase final de cierre.

En la primera fase se encuentran dos tipos de tareas: *para motivar y relacionar con el entorno*, que proporcionan utilidad y sentido al contenido, y se proponen despertar el interés y la curiosidad del estudiante; *para conocer los aprendizajes previos*, que permiten al estudiante relacionar lo nuevo con lo que ya sabe y al profesor detectar los conocimientos previos de los estudiantes y eventuales carencias que necesitan espacial atención.

En la fase de desarrollo se encuentran cuatro tipos de tareas: *exploratorias*, basadas en el cuestionamiento y la interrogación, que implican por parte del estudiante la realización de pequeñas investigaciones empleando métodos de descubrimiento; *de elaboración y construcción de significados,* permiten al estudiante tomar conciencia de los conocimientos aprendidos y al profesor aportar nuevas informaciones para guiar la construcción de nuevos significados; *de descontextualización y de aplicación*, implican la búsqueda por parte del estudiantes de resoluciones a problemas no rutinarios ni familiares; *de ejercitación*, sirven para consolidar lo aprendido y facilitar la restructuración de los conocimientos previos que han sido modificados.

En la fase de cierre se sitúan las tareas *de síntesis,* durante las cuales se recapitula lo aprendido y permiten al profesor la valoración de este.

En el Capítulo 2 cuando presentamos y discutimos el diseño de la innovación y describimos las tareas haremos referencia a estas dos clasificaciones.

CAPÍTULO 2. DISEÑO DE LA EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN

2.1 INTRODUCCIÓN

Como hemos indicado en el primer capítulo, la propuesta de experiencia de innovación que diseñamos sigue una línea iniciada por Oliveras (1996) en su trabajo doctoral y profundizada por Gavarrete (2012) y Oliveras y Gavarrete (2012). Dicha propuesta pretende desarrollar trabajos de indagación matemática en el aula, apoyada sobre signos culturales relacionados con la matemática.

Un signo cultural matemático es un rasgo o elemento, tangible o intangible (material o inmaterial) de una cultura o microcultura determinada que involucre algún pensamiento matemático. El interés didáctico de su estudio es que sirve para después elaborar tareas para la clase de matemáticas y realizar actividades centradas en las matemáticas implícitas en la fabricación –si es tangible– o práctica del signo –si este es intangible–. Dichas tareas serán una fuente de motivación para el estudiante, que puede relacionar su cultura con la actividad del aula.

El signo cultural alrededor del cual diseñamos la experiencia de innovación es una artesanía de trenzado, muy típica de la región de Salta (Argentina). Se ha indagado el potencial matemático de este signo en algunas investigaciones anteriores (Oliveras y Albanese, 2012; Albanese, Oliveras y Perales, 2014), por lo que partimos de dicho análisis para plantear nuestra propuesta. El trabajo de campo etnográfico y la interpretación de los datos proporcionaron una modelización matemática del trenzado, que creemos presenta grandes posibilidades para el diseño de una innovación educativa (Albanese, Oliveras y Perales, 2012).

La actividad que ahora presentamos surge de la idea de recrear en el aula cómo puede haberse formado esta modelización matemática que los artesanos manejan. Para ello primero se solicita a los estudiantes que analicen y describan individualmente su propia forma de pensar la acción de trenzar. En una segunda fase se anima los estudiantes a trabajar en pareja o pequeños grupos para consensuar una manera común de representar matemáticamente el proceso de trenzar. Finalmente se plantea una puesta en común en donde los estudiantes compartan entre todos sus propuestas, buscando un acuerdo hacia una misma forma de pensar y (re)presentar esta práctica. Durante todo el proceso la profesora dirige y conduce los estudiantes hacia la construcción de grafos y permutaciones recurrentes dentro de los subconjuntos de una partición del conjunto de hilos para modelizar y representar el trabajo de los artesanos.

2.2 OBJETIVOS

Nuestra propuesta de innovación se dirige a alcanzar un objetivo general, que puede descomponerse en otros específicos.

El objetivo general es proponer una situación didáctica que lleve a los estudiantes a construir grafos, como modo de modelizar la actividad artesanal, analizando algunas de las propiedades de estos gráficos; también se pretende trabajar con las permutaciones y particiones de conjuntos discretos, todo ello para la resolución de un problema práctico.

En esta propuesta, se contribuye también a alcanzar los principales objetivos del área de matemáticas (MECD, 2015), que se exponen a continuación, muchos de los cuáles se pueden reforzar con la actividad que proponemos:

Objetivos de etapa

De acuerdo con el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (MECD, 2015) el Bachillerato contribuirá a desarrollar en los estudiantes las capacidades que les permitan:

OE.1. Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.

OE.2. Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.

OE.3. Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.

OE.4. Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.

OE.5. Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.

OE.6. Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.

OE.7. Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.

OE.8. Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

OE.9. Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.

OE.10. Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

OE.11. Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

OE.12. Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.

OE.13. Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.

OE.14. Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial. (MECD, 2015, p. 188).

En particular en la innovación que planteamos queremos fomentar primariamente el alcance de los objetivos de etapa OE.10 y OE.11 ya que nos centramos en el conocimiento matemático y en sus métodos a través de una actividad que implica actitudes creativas y flexibles y que mira a adquirir confianza y desarrollar sentido crítico.

Objetivos del área de matemáticas

Al describir las Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, en el Nuevo Decreto (MECD, 2015, p. 381) se indica que estas son un instrumento indispensable para interpretar la realidad y expresar los fenómenos sociales, científicos y técnicos, contribuyendo a su comprensión y desarrollando la capacidad de simplificar y abstraer.

Asimismo las matemáticas contribuyen al aprendizaje de métodos generales de análisis, desarrollan la capacidad de reflexionar y razonar y proporcionan instrumentos adecuados para la representación, modelización, como queremos desarrollar con nuestra innovación.

También se indica que su enseñanza no debe desvincularse de su aplicación a la interpretación de los fenómenos sociales, y la adquisición de la habilidad de interpretar datos, seleccionar los elementos fundamentales, analizarlos, obtener conclusiones razonables y argumentar de forma rigurosa, siendo la resolución de problemas se convierte en objetivo principal. No hemos encontrado objetivos de área en este documento, por lo cual incorporamos los del anterior currículo (MEC, 2007):

OA.1. Desarrollar una mejor capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los ámbitos de la actividad diaria.
OA.2. Reconocer y plantear situaciones formuladas en términos matemáticos, abordarlas utilizando diferentes estrategias y analizar los resultados mediante los recursos más apropiados.
OA.3. Identificar los elementos matemáticos presentes en diversas actividades; analizar de manera crítica las funciones de estos elementos matemáticos y valorar su aportación.
OA.4. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en el día a día, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas.
OA.5. Actuar con modos propios de la actividad matemática ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana.
OA.6. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función de los resultados.
OA.7. Mostrar una actitud positiva a la hora de resolver problemas y confianza para enfrentarse a ellos con éxito. Adquirir un nivel de autoestima que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
OA.8. Integrar los conocimientos matemáticos en los saberes de las distintas áreas para que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
OA.9. Valorar las matemáticas como un factor integrante de nuestra cultura, nuestra historia y su papel en la sociedad actual.
OA.10. Aplicar las competencias matemáticas en el análisis y valoración de fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica. (MEC, 2007, p. 752).

En la innovación que describimos abarcamos principalmente los objetivos de áreas OA.1 y OA.4 ya que miramos a provocar reflexión sobre el conocimiento matemático, y en especial combinatorio, sobre todo en cuanto a sus formas de expresiones y sus modos de razonar, además de promover el estudio de las relacionar espaciales; asimismo pretendemos realizar aportaciones para el alcance de los objetivos OA.6 y OA.7 ya que requerimos a los estudiantes de desarrollar formas propias de abordar la situación y después de valorar la conveniencia de las elecciones realizadas e insistimos en la validez de todas ellas cuando debidamente justificadas, fomentando la autoestima y apreciando la creatividad de cada estudiante.

Objetivos específicos de la actividad

Los objetivos específicos que se pretenden alcanzar en la innovación son los siguientes:

1. Realizar una representación gráfica de una acción práctica (el trenzado). Modelizar matemáticamente dicha actividad para algunos ejemplos de trenzas de 4 y 8 hilos.
2. Elaborar una representación simbólica a partir de la representación gráfica realizada previamente.

3. Identificar el concepto de grafo en estas representaciones; identificar los componentes del grafo y algunas de las propiedades de los grafos particulares utilizados en la actividad.
4. Identificar los conceptos de partición y de permutación desde la actividad realizada y sus representaciones. Identificar sus elementos, los conceptos relacionados y las propiedades de los usados en la actividad.
5. Identificar patrones y reglas para la construcción de los grafos que sirven para modelizar la actividad de trenzado de las trenzas de 4 y 8 hilos.
6. Generalizar e inventar nuevos trenzados utilizando 16 hilos. Generalizar los grafos, particiones y permutaciones identificados en los pasos anteriores.
7. Deducir algunas propiedades matemáticas sencillas en grafos, particiones y permutaciones.
8. Ejercitar estrategias combinatorias, como la enumeración sistemática, establecimiento de correspondencias y particiones en conjuntos y la recursión.
9. Ejercitar el razonamiento inductivo, recursivo y la generalización.
10. Explicar por escrito y verbalmente las soluciones a los problemas propuestos.

2.3 COMPETENCIAS

En el Real Decreto donde se establece el currículo básico de ESO y Bachillerado (MECD, 2015) que se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, integradas en los elementos curriculares para propiciar una renovación en la práctica docente y en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las competencias se conceptualizan como un «saber hacer» que se aplica a una diversidad de contextos académicos, sociales y profesionales. En el Real Decreto se identifican las siguientes competencias clave tomadas de la Unión Europea:

> a) Comunicación lingüística.
> b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
> c) Competencia digital.
> d) Aprender a aprender.
> e) Competencias sociales y cívicas.
> f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
> g) Conciencia y expresiones culturales. (MECD, 2015, p.172)

En la innovación contribuimos al desarrollo en los estudiantes de muchas de ellas: la competencia lingüística por la necesidad de comunicar lo que se realiza en las puestas en común, la competencia matemática por la implicación de los conceptos y el razonamiento matemático, la competencia de aprender a aprender y es sentido de iniciativa porque promovemos el surgimiento de formas propias de representar la situación y resolver los problemas planteados y la competencias sociales ya que fomentamos la construcción consensuada y compartida de respuestas en pequeños grupos que implica el respeto, la escucha y comprensión del pensamiento del otro.

Además tendremos en cuenta las facetas de la competencia matemática que corresponden a las tomadas en cuenta por las evaluaciones internacionales de PISA (OECD, 2012). Estas son:

- Pensar (razonar y argumentar) (RA)
- Modelizar (matematizar) (M)
- Plantear y resolver problemas (RP),
- Representar (R)
- Utilizar símbolos (usar lenguaje formal, simbólico) (S)
- Comunicarse con y sobre las Matemáticas (C)
- Utilizar herramientas tecnológicas y otras ayudas (usar herramientas matemáticas) (HM)

Las actividades propuestas en la innovación fomentan principalmente el desarrollo de los aspectos de modelizar y representar, en cuanto se pide a los estudiantes que construyan una representación de la práctica de trenzar y después trabajen con la modelización artesanal. Asimismo queda involucrada también la utilización de símbolos por las características propias de las representaciones que surgen, y la necesidad de comunicarse con y sobre la matemática –esto último sobre todo por la metodología constructiva que planteamos y que implica el dialogo el confronto y el consenso con los compañeros–.

Las tareas que proponemos son más bien abiertas, y enfrentan los estudiantes a situaciones nuevas, delante de las cuales tienen que elaborar estrategias de actuación para resolver los problemas planteados, o formular sus propias preguntas determinando las informaciones relevantes a incluir en el modelo, las formas de incluirlas. Asimismo se fomenta el razonamiento sobre los aspectos lógicos y su relación con la situación. Entonces podemos afirmar que la innovación contribuye también al desarrollo de las facetas de pensar-razonar y resolver problemas.

En la siguiente Tabla 2.1 vemos la relación entre los objetivos de la innovación y las facetas de la competencia matemática.

Tabla 2.1 Relación entre objetivos de la innovación y facetas de la competencia matemática.

	RA	M	RP	R	S	C	HM
1. Realizar una representación gráfica de una acción práctica (el trenzado). Modelizar matemáticamente dicha actividad para algunos ejemplos de trenzas de 4 y 8 hilos.		X		X			X
2. Elaborar una representación simbólica a partir de la representación gráfica realizada previamente.		X		X	X	X	
3. Identificar el concepto de grafo en estas representaciones; identificar los componentes del grafo y algunas de las propiedades de los grafos particulares utilizados en la actividad.	X	X			X		
4. Identificar los conceptos de partición y de permutación desde la actividad realizada y sus representaciones. Identificar sus elementos, los conceptos relacionados y las propiedades de los usados en la actividad.	X	X	X				
5. Identificar patrones y reglas para la construcción de los grafos que sirven para modelizar la actividad de trenzado de las trenzas de 4 y 8 hilos.	X		X				
6. Generalizar e inventar nuevos trenzados utilizando 16 hilos. Generalizar los grafos, particiones y permutaciones identificados en los pasos anteriores.	X	X	X	X	X		
7. Deducir algunas propiedades matemáticas sencillas en grafos, particiones y permutaciones.	X		X			X	
8. Ejercitar estrategias combinatorias, como la enumeración sistemática, establecimiento de correspondencias y particiones en conjuntos y la recursión.	X	X	X				
9. Ejercitar el razonamiento inductivo, recursivo y la generalización.	X		X				
10. Explicar por escrito y verbalmente las soluciones a los problemas propuestos						X	

2.4 CONTENIDOS

Los principales contenidos matemáticos de la innovación propuesta son los siguientes:

Conceptos:

- Conjunto, elemento, orden y permutación; cardinal de un conjunto.
- Subconjuntos; unión e intersección de conjuntos. Conjunto total y vacío.

- Partición de un conjunto.
- Grafo, vértices, aristas, relaciones binarias entre elementos de un conjunto; bucles, caminos, circuitos, trayectoria, ciclo, orden y medida del grafo.
- Correspondencias y aplicaciones. Original e imagen de una aplicación; composición de aplicaciones.
- Relación de equivalencia.
- Simetría; movimiento, giro; distancia, centro, sentido de giro y ángulo.
- Divisibilidad; múltiplos y divisores.

Propiedades

- Subconjuntos excluyentes; complementarios.
- Correspondencias inyectivas, biyectivas.
- Inversa de una aplicación; inversa de una permutación.
- Vértices adyacentes; no adyacentes; opuestos.
- Camino cerrado, abierto; circuito o camino orientado.
- El número de circuitos cerrados debe ser divisor del número de vértices.
- Reglas de la suma y del producto.
- Recurrencia en la formación de permutaciones.

Procedimientos:

- Enumeración sistemática.
- Recuento.
- Clasificación.
- Recurrencia.
- Composición de aplicaciones o de permutaciones.
- Representación gráfica y simbólica.

Argumentación-razonamiento

- Inductivo.
- Análisis y síntesis.
- Analogía.
- Generalización.

Todos estos contenidos serán las herramientas matemáticas para la resolución de los problemas planteados en la actividad.

2.5 MATERIAL

La motivación de la propuesta parte de los trenzados que se usan en la región de Salta (Argentina) para elaborar sus artesanías. En la Figura 2.1 se muestran algunos ejemplos de objetos de artesanía que utilizan el trenzado y que se mostrarían al comienzo de la actividad a los estudiantes para motivarlos.

La actividad propone una metodología de indagación en cuanto se pide a los estudiantes que investiguen la práctica de trenzar, analicen dicha práctica y construyan una representación matemática de los movimientos que se realizan con los hilos durante el proceso de elaboración de un trenzado simple.

Ejemplo de trenzado; Soga	Ejemplo de trenzado: Lápiz

Figura 2.1. Objetos con artesanía de trenzado

Cada estudiante inventa su propia representación y se discuten las propuestas de cada uno para después consensuar la que se considere mejor en pequeños grupos.

La innovación que proponemos se sitúa tanto en la metodología lúdica, que parte de la experiencia directa de los estudiantes en la realización de las trenzas para introducirles en actividades de modelización de contenido combinatorio. Asimismo es también innovador plantear este contenido en un contexto que focaliza la atención hacia tareas concretas.

Nuestro trabajo se apoya en algunos materiales construidos para la experiencia, en concreto fichas de trabajo y material manipulativo. La construcción de fichas de trabajo y la utilización de material manipulativo están inspiradas en el trabajo de Gavarrete (2012).

Dicho material manipulativo es el siguiente:

- Una cantidad suficiente de hilos de cuerda de unos 40 cm de largo y un grosor de unos 2 mm de dos colores diferentes. Se calculará el número necesario en función del tamaño del grupo de estudiantes.
- "La carta" un cuadrado originariamente de madera -si bien nosotros utilizaremos cartón-vidrio-, de unos 5/8 cm de lado (no todas son iguales) con unas muescas en cada lado para fijar los hilos y un hueco en el centro (Figura 2.2).
- Además serán necesarias unas bolsas de plásticos para rellenar con algún material pesado, originariamente piedrecitas; en el aula se pueden también usar los teléfonos móviles de los estudiantes.

Ya hemos mencionado que durante la actividad propuesta el estudiante construye estos conceptos a partir de la práctica de trenzar. Aquí detallamos la forma en que se conecta esta práctica con los contenidos de grafos y permutaciones. Para ello haremos referencia principalmente a los resultados presentados en Albanese, Oliveras y Perales (2012, 2014).

Como ya mencionamos, la elaboración del trenzado por parte de los artesanos argentinos necesita de un aparato que se llama "Carta". En la Figura 2.2 se muestra una Carta montada sobre una mesita; esta posición facilita el trabajo de trenzado.

Los hilos (en el caso de la Figura 2.2 b, son ocho) se atan por uno de sus extremos. El nudo formado al atarlos se inserta en el hueco del centro de la carta y se le pone un peso para que queden fijos sobre ella. Los otros extremos de los hilos se ubican en las muescas de la carta; debemos contar con el mismo número de muescas por cada lado de ella.

	
2.2 a) La Carta, herramienta necesaria para realizar el trenzado	2.2 b) La Carta sobre una mesita

Figura 2.2. Variantes de la Carta.

Esta situación inicial se puede representar sobre papel con puntos ubicados en los lados de un cuadrado, un punto para cada muesca en uso; estos serán los vértices del grafo, que se simbolizarán con letras correlativas. En la Sección 2.7 describimos las tareas planteadas dentro de la actividad.

Además del anterior material manipulativo se proporcionará a los estudiantes, para cada una de las tareas, unas fichas de trabajo similares a las representadas en las Figuras 2.3 y 2.4 (ver descripción completa del desarrollo de las tareas en el apartado 2.7).

2.6. MÉTODO

En la propuesta de innovación se diseña una serie de tareas. La actividad en cada una de las tareas propuestas se organiza en cuatro momentos, que en cierto sentido reproducen los tipos de situaciones considerados en la teoría de Brousseau (1997). Cada una de ellas se caracteriza por la actividad matemática desarrollada y una interacción distinta entre los participantes:

- Primero se trabaja de forma individual, resolviendo un “problema” (situación de acción, de acuerdo a Brousseau, 1997); para que se trate de un verdadero problema, la solución no ha de ser inmediata al estudiante. Además, el estudiante debe interesarse personalmente por la tarea (conseguirse la *devolución* del problema). Pensamos esto se consigue en nuestra actividad al ser fuertemente motivadora para el estudiante.
- Seguidamente se representan gráfica y verbalmente sus resultados (situación de comunicación); al considerar la matemática como un lenguaje, es importante que los estudiantes adquieran habilidad en el uso del lenguaje matemático, compuesto de términos, expresiones simbólicas y gráficos. La situación de comunicación se orienta a la práctica del lenguaje matemático.
- Después los participantes trabajan en pequeños grupos para llegar a una solución común (situación de validación). Cada uno debe convencer a su oponente de las ventajas de su propuesta; eventualmente es necesario un debate. En este tipo de situación se practica la argumentación y razonamiento matemático para llegar a una “prueba”.
- Al final los grupos interaccionan con el profesor en el gran grupo para la puesta en común de los resultados de cada grupo; se aprovecha para reflexionar sobre la

matemática que se ha trabajado, aceptando lo que es correcto desde el punto de vista de la institución matemática (situación de institucionalización). El profesor resalta los puntos siguientes:

- Los diferentes tipos posibles de representación (gráfica o simbólica), cuál elegiría el artesano y el matemático.
- Las diferencias y semejanzas entre las representaciones de todas las parejas de estudiantes. La conveniencia de cada una.
- La representación en los grafos del sentido del movimiento de trenzado.
- El número de movimientos y como se representan los hilos y muescas de la carta en el esquema gráfico.

Secuenciación del trabajo en el aula

La secuenciación del trabajo en el aula que se presenta en el Cuadro 1 está descrita a continuación.

La primera tarea lleva aproximadamente dos horas, pues los estudiantes no habían trabajado anteriormente esta actividad y la realizamos en tres fases. La segunda tarea corresponde a la fase 4 y la tercera a la fase 5. Hacemos notar que las tareas 2 y 3 también podrían trabajarse en tres fases según el tiempo a disposición. En nuestra experiencia se dispone de hora y media para las dos últimas tareas.

Cuadro 1: Desarrollo de la actividad con las interacciones

Tarea 1

Fase 1. *Describir de la realización del trenzado: individual.*

Fase 2. *Representar de forma creativa y consensuada: en pequeños grupos.*

Fase 3. *Confrontar las representaciones con la modelización artesanal: en el gran grupo.*

Tarea 2

Fase 4. *Reconocimiento de patrones en los grafos de las trenzas de 8 hilos.*

Tarea 3

Fase 5. *Inventar trenzas de 16 hilos, representarlas con grafos o pemrutaciones.*

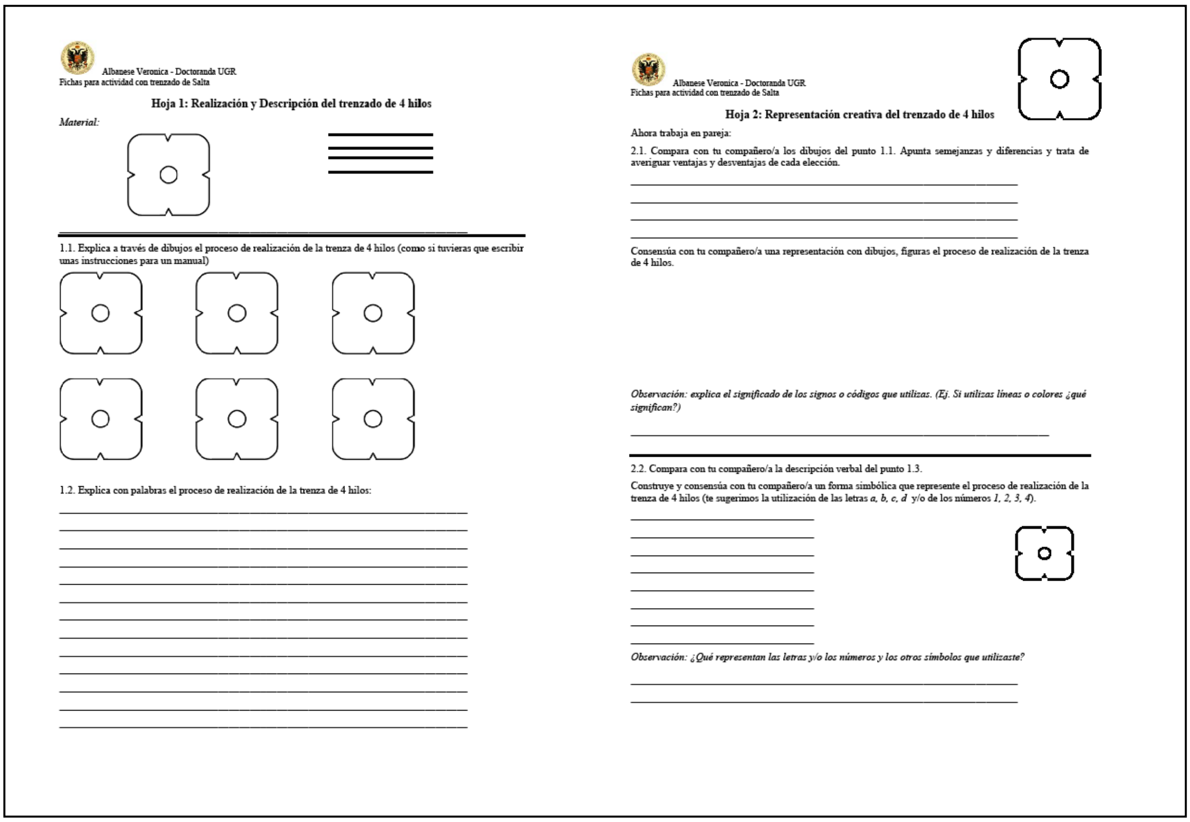
2.7 DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS

Siguiendo la secuenciación detallada en la sección anterior pasamos ahora a la descripción de las tareas.

Tarea 1, Fase 1: se comienza mostrando a los estudiantes algunos objetos de artesanía (Figura 2.1.) y pidiéndoles examinen el trenzado. A continuación practican ellos mismos la elaboración de una trenza usando la carta. Se proporciona a los estudiantes el material necesario para la realización de un trenzado simple y se les muestra cómo elaborar el trenzado de la primera tarea que denominamos *cruz de cuatro hilos* (T1) reflexionando sobre los movimientos necesarios y la forma de permutar los hilos. Entonces se les solicita que, individualmente, describan el proceso, primero de manera gráfica y después con palabras.

Esta tarea es guiada por la primera hoja de la Figura 2.3. En la parte superior de la hoja se representa esquemáticamente una carta de 4 muescas y 4 hilos en el trenzado correspondiente a la cruz de cuatro hilos. La pregunta 1.1 pide a los estudiantes representar esquemáticamente sobre un conjunto de seis esquemas de la Carta los pasos que se siguen (en forma recursiva) para elaborar el trenzado de 4 hilos. Se espera que el estudiante represente con flechas el cambio de posición (permutación) sucesiva de cada hilo del trenzado; los extremos de las flechas indican el sentido de la permutación. De este modo tendríamos los caminos posibles en un grafo que representaría el movimiento de trenzado. Posiblemente pueda añadir símbolos (letras o números) para designar la posición inicial de cada hilo (serían los vértices del grafo).

En la pregunta 1.2 se pide al estudiante explicar su representación esquemática en lenguaje verbal escrito y justificarla. Se espera también que el estudiante compare esta justificación con la tarea manual y el esquema gráfico.


Albanese Veronica - Doctoranda UGR
Fichas para actividad con trenzado de Salta

Hoja 1: Realización y Descripción del trenzado de 4 hilos

Material:

1.1. Explica a través de dibujos el proceso de realización de la trenza de 4 hilos (como si tuvieras que escribir unas instrucciones para un manual)

1.2. Explica con palabras el proceso de realización de la trenza de 4 hilos:

Albanese Veronica - Doctoranda UGR
Fichas para actividad con trenzado de Salta

Hoja 2: Representación creativa del trenzado de 4 hilos

Ahora trabaja en pareja:

2.1. Compara con tu compañero/a los dibujos del punto 1.1. Apunta semejanzas y diferencias y trata de averiguar ventajas y desventajas de cada elección.

Consensúa con tu compañero/a una representación con dibujos, figuras el proceso de realización de la trenza de 4 hilos.

Observación: explica el significado de los signos o códigos que utilizas. (Ej. Si utilizas líneas o colores ¿qué significan?)

2.2. Compara con tu compañero/a la descripción verbal del punto 1.3.

Construye y consensúa con tu compañero/a un forma simbólica que represente el proceso de realización de la trenza de 4 hilos (te sugerimos la utilización de las letras *a, b, c, d* y/o de los números *1, 2, 3, 4*).

Observación: ¿Qué representan las letras y/o los números y los otros símbolos que utilizaste?

Figura 2.3. Las Fichas diseñadas para guiar las fases 1 y 2 de la actividad (Tarea 1).

Tarea 1, Fase 2: los estudiantes realizan una representación creativa dirigida hacia la construcción de una modelización (Segunda hoja de la Figura 2.3). Es decir, a partir de la descripción individual realizada anteriormente, los participantes llegan a un consenso dentro del pequeño grupo sobre una representación gráfica y después simbólica que sintetice y describa el proceso de trenzado. Para ello reflexionan críticamente sobre las ventajas y limitaciones de las decisiones tomadas en la utilización de las notaciones. Aquí también la tarea es guiada por una hoja de trabajo.

En la segunda hoja de la Figura 2.3 los estudiantes interactúan para comparar sus producciones en la primera parte y llegar a un convenio colectivo. La pregunta 2.1 trata de comparar los esquemas gráficos y producir un esquema conjunto, explicando los convenios del nuevo gráfico (o del gráfico que se ha tomado de la parte anterior de la actividad). Se pide expresamente explicar los símbolos utilizados. En la pregunta 2.2 se pide comparar las justificaciones de los dos estudiantes, para llegar a una representación común. En esta fase, los posibles errores se debieran superar con el trabajo conjunto. La parte final de la pregunta da orientaciones más concretas sobre los símbolos a utilizar para llegar a la representación simbólica esperada por el profesor.

Tarea 1, Fase 3: en la puesta en común de las representaciones consensuadas se promueve una nueva reflexión sobre las decisiones tomadas por cada pequeño grupo. También para la fase de la puesta en común se proporciona a los estudiantes un guión de reflexión (véanse el Anexo 2) para que los estudiantes focalicen su atención en la conveniencia de las diversas representaciones gráfica, simbólica y verbal, el significado de cada simbolización utilizada y como se simbolizan algunos elementos específicos que resultan de interés para la modelización de la situación. Finalmente se presenta la modelización artesanal del trenzado de cuatro hilos que involucra el concepto matemático de grafo y la posibilidad de describirlo como una permutación (Pregunta 4.1 de la Figura 2.4).

Tarea 2, Fase 4: se propone a los estudiantes la modelización artesanal de tres trenzas de 8 hilos (T2.1, T2.2, T2.3 de la Sección 2.7), es decir se les muestran los grafos que representarían cada uno de los trenzados propuestos en esta segunda tarea. Aquí no se proporciona a los estudiantes el material para realizar concretamente las trenzas, ya que el aumento del número de hilos hace que se necesiten ciertas destrezas manuales y cierto entrenamiento para una exitosa realización de las mismas. Más bien se pretende que el estudiante trabaje en forma abstracta, imaginando los movimientos que haría para realizar la trenza, pero sin realizarla concretamente.

La tarea propuesta consiste en reconocer los patrones comunes a todos estos grafos, a partir de su observación (Pregunta 4.2 de la Figura 2.4). La conexión que se establece con la práctica se sitúa en entender que el cumplimiento de ciertos patrones en la construcción del grafo se refleja en determinadas características de las trenzas productos entre las cuales destaca la resistencia. Algunos de los patrones en cuestión se describen en la sección 2.7. Esta tarea también se realiza siguiendo los tres momentos con las diferentes interacciones, primero con trabajo individual, después en pequeños grupos y finalmente se cierra con una discusión entre todos los estudiantes y el profesor.

Albanese Veronica – Investigadora y Doctoranda
UGR - Universidad de Granada UBA - Universidad de Buenos Aires

Hoja 4: Los artesanos

Los artesanos de Salta manejan la representación que ahora te presento.

Desde la perspectiva del lenguaje matemático se interpretan estas figuras con la terminología de la teoría de grafos. Así se asigna:

— un vértice por cada posición de la carta. (Una posición es el lugar donde pones el hilo, la muesca).
— una arista a cada cambio de posición de un hilo.

De esa manera

— se dibuja un circuito por cada intercambio de posiciones de los hilos.

4.1 ¿Cómo representan entonces los artesanos esta trenza de 4 hilos que aprendiste a hacer?

4.2 Identifica los patrones, los elementos comunes que tienen todos los grafos que representan trenzas.

4.3 Siguiendo estos patrones diseña por lo menos un grafo que representa una trenza de 16 (si se te ocurren más, mejor…)

Figura 2.4. Las Fichas diseñadas para guiar las Tareas 2 y 3 de la actividad.

Tarea 3, Fase 5: A partir de los patrones identificados en la tarea anterior, los participantes inventan grafos y/o permutaciones de trenzas de 16 hilos (T3; pregunta 4.3 de la Figura 2.4). Tampoco aquí se proporciona el material para la elaboración manual de las trenzas (todavía más complicado sería manejarse con tantos hilos), pero de nuevo se espera que los estudiantes tengan en mente la correspondencia de los grafos y respeten los patrones para que la trenza producto resulte útil y resistente. En esta tarea también se propone el desarrollo según las diversas interacciones. En el gran grupo se plantea la pregunta si los trenzados inventados son todos los posibles que se pueden elaborar con 16 hilos.

2.7.1 ANÁLISIS DE LOS TRENZADOS Y ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN DE LAS TAREAS

A continuación analizamos las tareas de nuestra innovación. Por un lado analizaremos su contenido matemático describiendo los trenzados involucrados y su relación con los grafos, permutaciones y particiones. Por otro, la función que desempeñan las tareas en el aprendizaje del estudiante de acuerdo a la clasificación realizada en el análisis de instrucción del Capítulo 1 (Rico, Lupiañez y Molina, 2013; Caraballo, Lupiañez, y Rico 2011).

Resaltamos que todas las tareas que proponemos podrían considerarse como *tareas para motivar y de relación con el entorno* ya que motivan y vinculan los conocimientos que vamos a tratar con contextos y situaciones reales. Estas tareas generalmente dotan de utilidad y sentido al contenido y despiertan el interés y la curiosidad de los alumnos en lo que van a estudiar.

T1. Trenzado de una cruz de cuatro hilos y su modelización

Con el método descrito en el apartado 2.6, se comienza con el caso más simple, la *cruz de cuatro hilos.* Este trenzado se realiza con 4 hilos, cada uno viene insertado en una muesca ubicada en el centro de cada lado de la *Carta*. La acción de trenzar consiste en intercambiar la posición de los hilos de los lados opuestos de la Carta, una vez en sentido horario y otra en sentido anti horario. De la repetición de este proceso se genera el trenzado.

Representamos las cuatro muescas de la carta con letras consecutivas (*a, b, c, d*). Al pasar el cabo que está en la muesca *a* a la posición opuesta *c* se genera un camino *a*-*c*; igualmente cambiando el resto de hilos a la posición opuesta se generan otros caminos *c-a*, *b-d* y *d-b*. En la Figura 2.5 representamos estos movimientos, que matemáticamente se modelizan por un grafo de vértices *a, b, c, d* y cuatro caminos posibles. Cada dos caminos constituyen un circuito.

Los vértices del grafo que representa este trenzado se posicionan en cruz, y la acción de trenzar se representa con arcos orientados entre los vértices opuestos, creando dos circuitos recursivos. Se trataría de un grafo con cuatro vértices (de orden 4) con 4 aristas (medida 4) y dos circuitos que unen los vértices opuestos.

El mismo proceso se representa con una partición del conjunto de vértices en dos subconjuntos {*a, c*} {*d, b*}, Dentro de cada conjunto de la partición se pueden permutar sus elementos, pero no con los del otro conjunto. Representamos esta permutación doble como $S_{\{a,b,c,d\}}$ que también escribimos así (*a, c*) (*d, b*), pues intercambiamos la posición del hilo que estaba en la posición *a* a la posición *c* y el *d* a la *b*.

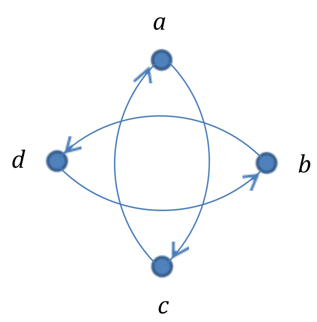


Figura 2.5. Grafo del trenzado *cruz de cuatro filos*.

Para la actividad de trenzado se adopta la convención que si la primera letra en los pares anteriores es menor en orden alfabético que la segunda, el intercambio se realiza en sentido horario, mientras si es mayor, el intercambio es en sentido anti horario[1]. El cambio de posición puede igualmente verse como una aplicación $a \to b$; $b \to a$ (igualmente en el segundo conjunto de vértices); la segunda vez que se aplica sería la inversa de la misma. Sería una aplicación biyectiva cuyos conjunto original e imagen coinciden. Cabe destacar que el grafo de la Figura 2.5 representa el proceso completo de trenzar -que se realiza de forma recursiva repitiendo ordenadamente los intercambios determinados por los circuitos- solo en el caso que las letras representen las posiciones de los hilos, es decir las muescas, y no los propios hilos.

[1] Es necesario precisar esto solo para los ciclos de dos elementos.

De hecho podemos representar los hilos con unos números 1, 2, 3, 4, para distinguirlos de las posiciones o muescas en la carta. En la configuración inicial los hilos se posicionarían consecutivamente en las muescas.

Tabla 2.2 Recorrido de los hilos respeto a las posiciones o muescas en el trenzado de la *cruz de cuatro hilos.*

a	***b***	***c***	***d***	Movimiento con respecto a la posición de las muescas	Permutación de hilos
1	2	3	4	*(a, c) (d, b)*	(1,3) (4,2)
3	4	1	2	*(a, c) (d, b)*	(3,1) (2,4)
1	2	3	4	-	-

En la Tabla 2.2. se describe como va cambiando la posición de los hilos en las muescas durante el proceso de trenzado. Observamos que al segundo intercambio de hilos los hilos vuelven a encontrarse en la configuración inicial. Se puede definir que este trenzado tiene orden dos (orden del grafo asociado). A partir de la tercera fila de esta matriz se repiten las filas recursivamente.

Finalmente, respecto a la complejidad de esta tarea podemos afirmar que se trata de una tarea de reproducción, mientras la función de esta tarea en el proceso de aprendizaje es de *motivación* en Fase 1 ya que los estudiantes se encuentran con un contexto real estimulante que despierta su curiosidad, *exploratoria* en su Fase 2, pues aquí se fomenta la adquisición por parte del estudiantes de nuevos conocimientos a partir de la investigación o el descubrimiento, y de *construcción y elaboración de significado* en su Fase 3 cuando el profesor realiza en la puesta en común la institucionalización del conocimiento construido.

T2. Trenzados de ocho hilos

Describimos ahora los tres trenzados de ocho que utilizaremos durante la Tarea 2 (Fase 4) de la actividad. En los trenzados de ocho los hilos se posicionan dos por cada lado de la Carta. Con el mismo razonamiento llegamos a los correspondientes grafos que los representan, los vértices se ubican dos por cada lado de un cuadrado y se nombran con las letras *a, b, c, d, e, f, g, h*. Estos grafos se proporcionan ya construidos a los estudiantes. Se van a utilizar distintos tipos de trenzado de ocho hilos, el primero lo llamamos cruz de ocho hilos.

Esta tarea se sitúa a un nivel de complejidad de *conexión*, pues los estudiantes relacionan los diferentes sistemas de representaciones y descubren las relaciones entre ellos analizando tres trenzados distintos y sus modelizaciones, identificando así los patrones que permiten el trenzado. Asimismo en el proceso de aprendizaje se trata de una tarea de *ejercitación*, mediante las que los estudiantes afianzan y consolidan los nuevos aprendizajes adquiridos.

T2.1. Cruz de ocho hilos

En el trenzado de la *cruz de ocho hilos*, los dos pares de hilos que se posicionan en las muescas de los lados opuestos de la Carta se intercambian de posición, generando, en el grafo que representa el trenzado, dos circuitos de cuatro vértices cada uno de ellos.

Entonces el conjunto formado por los vértices del grafo se divide en una partición de cuatro vértices cada uno $\{a, b, e, f\}$ $\{c, d, g, h\}$, de forma que en cada subconjunto de la partición se van a ir cambiando los hilos de posición, mediante una permutación de cada elemento con el que le sigue y del último con el primero. Cada hilo se pasa a la posición del siguiente $a \to b \to e \to f \to a$. De nuevo los movimientos se pueden ver como una aplicación biyectiva dentro del subconjunto. Para el subconjunto $\{c, d, g, h\}$, se cambian también los hilos de posición dentro del mismo y en la forma anterior, teniendo en cuenta el sentido del circuito, se define la aplicación biyectiva $c \to h \to g \to d \to c$. Igualmente se permutan los elementos dentro de este subconjunto en la forma descrita.

Por tanto tenemos de nuevo una permutación (a, b, e, f) (c, h, g, d), ahora de los cuatro elementos de cada subconjunto. En resumen se realizan dos intercambios, cada uno entre cuatro hilos, que forman dos circuitos de cuatro vértices y cuatro caminos cada uno; uno de los circuitos está dirigido en sentido horario, el otro en sentido anti horario, como se muestra en la Figura 2.6 que representa el grafo, sus vértices, las posibles permutaciones y la partición asociada. Todo ello los simbolizamos con la permutación de $S_{\{a,b,c,d,e,f,g,h\}}$ o por (a, b, e, f) (c, d, g, h). El grafo resultante sería de orden ocho, medida ocho y dos circuitos.

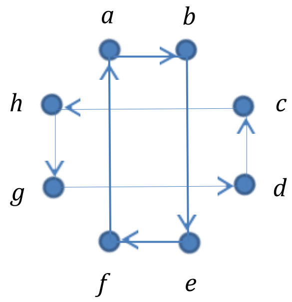


Figura 2.6. Grafo del trenzado *cruz de ocho hilos*.

Como en el caso precedente indicamos los hilos con unos números y observamos sus movimientos sucesivos en las muescas en la Tabla 2.3. Afirmamos entonces que el trenzado asociado tiene orden cuatro ya que se necesitan cuatro vueltas hasta llegar a su posición inicial.

Tabla 2.3 Recorrido de los hilos respeto a las posiciones o muescas en el trenzado de la *cruz de ocho hilos.*

a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	Movimiento con respecto a la posición de las muescas	Permutación de hilos
1	2	3	4	5	6	7	8	*(a, b, e, f) (h, g, d, c)*	(1,2,5,6) (8,7,4,3)
6	1	4	7	2	5	8	3	*(a, b, e, f) (h, g, d, c)*	(6,1,2,5) (3,8,7,4)
5	6	7	8	1	2	3	4	*(a, b, e, f) (h, g, d, c)*	(5,6,1,2) (4,3,8,7)
2	5	8	3	6	1	4	7	*(a, b, e, f) (h, g, d, c)*	(2,5,6,1) (7,4,3,8)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

T2.2. Trenzado estrella

En el trenzado *estrella* se realizan cuatro intercambios entre los vértices opuestos; en otras palabras cada vértice se une con el opuesto con respecto al centro del cuadrado que representa la Carta.

El conjunto de vértices se divide así en una partición de cuatro conjuntos dos vértices cada uno que se permutan entre sí: $\{e, a\}$ $\{b, f\}$ $\{g, c\}$ $\{d, h\}$; las aplicaciones entre los vértices de cada subconjunto se describen de la siguiente manera: $e \to a \to e$, $b \to f \to b$, $g \to c \to g$, $d \to h \to d$, formando en el grafo cuatro circuitos de dos caminos cada uno, y de sentido alternado, como se muestra en la figura 2.7.

Sigue siendo un grafo de orden y medida ocho. Estos cambios se representan con la permutación de $S_{\{a,b,c,d,e,f,g,h\}}$ que se escribe (e, a) (b, f) (g, c) (d, h) siguiendo la misma convención que utilizamos en el grafo de la Tarea T.1 para los sentidos de los circuitos.

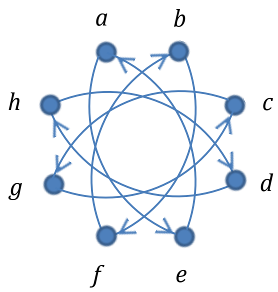


Figura 2.7. Grafo del trenzado *estrella*.

Si observamos el recorrido de los hilos en la siguiente Tabla 2.4 vemos que el orden de este trenzado es dos ya que se necesitan dos aplicaciones de la permutación para volver a la configuración inicial.

Tabla 2.4 Recorrido de los hilos respeto a las posiciones o muescas en el trenzado *estrella*.

a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	Movimiento con respecto a la posición de las muescas	Permutación de hilos
1	2	3	4	5	6	7	8	*(b, f) (d, h) (e, a) (g, c)*	(2,6) (4,8) (5,1) (7,3)
5	6	7	8	1	2	3	4	*(b, f) (d, h) (e, a) (g, c)*	(6,2) (8,4) (1,5) (3,7)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

T2.3. Trenzado doble cuadro

En el trenzado *doble cuadro*, se realizan dos intercambios entre los hilos de cada lado del cuadrado, en particular si establecemos un orden para los vértices de cada lado según un sentido de giro, por ejemplo el horario, en el mismo subconjunto ponemos el primer vértice de cada lado y en el otro subconjunto los últimos vértices de cada lado; entonces el conjunto de vértices se divide en una partición de dos subconjuntos, cada uno de cuatro elementos $\{a, c, e, g\}$ $\{b, d, f, h\}$; se determinan así las aplicaciones entre los vértices de cada subconjunto, $a \to c \to e \to g \to a$ y $b \to d \to f \to h \to b$, conformándose así en el grafo de orden y medida ocho y dos circuitos de cuatro vértices cada uno y cuatro caminos, de nuevo de sentido alternado, como se muestra en la Figura 2.8.

Este trenzado se representa con la permutación de $S_{\{a,b,c,d,e,f,g,h\}}$ que se escribe (a, c, e, g) (b, h, f, d).

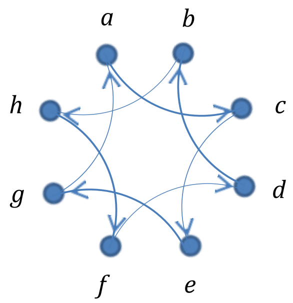


Figura 2.8. Grafo del trenzado *doble cuadro*.

De la tabla 2.5 del recorrido de los hilos se deduce que el orden del trenzado es cuatro. Cabe destacar que estas son todas las posibles trenzas de ocho hilos que existen en esta artesanía y que se pueden representar con un único grafo[2].

Tabla 2.5 Recorrido de los hilos respeto a las posiciones o muescas en el trenzado *doble cuadro*

a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	Movimiento con respecto a la posición de las muescas	Permutación de hilos
1	2	3	4	5	6	7	8	*(a, c, e, g) (h, f, d, b)*	(1,3,5,7) (8,6,4,2)
7	4	1	6	3	8	5	2	*(a, c, e, g) (h, f, d, b)*	(6,1,2,5) (3,8,7,4)
5	6	7	8	1	2	3	4	*(a, c, e, g) (h, f, d, b)*	(5,6,1,2) (4,3,8,7)
3	8	5	2	7	4	1	6	*(a, c, e, g) (h, f, d, b)*	(2,5,6,1) (7,4,3,8)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Para que la trenza producto sea útil, esta tiene que ser de alguna forma *equilibrada*; en termino matemático esto se traduce en un conjunto de reglas y patrones que tiene que cumplir el grafo que describe el trenzado. Observamos entre ellos:

- Todos los vértices pertenecen a uno y un solo circuitos (esto permite definir la partición y la permutación).
- Los circuitos que constituyen un grafo contienen siempre el mismo número de hilos.
- El grafo es invariante por la rotación de ángulos rectos.
- Los sentidos de los circuitos siempre son alternados.

[2] Existen más trenzados pero para representarlos se necesitan más de un grafo.

T3. Inventar un posible trenzado con 16 hilos y modelizarlo

La última tarea propuesta consiste en que los estudiantes imaginen la realización de diversos trenzados, en el caso se disponga de 16 hilos y una carta con 16 muescas. Los estudiantes no realizan la actividad concreta de trenzar, ni disponen de la Carta. Tienen que imaginarla y trabajar directamente con la modelización. La finalidad es que generalicen lo aprendido de los patrones anteriores, practicando el razonamiento inductivo y la generalización.

El punto de partida clave es que los estudiantes determinen la cardinalidad y el número de los subconjuntos de las posibles particiones que respeten los patrones observados en los grafos correspondientes a las trenzas de ocho hilos. Si todos los vértices tienen que estar en un circuito y tienen que respetar las simetrías que hemos descrito, resulta claro que cada subconjunto de la partición tiene que tener el mismo número de vértices. Es decir, que el número de elemento del subconjunto y el número de subconjunto de la partición tienen que ser divisores del número total de hilos. Siendo el número total de hilos 16, y teniendo en cuenta los divisores de 16 (8, 4, 2) las particiones posibles puede ser de las tres siguientes formas:

- 8 subconjuntos, cada uno de 2 elementos.
- 4 subconjuntos, cada uno de 4 elementos.
- 2 subconjuntos, cada uno de 8 elementos.

Como veremos en el análisis de los resultados de la experimentación, para cara uno de estos tipos de agrupaciones existen varias posibilidades. No las analizamos acá, debido a la limitación de espacio y porque se estudian al analizar las producciones de los participantes a la experiencia que presentamos en el próximo capítulo.

Esta tercera tarea propuesta tiene una complejidad de *reflexión* y es una tarea de *síntesis*, pues se resumen y generalizan todos los contenidos aprendidos en las anteriores, aplicándolos a una nueva situación (trenzados de 16 hilos).

CAPÍTULO 3. EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentaremos algunos resultados de la evaluación de una experiencia realizada con la innovación propuesta. Puesto que los datos recogidos fueron muchos, debido a la limitación de espacio analizamos únicamente una parte de los mismos.

Considerando este trabajo tanto como una propuesta de innovación docente, como una actividad de iniciación a la investigación, en este capítulo seguiremos los apartados esperados en una investigación llevada a cabo en el aula. Por tanto se comienza describiendo el contexto en que se realizó la experiencia y la muestra participante; a continuación se incluyen algunas consideraciones sobre la metodología seguida. Se analiza luego una parte de la información obtenida y se finaliza exponiendo nuestras conclusiones.

Aunque la propuesta está pensada para alumnos de Bachillerato, sólo la hemos podido evaluar (como se verá en este capítulo) en cursos orientados a la formación de profesores. El razonamiento combinatorio de futuros profesores o de profesores que no han tenido mucha experiencia con la combinatoria no se ha mostrado muy diferente al de los estudiantes de Bachillerato o incluso de educación secundaria, como se ha mostrado en la investigación de Roa (2000), realizada con futuros profesores de educación secundaria, que habían cursado una licenciatura completa (5 años) de matemática.

A pesar de su alta preparación matemática, estos futuros profesores mostraron dificultades en la enumeración sistemática, errores al considerar la importancia del orden y en el recuento de configuraciones combinatorias. Por tanto, además de la utilidad que se mostrará en este capítulo, de nuestra propuesta, para cursos dirigidos a profesores, pensamos que es posible extrapolar los resultados relacionados con la actividad matemática esperada al caso de alumnos de Bachillerato.

3.2 FASE PILOTO

El diseño de la innovación se puso a prueba y se validó previamente en una experiencia piloto, realizada en un curso de Etnomatemática que forma parte del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, durante el curso 2012-2013. Los estudiantes que siguen este máster son licenciados en matemáticas (en el caso de los participantes españoles) o en enseñanza de la matemática (en el caso de los alumnos latinoamericanos, que son la mayoría). La segunda licenciatura incluye contenidos de matemáticas y didáctica de la matemática. Por tanto, su formación es muy similar a la de los sujetos que participaron finalmente en nuestra experiencia y por ello nos parecieron adecuados para realizar una experiencia piloto.

En esta experiencia piloto participaron nueve personas de las cuáles seis actuaron como estudiantes y cuatro como evaluadores de la experiencia (uno de ellos vistiendo ambos roles). Entre los evaluadores se encontraban tres expertos en Etnomatemática y una experta en metodología educativa. Por el reducido tiempo a disposición se presentó solo la Tarea 1 descrita en el capítulo anterior, trabajando en la forma prevista para la experiencia definitiva. A raíz de las observaciones de los evaluadores recogidas en unas fichas diseñadas previamente y de las reflexiones que aportaron en el aula los que actuaron como estudiantes, se realizaron las siguientes modificaciones:

1. En la fase 3 de la Tarea 1 inicialmente se proponía la modelización con grafo de una trenza simple de tres hilos (la clásica del pelo); a partir este primer trenzado los estudiantes debían realizar el grafo del trenzado de la cruz de cuatro hilos. La actividad inicial de trenza de tres hilos se omitió en el diseño final de la innovación, porque no proporcionó nueva información y de todas forma el ejercicio resultaba demasiado simple.
2. El texto de la hoja 2 que tuvo una intensa revisión fue reformulado para hacer más claro el enunciado a los estudiantes.
3. Se decidió utilizar hilos de dos colores diferentes. En la experiencia piloto todos los hilos eran del mismo color y esto no facilitaba la distinción en subconjuntos de la partición del conjunto inicial ni la identificación de los ciclos.

3.3. CONTEXTO Y MUESTRA

Finalmente la innovación se llevó a cabo dentro de un curso optativo denominado *Taller de Modelización y Producción Matemática* que formó parte de la carrera de Profesorado en Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires.

Esta carrera prepara profesores de matemáticas del nivel de secundaria, que en Argentina tiene los mismos cursos que en España. Para entrar en cualquiera de las carreras de la UBA (menos la de ciencias económicas) es obligatorio cursar el CBC, ciclo básico común, que es un curso anual donde se repasa a los estudiantes las asignaturas básicas y comunes, entre ellas las de Matemática.

La carrera del Profesorado de Matemática depende del CeFIEC, Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias, y del CCPEMS, Comisión de Carrera de los Profesorados de Enseñanza Media y Superior.

La carrera abarca asignaturas tanto del bloque pedagógico genérico (seis de ellas son obligatorias) como de ciencias exactas. Estas últimas asignaturas son comunes a la licenciatura en Matemáticas (ocho de estas materias son obligatorias). Encontramos materias de Algebra, Análisis, Geometría, Estadística y Probabilidad, Topología, etc. Hay dos asignaturas obligatorias de contenido didáctico matemático y una oferta de hasta seis optativas también de tipo didáctico, que se dictan dependiendo de los años académicos y de las cuáles deben elegir tres. Todas ellas están dirigidas a reforzar los conocimientos sobre el currículo, teorías de aprendizaje, evaluación, dificultades y errores y materiales didácticos.

Existe un cronograma sugerido para cursar estos estudios donde se distribuyen de manera bastante uniforme las asignaturas de los dos bloques pedagógico y de ciencias exactas, que los estudiantes van realizando a la vez. La duración total de la carrera es de 4 años, sin contar el ciclo básico común.

Cabe destacar que el curso *Taller de Modelización y Producción Matemática* donde se inserta la innovación propuesta es muy afín a esta por metodología y contenidos. De hecho, el trabajo se desarrolla mediante descubrimiento, con una orientación investigativa: los estudiantes se enfrentan a algún tema de matemáticas presente en aspectos de la naturaleza, de la sociedad o de la misma matemática y se hacen sus propias preguntas al respecto que intentan responder con pequeñas investigaciones.

Algunos temas de estas investigaciones fueron: las ecuaciones de las ondas de sonido en relación con las notas musicales, la relaciones aritméticas en los parámetros utilizados para dotar de estética la arquitectura y escultura antigua, las relaciones geométricas en la perspectiva, los aspectos matemáticos del cálculo de interés de los préstamos bancarios, y problemas de sistemas de ecuaciones cuadráticas con resolución gráfica en Geogebra). Este clima abierto hacia el planteamiento de cuestiones sin preguntas -ni respuestas- prefijadas, es tierra fértil para la buena acogida del tipo de trabajo propuesto en la innovación y enriquece mucho el debate.

Muestra

En el taller que incluye la innovación participaron un grupo de 13 personas -de aquí en adelante nos referiremos a ellos como los participantes-, compuesto por los 11 estudiantes del curso que hemos citado, que estaban en el cuarto curso de su carrera y por tanto tenían una buena formación matemática y de didáctica de la matemática. También participaron las dos profesoras del mismo.

Los estudiantes estaban interesados en los aspectos educativos ya que, si bien el taller era abierto también a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, todos los participantes en la experiencia eran de la Carrera de Profesorado o aspiraban a la doble titulación (Matemáticas y Profesorado).

En la primera parte de la experiencia participaron también otros tres profesores de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales que no concluyeron el taller por incompatibilidad de horarios con sus compromisos académicos, así que proporcionaron datos incompletos que descartamos del análisis. Lo mismo ocurrió con otra estudiante que llegó al taller con un considerable retraso.

Cuando realizamos la innovación las clases se encontraban casi al final del semestre y los estudiantes venían trabajando juntos desde hacía cuatro meses; el grupo estaba muy unido -la investigadora tuvo la oportunidad de realizar un pequeño seguimiento del curso-. Las profesoras, que se revelaron muy disponibles actuaron de guía y mediadoras en los debates. Proporcionaremos en lo que sigue información de los trece estudiantes participantes.

3.4 MÉTODO

Se dedicaron en total de dos sesiones a la realización del taller, la primera de ellas con una duración de tres horas y la segunda de dos horas. En cada una de las sesiones los participantes completaron por escrito fichas similares a la presentada en el Capítulo 2 (Figura 2.4 y 2.5) para cada una de las actividades propuestas.

En la primera sesión se propuso realizar la que definimos como Tarea 1, es decir los participantes aprendieron a elaborar el trenzado simple de la trenza de cruz de 4 hilos; a continuación describieron esta acción usando como guía la ficha de trabajo, con el objetivo de ir construyendo una representación del movimiento de los hilos para hacer la trenza. Se pretendía que llegasen a un grafo o a describir una permutación o partición de los hilos.

Una vez el alumno ha propuesto una representación del trabajo de trenzado, los participantes comparten sus modelos en parejas y, analizando las ventajas y desventajas de las elecciones de cada uno, consensuan una representación compartida. Finalmente se pone en común en el gran grupo los modelos que se han construido. De nuevo se analizan las elecciones de cada pareja, observando que no se diferencian mucho entre sí, sino por el nivel de abstracción. Para finalizar la sesión la profesora explica a los participantes que es un grafo, cuáles son sus elementos principales y se presenta una solución experta (la presentada en el capítulo 2) de la modelización del trabajo artesanal propuestos que hace uso de estos grafos y del concepto de permutación.

En la segunda sesión se propusieron las tareas 2 y 3, que recordamos consisten en identificar los patrones que los grafos tienen que respetar para representar un trenzado, a partir de la observación de tres grafos de trenzas de 8 hilos. Se siguen los mismos pasos que en la tarea 1: trabajo individual, consenso por parejas, y discusión común, finalizando con institucionalización por parte de la profesora. Durante esta actividad, en particular en la puesta en común, se presenta a los participantes la terminología y propiedades de los grafos que corresponden a los trenzados propuestos. Finalmente se anima los participantes a inventar trenzados de 16 hilos, manejando la modelización con grafos o con permutaciones (ya sin indicación de la profesora).

Los instrumentos de recogida de datos utilizados fueron los siguientes:

- Fichas de trabajo de los participantes y de los grupos de participantes, similares a las mostradas en las Figuras 2.4 y 2.
- Además se completó un cuestionario sobre las concepciones respecto a la naturaleza de las matemáticas y en particular en el cambio con la actividad (Albanese, 2014).
- Se grabó también la experiencia en vídeo y se analizó posteriormente la transcripción.

En este trabajo nos limitamos a analizar algunos apartados de las fichas completadas por los participantes. Se ha analizado el contenido de las respuestas de estas fichas siguiendo un método propio de la investigación cualitativa. Según Bisquerra (1989), el proceso de investigación que se ha desarrollado es inductivo, pues se parte de casos particulares (los trabajos de los estudiantes) con el fin de obtener generalizaciones a partir de estas observaciones. La investigación realizada es aplicada, descriptiva y exploratoria ya que está encaminada a obtener criterios de mejora de nuestra innovación, para ser utilizada en el futuro. Pero no hemos llevado a cabo manipulaciones sobre las variables ni hemos tratado de contrastar hipótesis de tipo estadístico. Siguiendo a López-Noguera (2002), nuestro trabajo utiliza un método intensivo, pues estudian con detenimiento las producciones de algunos sujetos en lugar de recurrir a una muestra más amplia pero analizada superficialmente (métodos extensivos).

El análisis de contenido supone que un texto puede dividirse en unidades que pueden clasificarse en un número reducido de categorías en función de variables subyacentes, y que permiten realizar inferencias sobre su contenido (Krippendorff, 1997). Su diferencia con otras técnicas es que sustituye en lo posible las interpretaciones y subjetividad del estudio de documentos por procedimientos estandarizados, con el fin de convertir en datos los contenidos analizados en los documentos (León y Montero, 2002).

Para realizar el análisis de contenido se determinan las categorías y códigos de interés. Estos se definen mirando los datos en relación a la pregunta que se pone desde la investigación. El proceso para la definición de categorías y códigos es el siguiente: los datos se organizan en unidades de análisis y a estas se les asocias códigos. Un mismo código se asocia a unidades de análisis que se considera tienen un significado parecido o equivalente. Un conjunto de códigos de la misma naturaleza se incluyen en una categoría. Tanto los códigos como categorías pueden ser definidos a priori, o emergentes, según si se determinan con anterioridad o durante el análisis. En ocasiones, como aquí haremos, es interesante mirar la frecuencia de ciertos códigos, entonces se definen variables numéricas que cuentan el número de veces que se presenta cierto dato o unidad de información.

3.5 ALGUNOS RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN

A continuación se analizan los datos relativos a la Tarea 2, donde se proponía la identificación de posibles grafos para representar las trenzas de 8 hilos y posterior análisis de los patrones comunes a todos los grafos posibles y a la Tarea 3, sobre la generalización de los descubrimientos anteriores para creación y analizar posibles trenzados con trenzas de 16 hilos. Los datos se concretan en las producciones de los participantes que cumplimentaron las fichas de trabajo.

Para la Tarea 2 analizamos los patrones identificados por los estudiantes, una vez identificado el grafo que modeliza el trabajo de trenzado propuesto definiendo códigos para cada patrón distinto. En la Tarea 3 definimos variables y contamos los grafos y/o permutaciones inventadas por los participantes y después distinguiremos entre los que permite la realización del trenzado y los que no. Asimismo observamos si hay alguna relación entre la identificación de patrones y los trenzados inventados.

3.5.1. IDENTIFICACIÓN DE PATRONES

En la tarea 2, los participantes analizan los tres grafos de los tres distintos trenzados de ocho hilos (Pregunta 4.2 de la Figura 2.5). En esta tarea ya no se realiza manualmente la actividad de trenzado (que han hecho en la Tarea 1), sino que se les presentan los grafos de las trenzas propuestas con unas diapositivas proyectadas en el apósito panel que dispone el aula. Estos trenzados se han descrito en la sección 2.7 del capítulo anterior: cruz de ocho hilos, trenzado estrella y trenzado doble cuadro.

Para facilitar la comprensión de los resultados reproducimos en la Figura 3.1 los tres grafos que se espera el participante analice (T2.1, T2.2, T2.3).

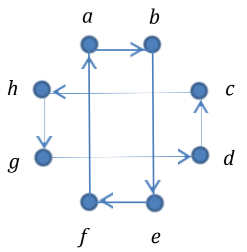
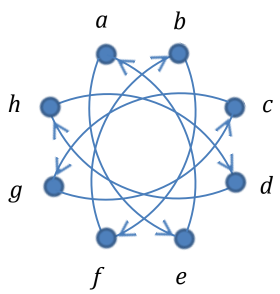
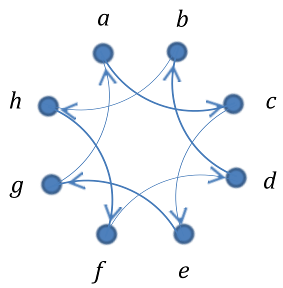
		
Cruz de ocho hilos.	Trenzado estrella	Trenzado doble cuadro

Figura 3.1. Grafos que representan los trenzados propuestos en la Tarea 2.

Lo que se pretende en esta Tarea es que los participantes identifiquen los patrones que se observan en los grafos de los tres trenzados de 8 hilos. Esta tarea es indispensable para poder después inventar trenzas de 16 que sean aceptables desde el punto de vista artesanal.

La recogida de las fichas completadas por los participantes es posterior a la puesta en común en el gran grupo. Esto significa que los patrones que analizamos en cada ficha no son solo los que inicialmente ha identificado el participante al cual pertenece la ficha, sino los que han considerado relevantes entre los patrones que han propuesto otros participantes. Esta observación es determinante en cuanto no queremos valorar la cantidad de patrones identificados por cada participante, sino los que cada uno ha considerado a la hora de realizar la siguiente tarea de inventar trenzas de 16.

En la Figura 3.2 reproducimos algunos ejemplos de respuesta de los participantes. Como vemos cada estudiante ha propuesto más de un patrón. Realizamos a continuación algunas observaciones generales sobre estas respuestas.

En las respuestas de los participantes A y B se recogen casi todos los patrones reconocidos por los participantes, aunque el lenguaje es a veces impreciso; por ejemplo, el sujeto A indica "los grafos son disjuntos" pero quiere decir; "los vértices que forman cada circuito en el grafo constituyen conjuntos disjuntos". Es decir, este sujeto está identificando una partición en el conjunto de vértices del grafo, pero no lo sabe expresar. Por otro lado, en la respuesta de A el último patrón es muy genérico, porque no se explicita en qué sentido los circuitos son iguales (creemos que se refiere a que tienen igual número de vértices). Del mismo modo, en la respuesta de B el patrón sobre los 4 vértices no es del todo correcto, si bien evidencia que el participante ha reflexionado sobre que el número de vértices en cada circuito es igual, pero como observamos en la Figura 3,1 no se pueden elegir cuatro vértices cualquiera para producir el trenzado. Notamos que este sujeto identifica y explica correctamente la propiedad de que los conjuntos de vértices de cada circuito son disjuntos.

En las respuesta del participante D , de nuevo usa un lenguaje impreciso (grafo en lugar de circuito); es relevante notar que se destaca que el número de circuitos posible es par, aunque lo expresa con duda. También vuelve a señalar que los conjuntos de vértices de los diferentes circuitos son disjuntos (idea de partición). También aventura una conjetura: si el número de vértices de cada circuito ha de ser un número primo.

En la respuesta del participante E se menciona que el número de vértices de cada circuito tiene que ser par. De nuevo se expresa la idea de partición (grafo desconexo o disjunto) refiriéndose a los circuitos del grafo. También identifica una propiedad geométrica: hay cierta simetría en los circuitos y se habla de los posibles sentidos de giro.

A	4.2 Identifica los patrones, los elementos comunes que tienen todos los grafos que representan trenzas. . No hay vértices que quedan sueltos . Los circuitos son siempre cerrados . Los grafos son disjuntos . Los circuitos consecutivos tienen distinto sentido . Los circuitos de cada subgrafo son iguales.
B	4.2 Identifica los patrones, los elementos comunes que tienen todos los grafos que representan trenzas. · no hay vértices sueltos · siempre hay 4 vértices relacionados entre sí y los otros 4 también (son circuitos disjuntos) • son circuitos cerrados , hay 2 sentidos de giro (para que quede trenzado) en forma alternada.
C	4.2 Identifica los patrones, los elementos comunes que tienen todos los grafos que representan trenzas. Se separan en un nº par de grafos ~~disjuntos~~ iguales y disjuntos quizás no sea necesario si modificamos el sentido para que siempre queden alternados. ¿Se pueden hacer trenzas con un nº primo de vértices? Pareciera que no...
D	4.2 Identifica los patrones, los elementos comunes que tienen todos los grafos que representan trenzas. • Se dividen en grupos de ~~cant~~ = cant. de hilos (divisores del total) · ~~Agrupa~~ • Se forman circuitos disjuntos • Los sentidos de giro van alternando. · Cada caso es una reducción del caso de dos hilos (poniendo más "paredes", superponiendo dos trenzas o con circuitos de 4.
E	4.2 Identifica los patrones, los elementos comunes que tienen todos los grafos que representan trenzas. •No hay vértices sueltos •Los grafos son disconexos o disjuntos •Hay una cantidad par de circuitos disconexos en donde la mitad gira en un sentido y la otra mitad gira en sentido contrario •Existe simetría en cada circuito (componente conexa del grafo)
F	4.2 Identifica los patrones, los elementos comunes que tienen todos los grafos que representan trenzas. No quedan vértices sueltos. Se pueden separar en grafos distintos (disjuntos). Cantidad par de grafos disjuntos (si no, no trenza). Los circuitos son todos iguales. En cada circuito se alternan los sentidos.

Figura 3.2. Respuestas de algunos participantes sobre la identificación de patrones.

Finalmente en la respuesta F cabe destacar que el participante hace explícita la relación entre el patrón y la posibilidad de realizar la trenza en cuanto declara "si no, no trenza". Este participante repite los patrones descritos anteriormente.

En la Tabla 3.1 se presentan la lista de todos los patrones que se han evidenciado en las fichas con el correspondiente número de participantes que los han detectados, si bien –como hemos visto– no siempre con las mismas palabras y con frecuencia con lenguaje impreciso. En términos del análisis cualitativo, cada patrón descrito por los participantes es una unidad de análisis y se le asigna, según el significado de la misma, uno de los códigos entre los que aparecen en la tabla (los códigos son emergentes). Todos estos códigos se agrupan en la categoría de "patrones". Cada uno de los participantes propone más de un patrón. El total de patrones identificados fue de 57, lo que da una media de 4,38 patrones diferentes propuestos por cada participante.

Lo más frecuente fue observar que los circuitos de los grafos que describen los trenzados son disjuntos entre sí, lo que sería equivalente a identificar una partición del conjunto de vértices en dos subconjuntos del mismo número de elementos. Otro patrón muy frecuentemente identificado fue que los sentidos de giro son alternados (84, 6% en cada caso). Este último patrón expresa la recurrencia en el trenzado.

Tabla 3.1. Patrones identificados y número de participantes (n=13)

Características del grafo	Frecuencia	Porcentaje de sujetos
Los circuitos pasan por el mismo número de vértices	9	69,2
Los circuitos pasan por un número par de vértices	3	23,1
Los circuitos son cerrados	8	61,5
Los circuitos son disjuntos	11	84,6
No hay vértices sueltos	7	53,8
Los sentidos de giro son alternados	11	84,6
Hay un número par de circuitos	4	30,8
En cada circuito intervienen vértices cercanos y/o los opuestos	1	7,7
Hay simetría en cada circuito	2	15,4
El número de circuitos divide al número de vértices	1	7,7
Total patrones	57	

Fue sencillo también identificar que cada circuito pasa por el mismo número de vértices (69%) que un participante expresa también como que el número de vértices es múltiplo del número de circuitos (y recíprocamente el número de circuitos divide al de vértices) .

Es frecuente también observar que los circuitos son cerrados (61,5%) y que no hay vértices aislados (53,8%). El resto de las propiedades aparece con menos frecuencia.

En general los resultados en esta parte de la tarea muestran que se alcanzan los objetivos pretendidos, pues los estudiantes fueron capaces de identificar propiedades y patrones comunes a los grafos que resultaron de la actividad previa de modelización del trenzado en las trenzas de ocho hilos. Además, cada estudiante identifica de 4 a 5 patrones, lo cual también muestra la actividad de análisis realizada por ellos. El único punto algo negativo que hemos observado fue el lenguaje impreciso en algunos casos, sin discriminar circuito y grafo; esto sería un punto al que dedicar más atención en próximas reproducciones de la actividad.

3.5.2. Diseño de trenzados y grafos asociados para trenzas de 16 elementos

Como se indicó en el Capítulo 2, en la última tarea, la 3, los participantes inventan trenzados de 16 hilos sin realizarlos materialmente. Por tanto es otra tarea abstracta, en cuanto los participantes han de generalizar lo hecho hasta el momento sin el apoyo del material manipulativo. El objetivo es que los alumnos generalicen lo aprendido en las actividades anteriores.

Para analizar los resultados en esta tarea hemos considerado las siguientes variables:

- *Número de grafos propuestos por el participante:* Como en el trenzado de 16 hilos serían posibles al menos 8 versiones diferentes, cada participante podría identificar más de una. Aunque no se pretende que las encuentre todas, pues el tiempo disponible no fue excesivo, si nos interesa ver si proporcionan más de un ejemplo. Por ello, se ha contado el número de grafos propuestos por cada participante ya que, en general, presentan más de uno.
- *Número de grafos con vértices simbolizados*: algunos participantes atribuyen símbolos a los vértices de algunos de los grafos que diseñan. Para nosotros esto supone una actividad más algebraica, al considerar símbolos con los que luego pueden trabajar para responder el resto de preguntas.

- *Número de grafos o permutaciones o particiones que permiten el trenzado*: No todos los grafos creados se adecuan a los patrones descritos en la tarea anterior y no los consideramos como trenzados; Un ejemplo de ello se muestra en la Figura 3.1. Algunos de estos trenzados propuestos no podrían realizarse físicamente; por tanto tratamos de ver cuántas de las propuestas cumplen las condiciones pedida. Una minoría de participantes, exactamente dos, presentan las permutaciones en lugar de, o además de, la representación del trenzado por medio del grafo. Asimismo contabilizamos aquí las permutaciones o particiones propuestas, validas según los patrones descritos, y que no han sido ya contada por no ser expresada también con un grafo.
- *Número de vértices en cada circuito del grafo (o número elementos que forman cada partición, o permutación) en el trenzado propuesto:* para elaborar el trenzado, respetando todos los patrones que se describieron en la sección anterior, sólo es posible intercambiar los elementos dos a dos, cuatro a cuatro u ocho a ocho. Algunos participantes se limitan a un solo tipo de partición, por ejemplo, tomado los elementos dos a dos y otros realizan varias posibilidades. No contabilizamos aquí aquellos grafos que no representan un trenzado por no respetar los patrones.

Describimos aquí un ejemplo de cómo se ha realizado el análisis. En la Figura 3.3 se muestra la producción de un participante. Este propone: un grafo y tres permutaciones/particiones posibles de los hilos para formar el trenzado, la primera de las cuales describe los dos circuitos que se han representado en el grafo.

De las tres permutaciones propuestas la única que no representa un trenzado, por no cumplir los patrones de simetría, es la última permutación. Entonces este participante ha logrado inventar dos trenzados utilizando particiones respectivamente de 8 y 4 elementos. Además ha simbolizado los vértices del grafo dibujado y utiliza estos símbolos para describir luego particiones y permutaciones.

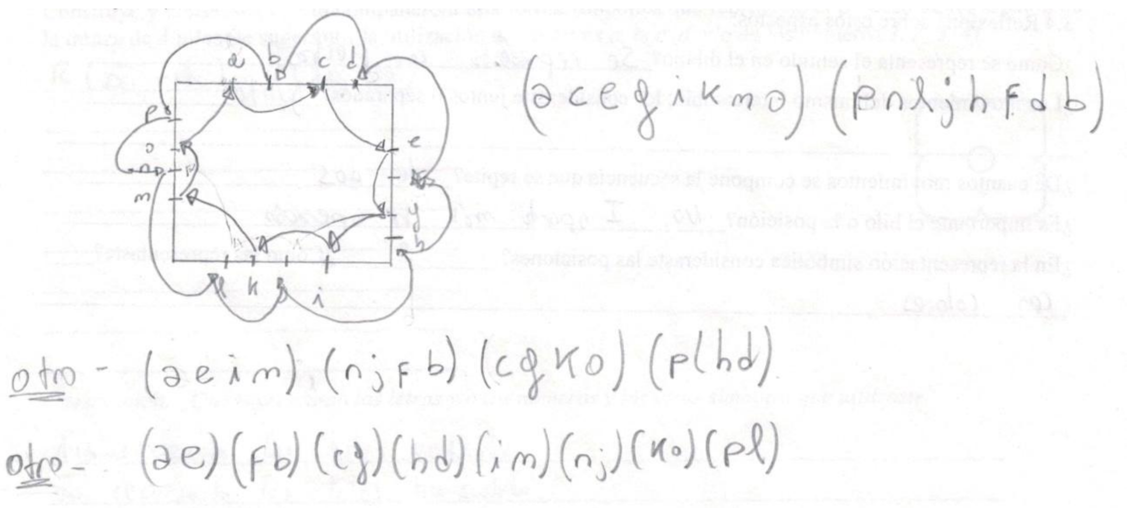


Figura 3.3. Grafos y permutaciones realizados por un participantes.

Número de grafos propuestos

En la Figura 3.4 presentamos la distribución del número de grafos propuestos por cada participante (que además podría haber propuesto alguna partición o permutación). Observamos que algunos llegan a proponer hasta seis grafos diferentes; siendo lo más frecuente que se propongan tres. Sólo tres de los participantes propone sólo un grafo. En total se proponen 40 grafos entre los 13 estudiantes, que supone una media de 3,3 grafos por estudiante.

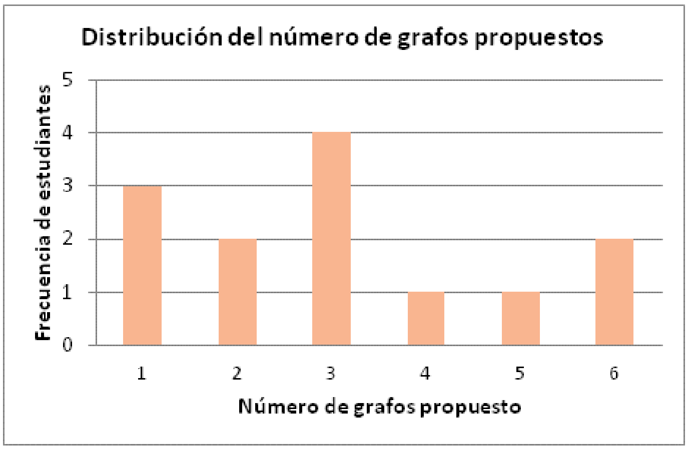


Figura 3.4. Número total de grafos propuestos por participante.

Número de grafos y permutaciones que permiten el trenzado

En la Figura 3.6. obtenemos la distribución de número de grafos que permiten el trenzado por participante. Observamos que dos participantes proponen hasta seis grafos distintos que permiten el trenzado, siendo tres lo más común y sólo dos hacen una sola propuesta que permite el trenzado. Igualmente acá se obtienen 40 propuestas en total (media de 3,3 por participante).

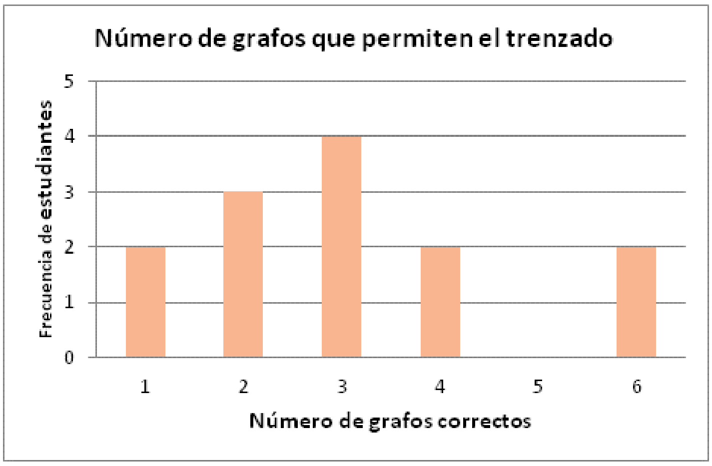


Figura 3.6. Número total de grafos que permiten el trenzado por participante.

Cabe destacar que prácticamente casi todos los grafos propuestos representan un trenzado. Sólo dos de los trece participantes y ambos en un solo grafo, respectivamente de los 2 y 5 que realizaron, producen uno que no respecta los patrones para la creación del grafo para un trenzado. Este resultado es bastante sorprendente considerado que, excepto por las dos profesoras del curso, los participantes no habían manejado nunca el concepto de grafo en sus estudios anteriores ni tenían práctica con la actividad artesanal.

Además en ambos casos los dos grafos en cuestión siguen los patrones que salieron en la clase; el error se produce porque no respetan el único patrón que no se ha evidenciado directamente ni en las fichas, ni en la puesta en común: que el grafo debe ser invariante para la rotación de 90º y sus múltiplos. El patrón que más se acerca a este es el que detecta ciertas simetrías en el grafo pero sin especificar cuáles son estas simetrías.

De hecho, un participante propone un grafo bien complejo (que no permite el trenzado) pero él mismo no se queda conforme, dejando unos puntos interrogativos cerca del dibujo (Figura 3.5), expresando su duda sobre la corrección.

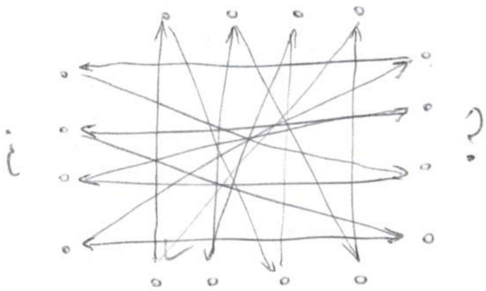


Figura 3.5. Grafo que no representa un trenzado. Extraído de la ficha de un participante.

Número de vértices en cada circuito del grafo

También hemos analizado los tipos de grafos que usan los participantes para proponer los trenzados, según el número de vértices de cada circuito. El mínimo número de vértices en cada circuito necesario para que se pueda realizar un intercambio de hilos debe ser 2. En la Figura 3.7 presentamos un ejemplo de este tipo de grafo, en este caso sin simbolizar los vértices.

El grafo tiene en total 8 circuitos por cada uno de los cuales solo pasan dos vértices; o, dicho de otro modo, se ha hecho una partición del conjunto de vértices en ocho subconjuntos binarios. Si se simbolizan los vértices con letras correlativas, la partición correspondiente es (a, i) (j, b) (c, k) (l, d) (e, m) (n, f) (g, o) (p, h); también puede verse como un conjunto de permutaciones recurrentes de los vértices de cada partición entre sí.

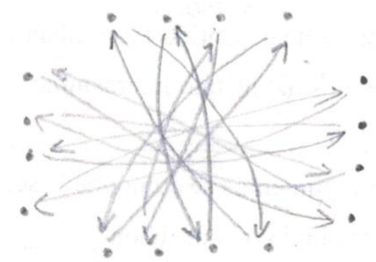


Figura 3.7. Grafo con partición de 2 elementos. Extraído de la ficha de un participante.

Respecto a los grafos con particiones de 4 elementos encontramos seis variantes algunas de las cuales se reproducen en la Figura 3.8, los dos primeros con vértices no simbolizados y el tercero sí.

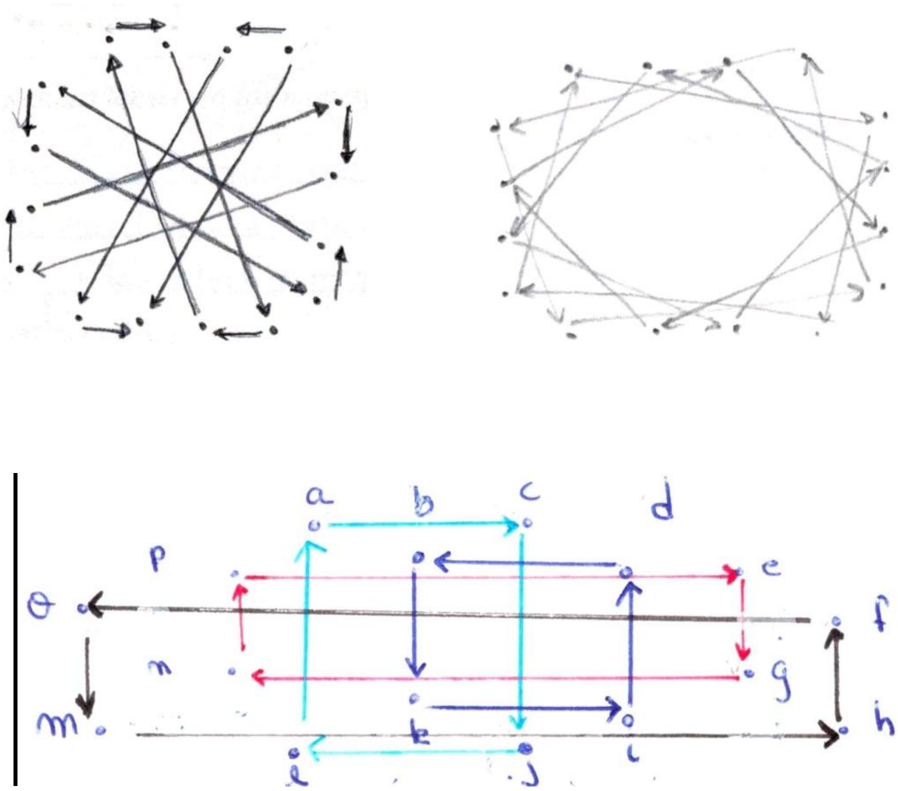


Figura 3.8. Grafos con diversas particiones de 4 elementos. Extraídos de las fichas de varios participantes.

En el primer grafo (sin simbolización) encontramos cuatro circuitos con cuatro vértices cada uno, es decir una partición de los vértices con cuatro subconjuntos de cuatro elementos cada uno. Si se simbolizan los vértices con letras correlativas, la partición sería es (a, b, i, j) (d, c, l, k) (e, f, m, n) (h, g, p, o), donde se permutan los elementos de cada subconjunto en orden correlativo y recurrentemente.

Los vértices que se encuentran en el mismo subconjunto se sitúan de dos en dos sobre los lados opuestos de la Carta. Los que se encuentran en el mismo lado de la Carta son adyacentes y se conectan con los que se sitúan según en el lado opuesto según la diagonal. En concreto dos vértices adyacentes del lado superior y la izquierda se unen con los dos que se encuentran en el lado inferior pero a la derecha (y viceversa), y los dos que se sitúan en el lado derecho en la parte superior se unen con los que se encuentran en el lado izquierdo en la parte inferior (y viceversa). Después se les asignan sentidos de permutación o de recorrido alternados a los circuitos sucesivos así definidos.

En el segundo grafo, encontramos cuatro circuitos formados por cuatro vértices cada uno, sin simbolizar; es decir una permutación en cuatro subconjuntos de cuatro elementos cada uno. Si se simbolizan de nuevo los vértices con letras correlativas, la partición sería (a, e, i, m) (b, n, j, f) (c, g, k, o) (d, p, l, h); en cada uno de ellos se define una permutación recurrente, donde cada vértice se intercambia con el siguiente y el último con el primero. Aquí el mismo subconjunto hay un vértices de cada lado de la Carta (se toma un elemento de cada cuatro, en orden sucesivo del alfabeto); si les damos un orden progresivo en un determinado sentido, por ejemplo horario, a los vértices dentro de cada lado, se trata de conectar los primeros vértices de cada lado entre sí, los segundos entre sí, etc. Y después se les asignan sentidos alternados a los circuitos sucesivos.

En el tercer grafo, también forma una partición con cuatro subconjuntos de cuatro elementos (cuatro circuitos), esta vez simbolizada; la partición es (a, c, j, l) (d, b, k, i) (e, g, n, p) (h, f, o, m). Aquí se unen los vértices de cada lado, en lugar que con el adyacente, como en el primer grafo, con el siguiente en orden alfabético. Si les queremos dar un orden a los vértices de cada lado, según un sentido, unimos el primero con el tercero y el segundo con el cuarto. Después unimos las parejas así definidas con las simétricas del lado opuesto respecto a un eje central paralelo a los lados en cuestión. Cabe destacar que en este último grafo el participante no ha posicionado los vértices sobre los lados del cuadrado de la Carta, sino los ha ubicado de forma tal que sea más sencillo visualizar la partición

También de los grafos con partición de 8 elementos encontramos diferentes variantes, todas con partición en dos subconjuntos sin simbolización. En total en las fichas encontramos tres propuestas distintas y en la Figura 3.9 se muestran todas ellas. En el primer grafo, , si lo simbolizamos con letras correlativas tenemos una partición en dos subconjuntos (a, b, c, d, i, j, k, l) (h, g, f, e, p, o, n, m). El movimiento de trenzado siempre asignando letras en sentido horarios a los vértices, determina una permutación en cada subconjunto de ocho elementos, donde cada vértice (hilo) se pone en la posición del siguiente y el último en la del primero. Para conseguir tales subconjuntos se unen todos los vértices de cada lado entre sí y después con los del lado opuesto. Finalmente se asignan sentidos alternados a los dos circuitos.

El segundo grafo podemos representarlo con la partición (c, a, o, m, k, i, g, e) (b, d, f, h, j, l, n, p) de donde se deduce la correspondiente permutación como en los casos anteriores. Observamos que esta equivale a la primera de la Figura 3.3 con la única diferencia que se invierten los sentidos de los circuitos, pero ambos representan el mismo trenzado. Si se consideran ordenados todos los vértices según un sentido de giro, se ponen en el mismo subconjunto, vértice sí y vértice no, de manera alternada.

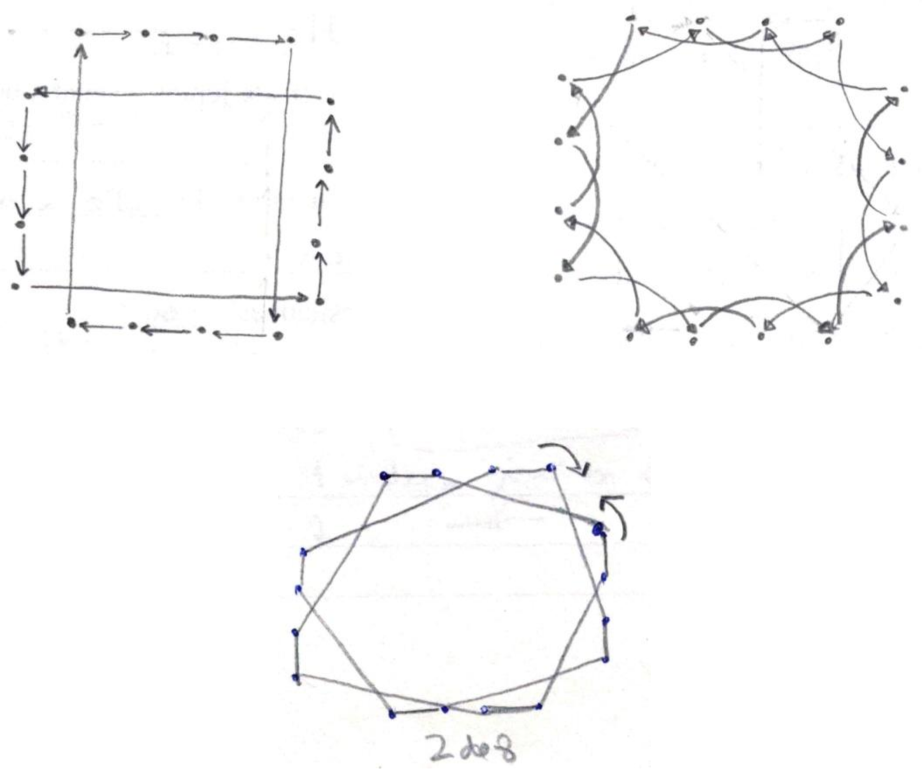


Figura 3.9. Grafos con diversas particiones de 8 elementos. Extraídos de las fichas de los participante.

En el tercer grafo se representa la partición (b, a, n, m, j, i, f, e) (c, d, g, h, k, l, o, p) y correspondiente permutación. Aquí se unen dos vértices consecutivos de cada lado, en particular si consideramos siempre un orden según un sentido de giro, los dos primeros de cada lado entre ellos y los dos últimos de cada lado entre ellos, formando así los dos subconjuntos se ocho elementos. Siempre se asignan sentidos alternados a los circuitos.

En la siguiente Figura 3.10 se muestra el número de grafos separado por tipo de partición (dos subconjunto de ocho elementos, en verde; cuatros subconjuntos de cuatro elementos, en rojo; ocho subconjuntos de dos elementos, en azul) que inventan los participantes. Es decir el número de trenzas de dos, cuatro y ocho elementos correctamente simbolizada por estudiante.

Observamos que lo más común es proponer sólo una trenza de cada tipo, correctamente representada en un grafo que cumple las condiciones. Y dentro de ello, la mayoría de los estudiantes proponen una trenza formada por partición de los 16 hilos en dos elementos (8 de los 13 estudiantes), seguido por una trenza de cuatro hilos (siete estudiantes).

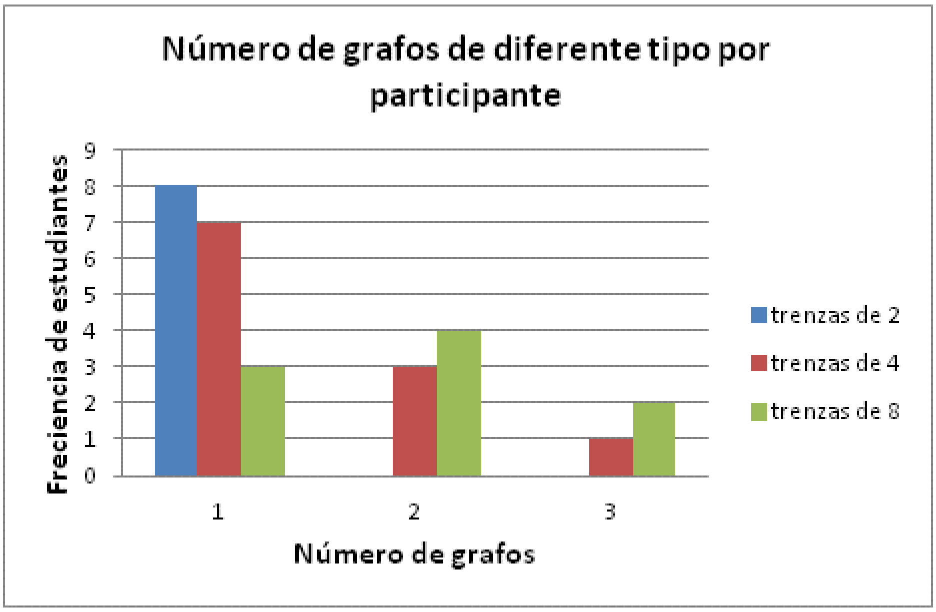


Figura 3.10. Número de grafos que permite el trenzado por participantes y por característica de la partición.

El total de trenzas de dos hilos propuestas es de 8; sumando las 16 de 4 hilos y las 17 de ocho se obtienen 41 trenzas, es decir, de nuevo una media de alrededor de tres por participante.

4. DISCUSIÓN E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Analizamos diferentes cuestiones:

- ✓ *Conclusiones generales de la experiencia*: evidenciamos, como ya vimos en los párrafos anteriores, que casi todos los participantes crean más de un grafo y la mayoría de grafos propuestos representan trenzados, porque cumples los patrones determinados para ello. Estos resultados son muy satisfactorios pues demuestran que los participantes han interiorizado el concepto de grafo, manejan las propiedades, y realizan un proceso de generalización para crear trenzados de un número elevado de hilos. Además en las actividades iniciales se ha visto como los participantes son capaces de identificar patrones en los grafos y de establecer una simbolización adecuada de los mismos. En conjunto la actividad les ha llevado a trabajar con muchos objetos matemáticos diferentes y conectarlos entre sí, en especial los de grafo, partición, aplicación y permutación, así como sus propiedades.
- ✓ *Posibilidad de adaptarlo a cursos de bachillerato*: al principio del Capítulo 2 hemos visto como la innovación propuesta contribuye al alcance de varios objetivos de etapa y de área y favorece al desarrollo de diversas competencias, en particular de numerosas facetas de la competencia matemática. Insistimos en particular en que a través de esta actividad se aprende de manera constructiva los conceptos matemáticos implicados a partir de una actividad práctica real y se fomenta el desarrollo del pensamiento matemático y sobre todo del razonamiento combinatorio, así como la actividad de modelización. Como hemos subrayado en el Capitulo 1, esto es parte fundamental para el desarrollo del pensamiento del adolescente. El planteamiento de la actividad está al alcance de estudiantes de Segundaria y Bachillerato, ya que no requieren conocimientos previos de gran complejidad matemática. Si bien cabe mencionar que la formulación abierta de las tareas diseñadas, donde la respuesta no es única, y el hecho de que se plantean retos que implican cierta creatividad, hace que resulte especialmente adapta a estudiantes de altas capacidades. Finalmente no hay que olvidar la fuerte componente motivadora de la elaboración manual de las trenzas, pasatiempo común, sobre todo entre las alumnas, en esas edades.
- ✓ *Potencialidades para los cursos de formación de profesores*: de la experiencia que hemos relatado resulta evidente que esta innovación es interesante para la formación

del profesorado. Aunque consideramos que en estos niveles hay que complementar el aprendizaje de los contenidos matemáticos con la reflexión sobre los aspectos sociales y culturales sobre la concepción de la matemática, enmarcándolos en la investigación etnomatemática (Albanese, 2014). Asimismo creemos que esta innovación tiene cierta potencialidad para que surja una reflexionar sobre el empleo de diversas metodologías de enseñanza-aprendizaje y la relación de la matemática escolar con su aplicación a la vida diaria.

Para terminar quiero poner de manifiesto la importancia para el profesor de innovar en el aula y de ser capaz de evaluar tales innovaciones. Este es un aspecto fundamental del desarrollo profesional de un docente que le permite seguir aprendiendo de su propia práctica a través de la reflexión (Schön, 1992).

REFERENCIAS

Albanese, V. (2014). *Etnomatemáticas en artesanías de trenzado y concepciones sobre las matemáticas en la formación docente.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Albanese, V., Oliveras, M. L., y Perales, F. J. (2014). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: Aplicación de un Modelo Metodológico elaborado. *Bolema*, *28*(48), 1-20.

Albanese, V., Oliveras, M. L., y Perales F. J. (2012). Modelización matemática del trenzado artesanal. *Epsilon*, *29* (81), 53-62.

Albanese, V., Santillán, A., y Oliveras, M. L. (2014). Etnomatemática y formación docente: el contexto argentino. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(1), 198-220.

Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1), 201-233.

Barton, B. (2008). *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. Melbourne: Springer.

Barton, B. (2012). Ethnomathematics and Philosophy. En H. Forgasz y F D. Rivera (Eds.), *Towards Equity in Mathematics Education: Gender, Culture, and Diversity* (pp. 231-240). Berlin: Springer.

Batanero, C., Godino, J. D., y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Editorial Sintesis.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 181-199.

Batanero, C., Godino, J., y Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática*. Barcelona: Paidós.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: P.P.U.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques* (1970-1990). New York: Springer.

Caraballo, R. M., Rico, L., y Lupiáñez, J. (2011). Pruebas autonómicas de diagnóstico para evaluar la competencia matemática en Educación Secundaria. *Investigación en Educación Matemática XV*, 307-318.

D'Ambrosio, U. (2012). The Program Ethnomathematics: theoretical basis and the dynamics of cultural encounters. *Cosmopolis. A Journal of Cosmopolitics, 3-4,* 13-41.

D’Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

Coriat, M., Sancho J. M., Gonzalvo, P., y Marín, A. (1989). *Nudos y nexos: redes en la escuela*. Madrid: Editorial Sintesis.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática – Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

Espinoza, J. (2011). *La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.

Gavarrete, M. E. (2012). *Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores indígenas de Costa Rica.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Godino, J. D., Batanero**,** C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Los autores.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education, 3*(1), 111-127.

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Barcelona: Paidos.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós.

León, O. G., y Montero, I. (2002). *Métodos de Investigación*. Madrid: Mc Graw Hill.

López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación, 4,* 167-180.

Lupiañez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis doctoral) Universidad de Granada, Granada.

MEC (2015). *Real Decreto* 1105/2014*, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

OECD (2010). *PISA 2012 Mathematics Framework*. Paris: OECD Publications.

Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Oliveras, M. L., y Albanese, V. (2012). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: un modelo metodológico para investigación. *Bolema*, *26*(44), 1295-1324.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, *8*(1), 26-39.

NCTM (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España: ICE-Horsori.

Rico, L., Lupiañez, J. L., Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular. Granada: Editorial Comares.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Schön, D. (1992). Formar profesores como profesionales reflexivos. En: *Los profesores y su formación* (pp. 79-91). Lisboa: Editorial Don Quijote.

Shirley, L. (2001). Ethnomathematics as a fundamental of instructional methodology. *ZDM*, *33*(3), 85-87.