

T 9 103

T. PROV. 21/15

Universidad de Granada

*Facultad de Ciencias*

**Métodos Topológicos y  
Variacionales en el estudio  
de Soluciones de  
Ecuaciones en Derivadas  
Parciales con una  
No-linealidad Asimétrica**

Tesis doctoral

*Salvador Villegas Barranco*

Granada, 1.996.

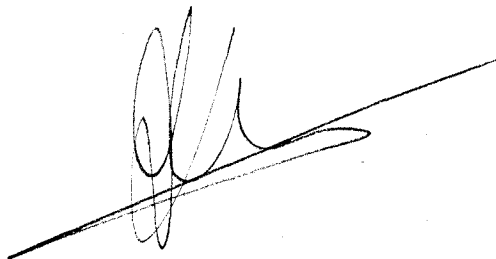
UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Facultad de Ciencias  
Fecha 19-12-96  
ENTRADA NUM. 3275

# Métodos Topológicos y Variacionales en el estudio de Soluciones de Ecuaciones en Derivadas Parciales con una No-linealidad Asimétrica

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA  
GRANADA  
N.º Documento 615052291  
N.º Copia 116297180

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

Vº Bº del Director:



Fdo: David Arcoya Álvarez



Fdo: Salvador Villegas Barranco

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
26 NOV 1996  
COMISIÓN DE GRADOS

## *Agradecimientos*

En primer lugar, quisiera expresar mi más profundo agradecimiento al Prof. David Arcoya Álvarez, sin cuya dirección no hubiera sido posible la realización de este trabajo. De su absoluta disponibilidad, paciencia e ilusión han surgido incontables sesiones de trabajo, cuyo fruto queda plasmado en la exposición de esta Memoria y que han completado mi formación matemática.

También quisiera agradecer al Prof. Antonio Ambrosetti el interés mostrado a lo largo del desarrollo de esta Memoria. Concretamente por sugerir el estudio realizado en la Sección III.4. También, mi gratitud por la supervisión realizada por él durante las dos estancias realizadas por mí en la Scuola Normale Superiore de Pisa (becado por la Junta de Andalucía y por la Universidad de Granada), en las que he tenido oportunidad de tratar cuestiones relacionadas con las aquí estudiadas.

A todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático, por haberme facilitado la labor y haber creado una atmósfera sana de trabajo.

Por último, y no en último lugar, quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todos los buenos profesores de Matemáticas que he tenido a lo largo de mi vida. Dado que coincidió en una edad en las que pocas cosas se olvidan y quedamos definidos para siempre, me gustaría hacer una mención especial a D. Aquilino Pérez de Madrid Hernández, quien despertó en mí la fascinación por las Matemáticas.

# Índice

Notación.	1
Introducción.	5
<b>I El problema de contorno autónomo unidimensional.</b>	<b>15</b>
I.1 El problema de Dirichlet. . . . .	17
I.1.1 Soluciones con ceros no simples. . . . .	18
I.1.2 Soluciones con ceros simples. . . . .	25
I.2 Un ejemplo de problema de contorno asimétrico. . . . .	30
I.3 El problema de Neumann. . . . .	41
I.4 Problema de Dirichlet con no-linealidad continua. . . . .	42
I.5 Sobre un problema abierto de Ambrosetti, Brézis y Cerami. 46	
<b>II Problema general de contorno unidimensional.</b>	<b>53</b>
II.1 Planteamiento y enunciado de los resultados principales. .	55
II.2 Un problema de minimización. . . . .	59
II.3 La condición de Palais-Smale. . . . .	62
II.4 Existencia de solución. . . . .	65
II.5 Extensión al operador p-laplaciano. . . . .	67
<b>III Problema de Neumann en dimensiones superiores.</b>	<b>69</b>
III.1 Planteamiento y enunciado de los resultados principales. .	71
III.2 La condición de Palais-Smale. . . . .	75

III.3 El caso $N \geq 2$ . . . . .	80
III.4 El caso $N = 1$ . . . . .	85
<b>IV Problema de Dirichlet en dimensiones superiores.</b>	<b>91</b>
IV.1 Planteamiento y enunciado de los resultados principales. .	93
IV.2 Los principales resultados. . . . .	94
IV.3 Un caso particular. . . . .	100
<b>Notas finales.</b>	<b>103</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>107</b>

# NOTACIÓN

$\emptyset$  – conjunto vacío.

$\mathbb{N}$  – conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$  – conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^+$  – conjunto de los números reales estrictamente positivos.

$\mathbb{R}^-$  – conjunto de los números reales estrictamente negativos.

$s^+ = \max\{0, s\}$  , donde  $s \in \mathbb{R}$ .

$s^- = \min\{0, s\}$  , donde  $s \in \mathbb{R}$ .

$\cdot$  – producto escalar usual de  $\mathbb{R}^N$ .

$\|x\|$  – norma euclídea del vector  $x \in \mathbb{R}^N$ .

$\Omega$  – dominio (conjunto abierto y conexo) acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera  $\partial\Omega$  suficientemente regular.

$\overset{\circ}{A}$  – interior de  $A$ , subconjunto de un cierto espacio topológico.

$\overline{A}$  – clausura de  $A$ , subconjunto de un cierto espacio topológico.

$\partial A$  – frontera de  $A$ , subconjunto de un cierto espacio topológico.

$|\Omega|$  – medida de Lebesgue de  $\Omega$ .

$\text{long}(I) = \sup I - \inf I$  – longitud del intervalo  $I$  acotado de números reales.

*c.t.*  $x \in \Omega$  – propiedad que verifican todos los puntos de  $\Omega$  salvo un conjunto de medida cero.

$A + B := \{a + b : a \in A; b \in B\}$  – suma de los subconjuntos  $A$  y  $B$  de un espacio normado  $X$ .

$X = X_1 \oplus X_2$  – significa que el espacio normado  $X$  es suma topológica-algebraica de los subespacios vectoriales  $X_1$  y  $X_2$ .

$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$  – gradiente de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$  – laplaciano de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\|u\|_X$  – norma de  $u$  en el espacio normado  $X$ .

$B_r(0) = \{u \in X, \|u\|_X < r\}$  – bola abierta en  $X$  centrada en cero de radio  $r > 0$ .

$\text{deg}(F, G, a)$  – grado de la aplicación  $F : X \rightarrow X$ , de la forma identidad menos compacto, en el abierto  $G \subset X$  con respecto al punto  $a \in F(X) \setminus F(\partial G)$ .

$i(F, a)$  – índice (o grado local) de la aplicación  $F : X \rightarrow X$ , de la forma identidad menos compacto, en la solución aislada  $a$  de la ecuación  $F(x) = 0$ .

$\rightharpoonup$  – convergencia débil.

$C(X)$  – espacio de las funciones  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en el espacio topológico  $X$  dotado de su norma usual.

$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  – espacios usuales de Hölder dotados de sus normas usuales.

$C^k(X)$  – espacios de las funciones  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y diferenciables usuales dotados de sus normas usuales.

$L^p(\Omega)$  – espacios de Lebesgue usuales ( $1 \leq p \leq \infty$ ).

$\|\cdot\|_p$  – norma usual de  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ).

Norma uniforme de  $u$  –  $\|u\|_\infty$ ,  $u$  función acotada.

$H^1(\Omega)$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$  – espacios usuales de Sobolev dotados de su norma usual.

$H^{-1}(\Omega)$  – espacio dual de  $H^1(\Omega)$ .

$X$  inmerso en  $Y$  – significa que la inclusión del espacio  $X$  en  $Y$  es una aplicación continua. Cuando además sea compacta, diremos que la inmersión de  $X$  en  $Y$  es compacta.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$  – valores propios de  $-\Delta$  con condiciones de tipo Dirichlet o Neumann.

$\Phi_1$  – autofunción positiva normalizada en  $C^1(\bar{\Omega})$  del primer autovalor  $\lambda_1$  de  $-\Delta$  con condiciones de tipo Dirichlet.

(PS) – condición de compacidad de Palais-Smale.



# INTRODUCCIÓN

Podemos encontrar en casi todas las disciplinas de la Ciencia, e incluso en alguna aparentemente ajena a ella, numerosos problemas que se pueden modelar por ecuaciones diferenciales. Es tal la inmensidad de problemas que podemos plantear en este campo, que resulta de todo punto inabarcable analizar de manera genérica cualquier ecuación. Esta Memoria está dedicada al estudio de una clase de problemas de contorno elípticos que surgen como modelos estacionarios de procesos de difusión. Para fijar ideas, consideremos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f(x, u), \quad x \in \Omega \\ B(u) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) con frontera  $\partial\Omega$  regular,  $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, no lineal en general, y  $B$  es una condición de contorno (que será bien de tipo Dirichlet,  $B(u) \equiv u$ , o bien de tipo Neumann,  $B(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial n}$ ).

El que hayamos considerado el operador laplaciano no es, en absoluto, restrictivo, y los resultados que exponemos a lo largo de la Memoria son igualmente válidos si consideramos operadores elípticos de segundo orden más generales. De hecho, nuestra forma de estudiar el

problema (0.1) es la propia del Análisis Funcional No Lineal. Es decir, transformamos (0.1) en una ecuación funcional planteada en un espacio adecuado de funciones con dimensión infinita y ésta es resuelta mediante distintos métodos.

Entre las principales técnicas del Análisis No Lineal para el estudio de ecuaciones diferenciales podemos citar la Teoría de Bifurcación y los Métodos Variacionales.

La Teoría de Bifurcación se basa en transformar (0.1) en una ecuación del tipo  $F(u) = 0$ , siendo  $F$  un operador definido en un adecuado espacio de Banach de dimensión infinita; para, con posterioridad, estudiar la existencia de ceros de  $F$  dependiendo de un cierto parámetro  $\lambda$ , normalmente con cierto significado dentro del fenómeno físico que modela (0.1). Entre los primeros resultados en esta línea, cabe citar el famoso trabajo de Leray y Schauder [36], donde además de introducir el grado topológico (llamado desde entonces en su honor, grado de Leray-Schauder), para operadores definidos en un espacio de Banach con la forma identidad menos compacto, ya se presentan también los primeros resultados de existencia de *continuos* (conexos y cerrados) de soluciones (véase Théorèm fondamental en dicho artículo). En [30], Krasnosel'skii prueba que, si denotamos la dependencia de  $F$  respecto del parámetro  $\lambda$  de la forma  $F(\lambda, u)$ , entonces, suponiendo que  $F(\lambda, u) = u - \lambda Ku$ , con  $K$  operador compacto verificando  $K0 = 0$ , se obtiene que cualquier valor característico  $\lambda^*$  de  $K$  con multiplicidad algebraica impar es un punto de bifurcación de la línea de soluciones triviales  $u = 0$ , esto es,  $(\lambda^*, 0)$  es un punto de acumulación de ceros  $(\lambda, u)$  de  $F$  con  $u \neq 0$ . Este resultado se basa en un cambio de índice de  $F(\lambda, \cdot)$  cuando  $\lambda$  "atraviesa"  $\lambda = \lambda^*$ . Posteriormente, en [43], usando el carácter global del grado topológico, Rabinowitz probó aún más: *de cada valor característico  $\lambda^*$  de  $K$  con multiplicidad algebraica impar bifurca un continuo  $\Sigma_0$  contenido en la clausura del conjunto de ceros  $(\lambda, u)$  de  $F$  con  $u \neq 0$  tal que, o bien  $\Sigma_0$*

es no acotado, o bien  $(\lambda_*, 0) \in \Sigma_0$  para otro valor característico  $\lambda_* \neq \lambda^*$  de  $K$ .

Por otra parte, y *a grosso modo*, podemos decir que los Métodos Variacionales consisten en asignar a cada ecuación diferencial (junto con sus condiciones de contorno) un funcional  $I$  definido en un adecuado espacio de funciones, de tal manera que el conjunto de las soluciones de la ecuación coincida con el de los puntos críticos de dicho funcional, es decir, los puntos  $u$  tales que  $I'(u) = 0$ . Haciendo un recorrido histórico, quizás los primeros trabajos basados en Métodos Variacionales sean atribuibles a Bernoulli y Euler. Desde entonces, la lista de matemáticos que se han ocupado de esta teoría es interminable, siendo una muestra de la importancia que históricamente los métodos variacionales han tenido en la Matemática, el que Hilbert dedicara dos problemas, el decimonoveno y vigésimo, de su célebre lista al estudio de las condiciones necesarias y suficientes para que un funcional tenga mínimo (lo que, en nuestro caso, proporcionaría uno de los buscados puntos críticos). Fue Tonelli [52] quien, a comienzos del siglo XX y basándose en las técnicas modernas desarrolladas previamente por Lebesgue y Hilbert, formalizó con rigor y desarrolló una teoría completa en lo que se conoce como Método Directo del Cálculo de Variaciones. Uno de sus resultados más notables establece la existencia de mínimo global de un funcional coercivo y débilmente inferiormente semicontinuo.

Un poco después aparecieron las memorias de Morse [38] y de Lusternik y Schnirelmann [37], quienes se dedicaron al estudio de la existencia de puntos críticos distintos de mínimos para funcionales con ciertas propiedades de simetría. Mediante sus teorías se pudieron obtener soluciones elegantes de problemas que, hasta entonces, habían sido considerados de gran dificultad. Por ejemplo, la existencia de geodésicas cerradas en una variedad compacta o el problema de las superficies minimales. Otro resultado a destacar se refiere a problemas variacionales

condicionados: *La restricción a la esfera  $S^{N-1}$  de dimensión  $N - 1$  de todo funcional real definido en  $\mathbb{R}^N$  que sea par posee, al menos,  $N$  pares de puntos críticos.* Así, debido a su amplio rango de aplicabilidad, la investigación en este campo ha sido incesante hasta llegar a la extensión de la teoría a funcionales definidos en variedades de dimensión infinita. Dicha extensión se debe, entre otros, a Browder [16], Krasnosel'skii [30], Palais [39], Palais y Smale [40], Schwartz [50] y Vainberg [53].

El artículo de Ambrosetti y Rabinowitz [6] fechado en 1973 supuso una contribución sustancial al estudio de los puntos críticos de funcionales *indefinidos*, es decir, no acotados ni superior ni inferiormente. Entre otros resultados destacamos el famoso Teorema de Paso de Montaña que establece la existencia de un punto crítico no nulo para funcionales satisfaciendo la condición de compacidad de Palais-Smale y poseyendo un mínimo local no global en cero. A partir de éste, la investigación de nuevos teoremas de existencia de puntos críticos como, por ejemplo, el Teorema de Punto Silla de Rabinowitz [42] y el Teorema Linking [46], ha proseguido sin cesar hasta nuestros días. Los *surveys* [2, 47] suponen una buena recopilación de la mayoría de resultados que han aparecido.

En nuestro problema (0.1), el espacio de funciones considerado será un conveniente espacio de Sobolev. A saber,  $H^1(\Omega)$  en el caso de condiciones de Neumann en la frontera, y  $H_0^1(\Omega)$  si las condiciones son de Dirichlet. El funcional asignado a (0.1) (llamado de Euler, en justicia) es el que hace corresponder a cada función  $u$  del espacio de Sobolev adecuado, el número real

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx ;$$

donde  $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$ , para  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Es bien conocido que, bajo ciertas hipótesis que limitan el crecimiento de  $f$  en el caso  $N > 1$ , el funcional  $I$  es diferenciable y sus puntos críticos coinciden con las soluciones débiles de (0.1).

Puesto que, como es natural, nuestro conocimiento de un problema no-lineal no puede, ni mucho menos, ser más completo que el que podamos deducir para el problema lineal o afín, parece conveniente, como un primer acercamiento al estudio del problema (0.1), analizar el afín. Consideremos, por tanto, para  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $h \in L^2(\Omega)$  el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + h(x), \quad x \in \Omega \\ B(u) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

Como es bien conocido, por el Teorema de la Alternativa de Fredholm [13], (0.2) tiene solución única para cada  $h \in L^2(\Omega)$  si  $\lambda \neq \lambda_k$   $k = 1, 2, \dots$  (los autovalores del operador laplaciano con la condición de frontera  $Bu = 0$ ), mientras que si  $\lambda = \lambda_k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , entonces (0.2) tiene solución si, y sólo si  $h$  es ortogonal en  $L^2(\Omega)$  al subespacio propio asociado a  $\lambda_k$ , en cuyo caso hay todo un subespacio afín de soluciones. Este ejemplo sugiere que, *en el estudio del problema general (0.1), es fundamental la relación de la no-linealidad con el espectro del operador diferencial.*

En 1930, Hammerstein [27], en un artículo que bien puede considerarse pionero en su campo, obtenía, entre otros, el siguiente resultado: *sea  $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua verificando que los  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, u)}{u}$  están acotados superiormente por un número  $\alpha$  menor que  $\lambda_1$ , entonces (0.1) tiene solución.* Hoy en día, este resultado es fácilmente deducible. Efectivamente, en este caso se puede comprobar que el funcional de Euler asociado a (0.1) es coercivo y débilmente inferiormente semicontinuo, lo que implica, por el Método Directo del Cálculo de Variaciones, que tiene un mínimo global, y en consecuencia, un punto crítico. Posteriormente, en 1933, Iglisch [28] mejoró estos resultados utilizando técnicas de punto fijo de Schauder. Hasta aquí, la no-linealidad, o más concretamente la derivada de ésta, no interacciona con el espectro de  $-\Delta$ , ya que se encuentra "por debajo" de  $\lambda_1$ .

Hacia 1949, Dolph dio un salto cualitativo en el estudio de este tipo de problemas. En [23] obtuvo una mejora de los resultados de Hammerstein. En concreto, se demuestra *existencia de solución de (0.1) si los*  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, u)}{u}$  *están contenidos en un subintervalo cerrado de*  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$  *para algún natural*  $k$ . Dolph desarrolla su trabajo en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , pero realmente se puede considerar cualquier dimensión. Estos resultados se pueden probar mucho más fácilmente si hacemos un tratamiento más moderno y utilizamos el Teorema de Punto de Silla de Rabinowitz (véase [19] para los detalles). Recalquemos que, aún en este caso, sigue sin haber interacción entre el espectro y la no-linealidad.

El primer trabajo reseñable en el que se estudia el problema (0.1) con interacción con el espectro es debido a Ambrosetti y Prodi [5]. Concretamente, los autores consideran el caso que  $\frac{f(x, u)}{u}$  interacciona con el primer valor propio y demuestran el siguiente teorema:

*Sean*  $\Omega$  *un dominio acotado en*  $\mathbb{R}^N$  *con frontera*  $\partial\Omega$  *de clase*  $C^{2,\alpha}$  *y*  $f \in C^2(\mathbb{R})$  *una función satisfaciendo:*

- i)  $f(0) = 0$ ;
- ii)  $f''(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = l' \in (0, \lambda_1)$ ;
- iv)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = l'' \in (\lambda_1, \lambda_2)$ .

*Entonces existe en*  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  *una*  $C^1$ -*variedad*  $M$  *conexa, cerrada y de codimensión 1 tal que*  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \setminus M$  *consta de dos componentes conexas*  $A_1$  *y*  $A_2$  *con las siguientes propiedades:*

- a) *Si*  $g \in A_1$  *entonces el problema*

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + f(u) &= g, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.3)$$

no tiene solución en  $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

b) Si  $g \in A_2$  entonces el problema (0.3) tiene exactamente 2 soluciones en  $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

c) Si  $g \in M$ , entonces el problema (0.3) tiene solución única en  $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

La demostración de este teorema está basada en resultados de inversión global de aplicaciones entre espacios de Banach generales. Este artículo ha motivado un gran número de trabajos que lo han tratado de generalizar y mejorar, pero, en la mayoría de los casos (a excepción del artículo [11] de Berger y Podolak), buscando una cota inferior del número de soluciones de (0.3) y no el resultado exacto de multiplicidad de [5]. Entre éstos, cabe destacar el trabajo de Fučík [24], en el que los principales resultados se obtienen utilizando el Teorema del Punto Fijo de Banach, así como el de Amann y Hess [8], en donde también se utiliza teoremas de punto fijo. Lazer y McKenna se mostraron particularmente interesados en este tipo de problemas, véase [33, 34] y el *survey* reciente [35] donde realizan un estudio minucioso, considerando casos en los que la no-linealidad puede "atravesar" cualquier número finito de autovalores.

La dificultad de este tipo de problemas de Ambrosetti-Prodi (es decir, cuando  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{f(x,u)}{u} < \lambda_1 < \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x,u)}{u}$ ) aumenta si consideramos no-linealidades superlineales en  $+\infty$ . En este caso tendríamos interacción con un número infinito de valores propios. Entre los primeros trabajos de esta clase podemos destacar los de Chang [17] y de De Figueiredo y Solimini [22], en el que los autores obtienen interesantes resultados aplicando el principio variacional de Ekeland. Concretamente, usan este principio para probar que una solución obtenida entre adecuadas sub- y supersolución ordenadas es un mínimo local (véase [14] para un resultado análogo). Concluyen así, por el Teorema de Paso de

Montaña de Ambrosetti y Rabinowitz [6], la existencia de una segunda solución además de este mínimo local.

También podemos destacar los artículos de De Figueiredo y Ruf [21], Ruf y Solimini [48], Ruf y Srikanth [49], y Kannan y Ortega [29], en los cuales se consideran problemas en dimensión 1 con no-linealidades superlineales en  $+\infty$ . En [48, 49] se considera un crecimiento lineal en  $-\infty$ , cuya pendiente puede encontrarse en cualquier intervalo  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$  y se obtienen resultados de multiplicidad utilizando las técnicas de bifurcación de Rabinowitz en [49] y, en [48], métodos variacionales. En [29], los autores consideran un problema resonante en el primer valor propio en  $-\infty$ , es decir  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{f(x,u)}{u} = \lambda_1$ . De Figueiredo [20] considera un problema en cualquier dimensión en el que la no-linealidad es superlineal en  $+\infty$ , sublineal en  $-\infty$  e impone un cierto "equilibrio" (bastante restrictivo) entre ambos comportamientos. Mediante métodos variacionales se obtienen resultados de multiplicidad.

Por nuestra parte, dedicamos esta memoria al estudio del problema (0.1) cuando la no-linealidad es asintóticamente lineal en  $-\infty$ , concretamente  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{f(x,u)}{u} = \lambda$ , con  $\lambda \geq \lambda_1$  y superlineal en  $+\infty$ , es decir,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x,u)}{u} = +\infty$ . Con el objeto de intuir el tipo de resultados que cabe esperar para (0.1), conviene empezar con el estudio del caso particular en el que la ecuación diferencial es autónoma ( $f$  no depende de  $x$ ) y  $N = 1$ . Por este motivo, el primer capítulo de esta Memoria ofrece un método muy general para resolver ecuaciones diferenciales autónomas en dimensión 1. Las demostraciones de los resultados utilizan técnicas muy elementales de Análisis. Laetsch [31], en 1970, obtiene algunos resultados particulares usando ideas similares. En la Sección 2 de éste capítulo se aplica este método al estudio de un problema autónomo unidimensional con no-linealidad asimétrica, siendo los resultados presentados aquí especialmente clarificadores de los que encontraremos para el problema general (0.1) en el último capítulo. No obstante, dicho método



puede ser útil para otro tipo de situaciones. Concretamente, con ligeros cambios podremos generalizar la técnica al caso de no-linealidades continuas no necesariamente localmente lipzchitzianas y usar ésta para resolver un problema abierto planteado por Ambrosetti, Brézis y Cerami [3] (véase también el trabajo de Boccardo, Escobedo y Peral [12]).

En el Capítulo II estudiamos un problema en dimensión 1 con una no-linealidad no necesariamente autónoma y con condiciones de contorno de tipo Neumann. La motivación surge del trabajo de De Figueiredo y Ruf [21] en el que los autores estudian este caso cuando la no-linealidad  $f(x, u)$  satisface una condición de linealidad asintótica en  $-\infty$  y de superlinealidad en  $+\infty$ . A lo largo del capítulo rebajamos sustancialmente las hipótesis de sus principales resultados y demostramos que la superlinealidad en  $+\infty$  no es, en absoluto, necesaria para la existencia de solución, sino que surge de manera "antinatural" al aplicar ciertas técnicas. Para la obtención de nuestros resultados utilizaremos métodos variacionales, en concreto aplicaremos el Teorema de Paso de Montaña.

Los resultados obtenidos en el Capítulo II imponen, entre otras hipótesis, que la dimensión  $N$  sea uno. Además, aportan sólo la existencia de, al menos, una solución y, por tanto, no proporcionan información cuando el problema posea una solución trivial, es decir, constante (recordemos que estamos con condición de Neumann). En el Capítulo III estudiamos dicho problema de Neumann con  $N \geq 1$  bajo la hipótesis de existencia de una única solución trivial, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es la constante cero. Nuestro objetivo es obtener condiciones suficientes para la existencia de una solución no trivial. De nuevo utilizaremos métodos variacionales, aunque en este caso, el funcional de Euler asociado a nuestro problema no satisface las propiedades geométricas del Teorema de Paso de Montaña al no ser la solución cero un mínimo local del funcional. En este caso, aplicaremos un teorema de punto crítico debido a Silva [51] y válido para los casos que la solución

cero es un punto de silla del funcional. Demostraremos que, sorprendentemente, la verificación de las condiciones geométricas depende de la dimensión de  $\mathbb{R}^N$ . Por último, veremos un ejemplo que muestra que este cambio en la geometría del funcional no es una cuestión técnica, sino que es esencial para la existencia de solución no trivial.

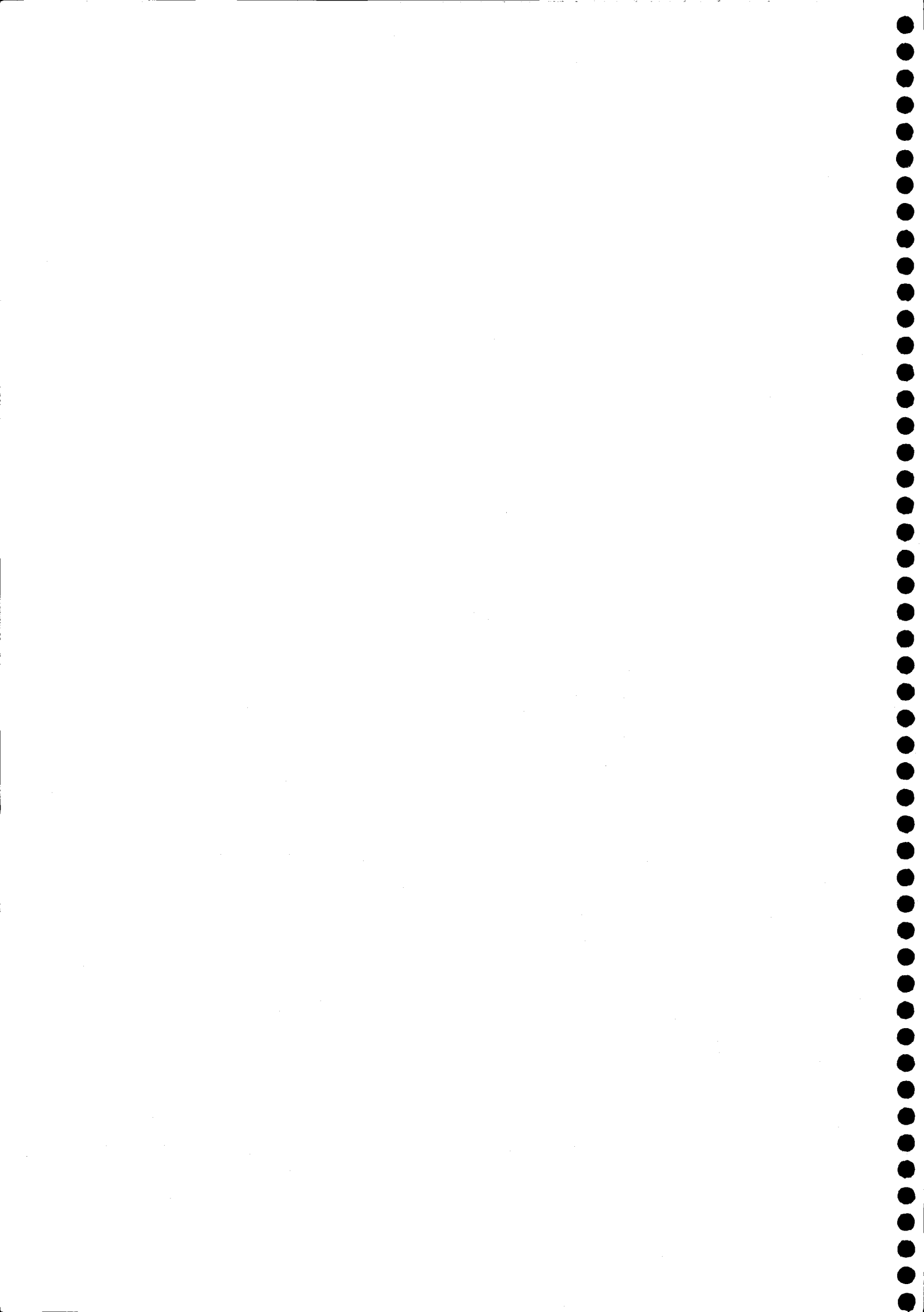
En el Capítulo IV nos planteamos un problema en derivadas parciales con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, cuya no-linealidad es asintóticamente lineal en  $-\infty$ . En este caso, supondremos que el problema planteado tiene una supersolución positiva. Podemos interpretar que esta condición hace el papel de la hipótesis que se suele imponer a la no-linealidad en  $+\infty$ . De hecho, para la obtención de nuestros resultados será indiferente el comportamiento de ésta en los valores que se encuentren por encima de la norma uniforme de la supersolución. Truncando adecuadamente nuestro problema, y usando la hipótesis en  $-\infty$ , por Teoría de Bifurcación deduciremos la existencia de un *continuo* de soluciones bifurcando desde  $\lambda = \lambda_1$ . Posteriormente, demostraremos convenientes cotas a priori de este *continuo* de soluciones del problema truncado, lo que permitirá probar que éstas son también soluciones del problema original. Por último, ofrecemos un ejemplo particular en el que podemos desarrollar los resultados expuestos anteriormente; para lo cual, utilizando sub- y supersoluciones y técnicas variacionales, deduciremos la existencia de la supersolución necesitada.

Para finalizar, hemos creído conveniente incluir unas Notas Finales, en las que mostramos ciertos problemas directamente relacionados con los que desarrollamos en esta Memoria, susceptibles de ser estudiados con más profundidad.

Algunos de los resultados de esta Memoria han sido expuestos en diferentes congresos, y aceptados para publicación en diferentes revistas y series especializadas (véase [55, 54, 9, 10]).

# Capítulo I

EL PROBLEMA DE CONTORNO  
AUTÓNOMO UNIDIMENSIONAL.



## I.1. El problema de Dirichlet.

Nos proponemos en esta sección estudiar el conjunto de las soluciones del siguiente problema autónomo:

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= f(u(x)), & a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (P)$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función localmente lipschitziana.

Por solución de  $(P)$  entenderemos una función continua en  $[a, b]$  y dos veces derivables en  $(a, b)$  satisfaciendo las condiciones ya expuestas. Del hecho que  $u'$  y  $u''$  sean extensibles a  $[a, b]$  se deduce que una tal función  $u$  está de hecho en  $C^2[a, b]$ . Resaltamos que esta regularidad de la solución sólo requiere la hipótesis de continuidad de  $f$ . Clasificaremos la soluciones de  $(P)$  según su máximo, su mínimo, su número de ceros y la naturaleza de dichos ceros.

A continuación exponemos un resultado que, a pesar de su simplicidad, será extremadamente útil para el estudio de  $(P)$ . En este caso, como es usual, denotaremos por  $F$  a la función real de variable real definida por  $F(s) = \int_0^s f(t) dt, \forall s \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 1** *Supongamos que  $f$  es localmente lipschitziana. Toda solución  $u$  de  $(P)$  verifica:*

- i) *La función  $\frac{(u')^2}{2} + F \circ u$  es constante en  $[a, b]$ .*
- ii) *Si  $u$  no es idénticamente nula, entonces  $u$  tiene un número finito de ceros.*
- iii) *O bien todos los ceros de  $u$  son simples, o bien ninguno de ellos lo es.*

*Demostración.* i) Basta observar que

$$\left( \frac{(u')^2}{2} + F \circ u \right)'(x) = u'(x)(u''(x) + f(u(x))) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

*ii)* Supongamos que  $u$  se anula en un número infinito de ceros. Demostraremos que  $u$  es la función idénticamente cero. Sea  $x_0$  un punto de acumulación del conjunto de los ceros de  $u$ , que, por tanto, deberá verificar  $u(x_0) = u'(x_0) = u''(x_0) = 0$ . Así,  $0 = -u''(x_0) = f(u(x_0)) = f(0)$ , (aún cuando  $x_0$  sea un punto de los extremos del intervalo  $[a, b]$ , puesto que como ya hemos mencionado  $u \in C^2[a, b]$ ). Del hecho que  $f$  sea localmente lipschitziana se deduce que el Problema de Valores Iniciales (P.V.I.) asociado a la ecuación diferencial de (P) con condiciones iniciales  $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ ; tiene solución única. Al ser  $f(0) = 0$ , entonces las funciones  $u$  y  $0$  son soluciones de dicho P.V.I. y, por tanto  $u \equiv 0$ .

*iii)* Supongamos que  $u$  posee un cero  $x_0 \in [a, b]$  no simple; es decir,  $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ . Demostraremos que cualquier otro cero de  $u$  tampoco es simple. En efecto, evaluando la función  $\frac{u'^2}{2} + F \circ u$  en  $x = x_0$ , deducimos, por el apartado *i)*, que

$$\frac{-(u')^2(x)}{2} = F(u(x)), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.1)$$

Así, si  $x_1$  es otro cero de  $u$  se concluye que  $u'(x_1) = 0$ ; es decir, que  $x_1$  no es un cero simple. ■

Resaltemos que el apartado *i)* es cierto suponiendo únicamente continuidad de  $f$ .

### I.1.1. Soluciones con ceros no simples.

Dedicamos esta subsección al estudio de las soluciones de (P) con ceros no simples. Recordemos que la Proposición 1-*iii)* afirma que todos los ceros de una solución de (P) tienen la misma "naturaleza". Puesto

que en el apartado *ii*) de la misma proposición hemos demostrado que cualquier solución no nula  $u$  de  $(P)$  tiene un número finito de ceros, es posible considerar una partición de  $[a, b]$  en subintervalos, de tal manera que  $u$  tenga signo constante en el interior de cada uno de estos subintervalos. Por esta razón, parece apropiado empezar buscando las soluciones de  $(P)$  con signo constante en  $(a, b)$  y con ceros (en sus extremos) no simples. Para ello necesitaremos una de las siguientes hipótesis sobre  $f$ :

$(f^+)$   $f(0) < 0$  y existe un número estrictamente positivo  $M$  satisfaciendo  $F(M) = 0$ ;  $f(M) > 0$ ;  $F(s) < 0 \forall s \in (0, M)$ .

$(f^-)$   $f(0) > 0$  y existe un número estrictamente negativo  $m$  satisfaciendo  $F(m) = 0$ ;  $f(m) < 0$ ;  $F(s) < 0 \forall s \in (m, 0)$ .

Es inmediato comprobar que si se verifica  $(f^+)$ , el número  $M$  es único. Se trataría del primer cero positivo de  $F$ . La condición  $f(M) > 0$  significa que  $M$  es un cero simple de  $F$ . Análogo comentario podríamos hacer de  $(f^-)$  y  $m$ . En la definición siguiente, fijaremos la notación conveniente para una exposición clara de nuestros resultados.

**Definición 2** Si  $f$  es localmente lipschitziana y se verifica  $(f^+)$  definimos

$$L^+ := \sqrt{2} \int_0^M \frac{ds}{\sqrt{-F(s)}}.$$

Análogamente, si  $f$  es localmente lipschitziana y se verifica  $(f^-)$  definimos

$$L^- := \sqrt{2} \int_m^0 \frac{ds}{\sqrt{-F(s)}}.$$

Observemos que bajo las hipótesis de localmente lipschitziana y  $(f^+)$ , el número  $L^+$  está bien definido, ya que  $-F'(0) = -f(0) > 0$  y  $-F'(M) = -f(M) < 0$ . Análogo comentario podríamos hacer para  $L^-$ .

**Lema 3** Sea  $f$  localmente lipschitziana. Entonces

i) *El problema*

$$\left. \begin{array}{l} -u''(x) = f(u(x)), \quad a < x < b \\ u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0 \\ u(x) > 0, \quad a < x < b \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

tiene solución si, y sólo si se verifica ( $f^+$ ) y  $L^+ = b - a$ .

Además, en este caso, la solución  $u$  es única y verifica  $\|u\|_\infty = M$ .

ii) *El problema*

$$\left. \begin{array}{l} -u''(x) = f(u(x)), \quad a < x < b \\ u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0 \\ u(x) < 0, \quad a < x < b \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

tiene solución si, y sólo si se verifica ( $f^-$ ) y  $L^- = b - a$ .

Además, en este caso, la solución  $u$  es única y verifica  $\|u\|_\infty = -m$ .

*Demostración.* Por cuestiones de simetría, basta demostrar i). Como en la demostración de la Proposición 1-ii), la unicidad del P.V.I. asociado a la ecuación diferencial de (1.2) con condiciones nulas en  $a$  implica la unicidad del problema (1.2). Demostremos a continuación la condición necesaria para la existencia de solución. Supongamos que  $u$  es la solución de (1.2). La condición  $f(0) < 0$  es claramente necesaria. En otro caso, si  $f(0) = 0$ , entonces la unicidad antes expuesta implicaría  $u \equiv 0$ ; mientras que si  $f(0) > 0$ , entonces  $u''(a) < 0$  y puesto que  $u(a) = u'(a) = 0$ , obtendríamos que  $u$  sería negativa en un entorno a la derecha de  $a$ , contradiciendo la positividad de  $u$ .

Sea  $M := \max_{a < x < b} u(x) > 0$  y demostremos que este valor  $M$  es exactamente el de la hipótesis ( $f^+$ ). Sea  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $u(x_0) = M$ . En primer lugar observemos que  $0 \leq -u''(x_0) = f(M)$ . Además, si  $f(M) = 0$ , entonces el P.V.I. asociado a la ecuación diferencial de (1.2) con valores iniciales  $u(x_0) = M$ ,  $u'(x_0) = 0$  admitiría como soluciones a



$u$  y a la constante  $M$ , contradiciendo la unicidad de dicho P.V.I. (evidentemente la función constante  $M > 0$  no verifica las condiciones de frontera). Así pues, deducimos  $f(M) > 0$ .

Teniendo en cuenta que  $u$  tiene ceros no simples, la expresión (1.1) es válida y, a partir de ahora y durante esta demostración, haremos referencia a ella. Tomando  $x = x_0$  en (1.1) deducimos  $F(M) = 0$ . Es más, de esta misma expresión se deduce que  $F(u(x)) \leq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Como  $u([a, b]) = [0, M]$ , obtenemos  $F(s) \leq 0$ ,  $\forall s \in [0, M]$ . Falta ver que la desigualdad es estricta en el interior del intervalo. Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que para un cierto  $\bar{M} \in (0, M)$  se verifica  $F(\bar{M}) = 0$ , en cuyo caso  $\bar{M}$  sería un máximo absoluto de  $F$  en  $[0, M]$  y por tanto  $F'(\bar{M}) = f(\bar{M}) = 0$ . Sea  $\bar{x} \in (a, b)$  tal que  $u(\bar{x}) = \bar{M}$ . Tomando  $\bar{x}$  en (1.1) deducimos  $\frac{-u'^2(\bar{x})}{2} = F(\bar{M}) = 0$  y por tanto la derivada de  $u$  se anula en  $\bar{x}$ . Argumentando de nuevo por la unicidad del P.V.I. asociado a la ecuación diferencial de (1.2) con condiciones iniciales  $u(\bar{x}) = \bar{M}$ ,  $u'(\bar{x}) = 0$ ; obtenemos que  $u \equiv \bar{M}$  (ya que ambas funciones satisfacen este problema, recuérdese que  $f(\bar{M}) = 0$ ); lo cual es una contradicción.

Para terminar de demostrar la condición necesaria resta por ver únicamente que  $L^+ = b - a$ . Para ello, comencemos observando que los únicos puntos críticos de la función  $u$  en  $[a, b]$  son  $a, b$  y  $x_0$ . Efectivamente, puesto que  $F$  no se anula en  $(0, M)$ , se deduce de (1.1) que cualquier punto crítico  $x \in (a, b)$  de  $u$  verifica  $u(x) = M$ , y así es un máximo relativo estricto (ya que  $f(M) > 0$ ). En consecuencia,  $u$  posee un único punto crítico en  $(a, b)$ , correspondiente a un único máximo absoluto de  $u$ ; quedando probada la afirmación anterior.

Por otra parte, se puede deducir que la función  $u$  es simétrica (respecto de la recta  $x = \frac{a+b}{2}$ ). Efectivamente, es inmediato comprobar que la función  $u(a+b-x)$  es también solución de (1.2). Por unicidad,  $u(x) = u(a+b-x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , que es exactamente la simetría buscada.

Así queda demostrado que el punto donde se alcanza el máximo es  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  y que la función  $u$  verifica  $u' > 0$  en  $(a, \frac{a+b}{2})$  y  $u' < 0$  en  $(\frac{a+b}{2}, b)$ . Por lo tanto, de (1.1) se deduce que

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{-2F(u(x))}} = 1, \quad \forall x \in (a, \frac{a+b}{2}).$$

Integrando esta expresión entre  $a$  y  $\frac{a+b}{2}$  se obtiene

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{u'(x)}{\sqrt{-2F(u(x))}} dx = \frac{b-a}{2}$$

y haciendo el cambio de variable  $s = u(x)$  en esta integral se obtiene que  $L^+ = b - a$ .

Recíprocamente, demostremos ahora que si se verifica  $(f^+)$  y  $L^+ = b - a$  entonces (1.2) tiene solución. Para ello vamos a construir explícitamente dicha solución. Sea  $h : (0, M) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$h(x) := a + \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{-2F(s)}}.$$

$h$  está bien definida, es derivable y  $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{-2F(x)}} > 0, \forall x \in (0, M)$ .

Así,  $h$  es estrictamente creciente. Aplicando que  $L^+ = b - a$  se puede obtener el comportamiento de  $h$  en sus extremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = a; \quad \lim_{x \rightarrow M^-} h(x) = \frac{a+b}{2}.$$

Por lo tanto, podemos extender  $h$  de manera continua a  $[0, M]$ , obteniendo que  $h$  es homeomorfismo continuo y creciente de  $[0, M]$  sobre  $[a, \frac{a+b}{2}]$ . Definimos  $u : [a, \frac{a+b}{2}] \rightarrow [0, M]$  como su función inversa. Se obtiene de manera inmediata que  $u$  es continua en  $[a, \frac{a+b}{2}]$  y derivable en su interior con derivada  $u'(x) = \sqrt{-2F(u(x))}$ . Derivando esta expresión y posteriormente extendiendo  $u$  de manera simétrica a todo el intervalo  $[a, b]$  se demuestra que  $u$  es solución de (1.2). ■

**Corolario 4** *Sea  $f$  localmente lipschitziana. Entonces el problema (P) no admite ninguna solución con ceros no simples que cambie el signo.*

*Demostración.* Razonamos por contradicción suponiendo que existe una solución  $u$  de (P) con ceros no simples y  $x_0, x_1 \in (a, b)$  con  $u(x_0) < 0 < u(x_1)$ . Sean  $a_1$  y  $b_1$  los ceros más cercanos a izquierda y derecha respectivamente de  $x_1$ . Entonces, por la Proposición 1-iii),  $a_1$  y  $b_1$  son ceros no simples, y así  $u$  es solución de (1.2) con  $a = a_1$  y  $b = b_1$ . Por lo tanto, por el Lema 3-i),  $f(0) < 0$ . Haciendo el mismo razonamiento en  $x_0$ , y utilizando el Lema 3-ii), obtenemos  $f(0) > 0$ , contradiciendo lo anterior. ■

Una vez vistos los resultados de existencia de solución con signo constante en  $(a, b)$ , será fácil demostrar el siguiente teorema, que clasifica todas las soluciones de (P) con ceros no simples.

**Teorema 5** *Sea  $f$  localmente lipschitziana. Entonces el problema (P) tiene solución con ceros no simples si, y sólo si se da uno de los tres siguientes casos:*

i)  $f(0) = 0$ . En este caso, la única solución es  $u \equiv 0$ .

ii)  $f(0) < 0$  y existe un natural  $n$  tal que

$$L^+ = \frac{b-a}{n}.$$

En cuyo caso  $u$  es única, no-negativa, tiene exactamente  $n+1$  ceros en  $[a, b]$ , es  $\frac{b-a}{n}$ -periódica y verifica  $\|u\|_\infty = M$ .

iii)  $f(0) > 0$  y existe un natural  $n$  tal que

$$L^- = \frac{b-a}{n}$$

En cuyo caso  $u$  es única, no-positiva, tiene exactamente  $n+1$  ceros en  $[a, b]$ , es  $\frac{b-a}{n}$ -periódica y verifica  $\|u\|_\infty = -m$ .

*Demostración.* Empezamos observando que en caso de existir una solución de  $(P)$  con ceros no simples se verificará  $u'(a) = 0$ , con lo que, de nuevo, la unicidad de una tal solución es una clara consecuencia de la unicidad de solución del P.V.I. asociado a la ecuación diferencial de  $(P)$  con condiciones nulas en el punto  $a$ . Así, la demostración de  $i)$  es inmediata. Por otra parte, por el Corolario 4, cualquier solución no nula y con ceros no simples de  $(P)$  es, o bien no-negativa (en cuyo caso necesariamente  $f(0) < 0$ ), o bien no-positiva (y entonces forzosamente  $f(0) > 0$ ). Por tanto, y teniendo en cuenta la analogía existente entre  $ii)$  y  $iii)$ , bastará probar que la existencia de una solución de  $(P)$  no nula, con ceros no simples y no-negativa equivale a la condición  $ii)$ .

Para ello, comencemos por la condición necesaria para la existencia de solución. Si  $(P)$  posee una solución  $u$  no-negativa y no nula con ceros no simples, entonces, en virtud de la Proposición 1- $ii)$ , ésta tiene un número finito de ceros en  $[a, b]$ . Supongamos que este número es  $n + 1$  con  $n$  un determinado natural, y sean  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$  los distintos ceros. Aplicando el Lema 3- $i)$  en cada subintervalo  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  ( $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ) se deduce que  $f(0) < 0$  y

$$L^+ = \alpha_{i+1} - \alpha_i .$$

Así, se obtiene que  $\alpha_{i+1} - \alpha_i$  es constante para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  y, en consecuencia, debe valer  $\frac{b-a}{n}$ ; es decir  $L^+ = \alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{b-a}{n}$  quedando probado  $ii)$ .

Recíprocamente, supongamos que se verifica la condición  $ii)$ . Consideremos el intervalo  $[a, a + \frac{b-a}{n}]$ . Observemos que  $ii)$  es exactamente la condición necesaria y suficiente del Lema 3- $i)$  para la existencia de solución positiva  $u$  de

$$\left. \begin{array}{l} -u''(x) = f(u(x)), \\ u(a) = u'(a) = u(a + \frac{b-a}{n}) = u'(a + \frac{b-a}{n}) = 0 \end{array} \right\} \quad a < x < a + \frac{b-a}{n}$$

Extendiendo  $u$  por periodicidad a todo  $[a, b]$  obtenemos la solución de

(P) con  $n + 1$  ceros no simples,  $\frac{b-a}{n}$ -periódica y satisfaciendo  $\|u\|_\infty = M$ . ■

### I.1.2. Soluciones con ceros simples.

En esta subsección estudiaremos soluciones de (P) cuyos ceros sean todos simples. De nuevo empezaremos por el estudio de las soluciones que tengan signo constante en el intervalo  $(a, b)$ . Una vez más, para comodidad del lector, introducimos unas definiciones que harán más fluido el enunciado de nuestros principales resultados.

**Definición 6** Para una función localmente lipschitziana  $f$  definimos

$$\Lambda^+ := \{M > 0 : f(M) > 0; F(s) < F(M), \forall s \in [0, M)\}.$$

Supuesto  $\Lambda^+ \neq \emptyset$ , denotamos

$$L^+(M) := \sqrt{2} \int_0^M \frac{ds}{\sqrt{F(M) - F(s)}}, \forall M \in \Lambda^+.$$

Análogamente definimos

$$\Lambda^- := \{m < 0 : f(m) < 0; F(s) < F(m), \forall s \in (m, 0]\}.$$

Si  $\Lambda^- \neq \emptyset$ , denotamos

$$L^-(m) := \sqrt{2} \int_m^0 \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}}, \forall m \in \Lambda^-.$$

Se puede comprobar, siguiendo las ideas de las observaciones que preceden a la Definición 2, que las funciones  $L^+(M)$  y  $L^-(m)$  están bien definidas.

**Teorema 7** Sea  $f$  una función localmente lipschitziana.

i) Consideremos para cada  $M > 0$  el problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= f(u(x)), & a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \\ u'(a) &> 0 > u'(b) \\ u(x) &> 0, & a < x < b \\ \max_{a < x < b} u(x) &= M \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Entonces, (1.4) tiene solución si, y sólo si  $M \in \Lambda^+$  y  $L^+(M) = b - a$ .

Además, en este caso, la solución es única.

ii) Consideremos para cada  $m < 0$  el problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= f(u(x)), & a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \\ u'(a) &< 0 < u'(b) \\ u(x) &< 0, & a < x < b \\ \min_{a < x < b} u(x) &= m \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Entonces, (1.5) tiene solución si, y sólo si  $m \in \Lambda^-$  y  $L^-(m) = b - a$ .

Además, en este caso, la solución es única.

*Demostración.* Por cuestiones de simetría trataremos solamente el apartado i). Demostremos la unicidad de solución, en caso de existencia. Empezamos observando que si  $u$  es solución de (1.4) y  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $u(x_0) = M$ , entonces aplicando la Proposición 1-i) y evaluando la función  $\frac{u'^2}{2} + F \circ u$  en  $x = x_0$  deducimos que

$$\frac{-(u')^2(x)}{2} = F(u(x)) - F(M), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.6)$$

Tomando  $x = a$  en esta expresión se deduce  $u'^2(a) = 2F(M)$ . Esto, junto con  $u'(a) > 0$ , proporciona  $F(M) > 0$  y que  $M$  determina unívocamente a  $u'(a)$ . Así, por la unicidad del P.V.I. asociado a la ecuación diferencial

de (1.4) con condiciones iniciales en  $a$ , obtenemos que  $u$  es única en caso de existir.

La demostración de la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de (1.4), se basa en utilizar la expresión (1.6) de forma análoga a como lo hacíamos en la demostración del Lema 3-i) con la expresión (1.1). ■

Estamos ya en disposición de afrontar el problema de la existencia de soluciones de  $(P)$  cuyos ceros son simples, con  $\alpha$  subintervalos donde es positiva y  $\beta$  subintervalos donde es negativa. Observemos que necesariamente  $|\alpha - \beta| \leq 1$ .

**Teorema 8** *Sea  $f$  localmente lipschitziana. Sean  $m, M$  dos números reales satisfaciendo  $m < 0 < M$  y  $\alpha, \beta$  dos números naturales iguales o consecutivos; es decir, verificando  $|\alpha - \beta| \leq 1$ . Entonces el problema*

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= f(u(x)), & a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \\ \min_{a < x < b} u(x) &= m \\ \max_{a < x < b} u(x) &= M \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

*tiene solución cuyos ceros son simples, con  $\alpha$  subintervalos donde es positiva y  $\beta$  subintervalos donde es negativa si, y sólo si se verifica*

$$M \in \Lambda^+, m \in \Lambda^-, F(M) = F(m), \alpha L^+(M) + \beta L^-(m) = b - a.$$

*Además, cualquier solución de (1.7) es  $(L^+(M) + L^-(m))$ -periódica, siendo todos los subintervalos donde la solución es positiva de longitud  $L^+(M)$  y los subintervalos donde dicha solución es negativa de longitud  $L^-(m)$ . Más aún, si  $|\alpha - \beta| = 1$  una tal solución es única; mientras que si  $\alpha = \beta$  entonces hay exactamente dos soluciones  $u$  y  $v$ , con  $v(x) = u(a + b - x), \forall x \in [a, b]$ .*

Obsérvese que en el caso  $\alpha = \beta$ , las dos soluciones son "esencialmente" la misma, pues una resulta de la otra al parametrizar el intervalo  $[a, b]$  por  $a + b - x$ .

**Nota 9** Obsérvese que de la Definición 6 se deduce que  $F$  no toma dos veces el mismo valor en  $\Lambda^+$  (análogamente en  $\Lambda^-$ ). Así pues, si fijamos  $m \in \Lambda^-$ , existe a lo más un  $M \in \Lambda^+$  verificando  $F(M) = F(m)$  (recíprocamente también). Así, del teorema previo se puede deducir que en cualquier solución del problema ( $P$ ) que cambie de signo y cuyos ceros sean simples, el máximo determina al mínimo y recíprocamente.

*Demostración del Teorema 8.* Comencemos por la condición necesaria para la existencia de solución  $u$  de (1.7). Demostraremos, en primer lugar, que en los  $\alpha$  subintervalos donde  $u$  es positiva se alcanza el máximo valor  $M$ . Para ello tomemos dos de estos subintervalos  $I_1$  e  $I_2$  y supongamos que el máximo valor tomado por la función  $u$  en  $I_1$  e  $I_2$  es  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Se trata de probar que  $M_1 = M_2$ . Si aplicamos el Teorema 7-i) a los intervalos  $I_1$  e  $I_2$  obtenemos que  $M_1 \in \Lambda^+$ ,  $M_2 \in \Lambda^+$ ;  $L^+(M_1) = \text{long}(I_1)$ ;  $L^+(M_2) = \text{long}(I_2)$ . Aplicando ahora la Proposición 1-i) y evaluando la función  $\frac{u^2}{2} + F \circ u$  en los puntos donde se alcanzan los máximos locales obtenemos  $F(M_1) = F(M_2)$ . De aquí deducimos en primer lugar, que  $M_1$  ha de ser igual a  $M_2$  (véase la Nota 9), y así, por la arbitrariedad de los subintervalos  $I_1$  e  $I_2$ , que  $M = M_1 = M_2$ . Además, se obtiene que dichos subintervalos tienen la misma longitud, e igual a  $L^+(M)$ . La unicidad establecida en el Teorema 7-i) implica que  $u$  es, salvo una traslación de la variable  $x$ , la misma función en los  $\alpha$  subintervalos donde es positiva.

Un estudio análogo en los  $\beta$  subintervalos donde  $u$  es negativa proporciona que  $u$  tiene un comportamiento idéntico en dichos subintervalos y que la longitud de éstos es exactamente  $L^-(m)$  (también se comprueba que  $m \in \Lambda^-$ ). Por lo tanto, se deduce sumando longitudes de intervalos que  $\alpha L^+(M) + \beta L^-(m) = b - a$ . De las propiedades anteriores se deriva que  $u$  es  $(L^+(M) + L^-(m))$ -periódica. Aplicando la Proposición 1-i) y evaluando la función  $\frac{u^2}{2} + F \circ u$  en los puntos donde  $u$  alcanza sus extremos absolutos, se infiere que  $F(M) = F(m)$ .



Por otra parte, los razonamientos anteriores aseguran que  $u$  es única si prefijamos el orden de los cambios de signo. Así, por ejemplo, si  $\alpha = \beta + 1$  entonces  $u$  está forzada a empezar y acabar siendo positiva y, por tanto  $u$  es única (análogo razonamiento en el caso  $\alpha = \beta - 1$ ). Si, por el contrario,  $\alpha = \beta$ , entonces tendremos dos soluciones, según  $u$  empiece siendo positiva y termine siendo negativa u ocurra al revés.

Probemos ahora que la condición es suficiente. Construyamos explícitamente una solución de (1.7) cuyos ceros sean simples, con  $\alpha$  subintervalos donde sea positiva y  $\beta$  subintervalos donde sea negativa. Para ello dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $\alpha$  subintervalos de longitud  $L^+(M)$  y  $\beta$  de longitud  $L^-(m)$  (de modo alternativo). Obsérvese que si  $|\alpha - \beta| = 1$  entonces hay un único modo de hacerlo, mientras que si  $\alpha = \beta$  entonces hay dos formas de efectuar esta división. Definamos  $u$  en cada uno de estos  $\alpha$  subintervalos (respectivamente  $\beta$  subintervalos) como la única solución con signo positivo (respectivamente negativo), con ceros simples en sus extremos y con máximo  $M$  (respectivamente mínimo  $m$ ). Esto es posible hacerlo en virtud del Teorema 7. Lo único que falta para demostrar que  $u$  es la solución buscada en todo  $[a, b]$  es comprobar que en esta construcción de  $u$  los trozos se "pegan" bien; es decir que la derivadas por la izquierda de orden primero y segundo en el extremo final de cada subintervalo coincide con las correspondientes derivadas por la derecha del extremo inicial del siguiente. Por ejemplo, supongamos (no hay pérdida de generalidad en ello) que un punto  $x_0 \in (a, b)$  es el extremo final de un subintervalo  $I$  donde  $u$  es positiva y el extremo inicial de un subintervalo  $J$  donde  $u$  es negativa. Aplicando la Proposición 1 en el intervalo  $I$  y evaluando la función  $\frac{u^2}{2} + F \circ u$  en  $x_0$  y en el punto donde  $u$  se hace máxima, deducimos que la derivada lateral por la izquierda de  $u$  en  $x_0$  verifica  $(u'(x_0-))^2 = 2F(M)$ . Haciendo el mismo razonamiento en  $J$  se deduce que  $(u'(x_0+))^2 = 2F(m)$ . Teniendo en cuenta que  $F(M) = F(m)$  (obsérvese que es la primera vez que se utiliza) y que

$u'(x_0-)$  y  $u'(x_0+)$  tienen signo negativo concluimos que ambos valores coinciden. Por último, teniendo en cuenta la ecuación diferencial que verifica  $u$  en  $I$  y en  $J$ , obtenemos que  $u''(x_0-) = u''(x_0+) = -f(0)$ . ■

Si recopilamos los resultados hasta ahora obtenidos en esta sección, observamos que el problema  $(P)$  queda completamente estudiado, en lo que respecta a la existencia y multiplicidad de soluciones, en los Teoremas 5, 7 y 8.

Veamos ahora un ejemplo donde podamos aplicar esta teoría.

## I.2. Un ejemplo de problema de contorno asimétrico.

Consideremos el problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u^-(x) + 1, & a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (P_\lambda)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro real. Estudiaremos la estructura de los pares  $(\lambda, u)$ , donde  $u$  es solución de  $(P_\lambda)$ , en el espacio  $\mathbb{R} \times C([a, b])$ .

**Nota 10** En primer lugar observemos que la única solución positiva de  $(P_\lambda)$  sería la única solución  $v_1$  del problema  $-u''(x) = 1, \forall x \in (a, b)$  con  $u(a) = u(b) = 0$ ; es decir,  $v_1(x) := \frac{-1}{2}(x-a)(x-b), \forall x \in [a, b]$ . Así, teniendo en cuenta que en el caso  $\lambda \leq 0$ , toda solución  $u$  de  $(P_\lambda)$  es positiva (pues  $-u'' > 0$  en  $(a, b)$ ), deducimos también que la única solución de  $(P_\lambda)$  con  $\lambda \leq 0$  es  $v_1$ . En definitiva, hemos obtenido que *para cualquier  $\lambda$  la única solución positiva de  $(P_\lambda)$  viene dada por  $v_1(x) := \frac{-1}{2}(x-a)(x-b), \forall x \in [a, b]$ . Además, para cada  $\lambda \leq 0$  no hay más solución (positiva o no) que ésta.*

En consecuencia, de ahora en adelante, consideraremos valores de  $\lambda$  estrictamente positivos y soluciones no-positivas de  $(P_\lambda)$ . Dado que la función  $f_\lambda(s) = \lambda s^- + 1$  es localmente lipschitziana para cualquier valor del parámetro  $\lambda$ , podemos aplicar los resultados de la Sección 1. En este caso,  $F_\lambda(s) = \frac{\lambda}{2}(s^-)^2 + s, \forall s \in \mathbb{R}$ . Comencemos con el estudio de las soluciones con ceros no simples. Observemos que, independientemente del valor de  $\lambda$ , se verifica  $f_\lambda(0) > 0$  y la hipótesis  $(f^-)$  con  $m = \frac{-2}{\lambda}$ , siendo  $L^- = \sqrt{2} \int_{-\frac{2}{\lambda}}^0 \frac{ds}{\sqrt{-(\frac{\lambda}{2}s^2 + s)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ . Teorema 5 obtenemos que cualquier solución con ceros no simples será no-positiva y que los únicos valores de  $\lambda$  para los que  $(P_\lambda)$  tiene solución son  $\lambda_{2n} = \frac{4n^2\pi^2}{(b-a)^2}, n \in \mathbb{N}$ ; que son precisamente los autovalores pares del operador  $\frac{-d^2}{dx^2}$  con condiciones nulas de Dirichlet (recordemos que los autovalores asociados a dicho problema son  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, n \in \mathbb{N}$ ). Así, deducimos la siguiente

**Proposición 11** *Sea  $\lambda > 0$ . Entonces el problema  $(P_\lambda)$  tiene solución con ceros no simples si, y sólo si  $\lambda = \lambda_{2n}$  para algún natural  $n$ . Dicha solución, única de este tipo, y a la que denotaremos por  $w_n$ , viene dada por*

$$w_n(x) := \frac{(b-a)^2}{4n^2\pi^2} \left( \cos 2n\pi \frac{x-a}{b-a} - 1 \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b]. \blacksquare$$

Observemos que la solución  $w_n$  es no-positiva, tiene  $n+1$  ceros en  $[a, b]$  y  $\|w_n\|_\infty = \frac{(b-a)^2}{2n^2\pi^2} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Estudiemos a continuación las soluciones con ceros simples (seguimos suponiendo  $\lambda > 0$ ). En este caso, y siguiendo la notación de la Definición 6:

$$\Lambda^+ = \mathbb{R}^+;$$

$$\Lambda^- = \left(-\infty, \frac{-2}{\lambda}\right);$$

$$L^+(M) = \sqrt{2} \int_0^M \frac{ds}{\sqrt{M-s}} = 2\sqrt{2}\sqrt{M}, \quad M > 0;$$

$$L^-(m) = \sqrt{2} \int_m^0 \frac{ds}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}(m^2 - s^2) + m - s}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsen \frac{1}{-(m\lambda + 1)} \right)$$

para todo  $m < \frac{-2}{\lambda}$ .

Busquemos en primer lugar soluciones con signo constante. Dado que las soluciones positivas ya han sido estudiadas en la Nota 10, nos centramos a continuación en las negativas. Por el Teorema 7-ii) se obtiene que, fijado un  $\lambda$  positivo, existe una solución de este tipo de mínimo  $m$  si, y sólo si  $m < \frac{-2}{\lambda}$  y se verifica

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsen \frac{1}{-(m\lambda + 1)} \right) = b - a$$

Utilizando herramientas de análisis elemental llegamos a la conclusión de que esto ocurre cuando  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , en cuyo caso obtenemos  $m = \frac{1 - \cos \frac{\sqrt{\lambda}(b-a)}{2}}{\lambda \cos \frac{\sqrt{\lambda}(b-a)}{2}}$ . Estamos, por lo tanto, en condiciones de enunciar la siguiente

**Proposición 12** *Sea  $\lambda > 0$ . Entonces el problema  $(P_\lambda)$  tiene solución negativa con ceros (en los extremos) simples si, y sólo si  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ . Dicha solución, única de este tipo, y a la que denotaremos por  $u_\lambda^{1-}$ , viene dada por*

$$u_\lambda^{1-}(x) = \frac{\text{sen } \sqrt{\lambda}(x-a) + \text{sen } \sqrt{\lambda}(b-x) - \text{sen } \sqrt{\lambda}(b-a)}{\lambda \text{sen } \sqrt{\lambda}(b-a)},$$

para cada  $a \leq x \leq b$ . ■

**Nota 13** La expresión obtenida para  $u_\lambda^{1-}$  permite estudiar de una forma fácil el comportamiento de la "curva"  $\lambda \mapsto u_\lambda^{1-}$  en el espacio  $\mathbb{R} \times C([a, b])$ . En efecto, la aplicación de  $(\lambda_1, \lambda_2)$  en  $C([a, b])$  que a cada  $\lambda$  le hace corresponder  $u_\lambda^{1-}$  es continua. Además,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} \|u_\lambda^{1-}\|_\infty = +\infty ; \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^+} \frac{u_\lambda^{1-}(x)}{\|u_\lambda^{1-}\|_\infty} = -\phi_1(x)$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2^-} u_\lambda^{1-}(x) = w_1(x);$$

(uniformemente en  $x \in [a, b]$ ), donde  $\phi_1(x) = \text{sen } \pi \frac{x-a}{b-a}$ ,  $\forall x \in [a, b]$  (la primera función propia positiva de norma uniforme 1).

Estudiamos ahora las soluciones que cambian de signo. Concretamente, para  $\lambda > 0$  fijado, buscamos las soluciones de  $(P_\lambda)$  con  $\alpha$  subintervalos donde la función es positiva y  $\beta$  subintervalos donde es negativa, donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números naturales iguales o consecutivos. Aplicando el Teorema 8, dicha solución, de máximo  $M$  y mínimo  $m$ , existirá si, y sólo si

$$m < \frac{-2}{\lambda} ; \quad M = \frac{\lambda}{2} m^2 + m$$

y

$$2\sqrt{2}\alpha\sqrt{M} + \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsen \frac{1}{-(m\lambda + 1)} \right) = b - a .$$

Es decir, si fijamos  $m < \frac{-2}{\lambda}$ , esta expresión es equivalente a

$$p(m) := 2\sqrt{2}\alpha\sqrt{\frac{\lambda}{2}m^2 + m} + \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsen \frac{1}{-(m\lambda + 1)} \right) = b - a . \quad (1.8)$$

Es necesario, por tanto, estudiar el comportamiento de esta función  $p$  así definida en  $(-\infty, \frac{-2}{\lambda})$ . Éste dependerá de los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Concretamente, empezando por el caso  $\alpha \geq \beta$  y dejando el caso  $\alpha < \beta$  para un estudio posterior, se obtiene que  $p$  es estrictamente decreciente en  $(-\infty, \frac{-2}{\lambda})$  y  $\lim_{m \rightarrow -\infty} p(m) = +\infty$ . Por consiguiente, la ecuación  $p(m) = b - a$  tendrá solución (única) si, y sólo si

$$b - a > \lim_{m \rightarrow \frac{-2}{\lambda}^-} p(m) = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\lambda}};$$

que equivale a  $\lambda > \lambda_{2\beta}$ . En resumen, hemos probado

**Proposición 14** Sean  $\lambda > 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  verificando  $\alpha = \beta$  ó  $\alpha = \beta + 1$ . Entonces el problema  $(P_\lambda)$  tiene solución con ceros simples, con  $\alpha$  subintervalos donde es positiva y  $\beta$  donde es negativa si, y sólo si

$$\lambda > \lambda_{2\beta}.$$

Además, en el caso  $\alpha = \beta + 1$  dicha solución será única y la notaremos por  $u_\lambda^{\alpha+, \beta-}$ . Si, por el contrario  $\alpha = \beta$  entonces tendremos 2 soluciones a las que llamaremos  $u_\lambda^{\beta+, \beta-}$  y  $u_\lambda^{\beta-, \beta+}$ ; las cuales verifican  $\frac{d u_\lambda^{\beta+, \beta-}}{d x}(a) > 0$  y  $u_\lambda^{\beta-, \beta+}(x) = u_\lambda^{\beta+, \beta-}(a + b - x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . ■

Obsérvese que en el caso  $\alpha = \beta$ , las dos soluciones  $u_\lambda^{\beta+, \beta-}$  (que "empieza" siendo positiva y "acaba" siendo negativa) y  $u_\lambda^{\beta-, \beta+}$  (a la que le ocurre lo inverso) son "esencialmente" la misma, pues una resulta de la otra al parametrizar el intervalo  $[a, b]$  por  $a + b - x$ .

A continuación, y para comodidad del lector, definimos unas funciones auxiliares para llevar a cabo el estudio del comportamiento asintótico de ramas de soluciones de  $(P_\lambda)$ :

**Definición 15** Para cada natural  $\beta$  definimos la función real  $v_\beta$  en  $[a, b]$  por

$$v_\beta(x) := \frac{-1}{2}(x - p_k)(x - p_{k+1}), \text{ si } p_k \leq x \leq p_{k+1}; \quad (0 \leq k < \beta)$$

donde  $p_k = a + k\frac{b-a}{\beta}$ , ( $k = 0, 1, \dots, \beta$ ).

Observemos que la función  $v_\beta$  resulta de "pegar"  $\beta$  parábolas positivas con ceros  $p_k$  y  $p_{k+1}$ . En virtud de la Nota 10, éstas son soluciones positivas de  $(P_\lambda)$  tomando como intervalo  $[a, b] = [p_k, p_{k+1}]$ . Obsérvese también que, exceptuando el caso  $\beta = 1$  estudiado en la Nota 10, ninguna de estas funciones son derivables y, por tanto, nunca serán soluciones de ningún problema  $(P_\lambda)$  en todo  $[a, b]$ .

Con esta notación, y haciendo un minucioso estudio sobre las longitudes de los subintervalos con signo constante de las soluciones mencionadas en la Proposición 14, es posible describir el comportamiento de las tres curvas de soluciones en el espacio  $\mathbb{R} \times C([a, b])$  que aparecen en la citada proposición.

**Nota 16** Sea  $\beta \in \mathbb{N}$ . Las aplicaciones de  $(\lambda_{2\beta}, +\infty)$  en  $C([a, b])$  que a cada  $\lambda$  le hacen corresponder  $u_\lambda^{(\beta+1)+, \beta-}$ ,  $u_\lambda^{\beta+, \beta-}$  y  $u_\lambda^{\beta-, \beta+}$  respectivamente, son continuas. Además, se tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{2\beta}^+} u_\lambda^{(\beta+1)+, \beta-}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{2\beta}^+} u_\lambda^{\beta+, \beta-}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{2\beta}^+} u_\lambda^{\beta-, \beta+}(x) = w_\beta(x),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda^{(\beta+1)+, \beta-}(x) = v_{\beta+1}(x);$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda^{\beta+, \beta-}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda^{\beta-, \beta+}(x) = v_\beta(x);$$

donde todos los límites tomados son uniformes en  $x \in [a, b]$ .

En definitiva, hemos concluido que de cada solución  $w_\beta$  ( $\beta \geq 2$ ) "bifurcan" al menos 3 ramas de soluciones, con comportamiento en  $+\infty$  determinado. Puesto que, como ha sido estudiado, de  $w_1$  salen 4 ramas de soluciones, cabe pensar que, también para  $\beta \geq 2$ , son exactamente 4 las ramas que bifurcan desde cada  $w_\beta$ . En efecto, la cuarta rama está formada por las soluciones que toman valores negativos en  $\beta$  subintervalos y positivos en  $\beta - 1$  subintervalos. Estudiamos ésta aparte porque en este caso, y en contraste con el caso  $\beta = 1$ , la cuarta rama "empieza retrocediendo hasta un determinado valor para girar irremisiblemente hasta el infinito".

Para el análisis de este tipo de soluciones retomamos la ecuación (1.8) en la que se trataba de, fijado  $\lambda > 0$ , encontrar el número de soluciones de  $p(m) = b - a$  para  $m < \frac{-2}{\lambda}$ . Recordemos que estamos analizando el caso  $\alpha = \beta - 1$ ;  $\beta > 1$ . En este caso, la función  $p$  es estrictamente decreciente en el intervalo  $\left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}}{\lambda}\right)$  y estrictamente creciente en  $\left(\frac{-1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}}{\lambda}, \frac{-2}{\lambda}\right)$ . Dado que

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} p(m) = +\infty ;$$

$$p\left(\frac{-1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}}{\lambda}\right) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \left[ \sqrt{\beta-1} + \beta \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{\beta-1} \right) \right] ;$$

$$\lim_{m \rightarrow \frac{-2}{\lambda}^-} p(m) = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\lambda}},$$

se obtiene que, si definimos

$$\mu_\beta := \frac{[2(\sqrt{\beta-1} + \beta(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{\beta-1}))]^2}{(b-a)^2} \quad (\beta \in \mathbb{N}), \quad (1.9)$$



entonces  $\mu_1 = \lambda_1$ ,  $\lambda_{2\beta-1} < \mu_\beta < \lambda_{2\beta} \forall \beta > 1$  y la ecuación  $p(m) = b - a$  tiene:

- solución (única) en  $\left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}}{\lambda}\right)$  si, y sólo si  $\lambda > \mu_\beta$ .
- solución (única) en  $\left[\frac{-1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}}{\lambda}, \frac{-2}{\lambda}\right)$  si, y sólo si  $\mu_\beta \leq \lambda < \lambda_{2\beta}$ .

En resumen, hemos probado que

**Proposición 17** Sean  $\lambda > 0$  y  $\beta > 1$  un número natural. Entonces el problema  $(P_\lambda)$  tiene solución con ceros simples, con  $\beta$  subintervalos donde es negativa y  $\beta - 1$  donde es positiva

- de mínimo  $m < \frac{-1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}}{\lambda}$  si, y sólo si  $\lambda > \mu_\beta$ . A dicha solución, única de este tipo, la notaremos por  $u_\lambda^{\beta-, (\beta-1)+, \rightarrow}$ .
- de mínimo  $m \in \left[\frac{-1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}}{\lambda}, \frac{-2}{\lambda}\right)$  si, y sólo si  $\mu_\beta \leq \lambda < \lambda_{2\beta}$ . A dicha solución, única de este tipo, la notaremos por  $u_\lambda^{\beta-, (\beta-1)+, \leftarrow}$ . ■

De nuevo, un análisis pormenorizado de las longitudes de los subintervalos de positividad y de negatividad de estas soluciones permite obtener las siguientes propiedades asintóticas de la curva formada por dichas soluciones:

**Nota 18** Sea  $\beta > 1$  un número natural. Las aplicaciones de  $(\mu_\beta, +\infty)$  y  $[\mu_\beta, \lambda_{2\beta})$  en  $C([a, b])$  que a cada  $\lambda$  le hacen corresponder  $u_\lambda^{\beta-, (\beta-1)+, \rightarrow}$  y  $u_\lambda^{\beta-, (\beta-1)+, \leftarrow}$  respectivamente, son continuas. Además, se tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu_\beta^+} u_\lambda^{\beta-, (\beta-1)+, \rightarrow}(x) = u_{\mu_\beta}^{\beta-, (\beta-1)+, \leftarrow}(x)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_{\lambda}^{\beta-, (\beta-1)+, \rightarrow}(x) = v_{\beta-1}(x); \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{2\beta}^-} u_{\lambda}^{\beta-, (\beta-1)+, \leftarrow}(x) = w_{\beta}(x);$$

donde todos los límites anteriores son uniformes en  $x \in [a, b]$ .

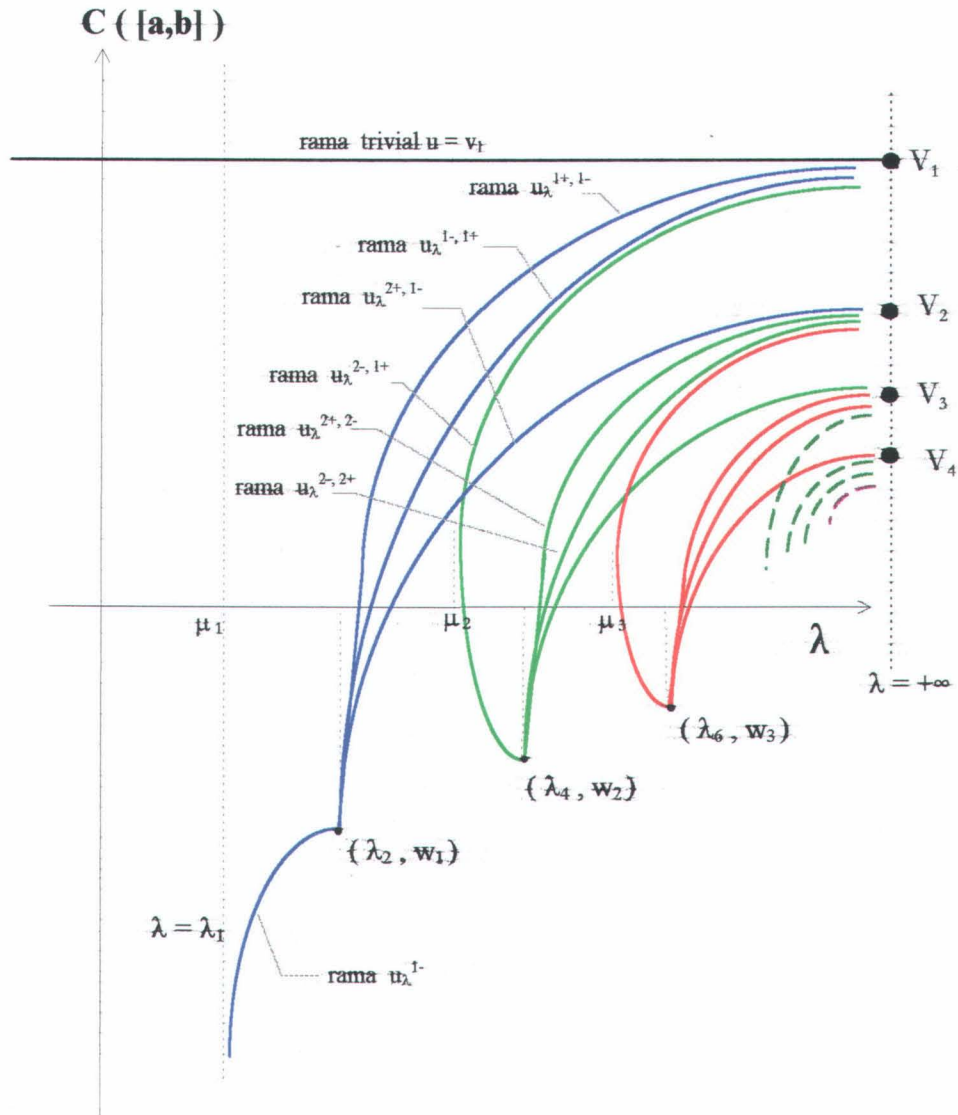
Estamos ya en disposición de obtener un resultado de multiplicidad de solución para  $(P_{\lambda})$ . En efecto, de las proposiciones anteriores se deduce el siguiente resultado de multiplicidad para  $(P_{\lambda})$ :

**Corolario 19** Sea  $\beta \in \mathbb{N}$ . Consideremos los números  $\mu_{\beta}$  definidos por (1.9). El problema  $(P_{\lambda})$  tiene exactamente

- 1 solución si  $\lambda < \lambda_1 = \mu_1$ ;
- $4\beta - 3$  soluciones si  $\lambda = \mu_{\beta}$ ;
- $4\beta - 2$  soluciones si  $\mu_{\beta} < \lambda \leq \lambda_{2\beta}$ ;
- $4\beta$  soluciones si  $\lambda_{2\beta} < \lambda < \mu_{\beta+1}$ . ■

A modo de resumen, y reconociendo de antemano la imposibilidad de representar correctamente en el plano el espacio  $\mathbb{R} \times C([a, b])$ , podemos concluir de los resultados expuestos a lo largo de esta sección, que la estructura del conjunto de los pares  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C([a, b])$ , tal que  $u$  es solución de  $(P_{\lambda})$  es como se muestra en la Figura 1. En ésta vemos que existe una rama de soluciones triviales  $\{(\lambda, v_1); \lambda \in \mathbb{R}\}$  y una sucesión de puntos  $(\lambda_{2\beta}, w_{\beta})$  ( $\beta \in \mathbb{N}$ ), de los cuales "brotan" cuatro ramas de soluciones. En el caso  $\beta > 1$ , tres de estas ramas "van" directamente hacia la derecha, mientras que la cuarta empieza retrocediendo hasta un determinado valor y después gira hacia la derecha indefinidamente. Por ello, en las tres primeras ramas habrá unicidad de solución para cada  $\lambda > \lambda_{2\beta}$ , mientras que en la cuarta existe un intervalo de valores de  $\lambda$ 's,

Figura 1  
Soluciones de  $(P_\lambda)$



concretamente  $(\mu_\beta, \lambda_{2\beta})$ , para los cuales hay dos soluciones. Por el contrario, si  $\beta = 1$ , la cuarta rama "retrocede hasta  $(\lambda_1, -\infty)$ ", y por tanto en las cuatro ramas habrá unicidad de solución para cada valor  $\lambda$ .

Cuando  $\lambda$  tiende a  $+\infty$ , estas ramas tienden hacia unas funciones  $v_\beta$  (no soluciones de ningún problema  $(P_\lambda)$  para  $\beta > 1$ ), de modo que todas las ramas quedan "entrelazadas". También observamos que tanto las funciones  $w_\beta$  como las  $v_\beta$  tienden a cero (uniformemente) cuando  $\beta$  tiende a  $+\infty$ .

Observemos, además, que cada rama está formada por soluciones con ceros simples y cuyos subintervalos de signo constante tienen la misma naturaleza, en el sentido de empezar teniendo el mismo signo y tener el mismo número de ceros. Estas ramas se unirán entre sí en los casos críticos: las soluciones con ceros no simples, que son exactamente las funciones  $w_\beta$ .

Generalmente, cuando obtenemos un resultado de existencia de una rama de soluciones de un determinado problema, cabe pensar en un conjunto homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . El ejemplo anterior muestra, aún en los casos más sencillos que podamos imaginar, que esto no tiene por qué ser así. Concretamente, en el ejemplo anterior, se obtienen distintos puntos de bifurcación secundarios.

Por último, me gustaría hacer una interpretación de por qué precisamente son 4 las ramas obtenidas. Hablando informalmente, podríamos decir que cada solución  $w_\beta$  (que tiene derivada en los extremos nula) se puede "deformar" de cuatro maneras diferentes, según las derivadas en los extremos sean positivas o negativas, lo que automáticamente determinará el número y el orden de los intervalos de positividad y de negatividad, que es lo que caracteriza a cada rama.

### I.3. El problema de Neumann.

En esta sección nos proponemos estudiar el problema con condiciones de contorno nulas de tipo Neumann. Nos limitaremos a enunciar los resultados sin demostrarlos, pues las demostraciones van en la misma línea que las desarrolladas para el problema de Dirichlet en la Sección 1. Concretamente consideramos el problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= f(u(x)), & a < x < b \\ u'(a) &= u'(b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (Q)$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función localmente lipschitziana.

El concepto de solución será análogo al considerado en la Sección 1.

De nuevo, clasificaremos las soluciones de (Q) según su máximo, su mínimo y el número de subintervalos de monotonía.

**Lema 20** *Sea  $f$  localmente lipschitziana y  $u$  una solución no constante de (Q). Entonces existe un natural  $n$  tal que  $u$  es estrictamente monótona en  $[a, a + \frac{b-a}{n}]$ . Este subintervalo determina de manera impar a la función  $u$  en todo el intervalo  $[a, b]$ ; i.e.*

$$u(x) = (-1)^i u\left(x - i \frac{b-a}{n}\right), \quad \forall x \in \left(a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}\right], \quad 1 \leq i < n.$$

■

Es decir, cualquier solución  $u$  no constante de (Q), contiene un número finito de subintervalos de monotonía, siendo estos subintervalos de idéntica longitud. El comportamiento de  $u$  en el primer subintervalo de monotonía determina a  $u$  en el resto de los subintervalos.

**Teorema 21** *Sea  $f$  localmente lipschitziana,  $m, M \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces (Q) admite solución no constante con  $n$  subintervalos de monotonía de mínimo  $m$  y máximo  $M$  si, y sólo si se verifican*

$$m < M; \quad f(m) < 0 < f(M); \quad F(s) < F(m) = F(M), \quad \forall s \in (m, M)$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_m^M \frac{ds}{\sqrt{F(M) - F(s)}} = \frac{b-a}{n}.$$

Además, en este caso hay exactamente dos soluciones de este tipo, según la solución sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente en  $[a, a + \frac{b-a}{n}]$ . ■

#### I.4. Problema de Dirichlet con no-linealidad continua.

En la Sección 1 hemos tratado el problema  $(P)$  donde  $f$  era cualquier función localmente lipschitziana. En esta sección pretendemos analizar este problema cuando a  $f$  sólo le exigimos continuidad. La principal dificultad con la que tropezamos es la falta de unicidad para los correspondientes problemas de valores iniciales. Recordemos que este argumento fue muy socorrido en la mayoría de resultados obtenidos en la Sección 1. Concretamente, supondremos

$(f^*)$   $f$  es una función continua e impar verificando  $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ .

El concepto de solución será el mismo que el considerado en la Sección 1. Del mismo modo, las soluciones se encontrarán a la postre en  $C^2[a, b]$ . De nuevo,  $F(s) = \int_0^s f(t) dt, \forall s \in \mathbb{R}$ . Clasificaremos las soluciones de  $(P)$  según su norma uniforme y su número de ceros.

Como fue observado en la Sección 1, la Proposición 1-i) es válida cuando sólo exigimos continuidad a  $f$ . De nuevo ésta será la clave para el estudio de  $(P)$ . Así, por ejemplo, se puede deducir el siguiente

**Lema 22** *Supongamos que  $f$  verifica  $(f^*)$ . Entonces cualquier solución no trivial de  $(P)$  tiene todos sus ceros simples. En particular, tiene un número finito de ceros.*

*Demostración.* Sea  $u$  una solución de  $(P)$  y  $x_0$  un cero no simple de  $u$ . Evaluando la función  $\frac{u^2}{2} + F \circ u$  en  $x = x_0$ , deducimos por la Proposición 1-i) que

$$F(u(x)) = \frac{-(u')^2(x)}{2} \leq 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.10)$$

De la imparidad de  $f$  y la positividad en  $\mathbb{R}^+$  se deduce que  $F(s) > 0$  para todo  $\forall s \neq 0$ . Esto, junto con (1.10), concluye que  $u \equiv 0$ . ■

Para la claridad en la exposición de los resultados, y siguiendo las ideas de la Sección 1, es interesante hacer la siguiente

**Definición 23** Para una función  $f$  verificando  $(f^*)$  y  $M > 0$  definimos la función

$$L(M) = \sqrt{2} \int_0^M \frac{ds}{\sqrt{F(M) - F(s)}}.$$

Comencemos estudiando las soluciones positivas.

**Lema 24** Sea  $f$  satisfaciendo  $(f^*)$  y  $M > 0$ . Entonces el problema  $(P)$  tiene solución positiva (o negativa) con norma uniforme  $M$  si, y sólo si

$$L(M) = b - a.$$

Además, en caso de existir una solución de este tipo, es única.

*Demostración.* Obsérvese que, de la imparidad de  $f$ , se deduce que  $u$  es solución de  $(P)$  si, y sólo si  $-u$  lo es. Por lo tanto, basta demostrar únicamente la parte correspondiente del Lema para soluciones positivas.

Observemos que si  $u$  una solución positiva de  $(P)$  y evaluamos la función  $\frac{u^2}{2} + F \circ u$  en el punto donde  $u$  alcanza su máximo, obtenemos, aplicando la Proposición 1-i), que

$$u'(x)^2 = 2[F(M) - F(u(x))], \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.11)$$

Demostremos a continuación que necesariamente  $u$  es simétrica (respecto de  $x = \frac{a+b}{2}$ ), i.e.

$$u(x) = u(a + b - x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Para ello basta demostrar que  $v(x) \equiv u(x) - u(a + b - x) = 0$ ,  $\forall x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ . Razonemos por contradicción. Efectivamente, si  $v \not\equiv 0$ , entonces existiría  $t_0 \in (a, \frac{a+b}{2})$  tal que  $v'(t_0) = 0 \neq v(t_0)$ . (Obsérvese que  $v(a) = v(\frac{a+b}{2}) = 0$ ). Así,  $u'(t_0) = -u'(a + b - t_0)$  y, por (1.11),  $F(u(t_0)) = F(u(a + b - t_0))$ . La monotonía de  $F$  implica que  $v(t_0) = u(t_0) - u(a + b - t_0) = 0$  lo cual es una contradicción y se concluye la simetría de  $u$ .

Además, teniendo en cuenta que  $-u''(x) = f(u(x)) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , deducimos que  $u' > 0$  en  $(a, \frac{a+b}{2})$  y en consecuencia de (1.11) se obtiene

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{2[F(M) - F(u(x))]} } = 1, \quad \forall x \in [a, \frac{a+b}{2}].$$

Integrando esta expresión entre  $a$  y  $\frac{a+b}{2}$  se deduce  $L(M) = b - a$ , obteniéndose la condición necesaria para la existencia de solución. La unicidad de una tal solución también puede ser deducida integrando la expresión mencionada entre  $a$  y un valor arbitrario  $x \in (a, \frac{a+b}{2})$ .

Para la condición suficiente, supongamos que  $L(M) = b - a$ . Entonces, se puede construir explícitamente una solución positiva de  $(P)$  con máximo  $M$ . Esto se puede hacer de manera análoga a la construcción que hacemos en la demostración del Lema 3-i). ■

Hemos caracterizado la existencia de soluciones con signo constante de  $(P)$ . Dado que, por el Lema 22, cualquier solución no trivial tiene un número finito de ceros, basta con estudiar la solución en cada uno de los subintervalos donde mantiene el signo. Estamos por lo tanto en disposición de enunciar el siguiente



**Teorema 25** *Sea  $f$  satisfaciendo  $(f^*)$ ;  $M > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces el problema  $(P)$  tiene solución con norma uniforme  $M$  y con exactamente  $n + 1$  ceros en  $[a, b]$  si, y sólo si*

$$L(M) = \frac{b - a}{n} .$$

*Además, en este caso, existen exactamente 2 soluciones, una opuesta a la otra.*

*Demostración.* El caso particular  $n = 1$  es el Lema 24. Supongamos, por tanto,  $n > 1$ .

Empecemos por la condición necesaria para la existencia de solución. Sea  $u$  una solución de  $(P)$  con norma uniforme  $M$  y con exactamente  $n + 1$  ceros  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$ . Teniendo en cuenta que  $F(M) = F(-M)$  y evaluando la función  $\frac{u^2}{2} + F \circ u$  en un punto  $x = x_0 \in (a, b)$  tal que  $|u(x_0)| = M$ , obtenemos, aplicando la Proposición 1-i), que

$$u'(x)^2 = 2[F(M) - F(u(x))], \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.12)$$

Así, si  $\bar{M}$  es cualquier valor crítico de  $u$ , se deduce que  $F(\bar{M}) = F(M)$ . Teniendo en cuenta que  $F$  es par, estrictamente decreciente en  $\mathbb{R}^-$  y estrictamente creciente en  $\mathbb{R}^+$  se obtiene que  $\bar{M} = \pm M$ . En particular si llamamos  $M_1$  al mínimo de  $u$ ,  $M_2$  a su máximo (que serán respectivamente estrictamente negativo y estrictamente positivo pues  $n > 1$ ) se verifica  $M = M_2 = -M_1$ .

Tomemos un subintervalo arbitrario  $(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  ( $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ ) en el que  $u$  tiene signo constante. Por lo anteriormente expuesto, cambiando, si es necesario,  $u$  por  $-u$ , podemos suponer que  $u > 0$  en este subintervalo y que

$$\max_{\alpha_i < x < \alpha_{i+1}} u(x) = M .$$

Aplicando la Proposición 24 al intervalo  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  deducimos que

$$L(M) = \alpha_{i+1} - \alpha_i .$$

Por consiguiente  $\alpha_{i+1} - \alpha_i$  es constante para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  y, en consecuencia, su valor debe ser  $\frac{b-a}{n}$ , lo que concluye la condición necesaria.

Recíprocamente, supongamos  $L(M) = \frac{b-a}{n}$ . Construimos una solución de (P) con norma uniforme  $M$  y exactamente  $n+1$  ceros del siguiente modo: Si  $a \leq x \leq a + \frac{b-a}{n}$ , por la Proposición 24, sea  $u(x)$  la única solución positiva de máximo  $M$  del problema del tipo (P) en el intervalo  $[a, a + \frac{b-a}{n}]$ . Extendemos  $u(x)$  a todo el intervalo  $[a, b]$  por imparidad; es decir

$$u(x) = (-1)^i u(x - i \frac{b-a}{n}), \quad \forall x \in (a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}], \quad 1 \leq i < n.$$

Es de inmediata comprobación que  $u$  es una de las soluciones requeridas.

Por otra parte, de la existencia de exactamente dos soluciones (opuestas entre sí) para el caso  $n = 1$ , se puede inferir el mismo resultado de multiplicidad para cualquier  $n > 1$ . ■

### I.5. Sobre un problema abierto de Ambrosetti, Brézis y Cerami.

Nos proponemos en esta sección resolver un problema abierto planteado por A. Ambrosetti, H. Brézis y G. Cerami en [3] (véase Remark (d) de la Sección 6). Éste consiste en obtener un estudio pormenorizado de la estructura del conjunto de soluciones del problema de contorno no lineal

$$\left. \begin{aligned} -u'' &= \lambda |u|^{q-1} u + |u|^{p-1} u, & a < x < b \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (P_\lambda)$$

donde  $0 < q < 1 < p$  y  $\lambda \geq 0$ .

Observamos que la no-linealidad  $f_\lambda(s) = \lambda|s|^{q-1}s + |s|^{p-1}s$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) se obtiene como combinación de una función cóncava y otra convexa. Además, no es localmente lipschitziana en el origen (para  $\lambda > 0$ ), lo que complica el estudio de  $(P_\lambda)$ . Sin embargo, dado que es continua, impar y estrictamente positiva en los valores estrictamente positivos, se puede aplicar la teoría desarrollada en la Sección 4. En este caso, la primitiva  $F_\lambda(s) = \frac{\lambda|s|^{q+1}}{q+1} + \frac{|s|^{p+1}}{p+1}$  para cualquier real  $s$ .

Para facilitar la exposición de los resultados será de gran utilidad hacer las siguientes definiciones

**Definición 26** Sean

$$M_1 = \left[ \frac{2(p+1)}{(b-a)^2} \left( \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^{p+1}}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{p-1}} ; \quad M_n = n^{\frac{2}{p-1}} M_1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Asimismo, definimos para cada  $M > 0$  y  $\lambda \geq 0$  la función

$$\Psi(M, \lambda) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\frac{\lambda M^{q-1}}{q+1} (1-s^{q+1}) + \frac{M^{p-1}}{p+1} (1-s^{p+1})}}.$$

Para cada  $M \in (0, M_1]$  definimos  $\lambda_1(M)$  como el único número positivo satisfaciendo  $\Psi(M, \lambda_1(M)) = b - a$ .

**Nota 27** Obsérvese que si consideramos la función  $f_\lambda$  en la Definición 23, entonces  $L(M)$  es la función (de  $M$ )  $\Psi(M, \lambda)$ . Esta es la razón que motiva la definición de la función  $\lambda_1(M)$ .

**Nota 28** La función  $\lambda_1(M)$  está bien definida. Efectivamente, dado que la función  $\Psi(M, \lambda)$  es continua, estrictamente decreciente en  $\lambda \geq 0$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Psi(M, \lambda) = 0$ ,  $\forall M > 0$ ; se deduce que la existencia de  $\lambda$  tal que  $\Psi(M, \lambda) = b - a$  equivale a

$$\Psi(M, 0) = (b-a) \left( \frac{M_1}{M} \right)^{\frac{p-1}{2}} \geq b-a,$$

es decir, si, y sólo si  $M \leq M_1$ . De hecho, el intervalo  $(0, M_1]$  es el más amplio en el que podemos definir la función  $\lambda_1(M)$ . Por otra parte, se puede comprobar que dicha función es continua.

A continuación podemos enunciar un resultado que describirá la estructura de todas las soluciones  $(\lambda, u)$  de  $(P_\lambda)$ .

**Teorema 29** Sea  $M > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

- i) Si  $0 < M \leq M_n$  entonces  $(P_\lambda)$  tiene solución de  $(P_\lambda)$  con norma uniforme  $M$  y con exactamente  $n + 1$  ceros en  $[a, b]$  si, y sólo si  $\lambda = \lambda_n(M) \equiv n^{\frac{2(p-q)}{p-1}} \lambda_1\left(\frac{M}{n^{\frac{2}{p-1}}}\right)$ . Además, si se satisface esta condición, existen exactamente dos soluciones de este tipo, una opuesta a la otra.
- ii)  $\forall M > M_n$  no existe ninguna solución de  $(P_\lambda)$  con norma uniforme  $M$  y con exactamente  $n + 1$  ceros en  $[a, b]$  para cualquier valor de  $\lambda \geq 0$ .

*Demostración.* El caso  $n = 1$  es una consecuencia inmediata del Teorema 25 y las Notas 27 y 28.

El caso  $n > 1$  se puede deducir fácilmente de este mismo Teorema y de la identidad

$$\Psi(M, \lambda) = \frac{1}{n} \Psi\left(\frac{M}{n^{\frac{2}{p-1}}}, \frac{\lambda}{n^{\frac{2(p-q)}{p-1}}}\right),$$

que proporciona la equivalencia entre las ecuaciones

$$\Psi(M, \lambda) = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad \Psi\left(\frac{M}{n^{\frac{2}{p-1}}}, \frac{\lambda}{n^{\frac{2(p-q)}{p-1}}}\right) = b-a. \blacksquare$$

Podemos, por tanto, describir perfectamente la estructura de los pares  $\{(\lambda, u) \in \mathbb{R}_0^+ \times C[a, b] : u \text{ es solución de } P_\lambda\}$ . En concreto, si representamos los pares  $(\lambda, \|u\|_\infty)$  en el plano, obtenemos exactamente

las curvas  $(M, \lambda_n(M))$ . Cada punto de estas curvas representará a dos soluciones, una opuesta a la otra. (Ver Figura 2).

Puesto que todas estas curvas son, en algún sentido, homogéneas, toda la información de la estructura del conjunto de soluciones reside en el comportamiento de la función  $M \mapsto \lambda_1(M)$ ,  $0 < M \leq M_1$ . Aquí ofrecemos algunos resultados que ayudan a comprender mejor dicho comportamiento:

- i) Usando  $\Psi(M, \lambda_1(M)) = b - a$  y las desigualdades  $\frac{1-s^{p+1}}{p+1} < \frac{1-s^{q+1}}{q+1}$ ;  $1 - s^{q+1} < 1 - s^{p+1}$ ,  $\forall s \in (0, 1)$ , se puede deducir

$$(q+1)g(M) < \lambda_1(M) < (p+1)g(M), \quad \forall M \in (0, M_1),$$

y

$$\bar{g}(M) < \lambda_1(M) < \bar{g}(M) + \frac{p-q}{p+1}M^{p-q}, \quad \forall M \in (0, M_1).$$

donde

$$g(M) = \frac{2}{(b-a)^2}M^{1-q} \left( \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^{p+1}}} \right)^2 - \frac{M^{p-q}}{p+1}, \quad 0 < M < M_1;$$

y

$$\bar{g}(M) = \frac{2(q+1)M^{1-q}}{(b-a)^2} \left( \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^{q+1}}} \right)^2 - M^{p-q}, \quad 0 < M < M_1.$$

- ii) De las anteriores estimas de  $\lambda_1(M)$  podemos estudiar el comportamiento de la función tanto en  $M = M_1$  como en  $M = 0$ .

$$\lambda_1(M_1) = 0; \quad \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\lambda_1(M)}{M^{1-q}} = \frac{2(q+1)}{(b-a)^2} \left( \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^{q+1}}} \right)^2.$$

iii) Finalmente, para concluir, veamos que  $\lambda_1(M)M^{q-1} + M^{p-1}$  es estrictamente creciente y  $\lambda_1(M)M^{q-1} + \frac{q+1}{p+1}M^{p-1}$  es estrictamente decreciente. En efecto, si  $0 < M < \bar{M} \leq M_1$ , usando que  $\Psi(M, \lambda_1(M)) = \Psi(\bar{M}, \lambda_1(\bar{M}))$ , podemos asegurar la existencia de  $s_0 \in (0, 1)$  tal que

$$\frac{\lambda_1(M)M^{q-1}}{q+1}(1 - s_0^{q+1}) + \frac{M^{p-1}}{p+1}(1 - s_0^{p+1}) = \frac{\lambda_1(\bar{M})\bar{M}^{q-1}}{q+1}(1 - s_0^{q+1}) + \frac{\bar{M}^{p-1}}{p+1}(1 - s_0^{p+1}).$$

Así

$$\frac{\lambda_1(M)M^{q-1} - \lambda_1(\bar{M})\bar{M}^{q-1}}{\bar{M}^{p-1} - M^{p-1}} = \frac{q+1}{p+1} \frac{1 - s_0^{p+1}}{1 - s_0^{q+1}} \in \left( \frac{q+1}{p+1}, 1 \right).$$

i.e.

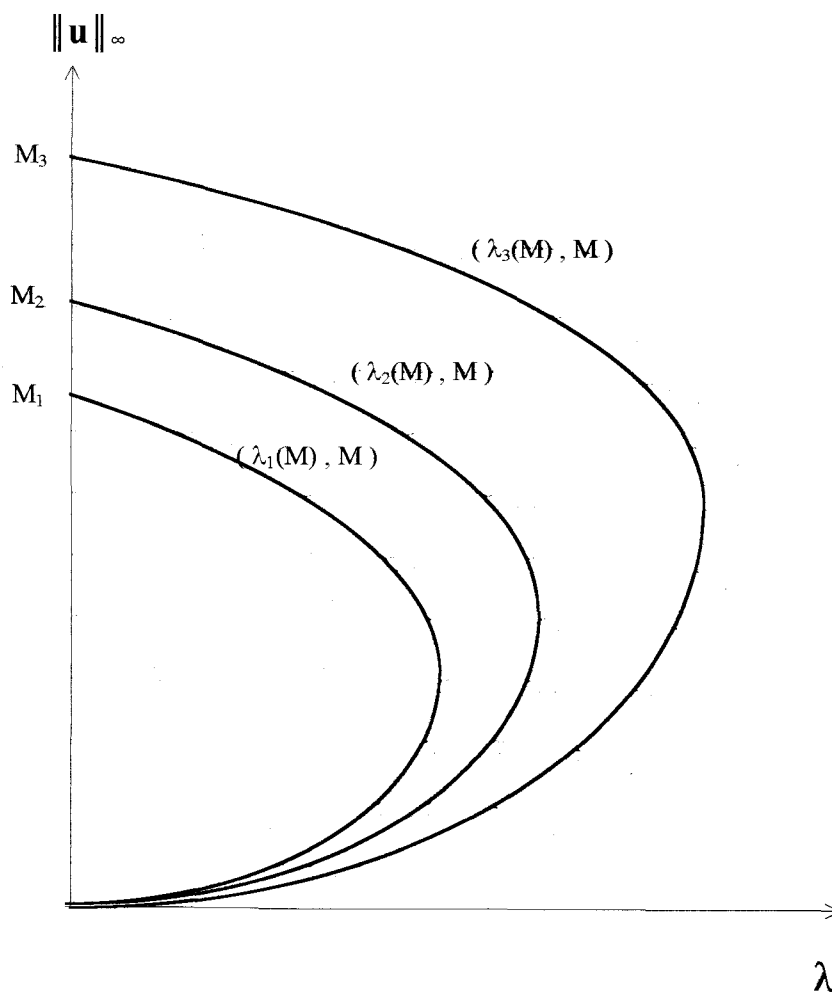
$$\lambda_1(M)M^{q-1} + M^{p-1} < \lambda_1(\bar{M})\bar{M}^{q-1} + \bar{M}^{p-1}$$

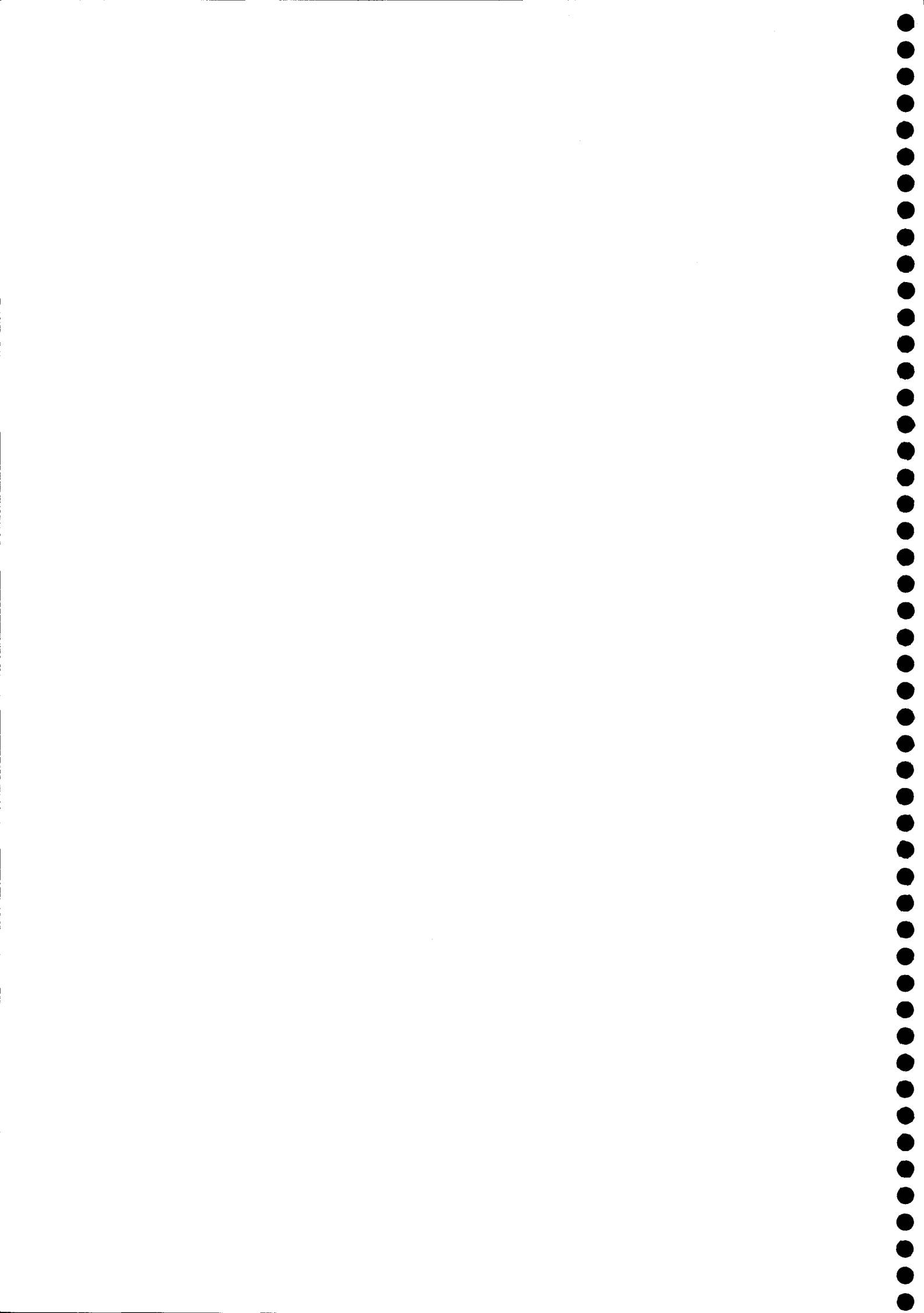
y

$$\lambda_1(M)M^{q-1} + \frac{q+1}{p+1}M^{p-1} > \lambda_1(\bar{M})\bar{M}^{q-1} + \frac{q+1}{p+1}\bar{M}^{p-1},$$

que representa la monotonía requerida.

Figura 2  
Soluciones de  $(P_\lambda)$

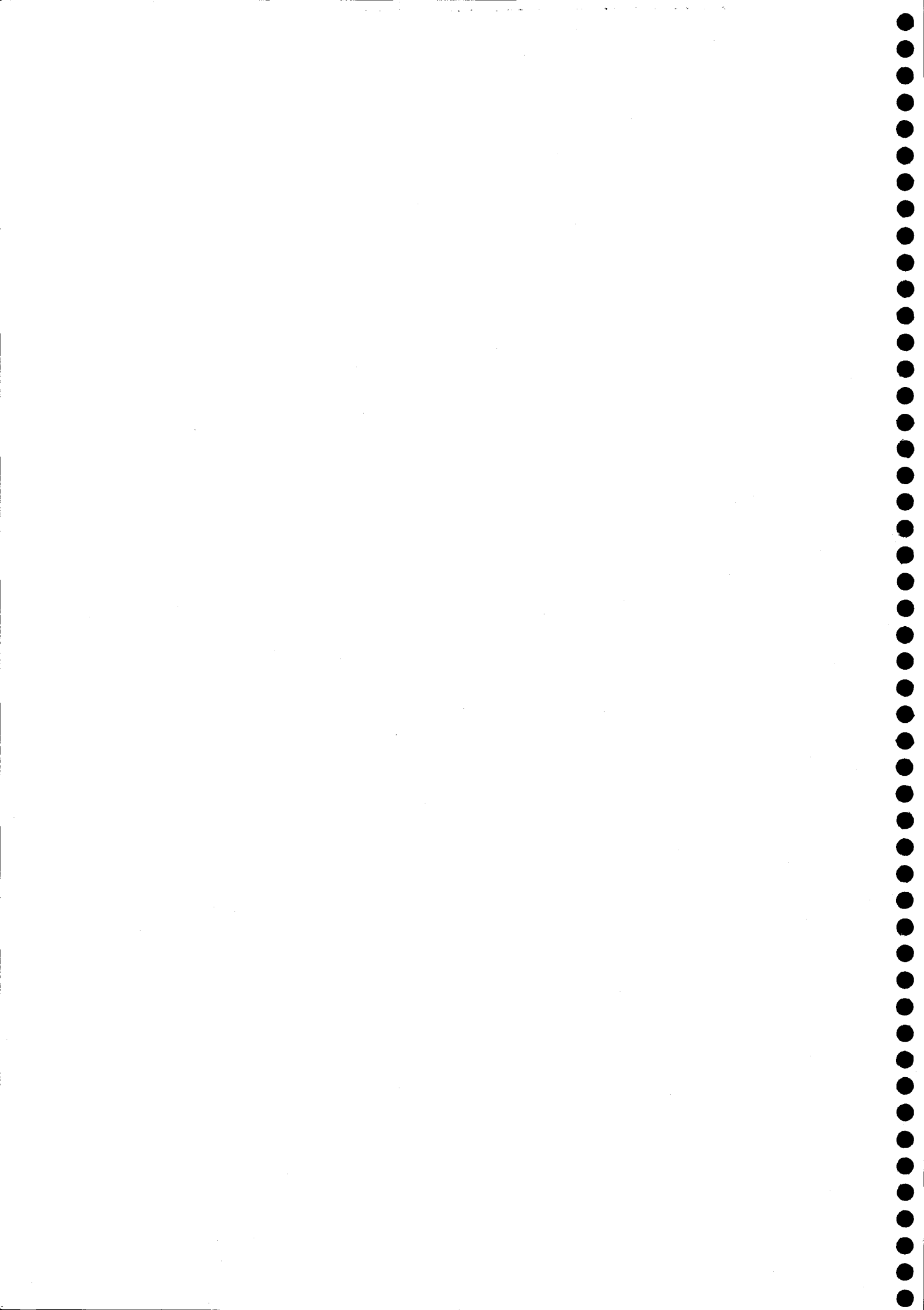






## Capítulo II

### PROBLEMA GENERAL DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL.



## II.1. Planteamiento y enunciado de los resultados principales.

En este capítulo tratamos la existencia de solución del siguiente problema de Neumann:

$$\left. \begin{aligned} -u'' &= f(x, u) + h(x), \quad x \in (0, 1) \\ u'(0) &= u'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (P)$$

donde  $h \in L^2(0, 1)$  y  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . En este caso, por solución de (P) entenderemos una función  $u \in H^1(0, 1)$  (el espacio de Sobolev usual), satisfaciendo

$$\int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f(x, u)v dx - \int_0^1 h v dx = 0, \quad \forall v \in H^1(0, 1);$$

es decir, consideraremos soluciones en el sentido débil. Recordemos que en el caso que  $h$  sea continua, los conceptos de solución débil y solución clásica son equivalentes. La principal hipótesis que supondremos sobre  $f$  es la siguiente: existen  $\varepsilon > 0$  y  $s' < 0$  tales que  $\forall s \leq s', \forall x \in [0, 1]$  se verifica

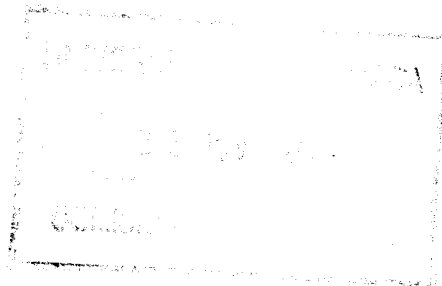
$$(f_1) \quad \frac{f(x, s)}{s} \leq \frac{\pi^2}{4} - \varepsilon.$$

Observemos que, cuando exista  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s}$  uniformemente en  $x \in [0, 1]^1$ , una condición equivalente para esta hipótesis es que dicho límite satisfaga

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s} < \frac{\pi^2}{4}.$$

De Figueiredo y Ruf [21] estudiaron este problema en el caso que el límite uniforme en  $x \in [0, 1]$ ,  $\lambda := \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s}$  es no negativo. Concretamente, ellos demuestran los siguientes teoremas:

<sup>1</sup>Este límite podría tomar el valor  $-\infty$ .



**Teorema A (De Figueiredo y Ruf, [21])** Supongamos que  $f$  verifica  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s} = \lambda \in (0, \frac{\pi^2}{4})$  (uniformemente en  $x \in [0, 1]$ ). Sea  $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ . Supongamos también que existen  $s_0 > 0$  y  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$  tales que

$$0 < F(x, s) \leq \theta s f(x, s), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \geq s_0. \quad (2.1)$$

Entonces, para cualquier  $h \in L^2(0, 1)$ , (P) tiene solución.

**Teorema B (De Figueiredo y Ruf, [21])** Supongamos que  $f$  verifica  $f(x, s) > 0$ ,  $\forall (x, s) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ ,  $\lim_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) = 0$  (uniformemente en  $x \in [0, 1]$ ) y la hipótesis (2.1). Entonces, dada  $h \in L^2(0, 1)$ , el problema (P) tiene solución si, y sólo si  $\int_0^1 h(x) dx < 0$ .

**Nota 1** La hipótesis (2.1) es una condición de superlinealidad de  $f$  que fue introducida por primera vez en [6]. Se puede deducir que dicha condición implica la existencia de  $K > 0$  tal que

$$f(x, s) \geq K s^{\frac{1}{\theta}-1}, \quad \forall s \geq s_0, \quad \forall x \in [0, 1]; \quad (2.2)$$

y, por tanto,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{s} = +\infty$  (uniformemente en  $x \in [0, 1]$ ).

Observemos que, bajo las hipótesis de los Teoremas A y B, la derivada de la no-linealidad  $f(x, \cdot)$  interacciona con todos los valores propios del operador  $\frac{-d^2}{dx^2}$  (con condiciones nulas de Neumann en el borde), salvo un número finito de ellos.

En este capítulo veremos que la condición técnica (2.1), e incluso la superlinealidad de  $f$  en  $+\infty$ , no son esenciales para la existencia de solución de (P). De hecho, sólo consideraremos la siguiente condición de tipo Landesman-Lazer [32]: existen  $\varepsilon > 0$  y  $s' < 0$  (que podemos suponer sin pérdida de generalidad que son los mismos que aparecen en la condición  $(f_1)$ ) tales que  $\forall s \leq s'$ ,  $\forall x \in [0, 1]$  se verifica

$$(f_2) \quad f(x, s) + \varepsilon \leq - \int_0^1 h(x) dx \leq f(x, s) - \varepsilon .$$

En analogía con los comentarios hechos para la hipótesis  $(f_1)$ , una condición equivalente para  $(f_2)$  es que existan los límites  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(x, s)$  uniformemente en  $x \in [0, 1]^2$  y verifiquen

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) < - \int_0^1 h(x) dx < \lim_{s \rightarrow +\infty} f(x, s)$$

Obsérvese que, en el caso que exista el límite uniforme en  $x \in [0, 1]$ ,  $\lambda := \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s} > 0$ , entonces la primera desigualdad de  $(f_2)$  es redundante. La condición  $(f_2)$  no es especialmente restrictiva. De hecho, si  $f(x, s) \equiv f(s)$  es una función estrictamente creciente, entonces se trata de una condición necesaria para la existencia de solución del problema  $(P)$ . Efectivamente, considerando en este caso una solución  $u$  de  $(P)$ , se obtiene, integrando la ecuación diferencial y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, que  $\int_0^1 f(u(x)) dx = - \int_0^1 h(x) dx$ , de donde se deduce, por la monotonía de  $f$ , que se satisface  $(f_2)$ .

Por otra parte, notemos que, bajo nuestras hipótesis, la no-linealidad  $f(x, \cdot)$  podría "atravesar" cualquier número (finito o infinito) de autovaleores de  $-d^2/dx^2$  en  $(0, 1)$  con condiciones de frontera de tipo Neumann. A continuación enunciamos nuestro principal resultado.

**Teorema 2** *Supongamos  $(f_1)$  y  $(f_2)$ . Entonces  $(P)$  tiene solución.*

Como se puede comprobar fácilmente, este teorema mejora fuertemente los Teoremas A y B. (Véase Corolarios 9, 10).

La prueba de este teorema está basada en métodos variacionales. Consideremos, por tanto, el funcional de Euler asociado a  $(P)$

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u')^2(x) dx - \int_0^1 F(x, u(x)) dx - \int_0^1 h(x)u(x) dx ,$$

<sup>2</sup>Estos límites podrían tomar el valor  $-\infty$  o  $+\infty$ .

para toda función  $u \in H^1(0,1)$ . Es bien conocido que  $I$  es de clase  $C^1$  con derivada (de Fréchet)  $I'(u)$  en cada  $u \in H^1(0,1)$  dada por

$$I'(u)(v) = \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f(x,u)v dx - \int_0^1 h v dx, \quad \forall v \in H^1(0,1).$$

Por consiguiente, los puntos críticos de  $I$  son exactamente las soluciones débiles de (P). Con el propósito de buscar este tipo de puntos, aplicaremos el Teorema de Paso de Montaña de Ambrosetti-Rabinowitz [6]. Para ello, necesitaremos previamente demostrar algunas propiedades geométricas y de compacidad del funcional  $I$ . Generalmente, y como se puede comprobar en una gran mayoría de trabajos basados en métodos variacionales, la naturaleza del problema determina la geometría del funcional de Euler, mientras que para obtener condiciones de compacidad se imponen hipótesis técnicas y, en ocasiones, poco naturales como, por ejemplo, (2.1). Por el contrario, aquí veremos que no necesitamos imponer ninguna condición técnica. De hecho, en la demostración de ambos tipos de propiedades usamos una caracterización natural e intrínseca de  $\pi^2/4$ :

**Teorema 3** Sea  $M := \{u \in H^1(0,1) : \max_{x \in [0,1]} u(x) = 0\}$ . Entonces

$$\min_{u \in M \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Además, las funciones minimizantes son  $\{a \sin \frac{\pi}{2}x : a \in \mathbb{R}^-\}$  y  $\{a \cos \frac{\pi}{2}x : a \in \mathbb{R}^-\}$ .

En [21] se obtiene una caracterización variacional equivalente de este valor:

**Teorema C (De Figueiredo y Ruf, [21])** Sea  $X_2 := \{u \in H^1(0,1) : \int_0^1 u dx = 0\}$ . Entonces

$$\frac{\pi^2}{4} = \min_{u \in X_2 \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx + \|u\|_\infty^2}.$$

Además, las funciones minimizantes son  $\left\{ a \left( \frac{2}{\pi} - \sin \frac{\pi}{2} x \right) : a \in \mathbb{R} \right\}$  y  $\left\{ a \left( \frac{2}{\pi} - \cos \frac{\pi}{2} x \right) : a \in \mathbb{R} \right\}$ .

Para probar la equivalencia entre los Teoremas 3 y C, basta considerar la siguiente biyección entre  $M$  y  $X_2$ : a cada  $u \in M$  le hacemos corresponder la función  $u - \int_0^1 u dx$ ; cuya inversa es la que hace corresponder a cada  $u \in X_2$  la función  $u - \max_{x \in [0,1]} u(x)$ . En la demostración del Teorema C, los autores utilizan técnicas complejas que abarcan el concepto de subdiferenciabilidad. En la siguiente sección ofrecemos una demostración del Teorema 3 mucho más breve, utilizando técnicas muy elementales.

Posteriormente, y utilizando este teorema, demostraremos que bajo las hipótesis  $(f_1)$  y  $(f_2)$ , el funcional  $I$  satisface la condición de compacidad de Palais-Smale. Esto, junto con las propiedades geométricas que verificaremos, conducirá a la demostración del Teorema 2.

Finalmente, extenderemos los resultados obtenidos al caso de problemas de contorno asociados al operador p-laplaciano.

## II.2. Un problema de minimización.

En esta sección demostraremos el Teorema 3. Para comodidad del lector, demostraremos previamente algunos lemas.

**Lema 4** Sea

$$\gamma := \inf_{u \in M \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}.$$

Entonces, este ínfimo se alcanza, es decir, existe una función  $u_0 \in M \setminus \{0\}$  tal que  $\frac{\int_0^1 (u_0')^2 dx}{\int_0^1 u_0^2 dx} = \gamma > 0$ .

*Demostración.* Sea  $\{u_n\} \subset M \setminus \{0\}$  una sucesión minimizante. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\int_0^1 u_n^2 dx = 1$ . Entonces  $\int_0^1 (u_n')^2 dx \rightarrow \gamma$  y por tanto,  $\{\|u_n\|_{H^1}\}$  está acotada. Así, pasando a una parcial (a la que, por comodidad, seguiremos llamando  $\{u_n\}$ ) obtenemos que  $u_n \rightharpoonup u_0$  en  $H^1(0,1)$  y  $u_n \rightarrow u_0$  en  $L^2(0,1)$  y  $L^\infty(0,1)$ . De la convergencia fuerte en  $L^2(0,1)$  y  $L^\infty(0,1)$  se deduce que  $\int_0^1 u_0^2 dx = 1$  y  $u_0 \in M$ . La convergencia débil en  $H^1(0,1)$  implica  $\int_0^1 (u_0')^2 dx \leq \liminf \int_0^1 (u_n')^2 dx = \gamma$ . Por consiguiente,  $u_0$  es una función minimizante. Puesto que  $u_0$  no es constante, se obtiene que  $\gamma > 0$ . ■

**Nota 5** De manera análoga definimos para cualquier intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  el conjunto de funciones  $M_{a,b} = \{u \in H^1(a,b) : \max_{x \in [a,b]} u(x) = 0\}$  y el valor

$$\gamma_{a,b} := \inf_{u \in M_{a,b} \setminus \{0\}} \frac{\int_a^b (u')^2 dx}{\int_a^b u^2 dx}.$$

Dado que la aplicación  $u \mapsto \tilde{u}(x) := u\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$  es una biyección entre  $M$  y  $M_{a,b}$  se deduce que

$$\gamma_{a,b} = \frac{\gamma}{(b-a)^2}. \quad (2.3)$$

**Lema 6** Si  $u_0$  es un minimizante del Lema 4, entonces  $u_0(x) < 0$  para cualquier  $x \in (0,1)$ .

*Demostración.* Razonemos por reducción al absurdo y supongamos, por tanto, que existe  $x_0 \in (0,1)$  tal que  $u_0(x_0) = 0$ . Dado que la restricción de  $u_0$  a  $[0, x_0]$  (respectivamente  $[x_0, 1]$ ) pertenece a  $M_{0,x_0}$  (respectivamente  $M_{x_0,1}$ ), se obtiene por (2.3) que

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\int_0^1 (u_0')^2 dx}{\int_0^1 u_0^2 dx} = \frac{\int_0^{x_0} (u_0')^2 dx + \int_{x_0}^1 (u_0')^2 dx}{\int_0^1 u_0^2 dx} \\ &\geq \frac{\frac{\gamma}{x_0^2} \int_0^{x_0} u_0^2 dx + \frac{\gamma}{(1-x_0)^2} \int_{x_0}^1 u_0^2 dx}{\int_0^1 u_0^2 dx} \geq \min \left\{ \frac{\gamma}{x_0^2}, \frac{\gamma}{(1-x_0)^2} \right\} > \gamma, \end{aligned}$$



lo cual es contradictorio. ■

**Demostración del Teorema 3.**

Observemos que no perdemos generalidad si suponemos que  $u_0 \in X_0 = \{u \in H^1(0, 1) : u(1) = 0\}$ . En efecto, si no fuera así, por el lema anterior,  $u_0(1) < \max_{x \in [0, 1]} u_0(x) = 0 = u_0(0)$  y bastaría considerar la función  $u_0(1 - x)$  en lugar de  $u_0(x)$ .

Por otra parte,  $\lambda = \pi^2/4$  es el primer autovalor del siguiente problema con condiciones de frontera de tipo mixto:

$$\left. \begin{aligned} -u'' &= \lambda u & x \in (0, 1) \\ u'(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que puede ser caracterizado como

$$\min_{u \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{\pi^2}{4};$$

siendo  $\{a \cos \frac{\pi}{2}x : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$  el conjunto de las funciones minimizantes. Dado que este conjunto contiene funciones de  $M \setminus \{0\}$ , concluimos que

$$\begin{aligned} \gamma &= \min_{u \in M \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \min_{u \in M \cap X_0 \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \\ &= \min_{u \in X_0 \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{\pi^2}{4}, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema. ■

### II.3. La condición de Palais-Smale.

Recordemos que un funcional  $I : H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la condición de Palais-Smale si *para toda sucesión*  $\{u_n\} \subset H^1(0, 1)$  *con*  $\{I(u_n)\}$  *acotado y*  $I'(u_n) \rightarrow 0$  *en*  $H^{-1}(0, 1)$ , *admite una parcial convergente.* Aquí probaremos una condición aún más fuerte.

**Lema 7** *Supongamos*  $(f_1)$  *y*  $(f_2)$  *y sea*  $\{u_n\} \subset H^1(0, 1)$  *una sucesión verificando*  $I'(u_n) \rightarrow 0$  *en*  $H^{-1}(0, 1)$ . *Entonces*  $\{u_n\}$  *admite una parcial convergente.*

*Demostración.* Consideremos una sucesión  $\{u_n\} \subset H^1(0, 1)$  satisfaciendo

$$\left| \int_0^1 u_n' v' dx - \int_0^1 f(x, u_n) v dx - \int_0^1 h v dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\|, \quad \forall v \in H; \quad (2.4)$$

donde  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  y  $\|\cdot\|$  denota la norma de  $H^1(0, 1)$ , es decir

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 u'^2 dx.$$

Por argumentos ya conocidos (véase Lema (6.2) en [19]), es suficiente demostrar que  $\{u_n\}$  está acotada. Razonemos por contradicción. Supongamos que  $\{u_n\}$  no está acotada en  $H^1(0, 1)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ . Definamos  $z_n = u_n / \|u_n\|$ . Claramente  $\|z_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$  y, por tanto, es posible obtener una parcial (a la que seguiremos llamando  $\{z_n\}$ ) convergiendo débilmente a una función  $z_0 \in H^1(0, 1)$ , y fuertemente en  $C[0, 1]$ .

Dividiendo (2.4) por  $\|u_n\|$  obtenemos

$$\left| \int_0^1 z_n' v' dx - \int_0^1 \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v dx - \int_0^1 \frac{h}{\|u_n\|} v dx \right| \leq \frac{\varepsilon_n \|v\|}{\|u_n\|}, \quad (2.5)$$

para cualquier  $v \in H$ . Tomando respectivamente  $v = 1$ ,  $v = z_0$ , y  $v = z_n$  en (2.5) y tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$ , deducimos

$$\int_0^1 \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

$$\int_0^1 \frac{f(x, u_n)z_0}{\|u_n\|} dx \rightarrow \int_0^1 z_0'^2 dx, \quad (2.7)$$

$$\int_0^1 z_n'^2 dx - \int_0^1 \frac{f(x, u_n)z_n}{\|u_n\|} dx \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Obsérvese que la condición  $(f_2)$  implica que existe un número  $s_0 > 0$  tal que  $f(x, \cdot) + \int_0^1 h(x) dx$  es positiva en  $(s_0, +\infty)$ . Además, de  $(f_1)$  se puede deducir la existencia de una constante positiva  $K$  tal que  $|f(x, s)| \leq \frac{\pi^2}{4}(|s^-| + K)$ ,  $\forall s \leq s_0, \forall x \in [0, 1]$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \right| dx &\leq \int_{u_n < s_0} \left| \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \right| dx + \int_{u_n \geq s_0} \left| \frac{h}{\|u_n\|} \right| dx \\ &\quad + \int_{u_n \geq s_0} \frac{f(x, u_n) + h}{\|u_n\|} dx \\ &\leq 2 \int_{u_n < s_0} \left| \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \right| dx + 2 \int_{u_n \geq s_0} \left| \frac{h}{\|u_n\|} \right| dx \\ &\quad + \int_0^1 \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} \left( \int_0^1 (|z_n^-| + \frac{K}{\|u_n\|}) dx \right) + 2 \int_0^1 \left| \frac{h}{\|u_n\|} \right| dx \\ &\quad + \int_0^1 \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

De esta última desigualdad y (2.6) se deduce que  $\{f(x, u_n)/\|u_n\|\}$  está acotada en  $L^1(0, 1)$ . Así, puesto que  $z_n$  converge a  $z_0$  en  $C[0, 1]$ , obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{f(x, u_n)(z_n - z_0)}{\|u_n\|} dx \rightarrow 0.$$

Esta convergencia, junto con (2.7) y (2.8) implica que el límite de la sucesión  $\left\{ \int_0^1 z_n'^2 dx \right\}$  es  $\int_0^1 z_0'^2 dx$ . Por consiguiente,  $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$  en  $H^1(0,1)$ .

Tomemos ahora  $v = 1$  en (2.4), para obtener

$$\int_0^1 f(x, u_n) dx \rightarrow - \int_0^1 h(x) dx . \quad (2.10)$$

Esto, junto a  $(f_2)$ , implica que  $z_0$  se anula en algún punto. Efectivamente, en otro caso,  $z_0 > 0$  (respectivamente  $z_0 < 0$ ) y entonces  $\{\min_{x \in [0,1]} u_n(x)\} \rightarrow +\infty$  (respectivamente  $\{\max_{x \in [0,1]} u_n(x)\} \rightarrow -\infty$ ), y, por  $(f_2)$ , obtendríamos una contradicción con (2.10).

Veamos ahora que  $z_0^- \in M \setminus \{0\}$ . Si no fuera así,  $z_0 \geq 0$  y dado que la función  $z_0$  se anula en algún punto, entonces  $\min_{x \in [0,1]} z_0(x) = 0$ . En este caso, si tomáramos límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en (2.9) deduciríamos de (2.6) que  $\left\{ \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \right\}$  converge a 0 en  $L^1(0,1)$ . Por consiguiente, de (2.7), concluiríamos que  $z_0$  es una función constante y, por tanto, idénticamente nula, lo cual es contradictorio con lo obtenido hasta ahora.

Por otra parte, por  $(f_1)$  existe una constante  $K' > 0$  tal que

$$f(x, u_n^-) \geq \left( \frac{\pi^2}{4} - \varepsilon \right) u_n^- - K' . \quad (2.11)$$

Por lo tanto, si tomamos  $v = z_n^-$  en (2.5) y hacemos uso de (2.11), deducimos que

$$\int_0^1 z_0^{-2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n^- dx \right\} \leq \left( \frac{\pi^2}{4} - \varepsilon \right) \int_0^1 z_0^{-2} dx ,$$

lo que contradice el Teorema 3. ■

## II.4. Existencia de solución.

Una vez discutida la condición de compacidad (PS) para  $I$ , dirigimos nuestra atención al estudio de la geometría de éste.

**Proposición 8** *Supongamos  $(f_1)$ . Entonces  $I$  está acotado inferiormente en  $M$ .*

*Demostración.* De nuevo, por  $(f_1)$  se verifica (2.11) con  $u \in M$  en lugar de  $u_n^-$ . Así, integrando se obtiene ( $K' > 0$ ):

$$F(x, u) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - \varepsilon \right) u^2 - K'u, \forall u \in M.$$

Esto y el Teorema 3 proporcionan la siguiente estima inferior de  $I$ :

$$I(u) \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u^2(x) dx + K' \int_0^1 u(x) dx - \int_0^1 h(x)u(x) dx, \forall u \in M,$$

de donde, usando la desigualdad de Hölder deducimos

$$I(u) \geq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_2^2 - (K' + \|h\|_2) \|u\|_2, \forall u \in M,$$

quedando así probada la proposición. ■

### Demostración del Teorema 2

De la condición  $(f_2)$  podemos deducir que

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \pm\infty} I(k) &= \limsup_{k \rightarrow \pm\infty} \left[ - \left( \int_0^1 F(x, k) dx + k \int_0^1 h(x) dx \right) \right] = \\ &= - \liminf_{k \rightarrow \pm\infty} k \left( \int_0^1 \frac{F(x, k)}{k} dx + \int_0^1 h(x) dx \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos obtenido que

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} I(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} I(k) = -\infty ,$$

donde  $k$  denota a la vez el número  $k \in \mathbb{R}$  y la función constante  $k$ .

Por lo tanto, por la Proposición 8, existe  $K_0 > 0$  tal que

$$\max \{I(-K_0), I(K_0)\} < \inf_{u \in M} I(u) . \quad (2.12)$$

Consideramos ahora el conjunto  $M$  de los caminos  $\gamma$  que "unen"  $K_0$  y  $-K_0$ ; es decir,

$$\Gamma := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow H : \gamma \text{ es continuo , } \gamma(0) = -K_0, \gamma(1) = K_0\} .$$

Desde un punto de vista topológico,  $M$  "separa" las funciones constantes  $K_0$  y  $-K_0$ . Más precisamente,  $\gamma([0, 1]) \cap M \neq \emptyset, \forall \gamma \in \Gamma$ . Por consiguiente, (2.12) implica que

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0, 1])} I(u) \geq \inf_{u \in M} I(u) > \max \{I(-K_0), I(K_0)\}$$

y, por el Teorema de Paso de Montaña [6],  $c$  es un valor crítico de  $I$ . ■

A continuación presentamos algunas consecuencias inmediatas del Teorema 2 que permiten compara nuestros resultados con los Teoremas previos A y B.

**Corolario 9** *Supongamos que existen (uniformemente en  $x \in [0, 1]$ ) los límites*

$$\lambda := \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s} , \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f(x, s) = +\infty .$$

*Entonces, si  $0 < \lambda < \pi^2/4$ , (P) tiene solución para cualquier función  $h \in L^2(0, 1)$ . ■*

Este resultado mejora sensiblemente el Teorema A. Como ya hemos observado en la introducción, queda así de manifiesto que la superlinealidad de  $f$  es una condición técnica, pero ni mucho menos esencial para la existencia de solución de  $(P)$ .

**Corolario 10** *Supongamos que existen (uniformemente en  $x \in [0, 1]$ ) los límites*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} f(x, s) = +\infty.$$

*Entonces,  $(P)$  tiene solución para cualquier  $h \in L^2(0, 1)$  que satisfaga  $\int_0^1 h(x) dx < 0$ . ■*

Nótese que si, además,  $f$  es una función positiva, entonces (integrando  $(P)$ ) se deduce de manera inmediata que  $\int_0^1 h(x) dx < 0$  es también una condición necesaria para la existencia de solución de  $(P)$ . Por lo tanto, el Corolario 10 mejora estrictamente el Teorema B.

## II.5. Extensión al operador p-laplaciano.

Se puede observar que el hecho crucial en las demostraciones de los resultados obtenidos es la inmersión compacta del espacio de Sobolev  $H^1(0, 1)$  en el espacio de las funciones continuas en  $[0, 1]$ . Como es conocido, esta es una propiedad exclusiva del caso unidimensional. Por esta razón, nuestros argumentos no funcionarían para la versión en derivadas parciales de  $(P)$  en un dominio regular general  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ; i.e. cuando reemplazamos el operador diferencial  $\frac{d^2}{dx^2}$  en  $(0, 1)$  por el operador laplaciano  $\Delta$  en  $\Omega$  y las condiciones de frontera  $u'(0) = u'(1) = 0$  por  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  en  $\partial\Omega$ . Sin embargo, dado que el espacio de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  está (compactamente) inmerso en  $C(\bar{\Omega})$  para  $p > N$ , es posible obtener algunos

resultados para el p-laplaciano  $\Delta_p \equiv \operatorname{div}(|\nabla(\cdot)|^{p-2}\nabla(\cdot))$ . Concretamente, consideremos el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta_p u &= f(x, u) + h(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (P')$$

donde  $p > N$ ,  $h \in L^{p'}(\Omega)$  y  $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Análogamente al caso  $p = 2$ ,  $N = 1$ , definimos el valor  $\gamma_{p,\Omega}$  dependiente de  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y  $p > N$  por

$$\gamma_{p,\Omega} := \min_{u \in M_{p,\Omega} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx},$$

donde  $M_{p,\Omega} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = 0\}$ . Siguiendo ideas análogas a las del Lema 4, se puede comprobar que  $\gamma_{p,\Omega}$  es un número positivo bien definido.

El siguiente teorema puede ser probado de forma análoga al Teorema 2:

**Teorema 11** Sea  $p > N$ ,  $h \in L^{p'}(\Omega)$  y  $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  satisfaciendo  $(f_2)$  y supongamos que existen  $\varepsilon > 0$  y  $s' < 0$  tales que  $\forall s \leq s', \forall x \in \overline{\Omega}$  se verifica

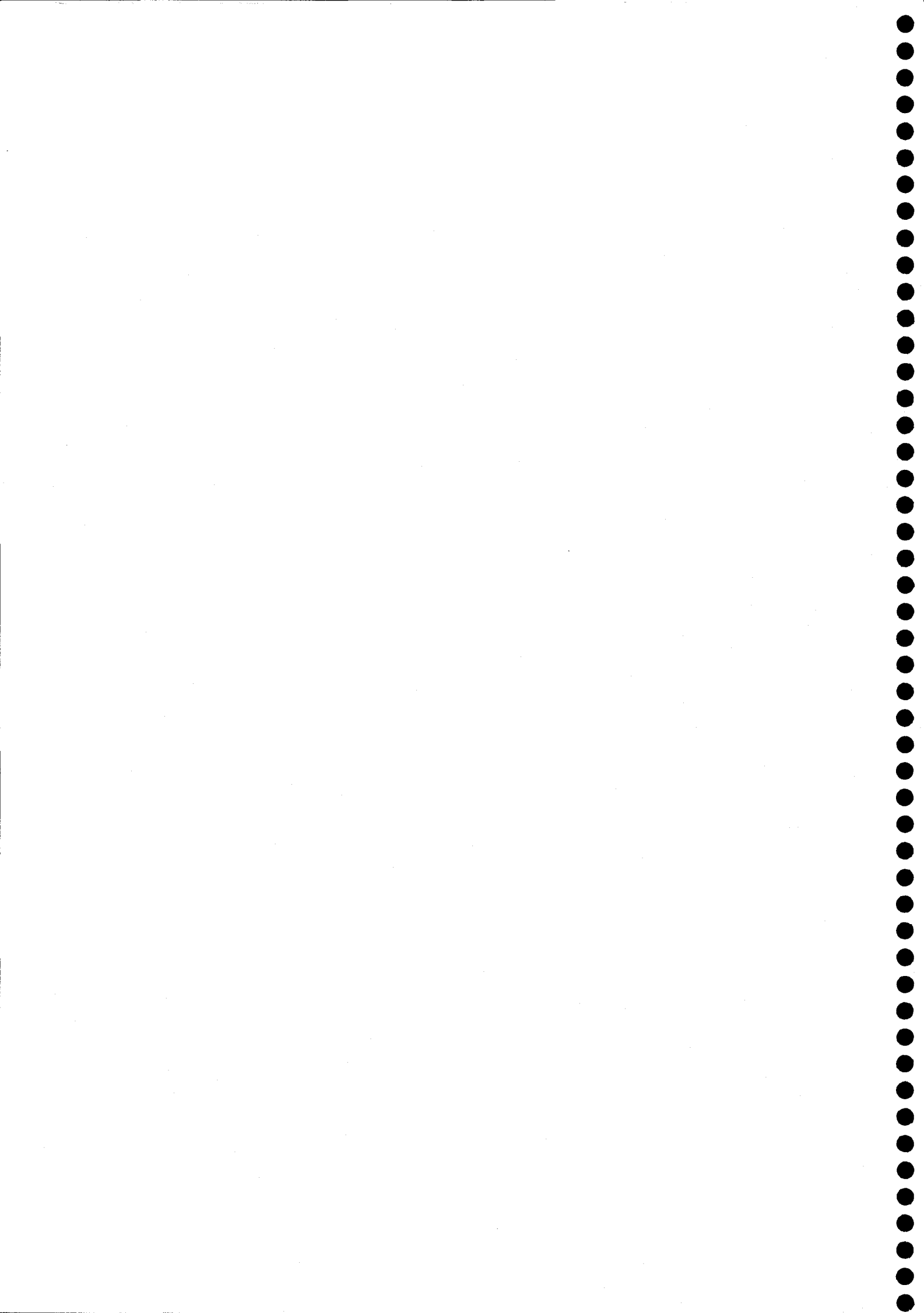
$$(f'_1) \quad \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2}s} < \gamma_{p,\Omega} - \varepsilon.$$

Entonces  $(P')$  tiene solución. ■



## Capítulo III

### PROBLEMA DE NEUMANN EN DIMENSIONES SUPERIORES.



### III.1. Planteamiento y enunciado de los resultados principales.

En este capítulo consideramos el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f(x, u), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) con frontera  $\partial\Omega$  regular, y  $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua con una fuerte asimetría en su comportamiento asintótico en  $-\infty$  y  $+\infty$ . Dado que nuestros resultados se basarán en métodos variacionales, en primer lugar habremos de exigir a  $f$  un crecimiento subcrítico, i.e.

( $f_1$ ) Si  $N \geq 2$ , existen constantes  $\sigma \in (1, 2^*)$  y  $K_1, K_2 > 0$  tales que

$$|f(x, s)| \leq K_1 + K_2|s|^\sigma, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

(donde  $2^* = \frac{N+2}{N-2}$  para  $N \geq 3$ , y  $2^* = +\infty$  para  $N = 2$ ).

La asimetría de  $f$  a la que hacíamos referencia viene dada por las dos condiciones siguientes:

( $f_2$ ) Existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(x, s) - \lambda s = 0, \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega}.$$

( $f_3$ ) Existen  $s_0 > 0$  y  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$  tal que

$$0 < F(x, s) \leq \theta s f(x, s), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \geq s_0$$

donde  $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$ , para  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

Como es bien conocido, la condición  $(f_3)$ , que ya aparecía en el capítulo anterior, es una condición de superlinealidad de  $f$  en  $+\infty$  (véase Nota 1 del Capítulo II, mientras que  $(f_2)$  implica que  $f$  es asintóticamente lineal en  $-\infty$ . Así, a grosso modo, podríamos decir que *la derivada de la no-linealidad  $f$  "atraviesa" todos salvo un número finito de autovalores de  $-\Delta$  con condiciones de contorno de tipo Neumann.*

En el capítulo anterior estudiábamos el caso unidimensional ( $\Omega = (0, 1)$ ) cuando  $\lambda \in (0, \pi^2/4)$ . Obsérvese que, como consecuencia del Corolario 9 del capítulo II, en este caso, (3.1) tiene solución si  $f$  satisface las hipótesis  $(f_2) - (f_3)$ . Recuérdese que en la obtención de los resultados para el caso  $N = 1$ , utilizábamos también técnicas variacionales y era esencial el hecho que  $H^1(0, 1)$  está compactamente inmerso en el espacio de las funciones continuas, lo que condicionaba fuertemente el estudio del funcional de Euler asociado a (3.1).

En cualquier caso, el resultado antes expuesto es trivial si  $f(x, u) \equiv f(u)$ . De hecho, en este caso las hipótesis  $(f_2)$  y  $(f_3)$  implican la existencia de una constante  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $f(k) = 0$  y, por tanto, la solución constante  $k$  sería una solución trivial de (3.1). Nos proponemos en este capítulo estudiar soluciones no triviales (es decir, no constantes) de (3.1). Obsérvese que, caso de existir una solución trivial de (3.1) y vía un cambio de variable elemental, podemos suponer sin pérdida de generalidad que ésta es  $u \equiv 0$ . Más aún, consideramos

$$(f_4) \quad \frac{f(x, s)}{s} > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \in \mathbb{R} - \{0\},$$

y la siguiente hipótesis del comportamiento local de la no-linealidad  $f(x, u)$  en  $u = 0$ :

$(f_5)$  Existen  $\varepsilon > 0$  y  $\alpha \in (0, \lambda_1)$  tales que

$$\frac{f(x, s)}{s} \leq \alpha, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\},$$

donde  $\lambda_1 > 0$  es el primer autovalor estrictamente positivo de  $-\Delta$  en  $H^1(\Omega)$  con condiciones nulas en la frontera de tipo Neumann.

Los resultados de existencia que demostraremos a lo largo de este capítulo son los siguientes:

**Teorema 1** *Sea  $N \geq 2$  y supongamos que se verifican  $(f_1) - (f_5)$ . Entonces, el problema (3.1) tiene, al menos, una solución no trivial.*

**Teorema 2** *Sea  $N = 1$  y  $\Omega = (0, 1)$ . Supongamos  $(f_2) - (f_5)$  con  $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ . Entonces, el problema (3.1) tiene, al menos, una solución no trivial.*

Obsérvese, que al contrario que en el caso  $N \geq 2$ , en el Teorema 1 hay un intervalo de valores  $\lambda > 0$  que no cubre el Teorema 2, concretamente  $\lambda \in (0, \frac{\pi^2}{4}]$ . Sorprendentemente, para este intervalo de valores y para  $N = 1$ , el resultado de existencia no es cierto general. De hecho, en este caso, daremos un ejemplo de no existencia de solución no trivial de (3.1).

Como ya hemos mencionado, las demostraciones de los Teoremas 1 y 2 están basadas en métodos variacionales. Consideremos, por tanto, el funcional de Euler  $I$  asociado a (3.1) y definido en  $H^1(\Omega)$  mediante

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (3.2)$$

Es bien conocido que, por la hipótesis  $(f_1)$  que limita el crecimiento de  $f$ ,  $I$  es de clase  $C^1$  con derivada (de Fréchet)  $I'(u)$  en cada  $u \in H^1(\Omega)$  dada por

$$I'(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Por consiguiente, los puntos críticos de  $I$  son exactamente las soluciones débiles de (P). Cuando conocemos una solución trivial, como es nuestro

caso, una de las técnicas más útiles para probar la existencia de una segunda solución es el Teorema de Paso de Montaña de Ambrosetti y Rabinowitz [6]. Dicho teorema requiere ciertas condiciones de compacidad y geométricas del funcional de Euler asociado a (3.1); a saber, la condición de compacidad de Palais-Smale (PS) y la siguiente condición geométrica: *la solución trivial es un mínimo local no global*.

Con respecto a la verificación de las propiedades de compacidad del funcional, queremos hacer hincapié en que los resultados correspondientes en el Lema 7 del Capítulo II (véase también [21]) se aplican sólo para  $\lambda \in (0, \frac{\pi^2}{4})$  y, como ya ha sido mencionado, se utiliza fuertemente el hecho que  $N = 1$ . Aquí se probará la condición (PS) para cualquier  $N \geq 1$  y  $\lambda > 0$ . Respecto de la geometría del funcional, observemos que la condición  $(f_4)$  implica que la solución trivial  $u \equiv 0$  no es un mínimo local del funcional de Euler. Para superar esta dificultad y demostrar el Teorema 1, aplicaremos una generalización del Teorema de Paso de Montaña debida a Silva que, para comodidad del lector, recordamos a continuación:

**Teorema D (Silva, [51])** Sea  $H = X_1 \oplus X_2$  un espacio de Banach real con  $X_1$  un subespacio de dimensión finita. Supongamos que  $I \in C^1(H, \mathbb{R})$  satisface

$$(I_1) \quad I(u) \leq 0, \forall u \in X_1.$$

$$(I_2) \quad \text{Existe } \rho > 0 \text{ tal que } I(u) \geq 0 \text{ para cualquier } u \in \partial B_\rho(0) \cap X_2.$$

$$(I_3) \quad \text{Existen } e \in X_2 - \{0\} \text{ y } \beta \geq 0 \text{ tal que } I(u) \leq \beta \text{ para cualquier } u \in X_1 + \mathbb{R}^+e.$$

Si, además,  $I$  satisface (PS), entonces,  $I$  tiene, al menos, un punto crítico en  $H$  distinto de cero.

Al contrario que en el caso  $N \geq 2$ , si  $N = 1$  y  $\Omega = (0, 1)$ , la geometría del funcional de Euler asociado a (3.1) depende del parámetro  $\lambda > 0$  que

indica el comportamiento asintótico de  $f$  en  $-\infty$  y que aparece en  $(f_2)$ . Precisamente, el funcional verifica las propiedades del teorema de Silva si, y sólo si  $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ . Así, de nuevo podemos usar dicho teorema para probar el Teorema 2 de forma análoga a la demostración del Teorema 1. Hasta donde alcanzan nuestros conocimientos, este es el primer resultado donde la geometría del funcional de Euler cambia con la dimensión. El ejemplo final, demostrando la no existencia, en general, de solución no trivial de (3.1) cuando  $\Omega = (0, 1)$ ,  $0 < \lambda \leq \frac{\pi^2}{4}$ ; muestra también como el cambio sufrido por la geometría es esencial para dicha existencia.

### III.2. La condición de Palais-Smale.

A continuación, y utilizando solamente las hipótesis  $(f_1) - (f_3)$ , demostraremos que el funcional  $I$  satisface la condición de compacidad de Palais-Smale. Las hipótesis  $(f_4)$  y  $(f_5)$  aparecerán en la verificación de las propiedades geométricas.

**Lema 3** *Supongamos que se verifican  $(f_1) - (f_3)$ . Entonces el funcional  $I$  satisface la condición de Palais-Smale (PS).*

*Demostración.* Sea  $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$  una sucesión de funciones verificando para cada natural  $n$ :

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \right| \leq C \quad (3.3)$$

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\|, \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.4)$$

donde  $C > 0$  es una constante positiva y  $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$  es una sucesión convergente a cero. Por argumentos ya mencionados en el capítulo anterior (véase Sección II.3), para demostrar la existencia de una parcial

convergente de  $\{u_n\}$ , basta probar la acotación de  $\{u_n\}$  en  $H^1(\Omega)$ . Razonamos por reducción al absurdo, y suponemos que una parcial, a la que, por comodidad, seguiremos notando por  $\{u_n\}$ , verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = +\infty$$

donde, de ahora en adelante,  $\|\cdot\|$  denotará la norma usual en  $H^1(\Omega)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $\|u_n\| \geq 1$  para cada natural  $n$  y definir  $z_n = u_n/\|u_n\|$ . Dado que  $\{z_n\}$  es una sucesión de la esfera unidad, es posible tomar una parcial suya, a la que seguiremos de nuevo llamando  $\{z_n\}$ , tal que

$$\{z_n\} \rightharpoonup z_0 \text{ en } H^1(\Omega) \quad (3.5)$$

$$\{z_n\} \rightarrow z_0 \text{ en } L^2(\Omega) \quad (3.6)$$

$$\{z_n(x)\} \rightarrow z_0(x) \text{ c.t. } x \in \Omega \quad (3.7)$$

$$|z_n(x)| \leq q(x) \text{ c.t. } x \in \Omega \quad (3.8)$$

donde  $z_0 \in H^1(\Omega)$  y  $q \in L^2(\Omega)$ .

Dividiendo la desigualdad (3.4) por  $\|u_n\|$  obtenemos

$$\left| \int_{\Omega} \nabla z_n \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|} \|v\|$$

para cualquier función  $v \in H^1(\Omega)$ . Pasando al límite, la convergencia débil (3.5) implica que

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} v \, dx = \int_{\Omega} \nabla z_0 \cdot \nabla v \, dx \quad (3.9)$$

para toda  $v \in H^1(\Omega)$ .



Nos proponemos ahora demostrar que  $z_0 \equiv 0$  para llegar posteriormente a una contradicción. Para verificar que  $z_0$  es la función nula procederemos en dos pasos: probaremos que  $z_0(x) \leq 0$  c.t.  $x \in \Omega$  (*Paso 1*) y  $\int_{\Omega} z_0 dx \geq 0$  (*Paso 2*). Claramente estos dos pasos implican  $z_0 \equiv 0$ .

*Paso 1:* Veamos que  $z_0(x) \leq 0$  c.t.  $x \in \Omega$ . Observemos en primer lugar que escogiendo  $v = z_0^+ \equiv \max\{z_0, 0\}$  en (3.9) obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_0 dx = \int_{\Omega^+} |\nabla z_0|^2 dx < +\infty \quad (3.10)$$

donde  $\Omega^+ = \{x \in \Omega / z_0(x) > 0\}$ . Por otra parte, de  $(f_2)$  y  $(f_3)$  se deduce

$$\frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} z_0(x) \geq \frac{\lambda u_n(x) - K_1}{\|u_n\|} z_0(x) \geq (-\lambda q(x) - K_1) z_0(x) \quad \text{c.t. } x \in \Omega^+$$

para alguna constante positiva  $K_1 > 0$ .

Usando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = +\infty$  c.t.  $x \in \Omega^+$  (por (3.7)) y la superlinealidad de  $f$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} z_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} z_n(x) z_0(x) = +\infty \quad \text{c.t. } x \in \Omega^+.$$

Por lo tanto, si la medida de Lebesgue  $|\Omega^+| > 0$  obtendríamos por el Lema de Fatou que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^+} \frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|} z_0 dx = +\infty$$

contradiendo (3.10). Así  $|\Omega^+| = 0$  y el Paso 1 queda concluido.

*Paso 2:* Veamos que  $\int_{\Omega} z_0 dx \geq 0$ . Empezamos multiplicando (3.4) con  $v = u_n$  por  $1/2$  y restándolo de (3.3) para obtener

$$\left| \int_{\Omega} \left[ \frac{f(x, u_n) u_n}{2} - F(x, u_n) \right] dx \right| \leq C + \frac{\varepsilon_n}{2} \|u_n\|$$

para todo natural  $n$ . Dividiendo esta desigualdad por  $\|u_n\|$  y pasando al límite deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{[\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)]}{\|u_n\|} dx = 0 \quad (3.11)$$

Por otra parte, si consideramos  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeño, la condición  $(f_2)$  asegura la existencia de una constante  $K_\varepsilon > 0$  tal que

$$\left| \frac{f(x, u)u}{2} - F(x, u) \right| \leq \varepsilon|u| + K_\varepsilon, \quad \forall u \in (-\infty, s_0]$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_n(x) \leq s_0} \frac{[\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)]}{\|u_n\|} dx \right| &\leq \varepsilon \int_{\Omega} \frac{|u_n|}{\|u_n\|} dx + \frac{K_\varepsilon|\Omega|}{\|u_n\|} \\ &\leq \varepsilon|\Omega|^{1/2} + \frac{K_\varepsilon|\Omega|}{\|u_n\|} \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando límites cuando  $n$  tiende a infinito se deduce

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{u_n(x) \leq s_0} \frac{[\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)]}{\|u_n\|} dx \right| \leq \varepsilon|\Omega|^{1/2}$$

para  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{u_n(x) \leq s_0} \frac{[\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)]}{\|u_n\|} dx = 0 \quad (3.12)$$

Por otra parte, la condición  $(f_3)$ , junto con  $(f_2)$ , proporciona las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \int_{u_n(x) > s_0} \frac{[\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)]}{\|u_n\|} dx &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_{u_n(x) > s_0} \frac{f(x, u_n)u_n}{\|u_n\|} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right)s_0 \int_{u_n(x) > s_0} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right)s_0 \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} dx \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right)s_0 \lambda \int_{u_n(x) \leq s_0} z_n(x) dx \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right)s_0 \frac{K_2}{\|u_n\|} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $K_2 > 0$  es una constante positiva (que depende de la cota de  $|f(x, u) - \lambda u|$  en  $\bar{\Omega} \times (-\infty, s_0]$ ). Si consideramos (3.9) con  $v \equiv 1$ , (3.11) y (3.12) y tomamos límites cuando  $n$  tiende a infinito en (3.13) deducimos

$$0 \geq -\left(\frac{1}{2} - \theta\right)s_0 \lambda \int_{\Omega} z_0 dx$$

Concluimos, por lo tanto, que

$$\int_{\Omega} z_0 dx \geq 0$$

y con ello el Paso 2.

Finalmente, obtendremos una contradicción utilizando que  $z_0 \equiv 0$ . Para ello, consideramos  $v = z_n$  como función test en (3.4) y dividimos por  $\|u_n\|$ , para obtener, utilizando  $\|z_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , que

$$\left| 1 - \int_{\Omega} z_n^2 dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx - \frac{1}{\|u_n\|} \int_{\Omega} h z_n dx \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}$$

Tomando límites cuando  $n$  tiende a infinito deducimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx = 1 \quad (3.14)$$

Por otra parte, este límite se puede calcular utilizando las siguientes estimas, que deducimos aplicando  $(f_2)$  y la primera desigualdad de (3.13):

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx \leq \int_{u_n(x) \leq s_0} \frac{(\lambda |u_n(x)| + K_2)}{\|u_n\|} |z_n| dx$$

$$+ \frac{1}{\frac{1}{2} - \theta} \int_{u_n(x) > s_0} \frac{[\frac{f(x, u_n)u_n}{2} - F(x, u_n)]}{\|u_n\|} dx$$

Utilizando (3.11) y (3.12), deducimos  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n dx \leq 0$ , lo cual contradice (3.14). Así pues, la sucesión  $\{u_n\}$  ha de ser acotada y, como ya ha sido mencionado, es posible concluir entonces la existencia de una parcial suya convergente. ■

### III.3. El caso $N \geq 2$ .

Dedicamos esta Sección a la demostración del Teorema 1. Para ello aplicaremos el Teorema D al funcional de Euler  $I$  asociado a (3.1) definido en el espacio de Sobolev  $H = H^1(\Omega)$  por (3.2). Dicho teorema requiere una conveniente descomposición del espacio. Nosotros consideramos  $H = H^1(\Omega) = X_1 \oplus X_2$ , donde  $X_1$  es el subespacio de las funciones constantes y  $X_2$  es el ortogonal de  $X_1$  en  $H^1(\Omega)$ , i.e.

$$X_2 = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u dx = 0 \right\}$$

Dado que  $I$  satisface (PS) por el Lema 3, las únicas hipótesis del teorema de Silva que nos faltan por comprobar, y así demostrar el Teorema 1 son las referidas a la geometría del funcional, esto es  $(I_1)$ ,  $(I_2)$  e  $(I_3)$ . Queremos hacer especial hincapié en que la verificación de  $(I_1)$  e  $(I_2)$  es válida igualmente para el caso  $N = 1$ . No así  $(I_3)$ . De hecho, para esta hipótesis, usamos fuertemente el hecho que  $H^1(\Omega)$  no está inmerso en

$L^\infty(\Omega)$  si  $N \geq 2$ . Esto permitirá tomar como  $e$  en  $(I_3)$  una conveniente función que no está acotada superiormente.

**Verificación de  $(I_1)$ :**

Sea  $k$  una función constante de  $X_1$ . Observemos que de  $(f_4)$  se deduce

$$F(x, s) \geq 0 \quad (3.15)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$  y  $s \in \mathbb{R}$ . Así pues

$$I(k) = - \int_{\Omega} F(x, k) dx \leq 0$$

que es exactamente  $(I_1)$ .

**Verificación de  $(I_2)$ :**

Comencemos observando que por  $(f_1)$  y  $(f_5)$  obtenemos

$$|F(x, s)| \leq \frac{\alpha}{2} s^2 + K |s|^{\sigma+1}, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

donde  $K > 0$  es una constante positiva. Utilizando ésto, la caracterización variacional de  $\lambda_1$  y el teorema de inmersión de Sobolev [1, 13]; se deduce

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - K \int_{\Omega} |u|^{\sigma+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - K \|u\|_{\sigma+1}^{\sigma+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - K_1 \|u\|^{\sigma+1}, \quad \forall u \in X_2 \end{aligned}$$

donde  $K_1 > 0$  es una constante positiva (independente de  $u \in X_2$ ).

Teniendo en cuenta que  $(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$  define una norma equivalente en  $X_2$  a  $\|\cdot\|$  y que  $\alpha < \lambda_1$ ,  $\sigma + 1 > 2$ , se prueba fácilmente que para una cierta constante positiva  $\rho > 0$ ,

$$I(u) \geq 0$$

para cualquier  $u \in X_2$  con  $\|u\| \leq \rho$ . Consecuentemente, obtenemos  $(I_2)$ .

### Verificación de $(I_3)$ :

Como ya hemos mencionado anteriormente, la dimensión  $N \geq 2$  juega un papel importante, puesto que permite afirmar que el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$  no está inmerso en  $L^\infty(\Omega)$ , y por tanto podemos considerar una función  $e \in X_2$  no acotada superiormente. Denotemos

$$\lambda_* = \frac{\int_{\Omega} |\nabla e|^2 dx}{\int_{\Omega} e^2 dx}$$

Observemos que cambiando  $e$  por  $te$  con  $t > 0$  pequeño, podemos suponer sin perder generalidad que

$$(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx < \lambda |\Omega| \quad (3.17)$$

Por otra parte, por  $(f_3)$  (véase Nota 2 del Capítulo II) existen constantes positivas  $K_1 > 0$  y  $s_1 \geq s_0$  tales que

$$F(x, s) \geq \lambda \frac{s^2}{2} + K_1 s^{\frac{1}{2}} > 0, \quad \forall s \geq s_1 \quad (3.18)$$

Analizando ahora el comportamiento de  $F$  cuando  $s \leq s_1$ , podemos asegurar que por la condición  $(f_2)$  existe una constante positiva  $K_2 > 0$  satisfaciendo

$$\left| F(x, s) - \frac{\lambda}{2} s^2 \right| \leq K_2 |s|, \quad \forall s \leq s_1 \quad (3.19)$$

Nuestro objetivo no es otro que el de probar que  $I$  está acotado superiormente en  $X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$ . Sea pues  $k + te \in X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$  ( $k$  es una función constante y  $t > 0$ ). Utilizando (3.18) y (3.19) se tiene

$$\begin{aligned}
 I(k+te) &= \frac{\lambda_*}{2} t^2 \int_{\Omega} e^2 dx - \int_{\Omega} F(k+te) dx \\
 &\leq \frac{\lambda_*}{2} t^2 \int_{\Omega} e^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (k+te)^2 dx \\
 &\quad + K_2 \int_{k+te(x) \leq s_1} |k+te| dx - K_1 \int_{k+te(x) > s_1} (k+te)^{\frac{1}{\theta}} dx \\
 &\leq -\frac{1}{2} k^2 \lambda |\Omega| + \frac{1}{2} t^2 (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx \\
 &\quad + K_2 \left( t \int_{\Omega} |e| dx + |k| |\Omega| \right) \\
 &\quad - K_1 \int_{k+te(x) > s_1} (k+te)^{\frac{1}{\theta}} dx \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Si  $\lambda_* < \lambda$  entonces la verificación de  $(I_3)$  es inmediata. Supongamos, por tanto,  $\lambda_* \geq \lambda$ . Podemos considerar dos casos para  $k$  y  $t$ :

a)  $k+t \leq s_1$

b)  $k+t > s_1$

En el caso a), i.e.,  $t \leq s_1 - k$  tenemos que  $t^2 \leq s_1^2 - 2s_1k + k^2$  y por la desigualdad (3.20) obtenemos

$$\begin{aligned}
 I(k+te) &\leq \frac{1}{2} k^2 \left[ (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx - \lambda |\Omega| \right] - k s_1 (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} s_1^2 (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx \\
 &\quad + K_2 [(s_1 - k) \int_{\Omega} |e| dx + |k| |\Omega|] \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el segundo miembro de esta desigualdad tiene un crecimiento cuadrático en  $k$  con  $(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx - \lambda |\Omega| < 0$  (por (3.17)), se deduce que  $I(k+te)$  está acotado superiormente si  $k+t \leq s_1$ .

Con respecto al caso b), i.e.  $k + t > s_1$ , si consideramos  $\Omega_1 = \{x \in \Omega / e(x) > 1\}$  se tiene  $|\Omega_1| > 0$  (porque  $e$  no está acotado superiormente), y  $k + te(x) > k + t > s_1, \forall x \in \Omega_1$ . Así pues, por (3.20):

$$\begin{aligned} I(k + te) &\leq -\frac{1}{2}k^2\lambda|\Omega| + \frac{1}{2}t^2(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx \\ &\quad + K_2[t \int_{\Omega} |e| dx + |k| |\Omega|] - K_1(k + t)^{\frac{1}{\theta}} |\Omega_1| \\ &= \frac{1}{2}k^2 \left[ (\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx - \lambda |\Omega| \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2}(k + t)^2(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx \\ &\quad - k(k + t)(\lambda_* - \lambda) \int_{\Omega} e^2 dx + K_2(k + t) \int_{\Omega} |e| dx \\ &\quad + K_2(|k| |\Omega| - k \int_{\Omega} |e| dx) - K_1(k + t)^{\frac{1}{\theta}} |\Omega_1| \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por lo tanto, por (3.17) y notando  $s = k + t$ , obtenemos que  $I(k + te)$  está acotado superiormente por una función (de  $k$  y  $s$ ) de la forma:

$$\begin{aligned} I(k + te) &\leq -K_3k^2 + K_4|k| + K_5s^2 + K_6s + K_7s|k| - K_8s^{\frac{1}{\theta}} \\ &= -\left[ \sqrt{K_3}|k| - \frac{K_4 + K_7s}{2\sqrt{K_3}} \right]^2 \\ &\quad + \frac{(K_4 + K_7s)^2}{4K_3} + K_5s^2 + K_6s - K_8s^{\frac{1}{\theta}} \\ &\leq K_9s^2 + K_{10}s + K_{11} - K_8s^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

de donde se deduce (puesto que  $\frac{1}{\theta} > 2$ ) que  $I(k + te)$  está acotado superiormente si  $k + t = s > s_1$ . Consecuentemente, en ambos casos hemos probado que  $I$  está acotado superiormente en  $X_1 \oplus \mathbb{R}^+e$ . Acaba así la verificación de  $(I_3)$  y, con ella, la demostración del Teorema 1. ■

**Nota 4** Observemos que si  $\lambda > \lambda_1$  entonces se puede comprobar  $(I_3)$  de una manera más simple. De hecho, en este caso podemos tomar



$e \in X_2 - \{0\}$  como una autofunción asociada a  $\lambda_2$  y, de (3.20) con  $\lambda_* = \lambda_1$ , se deduce que  $I$  está acotado superiormente en  $X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$ . Por supuesto esta elección de  $e$  no sirve en el caso  $\lambda \in (0, \lambda_1]$ .

**Nota 5** Debemos notar que en la demostración anterior hemos usado  $(f_4)$  y  $(f_5)$  para probar (3.15) y (3.16). De hecho, estas condiciones más generales (3.15) y (3.16) pueden ser sustituidas respectivamente por las condiciones  $(f_4)$  y  $(f_5)$  en el Teorema 1.

### III.4. El caso $N = 1$ .

En esta sección estudiaremos el problema (3.1) cuando  $N = 1$ . Por consiguiente  $\Omega$  es un intervalo abierto y acotado. Por simplicidad supondremos  $\Omega = (0, 1)$ , pero no habría ningún cambio sustancial si consideramos un intervalo general  $(a, b)$ . Como ya hemos comentado en la Sección 1, la principal diferencia entre los casos  $N \geq 2$  y  $N = 1$  se encuentra en las propiedades geométricas del funcional asociado. Concretamente, la condición  $(I_3)$  que hemos demostrado en la Sección anterior para  $N \geq 2$ , no siempre se satisface en el caso  $N = 1$ . Depende del parámetro  $\lambda > 0$  que aparece en la condición  $(f_2)$ , como demostramos en el siguiente lema:

**Lema 6** Sea  $\Omega = (0, 1)$  y supongamos  $(f_2) - (f_3)$ . Entonces el funcional  $I$  satisface  $(I_3)$  si, y sólo si,  $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ .

*Demostración.* Sea  $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ . Demostraremos que, efectivamente,  $I$  verifica  $(I_3)$ . Para ello, elegimos como  $e \in X_2$  la función  $e(x) = \frac{2}{\pi} - \sin \frac{\pi}{2}x, x \in [0, 1]$ . Entonces

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\int_0^1 (e')^2 dx}{\int_0^1 e^2 dx + \|e\|_\infty^2} < \lambda$$

Tomemos  $\alpha \in (0, \|e\|_\infty)$  suficientemente cercano a  $\|e\|_\infty$ , de tal manera que

$$\frac{\int_0^1 (e')^2 dx}{\int_0^1 e^2 dx + \alpha^2} < \lambda \quad (3.25)$$

Consideramos también  $s_1 > s_0$  satisfaciendo (3.18). Recordemos que nuestro objetivo es demostrar que  $I$  está acotado superiormente en  $X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e = \{k + te : k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+\}$ . Usando (3.19) y razonando como en (3.20):

$$\begin{aligned} I(k + te) \leq & -\frac{1}{2}k^2\lambda + \frac{1}{2}t^2 \left( \int_0^1 (e')^2 dx - \lambda \int_0^1 e^2 dx \right) \\ & + K_2 \left( t \int_0^1 |e| dx + |k| \right) \\ & - K_1 \int_{k+te(x) > s_1} (k + te)^{\frac{1}{p}} dx \end{aligned} \quad (3.26)$$

para cualquier  $k \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ . En el caso que  $\int_0^1 (e')^2 dx < \lambda \int_0^1 e^2 dx$  entonces se deduce inmediatamente de la última desigualdad que  $I$  está acotado superiormente. Si, por el contrario  $\int_0^1 (e')^2 dx \geq \lambda \int_0^1 e^2 dx$ , consideramos dos casos para  $k$  y  $t$ :

a)  $k + \alpha t \leq s_1$

b)  $k + \alpha t > s_1$

En el caso a),  $t^2 \leq \frac{(s_1 - k)^2}{\alpha^2}$  y se deduce de (3.26) que

$$\begin{aligned} I(k + te) \leq & -\frac{1}{2\alpha^2}k^2 \left[ \lambda \left( \alpha^2 + \int_0^1 e^2 dx \right) - \int_0^1 (e')^2 dx \right] \\ & + \left( -\frac{1}{\alpha^2}s_1k + \frac{s_1^2}{2\alpha^2} \right) \left( \int_0^1 (e')^2 dx - \lambda \int_0^1 e^2 dx \right) \\ & + K_2 \left( \frac{s_1 - k}{\alpha} \int_0^1 |e| dx + |k| \right), \end{aligned}$$

y, por (3.25),  $I(k + te)$  está acotado superiormente para  $k \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$  tal que  $k + \alpha t \leq s_1$ .

En el caso b), teniendo en cuenta que

$$k + te(x) > k + t\alpha > s_1, \quad \forall x \in \Omega_1 := \{x \in [0, 1] / e(x) > \alpha\}$$

deducimos de (3.26) que

$$\begin{aligned} I(k + te) \leq & -\frac{1}{2}k^2\lambda + \frac{1}{2}t^2\left(\int_0^1 (e')^2 dx - \lambda \int_0^1 e^2 dx\right) \\ & + K_2(t \int_0^1 |e| dx + |k|) - K_1(k + \alpha t)^{\frac{1}{\theta}} |\Omega_1| \end{aligned}$$

y por lo tanto, puesto que  $|\Omega_1| > 0$ , un argumento similar al expuesto en la Sección 2 (en (3.22) y (3.24)) concluye que  $I(k + te)$  está acotado superiormente para  $k \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$  tal que  $k + \alpha t > s_1$ . Consecuentemente  $I$  está acotado superiormente en  $X_1 \oplus \mathbb{R}^+e$ , i.e.  $I$  satisface  $(I_3)$ .

Por el contrario, se puede demostrar que  $I$  no satisface  $(I_3)$  si  $0 < \lambda \leq \frac{\pi^2}{4}$ . Para ello, sea  $\lambda \in (0, \frac{\pi^2}{4}]$  y  $e \in H^1(0, 1) - \{0\}$  verificando  $\int_0^1 e dx = 0$ . Debemos probar que  $I$  no está acotado superiormente en el semiplano  $X_1 \oplus \mathbb{R}^+e$ . Aquí probaremos aún más:  $I$  no está acotado superiormente en la semirrecta  $k + t\|e\|_\infty = 1$  ( $t > 0$ ) incluida en dicho semiplano. Para ello, apliquemos en primer lugar el Teorema C del Capítulo II para obtener:

$$\begin{aligned} I(k + te) &= \frac{1}{2}t^2 \int_0^1 (e')^2 dx - \int_0^1 F(x, k + te) dx \\ &\geq \frac{\pi^2}{8}t^2 \left( \int_0^1 e^2 dx + \|e\|_\infty^2 \right) - \int_0^1 F(x, k + te) dx \end{aligned} \quad (3.27)$$

para todo  $k \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .

Consideremos ahora  $\varepsilon \in (0, \lambda)$ . La condición  $(f_2)$  garantiza la existencia de una constante  $K_3 > 0$  tal que

$$F(x, s) \leq \frac{\lambda}{2}s^2 + \varepsilon|s| + K_3, \quad \forall s \leq 1, \quad \forall x \in [0, 1]$$

Esto, junto con (3.27), permite obtener la siguiente estima:

$$\begin{aligned} I([1 - t\|e\|_\infty] + te) &\geq \frac{\pi^2}{8}t^2 \left[ \int_0^1 e^2 dx + \|e\|_\infty^2 \right] \\ &\quad - \int_0^1 F(x, 1 + t[e(x) - \|e\|_\infty]) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - \lambda \right) t^2 \left[ \int_0^1 e^2 dx + \|e\|_\infty^2 \right] \\ &\quad + t\|e\|_\infty(\lambda - \varepsilon) - \frac{\lambda}{2} - \varepsilon - K_3 \end{aligned}$$

en la que el último término no está acotado superiormente puesto que  $\varepsilon < \lambda \leq \frac{\pi^2}{4}$  y  $t > 0$ . ■

*Demostración del Teorema 2.* Como hemos mencionado en la Sección 2, la verificación de  $(I_1)$  e  $(I_2)$  es igualmente válida para  $N = 1$ . Así, por el Lema 6 y aplicando el Teorema D se concluye la demostración del Teorema 2. ■

Finalmente, estudiemos (3.1) en el caso  $0 < \lambda \leq \frac{\pi^2}{4}$ . El siguiente ejemplo muestra que, en general, no cabe esperar un resultado similar al del Teorema 2.

**Ejemplo:** Sea  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua satisfaciendo  $(f_4)$  y

$$f(x, u) = \lambda u, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall u \leq 0$$

con  $\lambda \in (0, \frac{\pi^2}{4}]$ . Entonces la única solución de (3.1) es la solución trivial  $u \equiv 0$ .

Para demostrar dicha afirmación, razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que (3.1) admite una solución  $u \neq 0$ . Tomando  $v \equiv 1$  como función test en la correspondiente expresión asociada a la ecuación (3.1) se deduce que

$$\int_0^1 f(x, u(x)) dx = 0$$

y, por  $(f_4)$ ,  $u$  debe cambiar el signo en  $(0, 1)$ . Por lo tanto la función  $u$  deberá verificar al menos uno de los dos siguientes casos:

- a) Existe  $\xi_1 \in (0, 1)$  con  $u(\xi_1) = 0$  y tal que o bien  $u < 0$  en  $(0, \xi_1)$ , o bien  $u < 0$  en  $(\xi_1, 1)$ .
- b) Existen  $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$  con  $\xi_1 < \xi_2$ ,  $u(\xi_1) = 0 = u(\xi_2)$  y  $u < 0$  en  $(\xi_1, \xi_2)$ .

En el primer caso,  $u$  satisface o bien

$$\left. \begin{aligned} -u'' &= \lambda u, & x \in (0, \xi_1) \\ u'(0) &= 0 = u(\xi_1) \end{aligned} \right\}$$

o bien

$$\left. \begin{aligned} -u'' &= \lambda u, & x \in (\xi_1, 1) \\ u(\xi_1) &= 0 = u'(1) \end{aligned} \right\}$$

lo que implica que  $\lambda$  es un autovalor de  $-\frac{d^2}{dx^2}$  con condiciones de frontera de tipo mixto. Por lo tanto, o bien  $\lambda \geq \frac{\pi^2}{4\xi_1^2}$  o bien  $\lambda \geq \frac{\pi^2}{4(1-\xi_1)^2}$ . En cualquier caso  $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$ , contradiciendo la hipótesis sobre  $\lambda$ .

Respecto al caso b), observemos que  $u$  satisface

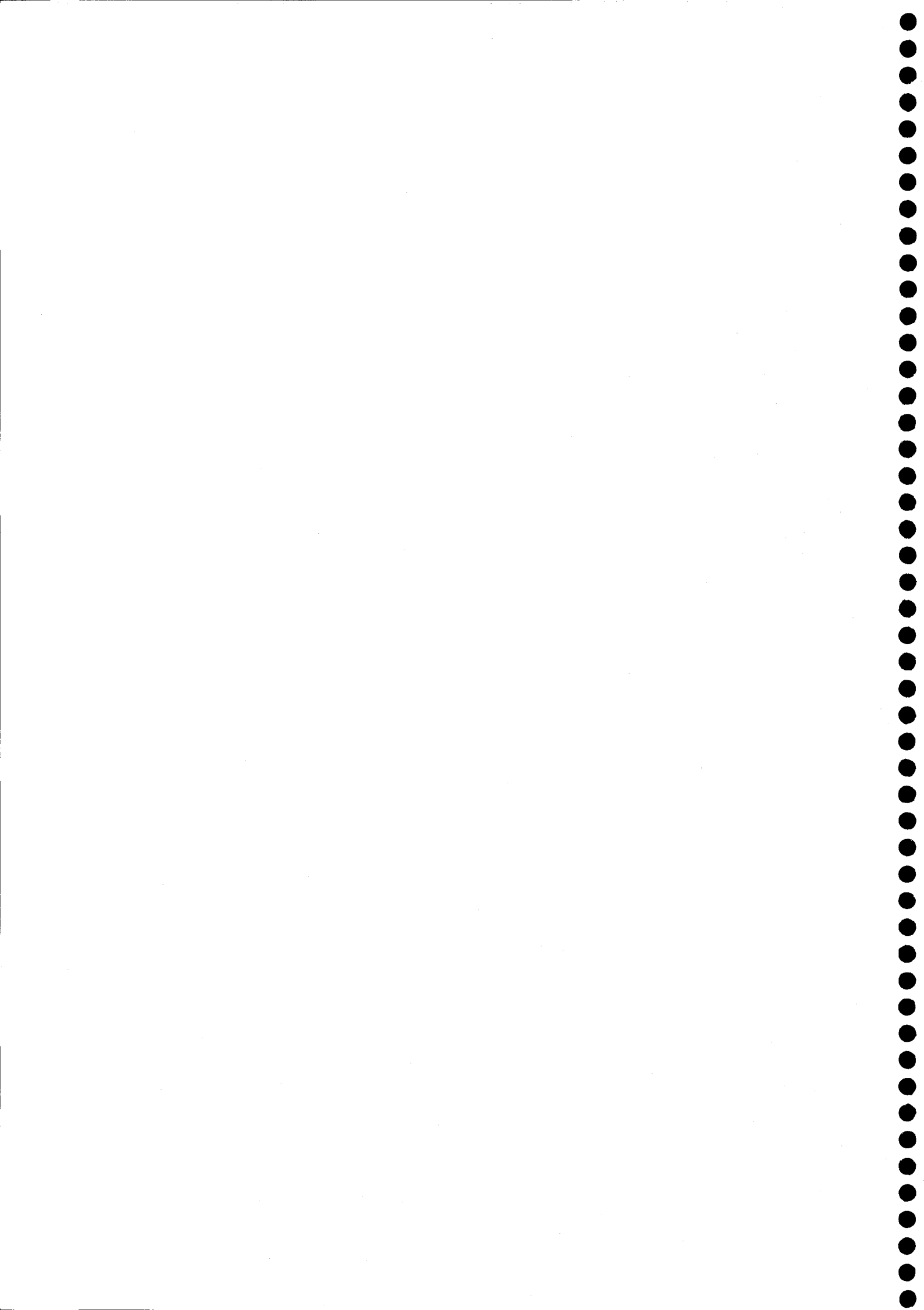
$$\left. \begin{aligned} -u'' &= \lambda u, & x \in (\xi_1, \xi_2) \\ u(\xi_1) &= 0 = u(\xi_2) \end{aligned} \right\}$$

por lo que de nuevo  $\lambda$  es un autovalor de  $-\frac{d^2}{dx^2}$  en  $(\xi_1, \xi_2)$ , en este caso con condiciones de frontera de tipo Dirichlet. Se deduce pues que  $\lambda \geq \frac{\pi^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} > \frac{\pi^2}{4}$  contradiciendo de nuevo la hipótesis sobre  $\lambda$ .

Así, en ambos casos hemos llegado a contradicción, quedando demostrada la afirmación enunciada en este ejemplo.

## Capítulo IV

### PROBLEMA DE DIRICHLET EN DIMENSIONES SUPERIORES.





#### IV.1. Planteamiento y enunciado de los resultados principales.

En este capítulo estudiamos la existencia de solución de problemas de Dirichlet del siguiente tipo:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f(x, u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera  $\partial\Omega$  regular y  $f$  es una función real localmente lipschitziana en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  satisfaciendo el siguiente comportamiento asintótico en  $-\infty$ :

( $f_1$ ) Existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{s} = \lambda, \text{ uniformemente en } x \in \bar{\Omega}.$$

Nuestra idea es usar Teoría de Bifurcación en el parámetro  $\lambda$  y, para un adecuado truncamiento del problema (4.1), demostrar que la condición ( $f_1$ ) implica la existencia de una rama de soluciones bifurcando desde infinito en  $\lambda_1$ , el primer autovalor del operador laplaciano con condiciones en la frontera de Dirichlet. El comportamiento de esta rama puede ser más detallado si, además, se satisface que  $f(x, 0) > 0$  para cualquier  $x \in \bar{\Omega}$  y (4.1) tiene una supersolución positiva. En este caso, es posible deducir por métodos iterativos la existencia de una solución positiva de (4.1). Por otra parte, dicha solución no se encontrará en la rama, puesto que, como probaremos más adelante, la rama no contiene soluciones positivas. Además, ciertas cotas a priori de las soluciones de dicha rama nos conducirán a la demostración del siguiente

**Teorema 1** *Sea  $f$  una función localmente lipschitziana en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  satisfaciendo ( $f_1$ ),  $f(x, 0) > 0$  para cualquier  $x \in \bar{\Omega}$ , y supongamos que (4.1) admite una supersolución positiva  $u_0$ . Entonces, para cada  $\lambda > \lambda_1$ , (4.1) tiene una solución  $u \leq u_0$ , tal que  $u(x_0) < 0$  para algún  $x_0 \in \Omega$ .*

Además también estudiamos la existencia de solución cuando  $\lambda = \lambda_1$ . Para ello, notemos por  $\Phi_1$  a la autofunción positiva asociada al primer valor propio  $\lambda_1$  con norma 1 en  $C^1(\bar{\Omega})$ .

**Teorema 2** *Si, además de las hipótesis del Teorema 1 con  $\lambda = \lambda_1$ , suponemos que*

$$\int_{\Omega} \limsup_{s \rightarrow -\infty} [f(x, s) - \lambda_1 s] \Phi_1 dx < 0$$

*entonces existe una solución  $u \leq u_0$  de (4.1) tal que  $u(x_0) < 0$  para algún  $x_0 \in \Omega$ .*

En la siguiente sección demostramos los resultados expuestos. Posteriormente ofrecemos algunos corolarios, y analizamos la relación de éstos con algunos problemas de la literatura.

## IV.2. Los principales resultados.

A continuación ofrecemos una demostración del Teorema 1. Sean, por tanto,  $f(x, s)$  una función real localmente lipschitziana en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  satisfaciendo  $(f_1)$  y  $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$  una supersolución de (4.1). Sea  $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x)$  y consideremos el siguiente truncamiento de la función  $f(x, s)$

$$f_0(x, s) := \begin{cases} f(x, s) & \text{si } s \leq M, x \in \bar{\Omega} \\ f(x, M), & \text{si } s > M, x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Observemos que podemos escribir  $f_0(x, s) = \lambda s^- + g(x, s)$  ( $x \in \bar{\Omega}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ), siendo  $g(x, s)$  una función continua en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ , acotada en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+$  y, por  $(f_1)$ , satisfaciendo

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{g(x, s)}{s} = 0, \text{ unif. en } x \in \bar{\Omega}. \quad (4.2)$$

Nuestro punto de partida consiste en probar la existencia de una rama de soluciones bifurcando desde el infinito del problema truncado

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u^- + g(x, u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (P_\lambda)$$

En primer lugar demostramos que el único posible punto de bifurcación desde el infinito para  $(P_\lambda)$  es  $\lambda_1$ . Recordemos que  $\lambda_\infty$  es un punto de bifurcación desde el infinito para  $(P_\lambda)$  si existen  $\{\lambda_n\} \rightarrow \lambda_\infty$  y  $\{u_n\} \subset X \equiv C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $u_n$  es una solución de  $(P_{\lambda_n})$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $\|u_n\|_X \rightarrow +\infty$ . En lo que sigue, el operador de Green de  $-\Delta$  con condiciones de tipo Dirichlet en la frontera se denota por  $K : C(\bar{\Omega}) \rightarrow X$ . Con esta terminología, el problema  $(P_\lambda)$  es equivalente a

$$F(\lambda, u) \equiv u - K[\lambda u^- + g(x, u)] = 0, \quad u \in X.$$

Resaltamos que, con el propósito de hacer más cómoda la notación, utilizamos el mismo símbolo para denotar la función y el operador de Nemytskii asociado. Recordemos que  $K$  es continuo y compacto, y por tanto tiene sentido considerar el grado topológico de  $F(\lambda, u)$ .

**Lema 3** Sea  $g$  una función real continua en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  verificando (4.2). Sea  $\{\lambda_n\} \rightarrow \lambda_\infty$  y  $\{u_n\} \subset X$  satisfaciendo  $F(\lambda_n, u_n) = 0$  y  $\|u_n\|_X \rightarrow +\infty$ . Entonces  $\lambda_\infty = \lambda_1$  y la sucesión  $\{u_n/\|u_n\|_X\}$  converge a  $-\Phi_1$ .

*Demostración.* Es suficiente demostrar que si  $\{\lambda_n\} \rightarrow \lambda_\infty$  y  $\{u_n\} \subset X$  satisfacen  $F(\lambda_n, u_n) = 0$  y  $\|u_n\|_X \rightarrow +\infty$ , entonces  $\lambda_\infty = \lambda_1$  y existe una parcial  $w_{n_k}$  de  $w_n \equiv u_n/\|u_n\|_X$  que es convergente en  $X$  a  $-\Phi_1$ .

Comencemos observando que  $w_n$  satisface

$$w_n = K \left( \lambda_n w_n^- + \frac{g(x, u_n)}{\|u_n\|_X} \right).$$

De  $(f_1)$  se obtiene que  $g(x, u_n)/\|u_n\|_X$  converge a cero en la topología de  $C(\bar{\Omega})$  y, por la compacidad de  $K$ , se deduce la existencia de una parcial  $w_{n_k}$  de  $w_n$  que converge en  $X$  a alguna función  $w_0$  con  $w_0 = K(\lambda w_0^-)$ . Dado que  $w_0 \neq 0$ , por el principio del máximo [26, 41] obtenemos que  $\lambda_\infty = \lambda_1$  y  $w_0 = -\Phi_1$ , lo que concluye la demostración del lema. ■

A continuación comprobamos que  $\lambda_1$  es, de hecho, un punto de bifurcación desde el infinito. Para ello, denotamos por  $\Sigma$  el conjunto de soluciones de (4.1), es decir,  $\Sigma = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X / F(\lambda, u) = 0\}$ .

**Lema 4** *Sea  $g$  una función real localmente lipschitziana en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  verificando (4.2) y  $g(\cdot, 0) \not\equiv 0$ . Entonces,  $\lambda_1$  es (el único) punto de bifurcación desde el infinito para  $(P_\lambda)$ . Más específicamente, existe un conjunto  $\Sigma_\infty \subset \Sigma$  que bifurca desde el infinito y satisface*

- a)  $\{(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times X / z \neq 0 \text{ y } (\lambda, z/\|z\|^{-2}) \in \Sigma_\infty\} \cup \{\lambda_1, 0\}$  es un conexo.
- b) Para todo par  $(\lambda, u) \in \Sigma_\infty$ ,  $u$  no es una función positiva.

Si además  $g(x, 0) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}$ , entonces

- c)  $\text{Proy}_\lambda \Sigma_\infty = \{\lambda \in \mathbb{R} / \exists u \in X \text{ con } (\lambda, u) \in \Sigma_\infty\}$  está acotado inferiormente y no superiormente.

*Demostración.* Para demostrar la existencia de  $\Sigma_\infty$  bifurcando desde el infinito seguimos las ideas de [4, 44]. En primer lugar, observemos que el problema de encontrar una bifurcación desde el infinito se puede reducir a un problema de bifurcación desde el cero usando la transformación de Kelvin  $z = u\|u\|^{-2}$  ( $u \neq 0$ ). Concretamente, si definimos  $\tilde{F}(\lambda, z) = \|u\|^{-2}F(\lambda, u)$  si  $u \neq 0$  y  $\tilde{F}(\lambda, 0) = 0$ , entonces  $\lambda_1$  es un punto bifurcación desde el infinito para  $(P_\lambda)$  si, y sólo si es un punto de bifurcación desde la solución trivial  $z = 0$  para la ecuación  $\tilde{F}(\lambda, z) = 0$ .

Así, si demostramos que el índice de  $\tilde{F}(\lambda, \cdot)$  cambia cuando  $\lambda$  "atraviesa"  $\lambda_1$ , deducimos por el Teorema de Bifurcación Global de Rabinowitz [45] que  $\lambda_1$  es realmente un punto de bifurcación desde  $z = 0$  para  $\tilde{F}(\lambda, z) = 0$ . Con el objetivo de comprobar este cambio de índice, consideramos  $\lambda < \lambda_1 < \bar{\lambda}$ . Por el Lema 3 existe  $r_0 > 0$  tal que

$$\tilde{F}(\lambda t, 0) \neq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall 0 < \|z\|_X \leq r_0$$

y

$$(1-s)z + s\tilde{F}(0, z) \neq 0, \quad \forall s \in [0, 1], \quad \forall 0 < \|z\|_X \leq r_0$$

Por lo tanto, por la propiedad de invarianza homotópica del índice, se obtiene que el índice de  $\tilde{F}(\lambda, \cdot)$  en la solución (aislada) trivial  $u = 0$  es

$$\begin{aligned} i(\tilde{F}(\lambda, \cdot), 0) &= \text{deg}(\tilde{F}(\lambda, \cdot), B_{r_0}(0), 0) = \text{deg}(\tilde{F}(0, \cdot), B_{r_0}(0), 0) \\ &= \text{deg}(Id, B_{r_0}(0), 0) = 1 \end{aligned}$$

Por otra parte, tomemos  $R_0 > 0$  tal que para cada  $t \in [0, 1]$  el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \bar{\lambda}u^- + g(x, u) - t\Phi_1, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

no tenga solución  $u \in X$  con  $\|u\|_X \geq R_0^{-1}$ . Entonces, deducimos otra vez por la invarianza del grado por homotopías que

$$i(\tilde{F}(\bar{\lambda}, \cdot), 0) = \text{deg}(\tilde{F}(\bar{\lambda}, \cdot), B_{R_0}(0), 0) = \text{deg}(\tilde{F}(\bar{\lambda}, \cdot) - \Phi_1, B_{R_0}(0), 0) = 0$$

Por consiguiente, por el Teorema de Bifurcación Global de Rabinowitz, existe un subconjunto conexo y no acotado  $\tilde{\Sigma}_0$  en la clausura de  $\tilde{\Sigma} = \{(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times X / z \neq 0, \tilde{F}(\lambda, z) = 0\}$  tal que  $(\lambda_1, 0) \in \tilde{\Sigma}_0$ .

Puesto que  $g(\cdot, 0) \neq 0$ ,  $u = 0$  no es solución de  $F(\lambda, u) = 0$ , o equivalentemente,  $\tilde{F}(\lambda, z) = 0$  no tiene puntos de bifurcación desde el infinito. Por lo tanto,  $Proy_\lambda \tilde{\Sigma}_0$  no está acotado. Así, tomando  $\Sigma_\infty := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X / u \neq 0, (\lambda, z) = (\lambda, u\|u\|^{-2}) \in \tilde{\Sigma}_0\}$  queda probado a). Observemos que este conjunto  $\Sigma_\infty$  no contiene ninguna solución positiva. Efectivamente, en otro caso, por el Lema 3, existiría un entorno de  $(\lambda_1, 0)$  en  $\tilde{\Sigma}_0$  formado exclusivamente por soluciones negativas; y obtendríamos que  $\tilde{\Sigma}_0$  "conecta" soluciones positivas y negativas. Notando por  $P$  el cono de las soluciones no negativas de  $X$ , un argumento elemental de conexión de  $\tilde{\Sigma}_0$  nos proporcionaría la existencia de un par  $(\lambda, w) \in \tilde{\Sigma}_0$  con  $w \in \partial P \setminus \{0\}$ , i.e.  $(\lambda, w\|w\|^{-2}) \in \Sigma_\infty$  con  $w\|w\|^{-2} \in \partial P \setminus \{0\}$ . Esto sería una contradicción con el principio del máximo probando b).

Para probar c) basta ver que  $Proy_\lambda \Sigma_\infty = Proj_\lambda (\tilde{\Sigma}_0 - \{(\lambda_1, 0)\})$  está acotado inferiormente. Para ello, sea

$$\lambda_* = \sup \left\{ \lambda < 0 / \frac{g(x, s)}{s} < -\lambda, \forall x \in \bar{\Omega}, \forall s < 0 \right\}$$

Observemos que tal número  $\lambda_*$  existe porque  $g(x, 0) > 0, \forall x \in \bar{\Omega}$ , y que, si  $\lambda < \lambda_*$ , entonces  $g(x, s) + \lambda s > 0$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$  y  $s \leq 0$ . Por consiguiente, toda solución  $u$  de  $(P_\lambda)$  con  $\lambda < \lambda_*$ , verifica, utilizando el principio del máximo, que  $u \in \overset{\circ}{P}$ . Teniendo en cuenta que  $\Sigma_\infty$  no contiene ninguna solución positiva, concluimos por tanto que  $Proj_\lambda \Sigma_\infty \subset [\lambda_*, \infty)$ . ■

**Nota 5** Es posible dar una descripción más precisa del conjunto  $\Sigma_\infty$ . Definamos  $\underline{a}(x) = \liminf_{s \rightarrow -\infty} g(x, s)$  y  $\bar{a}(x) = \limsup_{s \rightarrow -\infty} g(x, s)$  para todo  $x \in \Omega$ . Multiplicando  $(P_\lambda)$  por  $\Phi_1$  e integrando, obtenemos que para cualquier solución  $u$  de  $\Sigma_\infty$  se verifica

$$\int_{\Omega} (g(x, u) + \lambda u^- - \lambda_1 u) \Phi_1 dx = 0$$

de donde, para valores de  $\lambda$  suficientemente próximos a  $\lambda_1$ , y teniendo en cuenta que entonces las soluciones de  $\Sigma_\infty$  son negativas, deducimos

$$\int_{\Omega} g(x, u)\Phi_1 dx = (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u\Phi_1 dx$$

De esta última expresión podemos deducir el siguiente resultado:

- a) Si  $\int_{\Omega} \underline{u}\Phi_1 dx > 0$  entonces  $\Sigma_{\infty}$  bifurca desde la dcha. de  $\lambda = \lambda_1$ .
- b) Si  $\int_{\Omega} \bar{u}\Phi_1 dx < 0$  entonces  $\Sigma_{\infty}$  bifurca desde la izda. de  $\lambda = \lambda_1$ .

Podemos contrastar los resultados generales obtenidos en el Lema 4 y la Nota 5, con el ejemplo concreto de la Sección I.2. En ésta, considerá-ba-mos el problema  $(P_{\lambda})$  cuando  $g \equiv 1$  y  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , es decir en el ambiente del Lema 4. En este caso, como consecuencia de los resultados expuestos en dicha sección, y como bien se puede apreciar en la Fig. 1 (Sección I.2), el mayor conexo  $\Sigma_{\infty}$  que podemos considerar es el formado por la función  $w_1$  y las cuatro ramas que bifurcan desde ésta; es decir, siguiendo la notación de la Sección I.2.,

$$\Sigma_{\infty} = \left\{ u_{\lambda}^{1-}, \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2) \right\} \cup \left\{ u_{\lambda}^{1+, 1-}, \lambda > \lambda_1 \right\} \cup \left\{ u_{\lambda}^{1-, 1+}, \lambda > \lambda_1 \right\} \\ \cup \left\{ u_{\lambda}^{2+, 1-}, \lambda > \lambda_1 \right\} \cup \{w_1\} .$$

*Demostración del Teorema 1.* Estamos ya en disposición de llevar a cabo la prueba completa del Teorema 1. Por el Lema 4, existe un conjunto  $\Sigma_{\infty}$  de soluciones de  $(P_{\lambda})$  bifurcando desde el infinito y satisfaciendo a), b) y c). Recordando que  $f_0$  es el truncamiento por  $M$  de  $f$  basta, por tanto, para concluir la prueba, verificar que

$$u(x) \leq u_0(x) (\leq M), \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

para cada  $(\lambda, u) \in \Sigma_{\infty}$ . El argumento que utilizaremos es similar al usado en [25]. Razonamos por contradicción suponiendo que existe

$(\widehat{\lambda}, \widehat{u}) \in \Sigma_\infty$  tal que  $u_0 - \widehat{u} \notin P$ . Además, utilizando que  $\Sigma_\infty$  bifurca desde el infinito y el Lema 3, existirá un par  $(\bar{\lambda}, \bar{u}) \in \Sigma_\infty$  con  $\bar{u} < 0 < u_0$  en  $\Omega$  y  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} > 0$  en  $\partial\Omega$ . Por consiguiente,  $u_0 - \bar{u} \in \overset{\circ}{P}$ . De nuevo, un argumento de conexión proporciona la existencia de  $(\lambda, u) \in \Sigma_\infty$  con  $u_0 - u \in \partial P$ .

Por otra parte, puesto que  $f$  es localmente lipschitziana, es posible tomar  $\alpha > 0$  tal que

$$\begin{aligned} -\Delta(u_0 - u) + \alpha(u_0 - u) &= [\alpha u_0 + \lambda u_0^- + g(x, u_0)] \\ &\quad - [\alpha u + \lambda u^- + g(x, u)] \geq 0, \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Por el principio del máximo,  $u = u_0 > 0$ , lo cual es una contradicción con  $b$ ) del Lema 4. ■

*Demostración del Teorema 2.* Basta observar que por la conexión de  $\widetilde{\Sigma}_0$  y la Nota 5-b) el conjunto  $\Sigma_\infty$  atraviesa  $\lambda = \lambda_1$ . ■

### IV.3. Un caso particular.

Entre otras hipótesis, para aplicar los Teoremas 1 y 2 necesitamos la existencia de una supersolución positiva  $u_0$  de (4.1). A continuación indicamos un caso particular especialmente interesante en el que esto ocurre. Sea  $f(x, s) = \gamma g(x, s) + \lambda s^-$  con  $\gamma > 0$  y sea  $g$  una función localmente lipschitziana en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  satisfaciendo  $g(x, 0) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ . En este caso, demostraremos que existe  $\gamma_0 > 0$  tal que el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \gamma g(x, u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$



tiene alguna solución positiva para  $\gamma \in (0, \gamma_0)$ . Efectivamente, probaremos este resultado por el método de las sub-supersoluciones. La hipótesis  $g(x, 0) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ , es equivalente a que 0 es subsolución del problema anterior para todo  $\gamma > 0$ . Por otra parte consideremos la única solución  $e$  del problema de Poisson

$$\left. \begin{aligned} -\Delta e &= 1, & x \in \Omega \\ e &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

La función  $e$  (positiva, por el principio del máximo) será supersolución de (4.4) si, y sólo si  $\gamma g(x, e(x)) \leq 1, \forall x \in \bar{\Omega}$ . Por lo tanto si tomamos  $\gamma_0 > 0$  tal que  $g(x, e(x)) \leq \frac{1}{\gamma_0}, \forall x \in \bar{\Omega}$ , obtendremos que  $e$  es una supersolución positiva de (4.4) para todo  $\gamma \in (0, \gamma_0)$ , obteniéndose así el resultado requerido.

Por lo tanto, considerando la solución positiva obtenida de (4.4), como supersolución del problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= \gamma g(x, u) + \lambda u^-, & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

deducimos de los Teoremas 1 y 2:

**Corolario 6** *Supongamos que  $g$  es una función localmente lipschitziana en  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  satisfaciendo que  $g(x, 0) > 0$  para todo  $x \in \Omega$  y que (uniformemente en  $x \in \Omega$ ) se verifica  $\lim_{s \rightarrow -\infty} g(x, s)/s = 0$ . Entonces, existe  $\gamma_0 > 0$  tal que para  $\gamma \in (0, \gamma_0)$  el problema (4.5) tiene, al menos, una solución positiva. Además, si se verifica bien*

*i)  $\lambda > \lambda_1,$*

*o bien*

*ii)  $\lambda = \lambda_1$  y  $\int_{\Omega} \limsup_{s \rightarrow -\infty} g(x, s) \Phi_1(x) dx < 0,$*

*entonces (4.5) tiene otra solución  $u$  tal que  $u(x_0) < 0$  para algún  $x_0 \in \Omega$ . ■*

Incluso podemos afirmar un poco más: si  $f$  tiene crecimiento superlineal en  $+\infty$  (en concreto si  $f$  verifica la condición  $(f_3)$  del capítulo II), pero subcrítico, entonces existe una segunda solución positiva de (4.4). Efectivamente, para demostrar este resultado, observemos que la primera solución positiva encontrada se halla estrictamente comprendida entre una subsolución y una supersolución. Esto significa que dicha solución es un mínimo relativo del funcional de Euler restringido a  $C^1(\bar{\Omega})$ . Un resultado de Brézis y Nirenberg [15] muestra que, de hecho, es un mínimo relativo en la topología de  $H_0^1(\Omega)$ . La superlinealidad de  $f$  implica que el funcional de Euler no está acotado inferiormente. Deducimos, entonces, que dicho funcional verifica las condiciones geométricas del Teorema de Paso de Montaña. Por otra parte, la condición  $(f_3)$  del capítulo anterior antes mencionada, garantiza la condición de compacidad de Palais-Smale. Concluimos, pues, la existencia de la segunda solución positiva de (4.4).

# NOTAS FINALES

Esta última parte de la Memoria está dedicada a la exposición de algunas cuestiones que surgen de manera natural al hacer un detallado análisis de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. Algunos de los problemas que plantearemos se pueden considerar posibles líneas en la continuación de nuestro trabajo de investigación. Otras cuestiones, sin embargo, podemos considerarlas como resultados puntuales que vendrían a cerrar con más detalle la teoría desarrollada a lo largo de esta Memoria.

- Sería interesante estudiar las propiedades de monotonía de la función  $\lambda_1(M)$  de la Definición 26 del Capítulo I, para obtener resultados exactos sobre la multiplicidad del problema  $(P_\lambda)$  para cada  $\lambda > 0$  fijado. Por ejemplo, si se consiguiese probar que  $\lambda_1(M)$  es estrictamente creciente en un intervalo  $(0, M')$  y estrictamente decreciente en  $(M', M_1)$  entonces el número de soluciones de tal problema (considerando el número de ceros en  $[a, b]$ ) dependería de la posición de  $\lambda > 0$  con respecto a los valores  $n^{\frac{2(p-q)}{p-1}} \lambda_1(M')$ . Concretamente obtendríamos que, fijado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(P_\lambda)$  tendría exactamente dos pares de soluciones opuestas entre sí con  $n + 1$

ceros en  $[a, b]$  si  $\lambda < n^{\frac{2(p-q)}{p-1}} \lambda_1(M')$ ; un par de soluciones de este tipo si  $\lambda = n^{\frac{2(p-q)}{p-1}} \lambda_1(M')$ ; y ninguna solución de esta clase si  $\lambda > n^{\frac{2(p-q)}{p-1}} \lambda_1(M')$ .

- Con la notación expuesta a lo largo del Capítulo II, el Teorema 3 de dicho capítulo se puede enunciar como que  $\gamma_{2,(0,1)} = \frac{\pi^2}{4}$ . Parece demasiado descabellado obtener en general un cálculo explícito de  $\gamma_{p,\Omega}$ . Sin embargo, siguiendo las ideas del Teorema 3, es posible obtener este valor en el caso unidimensional. Concretamente, para cualquier intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  y  $p > 1$ , se obtiene

$$\gamma_{p,(a,b)} = \frac{p-1}{(b-a)^p} \left( \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{\frac{1}{p}}} \right)^p,$$

que es exactamente el primer autovalor del p-laplaciano en  $(a, b)$  con condiciones de frontera mixtas.

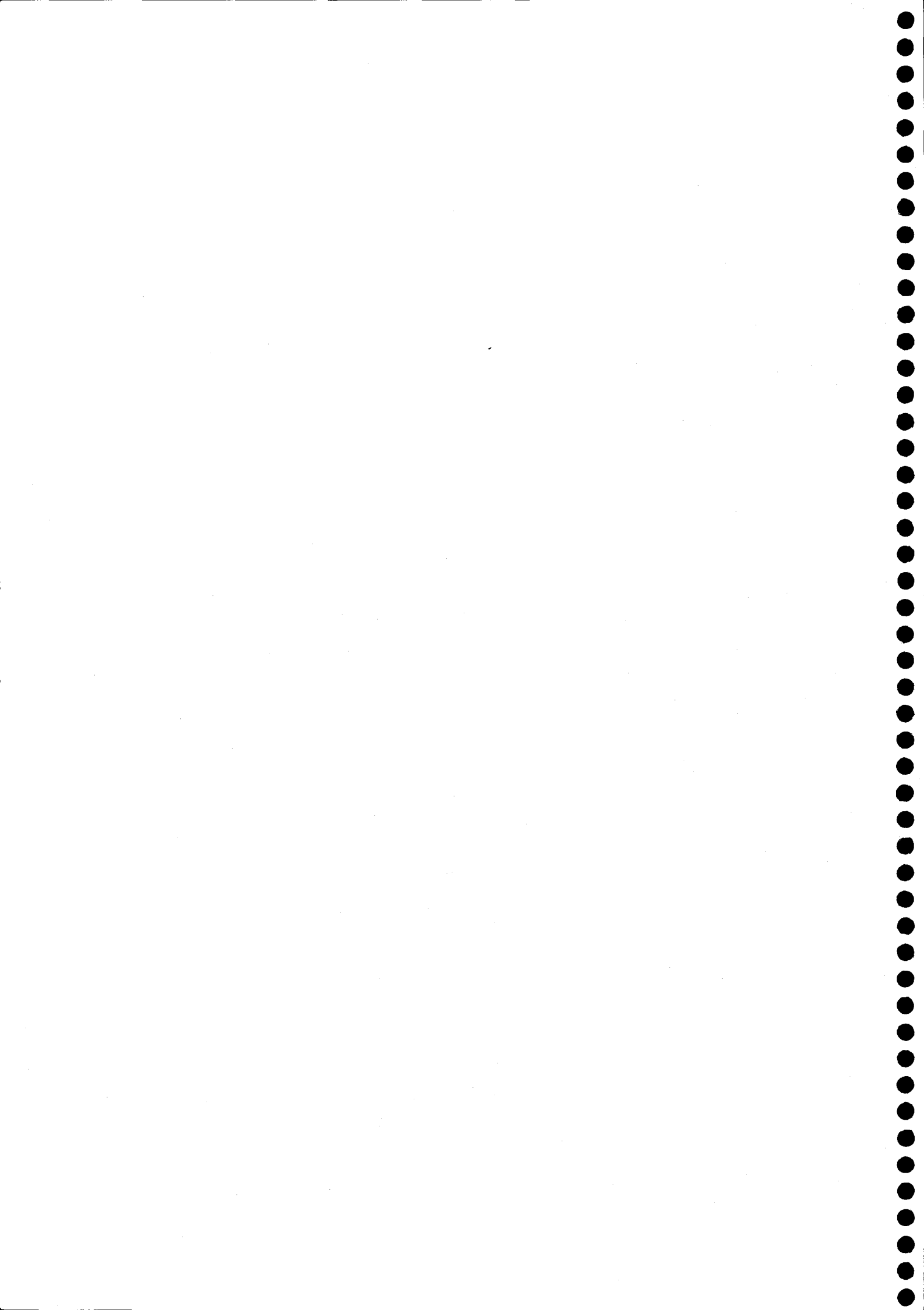
- Una cuestión natural es plantearse si el Teorema 2 del Capítulo II es válido si reemplazamos el número  $\pi^2/4$  por un valor mayor  $\alpha$ . Más aún, sería deseable obtener el valor óptimo  $\alpha$  para el que cabe esperar existencia de solución para cualquier  $h \in L^2(0, 1)$ . Desde este punto de vista, el Teorema 2 asegura que  $\frac{\pi^2}{4} \leq \alpha$ . El siguiente ejemplo muestra que  $\alpha \leq \pi^2$ .

**Ejemplo.** Consideremos el problema

$$\left. \begin{aligned} -u'' &= \pi^2 u + h(x), & x \in (0, 1) \\ u'(0) &= u'(1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

donde  $h \in L^2(0, 1)$ . Como es conocido, puesto que  $\pi^2$  es el segundo autovalor de  $-d^2/dx^2$  con condiciones de Neumann en la frontera, este problema tiene solución si, y sólo si  $\int_0^1 h(x) \cos \pi x \, dx = 0$ .

- En este mismo Capítulo II cabe plantearse el correspondiente problema en E.D.P.. En el Capítulo III se estudia este problema una vez conocida una solución trivial, pero una futura línea de investigación consistiría en eliminar esta hipótesis. De hecho, la condición de Palais-Smale del funcional de Euler no representaría ningún problema, porque es posible demostrar que el Lema 3 del Capítulo III es igualmente válido si añadimos un término  $h \in L^2(\Omega)$  a la no-linealidad  $f$  (véase [9]).
- En el Capítulo IV obtenemos una rama de soluciones que comienza siendo negativas y no contiene a ninguna función positiva. Sería muy interesante estudiar si esta rama siempre contiene funciones que cambian de signo. Así ocurre, por ejemplo, en el problema desarrollado en la Sección I.2.



## Bibliografía

1. ADAMS, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
2. AMBROSETTI, A., *Critical points and nonlinear variational problems*, Bull. Soc. Math. France **120** (1992).
3. AMBROSETTI, A., BRÉZIS, H. Y CERAMI, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519-543.
4. AMBROSETTI, A. Y HESS, P., *Positive Solutions of Asymptotically Linear Elliptic Eigenvalue Problems*, J. Math. Anal. Appl. **73** (1980), 411-422.
5. AMBROSETTI, A. Y PRODI, G., *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach Spaces*, Ann. Math. Pura Appl. **93** (1973), 231-247.
6. AMBROSETTI, A. Y RABINOWITZ, P. H., *Dual Variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.
7. AMANN, H., *Fixed points equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Review **18** (1976), 620-709.
8. AMANN, H. Y HESS, P., *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **84** (1979), 145-151.

9. ARCOYA, D. Y VILLEGAS, S., *Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at  $-\infty$  and superlinear at  $+\infty$* , Math. Z. **219** (1995), 499-513.
10. ARCOYA, D. Y VILLEGAS, S., *Dirichlet problems with asymmetric nonlinearities*, Aparecerá en Comm. Appl. Nonlinear Anal. **4** 1 (1997) (Comunicación previa en los Proceedings del "XIV CEDYA", Vic (Barcelona), (1995)).
11. BERGER, M.S. Y PODOLAK, E., *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Indiana U. Math. J. **24** (1975), 837-846.
12. BOCCARDO, L., ESCOBEDO, M. Y PERAL, I., *A Dirichlet problem involving critical exponent*, Nonl. Anal. TMA **24** (1995) 1639-1648.
13. BRÉZIS, H., *Analyse fonctionnelle et applications*, Masson, París, 1983.
14. BRÉZIS, H. Y NIRENBERG, L., *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure and Applied Math. **XLIV** (1991), 939-963.
15. BRÉZIS, H. Y NIRENBERG, L.,  *$H^1$  versus  $C^1$  local minimizers*, C.R. Acad. Sci. París **317**, Série I (1993), 465-472.
16. BROWDER, F.E., *Infinite dimensional manifolds and nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Ann. of Math. **82** (1965), 459-477.
17. CHANG, K.C., *Variational methods and sub- and super-solutions*, Scientia Sinica (Serie A) **36** (1983), 1256-1265.
18. DANCER, E.N., *Boundary-value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations*, Bull. Austral. Math. Soc. **15** (1976), 321-328.
19. DE FIGUEIREDO, D.G., *The Ekeland Variational Principle with applications and detours*, Springer-Verlag, 1989.



20. DE FIGUEIREDO, D.G., *On superlinear elliptic problems with nonlinearities interacting only with higher eigenvalues*, Rocky Mountain J. Math. **18** (1988), 287-303.
21. DE FIGUEIREDO, D.G. Y RUF, B., *On a superlinear Sturm-Liouville equation and a related bouncing problem*, J. Reine Angew. Math. **421** (1991), 1-22.
22. DE FIGUEIREDO, D.G. Y SOLIMINI, S., *A variational approach to superlinear elliptic problems*, Comm. PDE **9** (1984), 699-717.
23. DOLPH, C.L., *Nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, Trans. A.M.S. **66** (1949), 289-307.
24. FUČIK, S., *Remarks on a result by A. Ambrosetti and G. Prodi*, Boll. U.M.I. **11** (1975), 259-267.
25. GAMEZ, J.L., *Sub- and Super- solutions in Bifurcation Problems*, Aparecerá en Nonl. Anal. TMA.
26. GILBARG, D. Y TRUDINGER, N., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.
27. HAMMERSTEIN, A., *Nichtlinear Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Math. **54** (1930), 117-176.
28. IGLISCH R., *Existence und Eindeutigkeit Satze bei nichtlinear Integralgleichungen*, Math. Ann. **108** (1933), 161-161.
29. KANNAN, R. Y ORTEGA, R., *Existence of solution of  $x'' + x + g(x) = p(t)$ ,  $x(0) = 0 = x(\pi)$* , Proc. A.M.S. **96** (1986), 67-70.
30. KRASNOSEL'SKII, M.A., *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, McMillan, New York, 1964.

31. LAETSCH T., *The number of solutions of a nonlinear two point boundary value problem*, Indiana U. Math. J. **20** (1970), 1-13.
32. LANDESMAN, E. Y LAZER, A., *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech. **19** (1970), 609-623.
33. LAZER, A. Y MCKENNA, P., *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **95A** (1983), 275-283.
34. LAZER, A. Y MCKENNA, P., *Recent multiplicity results for nonlinear boundary value problems*, Diff. Equ. **32** (1984), 391-396.
35. LAZER, A. Y MCKENNA, P., *Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear Analysis*, SIAM Review **32** (1990), 537-578.
36. LERAY, J. Y SCHAUDER, J., *Topologie et equations fonctionelles*, Ann. École Norm. **51** (1934), 45-68.
37. LUSTERNIK, L. Y SCHNIRELMANN, L., *Methodes topologique dans les problèmes variationnels*, Herman and Cie, Paris, 1934.
38. MORSE, M., *Relations between the critical points of a real function of  $n$  independent variables*, Trns. Amer. Math. Soc. **27** (1925), 345-396.
39. PALAIS R. S., *Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds*, Topology **5** (1966), 115-132.
40. PALAIS, R.S. Y SMALE, S., *A generalized Morse theory*, Bull Amer Math. Soc. **70** (1964), 165-171.
41. PROTTER, M.H. Y WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

42. RABINOWITZ, P.H., *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of Erich Rothe, Academic Press, New York (1978), 161-177.
43. RABINOWITZ, P.H., *Nonlinear Sturm-Liouville problems for second order ordinary differential equations*, Comm. Pure and Applied Math. **23** (1970), 939-961.
44. RABINOWITZ, P.H., *On bifurcation from infinity*, J. Diff. Equations **14** (1973), 462-475.
45. RABINOWITZ, P.H., *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7** (1971), 487-513.
46. RABINOWITZ, P.H., *Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **5** (1978), 215-223.
47. RABINOWITZ, P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C.B.M.S. Publicado por la A.M.S. 1984.
48. RUF, B. Y SOLIMINI, S., *On a class of superlinear Sturm-Liouville problems with arbitrarily many solutions*, SIAM **17** (1986), 157-163.
49. RUF, B. Y SRIKANTH, P.N., *Multiplicity results for ODE's with nonlinearities crossing all but a finite number of eigenvalues*, Nonlinear Anal. TMA **10** (1986), 157-163.
50. SCHWARTZ, J.T., *Generalizing the Lusternik-Schnirelmann theory of critical points*, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 307-315.
51. SILVA, E.A., *Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonl. Anal. TMA **16** (1991), 455-477.

52. TONELLI, L., *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Zanichelli, Bologna, 1921.
53. VAINBERG, V.V., *Variational methods for the study of nonlinear operators*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
54. VILLEGAS, S., *A Neumann problem with asymmetric nonlinearity and a related minimizing problem*, Preprint.
55. VILLEGAS, S., *On the structure of the solutions of a B.V.P. with a concave-convex nonlinearity*, Aceptado para publicación en los Proceedings del "Equadiff 95", Lisboa (Portugal), (1995).