DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

La Tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación.

TESIS DOCTORAL

Anexos

Francisco Ruiz López

GRANADA 2000

Anexo 1.1

Selección inicial de aspectos básicos y actividades que se pueden plantear en torno a las tablas numéricas y la Tabla-100

Cuestiones básicas sobre las tablas numéricas

- Qué es una tabla numérica.

- Caracterización de las tablas como sistema para presentar y organizar números.
    Información que se presenta.
    Datos y relaciones que se destacan.
    Ideas previas de los alumnos sobre la tabla numérica.

- Cómo se forman las tablas
    Reglas de generación de tablas.
    Operaciones aritméticas que intervienen.
    Criterios que se pueden utilizar para formar una tabla.

- Antecedentes de las tablas.
    Sucesiones numéricas.
    Disposiciones de los números en líneas rectas, espirales, sinusoides, etc.
    Antecedentes históricos: primeras tablas numéricas.

- Estructura y normativas que podemos encontrar en las tablas.

- Regularidades en las tablas.
    Regularidades aritméticas.
    Regularidades de tipo geométricas.

- Características que podemos observar en una tabla numérica
    Según los límites de la tabla.
    Según el tipo de números.
    Según las reglas de formación.
    Como resultado de la resolución de problemas

- Tablas con límites definidos
    Tabla de los 100 primeros números naturales. Tabla-100.
    Tabla de la suma (del 0 al 9).
    Tabla de la resta (del 0 al 9).
    Tabla de la multiplicación (del 0 al 9)

- Tablas con límites indefinidos.
  Números combinatorios.
  Triángulo de Pascal.
  Triángulo fibonomial (Generalizaciones de los números de Fibonacci).

La tabla - 100

1. Preguntas que se pueden hacer sobre la tabla.

2. Observaciones generales

Características de las filas y de las columnas.
Dado un número de la tabla ¿Cómo son los números que le rodean?.
¿Qué dígito es el que más se repite y el que menos se repite?
Calcular la suma en cada fila. ¿Cuál es la diferencia?
Tratar de explicar los resultados.
Idem por columnas. Relación.

3. Patrones de tipo aritmético.

Sumar los números de las diagonales (paralelas a la diagonal principal y secundaria).

Calcular las primeras y segundas diferencias. Patrón que se observa.

Partiendo de un número, obtener las sumas de los números que están a la derecha y encima (añadiendo cada vez un número nuevo).

Obtener las diferencias y comparar los resultados cuando cambiamos de dirección (izquierda y debajo, o izquierda y encima, o derecha, y debajo).

Comparar los patrones cuando mantenemos una dirección fija y las otras son opuestas. Tratar de explicar los resultados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4. Patrones aritméticos en "configuraciones geométricas".

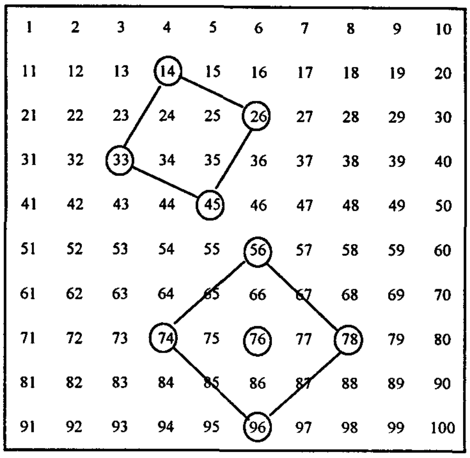
Dibujar cuadrados cuyos lados no contengan ningún número de la tabla y comparar las sumas de los vértices con la suma de los números interiores obteniendo la razón entre dichas sumas.

Si mantenemos el tamaño del cuadrado pero cambiamos la posición, ¿Se mantiene el mismo patrón?

Idem con otros cuadrados de otro tamaño y con un número central y números en el centro de los lados.

Cuadrados concéntricos

Cuadrados con parte de lados comunes.



5. Patrones relacionados con la divisibilidad.

Señalar los números divisibles por 2.
Cuántos hay.
Patrones en las columnas y en las filas.
Obtener una regla de divisibilidad por 2 y extenderla a números de 3 y 4 cifras.

Números divisibles por 4.
Relación con los múltiplos de 2.
Patrones en las filas y columnas.
Idem con los múltiplos de 8.
Relación entre ellos.
Idem con múltiplos 3, 6 y 9.
Idem con los múltiplos de 5 y 10.
Explicar los distintos patrones que se obtienen al señalar los múltiplos de 5.
¿Qué múltiplos generan patrones diagonales?
¿Y movimientos en L, como el del caballo de ajedrez?

6. Divisibilidad y transformaciones geométricas.

Si hacemos una transparencia que rodee los múltiplos de 7 y le damos la vuelta y la colocamos sobre la tabla, ¿Qué número señalan ahora?
¿Y si cambiamos la transparencia de posición (giros)?
¿Y si la trasladamos 1, 2, 3, ... n lugares a la derecha, izquierda, arriba o abajo?
¿Qué ocurre con los múltiplos de otros números?

¿En qué casos no se alteraría los números señalados? (Invariación de los múltiplos mediante transformaciones)

7. Múltiplos de varios números.

Si coloreamos los múltiplos de 3 en rojo y los de 4 en amarillo:
¿Cuáles quedarían coloreados en naranja?
Describir los números que se queden en rojo, amarillo, en blanco.
Si coloreamos los múltiplos de 4 en amarillo y los de 6 en azul:
¿Cuáles serían verdes, amarillos, azules, blancos?
Idem con los múltiplos de 3 en rojo y los de 6 en azul.

Coloreando los múltiplos de 3 en rojo, los de 4 en amarillo y los de 6 en azul
¿Qué preguntas podemos hacer?
¿Qué resultados podríamos esperar?
Idem con coloración de otros conjuntos de múltiplos.
¿Se podría establecer algún tipo de correspondencia entre los colores y los múltiplos de los números?

8. Números cuadrados.

Rodear los números que sean cuadrados (perfectos) y observar:
Posibles patrones
Hay columnas que no contienen números cuadrados. ¿Se mantendrían esas columnas vacías de números cuadrados aunque la tabla fuera mayor?
¿Se podría probar que no existe un número cuadrado que esté en la columna del 2, 3, 7, u 8?

9. Números triangulares.

Si señalamos los números triangulares en la tabla vemos que hay columnas vacías.
¿Se mantendrían si la tabla la agrandamos?

10. Números cubos.

¿Pueden los cubos de los números terminar en cualquier dígito?
¿Y los números primos?

11. Patrones y transformaciones geométricas.

Supongamos que hacemos una transparencia que es fotocopia de la Tabla-100. Giremos la transparencia 90° en sentido positivo, y sumemos los dos números que coinciden en cada casilla (realizar la experiencia imaginariamente, en primer lugar):

¿Cuál sería el número más pequeño, y el más grande?
¿Serían todos los números diferentes?
¿Cómo se dispondrían los números ahora?
Considerar otras transformaciones del cuadrado, mediante giros de 180°, 270°, reflexiones según los distintos ejes de simetría.

12. Traslaciones.

Considerar el desplazamiento de la transparencia una columna a la derecha, arriba o abajo. ¿Qué les pasa a las celdillas que se superponen?
¿Y si consideramos desplazamientos en diagonal?
¿Y si nos movemos como lo haría el caballo de ajedrez?
Combinación de dos de algunos de estos movimientos.

13. Otros desplazamientos.

Si cortamos en zig-zag la Tabla-100 de forma que obtengamos dos partes que encajen con ciertos desplazamientos ¿Cuál es ahora la diferencia entre dos números consecutivos a cada lado del corte?

¿Es la misma para todos los casos?

¿Se puede explicar por qué?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

14. Movimiento del caballo.

¿Podríamos ir del 1 al 100 siguiendo los pasos del caballo de ajedrez?

¿Cuál sería la manera más rápida posible?

Si sumamos los números sobre los que nos colocamos, ¿Cuál será el mínimo, y el máximo?

¿Y el mínimo impar total y el máximo par total?

¿Qué clase de cambio numérico produce el movimiento del caballo?

Los números 13, 21, 27, 33, 51, 57, 63, 69 tienen de especial que todos ellos (situados en la tabla) tienen por encima y por debajo suyo un número primo. ¿Cómo son esos números?

Si continuamos la tabla, ¿Qué otros conjuntos de números podríamos escribir?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

15. Vectores.

Designemos por

d = movimiento de un cuadrado a la derecha.
i = movimiento de un cuadrado a la izquierda
a = movimiento de un cuadrado arriba.
b = movimiento de un cuadrado debajo.

Podemos explorar expresiones como 2d, a + b, 2d + i, etc.

Usar estas expresiones para explicar los ejercicios de divisibilidad, transformaciones, etc.

Anexo 3.1

Características y preguntas sobre la Tabla-100

Curso: Primero Expresión musical
Fecha: 22 de Noviembre de 1994

Transparencia 1: Tabla-100

1. Escribe características de la tabla

- Tabla de 10 x 10.
- Números pares e impares por columnas.
- Diagonales de números con una ley de formación.
- El primer número de cada fila acaba en 1 y el último en 0.
- Diferencia de l0 números entre uno y el de abajo.
- Todos los números de una columna acaban igual.
- 100 números ordenados en 10 filas de 10.
- Si multiplicamos los números horizontales por los verticales nos da el mismo número.
- Tabla simétrica de números naturales. Lados iguales.
- Me recuerda el Bingo.
- Se podría hacer un sistema de 10 ecuaciones y 9 incógnitas.
- Número de elementos de la tabla = número de filas x número de columnas.
- Cuadrado equilátero.
- Verticalmente se incrementan de 10 en 10.
- Diagonalmente de 11 en 11 o de 9 en 9.
- Es una tabla de multiplicar.
- Al multiplicar las 2 coordenadas en la que se encuentra el número nos da dicho número.
- Hay al menos 25 cuadrados (100:4=25).
- La decena = al número de columna.
- El primer número es el 1 y el último el 100.
- Tabla ordenada de menor a mayor.
- Tabla bien ordenada.
- Las filas se corresponden.
- Cuadrado que encierra 4 cuadrados.
- Sucesión de 1 al 100 ordenados en filas de 10.
- No se repite ningún número.
- "Correlación" ordenada de los números de menor a mayor.
- Columnas ordenadas por decenas.
- Filas ordenadas por unidades.
- Empieza en un número de 1 cifra y termina en uno de 3.
- Todos los números están 18 veces menos el 0 que está 11 veces.
- La primera fila tiene 9 números de una sola cifra.
- En cada columna se mantiene la unidad y cambia la decena.
- La diagonal principal aumenta de 11 en 11.

- Cuadrado que podríamos dividir en 100 cuadrados (cada número).
- Multiplicando por 10 la primera fila obtenemos la segunda.
- Números ordenados cada uno en su sitio. Están donde tienen que estar.
- Sucesión de números reales.
- En diagonal el número siguiente es 11 veces mayor que el anterior.

2. Preguntas que se pueden hacer sobre la tabla

- ¿Qué relación tienen los números que resultan de trazar líneas diagonales?
- Números pares (impares) que tiene un número a su alrededor.
- Números pares e impares en las diagonales.
- Números de raíz exacta.
- Por qué llevan ese orden.
- ¿Por qué la filas van separadas de 10 en 10?
- ¿Cómo podríamos estudiar la tabla de multiplicar con este cuadrado?
- ¿Qué quedaría si quitásemos 2 números de cada 3?
- Suma de todos los números impares de la tabla.
- ¿Por qué si hay la misma distancia en las diagonales la relación es impar y en las verticales par?
- ¿Para qué sirven esos números?
- ¿Si la consideramos como un sistema de ecuaciones con 9 incógnitas, cómo es, compatible o incompatible?
- Elegir un número y decir cuales le rodea.
- Suma de todos los números.
- ¿De cuántas maneras podemos desde el 1 llegar al 100?
- ¿Por qué el 1 esta en todos los vértices del cuadrado que forma?
- ¿Qué pasaría si multiplicáramos por su matriz inversa?
- ¿Se podría construir una aplicación biyectiva entre todos los elementos?
- Busca números de este cuadrado que sumen 100.
- ¿Cuántos cuadrados con un número mínimo de cifras podemos encontrar en este cuadrado?
- Que figuras podríamos formas si la dividimos en 4, o 3 partes iguales?
- ¿Qué pasaría si se colocan los números correlativos en vertical? ¿o en horizontal pero de derecha a izquierda?
- ¿Y si la tabla fuera otro polígono?
- ¿Se podrían colocar los 100 números de otra forma que nos diera otra figura geométrica de lados iguales?
- ¿Si permutamos filas por columnas?
- ¿Por qué hay solo los dibujos 1, 2, ...9?
- ¿Podemos hacer un dibujo uniendo dibujos diferentes?
- Número de conjuntos de 4 números.
- Dividimos la tabla en 4 triángulos que determinan las dos diagonales: ¿Cuánto suman los números de esos triángulos?
- Suma de los números pares e impares.
- Diferencia entre dos números consecutivos en fila, columna, diagonal.
- Suma de las 5 últimas filas menos la suma de las 5 primeras.

- Cuántos números son múltiplos de 3, 4, ...
- ¿Qué resulta si multiplicamos cada vez por el número siguiente:
 1 x2=2, 2 x 3=6, 6x4=24, ...
- Elegir un número y compararlo con los de su entorno (arriba, izquierda).
- ¿Cuántas filas salen si tuvieran 20 números?
- ¿Se conservan las características si añadimos más filas?
- ¿Cuál es el número central?
- ¿Cuántos números habría en un triángulo rectángulo perfecto?
- Idem dentro de una circunferencia de radio 3 unidades.
- ¿Se puede formar alguna figura juntando algún número?
- Suma de la diagonal principal.
- Números divisibles por 100 en la tabla.
- ¿Cuántos números se pueden multiplicar como máximo para que el resultado no sea superior a 100?
- Número de números que habría si quitásemos el 0, el 1, ...
- ¿Cómo continuar la tabla hacia arriba, derecha, etc?
- ¿Qué tienen de común el último número de una fila y el primero de la siguiente?
- ¿Qué tipo de triángulo está formado por los números 1, 4, 31?
- ¿Qué pasaría si dividiéramos la tabla en dos triángulos rectángulos perfectos?
- Suma de las esquinas. Suma de los números del centro. Relación.
- ¿Dónde estaría situado numéricamente la mitad de la tabla?
- ¿Son todos los números que hay debajo de un número divisibles por él?
- ¿Qué números podrían aparecer entre dos números consecutivos en la tabla?
- Cortar la tabla por la mitad y superponerla restando el 50 del 1, etc. ¿Qué se obtendría?
- Doblar el cuadrado por la mitad superponiendo números y sumándolos. ¿Cómo sería el rectángulo resultante?
- La relación de los números en una diagonal me recuerda la regla nemotécnica para la configuración electrónica de un átomo.
- ¿Qué sucedería si el número 4 se empeñara en ocupar el número 14, aún sabiendo él que no le corresponde ese lugar?
- ¿Qué consecuencias padecería este cuadro que da esta apariencia de perfección y de estar todo en su sitio y la fila del 31 al 40 por razones x no pudiera asistir a tal acontecimiento?
- Números capicúos de la tabla.
- ¿Cuántos 9 hay?
- Relación (proporción) entre las sumas de las filas.
- ¿Sirve para encontrar los números primos?
- ¿Por qué el 10 está formado por 2 cifras?
- Cómo son los números de la columna del 7?
- ¿Cuántos números primos hay en la tabla?
- ¿Cuántos números formarían un cuadrado?
- Relación entre un número y los que le rodean.
- Al quitar las dos diagonales quedarían 4 triángulos. Sumar los números de cada uno.
- Otras disposiciones de los números 1 al 100.
- Partes de la tabla.

- Tabla de sumar, de multiplicar (forma canónica) por 2, por 3.
- ¿De cuánto en cuánto van aumentando los números de la raya?
- ¿Cuánto disminuye la segunda cifra de cada número de la diagonal?
- ¿Qué números tiene el cuadrado formado por 45, 46 55, 56?
- ¿Si tomo un número de las esquinas los puedo relacionar con los que le rodean?
- ¿Existe un número central?
- ¿Podré predecir lo que obtendré al hacer operaciones de un número con los que le rodea, sabiendo lo que le ocurre a uno?
- ¿Los que están arriba y debajo de cualquier número elegido, por qué son pares y no impares?
- ¿Qué forma geométrica se da?
- ¿Cómo se formaría el número que tenemos encima y debajo del número elegido?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Transparencia 2

Transparencia número 2: diagonales en la tabla.
Preguntas que se pueden hacer.

- Suma de las diagonales.
- ¿Qué números encabezan las líneas?
- ¿Por qué ocurre? ¿Ocurre siempre?
- ¿Es casualidad?

Transparencia número 3: cuadrados.

Describe lo ves.

- Cuadrados que me recuerdan la estructura de un átomo.
- Diferencias de vértices de lados opuestos, iguales.
- Son poliedros de la misma superficie
- Cuadrados cuyos vértices están formados por círculos que tienen un número.
- Cuadrados o según se vea, rombos.
- Paralelogramos con vértices elegidos al azar.
- Una especie de rombos..
- Cuadrados aleatorios en cuyo interior hay 4 números.
- Figuras de igual superficie
- Cuadrados con números en los extremos. " pares y 2 impares.
- Cuadrados y sus ángulos marcados por círculos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Transparencia 3

Preguntas

- ¿Al restar todos los números que se encuentran dentro del poliedro dan lo mismo?
- ¿Cuánto vale la suma de los números de los vértices?
- Relación entre los números dentro del círculo y los más cercanos a éstos.
- Aplicando el teorema de Pitágoras ¿Qué valor tiene ese cuadrado?
- ¿Por qué los lados del cuadrado no coincide con ningún número?
- Números pares (impares) dentro de cada cuadrado.
- Diferencia entre vértices opuestos.

Anexo 3.2

Ideas previas sobre tablas numéricas y la Tabla-100

Curso: Tercero de Ciencias.
Fecha: 14 de Marzo de 1995

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 1:Tabla-100

A. ***Ideas previas sobre tablas numéricas***:
1. ¿Qué es una tabla numérica?
2. Cita tres ejemplos de tablas numéricas:
3. Tablas numéricas de uso más frecuente. Entorno o ambiente donde aparecen.
4. ¿Qué utilidad tienen las tablas numéricas?

B. ***La tabla de los 100 primeros números naturales***.
5. Describe la tabla anterior
6. Cita las características generales que encuentres en ella.
7. Semejanzas y diferencias entre las filas:
8. Idem con columnas:
9. Dígito que más se repite:
10. Dígito que menos se repite:

11. Compara un número cualquiera de la tabla con los cuatro que le rodean. Comenta tus observaciones:

12. Suma los números de cada fila. (Fig. 2)
a. Completa el cuadro de la fig. 2 sumando los números de cada fila (columna Suma).
b. Calcula las diferencias entre dichas sumas (columna 1ª Dif.)
c. Calcula las diferencias entre las anteriores diferencias (columna 2ª Dif.)

d. Comenta los resultados que encuentres.

										Suma	1ª Dif	2ª Dif
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55	100	0
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	155		
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30			
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50			
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60			
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70			
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90			
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100			

Fig. 2

13. Efectúa de la misma manera la suma de los números de cada columna. Calcula las diferencias entre esas sumas y las diferencias entre las primeras diferencias. Comenta los resultados.

14. Completa el cuadro de la Fig. 3 sumando los números de todas las diagonales paralelas a las que están señaladas (Columna Suma).

a. Calcula las diferencias entre dichas sumas (Columna 1ª Dif.)
b. Calcula las diferencias entre las diferencias anteriores (Columnas 2ª Dif.)
c. Comenta los resultados.

15. Repite la actividad anterior con las diagonales en sentido contrario. Compara los resultados con el ejercicio anterior.

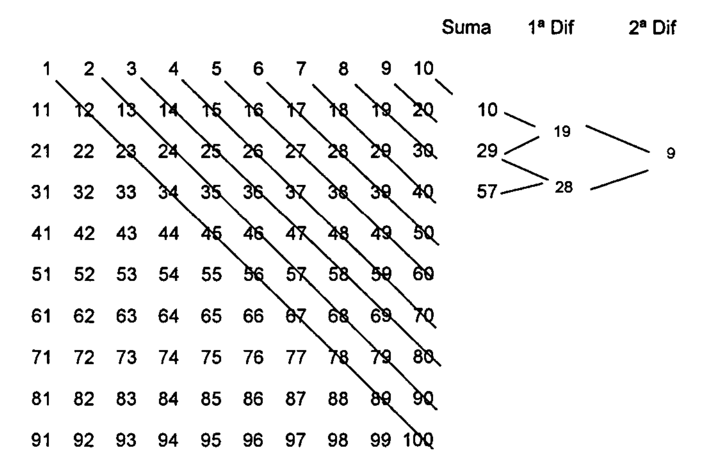


Fig. 3

Anexo 3.3

Patrones numéricos en la Tabla-100

Curso: Tercero de Ciencias

1.- *Patrones geométricos en la tabla de los 100 primeros números*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 2

En la tabla 1 hay marcados dos cuadrados A y B del mismo tamaño (de dos números por lado). Señala en la tabla 2 otros dos cuadrados del mismo tipo (C y D), aunque estén en otra disposición, y completa la tabla 3 de la siguiente manera:

a).- Suma los números que hay en sus vértices (V).
b).- Suma los números interiores al cuadrado (I).
c).- Calcula el cociente V/I.
d).- Expresa brevemente las regularidades que observes:

Cuadrados	V	I	V/I
A			
B			
C			
D			

Tabla 3

2.- Consideremos ahora cuadrados de mayor tamaño, con tres números por lado y con un número central, como los cuadrados E y F de las tablas 4 y 5, respectivamente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	E 47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	F 33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 5

Señala otros dos cuadrados del mismo tamaño (G y H) en las tablas 6 y 7, y completa la tabla 8, teniendo en cuenta que **V** es la suma de los números de los vértices, **I** la suma de los números interiores al cuadrado, y **P** la suma de los números que están en el perímetro. **C** es el número central.

Cuadrado	V	P	I	C	V/C	P/I	(I-C)/C
E							
F							
G							
H							

tabla 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 7

Expresa brevemente las regularidades de las tres últimas columnas:

3.- Observa las dos colecciones de **cuadrados encajados** de las tablas 9 y 10:

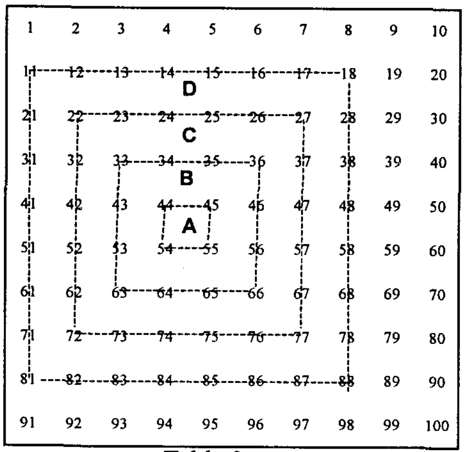


Tabla 9

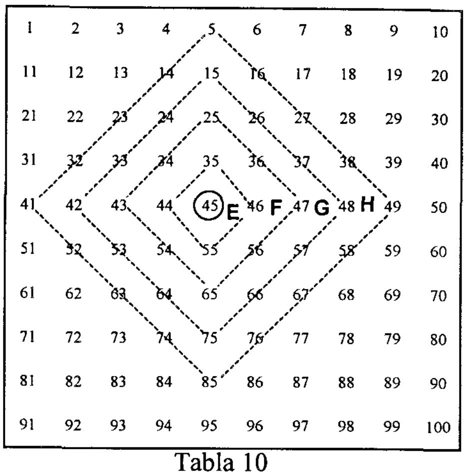


Tabla 10

Completa la tabla 11, teniendo en cuenta que:

P(X) es la suma de los números del perímetro del cuadrado X.
n(P) es la cantidad de números del perímetro de cada cuadrado.
C es el número central en los cuadrados E a H.

Cuadrado	P(X)	P(X)/P(A)	n(P)	Cuadrado	P(X)	P(X)/C
A				E		
B				F		
C				G		
D				H		

Tabla 11

Enuncia con una frase los resultados obtenidos para cada colección de cuadrados:
a).- Para los cuadrados A, B, C, D, ...
b).- Para los cuadrados E, F, G, H, ...

4.- Aspectos de divisibilidad en la Tabla-100:

En la tabla 12:
a).- Rodea con un círculo los múltiplos de 2.
¿Cómo se disponen geométricamente esos números?

b).- Rodea con un triángulo los múltiplos de 4. ¿Cómo se disponen geométricamente?

c).- Enuncia dos reglas que identifique a los múltiplos de 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 12

c.1.- De tipo aritmético:
c.2.- De tipo geométrico:

d).- Rodea con un cuadrado los múltiplos de 8. ¿Qué patrones geométricos observas?
e).- Enuncia dos reglas que determine si un nº es divisible por 8:

e.1.- De tipo aritmético:
e.2.- De tipo geométrico:

Anexo 3.4

Patrones, cadenas y transformaciones en la Tabla-100

Curso: Quinto de Matemáticas.
Fecha: 14 de diciembre de 1995

1. En la figura 1 hay trazadas algunas líneas junto con el criterio que las describe. Dibuja en la misma tabla de la figura otras líneas distintas junto con su ley descriptora.

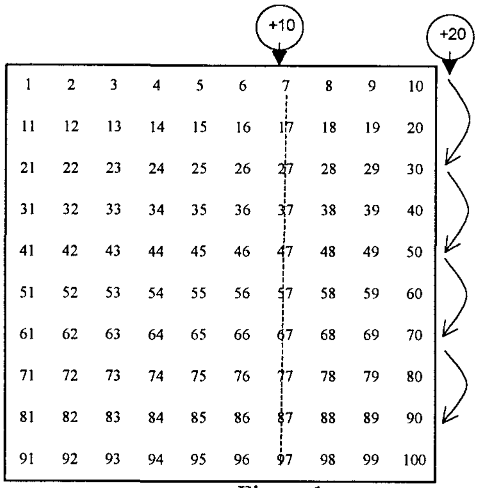


Figura 1

2. En la figura 2 está representada la operación $17 + 11 = 28$.

a. Señala de igual modo en la misma tabla las operaciones:

14 + 19 + 22 - 10, sin efectuar los cálculos previamente.

b. Explica los pasos dados

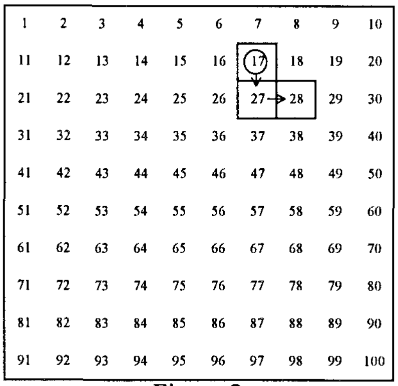


Figura 2

3. Dibuja en la figura 3 la operación "**sumar 21**", (36+21=57) representada por un patrón en forma de L, al que también llamaremos **operador [+21]** . Los pasos (criterios) empleados vienen dados por:

↓ (sumar 10), ↓ (sumar 10), → (sumar 1)

a. Dibuja en la misma tabla otros patrones que correspondan al operador **[+21]**, señálalos con las letras A, B, C, ... y explica igualmente los criterios (pasos) empleados:

b. Dibuja en la figura 4 el patrón más corto que corresponda a:

- "**restar 21**" (márcalo con [-21])
- "**sumar 19**" (márcalo con [+19])
- "**sumar/restar 21**" (márcalo con [21])
- "**sumar/restar 19**" (márcalo con [19])
- tres patrones nuevos de tu elección.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 3

Describe los pasos (criterios) de los tres patrones que has elegido

patrón	notación	pasos
A		
B		
C		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 4

4. Aplica el patrón "**sumar/restar 21**" [21] al número 36 de la figura 5:

36+21=57; 57-21=36

a. Somete dicho patrón a una reflexión de eje vertical (R_v). ¿Qué operador has obtenido?

El resultado obtenido es: "**El operador [21] mediante la reflexión R_v se convierte en el operador [ ].**

O más esquemáticamente: R_v ([21]) = ([ ])

b. Aplica a ambos patrones, una reflexión de eje horizontal (R_h) ¿Qué operadores obtienes ahora?

Completa:

R_v ([21]) = ([ ])

R_v ([ ]) = ([ ])

R_h ([ ]) = ([ ])

R_h ([ ]) = ([ ])

R_v

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	R_h
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

Figura 5

c. ¿Qué movimiento geométrico transforma a un operador en él mismo?

d. Trata de explicar los resultados obtenidos.

Anexo 3.5

Encuesta sobre las actividades realizadas con la Tabla-100 en G70, G3 y G1

Marca las casillas cuya respuesta consideres que se aproxima más a tu opinión sobre la pregunta. Puedes señalar más de una respuesta en caso necesario. La última casilla está reservada para escribir otra respuesta que consideres oportuna.

1. La tabla 100 coloreada atendiendo a los múltiplos de k. Desplazamientos sobre la tabla y su identificación con las operaciones aritméticas básicas. Estas actividades:

A ❑ Resultan útiles para la comprensión de la operaciones aritméticas básicas.
B ❑ Son apropiadas para practicar el cálculo.
C ❑ Mejoran la comprensión del sistema de numeración decimal.
D ❑ Permiten descubrir reglas para calcular más rápido.
E ❑ No tienen un mayor interés.
F ❑

2. Reconocimiento de patrones visuales en la Tabla-100 coloreada (diagonales, patrones en L, columnas, etc) . Estas actividades:

A ❑ Desarrollan la capacidad de visualización de regularidades aritméticas y geométricas.
B ❑ Permiten una visión de los números y las operaciones aritméticas desde otro punto de vista. (no sólo aritmético).
C ❑ No aportan nada nuevo de interés.
D ❑

3. Actividades con polígonos que se forman al unir múltiplos de un número. (Cálculo del área de paralelogramos y polígonos que se forma al unir múltiplos de k, etc.)
Estas actividades:

A ❑ Proporcionan una mejor comprensión del concepto de área.
B ❑ Permiten ver una mayor relación entre polígonos y números.
C ❑ Sólo sirven para calcular el área de polígonos con otro procedimiento (fórmula de Pick).
D ❑ No aportan nada interesante, salvo que es un pasatiempo.
E ❑

4. Identificación de las cadenas con operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Proporcionan una visión más geométrica de la suma y resta de números.
B ❑ Mejoran la idea previa sobre la estructura algebraica de grupo.
C ❑ Ayudan a comprender mejor lo que son las clases de equivalencia.
D ❑ No tienen mayor interés. Introducen más confusión que aclaración.
E ❑

5. Utilización de las transformaciones geométricas (isometrías) con las cadenas y operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Mejoran la idea de isometría.
B ❑ Ayudan a entender mejor el comportamiento de los operadores aditivos y las cadenas.
C ❑ Dan más información sobre el desarrollo aritmético de un número y de un operador.
D ❑ Introducen más confusión.
E ❑

6. Utilización de la Tabla-100 con 7 columnas en relación con los operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Aportan más comprensión sobre los operadores aditivos y los desarrollos aritméticos de los números.
B ❑ Mejoran la comprensión de los sistemas de numeración.
C ❑ No aportan nada especialmente útil e interesante.
D ❑

7. En general, las actividades con tablas numéricas realizadas a lo largo del curso:

A ❑ Me han aclarado conceptos que antes no tenía muy claros.
B ❑ Me han permitido ver desde otro punto de vista algunas ideas y conceptos.
C ❑ No entendía bien las actividades.
D ❑ No me han aportado nada nuevo ni interesante.
E ❑

Tabla general de resultados

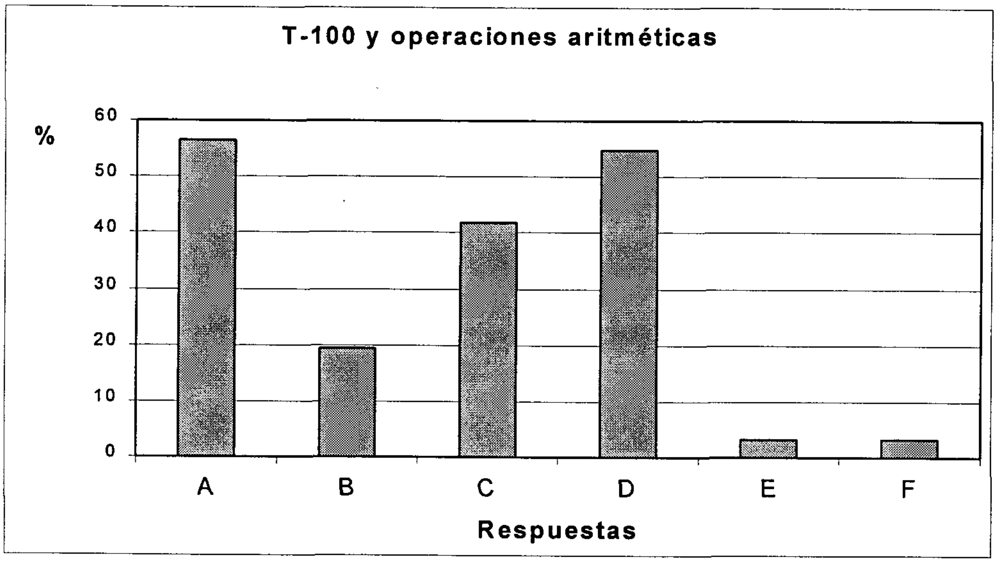
Respuestas	Items						
	1	2	3	4	5	6	7
A	35 (56,5)	38 (61,3)	35 (56,5)	44 (71,0)	41 (66,1)	44 (71,0)	22 (35,5)
B	12 (19,4)	44 (71,0)	46 (74,2)	21 (33,9)	31 (50,0)	48 (77,4)	47 (75,8)
C	26 (41,9)	2 (3,2)	9 (14,5)	20 (32,3)	20 (32,3)	3 (4,8)	15 (24,2)
D	34 (54,8)	1 (1,6)	2 (3,2)	5 (8,1)	4 (6,5)	2 (3,2)	1 (1,6)
E	2 (3,2)	0 (0,0)	4 (6,5)	1 (1,6)	2 (3,2)	0 (0,0)	1 (1,6)
F	2 (3,2)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)	0 (0,0)

Entre paréntesis figuran los % referidos al total de alumnos consultados 62, incluidos los componentes de G70, G3 y G1.

Resultados de cada ítem

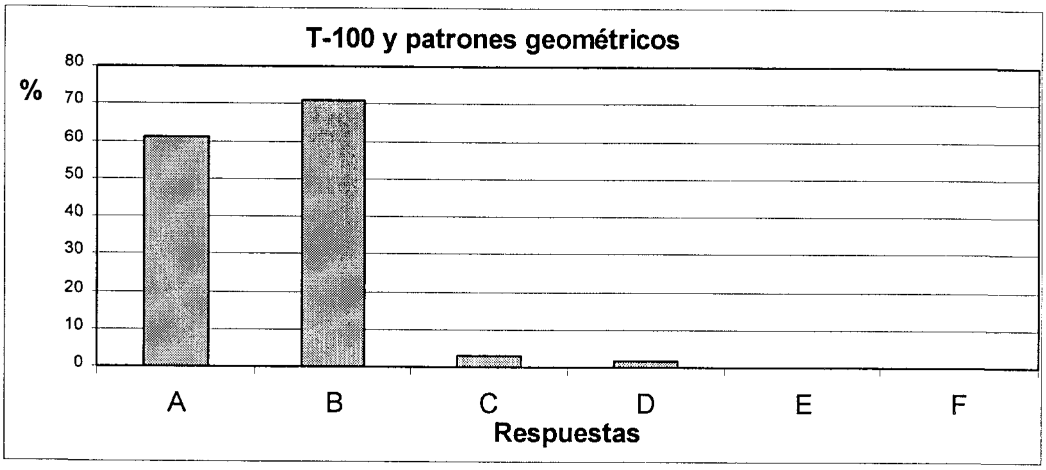
1. La tabla 100 coloreada atendiendo a los múltiplos de k. Desplazamientos sobre la tabla y su identificación con las operaciones aritméticas básicas. Estas actividades:

A ❑ Resultan útiles para la comprensión de la operaciones aritméticas básicas. (56,1)
B ❑ Son apropiadas para practicar el cálculo. (19,4)
C ❑ Mejoran la comprensión del sistema de numeración decimal. (41,9)
D ❑ Permiten descubrir reglas para calcular más rápido. (54,8)
E ❑ No tienen un mayor interés. (3,2)
F ❑ Otras: Rebajan el nivel teórico de la clase (1,6)
Favorecen la participación del alumno y refuerzan el interés (1,6)



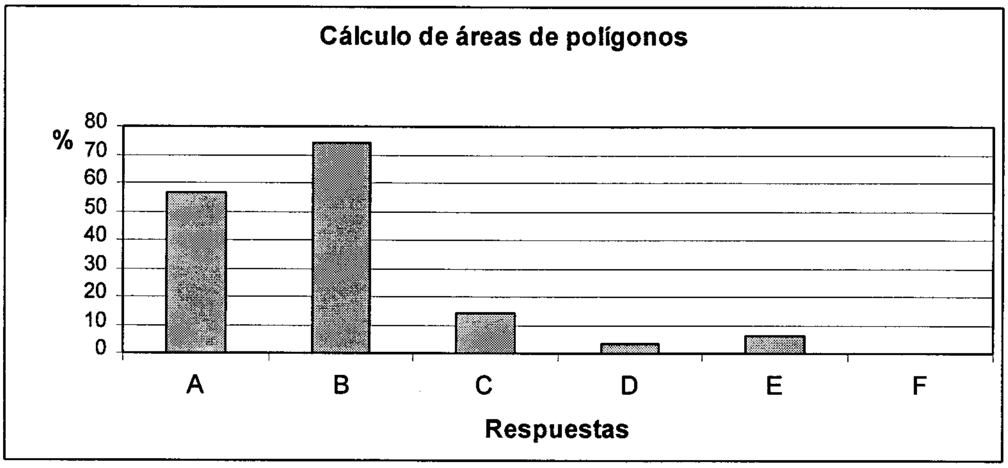
2. Reconocimiento de patrones visuales en la Tabla-100 coloreada (diagonales, patrones en L, columnas, etc) . Estas actividades:

A ❑ Desarrollan la capacidad de visualización de regularidades aritméticas y geométricas (61,3)
B ❑ Permiten una visión de los números y las operaciones aritméticas desde otro punto de vista. (no sólo aritmético) (71,0)
C ❑ No aportan nada nuevo de interés (3,2)
D ❑ Otras: Descargan de contenido teórico a las clases (1,6)



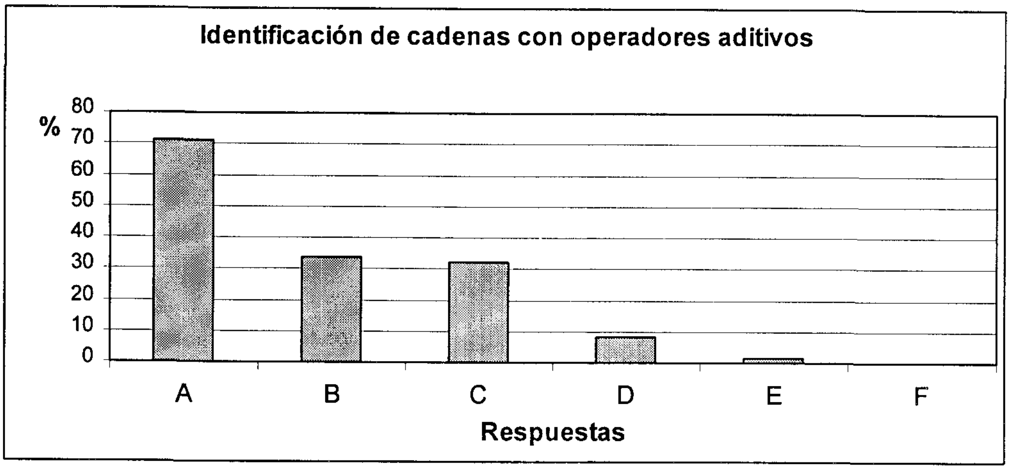
3. Actividades con polígonos que se forman al unir múltiplos de un número. (Cálculo del área de paralelogramos y polígonos que se forma al unir múltiplos de k, etc.).
Estas actividades:

A ❑ Proporcionan una mejor comprensión del concepto de área (56,5)
B ❑ Permiten ver una mayor relación entre polígonos y números (74,2)
C ❑ Sólo sirven para calcular el área de polígonos con otro procedimiento (fórmula Pick) (14,5)
D ❑ No aportan nada interesante, salvo que es un pasatiempo (3,2)
E ❑ Otras: Sirven para la enseñanza del cálculo de áreas de polígonos (4,8)
Se produce un aprendizaje significativo del cálculo de áreas de forma práctica (1,6)



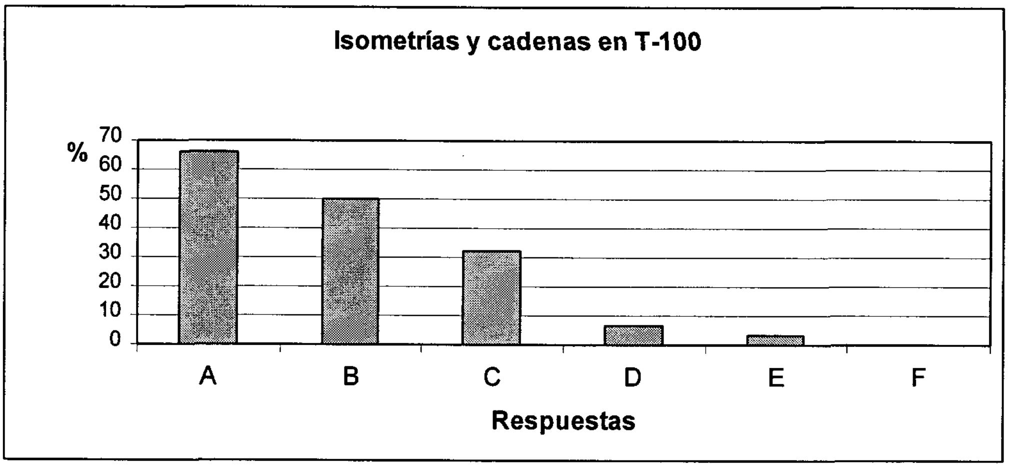
4. Identificación de las cadenas con operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Proporcionan una visión más geométrica de la suma y resta de números (71,0)
B ❑ Mejoran la idea previa sobre la estructura algebraica de grupo (33,9)
C ❑ Ayudan a comprender mejor lo que son las clases de equivalencia (32,3)
D ❑ No tienen mayor interés. Introducen más confusión que aclaración (6,5)
E ❑ Otras: Mejor conocimiento y entendimiento de los sistemas de numeración y cambios de base (1,6)



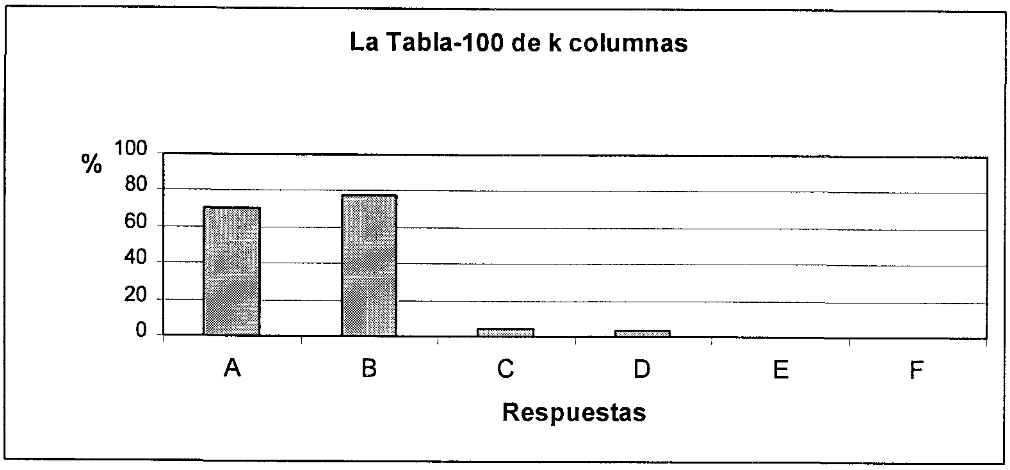
5. Utilización de las transformaciones geométricas (isometrías) con las cadenas y operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Mejoran la idea de isometría (66,1)
B ❑ Ayudan a entender mejor el comportamiento de los operadores aditivos y las cadenas (50,0)
C ❑ Dan más información sobre el desarrollo aritmético de un número y de un operador (32,3)
D ❑ Introducen más confusión (6,5)
E ❑ Otras: Para un niño las transformaciones geométricas se pueden introducir de manera más sencilla (1,6).
Manipulación propia de las transformaciones geométricas (1,6).



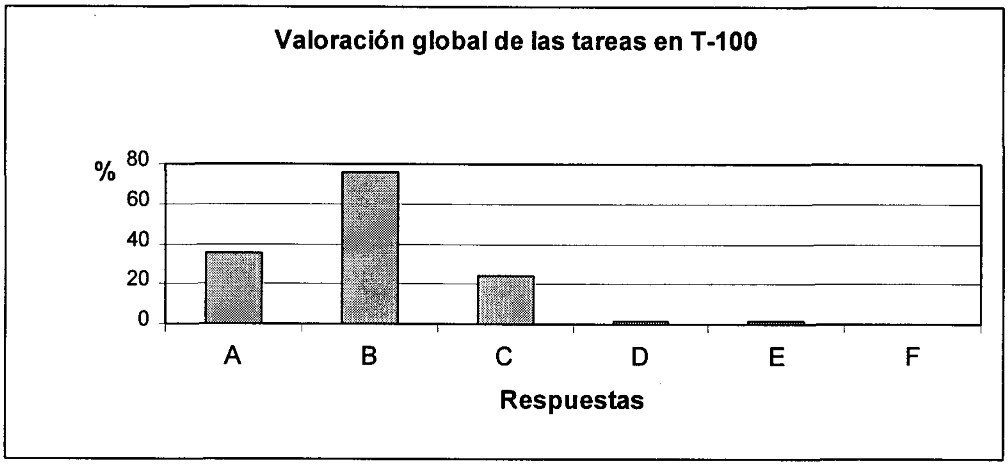
6. Utilización de la Tabla-100 con 7 columnas en relación con los operadores aditivos.
Estas actividades:

A ❑ Aportan más comprensión sobre los operadores aditivos y los desarrollos aritméticos de los números (71,0)
B ❑ Mejoran la comprensión de los sistemas de numeración (77,4)
C ❑ No aportan nada especialmente útil e interesante (4,8)
D ❑ Otras: Aportan una visión diferente de una misma realidad (1,6)
Ayudan a ver lo que significan las clases de equivalencia y números en bases distintas a 10 (1,6)



7. En general, las actividades con tablas numéricas realizadas a lo largo del curso:

A ❑ Me han aclarado conceptos que antes no tenía muy claros (35,5)
B ❑ Me han permitido ver desde otro punto de vista algunas ideas y conceptos (75,8)
C ❑ No entendía bien las actividades (24,2)
D ❑ No me han aportado nada nuevo ni interesante (1,6)
E ❑ Otras: Es útil para la práctica educativa (1,6)



La opinión de Dolores (DL), Pedro (PD), Domingo (D) y Julia (J)

1. La tabla 100 coloreada atendiendo a los múltiplos de k. Desplazamientos sobre la tabla y su identificación con las operaciones aritméticas básicas. Estas actividades:

A ❑ Resultan útiles para la comprensión de la operaciones aritméticas básicas (DL; PD; D; J)
B ❑ Son apropiadas para practicar el cálculo. (J)
C ❑ Mejoran la comprensión del sistema de numeración decimal. (J)
D ❑ Permiten descubrir reglas para calcular más rápido (DL; D; J)
E ❑ No tienen un mayor interés.
F ❑

2. Reconocimiento de patrones visuales en la Tabla-100 coloreada (diagonales, patrones en L, columnas, etc) . Estas actividades:

A ❑ Desarrollan la capacidad de visualización de regularidades aritméticas y geométricas (P; DL; J)
B ❑ Permiten una visión de los números y las operaciones aritméticas desde otro punto de vista. (no sólo aritmético) (P; D; J)
C ❑ No aportan nada nuevo de interés.
D ❑

3. Actividades con polígonos que se forman al unir múltiplos de un número. (Cálculo del área de paralelogramos y polígonos que se forma al unir múltiplos de k, etc.)
Estas actividades:

A ❑ Proporcionan una mejor comprensión del concepto de área (P; DL; D; J)
B ❑ Permiten ver una mayor relación entre polígonos y números (P; DL; D; J)
C ❑ Sólo sirven para calcular el área de polígonos con otro procedimiento (fórmula de Pick).
D ❑ No aportan nada interesante, salvo que es un pasatiempo.
E ❑

4. Identificación de las cadenas con operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Proporcionan una visión más geométrica de la suma y resta de números (P; D; J)
B ❑ Mejoran la idea previa sobre la estructura algebraica de grupo (DL; J)
C ❑ Ayudan a comprender mejor lo que son las clases de equivalencia (DL; D; J)
D ❑ No tienen mayor interés. Introducen más confusión que aclaración.
E ❑

5. Utilización de las transformaciones geométricas (isometrías) con las cadenas y operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Mejoran la idea de isometría. (J)
B ❑ Ayudan a entender mejor el comportamiento de los operadores aditivos y las cadenas (P; DL; D; J)
C ❑ Dan más información sobre el desarrollo aritmético de un número y de un operador (P; DL; D; J)
D ❑ Introducen más confusión.
E ❑

6. Utilización de la Tabla-100 con 7 columnas en relación con los operadores aditivos. Estas actividades:

A ❑ Aportan más comprensión sobre los operadores aditivos y los desarrollos aritméticos de los números (P; DL; D; J)
B ❑ Mejoran la comprensión de los sistemas de numeración (D; DL; J)
C ❑ No aportan nada especialmente útil e interesante.
D ❑

7. En general, las actividades con tablas numéricas realizadas a lo largo del curso:

A ❑ Me han aclarado conceptos que antes no tenía muy claros (PD; J)
B ❑ Me han permitido ver desde otro punto de vista algunas ideas y conceptos (P; DL; D; J)
C ❑ No entendía bien las actividades.
D ❑ No me han aportado nada nuevo ni interesante.
E ❑

Anexo 4.1

Sesiones de trabajo con G70: tareas de contexto

Primera sesión: divisibilidad y operaciones aritméticas

Tablas de resultados

Tarea 1.1a (T1.1a)

Explica el significado en términos de operaciones aritméticas de:

Bajar/subir una casilla.

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	A) Sumar/restar 10 unidades (1 decena).	RLVA	56 (88.9)	56 (88.9)
Incom-pletas	B) sumar 10.	RLVA	1 (1.6)	1 (1.6)
Inco-rrectas	C) Sumar números.	ELC RLVA	2 (3.2)	6 (9.5)
	D) s/r una casilla.	ELC RLVA	2 (3.2)	
	E) Sumar/restar 10 números.	ELC RLVA	2 (3.2)	
Total				**63**

Tabla A4.1-1 (G70-1ª sesión-tarea 1a)

Tarea 1.1b

Explica el significado en términos de operaciones aritméticas de:

Bajar/subir k casillas

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	A) Sumar/restar 10xk (k decenas)	RLVA	46 (73.0)	48 (76.2)
	B) n±kx10	RPA RLVA	2 (3.2)	
Incorrec-tas	C) Sumar/ restar k números	ELC RLVA	4 (6.3)	13 (20.6)
	D) Sumar/ restar k casillas	ELC RLVA	3 (4.8)	
	E) Sumar/ restar k unidades	EC RLVA	2 (3.2)	
	F) Sumar/ restar k	ELC RLVA	2 (3.2)	
	G) Sumar/ restar múltiplos de 10	EC RLVA	1 (1.6)	
	H) Sumar/ restar k casillas por 10	ELC RLVA	1 (1.6)	
No contesta				2 (3.2)
Total				63

Tabla A4.1-2 (G70-1ª sesión-tarea 1b)

Tarea 1.1c

Explica el significado en términos de operaciones aritméticas de:

Ir a la izquierda/derecha 3 casillas

	Respuestas	Caracte-rísticas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctas	A) Restar/sumar 3 unidades	RLVA	49 (77.8)	53 (84.1)
	B) Ir de número impar a par y viceversa	RLVA	2 (3.2)	
	C) (n-3) ó (n+3)	RPA RLVA	2 (3.2)	
Incorrec-tas	D) Encontramos múltiplo de 3	EC RLVA	6 (9.5)	10 (15.9)
	E) Multiplicar o dividir entre 3	EC RLVA	2 (3.2)	
	F) Restar/sumar 10 unidades	EC RLVA	1 (1.6)	
	G) Restar/sumar 4	EC RLVA	1 (1.6)	
Total				63

Tabla A4.1-3 (G70-1ª sesión-tarea 1c)

Tarea 1.2

Describe verbalmente cómo efectuarías la suma 24+21 desplazándote por la tabla.

	Respuestas	Caracte-rísticas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctas	**A) Utiliza desplazamientos y considera decenas y unidades**	DT RLAV		59 (93.7)
	A_1) Situados en 24, bajar 2 casillas y a la derecha 1.		24 (38.1)	
	A_2) Desde uno de ellos, bajamos tantas casillas como decenas y a la derecha tantas casillas como unidades del otro sumando.		13 (20.6)	
	A_3) Sumamos las decenas (bajar) y luego las unidades (derecha)		2 (3.2)	
	B) Utiliza desplazamientos y considera solamente unidades	DT RLAV		
	B1) Situados en el 24, nos desplazamos 21 unidades a la derecha.		12 (19.0)	
	B2) Desde el 21, nos movemos 24 unidades a la derecha		3 (4.8)	
	C) Utiliza desplazamientos y criterios de coloreado	DT;CC RLAV		
	C1) Desde el 24 adelanto 7 triángulos verdes		3 (4.8)	
	C2) Como los dos son múltiplos de 3, adelanto 7 casillas verdes.		2 (3.2)	
Incorrectas	D) Nos movemos en forma de L	ELC;DT RLAV	2 (3.2)	4 (6.3)
	E) Sumo las unidades, y da 5, que es azul; sumo las decenas (da 4). Miro en la fila del 4 y columna del 5. Da el 45.	EC; CC	1 (1,6)	
	F) Del 24 me desplazo 3 lugares a la izquierda y sumo el 21	EC; DT	1 (1,6)	
Total				**63**

Tabla A4.1-4 (G70-1ª sesión-tarea 2)

Tarea 1.3

Traduce tu frase anterior a lenguaje matemático

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Expresiones con decenas y unidades:** 24+20+1 (10) 24+(10x2)+1 (8) 24+10+10+1 (8) 21+20+4 (4) 10+10+1+el número (2) 24+21=(2x10+4)+(2x10+1) =4x10 (abajo 4) + 5 (dcha 5) (1) 21+24 = 2d+1u +2d+4u = 4d+5u (1)	RPA RLVA	34 (54.0)	38 (60.3)
	B) Expresiones en que se consideran solamente las unidades: 24+3+3+3+3+3+3+3+ = 45 (3) 24+1=25, 25+1=26, ..., 44+1= 45 (1)	RPA RLVA	4 (6.3)	
Incompletas	**C) Dan solo el resultado final:** 24+21=45 (12) 21+24=45 (2)	RPA RLVA	14 (22.2)	14 (22.2)
Incorrectas	**D) No usa lenguaje matemático:** - Se suman las unidades y luego las decenas (3) - Bajamos casillas, sumamos decenas, a la derecha sumamos unidades. (1) - Le sumo 1 a 24 y quedan 25 + 20, y sumo 1. (1)	ELS RLVA	5 (7.9)	7 (11.1)
	E) Error en la expresión: 24+10+10 = 44+1= 45 (1) N+1 – 20 (1)	ELS RPA RLVA	2 (3.2)	
No contesta				4 (6.3)
Total				**63**

Tabla A4.1-5 (G70-1ª sesión-tarea 3)

Tarea 1.4a

Describe verbalmente como antes la operación resta: 36-19

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Utiliza desplazamientos y considera decenas y unidades**	DT RLAV		49 (77.8)
	A_1) Desde el primer número, subo 2 casillas y a la derecha 1		14 (22.2)	
	A_2) Nos situamos en el primer número y subimos tantas casillas como indique las decenas del segundo sumando, y vamos a la izquierda tantos lugares como unidades del segundo sumando		14 (22.2)	
	A_3) Derecha 1 y subo 2		2 (3.2)	
	B) Utiliza desplazamientos por la tabla y considera solamente unidades: Situados en el 36 nos movemos 19 casillas a la izquierda, y da el 17	DT RLAV	14 (22.2)	
	C) Descripción gráfica	RPG RLAV		
	C_1) En forma de L inversa: 2 1		4 (6.3)	
	C_2) En forma de L inversa: 1 2		1 (1.6)	
Incorrectas	**D) Desplazamientos por la tabla**	EC; DT RLAV		14 (22.2)
	D_1) Desde el primer número, subo 2 y a la izquierda 1		5 (7.9)	
	D_2) Subo 2 y a la derecha 3		2 (3.2)	
	D_3) De la 36 me desplazo a la 40, bajo 2 y a la izquierda 5 casillas. O izquierda 1 y bajar 2		1 (1.6)	
	D_4) Partiendo del 36, bajamos una casilla y retrocedemos o restamos 9		1 (1.6)	
	E) Términos aritméticos	EC RLA		
	E_1) Restamos las unidades, da 7. Vamos a la columna de los múltiplos de 7; restamos las decenas y da 1. Buscamos un número en la columna del 7 de 1 decena y 7 unidades.		3 (4.8)	
	E_2) De la casilla 36 a la 19 hay 17 casillas, que es la solución.		2 (3.2)	
Total				**63**

Tabla A4.1- (G70-1ª sesión-tarea 1.4a)

Tarea 1.4b

Expresa lo anterior en lenguaje matemático

	Respuestas	Caracte-rísticas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctas	**A) Expresiones con decenas y unidades:** 36-10-9 (9) 36-20+1=17 (5) 36-(10+10-1)=17 (4) 36-(20-1)=17 (3) n+1-10-10 (3) 36-(2x10-1)=17 (1) 36-2x10+1=17 (1) 36-9-10=17 (1) 36=3x10+6; 19=1x10+9; 36-19=(3x10-1x10)-3 (1)	RPA RLVA	28 (44.4)	29 (46.0)
	B) Expresiones en que se consideran solamente las unidades: B_1) 36-1=35; 35-1=34; ...; 18-1=17	RPA RLVA	1 (1.6)	
Incompletas	**C) Escribe solo el resultado final:** 36-19=17	RPA RLVA	17 (27.0)	17 (27.0)
Incorrectas	**D) No utilizan lenguaje matemático** - Restamos 2 decenas y sumamos 1 unidad (2) - Como subo, resto 20, y 1 a la derecha, sumo, por tanto es 19. - Subir indica restar decenas y derecha sumar unidades. - Se restan las unidades y luego las decenas - Se suman las unidades y luego las decenas - Restar 20 unidades y sumar 3 - Resto a 36 una unidad y se la añado a 19. Quedan 2 decenas que las sumo a 35	ELS RLVA	8 (12.7)	14 (22.2)
	E) Error en la expresión: 36-(2x10-1)=15 (2) 36-10+1 1 36-2x10-1 36-10=36-10-9 36-10=26-10=16+1=17	ELS RPA RLVA	6 (9.5)	
No contesta				3 (4.8)
Total				**63**

Tabla A4.1-7 (G70-1ª sesión-tarea 4b)

Tarea 1.5

¿Qué relación encuentras entre dichas operaciones de sumar y restar?

	Respuestas	Características	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Desplazamientos por la tabla**	DT RLAV		31 (49.2)
	A_1) Sumar es bajar y a la derecha, y restar es subir y a la izquierda.		13 (20.6)	
	A_2) Son movimientos opuestos.		5 (7.9)	
	A_3) Los dos son movimientos horizontales para la suma y la resta de unidades y verticales para las decenas.		4 (6.3)	
	A_4) Son simétricos en la tabla.		2 (3.2)	
	B) Criterios aritméticos: Son operaciones opuestas.	DT RLA	7 (11.1)	
Incompletas	**C) Desplazamientos por la tabla**	DT RLAV		12 (19.0)
	C_1) Sumar se hace hacia la derecha y restar hacia la izquierda		8 (12.7)	
	C_2) Sumar es bajar y restar es subir.		2 (3.2)	
	C_3) Para sumar o restar la misma cantidad, se sube o se baja idénticas filas.		2 (3.2)	
Incorrectas	**D) Indica alguna visualización de tipo gráfico:** - Que por la tabla nos moveríamos como el caballo de ajedrez. - Para sumar es una L derecha y para restar a la inversa - Hay que efectuar 2 desplazamientos, uno en cada eje del plano.	EC DT RLAV	3 (4.8)	8 (12.7)
	E) Otras: - Se utiliza el mismo procedimiento. - El procedimiento es muy parecido. - Que al sumar o restar las unidades me indica directamente en qué columna de múltiplos se encuentra el resultado. - En que en ambas operaciones utilizamos la sucesión numérica. - Partiendo de 2 números diferentes (24 y 36), al primero se le suma lo que se le resta al segundo.	EC	5 (7.9)	
No contesta				12 (19.0)
Total				**63**

Tabla A4.1-8 (G70-1ª sesión-tarea 5)

Tarea 1.6a

Expresa brevemente los desplazamientos que harías por la tabla para realizar el producto: 4 x 7 = 28

	Respuestas	Caracte-rísticas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctas	**A) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla**:	DT CC RLAV		49 (77.8)
	A_1) Nos desplazamos a la derecha hasta el número que contenga los símbolos que identifican a los dos factores, el círculo y el triángulo.		27 (42.9)	
	A_2)- A partir del 4 contamos 7 círculos. (20) - A partir del 4 contamos 7 círculos. El resultado sé que tiene que ser un triángulo dentro de un círculo. (1) - Contando los 4 triángulos siguientes. (1)		22 (34.9)	
Incom-pletas	**B) Criterios aritméticos:** - Sumar 7 veces 4 a partir de 1. (6) - Contar 7 veces 4 empezando por la primera casilla hasta el 28. (1) - El séptimo múltiplo de 4. (1)	RLA	8 (12.7)	10 (15.9)
	C) Descripción gráfica			
	C_1) Dibujaríamos una	RPG RLAV	1 (1.6)	
	C_2) ○ x △ =	CC RPG RLAV	1 (1.6)	
Incorrec-tas	D) Bajo 2 casillas y a la derecha 4.	DT EC	1 (1.6)	2 (3.2)
	E) Desde el 4 vamos a la derecha 3 lugares y llego al 7; avanzo hacia abajo en forma de L 3 casillas y encuentro al 28.	DT EC	1 (1.6)	
No contesta				2 (3.2)
Total				**63**

Tabla A4.1-9 (G70-1ª sesión-tarea 6a)

Tarea 1.6b

Expresa brevemente los desplazamientos que harías por la tabla para realizar el producto: 7 x 4 = 28.

<table>
<tr><th></th><th>Respuestas</th><th>Características</th><th>n_i (%)</th><th>Total (%)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Correctas</td><td>A) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla</td><td>CC
DT
RLAV</td><td></td><td rowspan="3">50
(79.4)</td></tr>
<tr><td>A_1) Nos desplazamos a la derecha hasta el número que contenga los símbolos que identifican a los dos factores. Igual que antes</td><td></td><td>27
(42.9)</td></tr>
<tr><td>A_2) - A partir del 7 contamos 4 triángulos (18)
- Cuento 4 triángulos. (2)
- Nos desplazamos a la derecha contando tantos símbolos iguales a los del primer factor como nos indique el segundo factor. (2)
- Contar 7 círculos. El séptimo círculo es el resultado. (1)</td><td></td><td>23
(36.5)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Incompletas</td><td>B) Criterios aritméticos:
- Sumar 7 veces 4 a partir de 1. (4)
- El cuarto múltiplo de 7 (1)
- Contar 4 veces 7. (1)
- Contando múltiplos de 7 partiendo del 7. (1)</td><td>RLA</td><td>7
(11,1)</td><td rowspan="2">8
(12.7)</td></tr>
<tr><td>C) Descripción gráfica:
$\bigcirc$ x $\triangle$ = $\bigcirc\!\!\!\!\!\triangle$</td><td>CC
RPG
RLAV</td><td>1
(1.6)</td></tr>
<tr><td>Incorrectas</td><td>D)Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla:
A partir del 7 (triángulo), cuento hasta 7 triángulos consecutivos.</td><td>EC
CC
DT
RLAV</td><td>2
(3.2)</td><td>2
(3.2)</td></tr>
<tr><td colspan="4">No contesta</td><td>3
(4.8)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total</td><td>63</td></tr>
</table>

Tabla A4.1-10 (G70-1ª sesión-tarea 6b)

Tarea 1.7

Enuncia en términos de desplazamientos por la tabla coloreada y da nombre a la propiedad que interviene en el ejercicio anterior.

<table>
<tr><th></th><th>Respuestas</th><th>Caracterísiticas</th><th>n_i (%)</th><th>Total (%)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Correctas</td><td>A) Criterios de coloreado</td><td>DT; CC RLAV</td><td></td><td rowspan="4">31 (49.2)</td></tr>
<tr><td>A_1) - Es igual desplazarse 4 triángulos que 7 círculos. (10)
- Propiedad conmutativa. Es igual desplazarse 7 círculos desde el 4 hacia la derecha que 4 triángulos desde el 7. (8)</td><td></td><td>18 (28.6)</td></tr>
<tr><td>A_2) - Es igual buscar un número que tenga círculo y triángulo que triángulo y círculo. (9)
- Viendo donde coinciden el triángulo y círculo y contando los triángulos 4 veces, da lo mismo. Propiedad conmutativa. (2)
- Se busca la primera casilla donde coincidan ambos colores. Propiedad conmutativa. (1)</td><td></td><td>12 (19.0)</td></tr>
<tr><td>A_3) - Es lo mismo hacer la operación círculo x triángulo que triángulo x círculo; los dos se desplazan a la derecha hasta el primer número que tenga círculo y triángulo.</td><td></td><td>1 (1.6)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Incompletas</td><td>B) Criterios aritméticos</td><td>RLA</td><td></td><td rowspan="4">15 (23.8)</td></tr>
<tr><td>B_1) - Propiedad conmutativa. (5)
- nxm=sumo m veces n =mxn (3)
- 4x7=7x4; séptimo múltiplo de 4 = cuarto múltiplo de 7. (3)</td><td></td><td>11 (17.5)</td></tr>
<tr><td>B_2) El producto de dos casillas de la tabla es otra casilla que tenga las propiedades de las casillas multiplicadas.</td><td></td><td>2 (3.2)</td></tr>
<tr><td>B_3) Es igual situarse en uno de los factores y ver cuántas veces indica el otro factor que al contrario</td><td></td><td>2 (3.2)</td></tr>
<tr><td>Incorrectas</td><td>D) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla:
Contamos desde la primera casilla hacia la derecha y agrupamos según la repetición de la figura.</td><td>EC CC DT RLAV</td><td>3 (4.8)</td><td>3 (4.8)</td></tr>
<tr><td colspan="4">No contesta</td><td>14 (22.2)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total</td><td>63</td></tr>
</table>

Tabla A4.1-11 (G70-1ª sesión-tarea 7)

Tarea 1.8a

Explica de igual modo los pasos a dar para calcular el cociente 45:3

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla**	CC DT RLAV		8 (12.7)
	A_1) Contaría los triángulos verdes que hay desde el 3 al 45.		6 (9.5)	
	A_2) Desde el 45 cuento los símbolos del 3 que hay hasta el 0		1 (1.6)	
	B) Desplazamientos por la tabla	DT RLAV		
	B_1) A partir del 45 empiezo a contar de 3 en 3 hacia la izquierda, y cuento las veces que lo he hecho.		1 (1.6)	
Incom-pletas	**C) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla**	CC DT RLAV		12 (19.0)
	C_1) Contar hacia la izquierda 3 casillas con verde y azul a partir del 45.		8 (12.7)	
	C_2) Busco el número más pequeño con triángulo verde y cuadrado azul. (No tenemos en cuenta al amarillo, ya que contiene al verde). Ese número es el 15.		4 (6.3)	
Inco-rrectas	D) **Desplazamientos por la tabla**	EC DT RLAV		22 (34.9)
	D_1) Subir tantas casillas como indica el divisor partiendo del dividendo. (8) - Subir 3 casillas desde el 45. (7)		15 (23.8)	
	D_2) El resultado es la casilla que sea múltiplo de 3 y tenga las propiedades de estos dos números.		2 (3.2)	
	D_3) El resultado es el número de múltiplos que hay entre 45 y 3.	CC	2 (3.2)	
	D_4) Nos da 15, que es múltiplo de 3 y de 5.		2 (3.2)	
	D_5) Hacemos grupos deplazándonos a la derecha 15 casillas para cada grupo. Hasta 45 tenemos 3 grupos.		1 (1.6)	
No contesta				21 (33.3)
Total				**63**

Tabla A4.1-12 (G70-1ª sesión-tarea 8a)

Tarea 1.8b

Explica de igual modo los pasos a dar para calcular el cociente 47:6

	Respuestas	Caracte-rísticas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Co-rrectas	**A) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla**	CC DT RLAV		5 (7,9)
	A_1) Desde el 6 cuento los cuadrados que hay hasta el 47, sin pasarme. Nos quedamos en el 42, y le sumo los 5 que faltan hasta el 47. El resto sería.		3 (4.8)	
	A_2) Desde el 47 subo al 6 y cuento 7 cuadrados. Desde el 47 al primer cuadradito que nos encontramos, (el 42) hay 5 números, que es el resto.		2 (3.2)	
Inco-rrectas	**B) Criterios de coloreado**	EC CC RLAV		23 (36.5)
	B_1) No se puede realizar, ya que el 47 no contiene el cuadrado propio de los múltiplos de 6.		4 (6.3)	
	B_2) Contando los triángulos verdes que hay del 6 al 42; el resto, sería las casillas que quedan del 42 al 47.	DT	2 (3.2)	
	C) Desplazamientos por la tabla	DT		
	C_1) El primer múltiplo de 6 y 7 es 42. Le sumamos 5 casillas hasta llegar a 47. El resto es 5.	EC RLA	2 (3.2)	
	C_2) Contamos 7 veces 6 casillas y nos da 42; sumamos el resto que es 5.	ELC RLAV	2 (3.2)	
	C_3) Desde el 47, se suben 4 casillas y sobran 5 unidades.	EC RLAV	2 (3.2)	
	C_4) A partir del 47 cuento hacia la izquierda de 3 en 3 hasta el final.	EC RLAV	2 (3.2)	
	D) Criterios aritméticos	EC RLA		
	D_1) No existe una casilla que nos dé ese cociente al ser 47 un número primo. (4) - No se puede hacer. No da exacto. (3)		7 (11.1)	
	D_2) 47:6=7'716; 46 no es divisible por 6 y sobran 5 unidades. 6x7=42+5=47	RPA	1 (1.6)	
	D_3) Hacemos 7 grupos de 7 casillas y nos queda 1 grupo de 3 casillas.		1 (1.6)	
No contesta				35 (55.6)
Total				63

Tabla A4.1-13 (G70-1ª sesión-tarea 8b)

Tarea 1.9a

Relaciona tus respuestas con el algoritmo de la división (División 45:3)

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Co-rrectas	**A) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla**	CC DT RPA RLAV		4 (6.3)
	A_1) 45: número hasta el que se llega contando. 15: número de veces que se repiten los triángulos verdes 3: triángulos verdes. 45 |3 15 15 0		2 (3.2)	
	A_2) 45: nos situamos en el 45. 3: nos fijamos en el símbolo del 3 y contamos los símbolos iguales que hay desde el 45 al 0. 15: El número de símbolos que sale. O sea, la solución. 45 |3 15 15 0		1 (1.6)	
	B) Desplazamientos por la tabla: 45: casilla a la que se llega. 15: número de veces que se cuenta. 3: de cuanto en cuanto se cuenta. 45 |3 15 15 0	DT RPA RLAV	1 (1.6)	
Incom-pletas	**C) Expresión aritmética:** D=dxc+r (2) 45 |3 15 15 0 (2)	RPA RLA	4 (6.3)	4 (6.3)
Inco-rrectas	**D) Sin relación con el algoritmo de la división**	RLA		4 (6.3)
	- El resultado de la división exacta es el número de múltiplos que hay entre el divisor y el dividendo.	EC	2 (3.2)	
	- Dividir es retroceder tantas veces como diga el divisor.	ELC	2 (3.2)	
No contesta				51 (81.0)
Total				63

Tabla A4.1-14 (G70-1ª sesión-tarea 9a)

Tarea 1.9

Relaciona tus respuestas con el algoritmo de la división (División 47:6)

<table>
<tr><th></th><th>Respuestas</th><th>Caracte-rísticas</th><th>n_i (%)</th><th>Total (%)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Co-rrectas</td><td>A) Criterios de coloreado y desplazamientos por la tabla</td><td>CC
DT
RPA
RLAV</td><td></td><td rowspan="3">3
(4.8)</td></tr>
<tr><td>A_1) 47: número hasta el que se llega contando.
7: número de veces que se repiten los cuadrados antes del 47.
6: cuadrado naranja.
5: resto; número de casillas hasta llegar al 47.
$\begin{array}{r l} 47 & \underline{\lfloor 6} \\ 5 & 7 \end{array}$</td><td></td><td>2
(3.2)</td></tr>
<tr><td>A_2) 7: son los cuadrados
5: casillas que faltan hasta llegar a 47.
$\begin{array}{r l} 47 & \underline{\lfloor 6} \\ 5 & 7 \end{array}$</td><td></td><td>1
(1.6)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Incom-pletas</td><td>B) Criterios aritméticos:
En el algoritmo buscamos un número aproximado al dividen-do, y en mi respuesta he buscado un múltiplo de 6 sin pasar-me de 47; en ambos casos es necesario tantear hasta encontrar el número.</td><td>RLA</td><td>2
(3.2)</td><td rowspan="2">8
(12.7)</td></tr>
<tr><td>C) Expresión aritmética:
6x7+5=47 (3)
6x7=42+5=47 (3)</td><td>RPA
RLA</td><td>6
(9.5)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Inco-rrectas</td><td>D) Sin relación con el algoritmo de la división:</td><td></td><td></td><td rowspan="3">3
(4.8)</td></tr>
<tr><td>D_1) A las propiedades del dividendo se les quita las propieda-des del divisor.</td><td>EC
CC</td><td>2
(3.2)</td></tr>
<tr><td>D_2) Reparto el número en tantos lotes como me indican y cuento los lotes y da el resultado. Si sobran algunos que no forman el lote, es el resto.</td><td>ELC</td><td>1
(1.6)</td></tr>
<tr><td colspan="4">No contesta</td><td>49
(77.8)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total</td><td>63</td></tr>
</table>

Tabla A4.1-15 (G70-1ª sesión-tarea 9b)

Tarea 1.10

¿Qué relación encuentras entre estas dos operaciones producto y división?

<table>
<tr><th></th><th>Respuestas</th><th>Ca-racte-rísticas</th><th>n_i (%)</th><th>Total (%)</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Correc-tas</td><td>A) Desplazamientos por la tabla</td><td>DT</td><td></td><td rowspan="7">17 (27.0)</td></tr>
<tr><td>A_1) El producto se hace moviéndose hacia la derecha, y la división a la izquierda.</td><td>RLAV</td><td>6 (9.5)</td></tr>
<tr><td>A_2) Son simétricas. Subir es dividir y bajar es multiplicar.</td><td>RLVA</td><td>2 (3.2)</td></tr>
<tr><td>A_3) Al multiplicar se cuenta hacia abajo aquellas casillas que tienen el mismo símbolo, y dividir es al contrario.</td><td>CC RLAV</td><td>2 (3.2)</td></tr>
<tr><td>B) Criterio aritmético</td><td>RLA</td><td></td></tr>
<tr><td>B_1) Son inversas (opuestas).</td><td></td><td>6 (9.5)</td></tr>
<tr><td>B_2) El producto es añadir partes iguales y la división restar partes iguales.</td><td></td><td>1 (1.6)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Inco-rrectas</td><td>C) Error de expresión:
- La multiplicación es una suma de propiedades y la división una resta. (3)
- La multiplicación da múltiplos posteriores, y la división múltiplos anteriores. (2)
- Para multiplicar sumamos múltiplos, y para dividir los restamos. (1)</td><td>ELC RLA</td><td>6 (9.5)</td><td rowspan="5">13 (20.6)</td></tr>
<tr><td>D) Otras</td><td>EC</td><td></td></tr>
<tr><td>D_1) Los procedimientos a seguir son muy parecidos.
D_2) Las dos tienen que ver con los múltiplos de los números que queremos calcular.</td><td></td><td>5 (7.9)</td></tr>
<tr><td>D_3) En el producto se agrupan casillas y se suman. En la división se agrupan hacia la izquierda y se reparten.</td><td>DT RLAV</td><td>1 (1.6)</td></tr>
<tr><td>D_4) En una es contar de n en n números hasta llegar a un resultado, y en la otra contarías los saltos que vas dando.</td><td>DT RLAV</td><td>1 (1.6)</td></tr>
<tr><td colspan="4">No contesta</td><td>33 (52.4)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total</td><td>63</td></tr>
</table>

Tabla A4.1-16 (G70-1ª sesión-tarea 10)

Tarea 1.11

¿Cómo determinarías el m.c.d.(24,36) usando los colores de la tabla?

	Respuestas	Caracte-rísticas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Co-rrectas	**A) Criterios de coloreado:** A_1) Buscando la casilla más pequeña que contenga los colores comunes al 24 y 36. (7) A_2) El 24 con el 36 tienen de común el círculo, cuadrado y triángulo verde. El primer número que tiene esto es el m.c.d., el 12. (5)	CC RLAV	12 (19.0)	12 (19.0)
Inco-rrectas	**B) Criterios de coloreado**			28 (44.4)
	B_1) Criterio incorrecto o impreciso y resultado correcto: - Cogería el número mayor y vería las figuras que lo rodean, y luego me iría al primero que tenga las mismas figuras, partiendo del menor hacia la izquierda. Sería el 12. (4) - Es el 12. Se repite el verde y (cuadrado) naranja. (2) - Es 12 y coincide con el 24 y 36 en que tiene círculo y cuadrado. (1) - 24 y 36 tienen en común el círculo, cuadrado, y triángulo verde. Su m.c.d. es 12 porque, empezando por la tabla nos encontramos con divisores de ambos, pero hay que encontrar el máximo. (1) - Mirando el número que más dibujos le coinciden y tomar el mayor; el 12. (1)	EC DT CC RLAV	9 (14.3)	
	B_2) Criterio incorrecto o impreciso y resultado incorrecto o no da resultado: - Cogiendo el color común de los dos números (verde y cuadrado), y tomar el mayor, o sea el 6. (8) - Buscaría los colores comunes entre 24 y 36 y luego buscaría el número que tiene esos colores comunes. (6) - El menor número con los colores comunes (verde y naranja) es el 6. (1) - Buscando el número que tiene cuadrado naranja y triángulo verde por encima del mayor hacia arriba. (1) - Eliminando el color que no está en ambos y el factor que lo produce. (1) - Partiendo del 24, cuento el número de casillas que hay hasta la primera casilla con círculo y cuadrado juntos; ese número es el m.c.d. (1)	EC DT CC RLAV	18 (28.6)	
	C) Criterio aritmético: Es 12, ya que es múltiplo de 4 y de 3, igual que 36.	EC RLA	1 (1.6)	
No contesta				23 (36.5)
Total				63

Tabla A4.1-17 (G70-1ª sesión-tarea 11)

Tarea 1.12

Relaciona tu procedimiento empleado con el algoritmo usual.

	Respuestas	Caracte-rísticas	n_i (%)	Total (%)
Incom-pletas	**A) Criterios de coloreado**	CC RLAV		14 (22.2)
	A_1) Buscamos los números comunes con menor exponente. En lugar de números, buscamos figuras.		4 (6.3)	
	A_2) Porque los múltiplos de 12 llevan los mismos símbolos que él. Para hallar el m.c.d. había que buscar el número más pequeño que tenga los mismos símbolos.		1 (1.6)	
	A_3) $24 \rightarrow 2^3x3$ $36 \rightarrow 2^2x3^2$ m.c.d. $(24,36)= 2^2x3 = 12$ 2 rojo; 2^2 círculo; 3 triángulo verde; 2x3 cuadrado; 2^2x3 rojo, círculo, cuadrado y triángulo verde.	RPA	1 (1.6)	
	A_4) $24 \rightarrow 2^3x3$ $36 \rightarrow 2^2x3^2$ m.c.d. $(24,36)= 2^2x3 = 12$ número de colores colores comunes	RPA	1 (1.6)	
	A_5) He tomado el número que tiene los colores comunes a 24 y 36, al igual que en el algoritmo usual tomamos los comunes de ambos números: $24 \rightarrow 2^3x3$ $36 \rightarrow 2^2x3^2$	RPA	1 (1.6)	
	B) Criterios aritméticos	RLA		
	B_1) $24 \rightarrow 2^3x3$ $36 \rightarrow 2^2x3^2$ m.c.d. $(24,36)= 2^2x3 = 12$	RPA	5 (7.9)	
	B_2) 24 y 36 son múltiplos de 2 y de 3, así que su m.c.d. también lo debe ser. Empezando por el 1, está el 6 (que es múltiplo de 2 y de 3) pero hay otro mayor que es el 12. Otra condición que debe cumplir el m.c.d. es que sea múltiplo de 4, al igual que 24 y 36.		1 (1.6)	
Inco-rrectas	**C) Criterios de coloreado**	EC CC RLAV		9 (14.3)
	C_1) Buscamos lo común de las propiedades con el común denominador de los números; siempre siendo el resultado un número menor a los anteriores.		2 (3.2)	
	C_2) Buscar los divisores comunes es lo mismo que buscar los colores comunes, y tomar el de mayor valor.		2 (3.2)	
	C_3) Buscar la primera casilla que tenga los colores comunes. El procedimiento usual es con números. Sería el número más pequeño que divide a ambos.		2 (3.2)	
	D) Criterios aritméticos	EC RLA		
	D_1) Descomposición de factores primos y producto de los comunes al mayor exponente.		2 (3.2)	
	D_2) Busco el número más grande que es 12.		1 (1.6)	
No contesta				40 (63.5)
Total				63

Tabla A4.1-18 (G70-1ª sesión-tarea 11)

Segunda sesión: divisibilidad y patrones visuales

Tablas de resultados

Tarea 2.1. En la tabla coloreada hemos observado cómo los distintos múltiplos (los colores, círculos y triángulos) se disponen siguiendo determinados patrones. Los múltiplos de 2, los de 5 y los de 10 se disponen en columnas, los de 3, 4, 6, etc. en diagonales.

Consideremos las diagonales que van en la dirección y sentido (↙) , de modo que la primera diagonal coloreada en verde sería {3, 12, 21}. Asignemos a cada número el par (d, p), donde **d** es el lugar que ocupa la diagonal de entre las de su color en la tabla (1ª, 2ª, 3ª, etc.), y **p** la posición que ocupa el número dentro de esa diagonal. Así el 36 como múltiplo de 3 viene dado por el par (3, 4) porque es el 4º término de la 3ª diagonal (en verde), pero considerado como múltiplo de 6 le corresponde el par (3, 2) porque es el 2º término de la 3ª diagonal (números recuadrados).

Consideremos también las otras diagonales (↘) y adoptemos igual notación. Empezando por la derecha, la primera diagonal de los múltiplos de 3 (en verde) estaría formada sólo por el 9; la segunda sería {6, 18, 30}, etc..

Completa la tabla siguiente:

3x k	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**	**4 x k**	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**	**6 x k**	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**
3x1=3	(1,1)	(3,1)	4x1=4	(1,1)	(2,1)	6x1=6	(1,1)	(1,1)
3x2=6	(2,1)	(2,1)	4x2=8	(2,1)	(1,1)	6x2=12	(1,1)	(2,1)
3x3=9			4x3=12			6x3=18		
	(2,3)		4x4=16		(2,2)	6x4=24		
	(3,2)	(2,2)	4x8=32				(2,3)	
3x9=27			4x10=					(3,2)

Tabla A4.1-19 (G70-2ª sesión-tarea 1)

La tabla anterior completada queda como sigue:

3x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	4 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	6 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘
3x1=3	(1,1)	(3,1)	4x1=4	(1,1)	(2,1)	6x1=6	(1,1)	(1,1)
3x2=6	(2,1)	(2,1)	4x2=8	(2,1)	(1,1)	6x2=12	(1,1)	(2,1)
3x3=9	(3,1)	(1,1)	4x3=12	(1,2)	(3,1)	6x3=18	(3,1)	(1,2)
3x4=12	(1,2)	(4,1)	4x4=16	(2,2)	(2,2)	6x4=24	(2,2)	(2,2)
3x5=15	(2,3)	(3,2)	4x6=24	(2,3)	(3,2)	6x6=36	(3,2)	(2,3)
3x6=18	(3,2)	(2,2)	4x8=32	(2,4)	(4,1)	6x7=42	(2,3)	(3,1)
3x9=27	(3,3)	(3,3)	4x10=40	(4,1)	(2,4)	6x9=54	(3,3)	(3,2)
3x12=36	(3,4)	(4,3)	4x12=48	(4,2)	(3,4)	6x12=72	(3,4)	(4,1)

Tabla A4.1-20 (G70-2ª sesión-tarea 1)

Las respuestas se recogen en la tabla siguiente:

Tabla	Correcta	Incompleta	Incorrecta	No contesta	Total
N_i (%)	40 (78,4)	4 (7,8)	1 (2 ,0)	6 (11,8)	51

Tabla A4.1-21 (G70-2ª sesión-tarea 1)

Tarea 2.2

Expresa en lenguaje ordinario las regularidades que encuentren en la tabla anterior.

	Respuestas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctas	**A) Secuencias numéricas para d y p**		10 (20.8)
	A_1)3xk: d↙=1,2,3,1,2,3,... p↙=1,1,1,2,2,2,3,3,3,... 4xk: d↘=2,1,3,2,1,3,... p↘=1,1,1,2,2,2,1,1,1,... 6xk: d↙=1,2,1,2,1,2,.. p↘=1,1,2,2,3,3,1,1,...	3 (6.3)	
	A_2) En 3xk se agrupan de 3 en 3. Es una sucesión: 3x1 (1,1) 3x4 (1,2) 3x2 (2,1) 3x5 (2,2) 3x3 (3,1) 3x6 (3,2)	1 (2.1)	
	A_3) 3xk: Cada bloque de 3 números se repite (1, 2, 3) en las diagonales: (1,1), (2,1), (3,1); (1,2), (2,2), (3,2) 6xk: (2,1), (1,1), (3,1), (2,2), (4,1), (3,2) sube 2 y baja 1.	1 (2.1)	
	A_4) 3xk: En (d, p)↙, **d** ocupa cíclicamente las posiciones 1, 2, 3, En (d, p)↘ **d** ocupa cíclicamente las posiciones 2, 3, 1.	1 (2.1)	
	B) Coincidencias de tipo numérico		
	B_1) **3xk**: las posiciones (3, 3) y (2, 1) coinciden en ambas diagonales. Se invierten las posiciones (3,1)/(1,1) y (1,1)/(3,1) **4xk**: la posiciones (3,3) y (2,2) coinciden en ambas diagonales. Se invierten las posiciones (1,1)/(2,1) con (2,1)/(1,1); (1,2)/(3,1) con (3,1)/(1,2); (2,4)/(4,1) con (4,1)/(2,4) **6xk**: la posición (2,2) coincide en ambas diagonales. Se invierten las posiciones (1,1)/(2,1) con (2,1)/(1,1)	1 (2.1)	
	C_2) El 27 ocupa el mismo lugar en ambas diagonales.	1 (2.1)	
	C) Regularidades de tipo visual		
	C_1) A los múltiplos de 3 se les va sumando una decena menos una unidad.	1 (2.1)	
	C_2) Con los de 4 y los de 6 nos movemos con el movimiento del caballo de ajedrez: bajo 1 voy 2 lugares a la derecha o izquierda.	1 (2.1)	
Incorrectas	D) En el sentido ↙ al multiplicar las coordenadas entre ellos, nos da como resultado el número multiplicado por 3. Igual con 4.	2 (4.2)	3 (6.3)
	E) En 3xk: la diagonal ↙ sube de 1 en 1 cada 3. En 4xk: nada. En 6xk: la diagonal ↙ sube de un número en cada pareja.	1 (2.1)	
No contesta			35 (72.9)
Total			**48**

Tabla A4.1-22(G70-2ª sesión-tarea 2)

Tarea 2.3

Expresa las regularidades que encuentres en la tabla anterior usando símbolos matemáticos.

	Respuestas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Incorrectas	A) $3x\dot{3}$=dxp↙ ⇔ dxp = $\dot{3}$	2 (3.9)	3 (5.9)
	B) k+(10-1-1) k+(10+1+1) bajo 10 y resto o sumo 2.	1 (2)	
No contesta			48 (94.1)
Total			**51**

Tabla A4.1-23 (G70-2ª sesión-tarea 3)

Tarea 2.4.

¿Podrías extender la/s regla/s que has encontrado a los múltiplos de otros números, como el 7, el 8 y el 9?

No contestan 51(100%)

Tarea 2.5

Además de los patrones en columna o en diagonal podemos movernos por los múltiplos de un número según el movimiento del caballo de ajedrez, por ejemplo. Situados en el 7 podemos pasar con ese movimiento al 28, y de ahí al 49, etc. Este patrón tendría la forma y lo podríamos interpretar como el operador "sumar/restar 21".

Completa la tabla siguiente buscando patrones para los múltiplos de 3, 4, 5, ..., indicando si el patrón es de tipo diagonal, columna, etc. y escribiendo el operador que le corresponde a cada uno de los patrones:

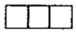
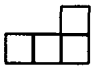
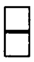
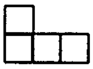
k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador
2		2	5			8		
		10-2=8						
		10						
		10+2=12						
3			6			9		
4			7					

Tabla A4.1-24 (G70-2ª sesión-tarea 5)

Los patrones y operadores a los que representan se recogen en las siguientes tablas para cada múltiplo de 3 a 9:

	Respuestas para los múltiplos de 3 Patrón; [operador]; (n_i)	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctos	A) Bajar, derecha ↓→: [12] ; (38) [21]; (13)	51 (40.8)	105 (84.0)
	B) Bajar ↓: [30]	17 (13.6)	
	F) Derecha, bajar →↓: [12]; (6) [21]; (2) [9]; (5)	13 (10.4)	
	D) Diagonal ↙ : [18]	10 (8.0)	
	C) Bajar, izquierda ←↓: [9]; (7) [18]; (1)	8 (6.4)	
	E) Derecha ⟶: [3]	6 (4.8)	
Incorrectos	G) Derecha ⟶: [2]	6 (4.8)	20 (16.0)
	H) Bajar ↓: [20]	4 (3.2)	
	D) Diagonal ↘: [22]	3 (2.4)	
	[11]; (2)	2 (1.6)	
	Bajar, derecha ↓→ [31]	2 (1.6)	
	Bajar, izquierda ←↓ [8]	2 (1.6)	
	H) Bajar ↓: [10]	1 (0.8)	
Total			125

Tabla A4.1-25 (G70-2ª sesión-tarea 5(m3))

	Respuestas para los múltiplos de 4 Patrón; [operador]; (n_i)	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctos	A) Bajar, derecha ↓→: [12]	36 (29.8)	107 (88.4)
	B) Bajar ↓: [20]	27 (22.3)	
	C) Bajar, izquierda ←↓: [8]	16 (13.2)	
	D) Derecha, bajar →↓: [12]	11 (9.1)	
	E) Derecha →: [4]	8 (6.6)	
	F) Izquierda, bajar ←↓: [8]	5 (4.1)	
	G) Diagonal ↙: [16]	4 (3.3)	
Incorrectos	H) Derecha →: [3]	5 (4.1)	14 (11.6)
	I) Bajar ↓: [10]; (5); [30]; (1)	6 (5.0)	
	J) Derecha →: [2]	1 (0.8)	
	K) Bajar, izquierda ←↓ [7]	1 (0.8)	
	L) Derecha, bajar →↓ [19]	1 (0.8)	
Total			121

Tabla A4.1-26 (G70-2ª sesión-tarea-5(m4))

	Respuestas para los múltiplos de 5 Patrón; [operador]; (n_i)	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctos	A) Bajar ↓: [10]; (37); [40]; (4) ; [30]; (3)	44 (71.0)	54 (87.1)
	B) Derecha ⟶: [5]	9 (14.5)	
	C) Bajar, derecha ↓⟶ : [55]	1 (1.6)	
Incorrectos	D) Derecha ⟶: [4]	6 (9.7)	8 (12.9)
	E) Bajar, derecha ↓⟶: [12]	2 (3.2)	
Total			**62**

Tabla A4.1-27 (G70-2ª sesión-tarea-5(m5)

	Respuestas para los múltiplos de 6 Patrón; [operador]; (n_i)	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctos	A) Bajar, derecha ↓→: [12]	30 (38.5)	63 (80.8)
	B) Bajar ↓: [30]	22 (28.2)	
	C) Izquierda, bajar ←↓ : [18]	4 (5.1)	
	D) Bajar, izquierda ↓←: [6];(3) [18];(1)	4 (5.1)	
	E) Derecha, bajar →↓: [12]	3 (3.8)	
Incorrectos	F) Bajar ↓: [20]; (3); [40];(1); [10];(1)	5 (6.4)	15 (19.2)
	G) Bajar, derecha ↓→: [11] (1); [13] (1); [21];(1)	3 (3.8)	
	H) Derecha ⟶: [5]	3 (3.8)	
	I) Izquierda, bajar ←↓ : [8];(1) [19];(1)	2 (2.6)	
	J) Derecha, bajar →↓: [11]	1 (1.3)	
	K) Bajar, izquierda ↓← [8]	1 (1.3)	
Total			**78**

Tabla A4.1-28 (G70-2ª sesión-tarea 5(m6))

	Respuestas para los múltiplos de 7 Patrón; [operador]; (n_i)	n_i (%)	Total (%)
Correctos	A) Bajar, derecha ↓→: [21]	21 (33.3)	53 (84.1)
	B) Bajar, izquierda ←↓: [7]	11 (17.5)	
	C) Bajar ↓: [70]	10 (15.9)	
	D) Izquierda, bajar ←↓: [7]	5 (7.9)	
	E) Derecha, bajar →↓: [21]	5 (7.9)	
	F) Derecha →: [7]	1 (1.6)	
Incorrectos	G) Bajar, derecha ↓→: [11]; (3); [12];(1); [31]; (1)	5 (7.9)	10 (15.9)
	H) Derecha →: [6]	2 (3.2)	
	I) Bajar ↓: [60]	2 (3.2)	
	J) Derecha, bajar →↓: [13]	1 (1.6)	
Total			63

Tabla A4.1-29 (G70-2ª sesión-tarea5(m7))

	Respuestas para los múltiplos de 8 Patrón; [operador]; (n_i)	**n_i** **(%)**	**Total** **(%)**
Correctos	A) Bajar, izquierda ↓← : [8]	17 (26.2)	35 (53.8)
	B) Bajar ↓: [40]	14 (21.5)	
	C) Izquierda, bajar ←↓ : [8]	4 (6.2)	
Incorrectos	D) Bajar ↓: [20]; (8); [30];(3); [10];(2)	13 (20.0)	30 (46.2)
	E) Bajar, derecha ↓→: [12]; (7) [13];(1)	8 (12.3)	
	F) Derecha →: [3]; (2) [7]; (3)	5 (7.7)	
	G) Derecha, bajar →↓: [12];(2) [13];(1)	3 (4.6)	
	H) Izquierda, bajar ←↓ : [9]	1 (1.5)	
Total			**65**

Tabla A4.1-30 (G70-2ª sesión-tarea 5(m8))

	Respuestas para los múltiplos de 9 Patrón; [operador]; (n_i)	n_i (%)	Total (%)
Correctos	A) Diagonal : [9]	12 (29.3)	27 (65.9)
	B) Bajar, izquierda : [9]	10 (24.4)	
	C) Izquierda, bajar : [9]	5 (12.2)	
Incorrectos	D) Bajar : [80]	8 (19.5)	14 (34.1)
	E) Bajar, derecha : [22];(2) [21];(1) [11]; (1)	4 (9.8)	
	F) Derecha : [8]	2 (4.9)	
Total			41

Tabla A4.1-31 (G70-2ª sesión-tarea 5(m9))

Tercera sesión: divisibilidad y geoplano (I)

Tablas de resultados

Tarea 3.1 Une con segmentos los números 14, 21, 28 y 35, en la tabla-100 de la figura A4.1-1, de manera que se forme un paralelogramo y calcula su área.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-1 (G70-3ª sesión-tarea 1)

Respuestas:

Area = 7 ; n_i=48 (100%)

Figura realizada: A4.1-33; n_i=48 (100%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-2 (G70-3ª sesión-tarea 1)

Tarea 3.2. Utiliza el geoplano de la figura A4.1-3 para explicar el procedimiento que has utilizado para calcular el área del paralelogramo anterior.

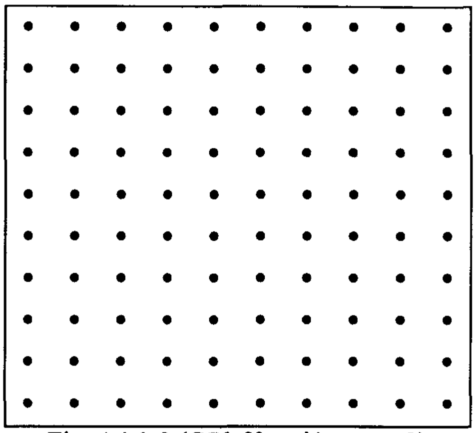
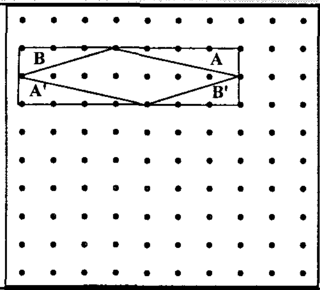
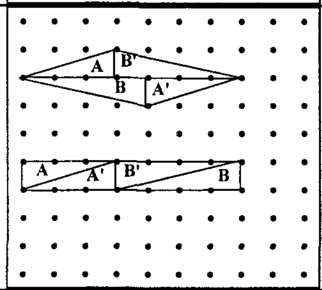
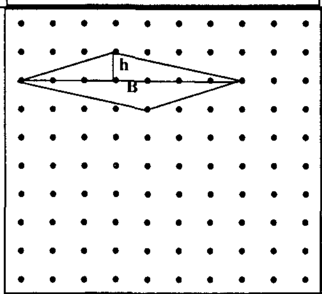
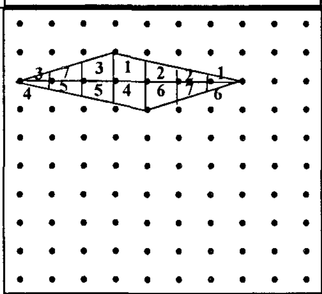
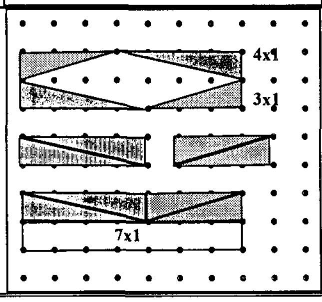


Fig. A4.1-3 (G70-3ª sesión-tarea 2)

Clasificamos las respuestas en correctas e incorrectas, atendiendo a las figuras realizadas y justificaciones dadas:

Respuestas correctas	Ilustración	n_i (%)
A) $A_{paralelogramo} = A_{rectángulo} - A_{4\ triángulos}$ El área de los triángulos es bxh/2: A=A'= 4x1/2=2; B=B'= 3x1/2=1'5; A+A'+B+B'= 7; $A_{rectángulo}$ = bxh= 7x2= 14; $A_{paralelogramo}$ = 14-7 = 7;		15 (31.3)
B) Suma de las áreas de los triángulos rectángulos en que se descompone el paralelogramo.		12 (25.0)
C) El paralelogramo queda dividido en dos triángulos unidos por sus bases, de altura 1 y base 7.		7 (14.6)
D) Divide el paralelogramo en regiones y las agrupa de manera que cada dos regiones (las que tienen el mismo número) miden una unidad cuadrada.		6 (12.5)
E) Con 4 triángulos rectángulos iguales dos a dos y áreas 4 y 3, forma un rectángulo que encierra el paralelogramo. Reorganizando los triángulos comprueba que ocupan medio rectángulo de área 14. El paralelogramo tiene entonces área 7.		3 (6.3)

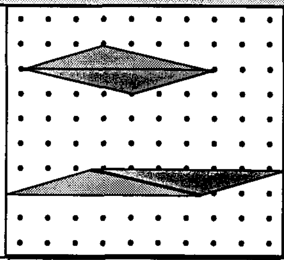
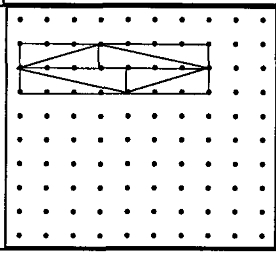
Respuestas correctas	Ilustración	n_i (%)
F) Transforma el paralelogramo en otro paralelogramo de igual área cuya base (horizontal) es la diagonal mayor del paralelogramo de partida y altura a unidad. Para colocarlo en el geoplano le falta una unidad.		2 (4.2)
H) Construye el menor rectángulo que contiene al paralelogramo, calcula su área y la divide por 2.		1 (2.1)
Subtotal		46 (95.8)

Tabla A4.1-32 (G70-3ª sesión-tarea 2a)

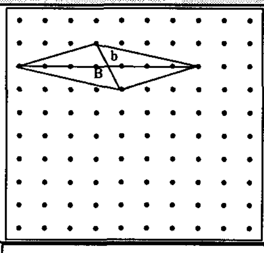
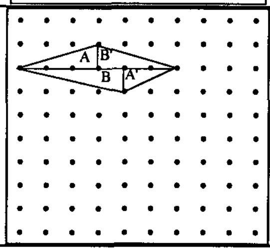
Respuestas incorrectas	Ilustración	n_i (%)
I) A = Bxb/2 = 14/2 = 7 (Fórmula errónea, cálculo de **b** erróneo y resultado correcto)		1 (2.1)
J) Descompone el paralelogramo (incorrecto) en 4 triángulos: dos de 1x3/2=6/2; uno de 5x1/2=5/2 y uno de 1x3/2=3/2; realiza la suma: 6/2 + 5/2 + 3/2 =14/2 = 7 (La figura incorrecta induce cálculos incorrectos y resultado correcto).		1 (2.1)
Subtotal		2 (4.2)
Total de respuestas		48

Tabla A4.1-33 (G70-3ª sesión-tarea 2b)

Tarea 3.3 ¿Cuál sería el área de los paralelogramos formados con los múltiplos de 2, de 3, de 4,...de k? Ayúdate de las tablas-100 de las figuras A4.1-4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-4 (G70-3ª sesión-tarea 3)

Figuras realizadas

Múltiplos de 2

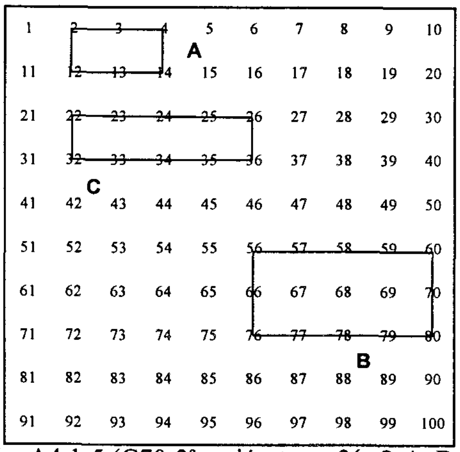


Fig. A4.1-5 (G70-3ª sesión-tarea 3(m2-A, B, C)

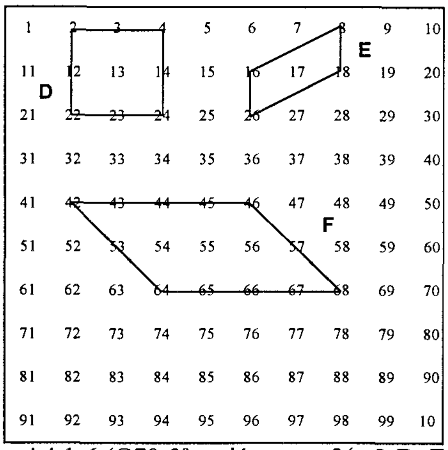


Fig. A4.1-6 (G70-3ª sesión-tarea 3(m2-D, E, F)

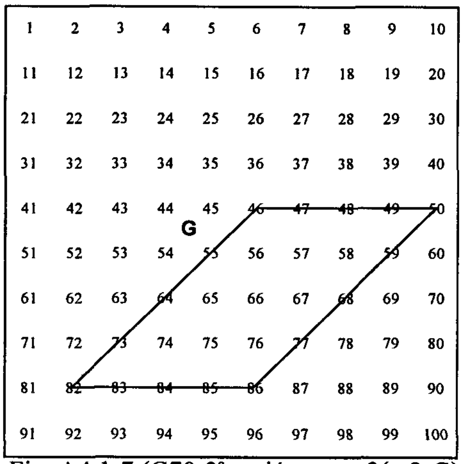


Fig. A4.1-7 (G70-3ª sesión-tarea 3(m2-G)

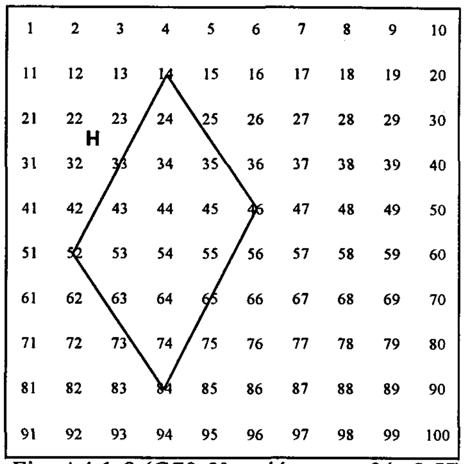


Fig. A4.1-8 (G70-3ª sesión-tarea 3(m2-H)

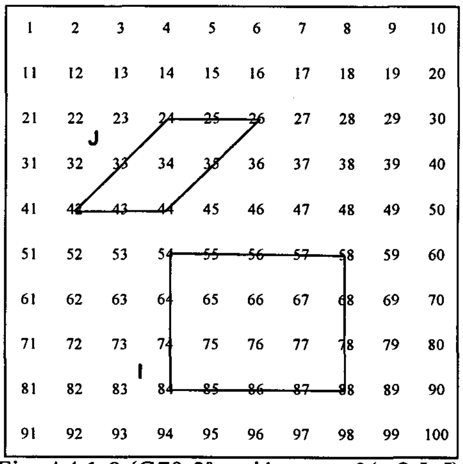


Fig. A4.1-9 (G70-3ª sesión-tarea 3(m2-I, J)

Múltiplos de 3

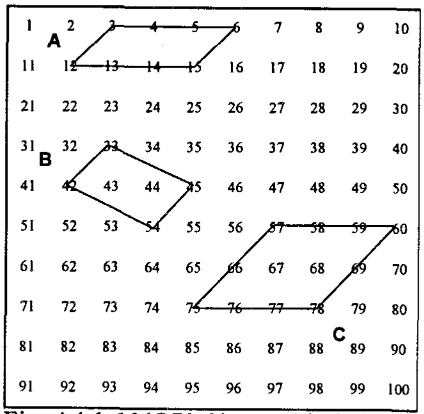


Fig. A4.1-10(G70-3ª ses.-t3(m3-A, B y C)

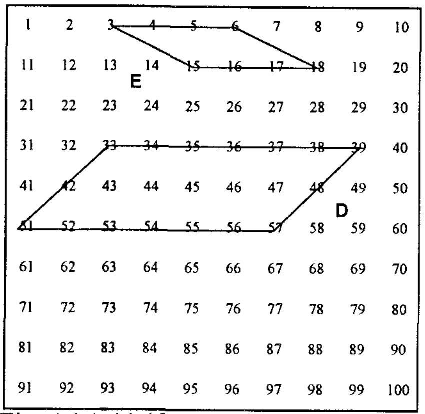


Fig. A4.1-11 (G70-3ª ses.-t3(m3-D y E)

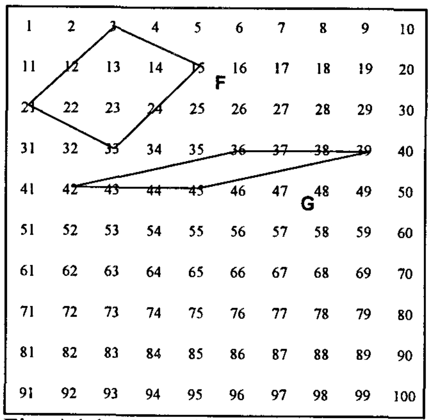


Fig. A4.1-12 (G70-3ª ses.-t3(m3-F y G)

Múltiplos de 4

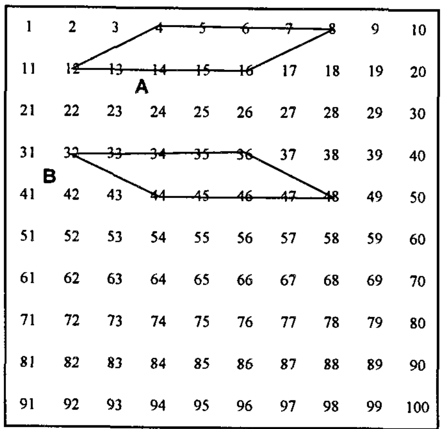


Fig. A4.1-13 (G70-3ª ses.-t3(m4-A y B)

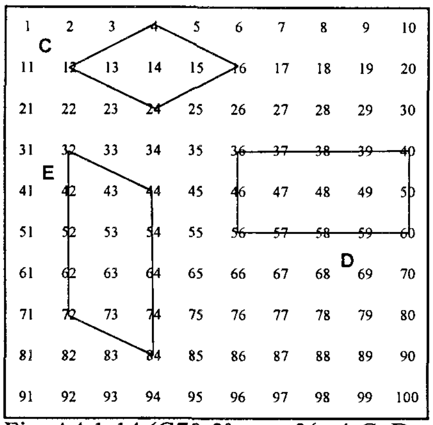


Fig. A4.1-14 (G70-3ª ses.-t3(m4-C, D y E)

Múltiplos de 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-15 (G70-3ª ses.3-t3(m5-A y B)

Múltiplos de 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-16 (G70-3ª ses.3-t3(m6-A y B)

Múltiplos de 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-17 (G70-3ª ses.3-t3 (m7-A)

Múltiplos de 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-18 (G70-3ª ses.3-t3 (m8-A)

Múltiplos de 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.1-19 (G70-3ª ses.3-t3 (m9-A)

Respuestas clasificadas por tipo y área de los polígonos:

Múltiplos de 2

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Rectángulos	2	Fig.G70-3.3-(m2-A)	25 (56.8)	38 (86.4)
	8	Fig.G70-3.3-(m2-B)	9 (20.5)	
	4	Fig.G70-3.3-(m2-C)	3 (6.8)	
	12	Fig.G70-3.3-(m2-I)	1 (2.3)	
Cuadrados	4	Fig.G70-3.3-(m2-D)	1 (2.3)	1 (2.3)
Romboides	2	Fig.G70-3.3-(m2-E)	1 (2.3)	5 (11.4)
	8	Fig.G70-3.3-(m2-F)	1 (2.3)	
	16	Fig.G70-3.3-(m2-G)	1 (2.3)	
	14	Fig.G70-3.3-(m2-H)	1 (2.3)	
	4	Fig.G70-3.3-(m2-J)	1 (2.3)	
Total				**44**

Tabla A4.1-34 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m2))

Múltiplos de 3

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Romboides	3	Fig.G70-3.3-(m3-A)	31 (72.1)	43 (100)
	3	Fig.G70-3.3-(m3-B)	5 (11.6)	
	6	Fig.G70-3.3-(m3-C)	2 (4.7)	
	12	Fig.G70-3.3-(m3-D)	2 (4.7)	
	3	Fig.G70-3.3-(m3-E)	1 (2.3)	
	6	Fig.G70-3.3-(m3-F)	1 (2.3)	
	3	Fig.G70-3.3-(m3-G)	1 (2.3)	
Total				**43**

Tabla A4.1-35 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m3))

Múltiplos de 4

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Romboides	4	Fig.G70-3.3-(m4-A)	16 (53.3)	27 (90.0)
	4	Fig.G70-3.3-(m4-B)	6 (20.0)	
	4	Fig.G70-3.3-(m4-C)	4 (13.3)	
	8	Fig.G70-3.3-(m4-E)	1 (3.3)	
Rectángulos	4	Fig.G70-3.3-(m4-D)	3 (10.0)	3 (10.0)
Total				30

Tabla A4.1-36 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m4)

Múltiplos de 5

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Rectángulos	5	Fig.G70-3.3-(m5-A)	7 (87.5)	7 (87.5)
Romboides	20	Fig.G70-3.3-(m5-B)	1 (12.5)	1 (12.5)
Total				8

Tabla A4.1-37 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m5)

Múltiplos de 6

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Romboides	6	Fig.G70-3.3-(m6-A)	6 (85.7)	7 (100)
	6	Fig.G70-3.3-(m6-B)	1 (14.3)	
Total				7

Tabla A4.1-38 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m6))

Múltiplos de 7

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Romboides	7	Fig.G70-3.3-(m7-A)	1 (50.0)	2 (100)
	14	Fig.G70-3.3-(m7-B)	1 (50.0)	
Total				2

Tabla A4.1-39 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m7)

Múltiplos de 8

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Romboides	8	Fig.G70-3.3-(m8-A)	1 (50.0)	1 (100)
Total				1

Tabla A4.1-40 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m8))

Múltiplos de 9

Tipo de polígono	Area	Ilustración	n_i (%)	Total (%)
Romboides	9	Fig.G70-3.3-(m9-A)	1 (50.0)	1 (50.0)
Total				1

Tabla A4.1-41 (G70-3ª sesión3-tarea 3 (m9))

Tarea 3.4 ¿Qué regla podrías enunciar?

Todos los alumnos enuncian una regla en la que mencionan con distintas palabras que **"El área de los paralelogramos que se obtienen uniendo múltiplos de un número es múltiplo de ese número".**

Tarea 3.5. **Si sobre la tabla-100 colocamos una transparencia con unos cuadrados que coinciden sobre los múltiplos de 7 (figura A4.1-20)**

a. ¿Qué números señalarán los cuadrados de la transparencia si a ésta le damos la vuelta a lo largo del eje vertical, realizando así una reflexión (R_v)?

b. Repite la tarea anterior considerando la reflexión (R_h) según el eje horizontal, y los giros G_{90}, G_{180} y G_{270} de centro el punto de corte de ambos ejes y ángulos 90°, 180° y 270° respectivamente.

R_v

1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$	8	9	10
11	12	13	$\boxed{14}$	15	16	17	18	19	20
$\boxed{21}$	22	23	24	25	26	27	$\boxed{28}$	29	30
31	32	33	34	$\boxed{35}$	36	37	38	39	40
41	$\boxed{42}$	43	44	45	46	47	48	$\boxed{49}$	50 R_h
51	52	53	54	55	$\boxed{56}$	57	58	59	60
61	62	$\boxed{63}$	64	65	66	67	68	69	$\boxed{70}$
71	72	73	74	75	76	$\boxed{77}$	78	79	80
81	82	83	$\boxed{84}$	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	$\boxed{98}$	99	100

Fig. A4.1-20 (G70-3ª sesión-tarea 5

Escribe tus respuestas en la tabla A4.1-42. Escribe en la columna correspondiente a **R_v(k)** el número que se obtiene al someter a **k** (que es un múltiplo de 7) a la reflexión R_v, y análogamente en las restantes columnas.

k	R_v(k)	R_h(k)	G_{90}(k)	G_{180}(k)	G_{270}(k)
7	4	97	70	94	
14	17	84	39	87	
21					
28					
35					
42					
49					
56					
63					
70					

Tabla A4.1-42 (G70-3ª sesión-tarea 5)

La tabla anterior correctamente completada origina la tabla A4.1-43:

k	$R_v(k)$	$R_h(k)$	$G_{90}(k)$	$G_{180}(k)$	$G_{270}(k)$
7	4	97	70	94	31
14	17	84	39	87	62
21	30	71	8	80	93
28	23	78	78	73	23
35	36	65	47	66	54
42	49	52	16	59	85
49	42	59	86	52	15
56	55	46	55	45	46
63	68	33	24	38	77
70	61	40	94	31	7

Tabla A4.1-43 (G70-3ª sesión-tarea 5)

Recogemos en la tabla A4.1-44 las respuestas de los estudiantes para cada transformación, considerando una columna incorrecta si presenta más de 3 errores:

	$R_v(k)$	$R_h(k)$	$G_{90}(k)$	$G_{180}(k)$	$G_{270}(k)$
Correcto	45 (93.8)	42 (87.5)	46 (95.8)	46 (95.8)	46 (95.8)
Incorrecto	2 (4.2)	5 (10.4)	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)
No contesta	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)	1 (2.1)
Total	**48**	**48**	**48**	**48**	**48**

Tabla A4.1-44 (G70-3ª sesión-tarea 5)

Tarea 3.6. **Expresa las regularidades que encuentres en la tabla que has completado.**

Respuestas correctas: 90 (92.8%)

Respuestas incorrectas: 7 (7.2%)

Total: 97

Hay 4 estudiantes que no responden.

Las frecuencias relativas (entre paréntesis) se refieren al número total de respuestas (97).

Respuestas correctas	n_i (%)	Total (%)
A) Secuencias numéricas y orden en las columnas		
A_1) La columna de $\mathbf{G_{180}(k)}$ va disminuyendo de 7 en 7. (Si 94=K_n; entonces K_n-7 = K_{n+1}; K_{n+1}-7= K_{n+2}; ...)	20 (20.6)	
A_2) La secuencia en la columna $\mathbf{R_v(k)}$ se forma sumando +13, +13, -7, y así sucesivamente.	8 (8.2)	
A_3) La secuencia en la columna $\mathbf{R_h(k)}$ se forma sumando -13, -13, +7, y así sucesivamente.	7 (7.2)	
A_4) La secuencia en la columna $\mathbf{G_{270}(k)}$ se forma sumando +31, +31, -70, y así sucesivamente.	6 (6.2)	46 (47.4)
A_5) La secuencia en la columna $\mathbf{G_{90}(k)}$ se forma sumando -31, -31, +70, y así sucesivamente.	2 (2.1)	
A_6) Las columnas **k** y $\mathbf{G_{180}(k)}$ son ascendentes o descendentes, pero en las $\mathbf{R_v(k)}$ y $\mathbf{R_h(k)}$ no hay orden.	2 (2.1)	
A_7) Los números de $\mathbf{G_{180}(k)}$ están ordenados de mayor a menor.	1 (1.0)	
B) Relaciones entre las distintas columnas		
B_1) El último número de $\mathbf{G_{180}(k)}$. (el 31) es igual que el primero de $\mathbf{G_{270}(k)}$.	6 (6.2)	
B_2) El último número de $\mathbf{G_{90}(k)}$ (el 94) es igual que el primero de $\mathbf{G_{180}(k)}$.	5 (5.2)	
B_3) El último número de $\mathbf{G_{270}(k)}$ (el 7) es igual que el primero de k.	5 (5.2)	
B_4) La 1ª y 3ª columna tienen igual las unidades.	5 (5.2)	
B_5) 42= **Rv(49)**; 49= **Rv(42)**; $\mathbf{R_h}$(42)= $\mathbf{G_{180}(k)}$ (49); $\mathbf{R_h}$ (49)= $\mathbf{G_{180}(k)}$ (42);	5 (5.2)	36 (37.1)
B_6) El último número de la 1ª columna (el 70) es igual al primero de la columna $\mathbf{G_{90}(k)}$.	5 (5.2)	
B_7) Las terminaciones de la 2ª y 5ª columnas son iguales.	3 (3.1)	
B_8) Sumando los números de las columnas de dos en dos, nos da siempre 101: $\mathbf{R_v(k)} + \mathbf{R_h(k)}$ = 101; $\mathbf{G_{90}(k)} + \mathbf{G_{270}(k)}$ = 101; $\mathbf{k} + \mathbf{G_{180}(k)}$ = 101.	1 (1.0)	
B_9) Si sumamos los números de las columnas $\mathbf{R_v(k)}$ y k el resultado termina en 1.	1 (1.0)	

<table>
<tr><th>Respuestas correctas</th><th>n_i
(%)</th><th>Total
(%)</th></tr>
<tr><td>C) Relaciones numéricas en las columnas y filas</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C_1) En la columna $\mathbf{G_{90}(k)}$ se cumple lo siguiente:
1°+3°=4° (70+8=78); 2°+6°=8° (39+16=55)
2°+3°=5° (39+8=47); 5°+5°=10° (47+47=94)</td><td>4
(4.1)</td><td>4
(4.1)</td></tr>
<tr><td>D) Simetrías en las columnas</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D_1) Tomando en la tabla como eje la línea horizontal que pasa entre el 42 y el 49 (Fig. 1), los simétricos suman lo siguiente:
En $\mathbf{R_v(k)}$ suman 91 (49+92=36+55=...= 91);
En $\mathbf{R_h(k)}$ suman 111 (52+59=65+46=...=111);
En $\mathbf{G_{90}(k)}$ suman 102 (16+86= 47+55=...=102);
En $\mathbf{G_{180}(k)}$ suman 111; (59+52=66+45=...= 111);
En $\mathbf{G_{270}(k)}$suman 100; (85+15=54+46=...= 100);
En k suman 91; (42+49=35+56=...= 91);
<table>
<tr><th>k</th><th>$R_v(k)$</th><th>$R_h(k)$</th><th>$G_{90}(k)$</th><th>$G_{180}(k)$</th><th>$G_{270}(k)$</th></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td><td>97</td><td>70</td><td>94</td><td>31</td></tr>
<tr><td>14</td><td>17</td><td>84</td><td>39</td><td>87</td><td>62</td></tr>
<tr><td>21</td><td>30</td><td>71</td><td>8</td><td>80</td><td>93</td></tr>
<tr><td>28</td><td>23</td><td>78</td><td>78</td><td>73</td><td>23</td></tr>
<tr><td>35</td><td>36</td><td>65</td><td>47</td><td>66</td><td>54</td></tr>
<tr><td>42</td><td>49</td><td>52</td><td>16</td><td>59</td><td>85</td></tr>
<tr><td>49</td><td>42</td><td>59</td><td>86</td><td>52</td><td>15</td></tr>
<tr><td>56</td><td>55</td><td>46</td><td>55</td><td>45</td><td>46</td></tr>
<tr><td>63</td><td>68</td><td>33</td><td>24</td><td>38</td><td>77</td></tr>
<tr><td>70</td><td>61</td><td>40</td><td>94</td><td>31</td><td>7</td></tr>
</table>
Eje
Fig. 1</td><td>3
(3.1)</td><td>3
(3.1)</td></tr>
<tr><td>E) Reglas de obtención de los números transformados</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E_1) Para obtener los transformados de los múltiplos de 7 hago lo siguiente:
Por ejemplo, para el 7 en $\mathbf{R_v(k)}$, cuento 7 de derecha a izquierda en la primera fila; para el 14 cuento 4 en la fila del 11.
En $\mathbf{R_h(k)}$, cuento 7 de izquierda a derecha en la fila del 91;
En $\mathbf{G_{90}(k)}$cuento 7 de arriba abajo en la columna del 10.
En $\mathbf{G_{180}(k)}$cuento 7 de derecha a izquierda en la fila del 91.
En $\mathbf{G_{270}(k)}$cuento 7 de arriba abajo en la columna del 91.</td><td>1
(1.0)</td><td>1
(1.0)</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td>90</td></tr>
</table>

Tabla A4.1-45 (G70-3ª sesión-tarea 6)

Respuestas incorrectas	n_i (%)	Total (%)
F) Secuencias numéricas y orden en las columnas		
F_1) En las 1ª y 2ª columnas los números aumentan, mientras que en la 3ª y 5ª disminuyen. (Nota: En la 2ª columna los números no aumentan, como es el caso de 68, 61. En la 3ª columna los números no disminuyen, como es el caso de 71 y 78; 33 y 40).	3 (3.1)	5 (5.2)
F_2) Los números de la columna $\mathbf{R_h(k)}$ van disminuyendo de 13 en 13 unidades.	1 (1.0)	
F_3) Los números de las columnas $\mathbf{G_{270}(k)}$ y $\mathbf{G_{90}(k)}$ no están ordenados. El resto, sí.	1 (1.0)	
G) Relaciones numéricas en las columnas y filas		
G1) Los números de $\mathbf{G_{180}(k)}$ y $\mathbf{R_h(k)}$ están situados en la misma fila en la tabla-100 (tienen iguales las decenas); los de **k** y $\mathbf{R_h(k)}$ están en la misma columna (tienen iguales las unidades).	1 (1.0)	1 (1.0)
H) relación de tipo visual		
H_1) *Los múltiplos de 7 están en diagonal o en espiral.* (No es una regularidad de la tabla G70-3.5a	1 (1.0)	1 (1.0)
Total		7

Tabla A4.1-46 (G70-3ª sesión-tarea 6)

Tarea 3.7. ¿Existe algún número k cuyos múltiplos sigan siendo múltiplos de k al someterlos a alguna de las isometrías planas anteriores?

	Respuestas	**n_i (%)**	**Total (%)**
Correctas	A) R_h(múltiplo de 2) = múltiplo de 2.	25 (36.8)	58 (85.3)
	B) R_h(múltiplo de 5) = múltiplo de 5	19 (27.9)	
	C) R_h(múltiplo de 10) = múltiplo de 10.	9 (13.2)	
	D) El 1 es el único número que lo cumple para todas las isometrías, ya que todos los números son múltiplos de 1. I(múltiplo de 1) = múltiplo de 1.	5 (7.4)	
Incorrectas	E) No. Los números cambian por las isometrías.	7 (10.3)	10 (14.7)
	F) Dan ejemplos de algunos invariantes, como: $R_v(21) = 30$ = múltiplo de 3 $R_v(42) = 49$ = múltiplo de 3 (Incorrecto) $R_v(49) = 42$ = múltiplo de 3 (Incorrecto) $R_h(14) = 84$ = múltiplo de 7 $R_h(28) = 78$ = múltiplo de 2 $R_h(63) = 33$ = múltiplo de 3	2 (2.9)	
	G) R_h(múltiplo de 3) = múltiplo de 3.	1 (1.5)	
Total			**68**

Tabla A4.1-47 (G70-3ª sesión-tarea 7)

Hay 13 alumnos que no contestan.

Cuarta sesión: divisibilidad y geoplano (II)

Tablas de resultados

Tarea 4.1

Uniendo múltiplos consecutivos de un determinado número, podemos obtener diversos polígonos. Por ejemplo al unir 7, 14, 21 y 28 (que son múltiplos consecutivos de 7) obtenemos el triángulo de la figura A4.1-21. Si unimos 35, 49, 56 y 42 obtenemos un paralelogramo. En ambos casos el área es 7. Tratamos de buscar otros polígonos que se forman al unir múltiplos consecutivos de un número, y determinar su área. Completa la tabla A4.1-48 ayudándote de las tablas-100 que hay en las hojas auxiliares. Señala cada dibujo con una letra y el número de la tabla-100 en la que se encuentra:

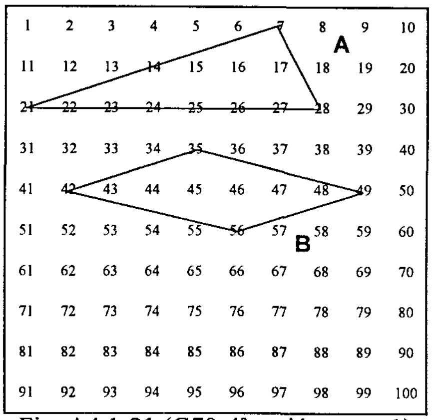


Fig. A4.1-21 (G70-4ª sesión-tarea 1)

Polígonos que resultan al unir múltiplos consecutivos de 7:

Nº de puntos a unir	Polígono	Números que se unen	Area del polígono	Esquema del polígono	Tabla y letra del dibujo
3					
4	Triángulo	7, 14, 21, 28	7		G70-4.1A
4	Paralelogramo	35, 42, 49, 56	7		G70-4.1B

Tabla A4.1-48 (G70-4ª sesión-tarea 1)

Figuras realizadas

Múltiplos consecutivos de 7

Uniendo 3 múltiplos consecutivos de 7

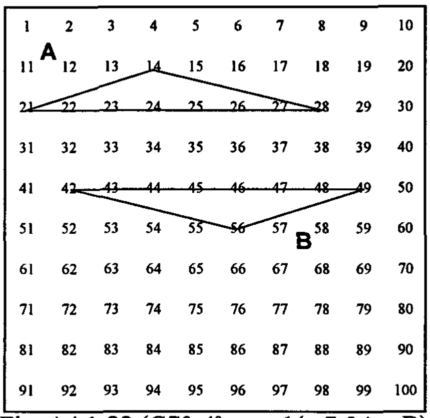


Fig. A4.1-22 (G70-4ª ses.-t1(m7-3A y B)

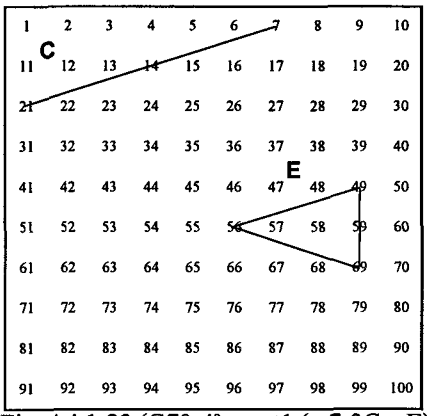


Fig. A4.1-23 (G70-4ª ses.-t1 (m7-3C y E)

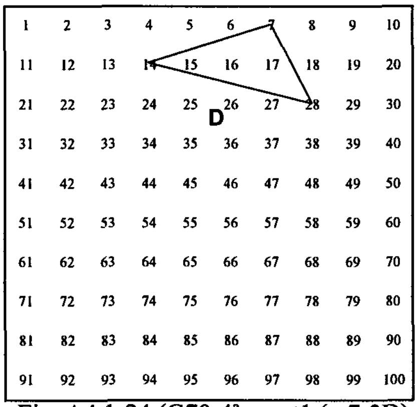


Fig. A4.1-24 (G70-4ª ses.-t1 (m7-3D)

4 múltiplos consecutivos de 7:

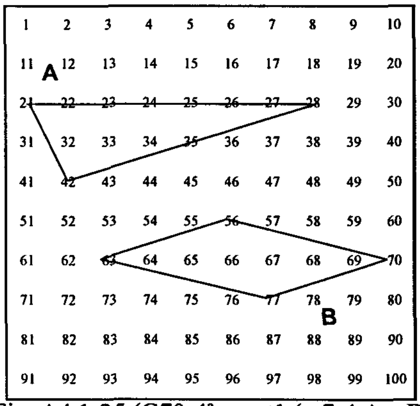


Fig. A4.1-25 (G70-4ª ses.-t1 (m7-4 A y B)

5 múltiplos consecutivos de 7:

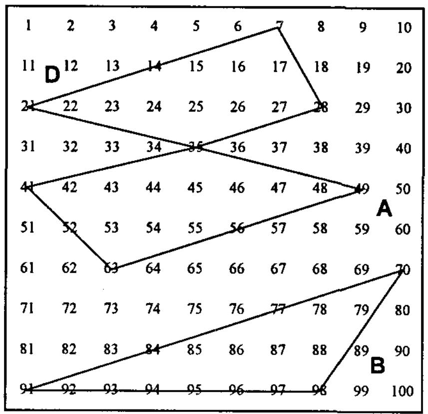


Fig. A4.1-26 (G70-4ª ses.-t1 (m7-5 A, B y D)

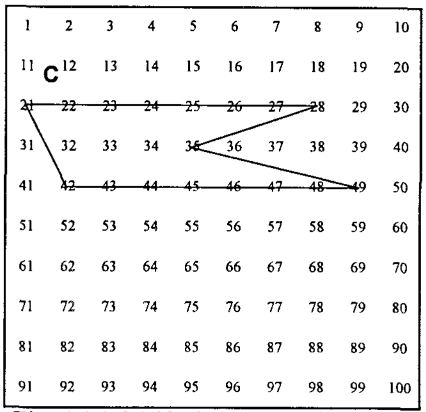


Fig. A4.1-27 (G70-4ª ses.-t1 (m7-5 C)

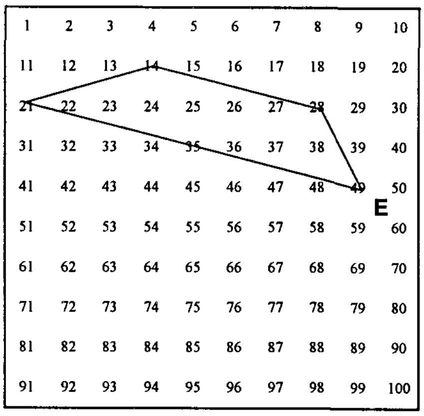


Fig. A4.1-28 (G70-4ª ses.-t1 (m7-5 E)

6 múltiplos consecutivos de 7:

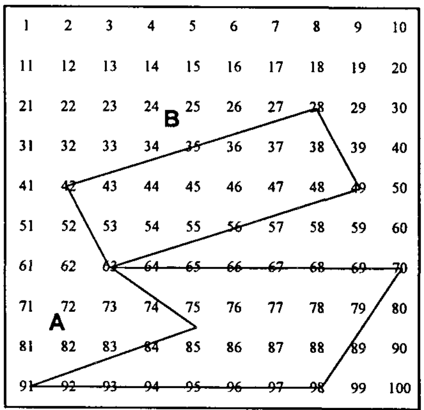


Fig. A4.1-29 (G70-4ª ses.-t1 (m7-6 A y B)

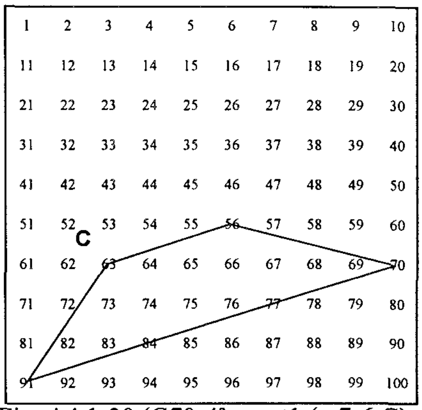


Fig. A4.1-30 (G70-4ª ses.-t1 (m7-6 C)

7 múltiplos consecutivos de 7:

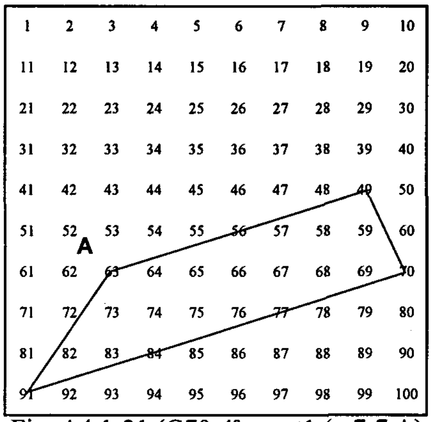


Fig. A4.1-31 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 A)

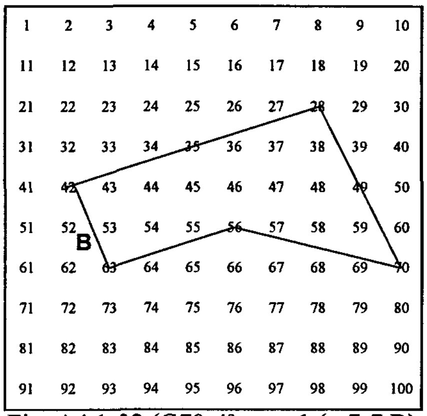


Fig. A4.1-32 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 B)

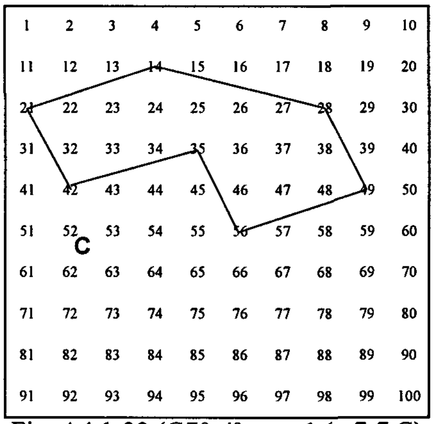


Fig. A4.1-33 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 C)

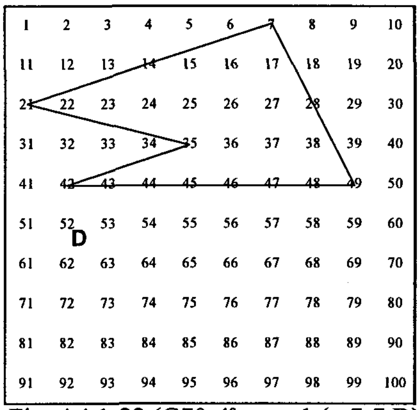


Fig. A4.1-22 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 D)

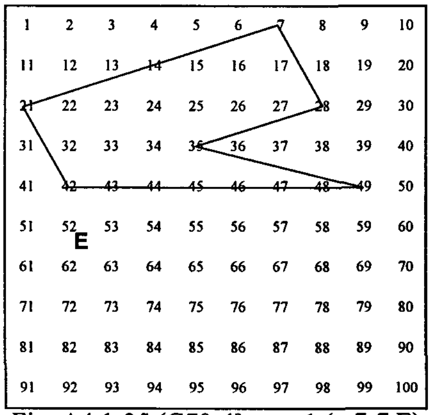


Fig. A4.1-35 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 E)

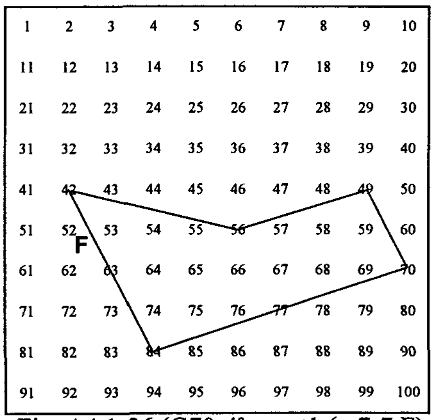


Fig. A4.1-36 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 F)

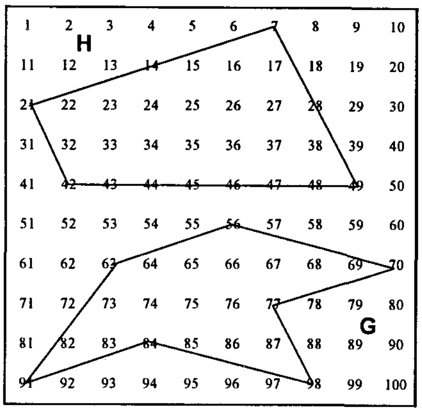


Fig. A4.1-37 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 G y H)

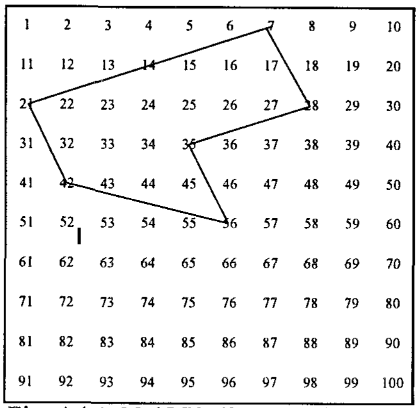


Fig. A4.1-38 (G70-4ª ses.-t1 (m7-7 I)

8 múltiplos consecutivos de 7:

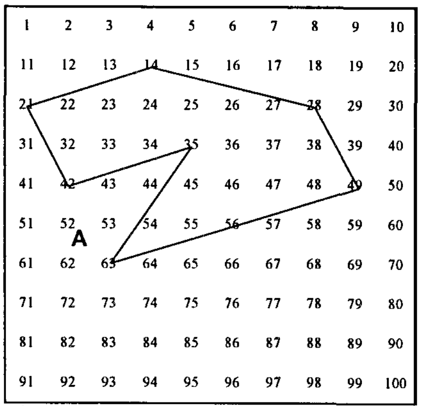


Fig. A4.1-39 (G70-4ª ses.-t1 (m7-8 A)

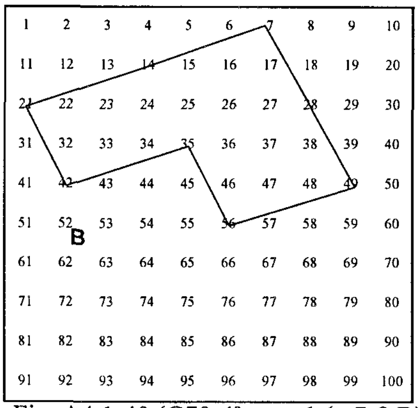


Fig. A4.1-40 (G70-4ª ses.-t1 (m7-8 B)

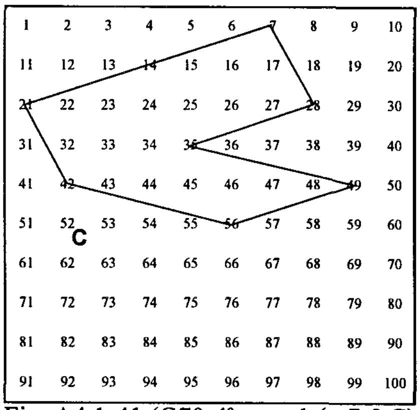


Fig. A4.1-41 (G70-4ª ses.-t1 (m7-8 C)

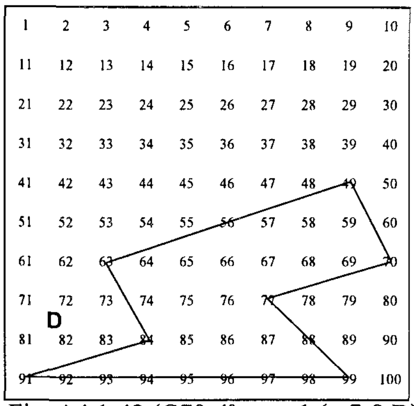


Fig. A4.1-42 (G70-4ª ses.-t1 (m7-8 D)

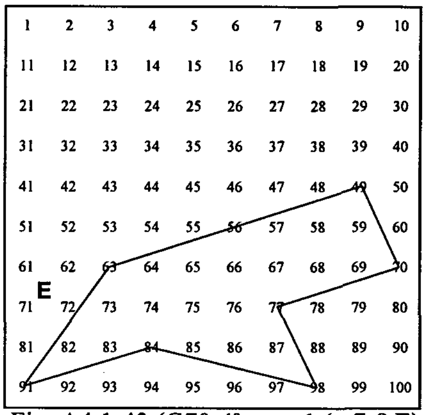


Fig. A4.1-43 (G70-4ª ses.-t1 (m7-8 E)

Clasificamos las respuestas correspondientes a la tarea 4.1 según los siguientes tipos:

Respuestas totalmente correctas:

A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos.

Respuestas incorrectas:

B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.

C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.

D) Area y nombre de polígono incorrectos.

E) El dibujo es incorrecto por unir múltiplos no consecutivos de 7.

La siguiente tabla resumen los 5 tipos de respuestas, donde **C** indica correcto e **I** indica incorrecto):

Tipo de respuesta		Area	Nombre	Dibujo
Correctas	A	C	C	C
Incorrectas	B	C	I	C
	C	I	C	C
	D	I	I	C
	E	C	C	I

Tabla A4.1-49 (G70-4ª sesión-tarea 1)

La tabla A4.1-50 recoge las frecuencias absolutas y relativas (entre paréntesis) de los tipos de respuestas obtenidos en G70:

En cada tipo de respuesta se menciona:

- El nombre que el estudiante atribuye a la figura realizada.

- La letra que corresponde a esa figura G70-4.1(m7-k). Los números 4.1 se refieren a 4ª sesión-tarea 1.

- Un esquema reducido del dibujo.

- Las frecuencias absoluta y relativa (en % respecto del total de respuestas para cada k; k=número de puntos que se unen).

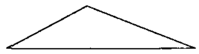
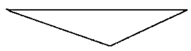
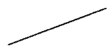
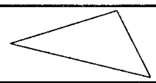
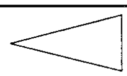
	Respuestas (3 múltiplos consecutivos de 7)	Figura G70-4.1(m7-3)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				45 (91.8)
	A_1) Triángulo	A		29 (59.2)	
	A_2) Triángulo	B		12 (24.5)	
	A_3) Segmento	C		4 (8.2)	
Incorrectas	**C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.** Triángulo	D		1 (2.0)	4 (8.2)
	E) Unen múltiplos de 7 no consecutivos				
	D_1) Triángulo	D		2 (4.1)	
	D_2) Triángulo	E		1 (2.0)	
Total					**49**

Tabla A4.1-50 (G70-4.ª sesión-tarea 1(m7-3))

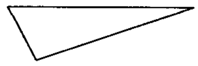
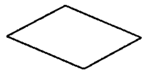
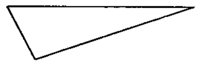
	Respuestas (4 múltiplos consecutivos de 7)	Figura G70-4.1(m7-4)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				2 (66.7)
	A_1) Triángulo	A		1 (33.3)	
	A_2) Paralelogramo	B		1 (33.3)	
Incorrectos	**C) Area incorrecta; nombre y dibujo del polígono correctos.** Triángulo	D		1 (33.3)	1 (33.3)
Total					**3**

Tabla A4.1-51 (G70-4.ª sesión-tarea 1 (m7-4)

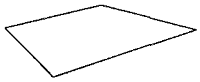
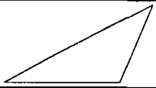
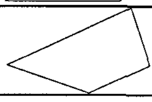
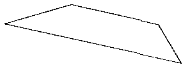
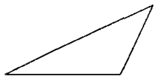
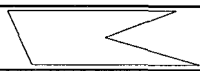
	Respuestas (5 múltiplos consecutivos de 7)	Figura G70-4.1(m7-5)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				32 (71.1)
	A_1) Trapecio	A		11 (24.4)	
	A_2) Triángulo	B		2 (4.4)	
	A_3) Trapecio	D		17 (37.8)	
	A_4) Trapecio	E		2 (4.4)	
Incorrectas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.** Paralelogramo	A		2 (4.4)	13 (28.9)
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.				
	C_1) Triángulo	B		3 (6.7)	
	C_2) Polígono cóncavo	C		1 (2.2))	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos. Paralelogramo (5) y Pentágono (2)	A		7 (15.6)	
Total					**45**

Tabla A4.1-52 (G70-4.ª sesión-tarea 1 (m7-5)

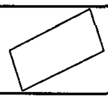
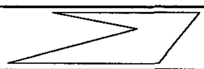
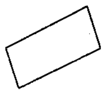
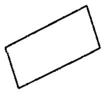
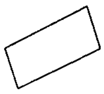
	Respuestas (6 múltiplos consecutivos de 7)	Figura G70-4.1(m7-6)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				26 (48.1)
	A_1) Paralelogramo	B		18 (33.3)	
	A_2) Trapecio	C		7 (13.0)	
	A_3) Polígono cóncavo	A		1 (1.9)	
Incorrec-tas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.** Rectángulo (17) y Trapecio (1)	B		18 (33.3)	28 (51.9)
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos. Paralelogramo	B		7 (13.0)	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos. Rectángulo	B		3 (5.6)	
Total					**54**

Tabla A4.1-53 (G70-4.ª sesión-tarea 1 (m7-6)

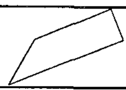
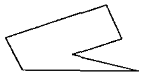
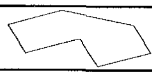
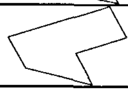
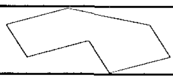
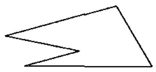
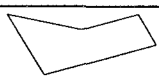
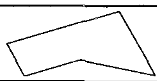
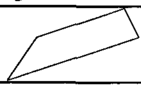
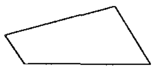
	Respuestas (7 múltiplos consecutivos de 7)	Figura G70-4.1(m7-7)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				
	A_1) Trapecio	A		11 (25.0)	
	A_2) Polígono cóncavo	B		11 (25.0)	26 (59.1)
	A_3) Polígono cóncavo	E		2 (4.5)	
	A_4) Polígono cóncavo	C		2 (4.5)	
Incorrec-tas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.**				
	B_1) Paralelogramo	A		2 (4.5)	
	B_2) Nada	G		2 (4.5)	
	B_3) Pentágono irregular	I		1 (2.3)	
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.				
	C_1) Polígono irregular (1) y polígono cóncavo (1)	B		2 (4.5)	
	C_2) Polígono cóncavo	C		1 (2.3)	18 (40.9)
	C_3) Pentágono	D		1 (2.3)	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos.				
	Nada (3) y Paralelogramo (1)	F		4 (9.1)	
	D_1) Nada	B		3 (6.8)	
	D_2) Trapezoide	A		1 (2.3)	
	D_3) Pentágono	H		1 (2.3)	
Total					**49**

Tabla A4.1-54 (G70-4.ª sesión-tarea 1 (m7-7)

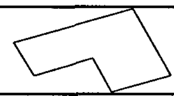
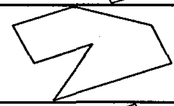
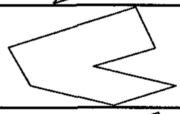
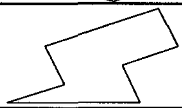
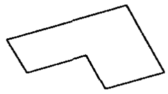
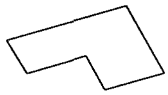
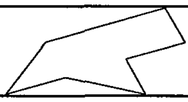
	Respuestas (8 múltiplos consecutivos de 7)	Figura G70-4.1(m7-8)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				14 (60.9)
	A_1) Polígono cóncavo (9) Hexágono (1)	B		10 (43.5)	
	A_2) Polígono cóncavo	A		2 (8.7)	
	A_3) Polígono cóncavo	C		1 (4.3)	
	A_4) Polígono cóncavo	D		1 (4.3)	
Incorrectas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.** Nada.	B		6 (26.1)	9 (39.1)
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos. Hexágono	B		2 (8.7)	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos. Nada	E		1 (4.3)	
Total					**23**

Tabla A4.1-55 (G70-4.ª sesión-tarea 1 (m7-8)

Tarea 4.2

Expresa las regularidades que observes en la tabla de la tarea anterior.

	Respuestas	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Características del área**		46 (92.0)
	A_1) El área del polígono va aumentando en 3,5 unidades (7/2) cuando aumentamos en uno el número de puntos.	20 (40.0)	
	A_2) $\boxed{A = \frac{(p-2)x7}{2} = \frac{7}{2}\,x(p-2)}$ p = número de puntos a unir.	9 (18.0)	
	A_3) El área del polígono no depende de la forma sino del número de puntos que unimos.	7 (14.0)	
	A_4) El área del polígono es múltiplo de 3,5.	5 (10.0)	
	A_5) Al aumentar el número de puntos que unimos, aumenta el área.	2 (4.0)	
	A_6) $\boxed{A = I + \frac{F}{2} - 1}$ I=puntos interiores al polígono F=Puntos frontera (sobre los lados del polígono). (Fórmula de Pick)	1 (2.0)	
	B) Características del polígono		
	B_1) Al unir 7 o más puntos obtenemos polígonos irregulares.	1 (2.0)	
	B_2) Se repiten las figuras al sumar 7 decenas o bajar 7 lugares	1 (2.0)	
Incompletas	B_3) El área de los polígonos que se forman uniendo múltiplos consecutivos de 7, es un múltiplo de 7. (Nota: hay que añadir para p=2n)	2 (4.0)	2 (4.0)
Incorrectas	B_4) A partir de 6 puntos a unir, el polígono es cóncavo. (Nota: ver contraejemplo en fig.7-A)	1 (2.0)	2 (4.0)
	B_5) Al unir de 3 a 6 puntos, obtenemos polígonos regulares.	1 (2.0)	
Total			**50**

Tabla A4.1-56 (G70-4.ª sesión-tarea 2)

Tarea 4.3

Realiza las mismas actividades que en la tarea 4.1 uniendo múltiplos consecutivos de 2.

Figuras realizadas en G70:

Uniendo 3 múltiplos consecutivos de 2

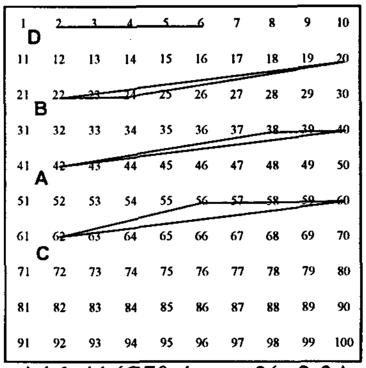


Fig. A4.1-44 (G70-4 ses.-t3(m2-3A a D)

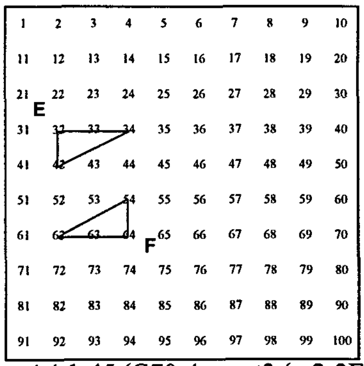


Fig. A4.1-45 (G70-4 ses.-t3 (m2-3E y F)

4 múltiplos consecutivos de 2

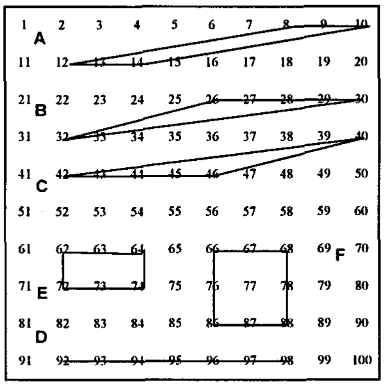


Fig. A4.1-46 (G70-4 ses.-t3 (m2-4A a F)

5 múltiplos consecutivos de 2

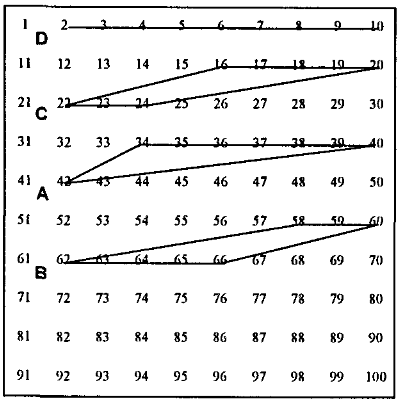


Fig. A4.1-47 (G70-4 ses.-t3 (m2-5A a D)

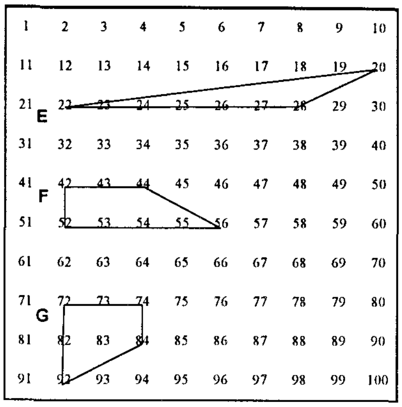


Fig. A4.1-48 (G70-4 ses.-t3 (m2-5E, F y G)

6 múltiplos consecutivos de 2

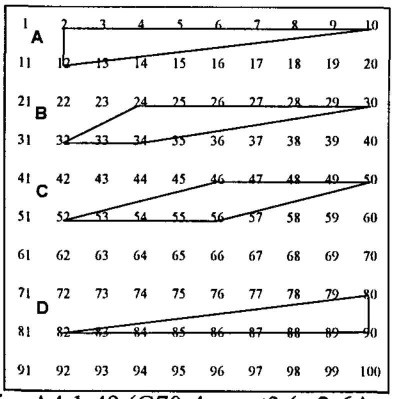


Fig. A4.1-49 (G70-4 ses.-t3 (m2-6A a D)

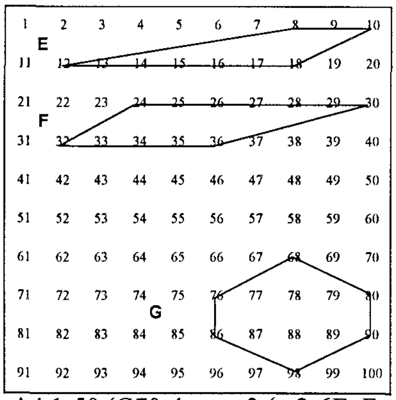


Fig. A4.1-50 (G70-4 ses.-t3 (m2-6E, F y G)

7 múltiplos consecutivos de 2

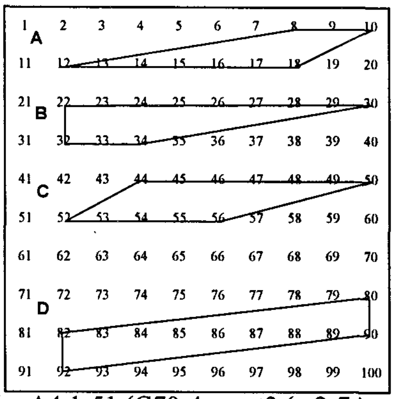


Fig. A4.1-51 (G70-4 ses.-t3 (m2-7A a D)

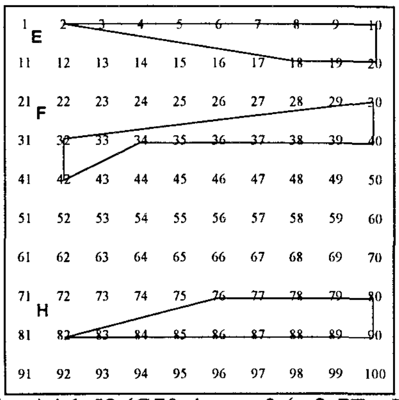


Fig. A4.1-52 (G70-4 ses.-t3 (m2-7E a H)

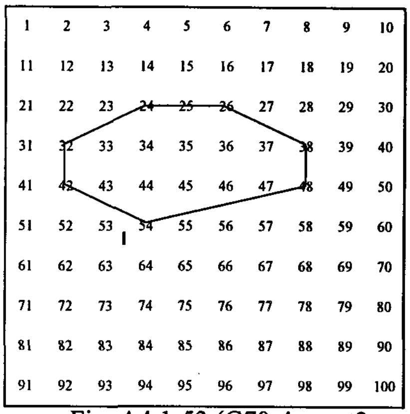


Fig. A4.1-53 (G70-4 ses.-t3
(m2-7I, J y K)

8 múltiplos consecutivos de 2

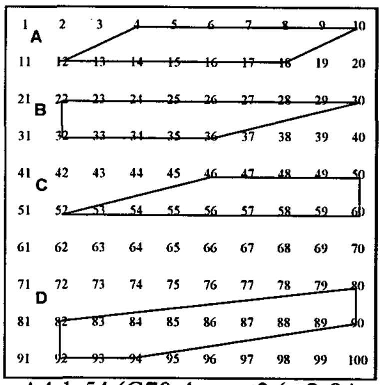


Fig. A4.1-54 (G70-4 ses.-t3 (m2-8A a D)

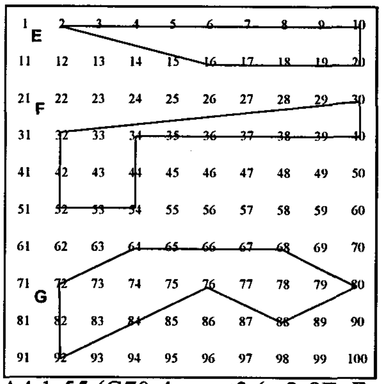


Fig. A4.1-55 (G70-4 ses.-t3 (m2-8E, F y G)

Con la misma clasificación que en la tarea 4.1, recogemos en las tablas A4.1-57 a 62 G70-4.3(m2-k) las respuestas de los componentes de G70:

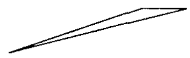
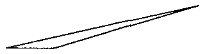
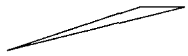
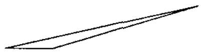
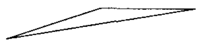
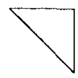
	Respuestas (3 múltiplos consecutivos de 2)	Figura G70-4.3(m2-3)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				36 (70.6)
	A_1) Triángulo	A		24 (47.1)	
	A_2) Triángulo	B		6 (11.8)	
	A_3) Segmento	D		6 (11.8)	
Incorrec-tas	**C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.**				15 (29.4)
	C_1) Triángulo	A		9 (17.6)	
	C_2) Triángulo	B		2 (3.9)	
	E) Unen múltiplos de 2 no consecutivos				
	E_1) Triángulo	E		2 (3.9)	
	E_2) Triángulo	C		1 (2.0)	
	E_3) Triángulo	F		1 (2.0)	
Total					**51**

Tabla A4.1-57 (G70-4ª sesión-tarea 3(m2-3))

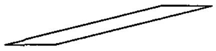
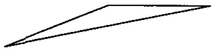
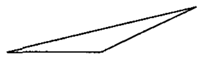
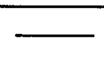
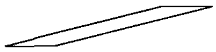
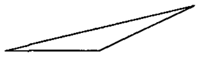
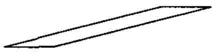
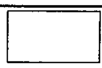
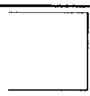
	Respuestas (4 múltiplos consecutivos de 2)	Figura G70-4.3(m2-4)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				39 (69.7)
	A_1) Paralelogramo	A		22 (39.3)	
	A_2) Triángulo	B		8 (14.3)	
	A_3) Triángulo	C		8 (14.3)	
	A_4) Segmento	D		1 (1.8)	
Incorrectas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.**				17 (30.4)
	B_1) Trapecio (3); nada (2); Rectángulo (1)	A		6 (10.7)	
	B_2) Nada	C		1 (1.8)	
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.				
	C_1) Paralelogramo	A		5 (8.9)	
	C_2) Triángulo	B		2 (3.6)	
	E) Unen múltiplos de 2 no consecutivos				
	E_1) Rectángulo	E		2 (3.6)	
	E_2) Cuadrado	F		1 (1.8)	
Total					**56**

Tabla A4.1-58 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2-4)

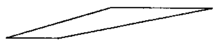
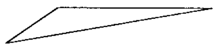
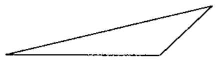
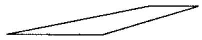
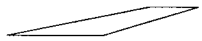
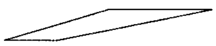
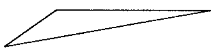
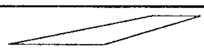
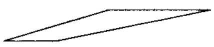
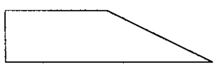
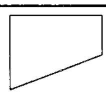
	Respuestas (5 múltiplos consecutivos de 2)	Figura G70-4.3(m2-5)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				14 (33.3)
	A_1) P. convexo (3); Trapecio(3); cuadrilátero (1)	C		7 (16.7)	
	A_2) Triángulo	A		3 (7.1)	
	A_3) Segmento	E		2 (4.8)	
	A_4) Trapecio	B		1 (2.4)	
	A_5) Segmento	D		1 (2.4)	
Incorrectas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.**				28 (66.7)
	B_1) Paralelogramo (5); nada (3)	C		8 (19.0)	
	B_2) Paralelogramo (3); nada (1), rectángulo (1)	B		5 (11.9)	
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.				
	C_1) Trapecio	C		5 (11.9)	
	C_2) Triángulo	A		1 (2.4)	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos.				
	D_1) Paralelogramo (5)	B		5 (11.9)	
	D_2) Paralelogramo	C		1 (2.4)	
	E) Unen múltiplos de 2 no consecutivos				
	E_1) Trapecio	F		2 (4.8)	
	E_2) Nada	G		1 (2.4)	
Total					**42**

Tabla A4.1-59 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2-5)

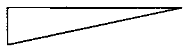
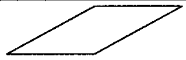
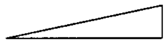
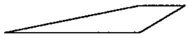
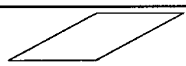
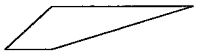
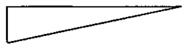
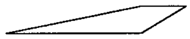
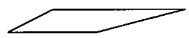
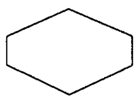
	Respuestas (6 múltiplos consecutivos de 2)	Figura G70-4.3(m2-6)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correc-tas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				29 (61.7)
	A_1) Triángulo	A		18 (38.3)	
	A_2) Paralelogramo	C		6 (12.8)	
	A_3) Triángulo	D		3 (6.4)	
	A_4) Trapecio (1); cuadrilátero (1)	E		2 (4.3)	
Incorrec-tas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.**				18 (38.3)
	B_1) Rectángulo (2); rombo (1); nada (1)	C		4 (8.5)	
	B_2) Paralelogramo	B		3 (6.4)	
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.				
	C_1) Paralelogramo	C		4 (8.5)	
	C_2) Triángulo	A		3 (6.4)	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos.				
	D_1) Paralelogramo	E		2 (4.3)	
	D_2) Paralelogramo	F		1 (2.1)	
	E) Unen múltiplos de 2 no consecutivos. Hexágono	G		1 (2.1)	
Total					**47**

Tabla A4.1-60 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2-6)

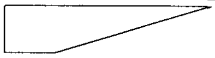
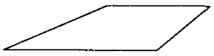
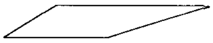
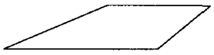
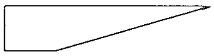
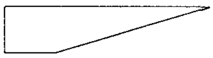
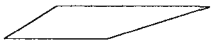
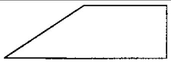
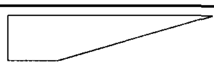
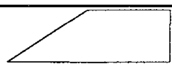
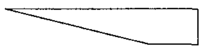
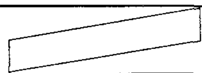
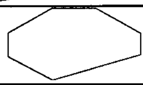
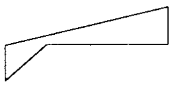
	Respuestas (7 múltiplos consecutivos de 2)	Figura G70-4.3(m2-7)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correc-tas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				14 (34.1)
	A_1) Trapecio (7); cuadrilátero (1)	B		8 (19.5)	
	A_2) Trapecio (2); P. convexo (1)	A		3 (7.3)	
	A_3) P. convexo (1); Trapecio (1)	C		3 (7.3)	
Incorrec-tas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.**				27 (65.9)
	B_1) Paralelogramo (4); nada (2)	A		6 (14.6)	
	B_2) Nada	B		2 (4.9)	
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.				
	C_1) Trapecio	B		3 (7.3)	
	C_2) Trapecio	C		3 (7.3)	
	C_3) Cuadrilátero	H		1 (2.4)	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos.				
	D_1) Paralelogramo (2); nada (1)	B		3 (7.3)	
	D_2) Paralelogramo	H		1 (2.4)	
	E) Unen múltiplos de 2 no consecutivos				
	E_1) Trapecio	E		3 (7.3)	
	E_2) Paralelogramo	D		2 (4.9)	
	E_3) Heptágono	I		2 (4.9)	
	E_4) Pentágono cóncavo	F		1 (2.4)	
Total					**41**

Tabla A4.1-61 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2-7)

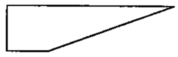
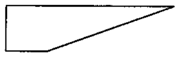
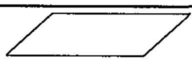
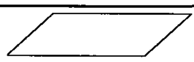
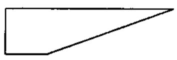
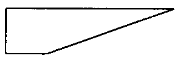
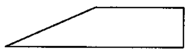
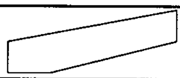
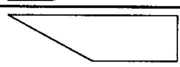
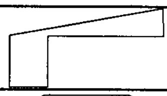
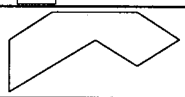
	Respuestas (8 múltiplos consecutivos de 2)	Figura G70-4.3(m2-8)	Esquema	n_i (%)	Total (%)
Correctas	**A) Area, nombre y dibujo del polígono correctos**				15 (37.5)
	A_1) Paralelogramo	A		10 (25.0)	
	A_2) Trapecio (1); p. de 4 lados (1); P. convexo (1)	B		5 (12.5)	
Incorrectas	**B) Area correcta, nombre del polígono incorrecto y dibujo correcto.**				25 (62.5)
	B_1) Nada	B		2 (5.0)	
	B_2) Rectángulo	A		1 (2.5)	
	C) Area incorrecta, nombre y dibujo del polígono correctos.				
	C_1) Paralelogramo	A		4 (10.0)	
	C_2) Trapecio (2); cuadrilátero (1)	B		3 (7.5)	
	D) Area y nombre de polígono incorrectos. Paralelogramo (2); nada (1)	B		3 (7.5)	
	E) Unen múltiplos de 2 no consecutivos				
	E_1) Trapecio (4); paralelogramo (2); nada (2)	C		8 (20.0)	
	E_2) Trapecio	D		1 (2.5)	
	E_3) Trapecio	E		1 (2.5)	
	E_4) P. convexo	F		1 (2.5)	
	E_5) Heptágono cóncavo	G		1 (2.5)	
Total					**40**

Tabla A4.1-62 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2-8)

Tipo de respuestas (múltiplos de 2)

Nº de puntos	A	B	C	D	E	Total
3	36 (70,6)	0 (0,0)	11 (21,6)	0 (0,0)	4 (7,8)	51 (6,6)
4	39 (69,6)	7 (12,5)	7 (12,5)	0 (0,0)	3 (5,4)	56 (7,2)
5	14 (33,3)	13 (31,0)	6 (14,3)	6 (14,3)	3 (7,1)	42 (5,4)
6	29 (61,7)	7 (14,9)	7 (14,9)	3 (6,4)	1 (2,1)	47 (6,0)
7	14 (34,1)	8 (19,5)	7 (17,1)	4 (9,8)	8 (19,5)	41 (5,3)
8	15 (37,5)	3 (7,5)	7 (17,5)	3 (7,5)	12 (30,0)	40 (5,1)
Subtotal	147 (53,1)	38 (13,7)	45 (16,2)	16 (5,8)	31 (11,2)	**277 (100)**

Tabla A4.1-63 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2)

Tipos de polígonos dibujados (múltiplos de 2)

Nº de puntos	Segmento	Triángulo	Paralelogramo	Trapecio	Rectángulo	Cuadrado	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Pol. cóncavo	TOTAL
3	6 (11,8)	45 (88,2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	51 (18,4)
4	1 (1,8)	19 (33,9)	33 (58,9)	0 (0)	2 (3,6)	1 (1,8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	56 (20,2)
5	1 (2,4)	6 (14,3)	0 (0)	35 (83,3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	42 (15,2)
6	0 (0)	24 (51,1)	15 (31,9)	7 (14,9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (2,1)	0 (0)	0 (0)	47 (17)
7	0 (0)	0 (0)	2 (4,9)	36 (87,8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (100)	1 (2,4)	41 (14,8)
8	0 (0)	0 (0)	15 (37,5)	22 (55,0)	0 (0)	0 (0)	1 (2,5)	1 (2,5)	0 (0)	2 (5,0)	40 (14,4)
Subtotal	8 (2,9)	94 (33,9)	65 (23,5)	100 (36,1)	2 (0,7)	1 (0,4)	1 (0,4)	2 (0,7)	2 (0,7)	3 (1,1)	**277 (100)**

Tabla A4.1-64 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2)

Los errores en la asignación del nombre a los polígonos vienen expresados en la tabla G70-4.3(m2)c, que muestra las frecuencias, absolutas y relativas (respecto del total de respuestas 277) de dichos errores:

Nº de puntos	Polígono dibujado	Nombre asignado al polígono	n_i (%)	Total
4	Paralelogramo	Trapecio	3 (1.1)	6 (2.2)
		Nada	2 (0.7)	
		Rectángulo	1 (0.4)	
5	Trapecio	Paralelogramo	14 (5.1)	19 (6.9)
		Nada	4 (1.4)	
		Rectángulo	1 (0.4)	
6	Paralelogramo	Rectángulo	2 (0.7)	4 (1.4)
		Rombo	1 (0.4)	
		Nada	1 (0.4)	
	Trapecio	Paralelogramo	6 (2.2)	6 (2.2)
7	Trapecio	Paralelogramo	7 (2.5)	12 (4.3)
		Nada	5 (1.8)	
8	Trapecio	Nada	3 (1.1)	6 (2.2)
		Paralelogramo	2 (0.7)	
		Rectángulo	1 (0.4)	
TOTAL				53 (19.1)

Tabla A4.1-65 (G70-4ª sesión-tarea 3 (m2)c

Gráfico para tipos de respuestas (frecuencias absolutas):

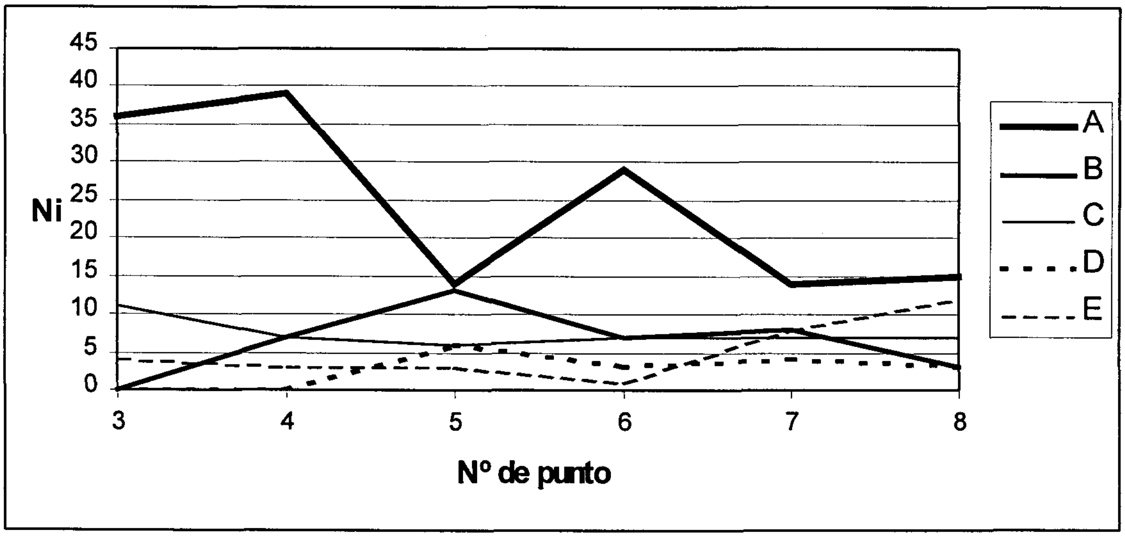


Fig. A4.1-56 (G70-4ª sesión-tarea 3)

Gráfico para tipos de respuestas (frecuencias relativas):

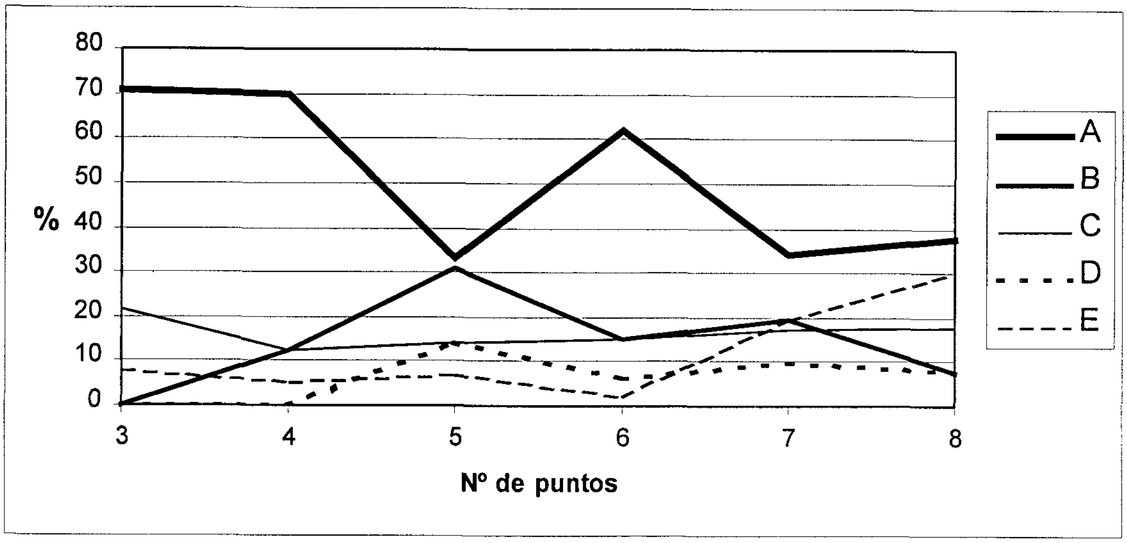


Fig. A4.1-57 (G70-4ª sesión-tarea 3)

Gráfico para tipos de polígonos (frecuencias absolutas):

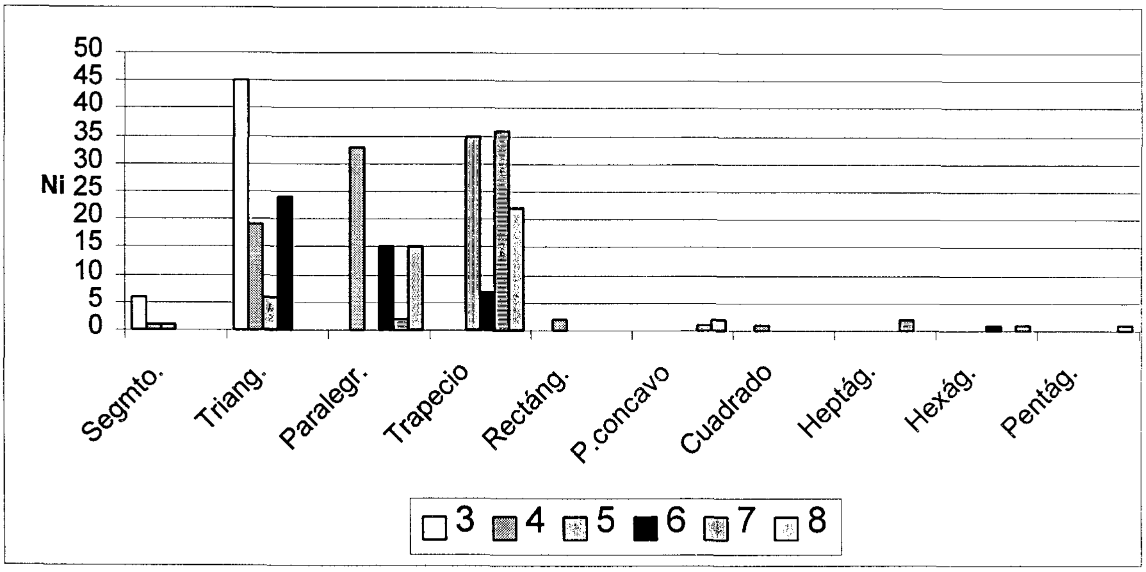


Fig. A4.1-58 (G70-4ª sesión-tarea 3)

Gráfico para tipos de polígonos (frecuencias relativas):

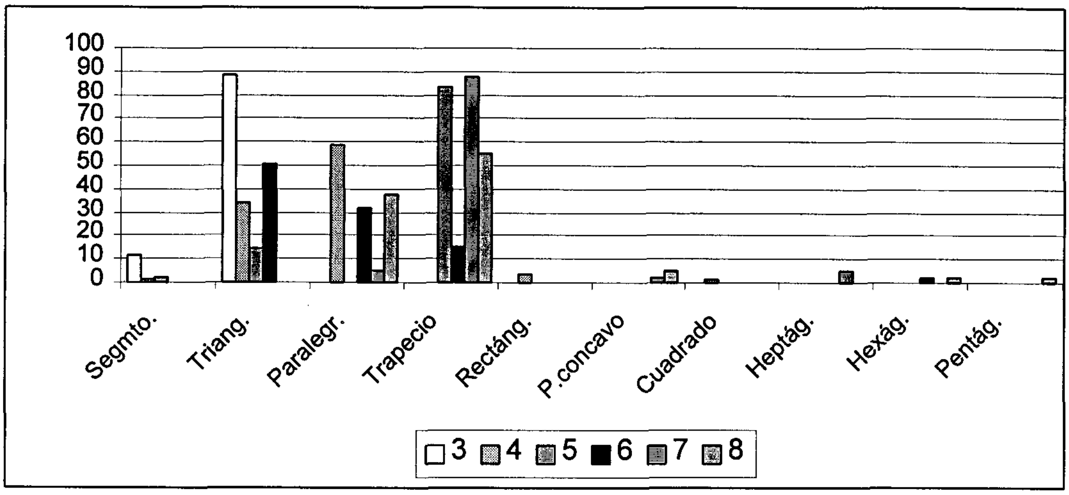


Fig. A4.1-59 (G70-4ª sesión-tarea 3)

Tarea 4.4

Expresa las regularidades que observes en la tabla de la tarea anterior.

Las regularidades expresadas por los componentes de G70 vienen recogidas en la Tabla A4.1-66:

	Respuestas	n_i (%)	Total (%)
	A) Características del área		
Correctas	A_1) El área del polígono va aumentando en 1 unidades (2/2) cuando aumentamos en uno el número de puntos.	13 (27.1)	32 (66.7)
	A_2) $\boxed{A=\frac{(p-2)x2}{2}=p-2}$ p = número de puntos a unir.	12 (25.0)	
	A_3) El área del polígono no depende de la forma sino del número de puntos que unimos.	3 (6.3)	
	A_4) Al aumentar el número de puntos que unimos, aumenta el área.	2 (2.1)	
	A_5) La diferencia entre el número de puntos a unir y el área es 2.	1 (2.1)	
	A_6) $\boxed{A = I+\frac{F}{2}-1}$ I=puntos interiores al polígono F=Puntos frontera (sobre los lados del polígono). (Fórmula de Pick)	1 (2.1)	
Incompletas	B_1) El área de los polígonos que se forman uniendo múltiplos consecutivos de 2, es un múltiplo de 2. (Nota: hay que añadir: "para p=2n")	2 (4.2)	3 (6.3)
	B_2) Al unir 3 puntos sale siempre el mismo triángulo aunque en otra posición. Se pasa de uno a otro mediante una reflexión horizontal y un giro de 180°. (Nota: La respuesta es incompleta al ser cierto para un giro de 180°, pero no para la reflexión horizontal)	1 (2.1)	
Incorrectas	C_1) Los polígonos que se obtienen poseen al menos dos lados paralelos	4 (8.3)	13 (27.1)
	C_2) El área que resulta al unir n múltiplos consecutivos de 2 es n-1 unidades.	3 (6.3)	
	C_4) El área del polígono va aumentando de 2 en 2 unidades.	2 (4.2)	
	C_5) El área del polígono va aumentando de 1.5 en 1.5 unidades.	2 (4.2)	
	C_6) Al unir un número par de puntos el área es un número entero, si el número es impar el área sale un número decimal.	1 (2.1)	
	C_7) Todos los polígonos son convexos.	1 (2.1)	
Total			**48**

Tabla A4.1-66 (G70-4ª sesión-tarea 4)

Anexo 4.2

Sesiones de trabajo con G3: tareas de contexto

Primera sesión: divisibilidad y operaciones aritméticas

Tablas de resultados

Componentes del grupo: Pedro (PD); Domingo (D) y Dolores (DL)

Pedro y Domingo pertenecen al grupo A y Dolores es del grupo B. Los tres componentes del grupo han sido seleccionados de entre el grupo de Prácticas de manera voluntaria, después de detectar un cierto interés por el tema.

Se proyecta la transparencia con la tabla coloreada y se utiliza la pizarra para escribir. El guión de trabajo es básicamente el que se pasó al G70, y los objetivos son los mismos.

Transcripción de la primera sesión

(P) Esta es la tabla coloreada (proyectada en la pantalla mediante una transparencia). Sobre esa tabla vamos a hablar de cuestiones aritméticas. Como vemos los múltiplos de un número están coloreados con unos criterios. (El profesor revisa cada uno de ellos en voz alta)

¿De qué color o qué atributo tienen los múltiplos de 11, por ejemplo?

(PD) No tiene ningún color en especial.

(P) 11 es número primo, pero 12 no lo es. ¿Qué atributos tiene?

(D) y (PD) Sería una combinación.

(PD) Los que tengan verde, círculo y cuadrado.

(P) ¿Y eso por qué?

(D) Porque es múltiplo de 2, de 3 y de 4.

(P) Pero el cuadrado no corresponde a ninguno de esos. El cuadrado es por ser múltiplo de 6 ¿no?

(D) Pues entonces también.

(P) Entonces los múltiplos de 12 ¿Cómo tienen que ser? Rojo...

(PD) Verde, por ser múltiplo de 3.

(D) Amarillo.

(DL) Solo rojo y verde ¿no?

(P) Por ser múltiplo de 2 es rojo. Por ser múltiplo de 3, verde ¿Qué más?

(D) Por ser múltiplo de 4, círculo, y por ser múltiplo de 6 el cuadrado.

(P) Tiene 5 atributos (colores y figuras) ¿no?

(PD) y (D) Sí.

(P) Mediante colores y figuras (atributos) podemos reconocer los múltiplos de un número determinado. ¿Veis el paralelismo que hay entre los atributos y los divisores de un número? ¿Cuáles son los divisores de 56?

(PD) 7, 4 y 2

(P) Si nos situamos en una casilla cualquiera, como la 16, ¿Cómo interpretáis "bajar una casilla" en términos de operaciones aritméticas?

(DL) Restarle 10.

(PD) Sumar 10.

(P) ¿Y si bajo 3 lugares?

(DL) y (PD) Sumar 30

(P) ¿Y si subo?

(PD) Restar

(P) ¿Y si me muevo una casilla a la derecha?

(PD) Sumar 1

(P) Y a la izquierda?

(PD) Restar 1.

(P) O sea, si nos movemos por filas estamos modificando...

(DL) Las unidades

(P) Y si nos movemos por columnas...

(PD) Las decenas.

(P) Entonces, ¿Cómo haríais 24+21? Verbalmente. Vamos a suponer que no sabemos hacer la suma, pero sí lo que significa cada movimiento. Situados en el 24. ¿Cómo le sumamos 21?

(PD) Sumar 20 y luego 1 ¿no?

(P) Eso en la tabla ¿Como sería?

(PD) Bajar dos lugares y uno a la derecha.

(P) ¿Podríamos escribir en la pizarra en lenguaje matemático lo que hemos dicho? ¿Qué operación se está efectuando en cada movimiento? (silencio).

(P) En el lenguaje de tabla estamos utilizando: bajar, subir, derecha, izquierda. Queremos ver el paralelismo entre ese lenguaje y el lenguaje matemático.

(D) (Domingo escribe 21 debajo de 24) Bajamos dos filas (Domingo escribe en la pizarra

$$\boxed{\begin{array}{r} 24 \\ \underline{21} \\ 45 \end{array}}$$

(D) O ¿Cómo?

(P) Vamos a escribir en fila. Escribe 24. ¿Cómo traducimos la palabra "*baja*"?

(D) Restándole 2 filas, que sería (Domingo escribe 2 debajo del 2 del 24)

2 4 2

(P) En la tabla, el verbo "*bajar*" lo hemos traducido por...
(PD) Sumar decenas.
(P) Entonces...
(D) (Domingo escribe 24 + 2x10)
(P) Hasta ahora hemos puesto bajar 2 lugares, y ahora...
(PD) Derecha 1.
(D) (Domingo escribe + 1, y queda: 24 + 2x10 + 1)
(P) Esa sería la expresión aritmética de los que acabamos de decir: bajar 2, derecha 1. ¿No?
(P) ¿Cómo haríamos para restar 36 - 19?
(D) Para restar subiríamos una fila
(Domingo escribe: 36 - 1x10) y ahora a la izquierda 9 unidades
(Domingo escribe: 36 - 1x10 - 9)
(P) Bien: 36-19
(PD) Se podría hacer también subiendo 2 decenas y luego sumar 1.
(D) (Domingo escribe: 36 -2x10 +1.
(P) ¿Qué relación se pone de manifiesto entre la suma y la resta con este lenguaje de bajar, subir, etc.? Estamos empleando bajar, subir, derecha, izquierda, que se corresponde con ...
(DL) Sumar decenas, restar decenas, sumar unidades, restar unidades.
(P) ¿Qué os sugiere esto?
(PD) Orden.
(P) ¿En qué sentido? ¿De ordenar los números?
(PD) Los números están ordenados, ya.
(P) ¿Qué más cosas? Lo contrario de subir ¿Qué es?
(D) ¿Que las operaciones de sumar y restar son operaciones inversas?
(P) Claro. Vamos con el producto ¿Cómo haríais en la tabla 7x4?
(D) Cogeríamos el 7 e iríamos aumentando 4 veces 7.
(P) ¿Pero cómo lo haríamos con la tabla (los atributos)?
(D) El triángulo que hace número 4.
(P) O sea, ¿El cuarto triángulo? ¿Contando el 7?
(D) Contando el 7. Tendríamos: 7, 14, 21, 28
(P) Escribe en la pizarra su traducción en lenguaje aritmético.
(D) (Domingo escribe 7+7+7+7).
(P) ¿Alguna otra forma de hacerlo?
(PD) 4x7; igual, como se cumple la conmutativa.
(P) ¿Cómo se haría 4 x 7?
(D) Se cogería el 4 y nos movemos 7 veces, 7 círculos
(P) Escríbelo aritméticamente
(D) (Domingo escribe 4+4+4+4+4+4+4 (7 veces)
(P) ¿Alguna otra manera de hacerlo?
(D) El primer número donde aparezca el círculo y el triángulo juntos.

(P) Y eso ¿Por qué? Lo que obtenemos es un número que es múltiplo de 7 y de 4, pero... ¿Será eso válido para todos? ¿Cómo son 7 y 4 entre sí?
(PD) Primos relativos
(P) Y si cogemos dos números que no sean primos entre sí? Por ejemplo 4 y 6. 4x6 es 24. ¿24 es el primer número que es círculo y cuadrado?
(DL) No. El primero es 12, que no es 4 x 6.
(P) La regla esa es válida para ...
(PD) Para los números primos entre sí.
(P) Ya habéis dicho que se pone de manifiesto la propiedad conmutativa del producto.
(P) Vamos a hacer 15 x 3
(DL) Bajar 3 veces, 3 lugares.
(P) ¿Y eso por qué? ¿Funciona con otro número?
(PD) El 3 es factor del 15
(P) El 5 también es factor del 15 y no funciona con 5.
(D) 15 x 5 es 75, y hay que bajar 5 lugares.
(P) Bajando 5 lugares llegamos al 65. La regla "*bajar tantos lugares como indica el factor k*" no funciona ¿No? Vamos a coger el 5 que es primo. Vamos a hacer 5 x 3
(PD) ¿Como antes? Con sumas reiteradas.
(P) Como se os ocurra. Esa regla ya la tenemos. ¿Hay otra regla? ¿Cómo se disponen los múltiplos de 5?
(DL) En columnas.
(P) Pero están en dos columnas (La del 5 y la del 10).
(PD) Contar el número de cuadrados tantas veces como indique el otro factor, 3 veces.
(P) Pero en las dos columnas ¿no?
(PD) Sí
(P) Eso es lo que hemos hecho antes.
(D) Sí, claro.
(P) ¿Cómo podemos dar una regla? Para multiplicar 5 x 3 hay que bajar "tantos lugares"...
(D) Hay que bajar una fila para 5x3, si fuera 5x4 ya...
(P) Si es 5x3 hay que bajar una fila en la columna del 5, y si es 5x4...
(D) Si son multiplicaciones con...
(DL) Impares
(D) Con impares, hay que bajar una fila en la misma columna del 5, si son pares en la columna del 10.
(P) ¿Qué distinción hacemos entonces, que el factor sea...
(DL) Par o impar.
(P) ¿Si multiplicamos 5 por un número par, ¿En qué columna está, en la del 5 o en la 10?
(PD) En la del 10
(P) Y si es por uno impar, en la del 5. Para obtener una regla habrá que distinguir si k es par y si k es impar (El profesor lo escribe con una llave).
(D) ¿En la regla vale solo el 5?
(P) 5 por un número k. Vamos a ir haciendo unos cuantos (tabla A4.2-1)

	columna del 5	columna del 10
5x1=5	0	-
5x2=5	-	0
5x3=5	1	-
5x4=5	-	1
5x5=5	2	-
5x6=5	-	3

Tabla A4.2-1 (G3-1ª sesión)

(P) Cuando el número es par ¿Cuántos lugares hay que bajar aquí (en el 10)? ¿Cómo se escribe un número par?
(DL) 2n
(P) Si k es par k=2n. El 6=2x3. Bajamos en la columna del 10...
(PD) k lugares
(DL) No, n.
(P) Bajaríamos n, o bien k/2 lugares. Y en la columna del 5 (si k es impar) bajaríamos...
(PD) 2n+1. Bueno k sería 2n-1
(P) K sería 2n+1, si le damos a n=0 sale el 1.
n = (k-1)/2 Entonces la regla sería "*bajar en la columna del 10 la mitad del número menos 1 si el número es par, y en la columna del 5, la mitad del número menos 1 si k es impar*".
(DL) Sí
(P) ¿Y si hacemos 15x3?
(D) Sería igual pero partiendo del 15 ¿no? Por ejemplo: si fuera 15x3 habría que bajar 3 lugares en la columna del 5, si fuera 5 x 4, que es un número par, habría que bajar en la fila del 10, 4 lugares ¿no? Si el número es impar hay que bajar en la fila del 5, 3 lugares.
(P) ¿Desde el 15 o desde el 5?
(D) No, desde el 15. Entonces en la columna del 10 habría que empezar a contar a partir del 20.
(PD) O sea ¿Suprimir la fila del 10?
(P) Podríamos considerar eliminar la fila de arriba.
(D) Claro.
(P) Vamos haciendo como antes (Tabla A4.2-2):

k	columna del 15	columna del 20
15x1=15	0	-
15x2=30	-	2
15x3=45	3	-
15x4=60	-	5
15x5=75	6	-

Tabla A4.2-2 (G3-2ª sesión)

(P) ¿Y si nos situamos en el 10? (El profesor borra la columna del 20 y pone un 10; rectifica y queda la tabla A4.2-3:

k	**columna del 15**	**columna del 10**
15x1=15	0	-
15x2=30	-	2
15x3=45	3	-
15x4=60	-	5
15x5=75	6	-
15x6=90	-	8

Tabla A4.2-3 (G3-2ª sesión)

(P) ¿Veis la regla?
(D) Tanto si es en la columna del 15 o del 10 hay que ir sumando 3 alternativamente.
(P) Si, pero yo quiero una regla. Bajar "cuántos lugares" si k es par y cuántos si k es impar.
(DL) Si k es par bajamos 2, 5, 8.
(D) La regla sería la misma para k par o impar, habría que bajar 3 en cada...
(P) Sí, tú dices de 3 en 3, ¿No?
(D) Eso es.
(P) Una primera regla sería esa. En vez de bajar de lugar en lugar habría que bajar de 3 en 3 lugares. Eso ¿Por qué es? Para multiplicar por 5 había que bajar de uno en uno y para hacerlo por 15 de 3 en 3. ¿Por qué?
(DL) 15 es 3 por 5. 15= 3x5
(P) Pero veamos la regla. 4:2=2 , 2 por 3 es 6, y menos 1 da 5 (El profesor escribe:

2=2x1 → 2
4=2x2 → 5
6=2x3 → 8

k=2xn

(P) 3 por 1 es 3, menos 1son 2; 3 por 2 es 6, menos 1 es 5; si hacemos 3n-1 nos va dando los lugares a bajar. El número clave es el 3, porque 15 es 3x5
Bajar 3n-1 lugares en la columna del 10 si k es par
Si k es impar ¿Qué regla sacamos? (El profesor escribe:

2x0+1=1 → 0
2x1+1=3 → 3
2x2+1=5 → 6

(PD) 3n
(P) 3n lugares si k es impar. Como veis no es que esto facilite la multiplicación, pero nos proporciona un marco para pensar y encontrar relaciones.

(P) **Vamos con la división**. ¿Cómo dividimos 45:3 en la tabla?
(PD) Estamos en el mismo caso que antes.
(DL) Distinguir si es par o impar y subir casillas.

(P) Pero hemos dado una regla válida para todos los números en la multiplicación. Ponemos otro ejemplo: 56:7.
(D) Si estamos en 56 ir quitando 7. Menos 7, menos 7, ..
(P) Nos situamos en 56 y vamos contando ¿qué?
(PD) Triángulos
(P) Cuántos? ¿Hasta cuándo contamos triángulos?
(PD) 7 triángulos hacia atrás.
(P) ¿7 triángulos? uno, dos, tres, ... y siete, me quedo en el 14. 56:7 ¿Cuánto sería? Vamos a hacerlo en la pizarra (Domingo sale de nuevo a la pizarra y escribe: $\boxed{\begin{array}{l}56\\ \underline{-7}\\ \end{array}}$

(D) ¿Si quitamos 7?
(D) No vale.
(P) ¿Por qué no vale? Si la multiplicación son sumas repetidas...
¿Qué significa dividir? Si tenemos 56 caramelos y los dividimos entre 7 niños...
(DL) Repartir.
(P) Pero con el algoritmo no se ve que sea repartir.
(D) Tomamos 56 y vas restándole 56 -7-7-7 y al final el número de veces que aparezca el 7 es el cociente.
(P) ¿Hasta cuándo estamos quitando 7?
(D) Hasta que lleguemos a 7.
(P) Vamos a repartir los 56 caramelos. Quitamos 7 para Pepito, estos otros 7 para Juanita, y así ¿Hasta cuándo? ¿Hasta que queden 7 en la bolsa? ¿Los queremos repartir todos?
(DL) Hasta que no quede ninguno.
(P) Quito 7 y me quedan 49 (ya tengo un paquete, etc. hasta 0, ¿Cuántas veces 7 hemos quitado? una , dos, ... y 8
Podemos formar 8 paquetes de 7.
56-7-7-7...-7=0, el número de veces que quitamos 7 es el cociente.
(P) ¿Se ve que la división es la inversa de la multiplicación?
(PD) Sí.
(P) Antes hemos hecho 7x4=7+7+7+7
(P) ¿Y si hacemos 60:7?
(PD) Sería igual, contando los triángulos que aparecen, pero la división no es exacta. Hay un resto.
(P) ¿Cómo resolvemos eso?
(PD) Contando las casillas que hay hasta 60. El resto sería los números hasta el 56 y el cociente como antes.

(P) ¿Cómo haríamos **el m.c.d. de 24 y 36**? Mirando la tabla.
(PD) El número que tenga los rasgos comunes ¿no?
(P) Por qué no lo escribes en la pizarra? ¿Cómo lo haríamos? Los atributos comunes ¿no? Escribe:
(PD) (Pedro escribe las iniciales r=rojo; v=verde; c=cuadrado; cr=círculo; n=negro; a=amarillo)

24 = r, v, c, cr, n
36 = r, v, c, cr, a

y rodea los comunes, quedando:

24 =	r	v	c	cr	n
36 =	r	v	c	cr	a

(P) ¿Qué significa "*máximo común divisor*"?
(PD) Hay que buscar de los divisores comunes el mayor. El 12.
(D) El círculo ¿no?
(PD) Sería verde ¿no?
(P) ¿Por qué?
(PD) Rojo, verde, cuadrado, círculo.
(P) Has dicho el 12, ¿Cómo sale el 12?
(DL) Porque tiene los rasgos comunes.
(P) 2, 3, 4, 6. Ya no hay más comunes. ¿Cómo sale el 12?
(PD) El 6 es 2x3. Lo podemos quitar, porque es combinación de 2 y 3.
(P) Si no supiéramos el algoritmo del m.c.d., con la tabla y sabiendo lo que significan las siglas m.c.d. ¿Cómo lo podríamos calcular? Un divisor común sería el 2, otro el 3, 4, 6, ¿Hay alguno más?
(PD) Combinaciones de ellos.
(P) Habría que hacer los divisores de 36 y de 24 y coger los comunes (El profesor escribe los divisores de 24 y de 36:

d(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
d(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

(PD) En el 24 está círculo y cuadrado. Y en el 36... Eso correspondería al 12. Bueno círculo, cuadrado y verde.
(DL) El ser círculo y cuadrado encierra ser rojo y verde.
(P) ¿Sale alguna regla?
(D) No lo veo. (silencio)
(P) Parece que no vemos una regla clara para el m.c.d.
(P) Bueno como es tarde lo dejamos hoy aquí. Como veis se trata de explorar este material, la tabla cien, para ver las posibilidades didácticas que tiene.

Segunda sesión: Divisibilidad y patrones

(P) Quiero que leáis el ejercicio y ver si lo entendéis. Vamos a trabajar con la misma hoja de trabajo (y la pizarra) los tres, y podéis comentáis entre vosotros lo que se os ocurre.

(El profesor proyecta en la pantalla la tabla coloreada y explica la notación que vamos a utilizar para los múltiplos de k en cada diagonal)

(P) Vemos cómo los múltiplos de un número se disponen en diagonales, aunque para el caso del 5 son columnas. Se ven claramente las diagonales en el sentido ↙, pero también en el otro sentido ↘. ¿Las veis? (Los alumnos asienten)

Vamos a determinar una manera de numerar los múltiplos de 3, por ejemplo. El 3 estaría en la primera diagonal y en la primera posición dentro de esa diagonal. Le asignamos el par (1, 1). Cada múltiplo de k vendrá determinado por un par (d, p), donde d es la diagonal (en un sentido u otro) en la que está y **p** la posición que ocupa dentro de esa diagonal. Pero si nos vamos a las otras diagonales (↘), ya no sería el (1,1), sino el (3,1), porque está en la 3ª diagonal posición 1ª.

(PD) ¿Cómo distinguimos dónde está?
(P) Por la posición que ocupa dentro de la diagonal.
(P) ¿Qué notación tendría el 6 considerado como múltiplo de 3?
(D) El (2, 1)
(DL) Pero también es el (2, 1) en las otras diagonales.
(P) Sí en este caso coinciden las dos.
En la hoja de trabajo (tabla A4.2-4) están señalados los dos tipos de diagonales. Rellenar algunas e id tratando de ver regularidades a medida que vais escribiendo.
(PD) Domingo, escribe tú. Haz de secretario!

3x k	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**	**4 x k**	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**	**6 x k**	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**
3x1=3	(1,1)	(3,1)	4x1=4	(1,1)	(2,1)	6x1=6	(1,1)	(1,1)
3x2=6	(2,1)	(2,1)	4x2=8	(2,1)	(1,1)	6x2=12	(1,1)	(2,1)
3x3=9			4x3=12			6x3=18		
	(2,3)		4x4=16		(2,2)	6x4=24		
	(3,2)	(2,2)	4x8=32				(2,3)	
3x9=27			4x10=					(3,2)

Tabla A4.2-4 (G3-2ª sesión)

(D) ¿Empezamos con el 3 y luego el 4, y así?
(P) Sí vamos a centrarnos en los múltiplos de 3, luego en los de 4, etc.
(D) El 27 sería (3, 2)
(PD) No, el (3, 3).
(DL) En el otro es igual, el (3, 3).
(D) ¿Aquí (en las casillas vacías) podemos probar con los que queramos?
(P) Sí, a medida que vais sospechando alguna regularidad, la podéis probar con otro número y aceptarla o rechazarla.

Vamos a rellenar los del 4 y el 6 y luego os mostraré la tabla rellena para empezar a buscar las regularidades.
(D) El 4 es el (1, 1) y el (2, 1)
(D) El 12 es el (1, 2) y el ...
(PD) La diagonal es la tercera y está en la posición 2.
(DL) No, estamos con el 12.
(P) ¿No veis bien las diagonales del 4? La primera empieza en 8 y la tercera empieza en 12. (Señala en la transparencia cómo van las diagonales en el sentido ↘). ¿Lo veis? (Los alumnos asienten).
(P) ¿Cuál es la siguiente casilla? 4x4 es 16.
(D) El (2, 2) y también el (2, 2) en las otras.
(P) Pasamos al 6. Por ejemplo el 18, pero considerado como múltiplo del 6, ¿no?
(PD) La primera diagonal sería 12?
(P) Sí, y la segunda.
(PD) 6, 24, 42.
(P) ¿Cuál sería el 18?
(PD) y (DL) (3, 1).
(P) Y en las otras diagonales (↘)?
(DL) (1, 2)
(D) Sí, el (1, 2)
(P) De acuerdo. Así completaríamos la tabla, que sería ésta (Tabla A4.2-5).
Vamos a ver si con estos datos encontramos alguna regularidad.

3x k	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**	**4 x k**	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**	**6 x k**	**(d, p) ↙**	**(d, p) ↘**
3x1=3	(1,1)	(3,1)	4x1=4	(1,1)	(2,1)	6x1=6	(1,1)	(1,1)
3x2=6	(2,1)	(2,1)	4x2=8	(2,1)	(1,1)	6x2=12	(1,1)	(2,1)
3x3=9	(3,1)	(1,1)	4x3=12	(1,2)	(3,1)	6x3=18	(3,1)	(1,2)
3x4=12	(1,2)	(4,1)	4x4=16	(2,2)	(2,2)	6x4=24	(2,2)	(2,2)
3x5=15	(2,3)	(3,2)	4x6=24	(2,3)	(3,2)	6x6=36	(3,2)	(2,3)
3x6=18	(3,2)	(2,2)	4x8=32	(2,4)	(4,1)	6x7=42	(2,3)	(3,1)
3x9=27	(3,3)	(3,3)	4x10=40	(4,1)	(2,4)	6x9=54	(3,3)	(3,2)
3x12=36	(3,4)	(4,3)	4x12=48	(4,2)	(3,4)	6x12=72	(3,4)	(4,1)

Tabla A4.2-5 (G3-2ª sesión)

(PD) En principio nos fijamos solo en el 3 ¿no?
(P) Vamos a empezar por el 3, y a ver si vemos algo. Si no, pasamos al 4, etc. Si vemos algo, lo apuntamos y lo decimos.

(Hay un silencio)
(D) En un principio el 3, 6, y 9 los pares de números son... No sé como decirlo! Que empieza por ejemplo en el (1, 1) y luego en el 9 empieza ... y va (Domingo señala hacia arriba con la mano).
(P) No sé qué quieres decir.
(D) Sí, que en principio, el 3, 6 y 9 empieza (1, 1), (2, 1), (3, 1) y luego si vamos del 9, 6, 3 (Domingo se refiere a la columna de ↘) también es (1, 1), (2, 1), (3, 1).
(P) Estamos en la tabla del 3, 2ª columna, ¿no?
(D) Estoy comparando las dos columnas de las diagonales.
(P) Ah, sí. Que van en orden inverso. Bueno eso sería una regularidad, de orden ¿no? 1, 2, 3 y 3, 2, 1, mientras se mantiene la 2ª componente. ¿Lo podríamos explicar? Claro, estamos con los 3 primeros múltiplos de 3. Y si miramos las otras diagonales entonces la numeración cambia de orden.
(D) Sí.
(P) El 3 es fijo y variamos k. Dependiendo como sea k ¿Qué le pasa al par (d, p)?
(D) Los pares, al multiplicarlos dan el número k.
(P) ¿Cuándo ocurre eso?
(D) Pero es que en los pares también se daría, porque el 12 es par.
(P) 3x4 es 12, que sería el par (1, 2).
(DL) Pues no se cumple.
(P) ¿Para qué casos se cumple que el producto dxp vale k?
(P) Vamos por pasos. ¿Se cumple, para el 1, para el 2, ...?
(D) Cuando k es múltiplo de 3.
(P) Cuando k es múltiplo de 3 el par (d, p) es tal que el producto de dxp vale k. ¿Valdría para el 4?
(PD) Parece que sí.
(DL) Sí
(D) Sí
(P) ¿Se cumple para el 12?
(D) No. La regla no es válida para el 4.
(P) ¿Y en la tabla del 6? Se cumple para el 1, 3, 4, 9, 6,
¿Se cumpliría esa regla para el 7, el 8, el 9?
(P) Vamos a ver la tabla del 7. Estas serían las diagonales ¿no?
Vamos a considerar solo las diagonales en el sentido ↙.
(PD) El 7 el (1, 1), el 14 el (1, 2).
(D) En este sentido el (1, 3) el 7 ¿no?
(P) Sería el (1, 1). ¿El 21?
(PD) (1, 3)
(P) ¿El 28?
(PD) El (2, 1), el 35 el (2, 2), el 42 el (2, 3)
(P) ¿El 49?
(PD) El (3,1)
(P) ¿Se cumple la regla?
(DL) No se cumple.
(P) ¿Y si consideramos la posibilidad de enrollar la tabla, de manera que el 11 esté a continuación del 10, así. (El profesor coloca la tabla en forma de cilindro)
(P) ¿Cómo estarían los múltiplos de 7?
(PD) Estarían en una sola línea.

(P) Entonces sí se cumpliría la regla, para todo k ¿no?
(Asienten los tres).
(D) Aquí sí hay una regularidad: (1, 1), (1, 2), (1, 3); luego empieza, (2, 1), (2, 2), (2, 3), luego (3, 1), (3, 2), (3, 3), y a lo mejor después en el 7x10, el 70 sería (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4) y luego el (5, 1).
(P) Muy bien. Ahora se trata de buscar patrones (El profesor coloca la transparencia de la tabla coloreada y les da la hoja de trabajo (tabla A4.2-6).

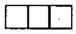
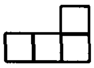
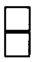
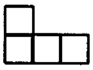
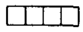
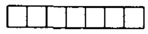
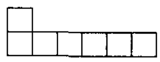
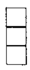
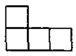
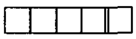
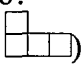
k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador
2		2	5			8		
		10-2=8						
		10						
		10+2=12						
3			6			9		
4			7					

Tabla A4.2-6 (G3-2ª sesión)

(P) Se trata de buscar patrones y rellenar esta tabla. ¿Qué significa esa tabla? Cuando k vale 2 ¿Qué patrones encontramos en los múltiplos de 2? ¿Se disponen en esta ↙ diagonal? ¿Y de la otra manera?
(DL) También.
(P) ¿Hay patrones columna?
(DL)También.
(P) ¿Hay patrones fila?
(PD) También.

(P) El movimiento de caballo se refiere al del ajedrez. “Bajo uno, izquierda o derecha”. Es un patrón en L. Esta columna, operador, significa que si a un número le aplico ese patrón columna lo convierte en este de abajo que es como si le sumamos 10. ¿Se entiende eso?
(Los estudiantes asienten).
(P) Veamos el caso del 3. ¿Hay patrones diagonal?
(D) Sí. En los dos sentidos.
(P) Patrones columna? Del 3 voy al 33, y del 12, al...
(PD) Va sumando 30. (Pedro escribe en la pizarra )
(P) Escribe al lado el operador (Pedro escribe = + 30)
(P) Patrones fila.
(DL) De 3 en 3.
(PD) (Pedro escribe ).
(P) En forma de L, o L invertida. Salto del caballo.
(PD) (Pedro dibuja ) que sería el operador 12.
(P) También está bajar 1, izquierda 1, que sería...
(PD) El 9. (Pedro dibuja )
(P) El 30 corresponde a 3x10, el 3 a 3x1, (escríbelo en la pizarra al lado de cada patrón).
(P) Falta el 3x2=6. ¿Cuál sería el patrón sumar 6?
(PD) Fila de 7 casillas. (Pedro dibuja )
(P) Pero este patrón lo podemos conseguir con alguno de los que tenemos antes ¿no? Vamos a limitarnos a los que no se pueden poner como combinación de otros anteriores. ¿Cuál sería el patrón de 3x5 =15?
(P) Si nos situamos en 3 y le añadimos 15, nos vamos a dónde?
(DL) Al 18.
(PD) (Pedro dibuja )
(P) Bajar 1 y derecha...
(D) 5.
(P) ¿Pero, lo podemos poner como combinación de los anteriores?
(PD) 3x4 y ...3x1. (Pedro se refiere a que 12+3=15).
(P) ¿Con cuáles os quedaríais como independientes?
(PD) La columna (3x10). La L ésta (12), esta otra L (9), el 3, 9, 12, 10.
(P) ¿Qué patrones visuales hay en los múltiplos de 3? ¿Cómo son los operadores de cada patrón?
(DL) Múltiplos de 3.
(P) ¿Puede haber algún operador que sea sumar 8?
(DL) No. No transforma un múltiplo de 3 en otro múltiplo de 3.
(P) ¿Qué pasa con la tabla del 4?
(D) Bajar dos columnas, dos filas.
(P) El patrón columna ¿De cuántas casillas?
(PD) En este caso, 3.
(P) De 3 casillas, que sería el operador...
(D) 20.(Domingo dibuja )
(P) ¿Es múltiplo de 4?
(D) Sí.

(P) Otro patrón.
(D) El 12, que sería, bajar 1 y sumar 3.
(P) Vamos a decir "bajar o subir y derecha o izquierda" ¿no? Bajar 1...
(D) Y derecha 3.
(PD) Izquierda 3.
(D) Eso, izquierda 3.
(DL) Cuatro.
(D) No, 3.
(P) ¿En qué número te estás situando?
(D) En el 4.
(P) Bajas 1, derecha...
(D) 3.
(P) ¿Por qué 3?
(D) O dos.
(P) Dos ¿no? Me muevo dos a la derecha. Serían 12. Otra L. Domingo dibuja 
(D) Bajar 1 izquierda 3.
(DL) Izquierda 2.
(P) ¿Ese qué operador sería?
(DL) 8.
(P) ¿Lo ves, ese?
(D) Yo creo que es bajar 3 ¿no?
(P) Bajo 1 y a la izquierda uno y otro.
(D) Ah, sí.
(PD) De fila. Tendría 5 casillas. (Pedro dibuja ).
(P) Los demás serían combinación de los otros. Una L más larga, del 4 al 20, se puede poner como esta L (del 4 al 16) más esta fila (del 16 al 20). (Fig. A4.2-1) Los patrones serían de columna, de fila y en L.¿Y los múltiplos de 5?
(PD) En columnas.
(P) ¿Y los de 6, que están en un cuadrado?
(DL) Bajar 1 y sumar 2. (Dolores dibuja )
(P) Otro. ¿En forma de columna?
(DL) Bajar 3.(Dolores dibuja )

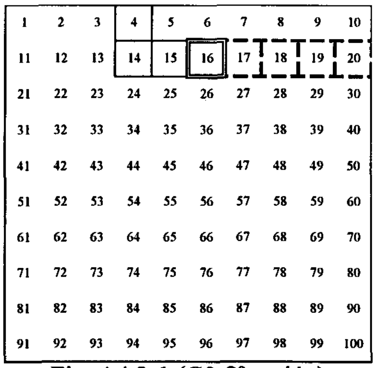
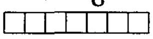
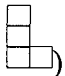
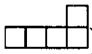
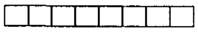


Fig. A4.2-1 (G3-2ª sesión)

(P) ¿Qué le pasa a la fila? Si me sitúo en el 6 ¿Cómo llego hasta el 12?
(DL) Pues derecha 6. (Dolores dibuja ).
(P) Pero derecha 6 es lo mismo que...
(DL) y (PD) Bajar 1, izquierda 4.(Pedro señala )
(P) Y eso por qué? Bajar 1, izquierda 4 ¿Qué es?
(DL) 6.
(P) Bajar 1 es sumar 10 y luego quitar 4, es lo mismo que sumar 6 ¿no? Por ejemplo al 24 le aplicamos "derecha 6" y llegamos al 30, pero al 18 no podemos, tenemos que aplicar "bajar 1 izquierda 4". Tenemos pues, fila o bien L. Columna de 4 casillas, contando el propio número, la L a la derecha.
(P) ¿Y los del 7?

(D) Movimientos de caballo, abajo 3, no. “Abajo 2, derecha 1”. (Domingo dibuja )
(PD) Hay otra posibilidad.
(D) Bajar 1 izquierda 3. (Domingo dibuja )
(P) ¿Ese a cuál equivale?
(DL) Derecha 7. (Dolores dibuja )
(P) Los múltiplos de 8, igual ¿no? Resumiendo ¿Qué patrones tenemos para los múltiplos de k?
(DL) Columnas, filas y en forma de L.
(P) Los demás son combinaciones de los otros.
Lo vamos a dejar aquí. El próximo día haremos algo de Geometría.

Transcripción de la tercera sesión

El profesor les entrega al grupo una hoja con las tareas de la sesión, que es la misma que para el grupo G70, así como una hoja de trabajo a fin de hacer sus propios esquemas.

(P) Leed la tarea para ver si la entendéis bien. Me gustaría que me deis respuestas de grupo, aunque cada uno trabaje en su propia hoja de trabajo. Comentad en voz alta lo que se os ocurra. Os tenéis que poner de acuerdo entre los tres para dar una respuesta, o bien varias, pero discutidas. Esta es la hoja de trabajo (hoja con tablas-100) para que cada uno haga escriba lo que quiera, y ésta (hoja con geoplanos 10x10geoplano) es la misma, solo que cada número lo hemos condensado en un punto. Ya hemos visto cómo los múltiplos de 7 se sitúan en diagonales en un sentido y en otro. Si unimos puntos de esas diagonales formamos un paralelogramo. Por ejemplo, si unimos 14, 21, 35 y 28 se forma un paralelogramo (Fig. A4.2-2). Se trata de calcular el área de ese paralelogramo, y ver la manera de calcularla. La unidad de medida va a ser la distancia entre dos números contiguos.

(PD) El problema es calcular el área.
(P) ¿Sabemos cuál es el área del paralelogramo?
(PD) ¿Base por altura? ¿Cómo podemos contar la altura? Es que...
(P) ¿La altura de ese paralelogramo? Para determinar la altura habrá que saber cuál es la base ¿no? ¿Qué métodos podríamos emplear para determinar la altura? Si os doy este papel (el profesor les entrega papel vegetal)...
(PD) Utilizando ese papel podríamos tomar la distancia ésta y poniéndola sobre el geoplano...
(DL) Yo pensaba poner la base derecha.
(P) Vamos a intentarlo.
(Dolores calca el paralelogramo y lo coloca sobre el geoplano).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A4.2-2 (G3-3ª sesión)

(DL) La base es 5 y la altura 2. El área sería 10.
(P) ¿Sale la base exacta?
(DL) Sí.
(P) ¿Seguro? Bueno este método ha sido... no ha sido muy preciso ¿no?
(DL) Sí.
(P) ¿Y otro método?
(DL) Sí, por ejemplo contamos así, 1, 2, 3, no, (fig. A4.2-2), la mitad sería 1,5. Bueno aquí no.
(P) Bueno, la base, te ha salido antes 5 ¿no? ¿Habría una manera de comprobar que es 5?. Porque lo hemos hecho a la ligera. Para quedarnos tranquilos. Sabemos la distancia entre los puntos ¿no?
(PD) Sí. (Pedro calca de nuevo) Tiene pinta de ser algo superior a 5. Claro porque para que se cumpla el teorema de Pitágoras, si tomamos este triángulo (Pedro se refiere al triángulo rectángulo formado por 35, 21 y 31 en la figura A4.2-2) es la hipotenusa. Este cateto es 4 y el otro 1.
(P) ¿Cuánto vale la hipotenusa?
(D) 5, porque si la hipotenusa es la raíz cuadrada de los catetos al cuadrado, como son raíz de 25. No. No, sería 17. Entonces no es 5.

(P) Es 4 y pico. Parece que ese 5 no es exacto. Lo importante es que hemos visto un procedimiento que nos deja tranquilos. De la misma manera veríamos si esa altura vale 2. Como ese procedimiento no ha sido bueno, nos deja con la duda, vamos a buscar otro. (silencio)
(P) Si a alguien se le ocurre algo que lo comente, por si otro puede ayudar.
(D) A mí se me ocurre, en todo el contorno del paralelogramo si lo ponemos como un rectángulo, entonces el área sería la mitad de la del rectángulo, y el área sería 7. (Fig. A4.2-3)
(P) ¿Por qué dices la mitad? Si queréis calcar, podéis hacerlo. Con la misma idea de meter el paralelogramo dentro del rectángulo, ¿habría alguna forma de probar que el área es la mitad?
(D) Vamos a ver. Se supone que estos dos trapecios (ABEF=BCDE. fig. A4.2-3) son iguales.
(P) ¿Por qué son iguales?
(D) Porque, bueno, sí se puede calcular el área bien. Sabemos la base mayor, la base menor y la altura....y tienen todo igual. Y luego el paralelogramo, las dos partes son iguales, y por analogía sería la mitad.
(PD) ¿Cómo haría? ¿Hallar el área de los dos trapecios y restarlo la de los triángulos?
(P) No, él dice: "Los dos trapecios son iguales, y las dos regiones del paralelogramo también, pues uno es la mitad del otro".
(D) Claro.

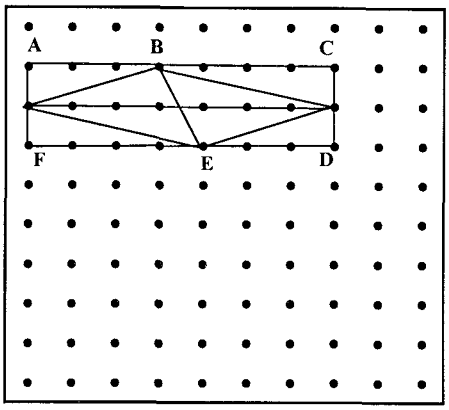


Fig. A4.2-3 (G3-3ª sesión)

(DL) Yo, lo he hecho de otra manera. (Fig. A4.2-4) He dividido en triángulos. La base de éste (triángulo T1) es 3 y altura 1, y éste (T2) de base 4. Como hay dos de cada uno, éste es igual que éste y estos dos también, pues sale 7 el área.
(P)¿Algún otro procedimiento? ¿Con los dos razonamientos podríamos hacer otro?
(D) Yo es que no me he enterado.
(P) Explícaselo, Loli.
(DL) Lo divido en 4 triángulos. Son iguales estos dos y estos dos. 3 por 1 y 4 por 1. Como hay dos...

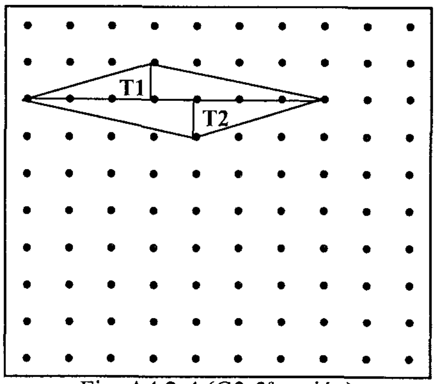


Fig. A4.2-4 (G3-3ª sesión)

(P) Bueno, esto lo hemos hecho con el 7, 14, 21 y 28, pero no sabemos si tomando otros va a salir. ¿Por qué no probamos con otros múltiplos de 7 a ver si sale la misma área.
(D) Por ejemplo el 28, 35, 42 y 49 (Fig. A4.2-5)
(PD) En este caso no sale paralelogramo.
(P) ¿Qué sale?
(PD) Una especie de trapezoide. Casi triángulo.
(P) Vamos a ver si es triángulo o no. Vamos a pasar aquí al geoplano. (Fig. A4.2-6).
(PD) Parece que poniendo una regla si pasa por ese punto.
(P) ¿Habría una manera de comprobarlo, para quedarnos tranquilos?
(DL) El área es 14. No, 7 también.

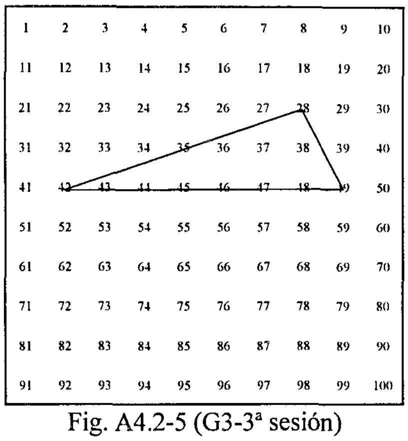


Fig. A4.2-5 (G3-3ª sesión)

(P) No ha salido paralelogramo, pero el área ha sido la misma. ¿Habría alguna manera de ver si ese punto (el 35) pertenece al segmento (que une el 42 con el 28)?
(D) Están los 3 números en la misma diagonal ¿no? Entonces, como los patrones eran diagonales...
(P) Bien. Ha salido un triángulo. ¿Probamos con otro?
(D) ¿Probamos con 42, 49, 56, 63 (Fig. A4.2-7)
(DL) Sale el mismo de antes.
(P) Vamos a señalar los múltiplos de 7 y luego elegimos los que queramos, ¿Vale? Así repasamos la tabla del 7 ¿no? Vamos a elegir 4 de manera que formen un paralelogramo. Uno que sea bonico!

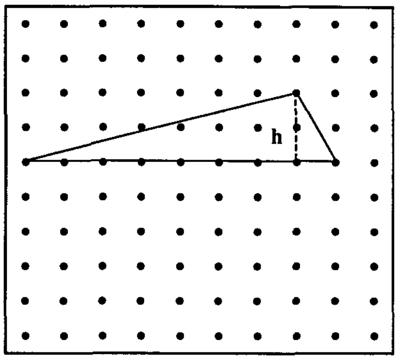


Fig. A4.2-6 (G3-3ª sesión)

(D) 56, 63, 70, 77.
(DL) Sale igual que el anterior, pero trasladado hacia abajo.
(PD) 42, 35, 63 56.
(D) ¿Pero tienen que ser consecutivos?.
(P) No. No hemos dicho eso.
(DL) 42, 35, 56, 91 (fig. A4.2-8) Sale como una cometa.
(P) Geométricamente no sería una cometa ¿no? ¿Cómo calculamos el área de eso?
(PD) Haciendo triángulos.
(P) ¿Nos podemos ayudar del triángulo anterior?
(PD) 91-35, parece que divide a esto en dos triángulos. Como cada triángulo es 7. El paralelogramo tendrá...
(DL) 14.

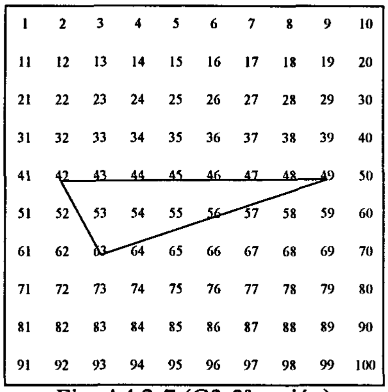


Fig. A4.2-7 (G3-3ª sesión)

(D) Parece que no son iguales ¿no?
(PD) Sí, parece que sí.
(D) No.
(P) Los patrones diagonales (en un sentido y otro) no eran iguales.
(D) La base es la misma. Yo creo que sí son iguales.
(P) Este lado (42-35) y éste (35-66) ... ¿Son iguales?.
(D) Es verdad.
(P) Por lo menos idénticos no son. (Loli empieza a calcar)
(P) ¿Y si calcamos?
(DL) Altura 2.
(P) Pero calcando ¿no? Parece que tenemos problemas para calcular de una forma rápida el área de un polígono. ¿Qué os parece si tratamos de buscar una fórmula que nos de el área del polígono en función de los puntos que hay dentro del polígono y sobre el polígono? Vamos a interrumpir esta actividad y os voy a dar otra hoja para que deduzcáis vosotros mismos esa fórmula.

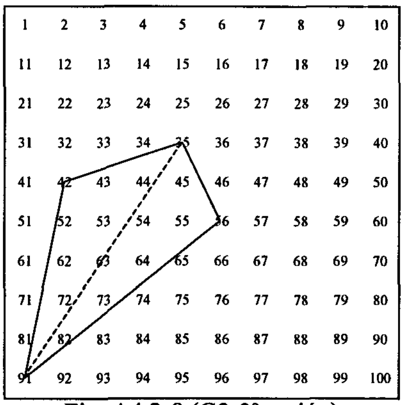


Fig. A4.2-8 (G3-3ª sesión)

Cuarta sesión: divisibilidad y geoplano (II)

Se les entrega a los estudiantes la hoja de tareas, tablas-100 y papel vegetal.

Para facilitar la obtención de las áreas de los polígonos en esta sesión de trabajo, los estudiantes realizaron previamente unas cortas actividades con el fin de averiguar la fórmula de Pick que proporciona el área de polígonos simples con vértices en el geoplano. La fórmula en cuestión es:

$$\boxed{A = I + \frac{F}{2} - 1}$$

I = puntos interiores al polígono
F = Puntos frontera (sobre los lados del polígono).

Transcripción de la cuarta sesión

(P) El otro día estuvimos viendo la formulilla esa que nos solucionaba problemas de cálculo del área de un polígono (con vértices en una retícula). Era la fórmula de Pick. Os recuerdo que el área del polígono venía dada por la mitad de los puntos frontera más los puntos interiores menos uno.

Esta primera tarea de hoy consiste en unir múltiplos consecutivos de 7 y ver qué obtenemos. Entonces, si unimos, por ejemplo 7, 14, 21 y 28, cuatro múltiplos consecutivos de 7, sale un triángulo cuya área vale 7 unidades cuadradas de la retícula, y si unimos estos otros cuatro: 35, 42, 56 y 49 obtenemos un paralelogramo cuya área también vale 7 (Fig. A4.2-9) ¿De acuerdo?

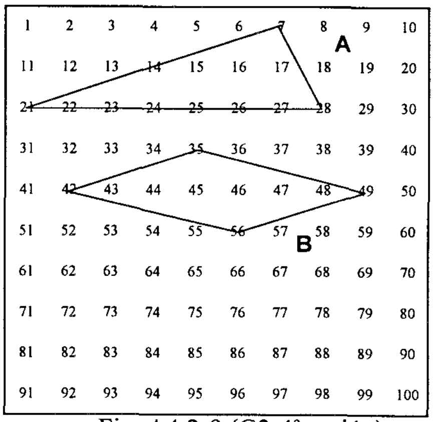


Fig. A4.2-9 (G3-4ª sesión)

La primera pregunta podría ser: ¿Se podrían unir 3, 4, 5,... múltiplos consecutivos de 7 de manera que formen un cierto polígono? ¿Cuánto valdría el área de dicho polígono?. Los resultados los colocamos en la tabla A4.2-7

Polígonos que resultan al unir múltiplos consecutivos de 7:

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3				
4	Triángulo	7, 14, 21, 28	7	G3-4.1A
4	Paralelogramo	35, 42, 49, 56	7	G3-4.1B

Tabla A4.2-7 (G3-4ª sesión)

(P) Colocamos el nombre del polígono aquí y el área aquí (el profesor indica las casillas de la tabla donde hay que escribir el nombre del polígono y el área). Podéis usar las tablas-100 para que cada uno dibuje lo que quiera, pero me dais una respuesta de grupo.
(PD) ¿Tienen que ser consecutivos?
(P) En esta primera tarea tienen que ser consecutivos.
(D) 14, 21, 28.
(PD) No, porque está en la misma diagonal.
(P) ¿Cuál habéis dicho?
(D) 14, 21, 28.
(DL) No, no puede ser.
(P) 14, 21, 28, ... ¿Por qué no?. Son consecutivos ¿no?
(D) Sí.
(P) ¿Qué figura sale?
(PD) Triángulo.
(P) ¿Y el área? Si usamos la fórmula famosa... Los puntos frontera partido por 2, más los interiores menos uno.
(PD) (Pedro dibuja la Fig. A4.2-10 y escribe $\frac{9}{2}-1$).
(P) Lo anotamos aquí. Sale un triángulo. Los números que hemos unido son 14, 21, 28 y el área es 3,5.
¿Podría salir, uniendo 3 puntos, un área más pequeña? O sea, una figura que tenga un área más pequeña?
(D) No. Sería ésta la más pequeña.
(DL) Que no sean consecutivos, sí.
(P) Vamos a probar con múltiplos consecutivos. 7, 14 y 21 ¿Son consecutivos? ¿Qué sale?

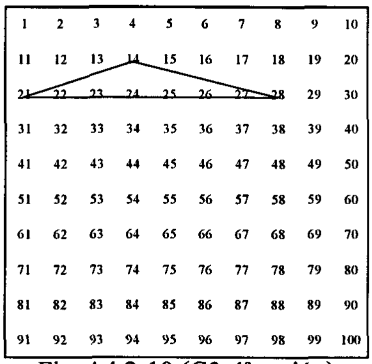


Fig. A4.2-10 (G3-4ª sesión)

(PD) Un segmento.
(DL) Pero están en la misma diagonal ¿no?
(D) Area, cero.
(P) O sea, si quitamos ese caso, que sería un caso trivial, empezaríamos por el triángulo. Uniendo 3 (puntos) sale el triángulo de área 3,5, (Fig. A4.2-10) uniendo 4 (puntos) sale un triángulo de área 7, o bien un paralelogramo (dibujos A y B de la Fig. A4.2-9). Vamos a seguir con 4. ¿Uniendo 4 puntos saldría otra cosa?
(PD) Con 7, 14, 21 y 28... otro triángulo.
(D) Saldrían solo triángulos y paralelogramos ¿no?
(P) No sé. Yo no sé la respuesta.
(D) Creo que sí.
(P) Uniendo 4 puntos sale o triángulos como estos (dibujo A de la Fig. A4.2-9) o paralelogramos como éstos (dibujo B de la Fig. A4.2-9). Vamos a seguir con 5.

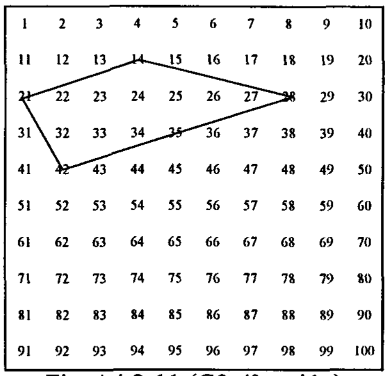


Fig. A4.2-11 (G3-4ª sesión)

(D) 14, 21, 28, 35 y 42. (Los tres alumnos dibujan la Fig. A4.2-11)
(P) ¿Qué figura sale?
(DL) Un paralelogramo.
(D) y (PD) Un trapecio.
(P) Un trapecio. ¿Por qué?

(PD) Porque tiene dos lados paralelos. Dos lados paralelos y los otros dos, no.
(P) ¿Y el área? Vamos a escribir (Tabla A4.2-8, fila del trapecio).

(PD) $\frac{5}{2}+8$, no?

(Loli escribe $\frac{5}{2}-8$, y cuando Pedro dice $\frac{5}{2}+8$, ella cambia el - en +).

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3	Triángulo	14, 21, 28	3.5	G3-4.2
4	Triángulo	7, 14, 21, 28	7	G3-4.1A
	Paralelogramo	35, 42, 49, 56	7	G3-4.1B
5	Trapecio	14, 21, 42, 35, 28	10.5	G3-4.3
	Pentágono cóncavo	21, 28, 35, 47, 49	10.5	G3-4.4
6	Hexágono cóncavo	42, 35, 49, 56, 63, 70	14	G3-4.5
	Paralelogramo	7, 14, 21, 28, 35, 42	14	G3-4.6

Tabla A4.2-8 (G3-4ª sesión)

(P) Otra manera de unir cinco puntos.
(D) Si unimos 21, 28, 35, 42 y 49 te sale un polígono, pero que el 35 estaría dentro.
(P) ¿Si te dejas el 35 dentro te sale otro paralelogramo, no?
(D) Claro.
(P) Es porque no hemos unido 5 puntos, sino 4. Vamos a ver la manera de unir 5 puntos. Hay que tomar 5 puntos de manera que sean los vértices del polígono.
(D) 42, 35, 28, 49 y 56, nos da otro trapecio.
(P) Si nos sale la misma figura, la desechamos buscamos otra que sea distinta.
(D) Salen trapecios.
(P) No le ponemos ninguna restricción al polígono que nos salga.

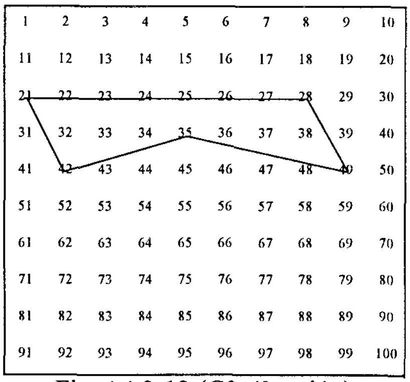


Fig. A4.2-12 (G3-4ª sesión)

(PD) Podría ser un polígono cóncavo: 49, 28, 35, 42 y 21 (Fig. A4.2-12)
(P) Sería un pentágono cóncavo, no?
(PD) ¿El área?

(Loli escribe $\frac{11}{2}+6-1$, mientras Pedro y Domingo escriben $\frac{11}{2}+5$).

(P) Muy bien, uniendo 5 puntos hemos obtenido el trapecio y el pentágono cóncavo. ¿Probamos con 6?
(Domingo dibuja el polígono formado por 35, 49, 70, 56, 63 y

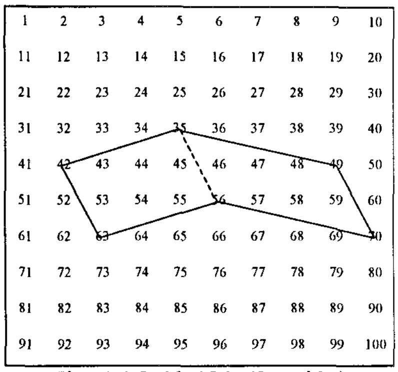


Fig. A4.2-13 (G3-4ª sesión)

42 de la Fig. A4.2-13, y Pedro el paralelogramo formado por 21, 14, 7, 28, 35 y 42 de la Fig. A4.2-14. Loli dibuja un polígono cóncavo de 7 lados Fig. A4.2-15)

(P) ¿Posibilidades?

(DL) Creo que me han salido 7 puntos.

(P) Vamos a considerar estos dos polígonos primero (Figs. A4.2-13 y A4.2-14) y dejamos ese para luego (Fig. A4.2-15).

(P) Con 6 puntos sale ese hexágono (Fig. A4.2-14) ¿no? ¿Tiene algunas características especiales ese hexágono?

(D) Que son dos paralelogramos.

(P) Tiene los lados paralelos dos a dos. Es una característica interesante. No todos los hexágonos la tienen. ¿El área? ¿Cómo calcularíais el área sin utilizar la fórmula de Pick? (silencio).

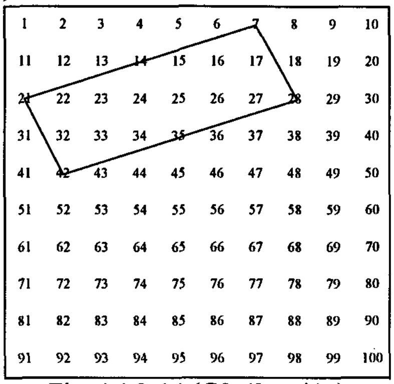


Fig. A4.2-14 (G3-4ª sesión)

(P) El otro día vimos que los paralelogramos que se obtenían tenían de área 7. ¿No? Y el tuyo (A4.2-14) ¿Qué polígono es?

(PD) Parece un paralelogramo.

(P) ¿Y el área?

(PD) 14.

(P) Así seguiríamos con los múltiplos de 7. Una columna con el área, otra con el polígono, otra con el número de puntos que unimos. A ver ¿Qué regularidades tenemos aquí? Hay que relacionar unas cosas con otras.

(D) Lo primero que se ve es que el mismo número de puntos que se unen, aunque sean distintos, todos tienen la misma área.

(P) Aunque tengan formas distintas ¿no?

(D) Sí.

(P) O sea, que el área va a depender del número de puntos a unir y no de la forma.

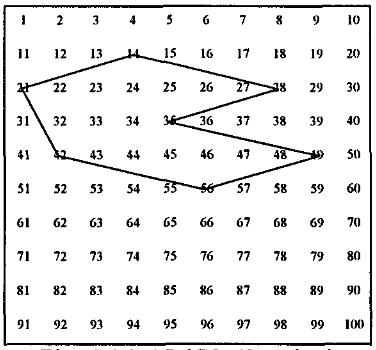


Fig. A4.2-15 (G3-4ª sesión)

(D) Va correlativamente de 3,5 en 3,5. Con 3 puntos es 3,5. Si se le va sumando un punto más el área aumenta en 3,5.

(P) Hemos visto una fórmula que nos da el área en función del número de puntos frontera e interiores de un polígono. ¿Podemos construir una fórmula que nos dé el área en función del número de puntos que unimos y del 7? (silencio).

(P) Ya hemos dicho que no depende de la forma, sino del número de puntos que unimos. Vamos a relacionar n, que es el número de puntos, A, que es el área y 7, porque son múltiplos de 7 (silencio).

(P) Si no se ve nada, pasamos al siguiente, que son los múltiplos de 2.

(DL) ¿Se podría poner en función del área del triángulo de 3,5?

(P) Claro.

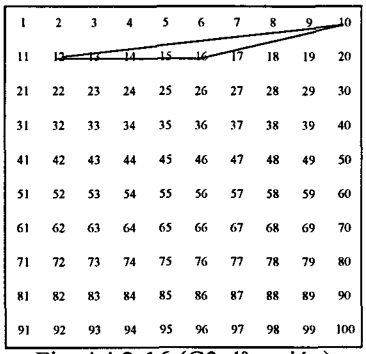


Fig. A4.2-16 (G3-4ª sesión)

(DL) Sería 3,5 por (n-2). (Loli escribe: $\boxed{A = 3{,}5x(n - 2) = \frac{7}{2}x(n - 2)}$

(P) Esto sirve para los múltiplos de 7. No sabemos qué ocurrirá para los múltiplos de 3, por ejemplo.

(P) Para múltiplos consecutivos de 2. Igual que antes. Si unimos dos, sale un segmento.
(D) ¿Consecutivos también? (Tabla A4.2-9)
(P) Sí.
(D) 10, 12, 14.
(P) O bien 8, 10, 12. ¿Sale? (Fig. A4.2-17)
(DL) Un triángulo.
(P) ¿El área? (silencio).
(D) Uno.
(P) Uniendo tres, no hay más posibilidades ¿no?
(PD) No.

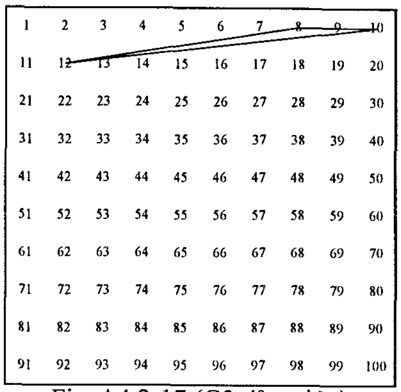


Fig. A4.2-17 (G3-4ª sesión)

(P) Vamos a unir 4 múltiplos consecutivos.
(DL) (Loli realiza los dibujos A y B de la figuras A4.2-18, y Pedro la el dibujo A de la fig. A4.2-18).
(D) 10, 12, 14, 16 (Fig. A4.2-16) Area 2.
(P) ¿Hay más posibilidades con 4? (silencio).
(P) ¿Con 5?
(D) 8, 10, 12, 14, 16 (Fig. A4.2-19) (La dibujan los tres).
(D) Sale una cosa rara.
(P) Tiene dos lados paralelos ¿no?
(D) El área es 4.
(P) ¿Cómo la has calculado?
(D) Con este rectángulo, quitándole estos triángulos (Fig. A4.2-19) (En realidad el área es 3, pero el error pasa inadvertido para todos).

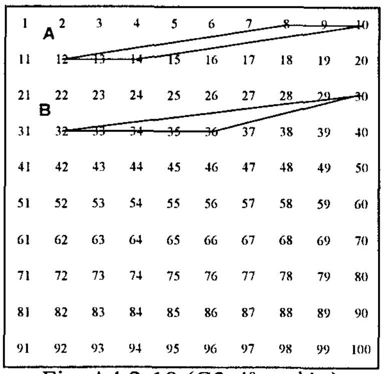


Fig. A4.2-18 (G3-4ª sesión)

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3	Triángulo	8, 10, 12	1	G3-4.9
4	Triángulo	10,12,14,16	2	G3-4.8
	Paralelogramo	8,10,12,14	2	G3-4.10A
5	Triángulo	20,22,24,26,28	3	G3-4.12A
	Trapecio	8,10,12,14,16	3	G3-4.11
6	Triángulo rectángulo	80,82,84,86,88,90	4	G3-4.12D
	Paralelogramo	36,38,40,42,44,46	4	G3-4.12B
	Trapecio	58,60,62,64,66,68	4	G3-4.12C

Tabla A4.2-9 (G3-4ª sesión)

(P) ¿Podemos conseguir otra figura uniendo 5 puntos?

(D) 22, 24, 26, 28 y 20. (dibujo A de la Fig. A4.2-20) El área sería 3. Ya se ha fastidiado la regla.
(P) Parece que aquí sí depende de la forma.
(D) O triángulos o trapecios.
(P) ¿No puede haber pentágonos?
(D) Es que al ser consecutivos, siempre habrá 4 en una fila.
(P) ¿Pero, por qué tiene que haber 4 consecutivos en una fila? Puede haber 3 y 2, ó 4 y 1. Bueno, se nos ha fastidiado el invento al poner 4 consecutivos (en una fila) ¿Probamos con 6?
(D) 36, 38, 40, 46, 44 y 42 (dibujo B de la Fig. A4.2-20) Paralelogramo de área 4. O bien ... 58, 60, 62, 64, 66 y 68 (dibujo C de la Fig. A4.2-20).

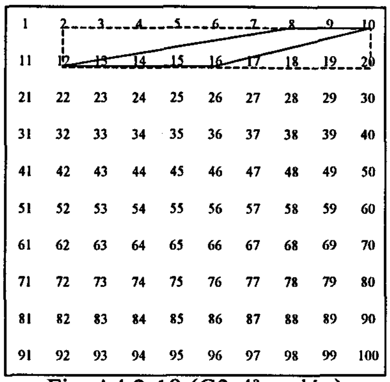


Fig. A4.2-19 (G3-4ª sesión)

(P) Trapecio, no? ¿De área?
(PD) 4.
(D) Y también podemos tener un triángulo.
(PD) Sí.
(D) Un triángulo rectángulo (dibujo D de la Fig. A4.2-20).
(P) Bueno, vamos a ver si esta fórmula vale para este caso. Quitando el caso de 4 números en línea, ... 1, 2, 3, 4, ... Aquí pasa algo. Con 5 sale el área 4, y con 6 también. Vamos a ver.
(P) No. Sale 3.
(P) Con 3 puntos, área 1; con 4, área 2; con 5, tres. Va aumentando de uno en uno. ¿No? ¿Qué fórmula pondríamos aquí?.
(PD) (n-2).

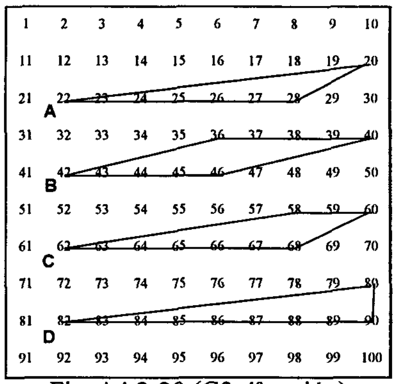


Fig. A4.2-20 (G3-4ª sesión)

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3	Triángulo	6, 9, 12	1,5	G3-4.13A
4	Triángulo	3, 6, 9, 12	3	G3-4.14A
	Paralelogramo	6, 9, 12, 15	3	G3-4.15
5	Triángulo	18, 21, 24, 27, 30	4,5	G3-4.14B
	Trapecio	33, 36, 36, 42, 45	4,5	G3-4.13AC

Tabla A4.2-10 (G3-4ª sesión)

(P) Si aplicamos esta fórmula (la obtenida para los múltiplos de 7) aquí, ¿Funciona?
(PD) En lugar de 7, un 2.

El profesor escribe $\boxed{A = (n-2)x\frac{2}{2}}$

(P) ¿Hay una excepción? ¿Cuando tenemos 4 puntos en línea?
(PD) En éste, con 5 puntos, sale también un triángulo (20, 28, 26, 24, y 22) (dibujo A de la Fig. A4.2-20)
(P) Hay 4 en línea ¿no? Y el área... 3. O sea, entonces es válida la fórmula. Nos ha despistado el área del trapecio que dijimos que era 4 y el área es 3.
(P) ¿Y para los múltiplos de 3? (Tabla A4.2-10).

(P) Uniendo 3 sale un triángulo ¿no? (Pedro dibuja el polígono A formado por 6, 9, 12 de la Fig. A4.2-21).
(P) ¿Uniendo 4?
(D) 6, 9, 12, 15 (Fig. A4.2-23) y sale 3.
(P) Con 4, también sale un triángulo ¿no?
(D) 3, 6, 9 y 12 (dibujo A de la Fig. A4.2-22)
(P) ¿Y el área?
(DL) 3.
(P) ¿Con 5?
(D) También un triángulo: 18, 21, 24, 27, 30 (dibujo B de la Fig. A4.2-22), o bien el paralelogramo 33, 36, 39, 42 y 45 (dibujo C de la Fig. A4.2-22).

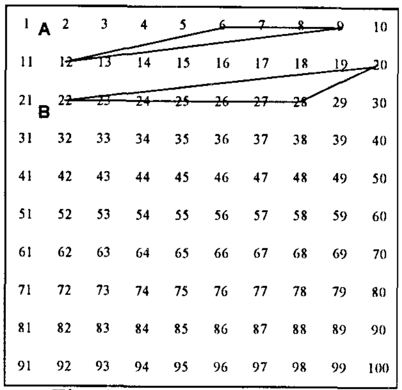


Fig. A4.2-21 (G3-4ª sesión)

(P) ¿Paralelogramo, o trapecio?
(D) Trapecio.
(P) ¿Vamos a ver si encontramos alguna excepción aquí? ¿Puede haber 4 en línea con los múltiplos de 3? Como máximo...
(PD) 3.
(P) ¿Sería aplicable la fórmula? (silencio)

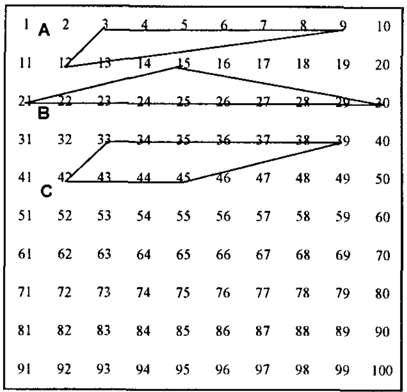


Fig. A4.2-22 (G3-4ª sesión)

(PD) Parece que sí: $\boxed{\frac{3}{2}x(n-2)}$
(P) Entonces ¿Cuál sería una fórmula general?
(D) sería $\boxed{A=\frac{k}{2}x(n-2)}$
(P) ¿Se os ocurre algún criterio de clasificación de los polígonos con esto? (silencio).
(P) ¿Qué polígonos no podemos conseguir, uniendo múltiplos consecutivos de 2?
(DL) El cuadrado.
(P) ¿Y con múltiplos de 3?
(DL) También el cuadrado.
(P) ¿Habría alguna manera de que saliera un triángulo equilátero? (silencio).
(P) ¿Y si le quitamos la condición de que sean consecutivos?
(DL) 4, 22, 26 ¿no? (Fig. A4.2-24)

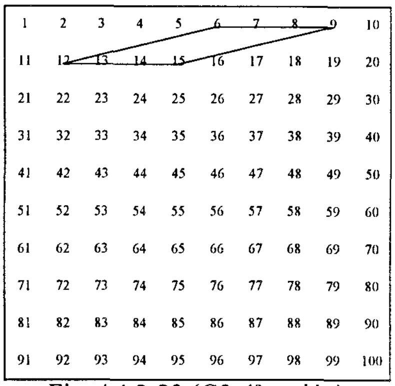


Fig. A4.2-23 (G3-4ª sesión)

(P) De 4 a 22 y de 4 a 26, sí (hay la misma distancia), pero de 22 a 26...
(PD) No.
(P) ¿Por qué?
(D) Por Pitágoras.
(P) Se ve claro. Bueno lo dejamos aquí. Al menos hemos encontrado una fórmula ¿no?

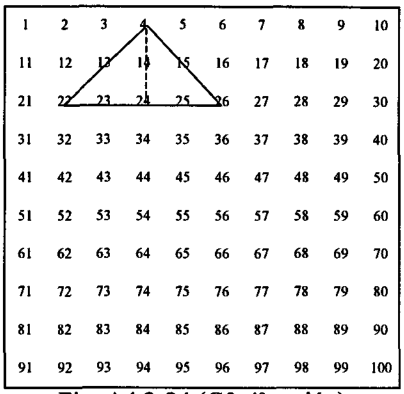


Fig. A4.2-24 (G3-4ª sesión)

Anexo 4.3

Sesiones de trabajo con G1: tareas de contexto

Primera sesión: divisibilidad y operaciones aritméticas

Componente de G1: Julia (J)

Transcripción

(P) Te cuento en qué consiste la tarea que vamos a hacer. Esta tabla tiene los números del 1 al 100 (el profesor le muestra la tabla coloreada). A los niños se les da esta tabla pero sin colorear. Estas columnas están vacías y se les pide lo siguiente:
1. Rellena en rojo los números pares.
2. Rellena el triangulillo (superior derecho) de verde para los múltiplos de 3.
3. Rodea con una circunferencia los múltiplos de 4.
4. Pinta de azul el cuadradito (inferior derecho) de los múltiplos de 5.
5. Rodea los múltiplos de 6 con un cuadrado.
6. Rodea los múltiplos de 7 con un triángulo.
7. Pinta en negro el triángulo este (inferior izquierdo) en los de múltiplos de 8.
8. Pinta en amarillo el triángulo este (superior izquierdo) de las casillas de los múltiplos de 9.

Así queda completada la tabla. Se pretende ver las posibilidades didácticas de este instrumento de trabajo que le llamamos la tabla cien.
Queremos ver sobre qué cosas podemos trabajar. Hasta qué punto podemos trabajar con elementos geométricos, o solamente cosas aritméticas: capacidad para visualizar utilizando los colores. etc.
(P) En primer lugar ¿Cuáles serían los **números primos**?
(J) Los que no tienen nada.
(P) ¿Hay algún tipo de patrón en los múltiplos de 2?
(J) Que todos están en paralelo ¿no?
(P) En paralelo ¿Por filas o columnas?
(J) Por columnas; en vertical.
(P) O sea una columna sí y otra no.
(J) Sí
(P) En las filas ¿Qué pasa?
(J) Por filas, igual.
(P) O sea uno sí y otro no.
(J) Sí.
(P) ¿Hay algún otro tipo de patrón visual con los múltiplos de 2?
(J) A parte de que van de 2 en 2?
(P) Sí. Hay líneas verticales y horizontales. ¿Algún otro tipo de línea?
(Silencio)
(P) ¿Y con los múltiplos de 3?
(J) Con los de 3, sí; que van en diagonal, y también paralelas.
(P) Señala las diagonales que ves.
(J) Así y así (Julia señala diagonales en dos direcciones distintas).
(P) O sea hay dos tipos de diagonales ¿no?

(J) Claro, unas para la derecha y otras para la izquierda.
(P) ¿Y con los de 2, no?
(J) Yo con los de 2 no lo veo. No, porque tendrían que ir así (Julia señala una diagonal).
(P) ¿No te despista...
(J) Sí, va en diagonal saltándose de 1 en 1. Iría aquí y aquí saltándose de 1 en 1 (Julia señala una diagonal del 8, 16, 24, ...).
(P) ¿Y los de 4, cómo van?
(J) Los de 4 son el círculo ¿no?
(P) Sí.
(J) También irían en diagonal.
(P) Muy bien.
(J) Pero también irían en horizontal y en vertical, saltándose un cuadro.
(P) ¿Qué les pasa a los de 5?
(J) Que van solo en vertical y horizontal. En diagonal, no.
(P) Solo hay dos columnas ¿no? la del 5 y la del 10. Porque ¿Los múltiplos de 5 en qué terminan?
(J) En 5 ó en 0. Y que todos los del 5 van seguidos, para abajo; y los del 0 en la otra columna.
(P) ¿Y los del 6? ¿Hay patrones diagonales?
(J) También van en diagonal, vertical y horizontal.
(P) Bien. Ya has visto cuál es el marco de trabajo ¿no?
(J) Sí.
(P) Ya hemos visto ciertos patrones, aunque luego veremos más. Ahora nos vamos a mover por la tabla y vamos a utilizar las palabras "*bajar, subir, derecha izquierda*", etc. y vamos a ver cómo las interpretamos. Por ejemplo yo me sitúo en el 5 y bajo un lugar en la misma columna. Me sitúo en el 4, y bajo un lugar ¿A dónde he llegado?
(J) Al 14.
(P) ¿Qué le ha pasado al 4 respecto al 14?
(J) Que suma 10.
(P) Entonces bajar un lugar ¿Qué es?
(J) Sumar 10.
(P) ¿Y si me voy a la derecha un lugar?
(J) Sumar 1.
(P) ¿Y a la izquierda?
(J) Restar 1. (Se ríe, como viéndolo trivial).
(P) Si subo un lugar.
(J) Restar 10.
(P) ¿Está claro? Las palabras *"bajar, subir, derecha, izquierda"* se pueden traducir a un lenguaje aritmético ¿no?
(J) Sí.
(P) Si bajo 5 casillas ¿Qué sería?
(J) Sumar 40.
(P) Estoy aquí (casilla del 16) y bajo 5: 1, 2, 3, ..
(J) Pues sumar 50.
(P) Bajar 5 casillas es sumar 5 decenas.
(J) Sí.
(P) Nos situamos en el 24 y le vamos a sumar 21. Vamos a suponer que no sabemos hacer el algoritmo de la suma. Sólo sabemos lo que es izquierda, derecha, etc. ¿Qué harías para sumarle 21 al 24 ?

(J) Pues bajar 2 cuadros, que serían 2 decenas y correr uno a la derecha que sería sumar 1.
(P) O sea, "bajar 2, derecha 1". Eso sería equivalente a sumar 21. ¿Qué forma tiene "bajar 2, derecha 1"?
(J) Una L.
(P) Una L de 2x1 ¿no? Y en el ajedrez ¿Qué movimiento sería ese?
(J) Adiós! El del caballo ¿no?
(P) ¿Y si bajo 2 e izquierda 1 ¿Qué sería?
(J) Pues restarle; sería sumarle 19, quiero decir.
(P) ¿Cómo haríamos 36 menos 19?
(J) Partiendo del 36, 19. Pues **sería subiendo 2 cuadros para arriba y uno para la izquierda.**
(P) Y ahí ¿Qué es lo que has hecho?
(J) Otra L. ¡Ah no, 19! Subo uno y 1 a la izquierda. No, espera!
(P) Vamos a ver, tranquila. Vamos por partes. Si subimos uno, restamos 10, y..
(J) Ahora restamos 9.
(P) ¿Cómo restamos 9?
(J) 9 cuadros para la izquierda.
(P) 1, 2, 3, ... y 9 (El profesor señala 9 casillas a la izquierda del 26).
(J) Sería lo mismo. Del 36 hemos pasado al 17. **También sería... es verdad, para la derecha.**
(P) Sería subir 2...
(J) Y sumar 1 (derecha 1).
(P) Que es lo mismo que subir 1, izquierda 9. Eso aritméticamente ¿Qué es? (silencio).
(P) Hemos visto dos posibilidades. a) "Subir 1, izquierda 9" ¿Cómo lo traduces?
(J) Subir es restar 10, y a la izquierda restar 9.
(P) Y la opción b)
(J) Subir 2, derecha 1. Sería 36 -20 y sumar 1.
(P) ¿Qué relación hay entre las dos operaciones y las palabras de subir y bajar?
(J) Son operaciones contrarias. Subes es una operación y si bajas es la operación contraria. Lo mismo que para derecha e izquierda.

(P) Vamos con la **multiplicación. 4x7** ¿Cómo lo hacemos?
(J) Sería bajar 2...
(P) Nos situamos ¿Dónde?
(J) En el 4.
(P) Imagínate que no sabemos el resultado. Solo sabemos lo que es subir, bajar, derecha e izquierda. A ver cómo llegamos al 28.
(J) Se supone que 28 es más grande que 4.
(P) No sabemos que el resultado es 28.
(J) Sería contar, a partir del 4, 7 cuadrados.
(P) ¿Cuadrados?
(J) 7 círculos.
(P) ¿Y por qué 7 círculos a partir del 4?
(J) Hombre, también se puede hacer a partir del 7, contando 4.
(P) ¿4 qué?
(J) 4 triangulicos. El símbolo que tenga.
(P) ¿Cómo has llegado a la conclusión de que 4 x 7 es contar 7 círculos a partir del 4?
(J) Se supone que (el niño) sabe la relación de la multiplicación con la suma.
(P) En ese caso, qué respuesta me has dado aritméticamente?

(J) Hombre, siguiendo los múltiplos. Contando 4 veces 7.
(P) 4 x 7 igual. Tú me has dicho contar 7 círculos, que es 7 veces 4. Eso aritméticamente ¿Qué es?
(J) Adiós!
(P) Si me lo has dicho antes.
(J) 4 veces 7. Teniendo en relación los múltiplos del 4.
(P) ¿Qué es 4 veces 7?
(J) Sumar 4 veces 7.
(P) O 7 veces 4.
(J) Claro.
(P) En este caso has dicho 7 círculos, sería 4+4+4+4+4+4+4 (7 veces) ¿no?
(J) Claro.
(P) O bien.
(J) Partiendo del 7.
(J) (Julia escribe: 7+7+7+7). 4 triángulos.
(P) ¿Y qué propiedad se pone de manifiesto ahí?
(J) La conmutativa.
(P) ¿Me la podrías decir? Pero no enunciarla técnicamente, sino en este lenguaje de tabla.
(J) O sea, nada de decir que el orden de los factores no altera el producto.
(P) No. En el lenguaje este que estamos utilizando. Primero me has dicho que puedes hacer, situados en el 4 contar 7 círculos; o bien, situados en el 7 contar 4 triángulos. ¿Es igual las dos cosas?
(J) Sí.
(P) Pues dímelo.
(J) Pues que da igual sumar 4 veces 7 que 7 veces 4.
(P) Y eso es la propiedad conmutativa del producto ¿no?

(P)¿**Cómo harías 15x3**? A parte de la regla que ya hemos sacado. Bueno, ¿Hay alguna otra manera de hacer 4x7?
(J) Yo creo que no, No.
(P) Y ¿15x3?
(J) Pues de la misma forma: sumar 3 veces 15 ó 15 veces 3.
(P) ¿A dónde llegaríamos?
(J) Al 45. Pero bueno, es que el 15 no... del 3 sí, porque sería siguiendo los triangulicos verdes, pero el 15...
(P) ¿Qué características tiene el 15?
(J) Que es múltiplo de 5 y de 3.
(P) ¿Y en términos de colores?
(J) Verde y azul.
(P) ¿Cómo multiplicamos 15x3 utilizando los colores?
(J) Descomponiendo el 15 en 5 y 3. Cogíamos el 3x3=9 y sería 9 veces el 5 y ya cogeríamos el 9 que nos pasaría los mismo.
(P) El 9 ya sí tiene un color, el amarillo.
(J) Ah, el amarillo son los múltiplos de 9 ¿no?
(P) Claro.
(J) Pues descomponiendo el 15.
(P) O sea, tú harías...

(J) Yo descompondría el 15 en 3x5, y luego como hay dos 3 , los multiplicaría y ya tendría 9, y ya lo haría con relación... 9x5.
(P) ¿Y 5x3?
(J) Igual, lo que hemos visto antes.
(P) Entonces ¿Cuándo descompones? (silencio)
(P) Cuando los dos números son primos entre sí seguimos la regla primera pero cuando uno de ellos es compuesto, ¿Descompones uno de ellos en factores,?
(J) Los que son iguales, y aplicar la regla anterior. Y si da la casualidad, a lo mejor, que me sale, al multiplicar los dos números iguales que me salga otro compuesto, me hubiera salido por ejemplo 4x4 que sale 16..., pues el 16 otra vez, ... No.!
(P) Quieres decir; por ejemplo 15x6. El 15 es 3x5 y el 6 es 2x3 ¿no?
(J) Descomponer los dos y juntarlos. Hasta conseguir los primos para poder aplicar otra vez la misma regla de antes.
(P) Entonces la regla anterior ¿Sólo vale para números primos?
(J) Que sean primos entre sí.
(P) ¿Entonces cómo haría 4x6 que no son primos entre sí?
(J) Pero es que no tiene,...
(P) ¿Vale la regla anterior para 4x6?
(J) Sí vale.
(P) Ahora 15 x 3. ¿Se le puede aplicar la regla anterior sin descomponer?.
(J) Sí, pero contando el 15, cuadro por cuadro, hasta llegar al 15 y otra vez 15.
(P) O sea, contar, una vez 15...
(J) No. Como el 15 tiene triángulo verde y cuadrado azul, fijarte en los que tengan también triángulo verde y cuadrado azul.
(P) O sea, el tercer número que tiene triángulo verde y cuadrado azul. Ah, pues ya es otra regla.
(J) Algo es algo. Pero me tiene mosca lo del 4 y el 6.
(P) Bueno pues vamos a ver 4x6. La regla le vale ¿no? Situados en el 4 contar 6 círculos, o...
(J) Pero yo voy por lo de descomponer en factores.
(P) El 4 es 2x2 y el 6 es 2x3.
(J) Juntamos los dos que son iguales; me sale 8x3, y esos sí son primos entre sí.
(P) Ah, tú pasas de 4x6 a 8x3 que son primos entre sí!
¿Y sale siempre esa regla, de juntar los que son iguales? ¿Sale siempre?
Vamos con 15 x 3. 3x3 =9 y 5 x 9.
Vamos a coger otro: 8x4. Sería 2x2, 2x4, 8x4
(J) Es que sale lo mismo. No salen primos entre sí, pero aquí lo podríamos meter como potencia. 2^2, 2^3 , 2^5. Sería sumar 5 veces 2.
(P) Pero ¿Cómo haríamos 2^3? En la tabla. Situados en el 2.
(J) Sería lo mismo, sumar 3 veces 2. Porque si tú descompones una potencia, te sale 2x2x2, o sea una multiplicación.
(P) Pero eso no es sumar 3 veces 2.
(J) Sí te sale, No. No sale.
(P) 2^3 sería 2x2x2, ¿Cómo haríamos eso, 3^2 en la tabla? ¿Cómo lo haríamos en la tabla? Me lo acabo de plantear. Sería 3x3. Y sería 3 veces verde. ¿Cuántas veces? Dos veces eso.
(J) Entonces lo mismo con el 2. Sería 3 veces el rojo. No, no he contado el 2.
(P) 3x3 que sería coger 3 veces el verde. 3x3x3 agrupamos dos, 3 veces amarillo. Tenemos que agrupar. Hay que tener dos factores.
(J) Si tenemos 3 no nos sale.

(P) 5x5 es 2 veces azul. No. 5 veces azul, y llegamos a 25. ¿Y si hacemos 5x5x5?
(J) Tendríamos que agrupar.
(P) ¿Qué propiedad aplicamos?
(J) La asociativa.
(P) 5x5=25 ¿Como haríamos 5 veces 25?
(J) Nos pasamos de la tabla.
(P) Nos lo imaginamos, para solucionar el problema.
(J) 5 veces 25.
(P) ¿Cómo lo hacemos?
(J) Nos guiamos por el 5. 25 veces el 5. Eso saldría, solo con la primera fila, que solo son unidades. Es que lo acabo de pensar. Sin necesidad de descomponer, como antes con el 8x4 que se puede descomponer.
(P) Tú dices los que tienen solo unidades. El problemas cuando hay decenas ¿no?
(J) 5 veces 25.
(P) Nos situamos en el 5 y contamos 25 cuadrados azules. ¿Y cuando haces 5x5 con el algoritmo ¿Qué haces? También lo puedes hacer 5x5 = 25, y ahora multiplico las decenas 5x20 que son 100 y sumo, y sale también 125 (el profesor realiza la cuenta 25x5 en el papel)
¿Valdría traducir alguna de estas regla a colores?
(J) Aquí resultaría mucho más difícil.
(P) Por cierto. Bajar una casilla sería sumar 10 ¿Qué sería multiplicar un número por 10?
(J) Bajar 10 casillas. Multiplicar por 10 es sumarle...100.
(P) Si multiplico 5x10 me da 50.
(J) Es que me he fijado en el 15. Y con el 25 y 35 igual. Si es solo unidad no.
(P) Bueno, parece que cuando un factor tiene decenas ese es el problema. Vamos a multiplicar las decenas por 5, que sería 2x5, nos situamos en el 2 y contamos 5 rojos. Y ahora 5x5.

(P) Vamos con la división. ¿**Cómo haríamos 35:7** por ejemplo, sin utilizar la regla de dividir?
(J) Sé el resultado, y ya solo me fijo en eso.
(P) ¿Qué significa dividir?
(J) Repartir.
(P) ¿Qué más?. Otros verbos. ¿Para repartir qué hay que hacer?
(J) No se me ocurre nada. (silencio)
(P) Pues por ejemplo agrupar... ¿Cómo aplicamos el verbo agrupar, a esta tabla? En realidad es lo contrario de multiplicar ¿no?
(J) Es que como sé que es 35...
(P) ¿Te resulta un problema saber el resultado? Pues 36:7.
(J) Hacer grupos de 7. Nos fijamos en los que tienen el triangulico. Pues contando hacia atrás.
(P) ¿Cómo?
(J) **Divides 35 entre 7 hasta llegar a 7.**
(P) ¿O hasta llegar a 0?
(J) Si es hasta 0 no te sale.
(P) Vamos a suponer que cada caramelo tiene un número. El 1º, el 2º,... el 7º; ya tenemos un paquete, y así. ¿Y si contamos hacia adelante, nos daría igual?
(J) No. Tendría que dar un número menor.
(P) Sí, pero a la hora de hacer paquetes. Los 7 primeros para Juan, etc.
(J) Pero ahí estás agrupando. Ah! es verdad. Sería igual que la multiplicación. Haces grupos de 7 hasta que llegues al número que quieres dividir.
(P) Hasta que no me quede ninguno.

(J) Haces grupos de 7.
(P) ¿Y eso cómo?
(J) Contando triangulicos, hasta que llegues al número que estás dividiendo.
(P) Dividir entre 7 ¿Qué va a ser?
(J) Agrupar.
(P) Contar triángulos.
(J) Es que lo estaba mirando al revés.
(P) No, pero si estaba bien. Vamos a hacerlo hacia atrás. 1, 2, 3, 4, y este es el quinto paquete, o bien al revés.
(P) ¿Y hacer 38:7?
(J) Sería lo mismo... pero como no es múltiplo de 7. Sería empezar a contar hasta el triángulo que más se acerque al 38.
(P) Y luego, hasta llegar a 38, ¿Qué hacemos?
(J) Pues eso.
(P) Tenemos los caramelos en la mesa y repartimos. ¿Qué pasa?
(J) Que sobran 3.
(P) Y eso ¿Qué es?
(J) El resto.
(P) Pues tenemos también una regla para dividir.
(J) Acercarse lo más posible.
(P) ¿Ves aquí que las **operaciones son contrarias** como la suma y la resta?
(J) No. Yo es que la veo lo mismo.
(P) La multiplicación eran sumas sucesivas ¿no?
(J) Y aquí lo que vas es con múltiplos, hasta llegar al número por el que estás dividiendo.
(P) La multiplicación son sumas sucesivas.
(J) Sí
(P) Lo contrario de la suma ¿Qué es?
(J) La resta.
(P) ¿La división son restas sucesivas?
(J) Sí, también.
(P) En la multiplicación estamos sumando sucesivamente y en la división estamos quitando sucesivamente ¿no?
(J) Si.
(P) Bueno, para terminar ¿cómo harías el **m.c.d. de 24 y 36**?
(J) Fijándote en los colores que coincidan de uno y de otro. Como los dos son rojos, sería el 2.
(P) ¿Eso qué es?
(J) Un divisor. Solo te fijarías en los comunes: el rojo, el verde, el cuadrado el círculo.
(P) ¿Y ahora?
(J) Descomponer. El 6 en 2 y 3, y ya solo cogerías los comunes ...
(P) Vamos a olvidarnos del algoritmo, solo en la frase *"máximo común divisor"*
El 2 es común a los dos; el 3 el 4 y el 6. ¿Hay más divisores comunes?
(J) Es que el 6 si lo dividimos entre 2 y 3 ya coincide con los otros dos.
(P) Fíjate. El 2 y el 3 son comunes. Entonces 2x3 también. ¿Sirve eso para otros? el 2 y 4. 2x4 es divisor común?
(J) No.
(P) Es divisor de 24, pero no de 36.
2, 3, 4, 6, son divisores comunes ¿Están todos los divisores comunes?

(J) Sí, están todos. Si no, coincidiría con otro color.
(P) Hay números compuestos que pueden ser divisor de 24. El 8 es divisor de 24, por ejemplo.
(J) Si pero el 36 no lleva el color del 8. Sería descomponerlo aparte. Primero, el 24, qué colores lleva y luego el 36 y los que coincidan.
(P) Eso es lo que hemos hecho, el 24 lleva, rojo, ...
(J) Sí pero también incluiría el 8.
(P) ¿También incluiría combinaciones de colores?.
(J) Claro.
(P) Vamos a hacer una columna para cada uno: (El profesor escribe la tabla A4.3-1)

24	36	Nº
Rojo	**Rojo**	2
Verde	**Verde**	3
Círculo	**Círculo**	4
Cuadrado	**Cuadrado**	6
Negro		8
	Amarillo	9

Tabla A4.3-1 (G1-1ª sesión)

(J) Rojo, verde, círculo, cuadrado, negro. También habría rojo y cuadrado. Rojo y cuadrado es 2x6 que es 12. Rojo y círculo sería 2x 4 que es 8, que ya está. Rojo y verde está. Rojo y negro es 2x8 =16, pero aquí (en el 36) no estaría, no sería común.
(J) Aquí también saldría el 8.
(P) En el 36, no.
(J) Tienes rojo y círculo, 8. Si coges rojo y círculo, el 8 no es divisor de 36. Es que si haces las combinaciones... Es con los colores que tengas, coges los comunes y ya está. Porque ni el 8 ni el 9 sería común. Si haces combinaciones sí te sale.
(P) Haces combinaciones con los comunes solamente. Primero has cogido los comunes ¿no?
(J) Y a partir de ahí haces las combinaciones.
(P) Vamos a hacerlas: 2; 2x3 ya lo tenemos; 2x4.
(J) No lo podemos hacer, es que no podemos hacer combinaciones, porque sale 8 y éste (36) no es múltiplo de 8.
(P) Entonces la pregunta es si aquí están todos los divisores comunes.
(J) No, no están.
(P) ¿Cómo los conseguimos? Si el 2 es divisor de 24 y el 6 también ¿Lo es 2x6?
(J) De 24 sí y de 36, si sirven lo de las combinaciones tendría que ser. Y si sí lo es, el 12 es de 24 y 36.
(P) Y además es el m.c.d. Pero en cambio aquí, rojo y círculo 2x4=8 que no es divisor de 36. Entonces queda una duda: *si un número **a** es divisor de **k** y **b** también lo es, si **axb** es divisor de **k**.* Esa es la pregunta.
(J) Según el ejemplo que cojas.
(P) Una regla que sirva para todas.
(J) Es que según las combinaciones que hagas, sí te sale.
(P) ¿Cómo obtenemos los divisores de un número?

Vamos a hacerlo con el 24; lo descomponemos en factores ($24=2^3 \times 3$; $36= 2^2 \times 3^2$) Divisores de 24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 24}
Divisores de 36 = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
(J) 2x3=6, 2x4=8. No sale que el 8 sea divisor de 36. La regla no vale.
(P) Entonces el producto de dos divisores de un número no tiene por qué ser un divisor de ese número ¿no?
(J) Entonces no hay que hacer todas las combinaciones de los colores. No sale la regla.
(P) Bueno. No es tan fácil como parece. Tendríamos que repasar algunas cosas más de la divisibilidad ¿Lo dejamos por hoy?

Segunda sesión: divisibilidad y patrones

Se le proporciona a Julia la tabla coloreada y una hoja con las tareas:

En la tabla coloreada hemos observado cómo los distintos múltiplos (los colores, círculos y triángulos) se disponen siguiendo determinados patrones. Los múltiplos de 2, los de 5 y los de 10 se disponen en columnas, los de 3, 4, 6, etc. en diagonales.

Consideremos las diagonales que van en la dirección y sentido (↙) , de modo que la primera diagonal coloreada en verde sería {3, 12, 21}. Asignemos a cada número el par (d, p), donde **d** es el lugar que ocupa la diagonal de entre las de su color en la tabla (1ª, 2ª, 3ª, etc.), y **p** la posición que ocupa el número dentro de esa diagonal. Así el 36 como múltiplo de 3 viene dado por el par (3, 4) porque es el 4º término de la 3ª diagonal (en verde), pero considerado como múltiplo de 6 le corresponde el par (3, 2) porque es el 2º término de la 3ª diagonal (números recuadrados).

Consideremos también las otras diagonales (↘) y adoptemos igual notación. Empezando por la derecha, la primera diagonal de los múltiplos de 3 (en verde) estaría formada sólo por el 9; la segunda sería {6, 18, 30}, etc..

Completa la tabla siguiente y expresa las regularidades que encuentres:

3x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	4 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	6 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘
3x1=3	(1,1)	(3,1)	4x1=4	(1,1)	(2,1)	6x1=6	(1,1)	(1,1)
3x2=6	(2,1)	(2,1)	4x2=8	(2,1)	(1,1)	6x2=12	(1,1)	(2,1)
3x3=9			4x3=12			6x3=18		
	(2,3)		4x4=16		(2,2)	6x4=24		
	(3,2)	(2,2)	4x8=32				(2,3)	
3x9=27			4x10=					(3,2)

Tabla A4.3-2 (G1-2ª sesión)

(P) A ver si entiendes la redacción de la pregunta como está en el papel.
(J) Lo del 36. No acabo de ver lo del cuarto término.
(P) Te lo explico: el 36 es el (3, 4). Considerado como múltiplo de 3, está en la 3ª diagonal y dentro de ella en el 4º lugar. Si lo consideramos como múltiplo de 4 tendrá otra notación. Cada múltiplo viene dado por una pareja. La 1ª componente **d** es la diagonal a la que pertenece el múltiplo. O bien así ↘. En el otro sentido. La 2ª componente, **p** es la posición que ocupa en la diagonal. Por ejemplo: el 15, considerado como múltiplo de 3, estaría en la 2ª diagonal y en la 2ª posición. Sería entonces el (2, 2). En el otro sentido sería el (3, 2).
Se trataría de rellenar estas tablas. Una vez que sabes cómo hacerlo te proporcionaré las tablas rellenas y solo tienes que determinar las regularidades.
(Julia rellena algunas casillas de la tabla A4.3-2 hasta que el profesor ve claramente que ha entendido el proceso). La tabla una vez rellena es ésta. El profesor le muestra la tabla A4.3-3):

3x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	4 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘	6 x k	(d, p) ↙	(d, p) ↘
3x1=3	(1,1)	(3,1)	4x1=4	(1,1)	(2,1)	6x1=6	(1,1)	(1,1)
3x2=6	(2,1)	(2,1)	4x2=8	(2,1)	(1,1)	6x2=12	(1,1)	(2,1)
3x3=9	(3,1)	(1,1)	4x3=12	(1,2)	(3,1)	6x3=18	(3,1)	(1,2)
3x4=12	(1,2)	(4,1)	4x4=16	(2,2)	(2,2)	6x4=24	(2,2)	(2,2)
3x5=15	(2,3)	(3,2)	4x6=24	(2,3)	(3,2)	6x6=36	(3,2)	(2,3)
3x6=18	(3,2)	(2,2)	4x8=32	(2,4)	(4,1)	6x7=42	(2,3)	(3,1)
3x9=27	(3,3)	(3,3)	4x10=40	(4,1)	(2,4)	6x9=54	(3,3)	(3,2)
3x12=36	(3,4)	(4,3)	4x12=48	(4,2)	(3,4)	6x12=72	(3,4)	(4,1)

Tabla A4.3-3 (G1-2ª sesión)

De antemano, no es que tenga que haber ninguna regularidad ¿eh? Tratamos de encontrar alguna regularidad, como por ejemplo el par que le corresponde y el número por el que multiplicamos.

Nos fijamos en la columna del 3xk. Si multiplico por 1, le corresponde el par (1, 1), si multiplico por 2 el (2, 1), si multiplico por 3 el (3, 1), etc. ¿Hay alguna regularidad entre los pares y el número k por el que multiplicamos el 3? Regularidad de cualquier tipo.

(J) Hasta el 3, sí. Porque si multiplico por 1, era el 1, si multiplico por 2, (la primera componente) es el 2 y así.

(P) Claro, porque hasta el 3 estamos en la primera fila. Luego ya saltamos a la segunda fila.

(Silencio)

(P) ¿Y a la otra diagonal, ¿Qué le pasa?

(J) No sé. ¿La regla tiene que ser para todos o solo para uno?

(P) Vamos a procurar encontrar una regla que valga para el máximo de números posible. La que tú veas.

(J) Es que si multiplicamos por ejemplo el 3 por el 3 y el 4 por el 4, los pares que salen son la mitad del número por el que multiplicamos.

(P) Vamos a ver, 3 por 3, ...

(J) Ah, no. Estaba mirando esta columna. Es que no veo nada. (Silencio)

(P) Bueno, pasamos a otra cosa.

El profesor le entrega la tabla A4.3-4.

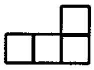
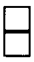
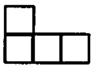
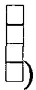
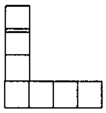
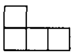
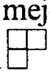
k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador	k	Patrón	Operador
2		2	5			8		
		10-2=8						
		10						
		10+2=12						
3			6			9		
4			7					

Tabla A4.3-4 (G1-2ª sesión)

(P) Aquí se trata de ver los patrones visuales que tienen los múltiplos, como patrones diagonales, fila, columna, o patrones en L, como dijiste el otro día.
(J) ¿Ah, sí? Yo no me acuerdo.
(P) ¿No te acuerdas? Pues lo tengo grabado. Te pregunté ¿Qué forma tiene? Y dijiste: "en L". Tenemos relleno el del 2. Tiene patrones diagonal, columna, fila, etc. Cada patrón va asociado a un operador. Por ejemplo, "Bajar 1, derecha 2" es sumar 12. ¿De acuerdo?
(J) Sí.
(P)¿Hay algún patrón diagonal para los múltiplos de 3?
(J) Sí. En un sentido y en otro.
(P) ¿Tiene patrón columna?
(J) Sí.
(P) Dibújalo. ¿Cuántas casillas tendría?

(J) (Julia dibuja ) Sería sumarle... vamos de 10 en 10 ¿no?
(P) Tú verás.
(J) 30.
(P) Este sería el operador + 30. ¿Hay un patrón en forma de L?
(J) Sí. ¿También lo dibujo?
(P) Sí.
(J) (Julia dibuja )
(P) ¿Qué operador sería ese?
(J) El + 33
(P) ¿Hay algún operador en L más pequeño?
(Silencio)
(P) Que nos lleve de un múltiplo de 3 a otro múltiplo de 3.
(J) Sí.
(P) Dibújalo.
(J) (Julia dibuja )
(P) ¿De qué número a qué número nos lleva?.
(J) Del 3 al 15.
(P) Sería bajar 1 y derecha 2.
(J) Entonces no cuento el 13.
(P) Sí, bajo 1 y derecha 2.
(J) Ah, sí
(P) Este sería el operador...
(J) Es que yo he pensado que tendría que hacer de aquí (3) aquí (33) a la fuerza, porque el 33 era múltiplo de 3. (El profesor le aclara de nuevo que el operador transforma a un múltiplo de 3 en otro número que es múltiplo de 3)
(P) Ya, ya. No, la tarea es: si me sitúo en un múltiplo de 3 ¿Qué patrón nos lleva a otro múltiplo de 3?
(J) Entonces hay otro más pequeño. Restar 1 y sumar 10.
(P) Podemos decir, mejor: "Izquierda 1, bajar 1" ¿no?
(J) Sí. (Julia dibuja )
(P) ¿Qué otros patrones podrías encontrar?
(J) ¿Que sean más chicos?
(P) No. Más chicos, o...
(J) ¿Otra figura parecida?
(P) En forma de L hemos visto el 33, el 12 y el 9. ¿Cómo son esos números? El más pequeño que hemos encontrado es el +9. Buscamos otro múltiplo de 3 que sea más pequeño que el 9.
(J) El 6, pero ya no sería en forma de L.
(P) ¿De qué forma sería?
(J) Recto. Una columna.
(P) ¿Columna o fila?
(J) Una fila.
(P) ¿De cuantas casillas?
(J) De 4.

(P) Si partimos del 3 y le sumas 6 ¿A dónde te vas?
(J) ¿El 3 se cuenta? Eso es lo que me está haciendo el follón.
(P) Tú te sitúas en el 3 y al 3 le sumas 6. Uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis.
(J) Es que llevo todo el rato contando el 3.
(P) Bueno, el 3 lo cuentas a la hora de ponerlo en su casilla.
A la hora de poner el patrón.
(J) Entonces el 6, que sería 3 nada más (Julia señala del 3 al 6)
(P) Ese ¿Qué operador sería?
(J) Más 3. ¿Lo pongo también?
(P) Como operador fila.
(J) (Julia dibuja)
(P) Ya tenemos, el 3, el 9. ¿Qué ocurriría con el 6?
(J) ¿Cómo que qué ocurriría?
(P) Sí, el operador "sumar 6" ¿Cuál sería?
(J) Otra fila.
(P) ¿Cuántas casillas tendría?
(J) 7.
(P) Ese ¿Se podría poner como combinación de otros anteriores, más pequeños? Lo podemos poner como dos de estos (Julia señala). Se trata de coger los mínimos operadores posibles de manera que con ellos podamos fabricar los demás. El más pequeño es el 3 (), el siguiente..., el 6 (), que lo podemos poner como dos de 3. El siguiente el 9, que sería éste (), que no se puede poner como combinación de otros. El siguiente el 12 () ¿Se puede poner como combinación del 3 y el 9?

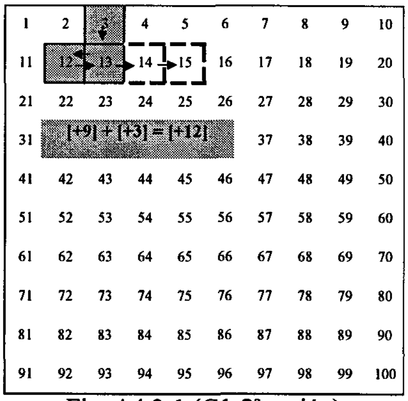
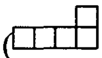
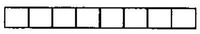


Fig. A4.3-1 (G1-2ª sesión)

(J) ¿Se pueden poner unos encima de otros?
(P) Se pueden poner de forma que el final de uno coincida con el principio de otro. Son como cadenas.
(J) Que solo coincida un cuadrado ¿no?
(P) Claro. El final de uno con el principio del otro. Vamos a ir añadiendo. El 12 () se puede poner como el 9 () más el 3 ().
(J) Pero si solo coincide con 1, te sobraría para acá (Julia señala del 12 hacia la derecha).
(El profesor le da una hoja con tablas cien y le pide que componga o sume patrones).
(P) Rodea el 3, y coloca el patrón 9. Llegamos al 12. Ahora al 12 le añadimos (aplicamos) el patrón 3. (Julia realiza la figura A4.3-1).
(J) Entonces coincidirían 2 cuadrados ¿no?
(P) Lo importante es que el final de una cadena coincida con el principio de la otra. Aunque se superpongan, no pasa nada. Esta L () se puede poner como esta L () más esta fila () ¿Y eso cómo lo podríamos escribir?
(J) (Julia escribe: patrón 12 = +9 +3
(P) Que sería: " sumar 12 es sumar 9 y sumar 3".
(J) Pero antes el 15 no lo habíamos hecho así.
(P) El 15...
(J) Si no lo he hecho, lo he pensado: dos para acá (derecha) y para abajo.

(P) Bueno, pero es que 2 a la derecha y uno abajo es lo mismo que 1 abajo y 2 a la derecha, ¿no?. Esta L (del 3 al 5 y del 5 al 15) hace el mismo efecto que ésta (del 3 al 13 y del 13 al 15). Visualmente es distinta, pero el operador sí es el mismo ¿no?
(J) Sí.
(P) Seguimos con el 4? El 4 tiene diagonales, en un sentido y otro. Veamos las columnas,
(J) (Julia dibuja)
(P) Que sería el operador...
(J) +20
(P) Si escribimos columnas más largas, está claro que lo podemos poner como suma de columnas más chicas ¿no?
(P) Patrones en forma de fila.
(J) (Julia dibuja)
(P) Que sería el operador...
(J) +4.
(P) Patrones en forma de L. ¿Cuál es la L más chica que tenemos?
(J) Pues esta L, el 16.
(P) Bajar 1, derecha 2.
(J) Sería +12. (Julia dibuja)
(P) ¿Alguna otra L?
(J) Más chica, no.
(P) Más chica de tamaño, no, pero que haga un efecto más pequeño. ¿Un operador más pequeño?
(J) ¿Cómo, que haga un efecto más pequeño?
(P) Sí. Esta L es sumar 12. ¿Hay alguna L que sea sumar un número más chico?
(J) Sí, para el 12.
(P) O sea..
(J) Bajar 1, izquierda 2.
(P) ¿Qué operador sería ese?
(J) (Julia dibuja).
(P) ¿Se podría poner como combinación de otros?
(J) Mejor dicho. El 12 ponerlo como combinación del 8.
(P) El 12 sería igual a ...
(J) (Julia escribe +12 = +8 + 4
(P) Si al 4, le aplicamos el 12 y nos vamos hasta el 16. ¿Qué patrón le aplicamos ahora el 12?
(J) La del 8 (Julia señala del 8 al 4, o sea "izquierda 4")
(P) O sea el patrón fila del 4 ¿no? 12 y sumar - 4. ¿Qué sentido tendría – 4?.
(J) Restar 4.
(P) ¿Cómo interpretas restar?
(J) Leerlo al revés.
(P) ¿Leer primero la casilla final?
(J) Sí. (Julia escribe +8 = 12 + (-4))
(P) Entendiendo por – 4...
(J) Ir de derecha a izquierda.

(P) Coger lo que al principio era la primera poner la última y al revés. Los operadores del 12 son: el 4 que es fila, ...
(J) el 20 que es columna, y la del 8.
(P) Y la del 12 que la hemos podido poner como combinación de otros. ¿Hay alguna L más? Tenemos 4, 8, 12, y el 16 ¿Cuál sería el operador 16?
(J) Bajar 1 y sumar 2.
(P) Eso es 12. El operador 16... Si al 4 le sumamos 16 ¿A dónde nos situamos?
(J) En el 20. Bajar 1, derecha 6.
(P) ¿Lo puedo poner como combinación de otros?
(J) Usando la del 12. O cogiendo la del 8.Es que me estoy confundiendo el 8...
(P) ¿El operador con el número?.
(J) Sí. Sería coger el operador 12 y luego el 4.
(P) Con el 5 ¿Qué pasaría?
(J) Tenemos columnas.
(P) Vamos a ver el caso del 7 (el profesor señala las diagonales de los múltiplos de 7).
(J) Serían diagonales muy raras
(P) Tienen otra inclinación. No son paralelas a los verdes.
(J) Que yo me creía que nos íbamos a referir a las que son paralelas así (Julia señala las diagonales paralelas a las de los múltiplos de 3).
(P) Nos referimos a las que son paralelas entre sí. Aquí, por ejemplo ¿Hay filas?
(J) Sí hay.
(P) ¿Cuales?
(J) (Julia señala la fila del 21 al 28,del 42 al 49, y del 91 al 98).
(P) ¿Cómo paso del 7 al siguiente, el 14?.
(J) Bajando 1 e izquierda 3.
(P) ¿Y eso a qué es equivalente?
(J) Avanzar 7.

(P) O sea que "bajar 1, izquierda 3" () es lo mismo que la fila 7 (). ¿Y aritméticamente, eso qué sería? (silencio).
(P) Para pasar del 7 al 14 lo podemos hacer de dos maneras...
(J) Sí. Avanzando 7 seguidas, o bien, "bajar 1, izquierda 3".
(P) ¿Qué otro tipo de L hay?.
(J) "Bajar 2, derecha 1".
(P) Bien. ¿Lo dejamos ya?

(J) Sí, me tengo que ir.

Tercera sesión: divisibilidad y geoplano (I)

El profesor le proporciona a Julia la hoja con las tareas de la sesión, que coincide con la entregada al G3, así como una hoja con tablas-100 y papel vegetal.

Transcripción

(P) Hoy vamos a hacer algo de transformaciones geométricas, que son las reflexiones, los giros y los deslizamientos. Vamos a rodear con un circulillo (sobre el papel vegetal) los múltiplos de 7.

(J) (Julia coloca el papel vegetal sobre la tabla de la figura A4.3-2 y rodea con lápiz los múltiplos de 7).
(P) La experiencia consiste en hacer una reflexión de eje vertical. O sea darle la vuelta, y mirar qué números marcan los circulillos. Haciendo una reflexión vertical, el 7 que es este círculo se ha transformado en ...
(J) En el 4.
(P) El 14 en el ...
(J) 17.
(P) Haz algunos más. ¿Sin necesidad de hacerlo, lo podrías ver sobre la tabla?
(J) Los del 7, sí.
(P) El 21 en cuál se transforma?
(J) En el ... ¿Cuál es?
(P) Aquí, el 21, si le pego la vuelta a la transparencia ¿Dónde vendría?
(J) Al 30 ¿no?
(P) ¿Y el 28, a dónde va a parar?
(J) Al 23.
(P) ¿Y el 35?
(J) Al 36
(P) ¿Y al 42 y 49 qué les pasaría?
(J) Que se quedarían. El 42 sería el 49.
(P) El 42 pasaría al 49 y el 49 al 42 ¿no? ¿El 56?
(J) Al 55.
(P) ¿El 63?
(J) Al 68.

R_v

1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$	8	9	10
11	12	13	$\boxed{14}$	15	16	17	18	19	20
$\boxed{21}$	22	23	24	25	26	27	$\boxed{28}$	29	30
31	32	33	34	$\boxed{35}$	36	37	38	39	40
41	$\boxed{42}$	43	44	45	46	47	48	$\boxed{49}$	50 R_h
51	52	53	54	55	$\boxed{56}$	57	58	59	60
61	62	$\boxed{63}$	64	65	66	67	68	69	$\boxed{70}$
71	72	73	74	75	76	$\boxed{77}$	78	79	80
81	82	83	$\boxed{84}$	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	$\boxed{98}$	99	100

Fig. A4.3-2 (G1-3ª sesión)

(P) Así seguiría ¿no? ¿Hay alguna relación entre estos números? (Silencio)
(P) Estos señala los múltiplos de 7 y al darle la vuelta señala otros números ¿no? ¿Tienen que ver algo con los anteriores?
(J) Yo no le encuentro ninguna relación.
(P) Si ahora hacemos la reflexión horizontal en lugar de vertical, pues vendría así ¿no? Y pasaría igual ¿De acuerdo? Y si en lugar de hacer una reflexión hacemos un giro de 90º, pincharíamos en el centro y vendría así. Los números que salen ahora son el 1, 8, 16, 24, 32,... o sea otros números distintos.
(J) ¿Se supone que tiene que haber relación entre todos los números que salen?

(P) No. Estamos averiguando; yo no lo sé. Lo estamos explorando. Ahora lo que interesa es que vayas viendo el mecanismo para ir viendo luego más adelante otras cosas. Si yo girara 180° pues haría esto. Señalaría estos números: el 10, 17, 24, 31, 38, ...

(P) Te voy a hacer una pregunta, no para que la contestes ahora, sino para que la tengas en mente: ¿Hay algún número cuyos múltiplos se queden como están al someterlos a alguna transformación? Con la tabla coloreada delante.
(J) ¿Todos, o como mínimo uno?
(P) Todos. Si cojo un múltiplo de 2 y lo someto a la transformación, el resultado es otro múltiplo de 2. No es el mismo, pero sigue siendo múltiplo de 2. O sea, que se conserven los colores. Un número de un color, se transforma en un número del mismo color. Esa es la pregunta.
(J) Pues por muchas vueltas que le des, no hay ninguno (Julia señala los círculos que rodeó antes con los múltiplos de 7).
(P) Bueno, esos son los múltiplos de 7. Nos olvidamos ya de los múltiplos de 7. Elige otro número. Por ejemplo, los múltiplos de 3, son los verdes ¿no?
¿Hay alguna transformación que haga que un verde se trasforme en un verde, o un cuadrado en un cuadrado o un amarillo en un amarillo? Si lo vemos a simple vista, pues bien, pero nos podemos ayudar con el papel vegetal. (Julia prueba de nuevo con los círculos de los múltiplos de 7).
(P) Estos círculos valen solo para el 7.
(J) Estoy intentando echarle imaginación e imaginarme los círculos.
(P) Están aquí (señalando la tabla coloreada). Los círculos son los triángulos. (Los múltiplos de 7 están rodeados con un triángulo en la tabla coloreada).
(J) Sí, pero ahí hay muchos colores. Los del 3, no.
(P) A los del 3 por mucho que le demos la vuelta... ¿Iría un verde en un verde? (El profesor señala una reflexión vertical).
(J) No, porque el 3 pasaría al 8.
(P) ¿Y así, en horizontal? ¿El 3, dónde pasaría?
(J) Al 93. Ese sí.
(P) Bueno, solo hemos visto el 3. ¿Y el 12?

(J) Nos pasaría al 82.
(P) ¿Entonces se cumple?
(J) No. Se tiene que cumplir para todos.
(P) ¿Y girando 90°? ¿Un verde pasaría a un verde?
(J) El 3 pasaría al 30. Y el 6 pasaría... al 60. (Julia no se ayuda de papel vegetal para realizar el giro. Lo realiza visualmente).
(P) ¿Y el 9?
(J) Al 90. El 12 pasaría al 19.
(P) Tú lo ves mejor que yo.
(J) Sería el segundo.
(P) Con un giro de 90°.
(J) Pasaría al 19.
(P) Luego con un giro de 90° tampoco se cumple. ¿Con un giro de 180°?
(J) Eso ya es más difícil. No. Sería ponerlo al revés. (Julia confunde el giro de 180° con la reflexión horizontal).
(P) Claro, un giro de 180° sería así.
(J) Hemos dicho que dándole la vuelta no salía. Ah no, antes lo hemos puesto del revés.

(P) Antes lo que hemos hecho ha sido esto. (El profesor señala la reflexión horizontal) ¿Es lo mismo una reflexión horizontal que un giro de 180º?
(J) No. Entonces el 3 se quedaría en el 98.
(P) El 3 pasaría al 98.
(J) O sea que nada.
(P) Y con un giro de 270º ...
(J) Tampoco.
(P) Sería como girar a la izquierda 90º. ¿El 3 pasaría, a cuál?
(J) ¿Al 21? No. Porque si giramos para acá, se quedaría en el 71 ¿no? Y si giramos así se viene al 21.
(P) Girar 3 veces así (sentido de las agujas del reloj) es igual que girar una vez así (90º en el sentido contrario de las agujas del reloj).
(J) No. Ahí, solo giras 90º. Si giras así (sentido contrario) se te viene al sitio del 21.
(P) Girar 3 veces así 90º es lo mismo que girar una vez 90º en sentido contrario ¿no?
(J) No, no es lo mismo. Porque si giras aquí se viene al sitio del 21. Si giramos 3 veces así se te viene al 97. ¿O no? Al 71, si giramos 3 veces así. El 3, si giramos 3 veces (Julia efectúa el giro) una, dos y tres. Se nos sitúa en el 71. Y si giramos una vez para acá, ... se nos sitúa... Es verdad. Qué fallo!
(J) Es que lo que he hecho ha sido lo mismo que aquí. Contar solo tres para abajo.
(P) Entonces tampoco. Con los múltiplos de 3, no hay ninguna transformación que los conserven.
(J) Los posibles, el 2.
(P) ¿Qué le pasaría al 2?
(J) Si hacemos así...
(P) O sea, con la reflexión horizontal, los rojos pasan a los rojos.
(J) Y aquí.
(P) Si giramos 90º.
(J) El 2 se viene al 10.
(P) ¿El 2 se viene al 10?
(J) Al 20. El 4 al 40, el 6 al 60.
(P) Entonces ¿Con un giro de 90º se cumple?
(J) Sí.
(P) Hemos probado solo con algunos. Mira otro, por ejemplo el 32.
(J) Ah, no. Da el 17.
(P) ¿Y de 180º?
(J) También.
(P) ¿El 2 dónde iría?
(J) Ah, no. Se iría al 99.
(P) ¿Y de 270º?
(J) Tampoco. Se vendría al 81.
(P) Y con la reflexión vertical. El 2 pasaría...
(J) Al 9.
(P) Tampoco ¿no? O sea que los múltiplos de 2 se conservan mediante una reflexión horizontal.
(J) Sí.
(P) ¿Hay alguno más? Los de 4.
(J) No. En vertical, no. El 4 pasa al 7.
(P) En horizontal, el 4 pasaría al ...

(J) Al 64. Ese sí.
(P) No. El 4 pasaría al ...
(J) Al 94.
(P) Giros. El 4 pasaría...
(J) Al 40.
(P) ¿Y el 8?.
(J) Al 80.
(P) ¿El 16?
(J) ¿Al 48 ó al 38?
(P) Vamos a hacerlo. (Julia lo efectúa con papel vegetal).
(J) Pues al 59. Ninguno (lo hemos acertado).
(P) ¿Y el giro de 180º?
(J) No. El 16 pasaría al 85.
(P) Con los múltiplos de 5.
(J) En horizontal. En vertical, no.
(P) Y con los giros tampoco. no? El 15 a cuál iría?
(J) El 15 iría al 49.
(P) ¿Y los giros de 180º?
(J) El 5 iría al 95, y el 10 al 91.
(P) El 5 vendría al 96.
(J) Todo lo que sean columnas para abajo, como los pares y los cincos, sí lo hacen en horizontal.
(P) Ya parece que no hay ninguno más ¿no?
(J) El 7, no.
(P) Pasamos a otra actividad. Vamos con los múltiplos de 7. Hemos visto que van en diagonales. Y si unimos estas diagonales así, qué polígono se forma? (el profesor señala las diagonales en ambas direcciones).
(J) Cuadrado, rectángulo ...
(P) ¿Si unimos esta diagonal con ésta y ésta con ésta (diagonales paralelas)?
(J) Un cuadrado.
(P) ¿Un cuadrado? ¿Y por qué tiene que ser cuadrado?
(J) Ah, no. Estas no son... ésta y ésta no son paralelas ¿no?
(P) Esta y ésta son paralelas y ésta con ésta también.
(J) Entonces sí se formaría un cuadrado.
(P) Bueno, une: 7, 14, 28 y 35, por ejemplo.
(J) Bueno, es que no me sé muy los nombres de las figuras, nada más que la del cuadrado y el rectángulo.
(P) Se trata de explorar un poco los polígonos, con este pretexto. Lo que sí te ha salido han sido 4 lados ¿no?
(J) Hasta ahí llego.
(P) ¿Y esa figura, cuál sería?
(J) Un rectángulo. (dibujo A de la Fig. A4.3-3)
(P) ¿Por qué un rectángulo?
(J) Son paralelos dos a dos.
(P) ¿Esta mesa sería un rectángulo? Porque son paralelos dos a dos y por alguna cosa más.

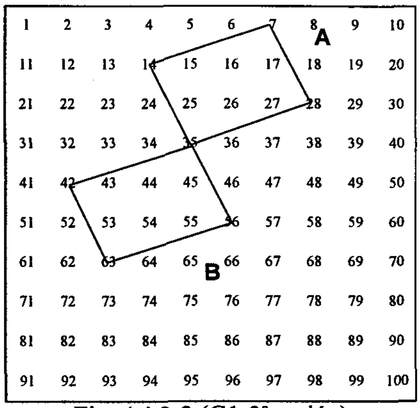


Fig. A4.3-3 (G1-3ª sesión)

(J) Forman ángulos de 90º.
(P) ¿Esos ángulos serían de 90º? (el profesor señala el dibujo A de la Fig. A4.3-3)

(J) No.
(P) Se ve bastante claro, pero ¿Me lo podrías argumentar?
(J) Jolín, eso ya es demasiado!
(P) Pinta esto mismo aquí, en el geoplano.
(J) (Julia dibuja el cuadrilátero ACFD de la figura A4.3-4).
(P) Si te pido que me convenzas de que eso no es un rectángulo...
(J) A mí es que me parece que esos ángulos (CAD y ADF) son rectos.
(P) ¿Y cómo podríamos estar seguros de que son rectos? Porque lo que sí sabemos es que éste y éste son perpendiculares en el geoplano. (El profesor señala fila y columna donde está el punto A).

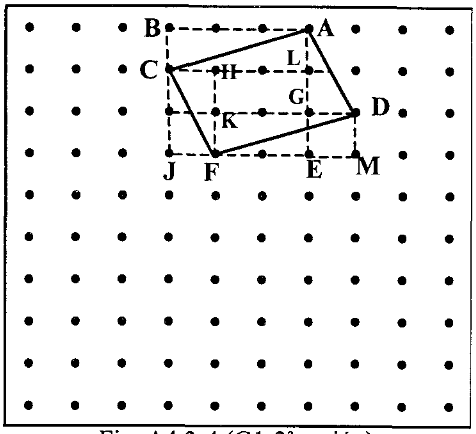


Fig. A4.3-4 (G1-3ª sesión)

(P) Una fila con una columna son perpendiculares ¿no? ¿Cómo sabemos si este ángulo es 90º?
(J) Pues yo qué sé!
(P) ¿Habría alguna manera de verlo? Vamos a retintarlo. Lo que sí es seguro que es un ángulo recto ¿Qué es?
(J) Este (BAE).
(P) Este ángulo vale 90º. ¿Y éste? (CAD).
(J) Hombre, se supone estos son iguales (BAC = EAD) y no son lo mismo.
(P) No son lo mismo a simple vista, pero como la vista engaña. ¿Cómo lo podríamos averiguar? Está claro que si no son iguales, entonces éste (CAD) no es 90º ¿No?
(J) Sí.
(P) Has visto como sí sabes? ¿Cuál te parece más grande de los dos?
(J) Este (DAE). Está claro.
(P) ¿A ver por qué?
(J) ¿Que por qué me parece?
(P) No. Que te lo parece está claro. Hay que ver por qué lo es.
(J) Se supone que no tenemos transportador, ni nada más.
(P) No. Solo esto (el geoplano).
(J) Pues no lo sé. (silencio).
(P) Tomamos este punto (A) y bajamos, 2 y a la derecha 1 (llegamos a D). Y aquí hacemos lo mismo (desde A) uno y dos y abajo uno. No se forma el mismo ángulo. ¿No?
(J) Es verdad.
(P) Este ángulo (BAC) sería más pequeño que éste (DAE). Es una manera de verlo. Lo podemos hacer también utilizando trigonometría: la tangente de éste (DAE) es cateto opuesto partido por cateto contiguo, y sale 1/2 y en el otro es 1/3.
(P) Entonces ese polígono no es un rectángulo. Tiene los lados paralelos dos a dos, y ¿Cómo se llama?
(J) El paralelogramo ¿no?
(P) Eso es. Un paralelogramo.. Si los cuatro lados fueran iguales, ese paralelogramo ¿Cómo se llamaría?
(J) ¿Los 4 lados iguales? Pues un cuadrado.
(P) Si tuviera los ángulos rectos, sí.
(J) Ah, que no los tiene. Pues el rombo.

(P) Eso es. ¿Esto (ADFC) sería un rombo?
(J) Muy amorfo, pero... No. Tiene que tener los cuatro lados iguales.
(P) Este con éste si son iguales (AD=CF), y éste con éste también (CA=FD) porque paralelas entre paralelas son iguales entre sí, pero éste y éste (AC y AD) no son iguales ¿no? ¿Cómo podríamos comprobar que no son iguales?
(J) Pues también contando los puntos. Es lo mismo ¿no?
(P) De acuerdo.
(J) Este sería 3 puntos (Julia señala 3 puntos sobre AC), ...
(P) Pero 3 unidades sería esto (El profesor señala BA), y no esto (CA).
(J) Y éste serían 2 para abajo (Julia señala AD).
(P) Sí pero sería esto (AG)
(J) Sí pero ya se demuestra que es más chico que el otro.
(P) ¿Qué es esto (CA) en este triángulo?
(J) La hipotenusa.
(P) ¿Y AD quién es?
(J) La hipotenusa de aquí (del triángulo ADG). Este es menor porque el triángulo es más chico.
(P) Entonces, sería un paralelogramo ¿Vale? Vamos a calcular el área de ese paralelogramo.
(J) Jolines! Me tengo que estudiar todas las fórmulas.
(P) Aquí no hay fórmulas. ¿Qué fórmulas?
(J) No. Es que ya me estoy agobiando de ver todo lo que me tengo que estudiar.
(P) Esto te sirve de repaso. ¿Cómo calcularías el área de ese paralelogramo? Pero no pasa nada si no te acuerdas de las fórmulas. Sabes las áreas del cuadrado, rectángulo... Con eso tienes. Bueno, ¿Cuál es la fórmula del área del paralelogramo?
(J) No me acuerdo. Es lo malo.
(P) ¿Y la del rectángulo?
(J) Base por altura.
(P) ¿Y la del paralelogramo?
(J) Base por altura, partido por... No. Esa es la del triángulo.
(P) Inventa un método para calcularla.
(J) Sería base por altura también.
(P) Ah! ¿Has visto como sí te sale, chiquilla? ¿Cómo has llegado a esa conclusión?
(J) No, es que me he confundido con la del trapecio. Y no me sonaba lo de la base mayor y la base menor.
(P) ¿Por qué aquí también es base por altura? (El profesor dibuja el rectángulo de la figura A4.3-5)
(P) Aquí tenemos un rectángulo, cuya área es base por altura. ¿Qué hay que hacer con esto para que sea un paralelogramo no rectángulo?

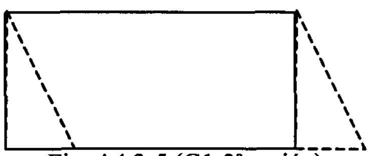


Fig. A4.3-5 (G1-3ª sesión)

(J) Pues esto. (Julia dibuja los lados con trazo punteado de la figura A4.3-5).
(J) Se supone que lo que le quitas de aquí es lo que le añades a este lado.
(P) Claro, ¿Y la altura?
(J) Es la misma.
(P) Así, el área del paralelogramo es base por altura, sea rectángulo o no. Ya hemos aprendido otra cosa.
(J) Podemos calcular el área contando los cuadrillos que se forman en él.
(P) Pues venga.
(J) ¿Tengo que hacer cuadros?
(P) Cuenta cuadros. Ya tenemos, 2.

(J) (Julia señala los dos cuadrados del centro de LGKH de la figura A4.3-4)
(P) ¿Y ahora qué? Dos y pico! Bueno algo hemos hecho.
(J) Haciendo un cosido, así... Teniendo en cuenta que nos falta este triangulillo... (Julia se refiere a los dos triángulos que se forman en CHFJ de la figura A4.3-4). Puede ser ese. No. Es más chico.
(P) ¿Y si calcamos el triangulillo y le damos la vuelta?
(J) ¿El paralelogramo es simétrico?
(P) ¿Respecto a qué?
(J) Respecto a algún eje. No sé. Yo pregunto.
(P) Es que aquí el que pregunta soy yo, ...je, je!
(J) ¿No podría ser por un momento al contrario...?
(P) Todo paralelogramo no tiene por qué ser simétrico. Algunos sí lo son, por ejemplo el rombo, pero ese concretamente, con respecto a un eje, no.
(J) Es que podría ser igual que éste. (Julia va buscando completar cuadrados de área uno. Toma papel de calco y comprueba que los triángulos que se forman en CHFJ de la figura A4.3-4 son iguales).
(J) Pues es lo mismo. Pues ya tenemos dos cuadrados más.
(P) ¿Y si yo no me quedo tranquilo? ¿Por qué son iguales?
(J) Porque éste y éste son iguales. (CHF = CJF)
(P) Ah, ¿Y por qué?
(J) Porque es como si le hiciéramos una diagonal a este rectángulo (CHFJ). Y le quitamos el mismo trozo.
(P) Claro.
(J) Entonces lo mismo pasaría con éste lado (FD).
(P) Teníamos dos unidades cuadradas. ¿Cómo seguimos contando?
(J) Pues por la misma razón que el otro. Se supone que ésta es la diagonal (FD) y ése es igual que éste y éste igual que éste (Julia se refiere a los triángulos FDM =FKD; y CLA = CBA)
(P) ¿Y cuánto vale eso?
(J) No lo sé.
(P) Sí lo sabes.
(J) Las tres unidades.
(P) Eso sería todo el rectángulo (KFDM)
(J) La mitad.
(P) Entonces en total tenemos...
(J) Siete.
(P) ¿Has visto como sí sabías? Es que te haces de rogar. El área del paralelogramo es 7 y hemos unido múltiplos de 7. Es mucha casualidad.
(J) ¿No sería más fácil, en lugar de tanta tontería de hacer cuadricos...
(P) Muchas gracias...
(J) No, si lo decía por mí, que me acabo de dar cuenta. Si lo trasladamos, si lo hacemos así como un girillo para ponerlo más o menos recto (Julia se refiere a que los lados del cuadrilátero que coincidan con la malla del geoplano).
(P) Pero ten en cuenta que los ángulos no son de 90°.
(J) Es verdad. Esta distancia no es igual que ésta.
(P) Esto es la hipotenusa ¿no?
(J) Ah, sí.

(P) Te decía antes que qué casualidad que el área ha salido 7 y el paralelogramo lo hemos formado uniendo múltiplos de 7. "Es mu bonico" ¿no?
(J) Nos podíamos haber dado cuenta antes ¿no?
(P) No, mujer. Cómo íbamos a sospechar que uniendo múltiplos de 7 el área va a ser 7. Eso es algo que acabas de descubrir y algún día nos darán un premio por eso! Pero claro porque hagamos uno, no podemos generalizar. ¿Y si unimos otros cuatro múltiplos de 7 a ver si sale otro paralelogramo de área 7?
(J) (Julia realiza el dibujo B de la figura A4.3-3). Sale igual.

Cuarta sesión. Divisibilidad y geoplano (II)

Julia recibe el mismo material que los componentes de G3, y también realizó previamente actividades para averiguar la fórmula de Pick.

Transcripción

(P) Se trata ahora de unir múltiplos consecutivos de 7 y ver qué polígonos se forman y calcular su área. Por ejemplo en esta figura (dibujos A y B de la Fig. A4.3-6) tenemos un triángulo uniendo 7, 14, 21 y 28, y un paralelogramo uniendo éstos: 35, 42, 56 y 49. Vamos a seguir completando la tabla A4.3-5 (que da lugar a la tabla G1-4.1a).

Con 3 puntos (3 múltiplos consecutivos de 7) ¿Podríamos formar alguna figura?

(J) 7, 14, 21. Nos da un segmento.

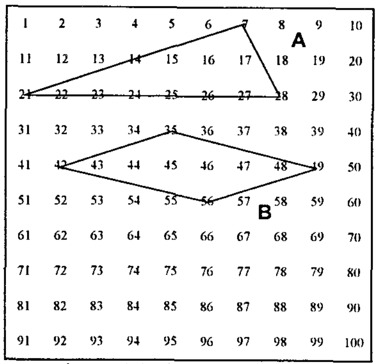


Fig. A4.3-6 (G1-3ª sesión)

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3				
4	Triángulo	7, 14, 21, 28	7	G3-4.1A
4	Paralelogramo	35, 42, 49, 56	7	G3-4.1B

Tabla A4.3-5 (G1-3ª sesión)

(P) Qué área tiene?
(J) Cero.
(P) Bueno dejamos ese, que no es un polígono ¿no?
(P) Seguimos con 3 puntos (cuarta fila de la tabla A4.3-5).
(J) Este triángulo (14, 21, 28) (dibujo A de la Fig. A4.3-7)
(P) ¿Qué área tiene?
(J) Pues sería uno, dos, ...nueve; entre dos, 4.5. Sería 3.5.
(P) Bien. ¿Algún otro triángulo con 3 puntos?
(J) Este. (dibujo B de la Fig. A4.3-7) Pero parece el mismo (Julia se refiere al polígono A de la figura A4.3-7).

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3	Segmento	7, 14, 21	0	
	Triángulo	14, 21, 28	3,5	G1-4.2A
4	triángulo	7,14, 21, 28	7	G1-4.1A
	Paralelogramo	35, 42, 49, 56	7	G1-4.1B
5	Trapecio	7, 14, 21, 28, 35	10,5	G1-4.3 - 4
	Pentágono cóncavo	21,28,35,42,49	10,5	G1-.4.5
6	Paralelogramo	7,21,14,28,35,42	14	G1-4.6

Tabla A4.3-6 (G1-3ª sesión)

(P) ¿Algún otro triángulo?
(J) No, porque tienen que ser consecutivos. Siempre va a salir igual.
(P) Veamos con 5 puntos.
(J) Sale un trapecio (Fig. A4.3-8) Y de área...10.5
(P) ¿Más con 5 puntos?
(J) Sí, éste. (Fig. A4.3-9) pero sale igual. Espera, ¿Este puede ser? (Fig. A4.3-10).
(P) Claro. Solo se piden que sean polígonos. Pueden ser cóncavos. ¿Qué polígono será ese?
(J) No sé.
(P) Un pentágono cóncavo. Además tiene dos lados paralelos ¿no?

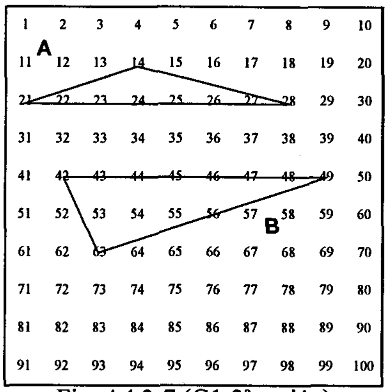


Fig. A4.3-7 (G1-3ª sesión)

(J) Sí. ¿Hacemos con 6? Sale un rectángulo. (Fig. A4.3-11)
(P) Vamos a ver. ¿Son los cuatro ángulos rectos?
(J) A mí me parece que sí.
(P) Convénceme!
(J) Eso ya es más difícil.
(P) Hemos visto antes algo parecido ¿no?
(J) Ah. Este ángulo es 90° (Julia indica el ángulo formado por 3, 7, 37).
(P) ¿Cómo podemos saber si este ángulo (el formado por 21, 7, 28) es recto?
(J) Si éste (37, 7, 28) y éste (3, 7, 14) fueran iguales, sí sería ángulo recto ¿no?

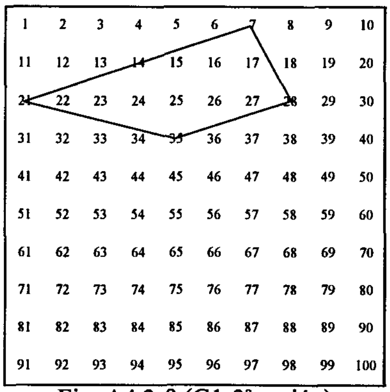


Fig. A4.3-8 (G1-3ª sesión)

(P) ¿Y tú qué crees?
(J) Pues que no. Porque éste (37, 7, 28) baja 2 y 1 a la derecha y el otro (3, 7, 14) avanza 3 y baja 1.
(P) Luego no es un rectángulo. Es un paralelogramo ¿no?
(J) Claro.
(P) ¿Ves alguna regularidad en la tabla?
(J) Yo no veo nada. Bueno, sí. Si hay los mismos puntos, el área es igual.

(P) ¿Aunque tengan distinta forma?
(J) Sí. No depende de la forma.
Y que van de 3.5 en 3.5.
(P) ¿Podemos ver alguna fórmula para el área? (silencio).
(P) O si quieres podemos pasar a unir múltiplos de 4 ó de 5.
(J) Vamos a ello.
(P) Vamos a unir múltiplos consecutivos de 4 (Tabla A4.3-7)

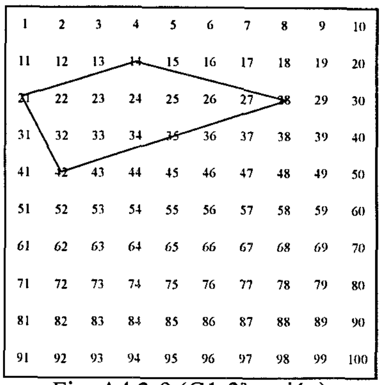


Fig. A4.3-9 (G1-3ª sesión)

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3	Segmento	8, 16, 20	0	
	Triángulo	4, 8, 12	2	G3-4.7
	Triángulo	8, 12, 16	2	G3-4.8
4	Paralelogramo	4, 8, 12, 16	4	G3-4.9
	Triángulo	12, 16, 20, 24	4	G3-4.10
	2 triángulos ó cuadrilátero cóncavo	16, 20, 24, 28	4	G3-4.11
5	2 triángulos ó pentágono cóncavo	16, 20, 24, 28, 32	4.5 5 4	G3-4.12
	Trapecio	4, 8, 12, 16, 20	6	G3-4.13
	Trapecio	12, 16, 20, 24, 28	6	G3-4.14A
	Trapecio	36, 40, 44, 48, 52	6	G3-4.14B
6	Paralelogramo	16, 20, 24, 28, 32, 36	8	G3-4.15

Tabla A4.3-7 (G1-3ª sesión)

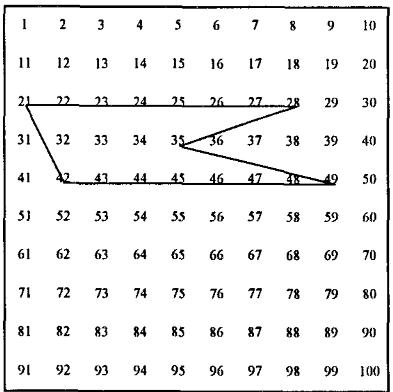


Fig. A4.3-10 (G1-3ª sesión)

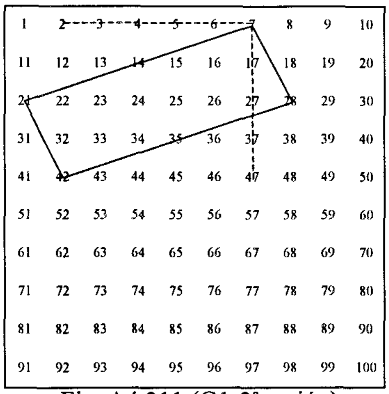


Fig. A4.311 (G1-3ª sesión)

(P) Vamos a unir 3 múltiplos consecutivos de 4 (4, 8, 12). ¿Qué polígono ha salido? (Fig. A4.3-12).
(J) Un triángulo.
(P) ¿Y el área?
(J) Uno, dos, tres, entre dos...(Julia cuenta solo los vértices).
(P) Espera. Los que están en la frontera también se cuentan.

(J) Seis entre dos a 3. Area, dos.
(P) Prueba con otra figura uniendo 3 múltiplos consecutivos de 4. ¿Siempre va a salir un triángulo?
(J) Sale otro triángulo. 8, 12, 16, (Fig. A4.3-13); o sale un segmento. También sale un segmento. 8, 16 y 24.
(P) ¿El área del triángulo?
(J) Lo mismo que ese: dos.
(P) ¿Lo puedes hacer sin utilizar la fórmula de Pick?
(J) Jolín, como no sea como lo hicimos la otra vez... Con puntos ¿no?
(P) Lo de contar puntos es la fórmula de Pick. De otra manera. Lo que se te ocurra.

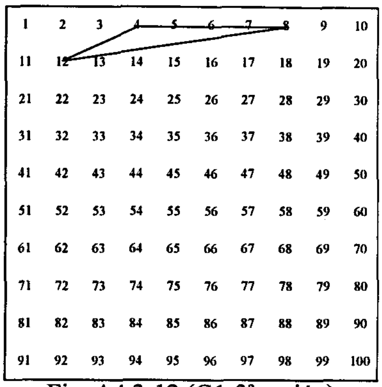


Fig. A4.3-12 (G1-3ª sesión)

(J) Pues no se me ocurre otra. Si no es utilizando fórmulas...
(P) Mujer, alguna fórmula habrá que utilizar.
(J) La del triángulo.
(P) Pues ¿Cuál es el área del triángulo?
(J) Base... 5.
(P) 1, 2, 3 y 4.
(J) Pues yo he contado 5.
(P) ¿Base?...
(J) Por la altura que es una. 4 por 1 que es 4, y partido por dos. Es que no sabía que tampoco podía, utilizar la fórmula esa.
(P) Utilizamos todo lo que sepamos. ¿Uniendo 3 puntos podemos conseguir otra cosa?

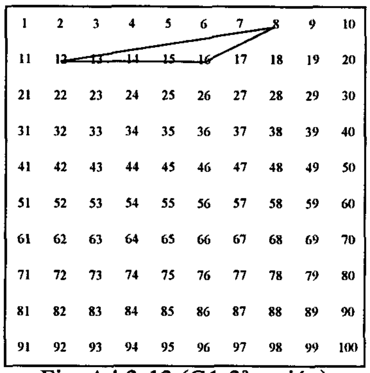


Fig. A4.3-13 (G1-3ª sesión)

(J) Siempre sale triángulo.
(P) Vamos a unir 4.
(J) 4, 8, 12, 16. Un paralelogramo, de área 4 (A4.3-14).
(J) 12, 16, 20, 24. Un triángulo de área 4. (Fig. A4.3-15)
(P) ¿Alguna otra figura uniendo 4 puntos?
(J) No. Me sale un triángulo... Me va a salir una cosa muy rara. 16, 20, 24 y 28. (Fig. A4.3-16).
(P) ¿Qué te ha salido?
(J) Yo qué sé! Una cosa muy rara. Dos triángulos...
(P) O un cuadrilátero cuyos lados se cortan. ¿Y el área?

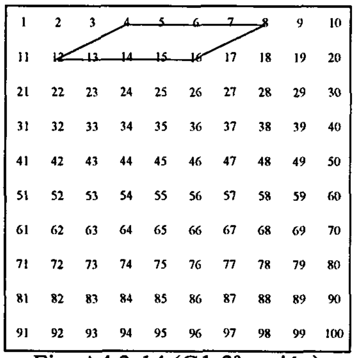


Fig. A4.3-14 (G1-3ª sesión)

(J) Cuatro, sale.
(P) Esto es la primera vez que sale.
(J) ¿Ah, sí?
(P) Te lo has inventado tú.
(P) ¿Seguro que sale 4? ¿Cuántos puntos interiores hay?
(J) Ah, ninguno. Sale uno!
(P) Bueno vamos a hacer otro ¿Uniendo 4 puntos saldrá alguna cosa más?
(J) No.
(P) Pasamos a 5 puntos.
(J) Ya me he ido otra vez al difícil.
(P) No te preocupes.

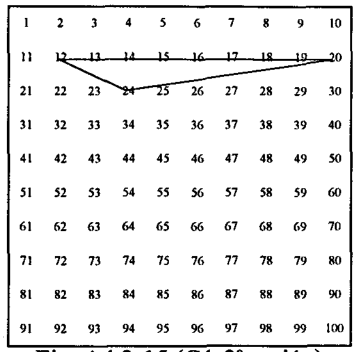


Fig. A4.3-15 (G1-3ª sesión)

(J) 16, 20, 24, 28, 32 (Fig. A4.3-17)
(P) Es lo que me decías el otro día, que siempre te ibas a lo más difícil ¿no?

(J) Siempre.
(P) ¿Qué polígono es?
(J) Pues como no sea como uno de estos (Julia se refiere al polígono anterior).
(P) ¿Un polígono cóncavo? Bueno cóncavo y algo más. ¿Y el área?
(J) 4.5. Los de fuera partido por dos, me sale 4.5. Ah, no 3,5 me sale. 4.5 menos uno. 11 entre dos a 5.5; menos uno, a 4.5.
(P) ¿Podemos hacerlo por otro procedimiento? Es que el 24 pertenece a los dos triángulos.
(J) ¿Hacemos uno por un lado, otro por el otro y luego los sumamos?

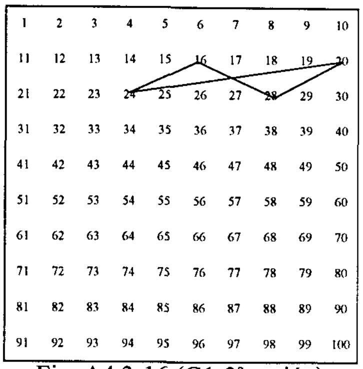


Fig. A4.3-16 (G1-3ª sesión)

(P) Sí. Podemos considerarlo como dos triángulos o bien como un polígono cóncavo un poco especial.
Este triángulo sería 1, 2, 3, 4, 5, 6 entre dos, 3; menos uno, 2. Aquí sale algo curioso.
(J) Es que entonces habría que contarlo dos veces (Julia se refiere al punto doble 24). Se supone que pasa dos veces. Si lo contamos dos veces sería, 12 entre dos, menos uno; 5. Vamos a ver. Por la otra fórmula (de Pick) sale... 1, 2, ... 11 y 12.
Seis, menos uno; 5. Contándolo dos veces sale, 5. Y contándolo una vez saldría 4.5. Y de la otra manera (contando como dos triángulos) sale 4.

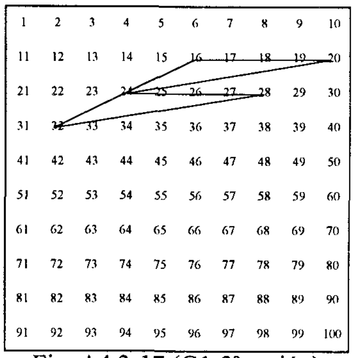


Fig. A4.3-17 (G1-3ª sesión)

(P) Ahora el problema es que la suma de las áreas de los dos triángulos debería dar igual que la del polígono, por la fórmula de Pick.
(J) Entonces lo deberíamos contar dos veces.
(P) El área, está claro que tiene que ser 4. Dos y dos. Y por la fórmula de Pick, ...
(J) Falta este triangulillo (20, 24, 28) que sería 2 y tendríamos el 6.
(P) La fórmula también es válida para polígonos cóncavos. (silencio).
Sí, espera. Lo que creo que pasa es que la fórmula no es válida para polígonos con puntos dobles, y éste (el 24) es un punto doble. Lo miraré y te lo digo el próximo día.
(J) La próxima vez me iré a figuras más sencillas.
(P) Vamos a probar con otros 5 puntos a ver lo que sale.
(J) ¿A la fuerza tengo que unir el 20 con el 24, que va seguido, o puedo pasarme...?

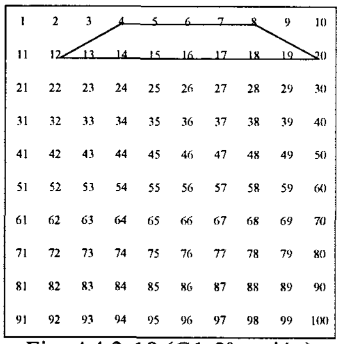


Fig. A4.3-18 (G1-3ª sesión)

(P) No. Tú eliges 5 puntos consecutivos y con ellos formas un polígono. Elige primero los puntos y luego haz el dibujo.
(J) 4, 8, 12, 16 y 20 (Fig. A4.3-18) Un trapecio. Me sale 6 de área. ¿Por qué sale 6 ahora?
(P) Está bien. El raro ha sido éste (Fig. A4.3-17). Habrá que estudiarlo como caso clínico. Caso clínico en la clínica. ¿Hacemos otro de 5?
(J) Vamos.
(P) ¿Son consecutivos?
(J) No, lo he hecho de 6. (Fig. A4.3-20)
(J) 12, 16, 20, 24, 28. Otro trapecio, de área 6. (dibujo A de la Fig. A4.3-19). Vamos a ver otro.

(J) 36, 40, 44, 48, 52 (dibujo B de la Fig. A4.3-19) Y no tengo ni idea de lo que es. Tiene 4 lados tiene que ser un paralelogramo ¿no? O eso es solo cuando los lados dos y dos. Todavía no me lo sé.

(P) Por tener 4 lados es un cuadrilátero.

(J) Eso.

(P) Si los lados son paralelos dos a dos será un paralelogramo. ¿Y eso qué es?

(J) Este solo tiene dos lados paralelos. Un trapecio.

(P) ¿Y el área?

(J) Tres. Ah, no, que tiene puntos interiores. Seis.

(P) Con 5 puntos sale área 6. Parece que lo confirmamos. Y solo salen trapecios y éste raro ¿no?

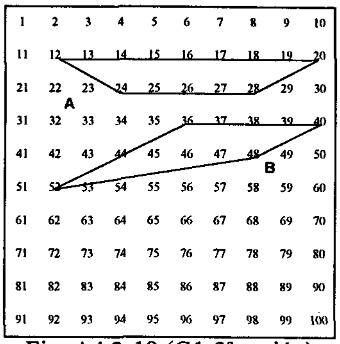


Fig. A4.3-19 (G1-3ª sesión)

(J) Sí.

(P) Vamos a hacer uno de 6 puntos (Fig. A4.3-20) ¿Son consecutivos?

(J) Sí. Un paralelogramo. 16, 20, 32, 36, 24, 28. De área 8.

(P) Con esto podemos ver alguna regularidad.

(J) El área va de 2 en 2.

(P) Y en el anterior iba de 3.5 en 3.5.

(J) Sí.

(P) ¿Se te ocurre alguna fórmula? (silencio).

(P) Estos son múltiplos de 4, y el área aumenta de 2 en 2. Estos son múltiplos de 7 y el área aumenta de 3.5 en 3.5. Si se sigue la regla, aquí, en los múltiplos de 5, de cuánto en cuánto tendría que ir aumentando el área?

(J) Yo qué sé. Es que lo tengo que hacer.

(P) Si son múltiplos de 4 va de 2 en 2, ¿Qué relación tiene 4 con 2?

(J) Que es la mitad. Ah, tendría que ir de 2.5 en 2.5.

(P) Bien, vamos con los múltiplos consecutivos de 5. (Tabla A4.3-8) Con tres.

(J) 5, 10 y 15. Un triángulo. (Fig. A4.3-21) Area, 2.5.

(P) ¿Hacemos otro de 3?

(J) Sale triángulo.

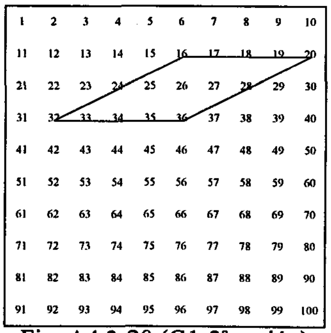


Fig. A4.3-20 (G1-3ª sesión)

Nº de puntos	Polígono	Números que se unen	Area	Dibujo
3	Triángulo	5, 10, 15	2,5	Fig. 16
4	Rectángulo	5, 10, 15, 20	5	Fig. 17
5	Trapecio	5, 10, 15, 20, 25	7,5	Fig. 18

Tabla A4.3-8 (G1-3ª sesión)

(P) Vamos a hacer uno de 4.

(J) Sale un rectángulo: 5, 10, 15 y 20. (Fig. A4.3-22)

(P) ¿Y de área? ¿Cómo es éste (Fig. A4.3-22) comparado con éste (Fig. A4.3-21)?

(J) El doble. 4.5.

(P) Cinco ¿no?

(J) Es verdad.

(P) El siguiente...

(J) 5, 10, 15, 20, 25 (Fig. A4.3-23) Un trapecio.
(P) ¿El área?
(J) 4.5. Me estoy liando. 4.5 más dos. 4 menos 1, tres. Siete y medio. Sí, va de 2.5 en 2.5.
(P) O sea, el área ¿Cómo aumenta?
(J) Si esto es k, es k/2, ... más...Siempre es 5, ... sería n-2.
(P) Vamos a hacerlo con cada uno de ellos. Con el de 4.
(J) Más (n-2).

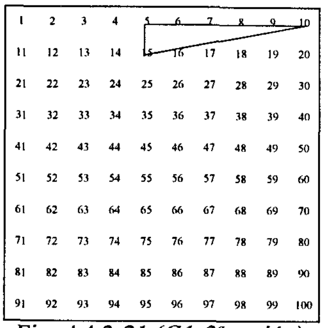


Fig. A4.3-21 (G1-3ª sesión)

Julia escribe $\boxed{A = \frac{k}{2} + (n-2)}$

(P) ¿Así? Vamos a comprobarlo:
Sería igual a 2 + (n-2) = n, y no sale, no?
(J) ¿n es el número de puntos a unir?
(P) Sí. (silencio).
(P) Este 2 está claro ¿no? ¿Cuánto vale (n-2)? Valdrá 1, en este caso, uno por dos, 2.
(J) Sería "por", en lugar de "más".
(P) (El profesor escribe A = 2x(n-2); La fórmula sería...

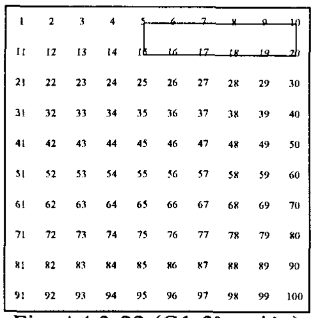


Fig. A4.3-22 (G1-3ª sesión)

(J) Julia escribe $\boxed{A = \frac{4}{2} x(n-2)}$
(P) Vamos a probar con el 5.

(J) 5 entre 2, por (3-2) en este caso. (Julia escribe $\boxed{A = \frac{5}{2} x(n-2)}$
Sí sale.

(P) Para el 7 será $\boxed{A = \frac{7}{2} x(n-2)}$, y la fórmula general será...

(J) k/2 por (n-2). Julia escribe $\boxed{A = \frac{k}{2} x(n-2)}$. El área va de k/2 en k/2.
(P) Bueno, aquí tenemos una fórmula. No ha estado mal, ¿no?. Lo dejamos por hoy, y el próximo día te diré lo del polígono ese raro.

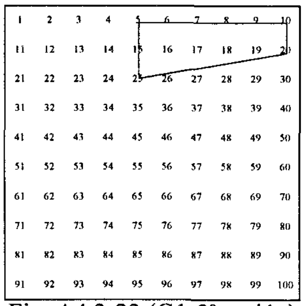


Fig. A4.3-23 (G1-3ª sesión)

Anexo 5.1

Sesiones de trabajo con G3: cadenas y operadores aditivos

Primera sesión: Elementos algebraicos del conjunto de las cadenas con la "operación suma".

Tareas a desarrollar

Tarea 1.1

La figura A5.1-1 es un patrón que, colocado sobre la Tabla-100, realiza la operación "sumar 21". Si lo aplicamos al 12, por ejemplo, obtenemos: $12 + 21 = 33$.

Dibuja, en la misma tabla de la figura 1 otros tres patrones que realicen la misma operación, "sumar 21", aplicados a cualquier número de la tabla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12 ↓	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22 ↓	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32 →	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura A5.1-1 (G3-1ª sesión)

Tarea 1.2

Dibuja en la misma tabla de la figura 1 un patrón que realice la operación "restar 21".

Al conjunto de este tipo de patrones, que tienen una casilla origen y otra final, en forma de "cadena", le llamaremos el conjunto de las Cadenas, y lo notaremos por C.

Tarea 1.3a

A todas las cadenas que realizan la operación "sumar 21" las consideramos equivalentes y a ese conjunto de cadenas lo llamamos operador +21, que notamos como [+21]. De la misma manera notamos [-21] al operador -21, que es el conjunto de todas las cadenas que realizan la operación "restar 21". Al conjunto de todos estos operadores aditivos le denominamos con la letra O. Tenemos de esta manera asociado a cada cadena un operador aditivo, que para la cadena de la Fig.1 es el [+21]

Tratamos ahora de encontrar una ley de composición para las cadenas (que notaremos con *) y otra para los operadores asociados a ellas (que notaremos con $\oplus$).

a-1) Inventa y explica brevemente un criterio (una ley *) válido para la composición de dos cadenas.

a-2) Ilústralo con un ejemplo en la tabla de la figura A5.1-2.

Tarea 1.3b

Indica en qué condiciones esa ley sería una ley de composición interna.

Tarea 1.3c

3-c1) Explica cuál sería la ley (⊕) para los correspondientes operadores asociados. Pon un ejemplo.

3-c2) ¿Sería ésta una ley de composición interna?

Tarea 1.4

¿Existe alguna cadena que sea elemento neutro para la ley *?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. A5.1-2 (G3-1ª sesión)

En caso afirmativo escribe cuál sería e ilústralo con un ejemplo.

Tarea 1.5

¿Existe algún operador que sea elemento neutro para la ley ⊕?

En caso afirmativo escríbelo e ilústralo con un ejemplo.

Tarea 1.6a

En caso afirmativo en las preguntas anteriores. ¿Tendría la cadena de la figura 1 su simétrico respecto de la ley * que has definido? En el caso de ser así, dibújalo y compruébalo.

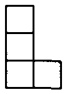
Tarea 1.6b

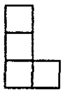
¿Cuál sería el correspondiente simétrico del operador?

Transcripción de la primera sesión

(P) Bueno, ya nos olvidamos de la divisibilidad, aunque nos quedamos con la idea de "patrones". La idea de patrón sigue, aunque ya no utilizamos los "múltiplos de k".
Leed la pregunta 1 a ver si la interpretáis bien.
Aunque cada uno de vosotros tiene una hoja (con tablas cien), vamos a poner una hoja en el centro, que va a ser la del grupo, para que no sean tres ejercicios por separado.

La primera pregunta:

Hay un patrón "sumar 21". Lo entendéis, ¿no? Dibujad otros tres patrones más que sean "sumar 21", distintos de esa , pero que signifiquen lo mismo.

(PD) La figura  ¿Se supone que no se puede girar?
(P) Tu gírala, y si te da que significa "sumar 21"... Sí se puede girar, pero al final tiene que resultar un patrón (cadena) que represente "sumar 21". (silencio)
Tomamos un número. Vamos a pensar, a qué número nos vamos de manera que le sume 21. ¿Por qué caminos puedo ir? Un camino es éste: "bajar 2, derecha1", pero hay otros caminos para ir del 12 al 33, ¿no? O del 17 al 38. ¿De cuántas maneras podemos diseñar una figura que signifique "sumar 21"? Esa es la pregunta.
(PD) De muchas maneras.
(P) Pues escribid, tres o cuatro. Esa es la más simple, la que ha hecho Pedro. (Pedro dibuja la cadena A de la figura A5.1-3, y Domingo la B de la misma figura.

Esta de Domingo es "bajar 1, izquierda 9 y bajar 2". Bajar 1 sería sumar 10, izquierda 9 es restar 9, y luego hemos bajado 2.
(D) Y esta, "derecha 1, bajar 2" (Cadena C de la figura A5.1-3).
(P) El que yo he puesto en la hoja es "bajar 2, derecha 1", y tú has dibujado "derecha 1, bajar 2". ¿Qué propiedad sería esta?
(D) La conmutativa.
(DL) (Dolores dibuja la Cadena D de la figura A5.1-3). Este.

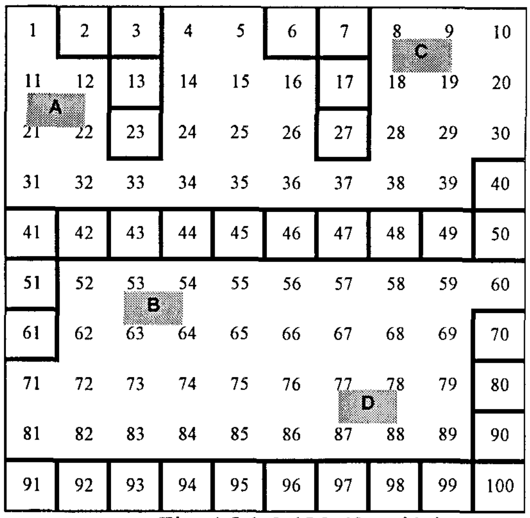
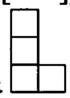


Fig. A5.1-3 (G3-1ª sesión)

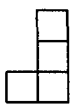
(P) Del 70 pasamos al 91.
(DL) Bajamos 4.
(P) Bajamos uno, dos y tres.
(DL) Tres!
(P) Izquierda 9.
(DL) Sí.
(D) Básicamente sería igual que ésta (cadena B de la figura A5.1-3) pero que ha bajado los tres seguidos.
(PD) Pero esos patrones no se pueden considerar iguales.
(P) Son patrones distintos. Visualmente tienen aspecto distinto.
(PD) Entonces no se pueden aplicar a cualquiera.
(P) ¿A cuáles?
(PD) Solamente se podría aplicar al caso de la L.
(P) Claro, eso es un problemas. Estamos hablando de patrones de esta tabla. No se lo podemos

aplicar a todos, porque en algunos casos se saldría de la tabla. Pero el patrón existe como tal.
(P) Bueno, ya hemos hecho unos cuantos. Todos estos patrones que hemos dibujado, tienen formas distintas, pero representan la misma cosa, que es el operador "sumar 21". Obtenemos por un lado un conjunto de patrones visuales, y por otro un conjunto de operadores.
Podríamos llamar a estos patrones cadenas ¿no?
(Los alumnos asienten)
El operador +21, que lo vamos a representar así, con un corchete ([+21]) es el conjunto de todas las cadenas que signifiquen "sumar 21". Hemos pintado la cadena  y todos esos más ¿no?. Cada uno de ellos es un representante. Tenemos un conjunto de cadenas, que podemos llamar **C**. Nos podemos fijar en las cadenas que tienen un origen y un final bien determinado. Aquí en este caso (Fig. 1) el origen es 12 y el final 33. Y el conjunto de operadores, que es lo que representan las cadenas desde el punto de vista aritmético. Así que tenemos un significado geométrico, que es la forma que tiene esa figura y un significado aritmético.

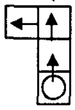
Entonces, por ejemplo, el operador [+21] al 8 lo transforma en el 29. Si lo aplicamos al 3 pasa al 24, y si lo aplicamos al 7 pasa al 28.
El profesor escribe:

[+21]
$8 \longrightarrow 29$
$3 \longrightarrow 24$
$7 \longrightarrow 28$

Entonces el operador [+21] ¿Cómo se puede considerar?
(D) Como una aplicación.
(P) Claro, a x lo transforma en ...
(D) En x+21.
(P) (El profesor escribe $x \rightarrow x+21$)
Entonces, dentro de lo que son las funciones y las aplicaciones ¿Qué papel desempeñarían estos números de la tabla?
(D) Como conjunto.
(P) ¿Qué conjunto?
(PD) Sería el origen.
(P) El conjunto origen, o el dominio. Los valores que puede tomar la x. Desde 1 a 100. Si nos limitamos a esta tabla.

En la **segunda pregunta** hay que dibujar un patrón que signifique "restar 21". Hay que usar un criterio que sea coherente.
(PD) Depende del inicio.
(Domingo dibuja la figura  uniendo el 14 con el 33).
(P) Tú has dibujado uno que es "bajar 2, y en lugar de "derecha 1" has hecho izquierda 1", ¿Y

ese patrón cuál es?
(D) Ah!, eso es verdad.
(P) El patrón que has dibujado, ¿Qué representa?
(D) Según, si tomas como origen el 33 sería restar.
(P) Restar ¿Cuánto?
(D) 21.
(PD) Sería 19.
(DL) Este mismo (señala el dibujo de la Fig. A5.1-1), pero tomando como origen el 33.

(Dolores dibuja , tomando el 33 como origen y lo rodea con un círculo. Escribe en esta ocasión las flechas para indicar el sentido del recorrido).

(P) Eso es. El mismo, pero cambia el sentido...
(PD) Cambia el sentido de las flechas.
(P) Pues conociendo el operador [+21] ya sabemos el operador [-21]. Son los mismos pero leyéndolo en sentido contrario.

Entonces ya tenemos dos conjuntos: el de las cadenas y el de los operadores. Pues dentro del conjunto de las cadenas vamos a tratar de definir una ley de composición que llamamos *. (El Profesor escribe (C,*)). Vamos a ver cómo nos inventamos un criterio para componer cadenas de éstas. O sea, si nos dan dos cadenas, cómo las combinamos visualmente para que el resultado sea otra cadena de manera coherente, que signifique una operación aditiva en el conjunto de las cadenas.

Como cada cadena tiene un significado: "sumar 21, sumar 12, restar 8", etc. ¿Cómo componemos cadenas de formas coherente de manera que el significado sea el mismo que antes?. Resumiendo: el resultado de componer dos cadenas tiene que ser otra cadena, y lo que signifique esa nueva cadena debe estar de acuerdo con lo que significaban las dos cadenas primitivas. ¿Se entiende la pregunta?
(DL) Sí.
(P) Me tenéis que decir una ley. "Para componer dos cadenas se hace de la siguiente manera: ... cualquier mecanismo que os inventéis."

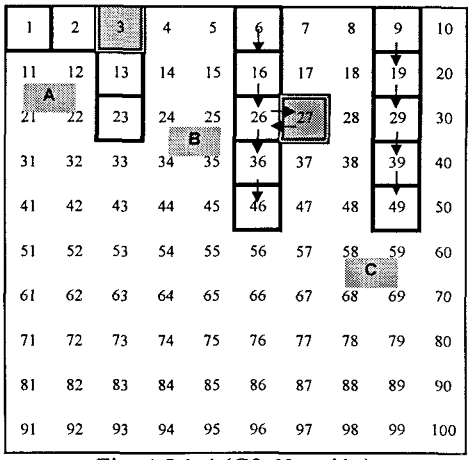


Fig. A5.1-4 (G3-1ª sesión)

(PD) Por ejemplo, sumar 3 con sumar 20. (Pedro dibuja la figura A5.1-4A. La celdilla sombreada y doblemente recuadrada indica que ha superpuesto dos celdillas). (En realidad quiere decir sumar 2, en lugar de 3. La confusión, como en otras ocasiones proviene de que hay que tomar una cadena con 3 casillas para sumar 2)
(P) ¿Cómo lo harías?
(PD) En este caso, tenemos que hacer coincidir el final de la primera cadena con el principio de sumar 20.
(P) Ajá!. Y te saldría...

(PD) Sumar 22, es la cadena resultante.
(P) ¿Qué cadena consideramos como resultante?
(PD) La que tiene el origen de la primera y el final de la segunda.
(P) Y hemos hecho coincidir el final de la primera con el origen de la segunda. Ese sería un criterio ¿no? Para componer dos cadenas hacemos coincidir el origen de la segunda con el final de la primera.
¿Ese criterio funciona siempre? Vamos a hacer por ejemplo con ese criterio "sumar 21 con 19". Se lo aplicáis a cualquier número.
(P) ¿Cuál sería el resultado de ese que has hecho (El profesor le pregunta a Domingo, que hace el dibujo A5.1-4B). ¿Cuál es el origen del primero?
(D) El 6.
(P) ¿Y el final del segundo?
(D) Bueno, del primero el 27, luego al componerlo el 46.
(P) Por eso, con el origen del primero y el final del segundo se forma la cadena resultante ¿no?
(D) Ah, sí, sí.
(P) Escríbela aquí: (Domingo dibuja la figura A5.1-4C).
(P) Bien. ¿Cómo escribiríamos sus correspondientes operadores?
¿Qué operador se obtiene con [+21] ⊕ [+19] ?
(D) El operador [+40].
(P) Entonces ¿Cómo definimos esta "suma" ⊕**?**
(Domingo escribe: [a] ⊕ [b] = [a+b])
(P) Fijaos que utilizamos el símbolo de la "suma con circulillo". Porque no estamos sumando números, sino operadores. Aquí, dentro del corchete sí es un +, porque estamos sumando números.

Bueno, ya tenemos cada conjunto con su operación (C,*) y (O, ⊕), y tratamos de ver si tuviera alguna estructura. En primer lugar veamos si la ley * presenta algunos problemas para que sea ley de composición interna, o siempre es ley de composición interna. ¿En qué condiciones * es una ley de composición interna? Por ejemplo, antes hemos hecho la composición de [+21] y [+19] y el resultado ha sido [+40]. Vamos a buscar un caso que no pueda ocurrir, o bien que presente algún problema. Una ley es de composición interna cuando al componer dos elementos del conjunto el resultado sigue siendo del conjunto ¿no?. Vamos a definir bien entonces el conjunto del que estamos hablando. (silencio)
¿Qué problemas se nos pueden presentar para que no sea ley de composición interna? (silencio). ¿Qué tamaño tiene tienen que tener las cadenas? ¿Cuántas casillas tienen que tener las cadenas? ¿Qué dimensión deben tener como máximo? Por ejemplo si queremos efectuar "sumar 30 con sumar 90" ¿Qué va a pasar?
(D) Que se sale.
(P) Que el resultado se va a salir del dominio ¿no? Entonces, ¿Qué restricciones podemos poner?
(PD) Tomar un representante con el menor número posible de casillas.
(P) Sí, pero si tomamos "sumar 140", el representante menor va a tener 14 casillas. Siempre se va a salir. Una condición, efectivamente va a ser esa: tomar el representante con el menor número de casillas, pero además, ¿Qué habrá que pedir en cuanto al número de casillas?
(DL) Que no se pase de 10.

(P) Pero si uno tiene 10 y otro 5?
(DL) Que la suma no se pase de 10.
(P) Eso es. Que la suma de casillas no sea mayor que 10. Entonces se podrán componer.
Otra pregunta. ¿Hay alguna cadena que desempeñe el papel de elemento neutro con la ley * definida?
(PD) Una cadena que el principio y el final sea el mismo.
(P) ¿Por ejemplo?
(Pedro dibuja la cadena □)
La que está formada por una sola celdilla. Bien. ¿Hay algún otro representante?
(PD) Que tenga el mismo efecto que el elemento neutro, solamente éste.
(P) Tú has dicho que el origen coincida con el final.
(PD) Una cadena cerrada. (Dolores dibuja la figura A5.1-5B)
(P) ¿Habría para cadena una que sea su simétrica? ¿Una cadena que compuesta con otra me dé el neutro?
(PD) Si componemos como hicimos antes, la cadena que se toma como inicio...
(P) Hazlo sobre el papel.

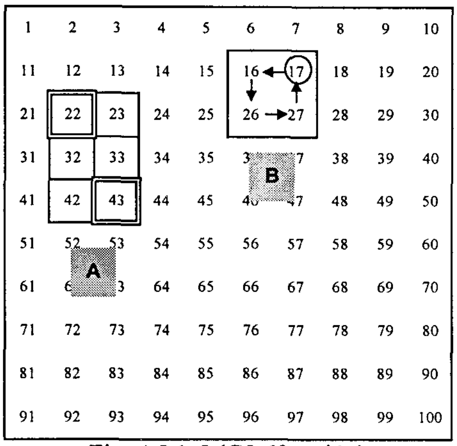
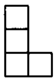
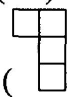


Fig. A5.1-5 (G3-1ª sesión)

(PD) Esta (Pedro dibuja la cadena ) es sumar y ésta () es restar. Quedaría así: (Realiza el dibujo de la figura A5.1-5A)
(P) Lo que te sale es un anillo. Vale. Entonces el simétrico del operador [+21] ¿Cuál va a ser?
(PD) El [-21]...
(P) Que es el que sale invirtiendo el sentido de las flechas.
(P) ¿Se cumpliría la propiedad conmutativa?
(D) Sí.
(P) ¿Cómo ilustraríais con un ejemplo la propiedad conmutativa?
(Domingo realiza el dibujo de la figura A5.1-6A)

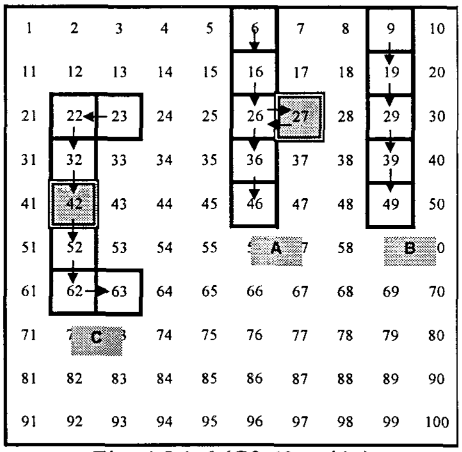


Fig. A5.1-6 (G3-1ª sesión)

Estás haciendo [21] con [19] ¿no? ¿Qué te sale? Escribe a la derecha el resultado (Domingo hace el dibujo de la Fig. A5.1-6B).
(D) Y si lo hacemos de la otra forma (Fig. A5.1-6C) sale igual (Domingo señala la Fig. A5.1-6B).
(P) ¿Y la propiedad asociativa, en qué consistiría? ¿Os acordáis de la propiedad asociativa?
(D) Si sumamos estos dos y luego un tercero es igual que si a esto le sumamos el [21].
(P) Vamos: [19] ⊕ [21] ⊕ [11], por ejemplo.
(Domingo realiza los dibujos de la figura A5.1-7A, B y C).
(P) Escribe lo que dice la propiedad asociativa.
(Domingo escribe: (a*b)*c = a*(b*c)
(P) ¿Dónde está esto en el dibujo? ¿Cuál sería el primer miembro?
(D) El [19] ⊕ [21].
(Domingo señala la Fig. A5.1-7A).
(P) ¿Y al resultado?
(D) Y al resultado se le suma el [11].

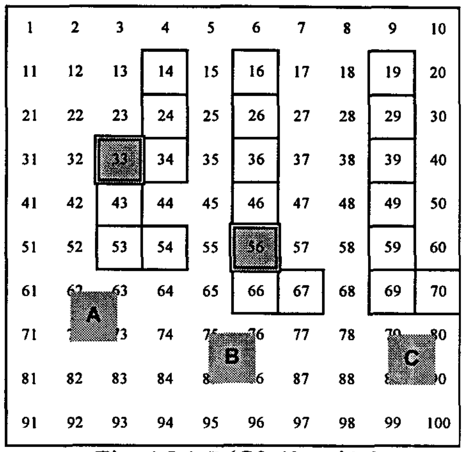


Fig. A5.1-7 (G3-1ª sesión)

(P) Eso es. Y da esto (Fig. A5.1-7C). El segundo miembro lo podemos hacer aparte. Primero hacemos...
(PD) [21] ⊕ [11] (Fig. A5.1-7B) que son [32].
(PD) El [11] es bajar uno derecha uno.
A eso hay que aplicarle el [19].
El primer miembro (19+21) = 40 (Figs. A5.1-7A y B), al que hay que añadir el 11, y nos da el 31 (Fig. A5.1-7C).
En el segundo miembro tenemos 21+11 que es 32 (Fig. A5.1-8A y B) y luego es 32 + 19 (Fig. A5.1-8B) que da igual que antes.
(P) Bien. Entonces el conjunto este de operadores con la ley ⊕ tiene estructura de grupo abeliano sin tener en cuenta los límites de la tabla.
Esto surgió de un problema de cálculo para niños. Con distintos menús, tenían que calcular los importes con la tabla cien, pero solo moviéndose por la tabla. ¿Os acordáis como planteé el problema el primer día?
(D) Sí.
(P) Pues fijaos por donde vamos. Por la estructura de grupo, que habéis dado en segundo curso ¿no?
(PD) y (D) Sí.
(P) Bueno, pues lo dejamos aquí.

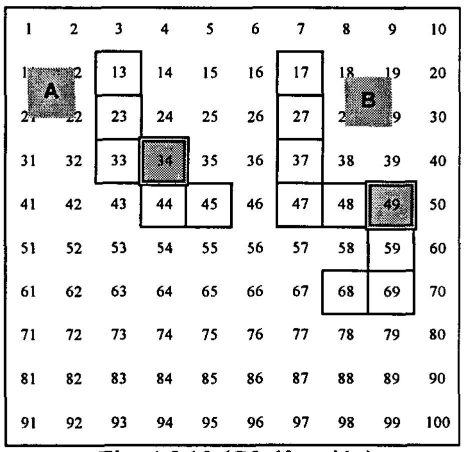


Fig. A5.18 (G3-1ª sesión)

Segunda sesión: Cadenas y transformaciones geométricas.

Tareas de desarrollar

Tarea 2.1a

En la figura A5.1-9 hay dibujada una cadena correspondiente al operador [21], así como los ejes de reflexión, v, y, z ,h.

Somete dicha cadena a una reflexión de eje vertical (v). ¿A qué operador corresponde la cadena obtenida? Podemos decir que:

"El operador [21] mediante la reflexión Rv se transforma en el operador ______"

O más esquemáticamente:

Rv ([21]) = [ ]

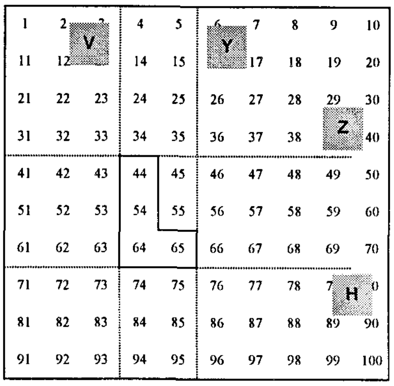


Fig. A5.1-9 (G3-2ª sesión)

Tarea 2.1b

Aplica ahora a ambas cadenas una reflexión de eje horizontal (Rh) ¿Qué operadores obtienes?

Completa el esquema:

R_v ([21]) = [ ]

R_v ( ) = ( )

R_h ([21]) = ( )

R_h ( ) = ( )

Tarea 2.1c

¿Qué isometría deja invariante alguno de los operadores anteriores?

Tarea 2.1d

Completa el esquema siguiente, añadiendo elementos (flechas y operadores) de manera que resuma la situación lo más esquemática y completa posible:

$$[21] \xrightarrow{Rv} [\ ]$$

Tarea 2.2

Realiza también las reflexiones según los ejes p y q paralelos a las diagonales de la tabla (figura A5.1-10), y escribe los resultados completando la tabla A.5.1. Haz en cada casilla un dibujo de la cadena resultante junto con el operador al que representa.

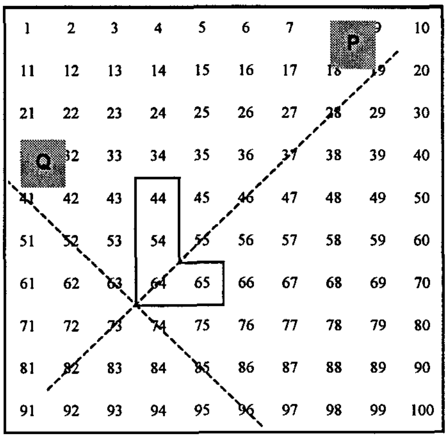


Fig. A5.1-10 (G3-2ª sesión)

cadena/ operador origen	cadena /operador imagen mediante las reflexiones					
	R_v	R_h	R_y	R_z	R_p	R_q
[21]						
[19]						

Tabla A5.1 (G3-2ª sesión)

Tarea 2.3

Rellena la tabla A5.2 para explicar el efecto que producen las reflexiones anteriores sobre las cadenas, especificando cómo afecta la transformación a las unidades y a las decenas. En la última fila de la tabla dibuja una cadena que quede invariante mediante cada una de las reflexiones.

	R_v	R_h	R_p	R_q
Efecto sobre las unidades				
Efecto sobre las decenas				
Tipo de cadena que deja invariante				

Tabla A5.2 (G3-2ª sesión)

Tarea 2.4

Sabemos que cada operador puede venir representado por diversas cadenas. Dada una reflexión de las anteriores y un operador ¿Es siempre el transformado de una cadena de dicho operador otra cadena correspondiente al mismo operador? Justifica la respuesta y señala un ejemplo.

Transcripción de la segunda sesión

(P) En la figura A5.1-9 hay dibujada una cadena que corresponde al operador [+21]. ¿No? Tenemos estos ejes de reflexión, dos verticales (Y y V) y dos horizontales (Z y H). Entonces la primera tarea es "Someter a esta figura, esta cadena que se supone que significa [+21] a la reflexión vertical V. ¿Qué obtendríamos?
(D) Pues el operador [+19]. (contesta inmediatamente).
(P) Lo habéis visto directamente ¿no? ¿Lo habéis visto vosotros también? Podéis escribir en la hoja.
(PD) El 65 va a parar al 62.
(P) La respuesta a la frase ésta "**El operador [21] mediante la reflexión R_v se convierte en el operador ______**"

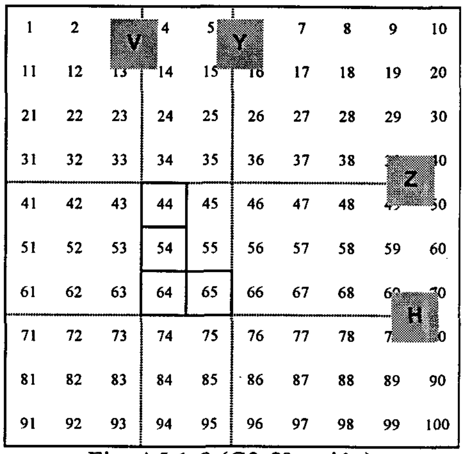


Fig. A5.1-9 (G3-2ª sesión)

(D) [19]
(P) O bien R_v ([+21]) = [ ]
(D) y (DL) [19]
(P) Sería otra forma de expresarlo ¿no? De acuerdo. Pues ahora habría que completar esto (Tarea 1-b) teniendo en cuenta lo anterior. Si para R_v ([+21]) ha salido [19]. Ahora para R_v ([19]) ¿Qué sale?
(D) Pues [21].
(P) ¿Se entiende?
(Los alumnos asienten y completan el esquema de la siguiente forma:

R_v ([21]) = [19] ; R_v ([19]) = [21]

R_h ([21]) = [19]; R_h ([19]) = [21]

(Realizan entre los tres la figura A5.1-11 pero sin colocar las flechas sobre las cadenas)

(P) Ahora ¿Qué movimiento geométrico transforma a un operador en él mismo? ¿Lo deja invariante? De los que tenemos ahí. Si queréis usar papel vegetal, o lo veis a simple vista...?
(PD) Un giro de 180º.
(DL y PD) Un giro de 360º
(P) ¿Valen los dos?
(D) El de 360º sí.
(P) El de 180º ¿Pasa de una cadena a ella misma? Me parece que tenemos que revisar el esquema. No hemos puesto flechas.
(Los alumnos ponen las flechas correspondientes a las

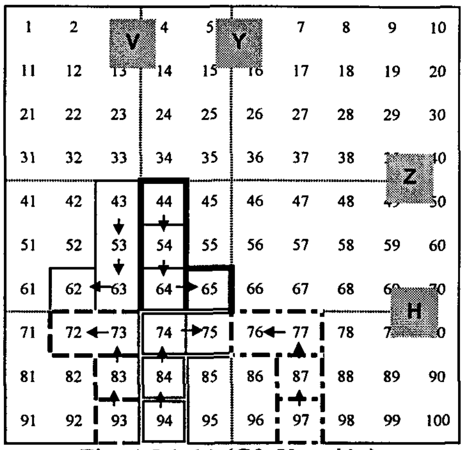


Fig. A5.1-11 (G3-2ª sesión)

cadenas según la figura A5.1-11).
(DL) Este está mal. Es –19.
(PD) Y este 21 es también –21. (Rectifican el esquema, quedando:
R_v ([+21]) = [+19] ; R_v ([+19]) = [+21]

R_h ([+21]) = [-19]; R_h [(-19)] = [(+21)]

(P) ¿Entonces vale el giro de 180º?
(D) No, lo cambia de signo.
(P) A ver cómo interpretáis esto: "hacer un esquema que resuma esta situación". Podéis utilizar flechas. El [21] con R_v pasa a ser [19].
(el profesor dibuja: $[+21] \xrightarrow{R_v} [-19]$
Con este tipo de esquemas.
(D) Pero aquí las flechas podrían ser en el otro sentido.
(P) Bien. Escribid lo que queráis.
(D) (Domingo escribe: $[+21] \overset{R_h}{\leftrightarrow} [-19]$)
(P) Más cosas que podemos escribir ahí. Relaciones ¿eh? Con flechas, paréntesis, números, ... (silencio)
(P) Aprovechando ese esquema, podemos unir el [+21] con [+19] y el [+19] con el [+21]. (El profesor inicia el esquema de la figura A5.1-12 y los alumnos lo completan).
(P) Bueno (Fig. A5.1-10) ahora los ejes ya no son verticales ni horizontales, sino que son paralelos a las dos diagonales de la tabla, la principal y la secundaria. Seguimos con la cadena del [+21]. ¿Cuál sería el reflejado mediante el eje Q y mediante el eje P? Si queréis pintarlo aparte, manipular, ... lo que queráis.

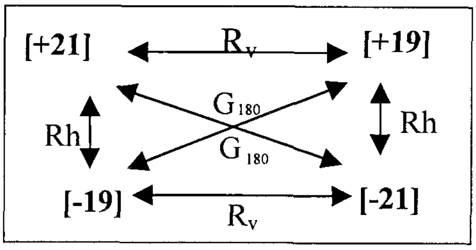


Fig. A5.1-12 (G3-2ª sesión)

(P) Primero lo hacemos respecto de Q.
(PD) Sale [+12] ¿no? (Fig. A5.1-13)
(DL) [+12] también.
(P) ¿Entonces respecto de R_Q sale [+12]?
(D) Sí.
(P) ¿Qué forma tiene?
(D) Derecha 2, bajar 1.
(P) Podemos colocar el circulillo en la casilla inicial para no equivocarnos.
(Los alumnos van rellenando la tabla A5.2-2).
(P) ¿Y eso por qué sale así?
(DL) Lo que está horizontal pasa a vertical y lo vertical a horizontal.
(P) Y sin hacerlo con papel vegetal ¿Cómo podríamos justificarlo, sabiendo que los ejes forman 45ºcon la horizontal?

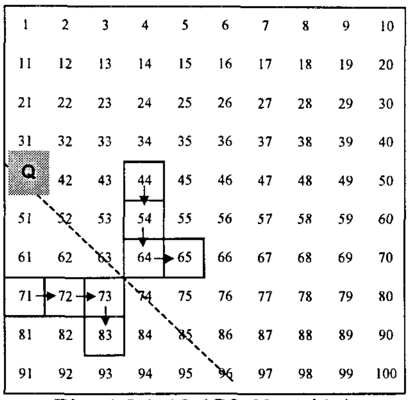


Fig. A5.1-13 (G3-2ª sesión)

(PD) Mirando las distancias ¿no?
(P) ¿Qué distancias?
(PD) La del 44 al eje tiene que ser la misma que la del 71, en este caso (Fig. A5.1-13).

Patrón/ operador origen	Patrón/operador imagen mediante las reflexiones					
	R_v	R_h	R_y	R_z	R_p	R_q
[+21]	[+19]	[-19]	[+19]	[-19]	[-12]	[+12]
[+19]	[+21]	[-21]	[+21]	[-21]	[+8]	[-8]

Tabla A5.3 (G3-2ª sesión)

(P) Que la de la imagen ¿no? ¿Y con respecto a P? ¿Qué forma tiene?
(D) Bajar 1, derecha 2.
(P) Vamos a fijarnos bien en el sentido.
(silencio)
(PD) Izquierda 2, subir 1 (Fig. A5.1-14).
(P) ¿Lo ves Loli?
(DL) Sí.
(P) Entonces vamos a completar la tabla A5.1. El [+21] mediante la reflexión vertical ha pasado al [+19].
Si en lugar de ser respecto del eje v es con respecto el eje Y que es paralelo, ...
(PD) Seguiría dando [+19].
(P) ¿Por qué?
(PD) Lo que hace es una traslación.

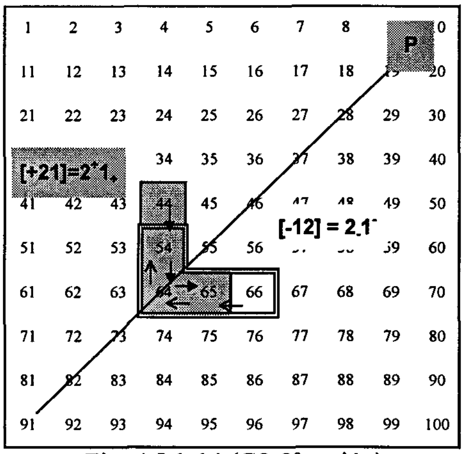


Fig. A5.1-14 (G3-2ª sesión)
Rp([+21]) = [-12]
[+21] = cadena sombreada
[-12] = cadena con doble línea.

(P) Eso es. El producto de dos reflexiones de ejes paralelos es una traslación, y los operadores se conservan mediante traslaciones ¿no? Y con el horizontal pasa igual ¿no? Ahora cogemos el [+19] y lo sometemos a una reflexión vertical y me da éste de aquí, el [+21]. Y respecto de H daría éste [-21] también. Respecto de Y, subir 2, izquierda 1; también [-21]. Respecto de Z también da [-21]. (Fig. A5.1-11) ¿Y respecto de P?
(D) +18. No. [+8]
(P) ¿Qué forma tiene?

(PD) Bajar 1, izquierda 2. (Fig. A5.1-15)
(D) Yo lo que no veo claro es el [+19] respecto a Y. También sería [+21] ¿no?
(P) Exactamente.
(D) Respecto de Q también saldría [+8], izquierda 2, bajar 1.
(PD) Coinciden.
(P) Cuidado con el origen.
(DL) Sería subir 1, derecha 2. (Fig. A5.1-16)
(D) Es el [–8].
(P) Bien. ¿Qué reflexiones modifican al operador [+21]?
(D) Todas.
(P) ¿Cómo modifica R_v al [+21]? Pasa al [+19], pero a ver cómo explicamos esa modificación geométricamente. En el [+21] tenemos 3 casillas para abajo y aquí (el [+19]) también 3 para abajo. En el [+21] una casilla a la derecha y en el [+19] una a la izquierda. ¿Qué ha pasado? Las decenas las ha conservado ¿no? Y En lugar de "derecha 1" hace ahora "izquierda 1".

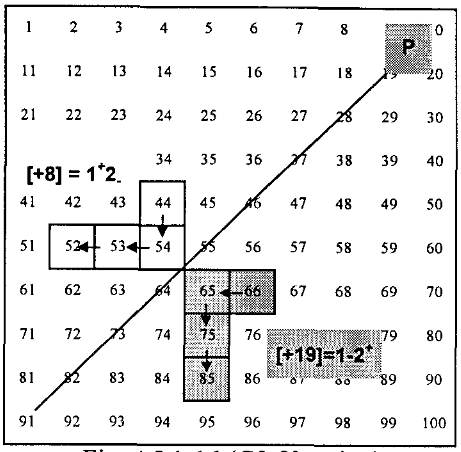
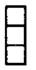


Fig. A5.1-16 (G3-2ª sesión)
Rp([+19]) = [+8]
[+19] = cadena sombreada
[+8] = cadena sin sombrear.

Entonces hay que dibujar una cadena que se conserve mediante R_h. Una cadena que se quede igual mediante la reflexión, que siga siendo la misma.
(D) Un cuadrado.
(P) Bien, al cero lo transforma en el cero. ¿Y otro que no sea el cero?
(D) Cualquiera que sea solo vertical, y para R_h solo horizontal. (Domingo dibuja  y )
(P) ¿Hay alguno que combine decenas y unidades y que lo deje igual?
(PD) Las que tengan las mismas dimensiones en horizontal que en vertical.
(P) Por ejemplo, este: 
(PD) No, ese no. Si los someto a R_h

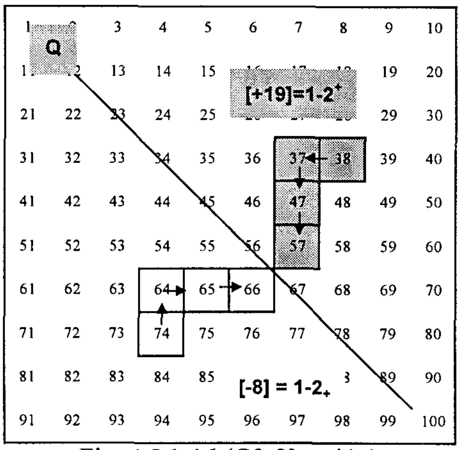
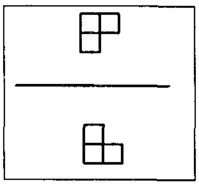
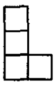
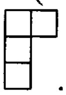


Fig. A5.1-16 (G3-2ª sesión)
Rq([+19]) = [-8]
[+19] = cadena sombreada
[-8] = cadena sin sombrear.

(Pedro dibuja  y señala:
Si ésta (la cadena superior del dibujo) es izquierda 1, bajar 1, sería el [+9] y se transforma en el [-11].
(P) Entonces vamos a completar la tabla 2 (que recogemos en la tabla 4) ¿Qué efecto produce R_v sobre las unidades de una cadena cualquiera? (silencio)

Por ejemplo en este caso el [+21]. ¿Que les ha pasado a las unidades?
(D) Ha pasado de sumar a restar, y de restar a sumar.
(P) Lo que hace es cambiar suma por resta. ¿Y las decenas?
(D) Las deja igual.
(PD) Las conserva.
(P) ¿Y R_h? A las unidades...
(D) Al revés que R_v.
(P) ¿Las conserva? ¿Totalmente?
(PD) Le suma 10.

(P) Por ejemplo, aquí (en el [+21])  bajar 2, derecha 1, y aquí (en la imagen) es "izquierda 1, bajar 2"  . ¿Qué ha pasado?
¿En qué casos conserva las unidades?

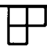
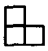
Efecto sobre	R_v	R_h	R_p	R_q
Unidades	Cambia el signo	Se conservan	Cambia unidades por decenas y el signo	cambia unidades por decenas
Decenas	Se conservan	Cambia el signo	Cambia decenas por unidades y el signo	cambia decenas por unidades
Conserva la cadena tipo				

Tabla A5.4

Cuando tenemos algo así  sí se conserva mediante R_h, pero cuando hay combinación de unidades y decenas, como en el [+21] ¿Qué ocurre?
(PD) Conserva las unidades y las cambia de sentido.
(D) Conserva las unidades sin cambiar de sentido.
(PD) Es verdad.
(P) ¿Y las decenas? ¿Qué les pasa con la reflexión horizontal?
(DL) Le cambia el signo.
(P) Las conserva en número ¿no?
(DL) Sí, pero cambia de signo.
(P) ¿Qué hace R_p con las unidades?
(PD) Las unidades no las conserva.
(P) Con el [+21] ¿Qué ha pasado con las unidades y las decenas?
(DL) Que las unidades han pasado a decenas y al revés.
(P) ¿Y R_q?
(D) Igual.

(P) ¿Y el sentido?
(PD) El sentido sí cambia.
(P) ¿En el anterior (R_p) también cambia el sentido?
(PD) Yo creo que no.
(P) En R_p el [+21] ha pasado al [-12] (tabla A5.3). Ha cambiado el 1 por el 2. Vamos a ver. **Bajar** (2 casillas) ha pasado a ser **izquierda** (2 casillas); pero **izquierda** (una casilla) ha pasado a ser **bajar** (una casilla). Esto supone un cambio de signo, ¿no?.
(PD) Sí, ésta (R_p) si cambia de signo.

(P) Vamos ahora a buscar una cadena que se conserve mediante una reflexión de eje oblicuo.
(PD) Eso lo hemos visto antes. El cuadradito.
(P) El cero. ¿Y otro que no sea el cero?
(PD) Como no sea que pongamos cadenas diagonales...
(P) Pero cualquier cadena diagonal la puedes convertir en una de éstas (en forma de L) ¿no? (silencio)
¿Qué es lo que hace la reflexión? (silencio) Que cambia las unidades por las decenas. ¿Entonces?
(DL) Que tenga las mismas unidades que decenas.
(P) Eso es. (El profesor dibuja la fig. A5.1-17) El primero es "bajar 1, izquierda 1", que corresponde al [+9], y la imagen es "izquierda 1, bajar 1", que es lo mismo, el [+9].

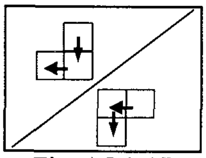
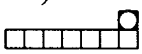
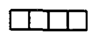
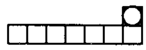


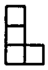
Fig. A5.1-17

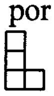
Tenemos un operador que está representado por distintas cadenas.
(P) Tomamos un operador y lo sometemos a una reflexión para que dé otro operador. ¿Depende el resultado del representante que tomemos? ¿De la forma de la figura que tomemos? (silencio).
Por ejemplo, el [+4] sería  ...
(PD) Yo creo que no depende, siempre que esté en la misma clase de equivalencia.
(P) Pues vamos a tomar dos representantes del [+4]. Uno, el anterior, que es "derecha 4", y otro que tenga una forma distinta para indicar 4. (silencio).
(PD) ¿Podría ser "bajar 1, izquierda 6"? (Pedro dibuja ).
(P) De acuerdo. Los dos representan al [+4]. Si al primero  lo sometemos a una reflexión horizontal, por ejemplo, sigue dando el [+4], pero si tomamos el segundo 
¿Qué le pasa?
(DL) Que cambia.
(P) Entonces pasa algo fastidioso. Que el transformado de un operador depende de los representantes elegidos.
Bueno, pues lo dejamos aquí.

Tercera sesión: Representaciones simbólicas de los operadores aditivos. Las cadenas en la Tabla-100 de k columnas.

Tareas a desarrollar

Tarea 3.1a

El operador [+21] lo hemos representado mediante  donde el sentido de lectura sería de arriba-abajo y de izquierda-derecha, y lo podríamos describir como "sumar 2 decenas y 1 unidad". Existen otra formas de representar [+21], como por ejemplo mediante el par (bajar 2, derecha 1). Podemos pensar en sustituir las palabras "bajar" y "subir" por algo más simple.

Escribe tres maneras distintas de representar el operador [+21] que no sea 

Tarea 3.1b

Elige la notación que te parezca más adecuada (sencilla, fácil de manejar, coherente, etc) y escribe con ella varios representantes de los operadores [+19] y [-12].

Tarea 3.1c

Desarrolla con dicha notación las operaciones:

i) [+19]$\oplus$[+5]
ii) [-12] $\oplus$[+8]
iii) [-12] $\oplus$ [-19]

Tarea 3.1d

Enuncia la regla que has utilizado para realizar la operación $\oplus$ con la notación anterior.

Tarea 3.1e

Expresa y justifica con esa misma notación las propiedades de la operación $\oplus$ en el conjunto de los operadores:

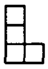
i) Existe un elemento neutro.

ii) Todo elemento tiene simétrico.

Tarea 3.2a

Consideremos ahora los 100 primeros números dispuestos en una tabla de 7 columnas (Fig. A5.1-18). Dibuja en dicha tabla una cadena correspondiente a [21] y escríbelo a continuación según la notación del ejercicio anterior.

Tarea 3.2b

Considera ahora la cadena  en la tabla de la figura G3-3.1. ¿A qué operador representa en esa tabla?

Tarea 3.2c

Expresa el operador mediante la notación del ejercicio anterior.

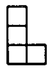
Tarea 3.2d

En la tabla de 10x10, el operador [+21] lo podemos expresar como "2 decenas + 1 unidad", o bien
$2 \times 10 + 2 \times 1$, que en expresión polinómica en potencias de 10 sería:
$21 = 1 \times 10^0 + 2 \times 10^1$
¿Cómo expresarías el operador [+21] de manera análoga en la tabla de 7 columnas?

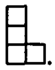
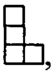
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

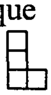
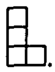
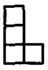
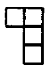
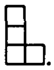
Fig. A5.1-18 (G3-3ª sesión)

Tarea 3.2e

¿Encuentras algún sistema de representación numérica en el que la cadena  se pueda seguir expresando como [21] en la tabla de 7 columnas? Explícalo brevemente y pon un ejemplo.

Transcripción de la tercera sesión

(P) Os acordáis que el operador 21 era . Si es +21 era bajar 2 y derecha 1, y si era -21, era izquierda 1 subir 2.
(Los estudiantes asienten.)
(P) Entonces, esto lo podemos interpretar como también como "sumar 2 decenas y una unidad", y lo podemos expresar "bajar 2, derecha 1" ¿no? Esta podría ser una notación: en lugar de dibujar , podemos poner una pareja: (bajar 2, derecha 1).

Se trata de buscar una notación, parecida a esta o la que vosotros os inventéis que signifique [+21]. Simplificar eso, o...lo que queráis. Tres maneras distintas de expresar la cadena  . Una notación matemática que sea coherente. (el profesor les entrega una hoja con tablas de 10x10).
(D) Es, tres formas de expresar la cadena .
(P) El operador [+21], sí. La .
Porque luego está la otra L, la invertida  ¿no?, o todas las cadenas que representan a 21. Podemos tener distintos caminos. La más simple era . Otra manera de decirlo, no geométricamente, sino ya aritméticamente, era (bajar 2, derecha 1). Pues, otra manera.
(PD) Se podría hacer con flechas, por ejemplo ¿no?
(P) Bien.
(PD) Una flecha para abajo, ...
(P) Escríbelo.
(PD) (Pedro escribe el par ($\downarrow$ 2, $\rightarrow$ 1))
(P) Esa sería una manera. A ver si salen más.... En realidad son maneras de escribir el 21. Una forma es 21, otra 1+2x10 ¿no? 2 decenas más una unidad. Vosotros os habéis inventado otra. (silencio).
(P) En realidad estamos trabajando con numeración. Una vez les propuse a mis alumnos que se inventaran un sistema de numeración en relación con la psicomotricidad o la educación física. Cada unidad la representamos por una palmada. Cada 10 palmadas por un salto. Para expresar el 11, en lugar de 11 palmadas, ...
(PD) y (DL) Un salto y una palmada.
(P) Era una forma de expresar números sin utilizar grafismos. También podríamos expresar números con notas musicales, por ejemplo. Aquí, apoyados en la Aritmética. (silencio)
(P) Eso que ha escrito Pedro, ¿Se podría simplificar más? ¿Podríamos sustituir las flechas por otros símbolos?
(DL) ¿Por decenas y unidades?
(P) Bien.

(DL) (Dolores escribe (2d, 1u))
(P) Y si es bajar o subir ¿Cómo lo expresamos? (silencio)
(P) ¿Si en lugar de [+21] ponemos [-21]?...
(DL) Ponemos el signo de suma. (+2d, +1u).
(P) Ya tenemos otra manera. Tienen que salir al menos 3. ¿Esto se podría simplificar más? Porque si la comparamos con la otra (↓ 2, → 1), es distinta, pero no la veo más reducida. Si vamos a tender a la simplificación ¿Cómo podrías hacer?
(DL) Poniendo por ejemplo (1, 2).
(P) ¿Te refieres a (2,1)?
(DL) Sí, pero poniendo primero los horizontales...
(P) Ah, primero las unidades.
(DL) Como si estuviéramos en un diagrama de .... de X e Y (Dolores se refiere al diagrama cartesiano).
(P) Ah, que ésta (la primera componente) sería la x y ésta (la segunda componente) sería la y.

Dolores escribe:

↔	↕
x	y
(2,	1)

(P) Esta sería la x y ésta la y. Ah, muy bien.
(PD) Yo he pensado otra cosa. Dejar siempre la primera componente para las decenas, y poner simplemente (+2 , +1).
(P) Muy bien. Si haces el convenio de que esto (la primera componente) sean decenas) y éstas unidades... Son las dos formas bastante simples. Ahora hay que quedarse con una. ¿Con cuál nos quedamos? (silencio).
(P) En realidad cuando escribimos 21, estamos considerando que éstas (primera componente) son las decenas y éstas (segunda componente) las unidades. En realidad lo único que hemos hecho es ponerlo en forma de pareja separado por una coma. ¿Os parece bien que nos quedemos con éste? (2, 1)? También podemos trabajar con la otra. Es una cuestión de orden. Como se cumple la propiedad conmutativa... Sumar decenas y luego unidades es igual que sumar unidades y luego decenas ¿no? Lo vimos el otro día.
(P) Con esa notación que hemos elegido ¿Cómo se escribe el operador [+19]?
(D) Hay varias maneras. Una podría ser el (1, 9) y otra el (2, -1).
(P) Muy bien. ¿Habría más maneras? (silencio)
Básicamente éstas. Se pueden poner todas las combinaciones que queramos.
¿Y el [-12]?
(DL) (-1, -2)
(D) (-2, +8)
(P) ¿Cómo haríamos [+19]⊕[+5] utilizando esta notación?
(D) (1, 9) + (0, 5). También puede ser (2, -1) + (1, -5)
(P) Ahora lo importante es ver la regla que utilizáis. ¿Cómo sumamos esas parejas?
(D) Pues unidades con unidades y decenas con decenas.
(P) Sería (1+0, 9+5) ¿Cómo ponemos esto? (1,14)

(PD) (2,4)
(P) 10 unidades pasarían a formar una decena. Aquí se maneja bien aquello de "me llevo una" ¿no?
(PD) Sí.
(P) ¿Y el [-12] ⊕ [+8]?
(DL) Sería (-1, -2) + (0, +8)
(P) Y eso según la regla es...
(PD) (-1, 6)
(P) ¿Qué operador sería ese? ¿De qué otra manera podemos ponerlo?
(D) (0, 4). No, no. (0, - 4)
(P) Sería el operador [- 4]. Y por último [-12] ⊕ [-19].
(D) (-2, -11) o bien el (-3, -1).
(P) Poniéndolo por pares, sería (-1, -2) + (-1, -9) = (-2, -11) que lo podemos poner...
(D) (-3, -1)
(P) Que sería el operador...
(D) [-31].
(P) Bueno, ya hemos aprendido a efectuar esta operación. ¿Qué regla vamos a enunciar? Decid de palabra lo que hemos hecho.
(PD) Sumar componente a componente.
(P) Y la parte e). Sabiendo hacer esta suma de parejas vamos a comprobar algunas propiedades que vimos el otro día, por ejemplo el elemento neutro. ¿Quién sería elemento neutro aquí y cómo lo comprobamos? ¿Gráficamente cuál era el elemento neutro?
(PD) El cuadradito.
(P) Será entonces un cuadradito o bien...
(DL) El (0, 0).
(P) ¿Cómo comprobamos que es efectivamente ese el elemento neutro?
(D) Pues aplicando el elemento neutro con cualquier operador...
(Domingo escribe (0, 0) + (a, b) = (0+a, 0+b) = (a, b)
(P) La suma de parejas normal y corriente.
(P) ¿El elemento simétrico de (a, b)?
(DL) y (PD) (-a, -b)

(P) Bien. Vamos a introducir una variante. La cadena significaba [21] en la tabla de 10x10. Ahora tenemos una tabla de 7 columnas. Si colocamos esa cadena en la tabla nueva (Tabla de la figura A5.1-19) ¿Quién sería esa cadena en forma de L ahora?
(PD) Sumar 15.
(P) Muy bien. ¿Y qué forma tendría ahora "sumar 21"?
(DL) y (PD) Bajar 3.

(P) Bien, sería una I de cuatro casillas . Entonces la cadena representa ahora a...
(DL) Al operador [15].

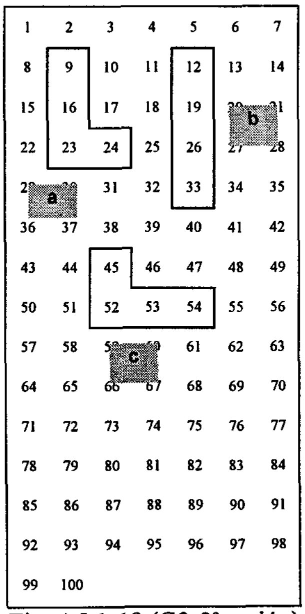
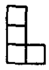


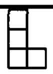
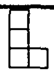
Fig. A5.1-19 (G3-3ª sesión)

(P) Veamos una manera de representación numérica, que haga que la cadena "bajar 2, derecha

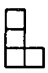
1" siga significando "dos, uno" (+21). ¿Cómo podemos modificar la notación numérica para que eso siga siendo cierto en la tabla de 7 columnas? (silencio)
(P) Eso era cierto en la tabla de 10x10. Pero en la de 7 columnas eso ya es "quince". Pero sigue siendo "bajar 2, derecha 1" ¿no? El problema con que nos encontramos es que "bajar 2, derecha 1" ya no significa 21, sino 15.
(El profesor escribe: (2, 1) = quince)
¿Cómo podemos escribir todo esto (el profesor señala la tabla) para que (2,1), que es "bajar 2, derecha 1", también se pueda escribir "dos, uno", ó [21]? El problema es que se entienda la pregunta...
(PD) Utilizando una notación como ésta (Pedro señala la descomposición polinómica del 15 en potencias de 10).
(P) Eso es. (silencio)

(P) Vamos a hacer un esquema. La cadena  en la tabla de 10x10 significa 21 y en la tabla de 7 columnas significa 15 ¿no?

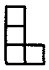
El profesor escribe:

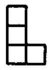
En tabla de 10 columnas	En tabla de 7 columnas
 = 21	 = 15

(D) En realidad, estaríamos en un sistema de numeración distinto ¿no? Porque antes estábamos en un sistema decimal, y ahora ya estaríamos en otro sistema, y por eso, aunque la forma sea la misma, la misma cadena, pero por eso cambia el operador, porque no estamos en el mismo sistema de numeración.
(P) Bueno, ésta es la de 10x10 y ésta la de 7 columnas. El sistema de numeración no ha cambiado, porque el "diez" lo sigo escribiendo 10 en ambos sitios. Lo que ha cambiado ha sido la disposición de los números ¿no? En lugar de colocarlos de 10 en 10 los hemos colocado de 7 en 7.
(D) Pero, si antes bajar un lugar era 10, ahora es 7.
(P) Eso.
(PD) Utilizando las potencias, en vez de base 10 que sean de base 7.
(P) Ajá! Pues a ver qué pasa si en lugar de decenas utilizamos septenas ¿no?
(PD) Sí.

(P) ¿Y eso (señalando la cadena ) qué es?
(PD) Sería $2x7^1 + 1x7^0$
(P) Que sería ...
(PD) El [2, 1]
(P) Sería el 21 (sin la coma) pero en base...
(PD) Diez.
(P) No. Siete.

(PD) Ah, bueno sí.
(P) O sea, que si ahora escribimos la tabla en base 7, esta L sigue siendo 21 pero en base 7. En base 10 sería...
(PD) Quince.

(P) (El profesor escribe:  $= 21_{(7}$)

Si el número de columnas es k, el operador de  va a seguir siendo 21 en base k:

(El profesor escribe  $= 21_{(k}$

(P) O sea, que dependiendo de la base, la cantidad va a ser distinta, pero la forma de notarlo será la misma. Entonces fijaos, tenemos una manera geométrica de notar. Hemos pasado a una aritmética, a base de parejas, que nos ha servido para la tabla de 10x10. Hemos cambiado el número de columnas, y claro, ya la misma figura representa distinto número, pero al cambiar la base ya representa el mismo número en esa base.
¿Cómo rellenaríais ahora el apartado e)?
(PD) Cualquier otro operador ¿no?
(P) Sí. Poned otro ejemplo.
(DL) El $12_{(7} = 1x7^1 + 2x7^0$
(D) Sería el operador 9.
(P) Pero si escribimos la tabla en base 7...
(Los estudiantes escriben la tabla en base 7 y la figura A5.1-20)
(PD) Sigue siendo el 21.
(P) Bueno, aquí lo dejamos por ahora.

1	2	3	4	5	6	10
11	12	13	14	15	16	20
21	22	23	24	25	26	30
31	32	33	34	35	36	30
41	42	43	44	45	46	50
61	62	63	64	65	66	70

Fig. A5.1-20 (G3-3ª sesión)

Anexo 5.2

Sesiones de trabajo con G1: cadenas y operadores aditivos

Primera sesión: Elementos algebraicos del conjunto de las cadenas con la "operación suma".

Transcripción de la sesión

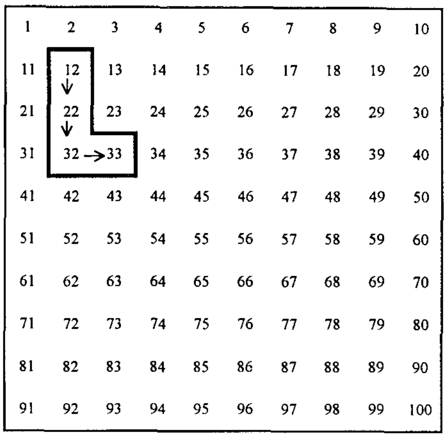


Figura A5.2-1 (G1-1ª sesión)

(P) Te acuerdas de lo que son los patrones ¿no?
(J) Sí. La tabla del cien.
(P) Te acuerdas de los patrones fila, columna, salto del caballo. Pues éste (señalando la fig. A5.2-1) sería de salto de caballo, "abajo 2, derecha 1", y te acuerdas que significaba...
(J) Sumar 21.
(P) ¿Podemos llamar "cadenas" a estos patrones?
(J) Bueno.
(P) La primera pregunta es que dibujes otras tres cadenas que signifiquen "sumar 21". Que sean distintas. Que tengan otra forma.
(J) ¿Otras cadenas que no sean de esta forma?
(P) Que no sea esa L. Pero que puestas sobre la tabla signifiquen "sumar 21".
(J) Sí. (Julia va dibujando las cadenas de la figura A5.2-2).
(P) Esta vez vas a lo más fácil ¿no?
(J) Sí, porque siempre me voy a lo más difícil.
(P) La manera más simple de ir del 12 al 33 es "bajar 2, derecha 1", pero hay otras maneras ¿verdad?
(J) Pero si empiezo a hacer figuras raras ... ¿Se puede hacer esto? (Cadena D de la figura A5.2-2)
(P) Bueno. Con eso indicas que pasas directamente del 74 al 85 ¿no?
(J) Sí. (Julia realiza el dibujo E de la Fig. A5.2-2)
(P) En éste que has hecho, no hay un origen y un final claros ¿no? Uno de ellos sí está claro, el 98. Pero ¿Cuál es el origen?
(J) Ah! ¿Es que tienen que tener ...
(P) Bueno, ahora es una buena oportunidad para plantearnos trabajar solo con las cadenas que

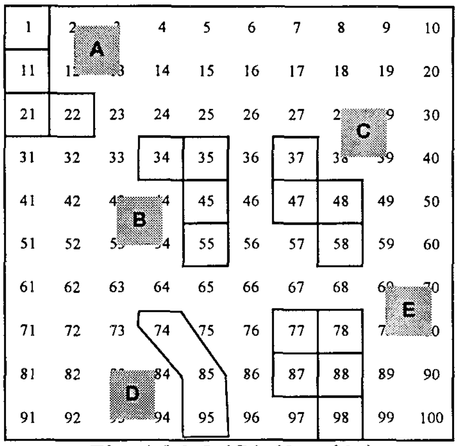


Fig. A5.2-2 (G1-1ª sesión)

tienen un origen y un final claros. Aquí, (Fig. A5.2-1) el operador es el [+21] porque la diferencia entre la casilla final y la origen es 21 ¿no?
(J) Ah, sí.
(P) Ahora dibuja una que sea "restar 21". Yo te he dado un criterio para sumar 21. Dame tú un criterio para restar 21.
(Julia hace la cadena A de la figura A5.2-4).
(J) Me sale la misma L.
(P) Del 1 al 22. En este caso, ¿Cuál sería el origen?
(J) El 22.
(P) ¿Cómo pondrías las flechas?
(J) Para arriba. (Julia dibuja las flechas en ese momento).
(P) ¿Habría alguna otra manera para indicar "restar 21"?.
(J) Pues no lo sé. (Julia realiza la cadena B de la fig. A5.2-3).
(P) Bueno, los mismos cadenas que antes pero poniendo las flechas...
(J) Al revés.
(P) Eso es. Restar va a ser lo mismo que sumar solo que cambiando las flechas de sentido ¿no?
(J) Sí.
(P) Vamos a considerar ahora solo las cadenas que tienen un origen y un final. A esas cadenas las vamos a llamar cadenas, y a ese conjunto le llamamos C. Pero hay muchas figuras de éstas que realizan la misma operación ¿no? Todas éstas (las de la Fig. A5.2-3) significan "sumar 21". Pues a todas esas las vamos a considerar equivalentes. Como si introdujéramos una relación de equivalencia y a cada clase de equivalencia la llamaremos

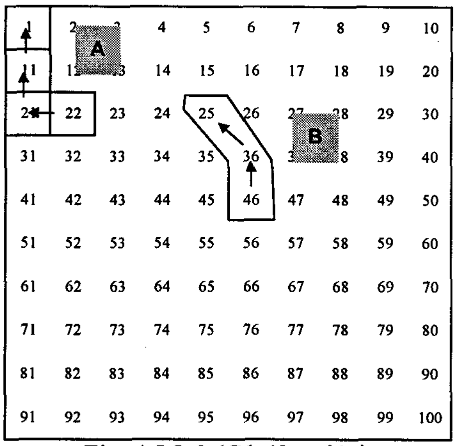
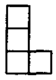


Fig. A5.2-3 (G1-1ª sesión)

"operador", en este caso el operador [+21]. Así que el operador [+21] no va a ser ésta  sino todos las cadenas que signifiquen "sumar 21".

Lo mismo con el operador [-21]. Las mismas cadenas pero cambiadas las flechas de sentido. Y al conjunto de todos los operadores aditivos le llamamos O. De manera que tenemos por una parte cosas visuales, geométricas, y por otra parte operadores, que es el significado aritmético que tienen estas figuras. Entonces tratamos de buscar una estructura. Vamos a definir una operación en cada uno de ellos.

(J) Esta es la parte que menos me gusta.
(P) Te viene bien, porque así lo repasas. En el conjunto de las cadenas vamos a definir la operación *. Dice la pregunta: "inventa y explica un criterio para componer las cadenas".
(J) De lo que se trata es de coger yo por ejemplo el operador [30] y hacer otros iguales ¿no?
(P) No. Tu coges el operador [+30] y el operador [+14] por ejemplo ¿Cómo se te ocurriría combinarlos para que te dé un operador que sea la suma? El operador suma de los dos. Primero lo haces con los elementos gráficos.
(J) Sí. Entonces cogemos el [21] y otro cualquiera ¿no? Y el [10], por ejemplo.

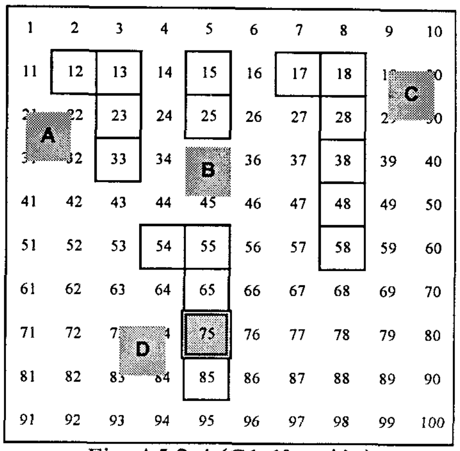


Fig. A5.2-4 (G1-1ª sesión)

(P) ¿Qué criterio utilizas para combinarlos, visualmente, para que te dé otra cadena que pertenezca al mismo conjunto?
(J) (Julia realiza el dibujo A de la fig. A5.2-4). Este, el [21].
(P) Y lo quieres componer con...
(J) Con [10].
(P) Dibuja una cadena del [10]. (Julia realiza el dibujo B de la fig. A5.2-4).
(P) ¿Cómo compones esta cadena con ésta?
(J) A ver si me aclaro. ¿No se trata de que al [21] le sume [10], sino que una esto (Fig. A5.2-4A) y esto (Fig. A5.2-4B)?
(P) De manera coherente. Que combines estas dos figuras de manera que el significado se conserve ¿de acuerdo? Esta cadena (Fig. A5.2-4A) significa "sumar 21", y ésta (Fig. A5.2-4B) "sumar 10". Cómo mezclo estas figuras: se la añado por arriba, la pego una encima de la otra, ... yo qué sé, lo que tú quieras,...
(J) Ajá! Se la añado. (Julia realiza el dibujo de la Fig. A5.2-4C).
(P) Hasta aquí (el 79) era...
(J) El [21]. Y éste (desde el 89 al 99) el [10].
(P) Sería "derecha 1, bajar 4". Te ha salido...
(J) Sumar 41.
(P) Pues el operador [21] y el [10] te ha salido el [41]. No parece muy coherente, en el sentido de que no te ha salido la suma. La ley que te has inventado ha sido: "poner una a continuación de la otra". Entonces lo que has obtenido en este caso ha sido 10 más.
(J) Sí. Entonces se cogería el último... (Julia realiza el dibujo de la fig. A5.2-4D)
(P) Superponer...
(J) El origen del [10] con el final del [21].
(P) Entonces la ley que te has inventado sería:
(J) "Hacemos coincidir el origen de la segunda con el final de la primera".
(P) Vamos a ver el paralelismo que existe con los operadores:
Hemos hecho 21 + 10 y ha salido 31

(el profesor escribe [21]⊕[10] = [31])

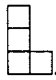
Esta suma, que ponemos con un circulillo, es una suma de operadores, no es suma de números.

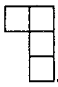
En el conjunto de las cadenas hemos introducido una ley *.
(J) ¿Esa sería la ley? ¿Esta de aquí? (Julia se refiere [21] ⊕ [10] = [31]).
(P) La ley es la que hemos dicho de palabra: "**para componer dos cadenas unimos, o superponemos, o hacemos coincidir el origen de la segunda con el final de la primera**". Esa sería la ley *. ¿Vale? Pero eso en el conjunto de los operadores ¿Qué ha inducido? Pues esta ley (⊕). Que el operador [+21], sea la cadena que sea, más el operador [+10] sea el operador [+31] ¿no?
Vamos a ver ¿Cómo definirías tú esta ley con operadores?
¿Cómo definirías el operador [+21] más el operador [+10]?
(J) Quedaría el operador [+31] ¿no?
(P) ¿Qué operador sería el operador **a** más el operador **b**?
(Julia escribe [a] ⊕ [b] = [c])
(J) El operador [c].
(P) Pero quién sería [c]? ¿Cuál es la ley para ⊕ ? Visualmente era "superponer la casilla origen del segundo, ..." pero en el conjunto de operadores...
(J) A la derecha 1 y bajar uno, dos, tres, ...
(P) Sí, pero esto es en el caso del operador [+21]. Pero en el caso de [a] y de [b]?
(J) Pues ya está. Cogería éste que es el de los dos juntos, sumar 1 y bajar 3.
(P) Bien, pero me lo sigues haciendo con el caso particular. ¿Entiendes la pregunta?
(J) Es que todavía no lo entiendo. Todavía estoy dormida.
(P) Yo tengo una cadena, que puede tener esta forma, ...
(J) Eso sí lo entiendo. Lo que no pillo es lo del [31].
(P) Esto lo has hecho con unos números concretos. Ahora hazlo en general, con **a** y **b**. ¿Esto ([a] ⊕ [b] = [c] =) cuánto tiene que valer? **a** más **b** ¿no?
(Julia escribe al final: [a] ⊕ [b] = [c]= [a+b])
(P) Eso es. El operador [a] más el operador [b] será el operador correspondiente a la suma de a+b. Esto que hay dentro del corchete es un número, pero con el corchete indicamos que es un operador.
Un operador es una aplicación: ¿Qué le hace corresponder al 8? El operador [+21] al 8 lo transforma en el 29.
(El profesor escribe:

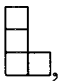
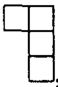
$$\begin{array}{c} [+21] \\ 2 \rightarrow 23 \\ x \rightarrow x+21 \end{array}$$

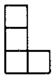
(P) El apartado b) dice: "Indica en qué condiciones esa ley sería una ley de composición interna". O sea, nos hemos inventado una ley * con cadenas, y una ley ⊕ con los operadores.
(J) Sí.
(P) Te recuerdo lo que es una ley de composición interna.
(J) Más me vale.
(P) Bueno, entonces, en lugar de darte la definición, te pongo un ejemplo: la suma de números naturales es una ley de composición interna, porque al sumar dos números naturales, el resultado se queda dentro del conjunto, es otro número natural. En cambio, la resta no es una ley de composición interna, porque al restar dos números naturales no siempre...
(J) Da un número natural.
(P) Bien. Entonces en este caso, ¿Qué te parece? Tenemos un conjunto de cadenas... Los

números estos del 1 al 100 ¿Quienes serían? ¿Qué papel juegan?
(J) ¿Cómo que qué papel juegan?
(P) (Risas).
(J) Como vengo yo hoy! Todavía no me he recuperado del viaje. Estamos con los números naturales.

(P) Sí, del 1 al 100. Hemos dicho que un representante del operador [21] sería esto .
(J) Sí.

(P) Pero otro representante también podría ser . Y hemos visto otros muchos, con formas en diagonal, en zig-zag, etc. A todo este conjunto de cadenas que significan "sumar 21" lo representamos por [+21].
(El profesor escribe el conjunto:

[+21] = { , , ...}

Entonces si colocamos una de estas cadenas en la tabla y situamos la primera casilla de la cadena sobre el 2, ¿Qué número vendrá aquí? (última casilla) (El profesor dibuja  colocando la primera celdilla sobre el 2 y la última sobre el 23)
Luego al 2 lo ha transformado en...
(J) El 23.
(P) ¿Y eso qué es? Una aplicación ¿no? Un operador es una aplicación. Entonces el 2 en este caso es el objeto que toma el operador y lo transforma. ¿A x en quién lo transforma? En x+21. Entonces el operador [+21] no es más que una aplicación que transforma a cada número de esta tabla en ese número más 21.
(J) Sí. (El profesor escribe:

$$\begin{array}{c} f \\ 2 \rightarrow 23 \\ x \rightarrow x+21 \end{array}$$

(P) Ya te vas aclarando ¿no?
(J) Sí, menos mal!
(P) Estos números del 1 al 100, en el contexto este de las aplicaciones, ¿Qué papel desempeñan?
(J) Este, el de la variable.
(P) Eso es. El dominio de la función. Los valores que puede tomar la x, ¿Vale? Pero lo que componemos con estas cadenas no son números, sino cadenas. Una cadena, la coloque donde la coloque ¿Cambia su significado por el mero hecho de aplicárselo al 2 o al 46? El significado...
(J) Siempre es el mismo.

(P) Eso es. Si coloco el cadena [+11] aquí en el 49, ¿Lo puedo componer con el [+2]?
(El profesor dibuja la cadena del [11] de la Fig. A5.2-5A).
(J) Colocar, el qué? ¿Este con éste? Sí.
(P) ¿Cómo?
(J) Pues poniendo, por ejemplo en el origen del segundo el final del primero.
(P) ¿Puedes componer [11] con [2] aplicado al 49 sin que las cadenas se salgan de la tabla?
(J) Sí.
(P) ¿Cómo?
(J) Poniendo en el 77 el origen del segundo (Julia realiza el dibujo B de la fig. A5.2-5).
(P) Bien. Has aplicado la propiedad conmutativa ¿no? Has hecho [2] ⊕ [11] en lugar de [11] ⊕ [2] ¿no?
(J) Bueno.
(P) ¿Y sin aplicar la propiedad conmutativa? Este es el cadena [11] y éste el [2]
(el profesor escribe [11] ⊕ [2])
¿Cómo lo harías gráficamente?

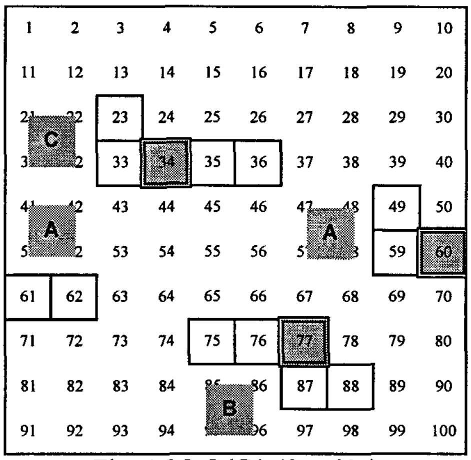


Fig. A5.2-5 (G1-1ª sesión)

(J) Jolín! Apurándome mucho, como no sea así, de otra forma no se podría.
(Julia realiza el dibujo A de la Fig. A5.2-5, continuando el cadena [2] de 3 casillas en el comienzo de la fila siguiente).
(P) Has resuelto el problema muy bien. O sea que tú lo continuas en la fila de abajo. ¿De qué otra manera podríamos resolver ese problema? Es que yo te he colocado la cadena ([+11]) sobre el 49, pero tú lo podías haber colocado en otro sitio, por ejemplo aquí (cadena C de la Fig. A5.2-5), porque lo que estamos haciendo es componiendo cadenas, no componiendo números. Hemos dicho que la cadena tiene el mismo significado se lo apliquemos a quien se lo apliquemos. ¿Cuál va a ser el resultado? Pues esta L larga (empieza en el 23 y termina en el 36. Cadena C de la Fig. A5.2-5). ¿En qué caso no se podría hacer? Pon un ejemplo en que no se pudiera hacer una composición de cadenas.
(J) Se supone que (La tabla) no acaba en el 100.
(P) Sí, la tabla termina en el 100.

(J) Pues entonces, que pase del 100. (Julia realiza las cadenas A y B de las figuras A5.2-6). Este el [11] y el [3]. [11] ⊕ [3].
(P) Pero ese sí lo sabes hacer.
(J) Pero si acabamos en 100...
(P) Pero es que la cadena me la puedo llevar a otro sitio donde sí me quepa. Venga, pon un ejemplo que no se pueda hacer.
(J) Como no sea coger la cadena [100] y sumarle otra...
(P) Ese está claro. Ese seguro que no se puede hacer, porque la pongas donde la pongas te vas a salir de la tabla. Dime otro ejemplo que no sea tan exagerado.
(J) ¿Tiene que ser suma?
(P) La ley * que hemos definido, que es "superponer...".
(J) Serviría por ejemplo. Tomamos esta L (la que empieza en el 1 y termina en el 100 de la cadena A de la Fig. A5.2-7, sin sombrear), y luego coger ésta que empieza en el 2 y termina en 90 (cadena B de la Fig. A5.2-7 sombreada).

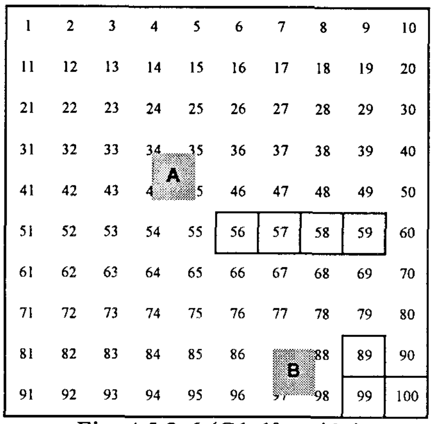


Fig. A5.2-6 (G1-1ª sesión)

(P) Y la composición de esas dos cadenas ¿Qué sería?
(J) Que no se podría hacer ¿no? ¿O sí se podría?
(P) Pero si te lo pregunto yo a ti! Esta L sería "bajar 9, derecha 9", sería el [99]. Y la otra ¿Qué operador es?
(J) El [88].
(P) (El profesor escribe [99] ⊕ [88]) ¿Se podría hacer?
(J) Yo creo que no.
(P) ¿Por qué?
(J) Porque para poder ponerla te saldrías de la tabla.
(P) Si la consideras como "sumar" nos saldríamos de la tabla.
(J) Pues eso.
(P) En cambio restar, sí se podría hacer ¿no?
(J) Sí.
(P) ¿Cómo lo harías? Este (el 90) es el origen y éste (el 2) es el final. (El profesor los señala en la figura 8 con una O y una F, respectivamente). ¿Cómo restarías esas dos cadenas?

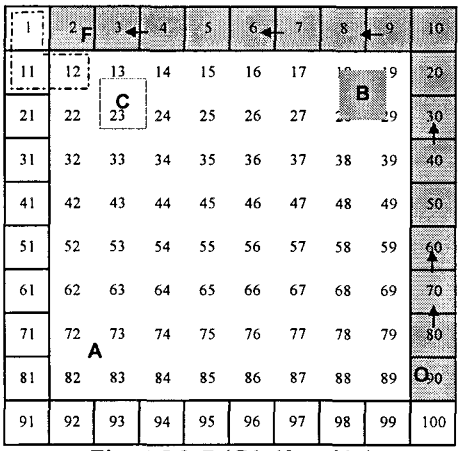


Fig. A5.2-7 (G1-1ª sesión)

(J) Pues si bajo ésta (cadena B de la Fig. A5.2-7) un lugar, el 90 coincide con este final (se refiere al 100).
(P) O sea, la casilla donde está ahora mismo el 90, hacerlo coincidir con el 100. ¿Y cuánto daría?
(J) 99 menos 88, ... Es que ya estoy liada con la resta.
(P) Imagínate que esta figura (cadena B de la Fig. A5.2-7) la tenemos hecha en una transparencia. Bajaríamos, y obtendríamos...
(J) El 12. Tiene que dar 11.

(P) Tiene que dar 11. ¿No da 11? **(Julia confunde el operador 11 (figura** A5.2-7C **con trazo punteado) con el estado, que es el número 12 de la tabla).**
(J) Ha dicho que daba 12 porque el origen daba aquí (Julia señala el 12). Si la bajamos y la corremos para la izquierda...
(P) Vamos a seguir la regla. Este es el origen de la primera, y éste el final de la segunda... Para sumar, decíamos que colocábamos el final de la primera con el origen de la segunda, pero para restar...
(J) Tendríamos que poner el final con el origen. Lo contrario.
(P) A esta primera, al 90, habría que colocarla aquí (sobre el 100), o sea bajar un lugar...
(J) Pues eso es lo que hemos dicho antes.
(P) Vamos a hacer un ejemplo más sencillo. Al [21] famoso le vamos a restar [10]. (El profesor dibuja la cadena del 21 que une el 22 con el 43, en la Fig. A5.2-8A, así como la cadena del 10 que une el 26 con el 36 en la Fig. A5.2-8B).

Si sumáramos, la esta cadena , la tendríamos que poner así (del 43 al 53), pero si se la restamos... ¿Cuál sería el origen ahora?
(J) El 43.
(P) Entonces ¿Cuál sería el resultado? (Julia señala con el lápiz la cadena correspondiente al 11 que une el 22 con el 33 de la figura A5.2-8A.
(J) Es que es 22 menos 10. Es que se tendría que poner el origen en este origen. El profesor escribe
[+21] ⊕ [-10]=[+11].
Claro, y efectivamente da [11] (El profesor recuadra la cadena de las casillas 22-32-33).

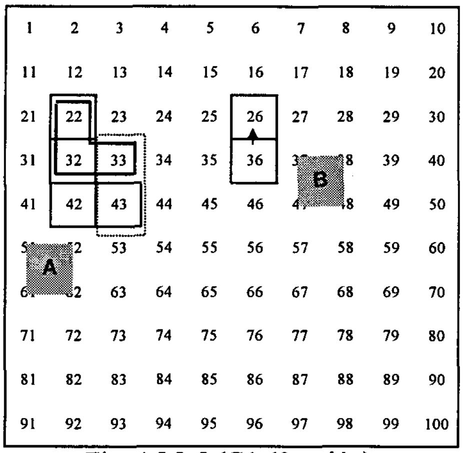
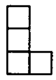
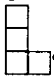
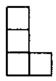
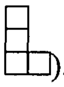


Fig. A5.2-8 (G1-1ª sesión)

(J) Esta con esta nos da .
Es que yo me estaba fijando en el número. Sí sale [+11] (Julia señala la cadena y el número 12 de la Fig. A5.2-8C).
(P) Es que nos hemos fijado en el resultado (de la operación) final.
Entonces cómo respondemos a la pregunta ¿Qué condiciones habría que imponer para que * fuera una ley de composición interna?
(J) Pues que las cadenas tengan un número de casillas de manera que al hacer la composición no tenga más de 10 casillas.
(P) Por ejemplo, le podemos imponer que cada cadena no tenga más de 5 casillas ¿no?
(J) Sí.
(P) ¿Habría alguna cadena que sirviera como elemento neutro?
(J) Con tomar dos cadenas iguales...
(P) No. Una cadena que sea elemento neutro para todos. En la suma de números naturales ¿Hay un elemento que sea el elemento neutro?
(J) Sí.
(P) ¿Cuál?
(J) El cero.

(P) Entonces, en el conjunto de las cadenas, ¿Hay alguna cadena que haga el papel de elemento neutro?
(J) Si se coge la misma cadena sí, porque sale la misma figura.

(P) Tomamos un cadena cualquiera,  por ejemplo. ¿Con qué otra cadena la tienes que componer para que el resultado se te quede igual ?
(J) Cojo el cadena [+21] con solo superponerla se me queda igual. ¿Pero eso no vale?
(P) Pero ¿Cómo superpones las cadenas? El origen de la segunda debe coincidir con el final de la primera. Si el [+21] lo compones de nuevo con el [+21] te dará el [+42] ¿no?
(J) ¿No puedo mezclar la suma y la resta? Por ejemplo restarle la misma cadena.
(P) Hemos definido una ley *. Pues esa es la ley a la que nos debemos atener. Componer dos cadenas es: superponer la casilla final de la primera con la casilla original de la segunda, y ver la cadena que sale. Esa es la ley. Estamos buscando un elemento neutro, si es que hay. A lo mejor no existe, y lo estamos buscando.
(J) Una pregunta: ¿Esto (□) se puede considerar como una cadena?
(P) ¿Tiene origen y final?
(J) Sí.
(P) Tú has señalado un cuadradillo, solamente ¿no?
(J) El mismo número sería el origen y el final.
(P) Exactamente.

(J) Pues si hacemos así (Julia superpone □ en la última casilla de  y comprueba que obtiene de nuevo ).
(P) El elemento neutro ¿Cuál sería?
(J) El cero.
(P) La cadena formada por un cuadrillo. Y ¿A qué operador equivale? A sumar...
(J) Cero.
(P) Luego hemos encontrado un elemento neutro. No dirás que no estamos contentos. A ver si me sabes buscar otra cadena que no esté formada por un solo cuadrillo y que represente al elemento neutro.
(J) Eso significa que lo hay.
(P) Es que como hemos dicho que un operador son muchas cadenas todas ellas equivalentes... ¿Como representante del [0] solo existe esa o hay más cadenas?
(J) Solo puede haber esa.
(P) ¿Solo esa? ¿No puedes considerar otra cadena?
(J) Yo creo que no. Solo puedes pillar un número y solo puede ser un cuadrillo.
(P) ¿Y por qué solo puedes pillar un número?
(J) Porque si pillas dos números, ya estás sumando uno.
(P) ¿Y si pillas cuatro?
(J) Estás sumando 3.

(P) Depende de como lo tomes.
(J) Bueno, sí. Eso es lo que quería decir, vaya.
(P) Toma un número cualquiera de la tabla, por ejemplo el 1.
(J) Si cojo ésta le sumo 1, y si cojo ésta le estoy sumando 10 (cadena A de la figura A5.2-9).
(P) ¿Y si coges 3 en lugar de 2?
(J) Sumo 2 ó 20.
(P) ¿Y si en lugar de 2 casillas haces una a la derecha, una abajo, una a la izquierda y una arriba ¿Llegas al mismo sitio?
(J) Sí.
(P) Sales del 1, y llegas al 1. O Bien, tomamos el 25, hago este recorrido... (dibujo B de la figura A5.2-9) y llegamos al mismo sitio ¿no?
(J) Sí.
(P) ¿Entonces, esto qué es? (dibujo B de la figura A5.2-9) ¿Es una cadena? ¿Tiene origen y final?
(J) Sí, pero es que yo estaba pensando que no se saliera de la L. Por eso no me salía ninguna.
(P) No habíamos considerado la posibilidad de que una cadena fuera cerrada. El elemento neutro va a estar formado por ..
(J) Las cadenas cerradas.
(P) Las que tengan origen y final coincidentes. La más simple es la que has hecho tú, de un solo cuadradillo. Esa será el representante canónico.
(J) Sí, pero es que yo pensaba que no se podía salir de la figura. (Se refiere a la cadena de partida). Pensaba que no se podía dibujar otra cosa, sino todo dentro de la L.

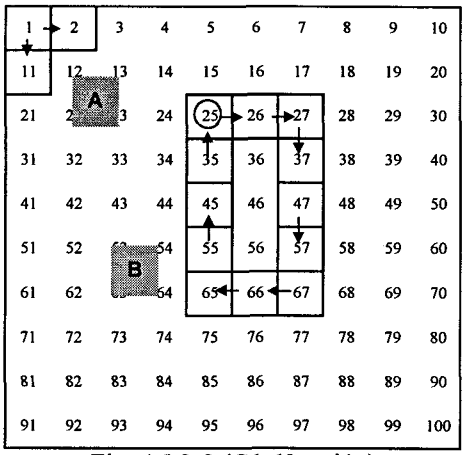


Fig. A5.2-9 (G1-1ª sesión)

(P) Ah, pensabas que no podías "añadirle".
(J) Sí.
(P) Claro, es que la ley es "añadir", o sea sumar. Bueno, como tenemos un elemento neutro, ya sí nos podemos plantear la pregunta de si cada elemento tiene simétrico o no. Por ejemplo la cadena del [+21], ¿Tendrá su simétrico? ¿Te acuerdas de lo que es el elemento simétrico?
(J) No.
(P) Por ejemplo en el conjunto de los número enteros, que hay positivos y negativos, el simétrico del 3 es el -3, porque al sumarlos me da el cero, el neutro. ¿Vale?
(J) Sí.
(P) Entonces, ¿Cuál será el simétrico del [+21]?
(J) El [-21].
(P) Luego cada operador tiene su simétrico, que es el mismo pero...
(J) Con signo cambiado.
(P) Y eso con las cadenas ¿Cómo se hace?
(J) Cambiando las flechas.

(P) Bien. Como conclusión de todo lo que hemos visto: hemos definido el conjunto de cadenas, una ley *. Hemos definido esa ley por superposición. Un conjunto de operadores con una suma (⊕).

(El profesor escribe:

(C,*) y (O, ⊕)

Existe un elemento neutro, se cumple la propiedad conmutativa. ¿Se cumple la asociativa?

(J) Yo creo que sí.

(P) Si tomamos estas tres cadenas (Fig. A5.2-10) ¿Da lo mismo componer estas dos primeras (A*B) y el resultado con la tercera (A*B) *C que componer la primera con el resultado de componer las dos últimas A*(B*C)?

(J) Yo creo que sí.

(P) Está claro que el resultado final será el mismo. Estamos ante una estructura de grupo. Le llamamos el grupo de los operadores aditivos. Y hemos llegado a él mediante cadenas, que han salido al colorear en la tabla los múltiplos de un número.

Pues ya lo dejamos aquí ¿no?

(J) Más bien.

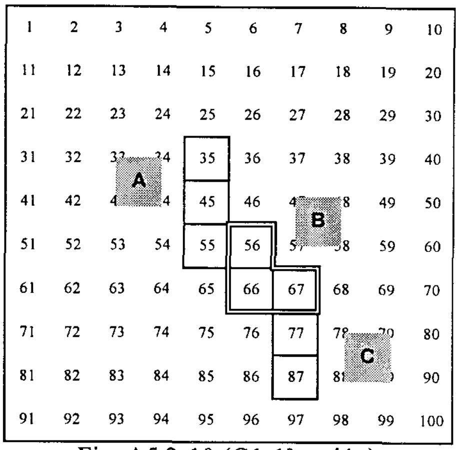


Fig. A5.2-10 (G1-1ª sesión)

Segunda sesión: Cadenas y transformaciones geométricas.

Transcripción de la segunda sesión

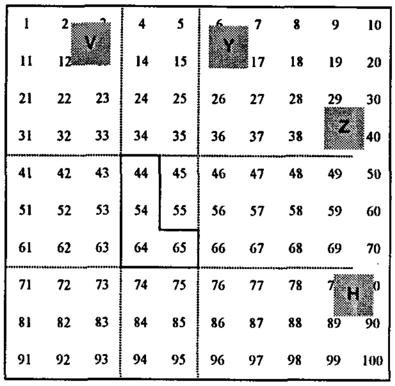


Fig. A5.2-11 (G1-2ª sesión)

(P) En la figura A5.2-11 hay dibujada una cadena correspondiente al operador [+21] que es . Hemos quedado que el operador [+21] tenía muchas cadenas ¿no? Pues, ésta es una de ellas. Hay dibujados 4 ejes de reflexión, como si fueran espejos (h, y, z, v). Somete esa cadena a una reflexión de eje vertical (V). ¿Cuál sería la reflexión mediante V de esa cadena?
(J) ¿Lo dibujo aquí? (Julia señala la fig. A5.2-11)
(P) Sí, aquí mismo. Te pregunta, ¿Qué cadena has obtenido? Esta era **sumar 21** y ahora ésta (la imagen) ¿Cuál es?
(J) Pues **restar 19.**
(P) ¿Por qué restar?
(J) 20 y quitar 1, son 19.
(P) En realidad... va a depender de que la leamos en un sentido u otro. Si la leemos del 43 al 62, sería sumar 19. Si la leemos del 62 al 43 sería restar 19. Podemos entonces referirnos a la cadena [19] (independientemente del signo). Pero si ponemos flechas a la cadena del [+21]...
(J) Sería entonces así (Julia pone flechas a la imagen de la cadena).
(P) Y ¿Qué operador representa?
(J) Ah, ya! Este sería sumar 19.
(P) Bien. Eso (que has dibujado) lo escribiríamos de esta manera: "**El operador [+21] mediante la reflexión R_v se convierte en el operador [+19]**".

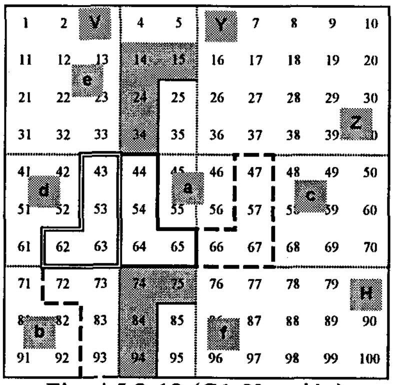


Fig. A5.2-12 (G1-2ª sesión)

R_v ([+21]) = [+19].
Aplícale ahora a ambas cadenas una reflexión de eje horizontal (R_h). Tanto a ésta [+21] como a ésta [+19] le aplicas un espejo horizontal. Vamos a completar la figura.
(Julia completa los datos y realiza los dibujos de la figura A5.2-12, sin colocar flechas).

R_v ([+21]) = [+19]; R_v ([+19]) = [+21];
R_h ([(+21)] = [-19]; R_h ([-19)] = [+21].

(P) Ahora nos pregunta ¿Qué movimiento geométrico transforma a un operador en él mismo? Una transformación geométrica que transforme un operador en él mismo, de entre los que tenemos aquí.
(J) Vamos a ver. ¿Tiene que ser uno de éstos?
(P) No, no. ¿Qué movimiento geométrico? Yo te he dado unos concretos, que son reflexiones. Puede haber otros movimientos geométricos.

(J) Darle la vuelta.
(P) Darle la vuelta. Vamos a ver. ¿Con cuál estás trabajando?
(J) Con estos
(Julia señala las dos cadenas a y b de la figura A5.2-12, que al no tener flechas interpreta que las dos corresponden al operador [+21]).
(P) ¿Qué es darle la vuelta?
(J) Darle un giro. Girar hacia la derecha.
(P) Bueno. Cuando hablamos de giros, hay que hablar de un centro de giro y un ángulo. ¿Cuál sería el centro?
(J) Ese (Julia señala la intersección de los dos ejes V y H).
(P) ¿Cuánto tendríamos que girar?
(J) Pues si aquí es 90° ¿no? Pues otros 90°; 180°.
(P) Muy bien. O sea que el giro de centro O y ángulo 180° transforma éste (cadena a) en éste (cadena b de la Fig. A5.2-12). Pero ¿Son las dos cadenas del mismo operador?
(J) Sí ¿no?
(P) Es que no hemos colocado las flechas.
(Julia coloca flechas en las cadenas y al final queda la figura A5.2-13).
(J) Esta es [+21] y ésta es [-19]. Entonces no son la misma.

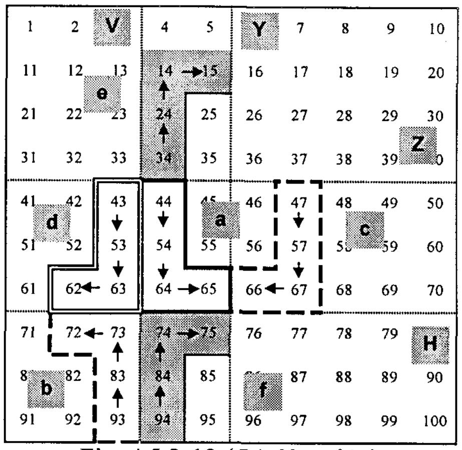


Fig. A5.2-13 (G1-2ª sesión)

(P) ¿El giro de 180° transforma a un operador en el mismo?
(J) No, ahora no.
(P) ¿Hay alguna transformación que deje estas cadenas invariantes?
(J) Pues girar 360°.
(P) Vale. Esta pregunta te dejo que la leas a ver cómo la interpretas: "Haz un esquema que resuma la situación y trata de explicar los resultados obtenidos".
(J) Jolín!
(P) La situación sabes cual es. La que tenemos aquí. (figura A5.2-12). Ahora, mediante flechas y números, ... Un esquema que represente esta situación.
(J) Si pongo esto: R_v ([21]) ↔[19]
(P) Ah, muy bien.
También lo podemos expresar como antes: $[21] \xleftrightarrow{R_v} [19]$
Y ahora, ¿En quién se transforma el [19]?
(J) En el [21].
(P) Eso es mediante R_v, pero ¿Y mediante R_h?
(J) También en el [21]
(P) Podemos utilizar el esquema anterior y añadir:

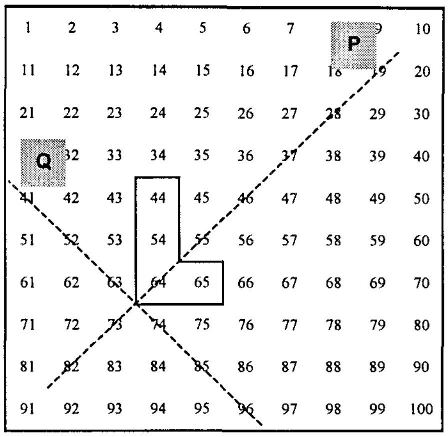


Fig. A5.2-16 (G1-2ªsesión)

R_h

[19] ↔ [21];
y entonces de [21] al [21]?
(J) Con el giro de 180°. (Julia realiza la figura A5.2-14)
(P) Pero esto es sin poner flechas en las cadenas.
(J) Es verdad. (Julia realiza la figura A5.2-15).
(P) Bueno, ahora se complica un poco la cosa. En la figura A5.2-16 tenemos una cadena del [21] y los ejes oblicuos, que son paralelos a las diagonales de la tabla, y pasan por el vértice del patrón. Haz la reflexión de esta cadena según P.
(J) Jolín!
(P) Si P fuera un espejo ¿Qué verías ahí?
(J) (Julia comienza haciendo la reflexión sobre Q).
(P) Bueno, como hay que hacer los dos, da igual que empieces por ése. El 65 pasaría...
(J) Al 83 (Fig. A5.2-17). (Julia toma un trozo de papel vegetal para realizar el trabajo).
(P) Puedes usar los métodos que quieras: retintarlo, doblar el papel, ...
(J) Esto quedaría por aquí. (Figuras A5.2-17 y A5.2-18) (Julia ha utilizado el método de retintar la silueta y doblar el papel por el eje.)
(P) Habría que hacerlo con papel vegetal para que salga exacto. Pero podemos ver cómo éste (tramo vertical) pasaría a horizontal, y al revés ¿no?
(J) Sí.
(P) Vamos a ver si podemos ir escribiendo algo en esta tabla (tabla A5.2-1). Esta cadena, el [21], es el origen ¿no?
(J) Sí
(P) Que con respecto a R_v ha pasado a ser el [19], y con respecto a R_h?

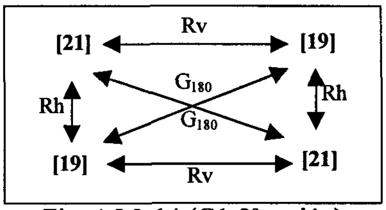


Fig. A5.2-14 (G1-2ª sesión)

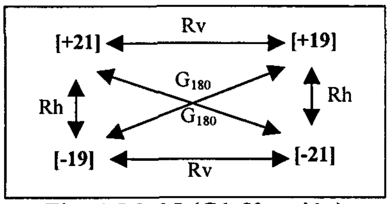


Fig. A5.2-15 (G1-2ª sesión)

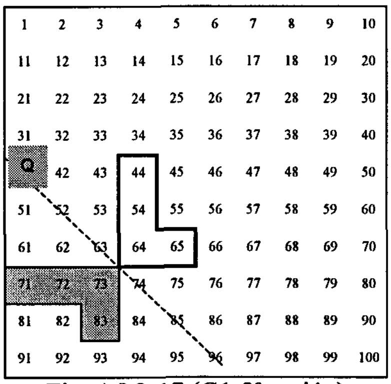


Fig. A5.2-17 (G1-2ª sesión)

cadena/ operador origen	cadena /operador imagen mediante las reflexiones					
	R_v	R_h	R_y	R_z	R_p	R_q
[21]						
[19]						

Tabla A5.2-1 (G1-2ª sesión)

(J) El [19] también.
(P) Respecto a R_y no lo hemos hecho, pero...
(J) [19] también.
(P) Sale [19] para los ejes horizontales o verticales ¿no?
(J) Sí.
(P) Respecto a R_p ¿Qué pasa?
(J) Sale el [12]. (Julia realiza la figura A5.2-18 y va completando la tabla A5.2-2).

Cadena/ operador origen	Cadena/operador imagen mediante las reflexiones					
	R_v	R_h	R_y	R_z	R_p	R_q
[21]	[19]	[19]	[19]	[19]	[12]	[12]
[19]	[21]	[21]	[21]	[21]	[8]	[8]

Tabla A5.2-2 (G1-2ª sesión)

(P) Y con respecto a R_q ...
(J) Derecha 2, bajar 1 (Fig. A5.2-17).
(P) Ahora tomamos el operador [19] y hacemos igual.
(J) [21] con el R_v, R_h y R_y.
(P) ¿Con respecto a R_p y R_q?
(J) Sale el [8].
(P) Bueno ha sido teniendo solamente en cuenta la forma, sin poner flechas.
(J) Ah, bueno, otra vez.
(P) ¿Qué reflexiones modifican al operador [21]? ¿Qué queda igual y qué cambia?

(J) Lo único que cambia es esto. Las verticales.
(P) ¿Las decenas?
(J) Sí.
(P) Entonces la decenas ¿Cómo las deja?
(J) También lo podemos explicar... pasa a la izquierda. Va dos cuadradillos para la izquierda. Aquí sería dos cuadrados para arriba... Lo único que hace es subir dos cuadros o a la izquierda dos cuadros.
(P) Pero ¿Cómo las cambia?
(J) Resta dos.
(P) En lugar de bajar y a la derecha, va a salir a la izquierda. (Julia se refería a que las unidades cambian de sentido).

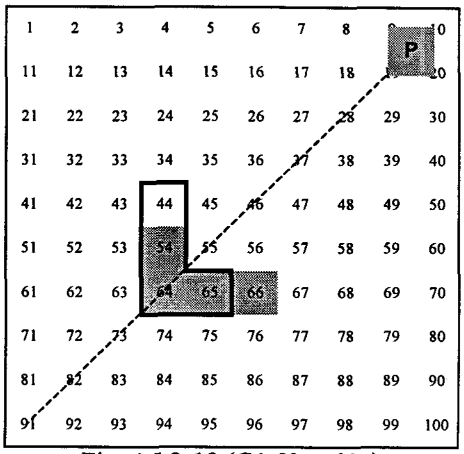


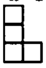
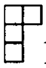
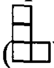
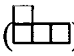
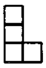
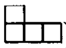
Fig. A5.2-18 (G1-2ª sesión)
Cadena original con trazo grueso.
Cadena imagen sombreada sin trazo.

(P) Dibuja una cadena que quede invariante mediante R_h.
(J) ¿Cómo que quede invariante?
(P) Sí. Que al someterla a una reflexión horizontal, lo que te da, sea el mismo operador.
(J) ¿Sea el operador que sea?
(P) Sí. Te dice que dibujes una a la que le ocurra eso. Que siga siendo el mismo operador después de la reflexión.
(J) (Julia dibuja)
(P) Muy bien. Lo que hemos hecho lo vamos a esquematizar en la tabla A5.2-3

Efecto sobre	R_v	R_h	R_p	R_q
Unidades	Cambia el signo	Lo deja igual o cambia el signo	Cambia unidades por decenas	Cambia el orden y el signo
Decenas	Se conservan igual	Se conservan igual	Cambia unidades por decenas	Cambia decenas por unidades y el signo
Conserva la cadena tipo				

Tabla A5.2-3 (G1-2ª sesión)

(P) Vamos a ver el efecto de R_v sobre las unidades y sobre las decenas. ¿Qué hace R_v con las unidades de una cadena? Las unidades son las que están ...
(J) En fila. En horizontal.
(P) ¿Qué efecto produce?
(J) Restar.
(P) Pasa de sumar ...
(J) A restar.

(P) ¿Y sobre las decenas?
(J) Las deja igual.
(P) ¿Y R_h qué hace con las unidades?
(J) Aquí  se cuentan para la derecha y aquí  hay que contarlas para la izquierda, porque el origen cambia). (Una vez más el hecho de no colocar las flechas en las cadenas le ocasiona errores).
(P) ¿R_p?
(J) Las decenas.... Iguales. (figura A5.2-18)
(P) ¿Qué le pasa a las unidades y qué le pasa a las decenas?
(J) Estas son las unidades del primero (). Que son una.
(P) Una. Vale.
(J) Ah, y ahora tiene dos ().
(P) ¿Y con las decenas?
(J) Antes había (en ) dos, y ahora (en la imagen ) solo hay una.
(P) ¿Qué pasa?
(J) Las unidades aumentan en uno.
(P) ¿Y se te pongo por ejemplo ésta (Fig. A5.2-19; el profesor dibuja la cadena con trazo grueso)
(J) (Julia dibuja solamente la parte sombreada)
(P) ¿Qué ha pasado?
(J) Que aumentan las unidades.
(P) ¿Cuánto aumentan?
(J) Según la decenas.
(P) A las decenas ¿Qué les pasa?
(J) Que disminuyen, según las horizontales que tengan.
(P) Eso es. Que cambia ¿Qué?
(J) El orden. Las unidades a decenas y las decenas en unidades.
(P) ¿Y el R_q?
(J) Pues igual.
(P) Lo mismo ¿no? Pero vamos a ver qué le pasa al signo.

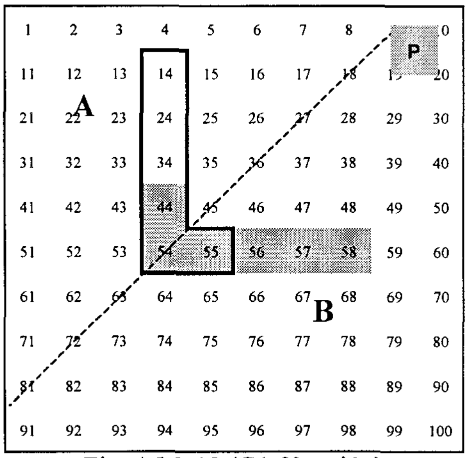
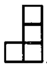


Fig. A5.2-19 (G1-2ª sesión)

En el caso de , (Julia realiza la parte sombreada de la figura A5.2-20), lo que es bajar (positivo) se convierte en...

(J) Negativo. Y lo que era "a la izquierda" se convierte en bajar. No, será subir.
Cambia el orden y el signo.
(de nuevo existe error debido a la ausencia de flechas)
(P) Por último, vamos a dibujar una cadena que se conserve mediante R_v.

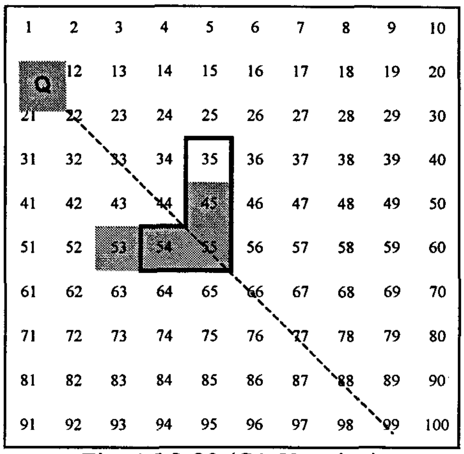


Fig. A5.2-20 (G1-2ª sesión)

(J) Una que esté en vertical. (Julia dibuja)
(P) ¿Y en R_h?
(J) Una horizontal. (Julia dibuja)
(P) ¿Y con R_p qué cadena se podría conservar?
(J) Si tiene sólo una unidad, se queda igual ¿no? O sea, que con solo un cuadradillo...
(P) Claro. Un cuadradillo es el cero. Lo transforma en el cero. ¿Y otro que no tenga solamente una casilla?
(J) O sea ¿Que si es vertical que siga siendo vertical?
(P) No, que si corresponde al operador [14], que (después de la reflexión) siga siendo el [14].
(J) (silencio)
(P) ¿Qué efecto produce R_p?
(J) Que cambia las unidades por las decenas.
(P) Pues tienes que buscar una cadena que al cambiar unidades por decenas se quede igual ¿no?
(J) Sí, pero no se me ocurre (silencio).
(P) Las unidades, ¿Qué son, columnas o filas?
(J) Filas.
(P) ¿Y las decenas?
(J) Filas.
(P) Pues si hacemos uno que tenga igual número de casillas en la fila que en la columna...
(J) Entonces si hago esto (Julia dibuja), se queda igual.
(P) Pero esa cadena no tiene un origen o un final claro. O bien, es el cero, porque coincide la casilla inicial con la final. Dibuja una que tenga un origen y un final claros.
(J) Pues éste (Julia dibuja)
(P) Eso es.
(J) (Julia hace el dibujo de la figura A5.2-21)
(P) ¿Y para R_q? Lo mismo ¿no? Pero hay un cambio de signo.
(J) Sí. (Julia dibuja la fig. A5.2-22).
(P) Eso es. Sería el [11].
(J) Bueno, si aquí tomamos el 53 como origen, sería [11], también.
(P) Sí, en este caso se conserva.

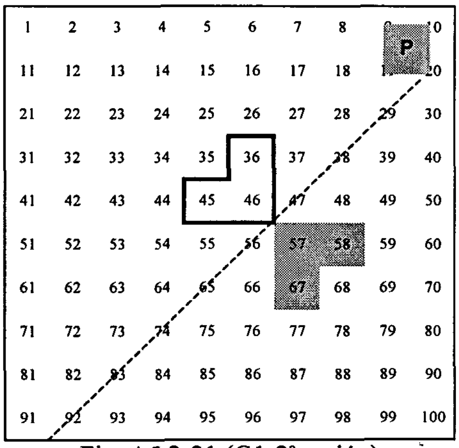


Fig. A5.2-21 (G1-2ª sesión)

La última pregunta. A ver si la entiendes: ¿Depende la acción de una reflexión sobre un operador de la cadena representante que tomemos?
(J) El que hemos hecho antes. Estos de aquí, es a lo que se refiere (Julia señala la última fila de la tabla A5.2-3).
(P) Algunas cadenas tienen distinta forma pero representan al mismo operador ¿no?
(J) Sí.
(P) La pregunta es si una reflexión actúa sobre un representante u otro, el operador resultante siempre va a ser el mismo.
(J) No. Depende del operador que tomemos.
(P) Pero la pregunta es si depende del representante.
(J) No depende del representante.
(P) ¿Que no depende? Por ejemplo: R_v pasa las unidades de más (+) a menos (-). ¿Eso es así siempre sea cual sea el representante que tomemos? La cadena , la sometemos a R_v y nos da ésta (), el [19]. Las decenas las deja igual y las unidades en lugar de sumar ahora van restando. ¿De acuerdo? Entonces, digo: ¿Y si en lugar de tomar este representante del [21] tomamos otro, por ejemplo éste ? Si le aplicamos R_v ¿Me va a dar el [19]?
(El profesor dibuja la figura A5.2-23)
(J) Sí, claro.
(P) ¿En todos los casos?
(J) Sí.

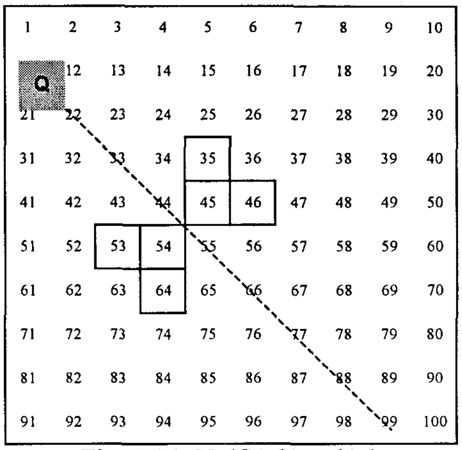


Fig. A5.2-22 (G1-2ª sesión)

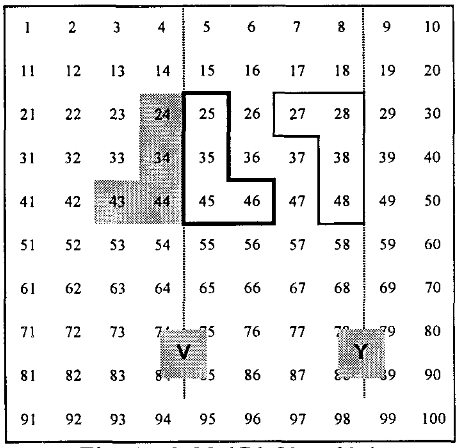


Fig. A5.2-23 (G1-2ª sesión)

(P) Por ejemplo el [6]. Un representante suyo sería . Pero también el [6] puede ser "bajar 1, izquierda 4" ¿no?
(El profesor dibuja).
(J) Sí.
(P) Si sometemos a una reflexión horizontal al primero, el [6] pasa al [6], pero si lo hacemos con el segundo el [6], pasa a ser quién?
(El profesor dibuja la figura A5.2-24, y Julia realiza la parte sombreada)
(J) El [6].
(P) ¿También es el [6]? Fíjate es...
(J) Derecha 4, abajo 1.
(P) Bueno con las flechas sería "subir 1, izquierda 4". Es el [-14].
(J) Sí, sí.

(P) Entonces, fíjate, la reflexión horizontal a un representante del [6] lo transforma en un operador y sobre otro representante del [6] lo transforma en otro distinto. Luego, sí depende de los representantes que tomemos. Bien, lo dejamos aquí.

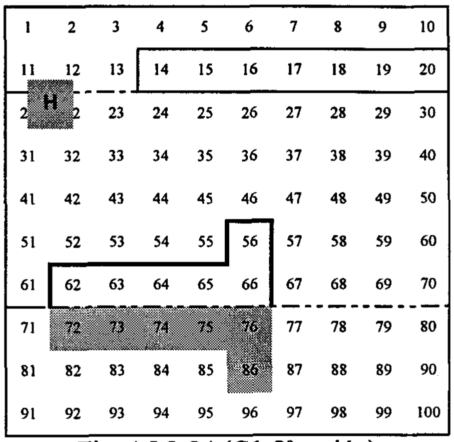


Fig. A5.2-24 (G1-2ª sesión)

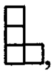
Tercera sesión: Representaciones simbólicas de los operadores aditivos. Las cadenas en la Tabla-100 de k columnas.

Transcripción de la tercera sesión

(P) Te acuerdas de los operadores, ¿no?
(J) Sí.
(P) Estábamos con la L, bajar 2 derecha 1. Recuerda que el sentido de las flechas nos daba si sumamos o restamos. Esta L es una manera de representar [+21], que es sumar 2 decenas y una unidad. El operador [+21] lo podemos representar de varias maneras, como por ejemplo mediante una pareja (bajar 2, derecha 1). Pero podemos pensar en quitar las palabras bajar y derecha y colocar otra cosa, un símbolo, quitarlas, ... lo que queramos. Quiero que me digas tres maneras distintas para expresar [+21] que no sea la .
(J) Tampoco la L al revés ¿no?
(P) Bueno, esa ya la hemos visto. Ahora se trata de una notación que no sea de tipo geométrico. El operador [21] lo podemos expresar así y también mediante el par (bajar 2, derecha 1), y también ...
(J) Sumar 2 decenas...
(P) ¿Cómo lo escribirías?
(J) (+20, +1)
(P) Esa sería una manera. Otra forma.
(J) Podría ser (↓ 2, → 1).
(P) Otra. Siempre tendiendo a lo más simple. Después elegirás la más sencilla y con esa trabajaremos.
(J) ¿Me hace falta poner números?
(P) Pon lo que quieras.
(J) Por ejemplo (↓ , →).
(P) Muy bien. ¿Se te ocurre otra más simple?
(J) Como no sea quitando ya las flechas...
(P) Bien.
(J) (Julia escribe (,)).
(P) ¿Con qué te quedas, con los cuadricos o con los números?
(J) Con los números.
(P) Escríbelo.
(J) El que yo quiera ¿no? (Julia escribe (↓ 2, → 1)).

(P) Has dicho de quitar las flechas ¿no?
(J) No. Es que si quito las flechas... Ah! al ponerlo aquí (a la derecha) se supone que...

(P) ¿Sobreentiendes que esta primera componente es bajar y ésta es derecha?. ¿Qué significa este par (2, 1)?
(J) Bajar 2, derecha 1.

(P) Con ese modo de representar esta , escribe cómo sería el [+19].
(J) Pues lo mismo: bajar 2, izquierda 1. (Julia empieza a escribir: bajar)
(P) Pero con la misma notación que antes.
(J) Ah! Se supone que esto (la 1ª componente) es bajar ¿no?
(silencio)
(P) Se puede escribir de varias maneras ¿no?
(J) (Julia escribe (10, 9)).
(P) Entonces estás utilizando la otra notación. Sumar 10 y sumar 9.
(J) (Julia escribe (1, 9))
(P) ¿Cómo lo podemos notar también?
(J) ¿De esta forma?
(P) Sí. (silencio)
Bajar 1 y derecha 9, sería equivalente a qué?
(El profesor dibuja ) Si lo colocamos en el 1, la última casilla...
(J) Sería el 20.
(P) ¿De qué otra manera podemos llegar aquí (al 20)?
(J) Como no sea bajar 2 y luego subir..., pero...
(silencio)
(P) Lo hacemos sobre la tabla de 10 x 10. Lo aplicamos al 22. Del 22, más 19...
(J) 31.
(P) No, es 41.
(J) Eso.
(P) Pues sería esto ¿no? (cadena A de la figura A5.2-25) Bajar 1, derecha 9, es lo mismo que ...
(J) Ah! Es que yo me creía que el segundo tiene que ser a la fuerza "derecha".
(P) Claro. Pero si derecha es sumar, izquierda será restar ¿no?
(J) Claro.
(P) Esto (cadena A de la figura A5.2-25) sería bajar 2, izquierda 1 ¿no? Lo podremos escribir como (2, -1) ¿no?
(J) Sí.
(P) ¿Qué sería?
(silencio)
(P) Pues sumar 20 y restar 1 ¿no? Hay otras formas, pero esta es la más simple (geométricamente)

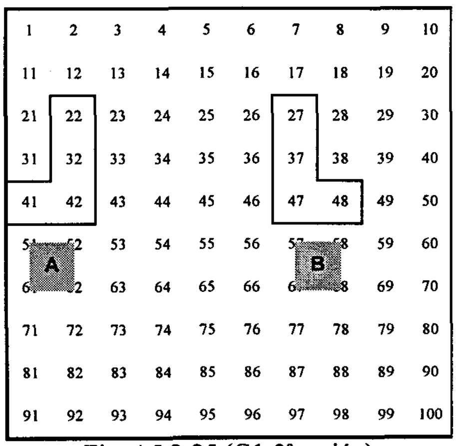


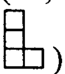
Fig. A5.2-25 (G1-3ª sesión)

(P) ¿Cómo escribirías el [-12]?
(J) Por ejemplo, subir 10, ...(Julia escribe (-10, -2)
(P) Bueno, como hemos dicho que la primera componente son decenas, ...

(J) Pues sería (-1, -2)
(P) ¿Y otra manera?
(J) (Julia escribe (-2, 8)).
(P) Que es restar 20 y sumar 8 ¿no?
(J) Sí.
(P) De acuerdo. Los pares estos equivalentes ¿Qué van a cumplir?
(J) No entiendo...
(P) Si generalizamos (a, b) será "sumar **a** decenas, sumar **b** unidades".
Si pongo (-a, b) será " restar **a** decenas y sumar **b** unidades". Si te pongo (x, y) ¿Qué número sería ese, en nuestro sistema? (silencio)
(P) Si te escribo (2, 1) es el [21]; (7, 8) es el [78]; ¿Si pongo el (-1, 4) ...?
(J) Es que hace falta saber el dibujico.
(P) El (2, 1) es el operador [21].
(J) **x** decenas ... **y** unidades
(P) ¿Cómo escribimos **x** decenas? (silencio)
(J) Pues **x** cero unidades, o **xx**, o como quiere que lo diga ...
(P) ¿Sería **x0** unidades más **y** unidades?
(J) Sí.O **xy** unidades.
(P) Bueno, pues lo podemos escribir $\mathbf{xy}_{(10}$ unidades ¿no?
(El profesor escribe: $\mathbf{xy}_{(10} = x10 + y1 = x10^1 + y10^0$)
(J) Eso es ya buscarle los tres pies al gato.
(P) Esto es la descomposición polinómica de un número, en base 10 ¿no? Esto estaría escrito en base ...
(J) Diez.
(P) De acuerdo. Vamos a hacer la composición de [+19] más [+5], con esta notación.
(J) Sería (Julia escribe (1, 9) (0, 5))
(P) ¿Y aquí en medio, (entre los dos pares) qué pondrías?
(J) (Julia escribe el signo +).
(P) ¿Y cómo sumarías estas dos parejas?
(J) Sería igual a (2 , 4).
(P) ¿Por qué te sale (2 , 4)?
(J) Unidades con unidades y decenas con decenas.
(P) 1 y 0, uno, ...
(J) He empezado por las unidades.
(P) Bueno, 9 y 5, 14.
(J) Pero con 14 hay una decena, ...
(P) Bien, por eso te sale este 2 ¿no? Hay muchas maneras de escribirlo. Pon también esta (1, 14).
¿Cómo sumarías [-12] con [+8]?
(J) (-1, -2) + (0, 8) = ... (silencio) Un momento...
(P) Aplica la regla que has dicho.
(J) Las unidades son 6. Sale (-1, 6).
(P) ¿Y otra forma de escribirlo?

(J) Pues el (0 , - 4).
(P) Por último, [-12] con [-19].
(J) (Julia escribe (-1, -2) + (-2, -1))
(P) ¿Por qué escribes el [-19] como (-2, -1)?
(J) Subo 2, que son 20, menos 1,... 19. Es subir 2, que son -20, izquierda 1, que es restar.
(P) Eso es restar 21. ¿No? Si [-12] es (-1, -2), el [-19] será (-1, -9) ¿No?
(J) También.
(P) O bien (el profesor escribe [-19] = (-1, -9) = (-2, +1)) Restar dos decenas y ...
(J) Sumar uno.
(P) ¿Cómo haríamos esa suma?
(J) (Julia escribe y dice (-3, -1))
(P) Sería el operador [-31]. Hemos visto un sistema (de representación) gráfico (las cadenas), hemos hecho una notación, y hemos desembocado en la suma de parejas de números enteros. ¿Cómo expresarías la regla para sumar las parejas
(J) Primero hemos sumado las unidades con unidades y decenas con decenas.
(P) ¿Te acuerdas de las propiedades que tenía esta operación en el conjunto de los operadores?
(J) El elemento neutro ¿no? ¿La conmutativa también?
(P) También la asociativa y el elemento simétrico. Por ejemplo ¿Cuál sería el elemento neutro?
(J) Pues el mismo operador pero con signo menos.
(P) Ese es el simétrico ¿no?
(J) Ah! Entonces ¿Cuál era el neutro? Era el que daba cero...
(P) Si tenemos un operador x, al componerlo con el neutro, nos da el mismo x. ¿Quién sería el neutro?
(J) Pues eso es lo que decía yo. Ah, no.
(P) En el campo gráfico era una casilla, o un anillo cerrado. Es el operador 0 ¿no? ¿Cómo lo escribirías con la notación anterior?
(J) (Julia escribe: El. neutro = (0, 0))
(P) ¿Cómo comprobarías que éste es el elemento neutro?
(J) Pues siendo la suma de estos. Por ejemplo, con el 19, ...
(P) Pero hazlo en general. Si lo haces con letras valdría para todos ¿no? Con un número no sería una demostración.
(J) Por ejemplo el [a] ⊕ [0]
(P) Habrá que ponerlo en forma de parejas. ¿Cuál sería el **a**?
(J) Pues el **a.**
(P) ¿Cuántas decenas?
(J) Ah. El (0, a) (Julia escribe: [+a] ⊕ [0] = (0, a)+(0,0) = (0,a))
(P) Está comprobado ¿no?
(J) Pero si pongo decenas tendría que poner aquí algo (señalando en la primera componente).
(P) Pero como lo hemos hecho en general no sabemos si las unidades son mayores o no que nueve. De todas formas podemos considerar que hay decenas y unidades, o sea el par (a, b). Pero de todas formas saldría ¿no?
(P) Vamos a ver cuál sería el simétrico. ¿Cuál sería el simétrico de (a, b)?
(J) (Julia escribe y dice (-a, -b))
(P) Se ve claro. Al sumar nos va a dar el (0, 0).

(P) ¿La propiedad asociativa?
(J) También.
(P) ¿Por qué?
(J) Porque da igual sumar 5 y 3 que 3 y 5.
(P) Esa es la conmutativa.
(J) Ah, sí. Hoy por Dios.
(P) Bueno, se cumple también porque la suma de números enteros la cumple.
(P) ¿Y la ley de composición interna? ¿Tenemos garantizado que al sumar dos parejas nos da otra pareja?
(J) Sí.
(P) Fíjate. Lo que hemos hecho ha sido dar un paso más y pasar de lo geométrico a lo aritmético y algebraico.
(J) Sí.
(P) Vamos a considerar la misma tabla pero con 7 columnas. Vamos a ver qué es lo que pasa. Esta cadena, "bajar 2 derecha 1" era [+21] pero en esta tabla (tabla de 10x10). Vamos a ver si aquí (en la tabla de 7 columnas) va a seguir siendo igual o no. Dibuja en la tabla la cadena 21.
(J) Pero ...
(P) Dibuja una cadena que signifique sumar 21. (Julia dibuja la cadena A de la figura A5.2-26).
(P) Tiene (la cadena) la misma forma que antes?
(J) No.
(P) Al cambiar el número de columnas cambia la forma si queremos que se conserve el operador ¿no?
(J) Sí.
(P) Esta cadena (Fig. G1-3.3A); exprésala aquí en la notación nuestra.
(J) (Julia escribe (+3, 0) = [+21]). Bajar 3 y a la derecha cero.

(P) Ahora, esta () es nuestra cadena 21 en la tabla de 10 x 10. Si la colocamos aquí (en la tabla de 7 columnas) ¿Qué operador representa? Colócalo aquí.
(J) El 15. (cadena B de la figura A5.2-26)
(P) Escribe este operador con nuestra notación de pares.
(J) (Julia escribe (2, 1)).
(P) Ahora, la pregunta del millón. Te la leo para ver si la entiendes. ¿Encuentras alguna manera de representación numérica...
(J) Eso ...
(P) ...de representar los números, para que esta L se siga representando por 21 en la tabla de 7 columnas?
(J) Vamos a ver. Hacerlo de esta forma...

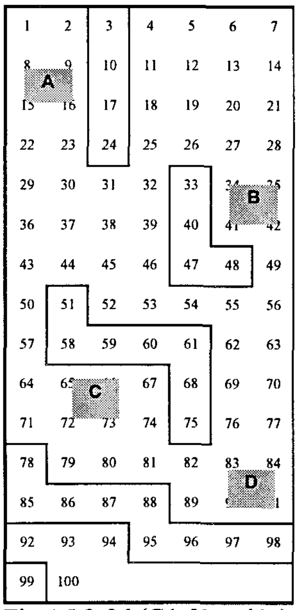
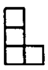
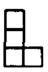


Fig.A5.2-26 (G1-3ª sesión)

(P) La cadena  en la tabla de 10x10 representa al 21 y en la tabla de 7 columnas representa ...
(J) Al 15.
(P) En la tabla de 7 columnas...
(J) ¿Una L que represente 21?

(P) ¿Cómo me las apaño yo para que esta L siga siendo el “dos, uno”; No digo veintiuno, sino el “dos, uno”, en la de 7 por 15. ¿Entiendes la pregunta?
(J) Vamos a ver. Es que en esta tabla sigue siendo el dos, uno.
(P) Ah. Bien! Sigue siendo el 2, 1 en el sentido de "bajar 2 y derecha 1".
(J) Aunque sea el operador 15.
(P) Eso es. Y el operador es ...
(J) El quince.
(P) Vamos a dar otro paso más. ¿Cómo nos las arreglamos para que el operador también sea el dos, uno (21)?
(J) Bajando 2 y derecha 1 ¿no? ... ¿Y que sea el operador 15?
(P) No, que sea el operador 21; “dos, uno”. Que este 15 se escriba con el “dos, uno”. ¿Cómo cambiamos la manera de escribir los números?
(J) Mover estos números.
(P) Escribirlos de otra manera. El 5 lo podemos escribir: 5, o bien V, o bien IIIII, o con un garabato que nos inventemos ¿no? Antes hemos dicho que xy vale x por 10 + y por 1, porque bajar un lugar era una decena, pero aquí bajar un lugar ¿Qué es?
(J) ¿Bajar un lugar? Sumar 10.
(P) No.
(J) No. Sumar 7. Vamos a ver.
(P) Ya no son decenas, son septenas ¿no? Entonces el 21, el “dos, uno” expresado como antes, sería...
(J) Bajar 2, derecha 1.
(P) Sería igual que...
(J) Sumar 2.
(P) Sumar 2 ¿qué? Antes eran dos decenas.
(J) Pues 2 septenas.
(P) (El profesor escribe: [+21] = (2, 1) = bajar 2, derecha 1 = sumar 2 septenas y 1 unidad) ¿Cómo escribimos 2 septenas?
(J) 2 por 7.
(P) Más uno...
(El profesor termina de escribir: [+21] = (2, 1) = bajar 2, derecha 1 = sumar 2 septenas y 1 unidad = + 2 x 7 + 1)
(P) O como antes habíamos dicho: $2 \times 7^1 + 1 \times 7^0$.
(J) Sí.
(P) Ahora en lugar de hablar de decenas hablamos de ...
(J) De septenas.
(P) ¿Te suena eso? ¿Te sugiere alguna idea?
(J) Pues no. Así en frío ... ¿A la fuerza tiene que acabar como una L?
(P) No. La cadena "bajar 2, derecha 1", que en la tabla de 10x10 significaba 21, en la de 7 columnas significa 15. ¿No?
(J) Pero que utilizando esto, el 2 x 1 en la tabla del 7 me dé 21.
(P) Te dé “dos, uno”.
(J) Hombre, es que si hacemos así (cadena C de la figura A5.2-26), bajamos 1, ya son 7, nos vamos 3 a la derecha, ya tenemos 10, si bajamos otro ...No, ya bajamos más.

(P) Dices, bajar (siete)... Es que es esto. Al bajar 21, es esta I que has hecho (cadena A de la figura A5.2-26).
(J) Entonces sería por aquí (cadena D de la figura A5.2-26).
(P) Has bajado 7.
(J) Siete y tres 10, y otros 7...
(P) Al final llegas a ésta (la I primera.) Luego vas a bajar otro más y terminas aquí (79).
(J) No. Siete ¿no? (señala del 78 al 79)
(P) Vale.
(J) Y tres (señala del 85 al 88) 10, y 7 diecisiete. Me falta un número.
(P) Bueno. Lo añadimos.
(J) Y 4 (del 95 al 99), 21. Ya no es un palo para abajo.
(P) Has empezado aquí (78) y has terminado aquí (el 99). Es una cadena que también es 21, pero se reduce a esta más simple (la que va del 78 al 99).
(P) Aquí hemos descompuesto el número donde el protagonista es el 7.
$21 = 2 \times 7^1 + 1 \times 7^0$; 7 elevado a 1, siete elevado a 0. ¿Te recuerda algo eso? ¿De sistemas de numeración o algo de eso?
(J) Ahora mismo, no.
(P) Si escribimos la tabla en base 7... (Fig. A5.2-27)
1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 que se escribe 10 en base 7 ¿no? (Tabla de la figura A5.2-27).
(J) Sería 1, y no 10.
(P) Uno, cero.
(J) Al llegar al 7 empezábamos otra vez con el 1.
(P) Pero esto sería 0 unidades y 1 septena. En base 10, sería 0 unidades y 1 decena; en base 7 será 0 unidades y 1 septena.
(J) Sí. Yo es que siempre he puesto 1 y luego he empezado por el 2.
(P) Eso es. El siguiente sería el 11. Vamos rellenando unidades. 12, 13 que no es el trece, sino el uno tres.
(J) No me acuerdo yo de eso. Sí. Luego empezaría por el 3, 31, 32, ...
(P) Vamos a dibujar el cadena aquí. Bajar 2, derecha 1.
(Fig. 3)
(J) Espera un momento. ¿Estamos trabajando en base 7 o en la tabla de 7 columnas?
(P) Ahora ya con las dos cosas. Estamos en una tabla de 7 columnas pero cada número está escrito en base 7. Entonces la L famosa pasa del 3 al 24, que no sería el veinticuatro, sino el "dos, cuatro", que en base 7 sería 4 + 2x7 que es 18 (en base 10).
(El profesor escribe: $3_{(7} \rightarrow 24_{(7} = 4 + 2\text{x}7 = 18$)
Además podemos poner que
 = "bajar 2, derecha 1" = (2, 1) = [$+21_{(7}$]
(J) Ah, ya lo entiendo.
(P) Sí es el 21, pero en base 7. El operador 21 pero escrito en base 7. Entonces, si ponemos k columnas, se mantendrá todo igual (la misma forma de los operadores con el mismo

1	2	3	4	5	6	10
11	12	13	14	15	16	20
21	22	23	24	25	26	30
31	32	33	34	35	36	30
41	42	43	44	45	46	50
61	62	63	64	65	66	70
71	72	73	74	75	76	80
81	82	83	84	85	86	90
.	.	.	.	.	.	.

Fig. A5.2-27 (G1-3ªsesión)

significado) si escribimos la tabla en base k.
(J) Ahora lo pillo.
(P) Queda una actividad, pero como no tiene mucha relación con lo de hoy lo veremos el próximo día.

Anexo 6.1

Programa en Q-Basic para obtener las tablas (m, k) al introducir el módulo, número de filas y número de columnas

```
CLS
INPUT "dame el módulo"; b
INPUT "dame nº de filas "; p
INPUT "dame nº de columnas"; q
k = 1
DIM a(p, q)
FOR i = 1 TO p
FOR j = 1 TO q
a(i, j) = k
r = k - INT(k / b) * b
IF r = 0 THEN COLOR 15, 3, 14: GOTO 10
COLOR 15, 1, 14
10 PRINT USING "### "; a(i, j);
k = k + 1
NEXT j
PRINT
NEXT i
```

Anexo 6.2

Procedimientos realizados con MAPLE V para el estudio de las tablas (m, k)

Procedimientos auxiliares

* coorx(p,k): devuelve la abscisa del elemento p de T100 en una tabla de k columnas, según el sistema de referencia establecido.

* coory(p,k): devuelve la ordenada del elemento p de T100 en una tabla de k columnas, según el sistema de referencia establecido.

* boolrango(px,py,k): devuelve true si las coordenadas (px,py) verifican:

$1 \leq px \leq k$,
$0 \leq py \leq$ número de filas en T_{100} de k columnas,
$1 \leq py.k+px \leq 100$.

En otro caso devuelve *false*.

Procedimiento:

```
with(plots):
coorx:=proc(p,k);
if p mod k = 0 then k else p mod k fi
end:


coory:=proc(p,k);
if p mod k = 0 then iquo(p,k)-1 else iquo(p,k) fi;
end:


boolrango:=proc(px,py,k);
if px<1 or px>k or
  py<0 or py>iquo(100,k) or
  py*k+px>100 or py*k+px<1
then false else true fi;
end:
```

Ejemplos:

La tabla siguiente muestra la respuesta (salida) que ofrece el programa ante la entrada introducida.

Entrada	Salida
coorx(90,10);	10
coory(90,10);	8
coorx(78,6);	6
coory(78,6);	12
boolrango(5,7,6);	true
boolrango(7,8,6);	false

*** tramos(m,k,c,d,p).**

Este procedimiento proporciona el número de tramos de que consta un patrón en una tabla (m, k) definido por la cadena C(c, d) y comenzando en un elemento p de T_{100}.

Entrada:
m: módulo,
k: número de columnas en la tabla.
c,d componentes vertical y horizontal, respectivamente, con su signo, de una cadena.
p: elemento de T100 por donde pasa el patrón.

Salida:
- número de "tramos" paralelos de pendiente (c,d) que tienen puntos en la clase de p (mod m), (un tramo no se corresponde con una recta en T_{100}, -tal como está definida la recta en la nuestro trabajo-, sino que una recta puede estar formada por varios tramos).
- los puntos pertenecientes a cada tramo, y
- el dibujo de los tramos en la tabla correspondiente.

Procedimiento:

tramos:=proc(m,k,c,d,p);
*if not k*c+d mod m = 0 then ERROR(`la pendiente (c,d) no es múltiplo de m`) fi;*
if p<=m then q:=p else if p mod m =0 then q:=m else q:=(p mod m) fi; fi;

Cálculo de la clase de p módulo m, en T_{100} y en coordenadas; (estos datos se almacenan en un conjunto y en una lista, respectivamente, llamados "mulm" y "mulmcoor"):

```
mulm:={q};
mulmcoor:=[[coorx(q,k),-coory(q,k)]];
while q < 100 do
  q:=q+m;
  if q<=100 then mulm:=mulm union {q}; mulmcoor:=[op(mulmcoor),
[coorx(q,k),-coory(q,k)]]  fi;
od;
lprint(`Lista de múltiplos: `, mulm, `donde hay `, nops(mulm), ` elementos.`);
mulmcoorplot:=plot(mulmcoor,style=point,symbol=box, axes=none);
```

Obtención del geoplano de k columnas:

```
nfil:=iquo(100,k);
t100k:=[];for i from 1 to k do for j from 0 to nfil-1 do t100k:=[op(t100k),[i,-j]] od od;
for i from 1 to 100-(k*nfil) do t100k:= [op(t100k),[i,-nfil]] od;
t100kplot:=plot(t100k,x=1..k,style=point,colour=brown,axes=none);
```

Cálculo de cada tramo:

```
contador:=0;
listaplots:=[];
lprint(`Los tramos son: `);
while nops(mulm)>=1 do
    q:=op(1,mulm);
    untramo:={q};
    a:=coorx(q,k);
    b:=coory(q,k);
    origentramo:=[a,-b];
        while boolrango(a,b,k) do
        a:=a+d;
        b:=b+c;
        if boolrango(a,b,k) then untramo:=untramo union {k*b+a}; finaltramo:=
       [a,-b]; fi;
        od;
    contador:=contador+1;
    lprint(untramo);
    mulm:=mulm minus untramo;
    if not nops(untramo)=1 then
       listaplots:=[op(listaplots),plot([origentramo,finaltramo],axes=none)] fi;
od;
lprint(`El número de tramos es: `,contador);
display(t100kplot,listaplots,mulmcoorplot);
end:
```

Ejemplos:

*** tramos(5, 7, 2, -1, 5);**

Error, (in tramos) la pendiente (c,d) no es múltiplo de m.

*** tramos(5, 7, 2, 1, 5);**

Lista de múltiplos:

{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100}

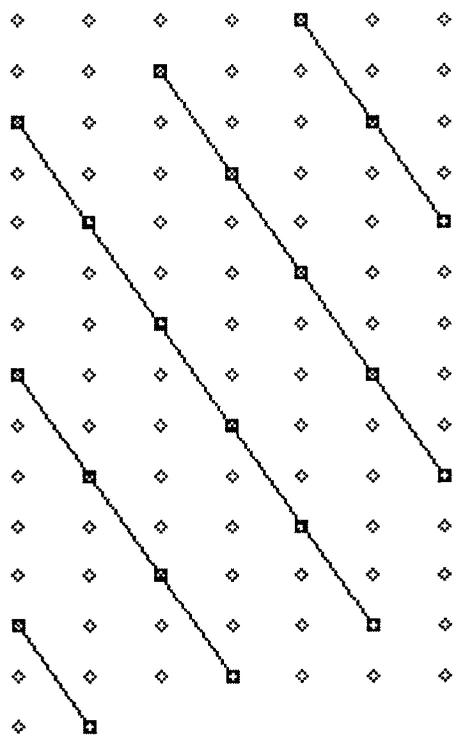
donde hay 20 elementos. En el dibujo dichos múltiplos vienen recuadrados.

Los tramos son:

{5, 20, 35}; {10, 25, 40, 55, 70}; {15, 30, 45, 60, 75, 90}; {50, 65, 80, 95}; {85, 100}.

El número de tramos es: 5

Dibujo de los tramos:



*** tramos(3, 4, 1, 2, 1);**

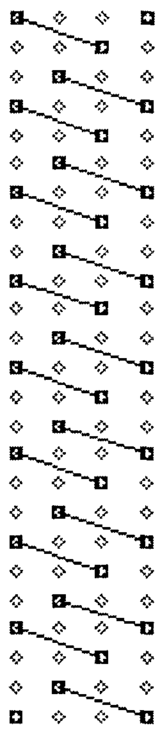
Lista de múltiplos: {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97, 100} donde hay 34 elementos.

Los tramos son:

{1, 7}; {4}; {10, 16}; {13, 19}; {22, 28}; {25, 31}; {34, 40}; {37, 43}; {46, 52}; {49, 55}; {58, 64}; {61, 67}; {70, 76}; {73, 79}; {82, 88}; {85, 91}; {94, 100}; {97}

El número de tramos es: 18

Dibujo de los tramos:



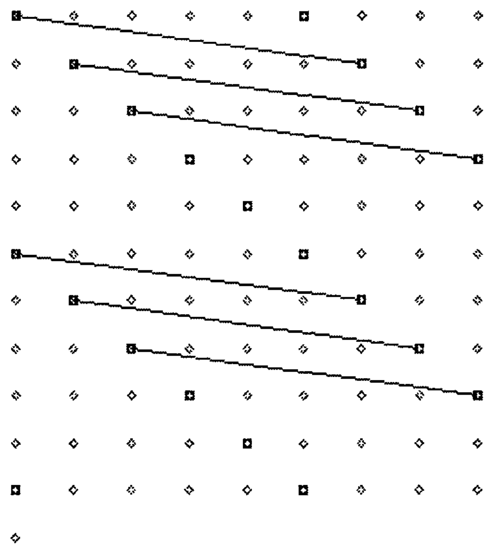
*** tramos(5, 9, 1, 6, 1);**

Lista de múltiplos: {1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96} donde hay 20 elementos.

Los tramos son: {1, 16}; {6}; {11, 26}; {21, 36}; {31}; {41}; {46, 61}; {51}; {56, 71}; {66, 81}; {76}; {86}; {91}; {96}

El número de tramos es: 14

Dibujo de los tramos:



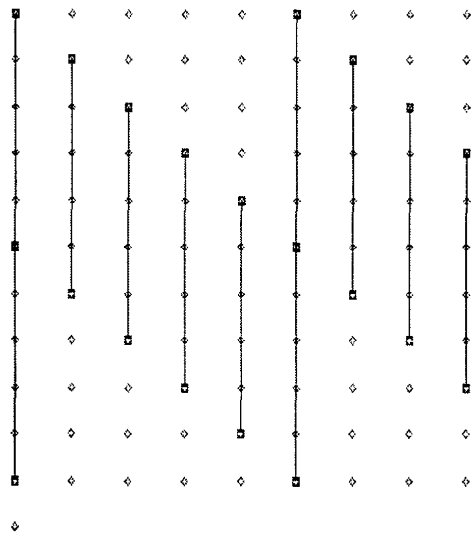
*** tramos(5, 9, 5, 0, 1);**

Lista de múltiplos: {1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96} donde hay 20 elementos.

Los tramos son: {1, 46, 91}; {6, 51, 96}; {11, 56}; {16, 61}; {21, 66}; {26, 71}; {31, 76}; {36, 81}; {41, 86}

El número de tramos es: 9

Dibujo de los tramos:



*** recta(m, k, c, d, p).**

Entrada:
m: módulo,
k: número de columnas en la tabla.
c,d componentes horizontal y vertical, respectivamente, con su signo, de una cadena.
p: elemento de T100.
Salida:
- la recta de pendiente (c,d) en T_{100} de k columnas que pasa por p,
- la composición y el número de tramos de que se compone dicha recta,
- el dibujo de la recta en la tabla correspondiente.

Procedimiento:

```
recta:=proc(m,k,c,d,p);
maux:=k*c+d;
if not maux mod m = 0 then ERROR(`la pendiente (c,d) no es múltiplo de m`) fi;
if p<=maux then q:=p else if p mod maux =0 then q:=maux else q:=(p mod maux) fi;
fi;
nfil:=iquo(100,k);
t100k:=[];for i from 1 to k do for j from 0 to nfil-1 do t100k:=[op(t100k),[i,-j]] od od;
for i from 1 to 100-(k*nfil) do t100k:= [op(t100k),[i,-nfil]] od;
t100kplot:=plot(t100k,x=1..k,style=point,colour=brown,axes=none);
```

*** Cálculo de los puntos alineados con p según la cadena (c, d), en T_{100};**

```
mulm:={q};
mulmcoor:=[];
contador:=0;
listaplots:=[];
lprint(`Los tramos son: `);
while q<=100 do
    untramo:={q};
    a:=coorx(q,k);
    b:=coory(q,k);
    origentramo:=[a,-b];
        while boolrango(a,b,k) do
          mulmcoor:=[op(mulmcoor),[a,-b]];
          a:=a+d;
          b:=b+c;
          if boolrango(a,b,k) then untramo:=untramo union {k*b+a}; finaltramo:=
          [a,-b]; fi;
        od;
    contador:=contador+1;
    lprint(untramo);
    if not nops(untramo)=1 then
       listaplots:=[op(listaplots),plot([origentramo,finaltramo],axes=none)] fi;
    q:=b*k+a;
    mulm:=mulm union untramo;
```

```
od;
lprint(`El número de tramos es:`,contador);
lprint(`Puntos alineados con `, p,` respecto de la cadena (`,c,`,`,d,`):`,mulm);
mulmcoorplot:=plot(mulmcoor,style=point,symbol=box, axes=none);
display(listaplots,t100kplot,mulmcoorplot);
end:
```

Ejemplos:

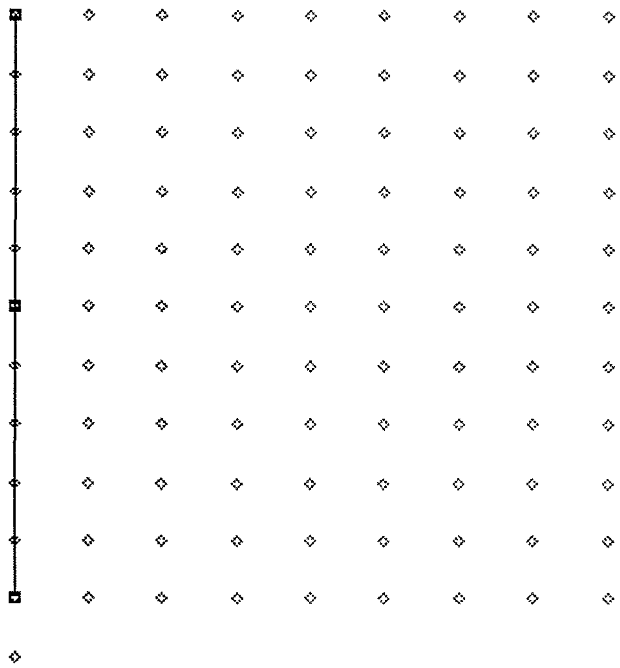
*** recta(5, 9, 5, 0, 1);**

Los tramos son: {1, 46, 91}

El número de tramos es: 1

Puntos alineados con 1 respecto de la cadena (5^+, 0): {1, 46, 91}

Dibujo de la recta:



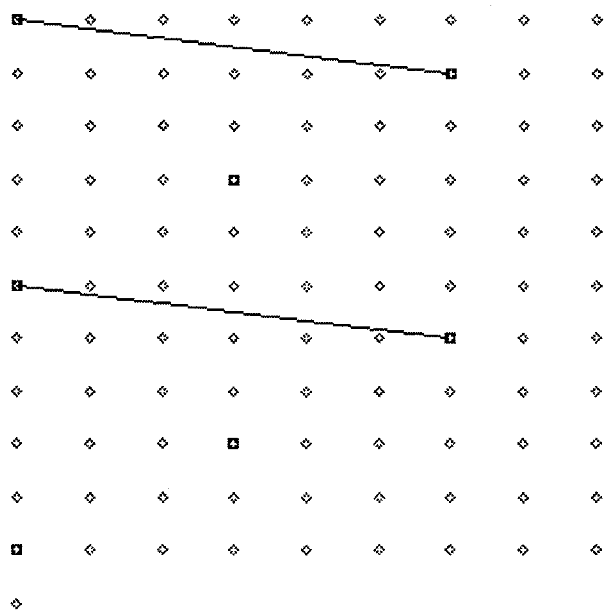
*** recta(5, 9, 1, 6, 1);**

Los tramos son: {1, 16}; {31}; {46, 61}; {76}; {91}

El número de tramos es: 5

Puntos alineados con 1 respecto de la cadena (1^+, 6_+): {1, 16, 31, 46, 61, 76, 91}

Dibujo de la recta:



*** recta(3, 10, 1, -1, 1);**

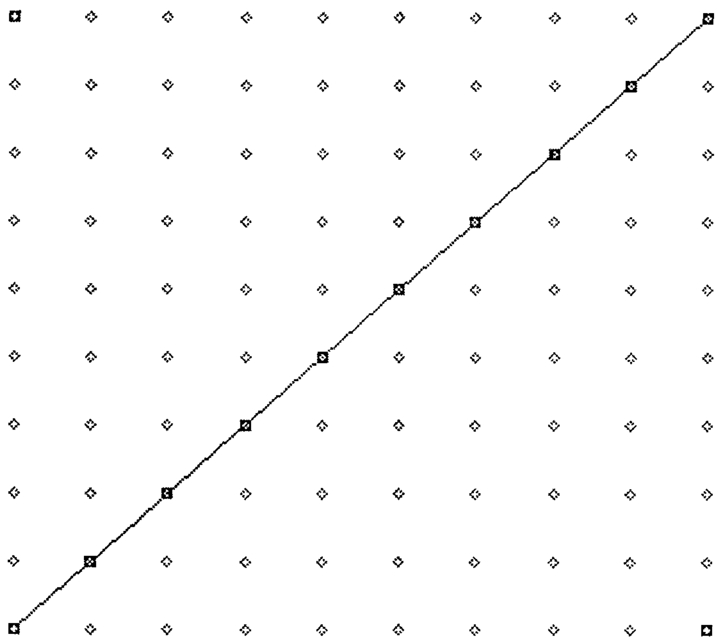
Los tramos de la recta son: {1}; {10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91}; {100}

El número de tramos es: 3

Puntos alineados con 1 respecto de la cadena (1^+, 1.):

{1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100}

Dibujo de la recta:



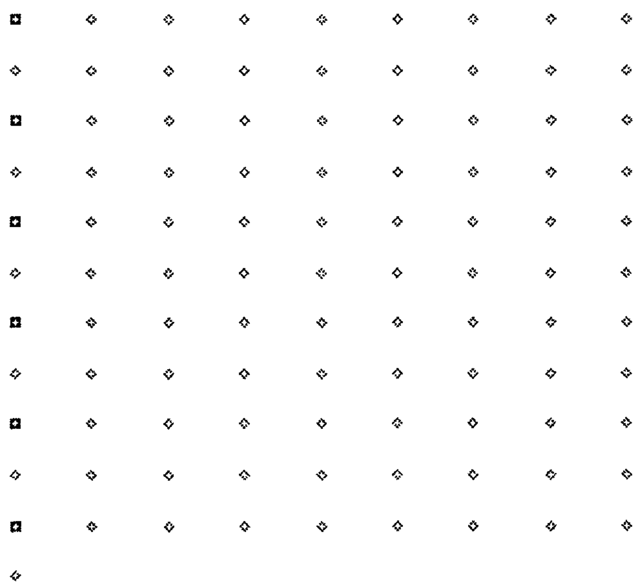
*** recta(3, 9, 1, 9, 1);**

Los tramos son: {1}; {19}; {37}; {55}; {73}; {91}

El número de tramos es: 6

Puntos alineados con 1 respecto de la cadena (1^+, 9_+): {1, 19, 37, 55, 73, 91}

Dibujo de la recta:



*** recta(4, 6, 1, -2, 1);**

Los tramos son:

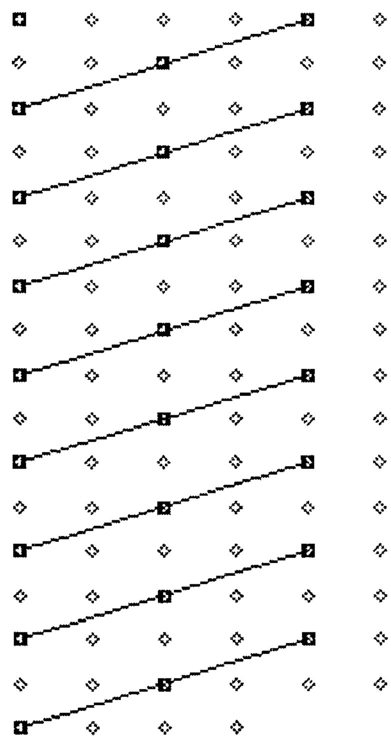
{1}; {5, 9, 13}; {17, 21, 25}; {29, 33, 37}; {41, 45, 49}; {53, 57, 61}; {65, 69, 73}; {77, 81, 85}; {89, 93, 97}

El número de tramos es: 9

Puntos alineados con 1respecto de la cadena (1^+, 2.):

{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97}

Dibujo de la recta:



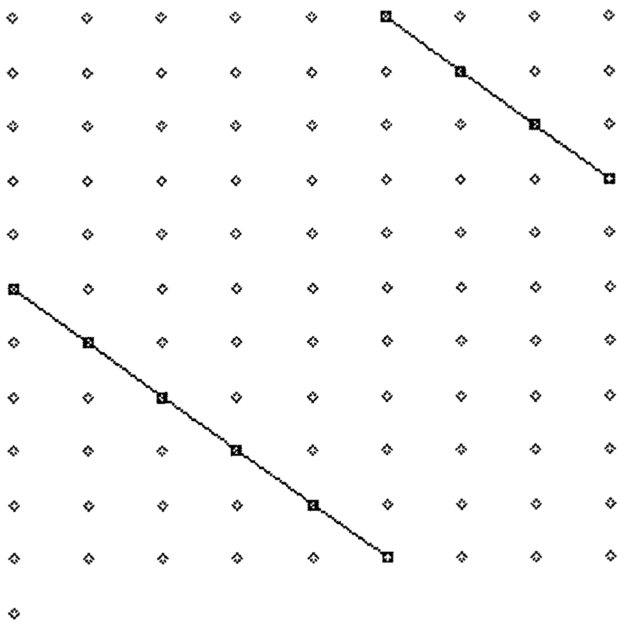
*** recta(5, 9, 1, 1, 6);**

Los tramos son: {6, 16, 26, 36}; {46, 56, 66, 76, 86, 96}

El número de tramos es: 2

Puntos alineados con 6 respecto de la cadena (1^+, 1_+): {6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96}

Dibujo de la recta:



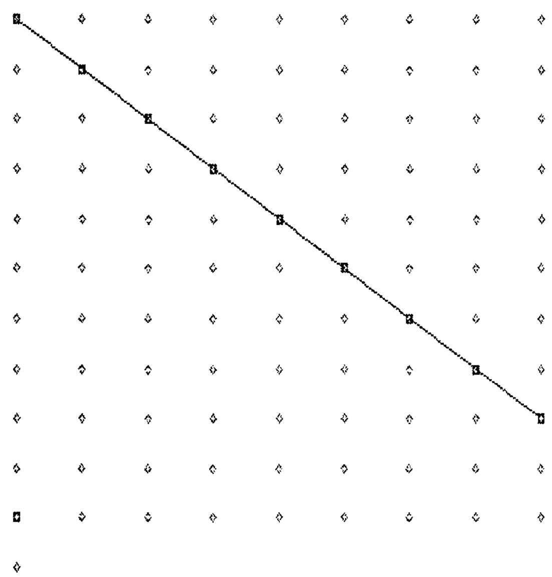
*** recta(5, 9, 1, 1, 1);**

Los tramos son: {1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81}; {91}

El número de tramos es: 2

Puntos alineados con 1 respecto de la cadena $(1^{+}, 1_{+})$: {1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91}

Dibujo de la recta:



*** recta(5,9,1,-4,1);**

Los tramos son:

$\{1\}$; $\{6, 11\}$; $\{16, 21\}$; $\{26, 31\}$; $\{36, 41, 46\}$; $\{51, 56\}$; $\{61, 66\}$; $\{71, 76\}$;

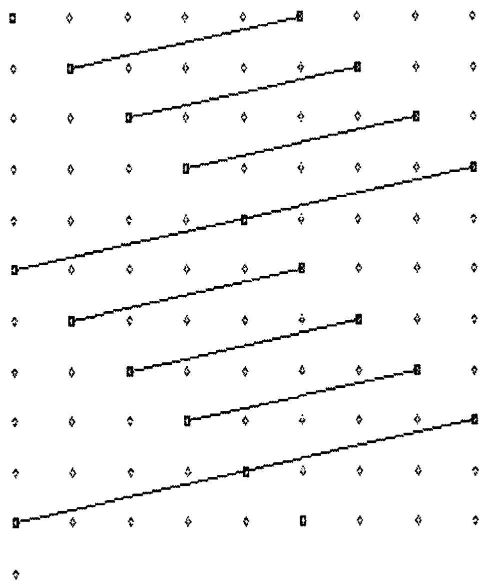
$\{81, 86, 91\}$; $\{96\}$

El número de tramos es: 10

Puntos alineados con 1 respecto de la cadena (1^+ ,4.):

$\{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96\}$

Dibujo de la recta:



*** pends(m, k, p).**

Entrada:
m: módulo,
k: número de columnas en la tabla.
p: elemento de T100.
Salida:
- todas las pendientes posibles desde el punto p en la tabla (m, k) en forma de pares (componentes de la cadena).
- una representación gráfica de las pendientes.

Procedimiento:

```
pends:=proc(m,k,p);
if p<=m then q:=p else if p mod m =0 then q:=m else q:=(p mod m) fi; fi;
mulm:={q};
while q <= 100-m do
  q:=q+m;
  mulm:=mulm union {q};
od;
```

Cálculo de la lista de pendientes posibles (entre dos elementos cualesquiera del conjunto de múltiplos):

```
pendientes:={};
mulmaux:=mulm minus {p};
listaplots:=[];
px:=coorx(p,k);
py:=coory(p,k);
mulmcoor:=[[px,-py]];
for i from 1 to nops(mulmaux) do
   auxx:=coorx(op(1,mulmaux),k);
   auxy:=coory(op(1,mulmaux),k);
   listaplots:=[op(listaplots), plot([[px,-py],[auxx,-auxy]])];
   pendientes:=pendientes union {[auxy-py, auxx-px]};
   mulmaux:=mulmaux minus {op(1,mulmaux)};
   mulmcoor:=[op(mulmcoor),[auxx,-auxy]]
od;
mulmcoorplot:=plot(mulmcoor,style=point,symbol=box, axes=none);
lprint(`La lista de pendientes desde `, p ,`es: `, pendientes);
lprint(`El número de pendientes posibles es: `,nops(pendientes));
nfil:=iquo(100,k);
t100k:=[];for i from 1 to k do for j from 0 to nfil-1 do t100k:=[op(t100k),[i,-j]] od od;
for i from 1 to 100-(k*nfil) do t100k:= [op(t100k),[i,-nfil]] od;
t100kplot:=plot(t100k,x=1..k,style=point,colour=brown,axes=none);
display(t100kplot, listaplots,mulmcoorplot);
end:
```

Ejemplos:

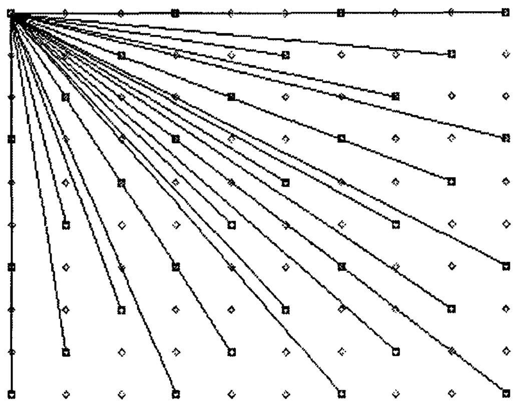
*** pends(3, 10, 1);**

La lista de pendientes desde 1 es:

{[1, 2], [6, 9], [7, 8], [1, 8], [8, 1], [3, 9], [9, 9], [2, 1], [7, 5], [6, 3], [1, 5], [0, 6], [4, 2], [2, 4], [4, 5], [8, 4], [8, 7], [9, 0], [4, 8], [2, 7], [6, 6], [5, 1], [3, 6], [3, 0], [5, 4], [9, 3], [5, 7], [7, 2], [9, 6], [6, 0], [3, 3], [0, 3], [0, 9]}

El número de pendientes posibles es: 33

Dibujo



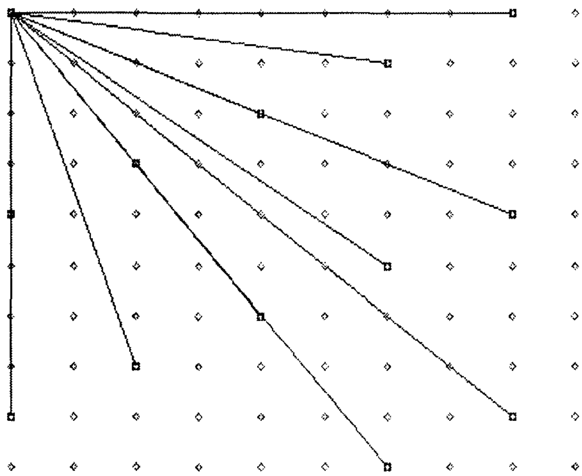
*** pends(8, 10, 1);**

La lista de pendientes desde 1 es:

{[4, 0], [8, 8], [3, 2], [1, 6], [2, 4], [4, 8], [5, 6], [0, 8], [8, 0], [6, 4], [7, 2], [9, 6]}

El número de pendientes posibles es: 12

Dibujo



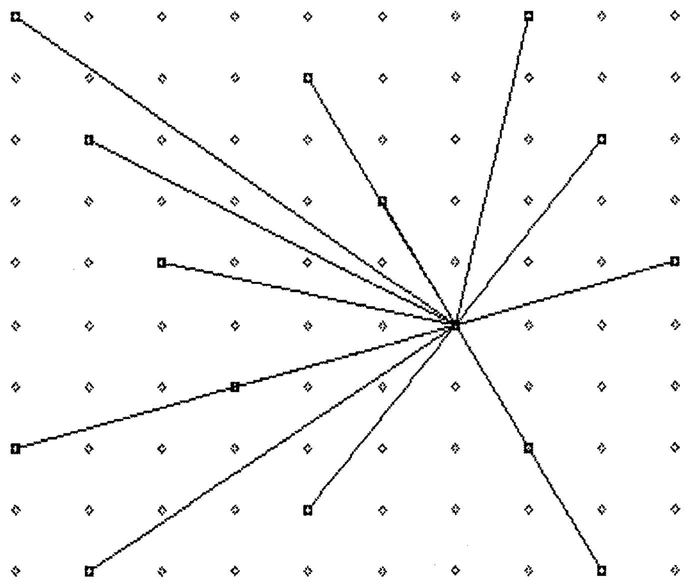
* **pends(7, 10, 57);**

La lista de pendientes desde 57 es:

{[3, -2], [-1, 3], [-3, 2], [-5, -6], [2, 1], [-1, -4], [2, -6], [-5, 1], [-4, -2], [1, -3], [-3, -5], [4, 2], [-2, -1], [4, -5]}

El número de pendientes posibles es: 14

Dibujo



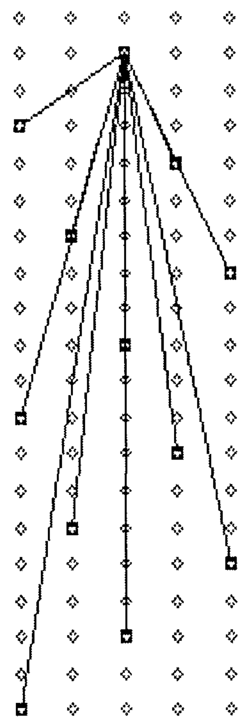
*** pends(8, 5, 8);**

La lista de pendientes desde 8 es:

{[11, 1], [16, 0], [14, 2], [2, -2], [8, 0], [13, -1], [5, -1], [18, -2], [10, -2], [6, 2], [3, 1]}

El número de pendientes posibles es: 11

Dibujo



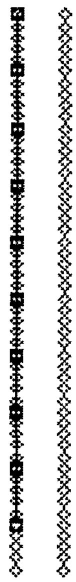
*** pends(10, 2, 1);**

La lista de pendientes desde 1 es:

{[25, 0], [40, 0], [15, 0], [30, 0], [5, 0], [20, 0], [10, 0], [45, 0], [35, 0]}

El número de pendientes posibles es: 9

Dibujo



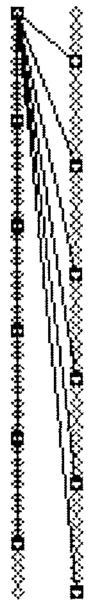
*** pends(9, 2, 1);**

La lista de pendientes desde 1 es:

{[27, 0], [31, 1], [13, 1], [18, 0], [36, 0], [4, 1], [45, 0], [9, 0], [49, 1], [22, 1], [40, 1]}

El número de pendientes posibles es: 11

Dibujo



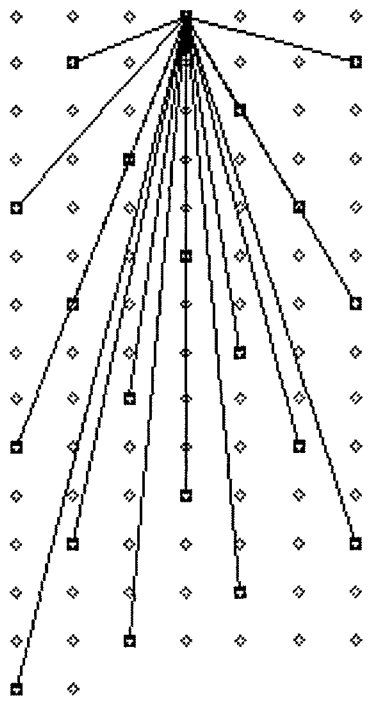
*** pends(5,7,4);**

La lista de pendientes desde 4 es:

{[9, 2], [4, -3], [4, 2], [5, 0], [1, 3], [13, -1], [6, -2], [2, 1], [11, -2], [10, 0], [6, 3], [7, 1], [11, 3], [12, 1], [14, -3], [8, -1], [1, -2], [9, -3], [3, -1]}

El número de pendientes posibles es: 19

Dibujo



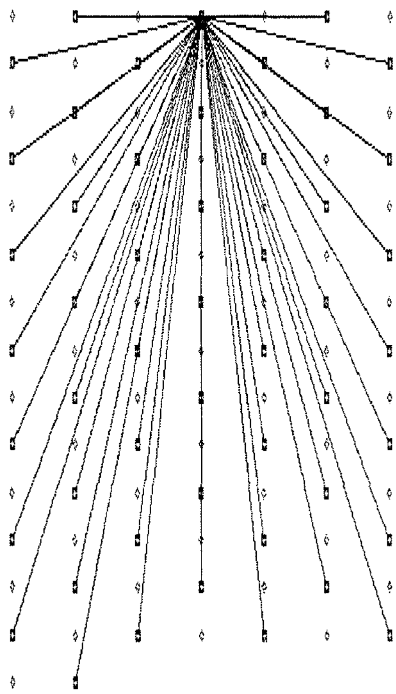
*** pends(2,7,4);**

La lista de pendientes desde 4 es:

{[9, -1], [8, 0], [1, 3], [2, 2], [11, 3], [2, -2], [9, 3], [3, 1], [7, -3], [1, -3], [4, -2], [2, 0], [10, -2], [7, 3], [9, 1], [6, 0], [5, -1], [10, 0], [12, 0], [3, 3], [8, -2], [10, 2], [12, -2], [7, -1], [1, 1], [9, -3], [5, 1], [12, 2], [0, -2], [11, -3], [5, 3], [13, -3], [13, -1], [6, -2], [13, 1], [11, -1], [6, 2], [0, 2], [13, 3], [7, 1], [14, -2], [11, 1], [3, -1], [4, 2], [4, 0], [8, 2], [3, -3], [1, -1], [5, -3]}

El número de pendientes posibles es: 49

Dibujo



pends2(m, k, p):

Si prescindimos de la "densidad" del patrón, entonces hay que "limpiar" la lista de pendientes obtenida en el procedimiento anterior (pends), detectando en cuáles de ellas el cociente de sus componentes es el mismo y dejando sólo una de cada. Este programa no dibuja nada, (pues se obtendría el mismo dibujo que en pends):

```
pends2:=proc(m,k,p);
 if p<=m then q:=p else if p mod m =0 then q:=m else q:=(p mod m) fi; fi;
  mulm:={q};
 while q <= 100-m do
   q:=q+m;
   mulm:=mulm union {q};
 od;
  mulmaux:=mulm minus {p};
 px:=coorx(p,k);
 py:=coory(p,k);
 pendientesrecta:={};
 pendientes:= {};
 for i from 1 to nops(mulmaux) do
    auxx:=coorx(op(1,mulmaux),k)-px;
    auxy:=coory(op(1,mulmaux),k)-py;
    test1:=nops(pendientesrecta);
    if auxx=0 then
       pendientesrecta:=pendientesrecta union {infinity}
    else
       pendientesrecta:=pendientesrecta union {auxy/auxx}
    fi;
    test2:=nops(pendientesrecta);
    if test1<test2 then pendientes:= pendientes union {[auxy, auxx]} fi;
    mulmaux:=mulmaux minus {op(1,mulmaux)};
 od;
lprint(`La lista de pendientes desde `, p , `es: `, pendientes);
lprint(`El número de pendientes distintas es: `,nops(pendientes));
end:
```

Ejemplos:

*** pends2(3, 10, 1);**

La lista de pendientes desde 1 es:

{[5, 4], [6, 9], [7, 2], [2, 7], [3, 0], [3, 9], [3, 3], [7, 5], [2, 1], [8, 1], [7, 8], [8, 7], [9, 3], [9, 6], [1, 8], [1, 2], [1, 5], [5, 7], [0, 3], [4, 5], [5, 1]}

El número de pendientes distintas es: 21

*** pends2(10, 2, 1);**

La lista de pendientes desde 1 es: {[5, 0]}

El número de pendientes distintas es: 1

*** pends2(9, 2, 1);**

La lista de pendientes desde 1 es:

{[31, 1], [13, 1], [49, 1], [4, 1], [40, 1], [22, 1], [9, 0]}

El número de pendientes distintas es: 7

*** pends2(7, 10, 57);**

La lista de pendientes desde 57 es:

{[-3, 2], [-4, -2], [-1, 3], [-1, -4], [-3, -5], [4, -5], [-5, 1], [-5, -6]}

El número de pendientes distintas es: 8

*** pends2(2, 7, 4);**

La lista de pendientes desde 4 es:

{[2, 0], [1, 3], [1, 1], [1, -1], [1, -3], [0, -2], [3, 1], [4, -2], [3, -1], [5, -1], [5, -3], [7, -3], [5, 3], [5, 1], [13, 3], [13, 1], [13, -1], [13, -3], [12, 2], [12, -2], [7, -1], [8, -2], [7, 3], [7, 1], [9, 1], [9, -1], [11, 3], [11, 1], [11, -1], [11, -3], [4, 2], [8, 2]}

El número de pendientes distintas es: 32

*** pends3(m, k).**

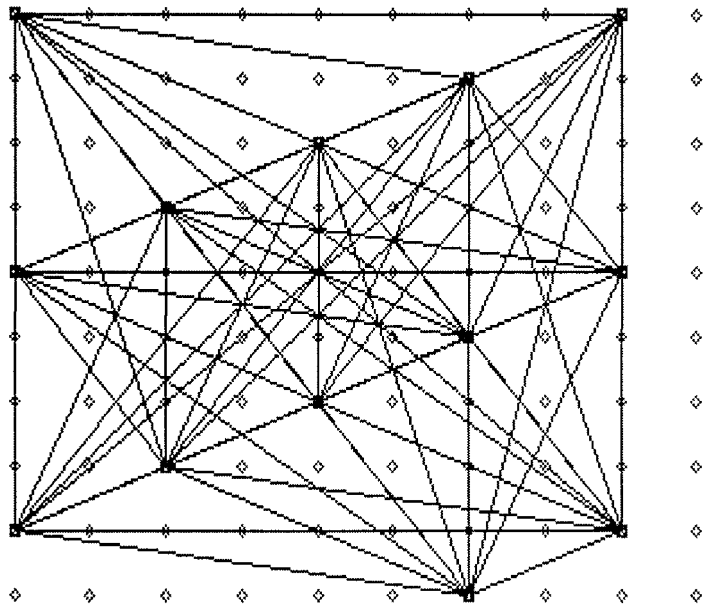
En este procedimiento se dibujan todas las pendientes posibles en una tabla (m, k), con repetición, (y no sólo las que salen de p, como se calcula en pends y en pends2). No se muestra un listado de las pendientes por ser demasiadas aún en casos sencillos; por ello sólo las representamos gráficamente:

Procedimiento

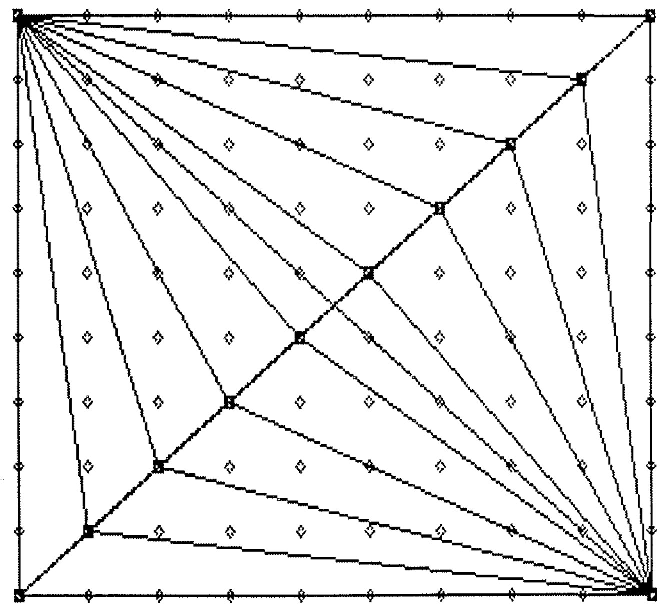
```
pends3:=proc(m,k);
p:=1;
mulmcoor:=[[coorx(p,k),-coory(p,k)]];
while p <= 100-m do
  p:=p+m;
  mulmcoor:=[op(mulmcoor),[coorx(p,k),-coory(p,k)]];
od;
mulmcoorplot:=plot(mulmcoor,style=point,symbol=box,color=brown);

listaplots:=[];
for i from 1 to nops(mulmcoor) do
  for j from i to nops(mulmcoor) do
      listaplots:=[op(listaplots), plot([op(i,mulmcoor),op(j,mulmcoor)])]
  od;
od;
nfil:=iquo(100,k);
t100k:=[];for i from 1 to k do for j from 0 to nfil-1 do t100k:=[op(t100k),[i,-j]] od od;
for i from 1 to 100-(k*nfil) do t100k:= [op(t100k),[i,-nfil]] od;
t100kplot:=plot(t100k,x=1..k,style=point,colour=brown,axes=none);
display(t100kplot, listaplots,mulmcoorplot);
end:
```

Ejemplos:

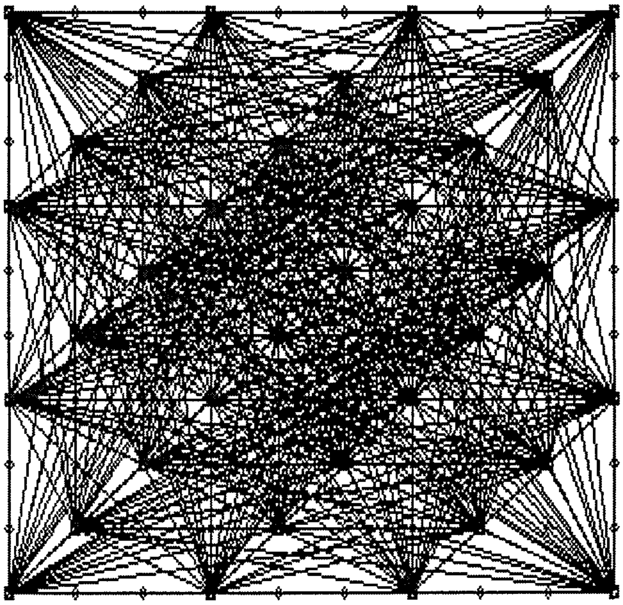
*** pends3(8, 10);**



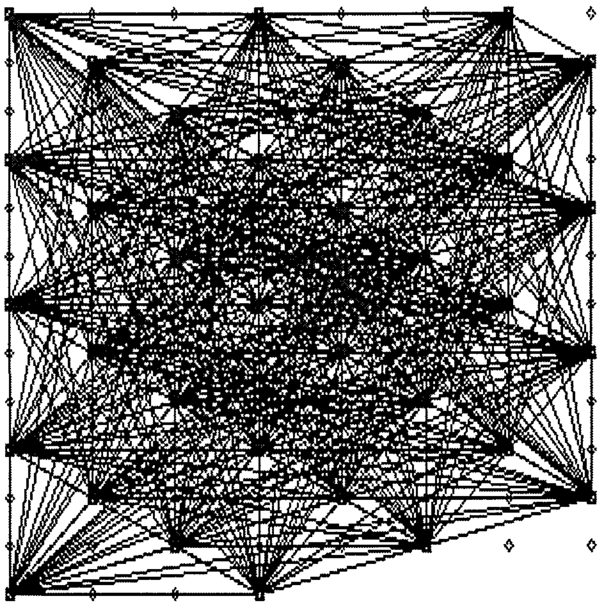
*** pends3(9, 10);**



*** pends3(3, 10);**



*** pends3(3, 8);**



pends4(m, k).

En este procedimiento se calculan todas las pendientes posibles en una tabla (m, k), sin repetición.

Procedimiento

```
pends4:=proc(m,k);
p:=1;
mulmcoor:=[[coorx(p,k),-coory(p,k)]];
while p <= 100-m do
  p:=p+m;
  mulmcoor:=[op(mulmcoor),[coorx(p,k),-coory(p,k)]];
od;
listaplots:=[]; conjtest:={}; conjcadenas:={};
for i from 1 to nops(mulmcoor) do
   for j from i+1 to nops(mulmcoor) do
        auxx:=-op(1,op(i,mulmcoor))+op(1,op(j,mulmcoor));
        auxy:=op(2,op(i,mulmcoor))-op(2,op(j,mulmcoor));
        if auxx=0 then nuevoelem:=infinity else nuevoelem:=auxy/auxx fi;
        if not member(nuevoelem,conjtest) then
           conjtest:=conjtest union {nuevoelem};
           conjcadenas:=conjcadenas union {[ auxy ,auxx]};
        fi;
   od;
od;
lprint(`Las pendientes distintas en la tabla (`,m,`,`,k,`) son:`);
lprint(conjcadenas);
lprint(`El número de pendientes distintas en la tabla (`,m,`,`,k,`)
es:`,nops(conjcadenas));
end:
```

Ejemplos:

*** pends4(8, 10);**

Las pendientes distintas en la tabla (8, 10) son: {[7, -6], [9, -2], [8, -8], [6, -4], [5, 6], [7, 2], [4, 0], [0, 8], [1, 6], [2, 4], [3, 2], [1, -2], [8, 8], [5, -2]}

El número de pendientes distintas en la tabla (8, 10) es: 14

*** pends4(9, 10);**

Las pendientes distintas en la tabla (9, 10) son: {[0, 9], [7, 2], [9, 0], [3, 6], [2, 7], [1, 8], [4, 5], [9, 9], [8, 1], [6, 3], [5, 4], [1, -1]}

El número de pendientes distintas en la tabla (9, 10) es: 12

*** pends4(3, 10);**

Las pendientes distintas en la tabla (3, 10) son:

{[7, 2], [7, -1], [5, -8], [1, -4], [8, -5], [2, -5], [3, 9], [3, 3], [3, 0], [2, 1], [1, 5], [0, 3], [1, 2], [7, 8], [7, 5], [6, 9], [5, 7], [5, 1], [2, 7], [1, 8], [4, 5], [8, 1], [5, 4], [1, -1], [9, 6], [9, 3], [8, 7], [6, -3], [4, -1], [3, -6], [9, -3], [3, -9], [9, -6], [7, -4], [6, -9], [4, -7], [1, -7], [5, -2]}

El número de pendientes distintas en la tabla (3, 10) es: 38

*** pends4(3, 8);**

Las pendientes distintas en la tabla (3, 8) son:

{[11, -7], [7, -5], [3, 0], [0, 3], [5, -4], [2, -1], [3, 6], [6, 3], [8, -7], [9, 6], [2, -7], [5, -7], [9, 3], [7, 1], [5, 2], [4, 7], [4, 1], [2, 5], [1, 7], [1, 4], [1, 1], [11, 5], [11, 2], [10, 7], [10, 1], [8, 5], [7, 4], [9, -3], [1, -5], [12, -3], [11, -1], [9, -6], [7, -2], [11, -4], [4, -5], [1, -2], [5, -1], [8, -1], [3, -3]}

El número de pendientes distintas en la tabla (3, 8) es: 39