COMPENDIO
DE
MATEMATIC

2

UNIVERSIDAD

A
32
379

No 2
26152

23 m 5-5. i11922655
2-26-6152
Biblioteca Universitaria GRANADA
Sala B
Estante 24
Tabla
Número 141
BIBLIOTECA HOSPITAL REAL GRANADA
Sala: A
Estante: 32
Numero: 379
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA
R. 2755

COMPENDIO DE MATEMÁTICAS PURAS Y MIXTAS

PARA INSTRUCCION DE LA JUVENTUD

POR D. FRANCISCO VERDEJO GONZALEZ,
Catedrático de Matemáticas de los Reales Estudios de esta Corte.

TOMO II.

DIVIDIDO EN DOS PARTES,

En las que se trata del infinito é infinitamente pequeño, y las cantidades que se reducen á cero, de las Series, Equaciones superiores, aplicacion del Álgebra á la Geometría, Secciones cónicas, Cálculo infinitesimal, Dinámica é Hidrodinámica y la Tabla de las gravedades específicas.

MADRID MDCCCII.
EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.
CON LICENCIA.

Se hallará en la librería de Gomez, calle de las Carretas.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

23 m 5 - 5. i 11922655

2-26-6152

Biblioteca Universitaria
GRANADA
Sala B
Estante 34
Tabla
Número 141

BIBLIOTECA HOSPITAL REAL
GRANADA
Sala: A
Estante: 32
Numero: 379

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA

R. 2754

COMPENDIO
DE MATEMÁTICAS
PURAS Y MIXTAS
PARA INSTRUCCION DE LA JUVENTUD

POR D. FRANCISCO VERDEJO GONZALEZ,
Catedrático de Matemáticas de los Reales Estudios de esta Corte.

TOMO II.

DIVIDIDO EN DOS PARTES,

En las que se trata del infinito é infinitamente pequeño, y las cantidades que se reducen á cero, de las Series, Equaciones superiores, aplicacion del Álgebra á la Geometría, Secciones cónicas, Cálculo infinitesimal, Dinámica é Hidrodinámica y la Tabla de las gravedades específicas.

MADRID MDCCCII.
EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.
CON LICENCIA.

Se hallará en la librería de Gomez, calle de las Carretas.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TRATADO.

PARTE PRIMERA.

Pág.

CAPÍTULO PRIMERO. *Del infinito é infinitamente pequeño, y cantidades que se reducen á cero.* . . . 1.
CAP. II. *De la naturaleza de las series y su formacion.* . . . . 10.
CAP. III. *De las equaciones de tercer grado* . . . . . 26.
CAP. IV. *De las equaciones de quarto grado.* . . . . 45.
CAP. V. *De la aplicacion del Álgebra á la Geometría.* 53.
CAP. VI. *De las secciones cónicas.* . . . . 60.
CAP. VII. *De la parábola.* . . . . 66.
CAP. VIII. *De la elipse.* . . . . 78.
CAP. IX. *De la hipérbola.* . . . . 66.
CAP. X. *Del cálculo diferencial.* . . . . 120.
CAP. XI. *De la aplicacion de las diferenciales primeras.* . . . . 134.
CAP. XII. *De las diferenciales segundas, terceras, &c.* 152.
CAP. XIII. *Aplicacion de las diferenciales segundas para determinar los puntos de inflexìon y radios de curvatura de las líneas curvas.* . . . . 158.
CAP. XIV. *Del cálculo integral.* . . . . 169.

PARTE SEGUNDA.

CAPÍTULO PRIMERO. *De algunas nociones de la Mecánica para su mejor inteligencia.* . . . . 200.
CAP. II. *De la composicion y resolucion de las fuerzas.* 208.
CAP. III. *De los momentos, y su aplicacion para la composicion y descomposicion de las fuerzas, y deter-*

terminacion de los centros de gravedad. . . . . . 217.
CAP. IV. *De las máquinas simples.* . . . . 236.
CAP. V. *De las máquinas compuestas.* . . . . 249.
CAP. VI. *De los principios generales del movimiento.* 267.
CAP. VII. *Del choque de los cuerpos.* . . . . 286.
CAP. VIII. *Del movimiento de rotacion de los cuerpos, y de los que se mueven por líneas curvas.* . . . . . 298.
CAP. IX. *De los péndulos simples y compuestos, y los centros de oscilacion y percusion.* . . . . 316.
CAP. X. *De la Hidrostática.* . . . . 327.
CAP. XI. *De la Hidráulica.* . . . . 341.
Tabla de las gravedades especificas. . . . . 362.

COM-

COMPENDIO DE MATEMÁTICAS PURAS Y MIXTAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Del Infinito é infinitamente pequeño, y cantidades que se reducen á cero.

1 Dexamos dicho (tom. I. 273) que el valor de un quebrado está en razon inversa del denominador, ó lo que es lo mismo, el valor de un quebrado crece á proporcion que mengua el denominador, y decrece á proporcion que se aumenta. Luego si el denominador de un quebrado le dividimos sucesivamente por los números 2, 3, 4, 5, 6 &c. conservándose su numerador el mismo, el quebrado irá siendo 2, 3, 4, &c. veces mayor que era, y se irá acercando cada vez mas y mas á la mayor cantidad que podemos imaginar, (á la qual los Matemáticos llaman el *infinito*, y la señalan con este signo ∞), y aunque desde luego se infiere que el quebrado jamas podrá alcanzar dicha cantidad, no por eso dexará de acercarse á él tanto quanto nos acomode; de suerte que el infinito no es otra cosa que el límite de lo finito, esto es, el término al qual se acercan las cantidades que van creciendo, pero que jamas pueden alcanzarlo miéntras sean cantidades; bien que en muchas ocasiones nos es preciso exâminar lo que pasa en el lími-

mi-

mite ; y en este caso tomamos el límite por la cantidad. Luego 1.° si admitimos que el quebrado $\frac{1}{b}$ haya llegado al mayor grado de incremento de que es capaz por haber ido decreciendo sucesivamente su denominador hasta desaparecer, ó hasta aquel grado de decremento en que la diferencia entre él y cero sea nula, el quebrado se transformará en $\frac{1}{0} = \infty$. 2.° si el denominador del mismo quebrado $\frac{1}{b}$ lo aumentamos sucesivamente hasta un grado tal que la diferencia entre él y el ∞ sea nula, el valor del quebrado irá decreciendo del mismo modo, y acercándose á ser nada ó cero ; y así quando sea $b = \infty$ se transformará en $\frac{1}{\infty} = 0$. Luego el cero es el límite de las cantidades que decrecen continuamente hasta desvanecerse, y dicha cantidad se llama: *cantidad infinitamente pequeña* en contraposicion del ∞, á la qual llaman *infinitamente grande* ; pero desde luego se infiere que ninguna de las dos es cantidad, pues la 2.ª no puede aumentarse, ni la 1.ª disminuirse, pues de admitir lo contrario, la 1.ª no sería la menor cantidad que podemos imaginar, ni la 2.ª la mayor que podríamos concebir : son límites á los quales se acercan las cantidades que crecen ó menguan sin cesar, pero que no pueden alcanzarles : y así quando el Matemático dice que una cantidad es infinitamente grande, ó infinitamente pequeña, es porque las considera en uno de sus límites, por requerirlo así la qüestion que se propone resolver, como á su tiempo se manifestará ; pues aunque algunos quieren considerarlas cantidades, no en el límite, pero sí tan próximo á él, que la diferencia entre ésta y aquel sea despreciable por su infinita pequeñez : considérenla tan pequeña como quieran, ¿ó es algo ó es nada? si es algo, no se puede despreciar sin que el cálculo, en el qual se introduce, sea inexâcto ; y si es cero ha de estar forzosamente en el límite. De esta doctrina es fácil inferir, 1.° que el cero se puede mirar como símbolo de la nada, y tambien como el límite ó último término de una

una cantidad que decrece : 2.° que el infinito es el límite de lo finito, pues para considerarlo de este modo no necesitamos su existencia.

2 Pero no todas las cantidades tienen por límite el cero ó el infinito, algunas tienen por límite una cantidad finita, como sucede con la suma de los términos de esta progresion geométrica $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$ &c. continuada hasta el infinito ; quanto mayor sea el número de sus términos, mas se acercará la suma de todos ellos á valer 1 ; y aunque es evidente que miéntras el último término sea finito, como debe suceder, no puede llegar su suma á valer la unidad, sin embargo no dexa de ser ésta su límite, pues es el término al qual se acerca mas y mas.

3 Si á un círculo inscribimos ó circunscribimos un polígono regular, quanto mayor sea el número de lados de éste, mas se acercará al círculo ; y aunque miéntras sea polígono no alcanzará al círculo, no por eso dexará éste de ser el límite de aquel, pues es el círculo y no otra figura á la que mas se acerca.

4 Si á una esfera inscribimos un poliedro, y suponemos que el número de sus caras se vaya aumentando sucesivamente, el poliedro se irá acercando cada vez mas á la esfera ; y aunque miéntras el número de sus caras sea finito no puede alcanzar á la esfera, no por eso dexará ésta de ser límite de aquel.

5 Las mismas consideraciones podemos hacer respecto una pirámide regular inscripta en un cono recto, y un prisma en un cilindro ; quanto mayor sea el número de lados de los cuerpos inscriptos tanto mas se acercarán á los circunscriptos ; y así éstos serán límites de aquellos.

6 Deseando aclarar esta materia, y desatar en quanto me sea posible las muchas dudas que ocasiona á los Principiantes este punto tan abstracto de los infinitos é infinitamente pequeños, y establecer al mismo tiempo algunas proposiciones que nos puedan servir de base quando tratemos del cálculo infinitesimal, me es indispensable proponer algunos exemplos muy sencillos que nos fa-

 ci-

ciliten la inteligencia en dicha materia, y sea uno de ellos la proporcion siguiente $8 : 8 :: 4 : 4$, que no podemos dudar que haya proporcion (tom. I. 254), y que subsistirá dividiendo y alternando (tom. I. 263), esto es, $8-8 : 8 :: 4-4 : 4$; y $8-8 : 4-4 :: 8 : 4$, ó lo que es lo mismo $0 : 0 :: 8 : 4$; de cuyo resultado se infiere, una de dos: ó que los principios establecidos en los párrafos citados son falsos, ó siendo $0 = 0$ ha de ser $8 = 4$; objecion, que léjos de alucinarnos, nos debe suministrar materia suficiente para aclarar punto tan abstracto; pues en quanto á que no sean proporcionales $0 : 0 :: 8 : 4$ no podemos admitirlo sin negar las rigurosas demostraciones que dexamos sentadas en el tratado de la proporcion geométrica, lo qual es indubitable; conceder que $8 = 4$ es querer obscurecer una verdad que tocamos con las manos ¿pues que debemos responder para salvar estos tropiezos á que nos ha conducido una expresion al parecer sofistica? Para vencer semejantes tropiezos y sacar de ellos alguna doctrina que en lo sucesivo pueda sernos de la mayor utilidad, debemos considerar que si $8 : 4 :: 0 : 0$, tambien ha de ser $\frac{0}{0} = \frac{8}{4} = 2$; de suerte que $\frac{0}{0}$ puede expresar muy bien la razon de dos cantidades finitas; luego hay cantidades tales que en su comparacion se pueden reducir á la forma de $\frac{0}{0}$, y esta expresion puede ser una cantidad real. Para manifestar cómo esto sucede, supongamos que las dos cantidades 8 y 4 las dividimos sucesivameute por algunos de los números 2, 3, 4 y 5 &c. hasta el infinito, una y otra cantidad se irán acercando sucesivamente á su último límite ó decremento, esto es, á cero; pero los ceros, ó los límites á los quales se acercan dichas cantidades, no pueden ser iguales, pues manteniéndose constante la razon de $8 : 4$, mediante que son siempre estos números divididos por una cantidad (tom I. 251) los límites de los últimos decrementos á que pueden llegar, han de conservar tambien la misma razon que 8 con 4, como nos lo manifiesta la siguiente proporcion $0 : 0 :: 8 : 4$, ó $\frac{0}{0} = \frac{8}{4}$; luego si 8 contiene al 4

un número de veces llamado n será $\frac{0}{0} = n$, esto es, que el un cero ó límite contiene al otro límite las mismas veces que 8 á 4.

7 Si suponemos otro quebrado $\frac{a}{b}$, cuyos términos vayan decreciendo sucesivamente, ya sea porque se dividan por alguno de los números 2, 3, 4, &c. ó porque á uno y otro se les vaya quitando sucesivamente una parte de su valor, una y otra cantidad se irán acercando cada vez mas y mas á su límite ó último término de decremento, esto es, á cero, y el límite de la razon de $\frac{a}{b}$ en este caso será $\frac{0}{0}$; de donde se deduce que esta expresion puede tener diferentes valores, porque si los términos del quebrado $\frac{a}{b}$ han sido divididos constantemente por un mismo número sucede lo mismo que en el caso numérico anterior; y así, si $\frac{a}{b} = 8$, tambien $\frac{0}{0} = 8$; pero si las cantidades se han ido disminuyendo de modo que la razon haya ido variando continuamente, entónces la expresion $\frac{0}{0}$ no es igual á $\frac{a}{b}$, pero por eso no dexa de ser límite suyo, y expresar una razon real.

8 Supongamos ahora que los dos términos del quebrado $\frac{a}{b}$ se vayan aumentando sucesivamente hasta llegar al último término de incremento de que son capaces; en este caso una y otra cantidad se irán acercando á ser infinitas, y quando hayan llegado á el límite de su mayor incremento, la razon entre ellas será la de $\frac{\infty}{\infty}$, y esta expresion dirémos que es el límite de la razon, á la qual se acercan dichas cantidades al paso que van siendo mayores; y si admitimos que sus incrementos se hayan verificado multiplicándolas sucesivamente por alguno de los números 2, 3, 4 &c. será $\frac{\infty}{\infty} = \frac{a}{b} = n$, y tambien $\frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}$. Contra esta doctrina se podrá poner la siguiente objecion, de que no pudien-

do una cantidad llegar á ser cero ni infinita, por mas que se la aumente ó disminuya, sin degenerar de ser cantidad; pues por pequeña que supongamos la diferencia que puede haber entre ésta y su límite, ya crezca ó mengüe, siempre es alguna, é interin esto se verifique, la cantidad no puede ser límite: ¿cómo puede verificarse que $\frac{0}{0}$, ó $\frac{\infty}{\infty}$ puedan expresar el límite de la razon de dos cantidades? Para vencer esta dificultad debemos considerar, que aunque es cierto que una cantidad jamas puede llegar á su límite, sin degenerar de lo que en realidad es, su límite no dexa de ser el mismo en qualquiera estado de decremento ó de incremento en que ella se halle. Si los dos términos del quebrado $\frac{8}{16}$ los dividimos por qualquiera de los números 2, 3, 4 &c., y continuamos esta division hasta el infinito, los quebrados $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, &c. que nos irán resultando tendrán todos el mismo límite $\frac{0}{0}$, pues es evidente que todos ellos se van acercando sucesivamente á esta expresion. Sean S, s dos superficies qualesquiera, siendo $S = ac - ax$, y $s = bc - bx$, será $\frac{S}{s} = \frac{ac - ax}{bc - bx} = \frac{a}{b}\left(\frac{c - x}{c - x}\right) = \frac{a}{b}$: si, suponemos ahora, que siendo x una variable qualquiera vaya creciendo sucesivamente hasta igualarse con c, en este caso tendrémos $\frac{S}{s} = \frac{a \times 0}{b \times 0}$, $\frac{0}{0} = \frac{a}{b}$, que nos manifiesta que la razon de las superficies puede representarse indistintamente por $\frac{0}{0}$, ó $\frac{a}{b}$, luego el límite de la razon entre ellas quando han llegado á desaparecerse, es una cantidad finita, si á ésta la llamamos n será $\frac{0}{0} = \frac{c}{b} = n$.

9 Por la misma regla, si suponemos que $a^2x - ax^2$, y $ba^2 - bx^2$ expresen las solideces S, s de dos prismas, será $\frac{S}{s} = \frac{a^2x - ax^2}{ba^2 - bx^2} = \frac{ax}{b}\,\frac{(a - x)}{(a + x)(a - x)} = \frac{ax}{b(a + x)}$, que suponiendo como en el caso anterior que la variable x vaya creciendo hasta que sea igual á a, tendrémos $\frac{S}{s} = \frac{a^2 \times 0}{2ab \times 0} = \frac{0}{0} = \frac{a^2}{2ab} = \frac{a}{2b}$; esto es, el límite de la razon

zon

zon de los prismas quando han llegado á ser cero es $\frac{a}{2b}$. Con innumerables exemplos relativos, tanto á la comparacion de las líneas, superficies y sólidos, como á la de otras muchas cantidades, nos sería fácil probar que $\frac{0}{0}$ puede expresar una cantidad real y existente.

10 Hemos visto como la expresion $\frac{0}{0}$ puede representar el límite de la razon de dos cantidades qualesquiera, sean líneas, superficies ó sólidos, ú otras magnitudes que decrecen hasta el infinito en virtud de cierta ley, de donde se deduce, que si en algun cálculo tuviésemos precision de conocer las cantidades cuyo límite era $\frac{0}{0}$, ya fuese con el objeto de conocerlas para compararlas entre sí, que es el asunto del cálculo integral, ó con alguna otra mira distinta, nos sería imposible conseguirlo, si la tal expresion no venia acompañada de algun signo tal que con facilidad nos diese á conocer las cantidades de cuya comparacion habia provenido.

11 Si comparamos entre sí las variables x, é y con el objeto de exâminar el límite de la razon conforme éstas vayan decreciendo, y en vez de señalarle por $\frac{0}{0}$ lo expresamos por $\frac{dx}{dy}$, no tendrémos la menor dificultad en conocer que las cantidades cuya razon tiene por límite $\frac{dx}{dy}$ son la x y la y, por cuyo medio nos será fácil conocer observando las reglas que para ello suministra el análisis, si las cantidades que se han comparado entre sí son líneas, superficies, sólidos, ú otra especie qualquiera de magnitudes. La parte del Álgebra, que da á conocer el signo con que se ha de señalar el límite de la razon de las cantidades, se llama *cálculo diferencial*, y la que nos enseña á retroceder, esto es, á conocer las cantidades por medio de sus límites, se llama *cálculo integral*, de cuyos ramos tratarémos á su tiempo.

12 Para completar esta materia de los límites volvamos á lo dicho (1.), en lo qual hemos manifestado que el límite de las cantidades que decrecen sucesivamente es

o,

0, $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{\infty}$ (de qualquiera de estos tres modos se representa), y el de las que crecen es ∞ ó $\frac{1}{0}$, y aunque esta última cantidad sea la mayor que podemos figurarnos en nuestra imaginacion, no podemos negar que haya unos infinitos mayores que otros, bien que con ciertos respectos, esto es, el número de puntos de una línea qualquiera a es infinito, y el de otra línea b mayor que la primera, tambien ha de ser infinito; pero $a < b$ luego aquí tenemos dos infinitos desiguales; pero no sucederá lo mismo si comparando las mismas cantidades, suponemos que la primera crezca al infinito, ó la segunda mengüe hasta cero; en este caso tendrémos mas de un infinito, que será el límite del cociente; pero si la primera de las dos cantidades expresa una superficie, y la segunda una línea, aunque el número de puntos de qualquiera será infinito, no podemos negar que componiéndose una superficie de un número infinito de líneas, el número de puntos de la a ha de ser infinito de segundo órden respecto del número de puntos de la b. Discurriendo por los mismos principios, deducirémos, que el número de puntos de un sólido ha de ser infinito de tercer órden respecto de los de una línea, lo que nos hace conocer hay infinitos de varios órdenes.

13 Luego si suponemos una serie ó progresion geométrica $x^{-3} : x^{-2} : x^{-1}\ x^{0} : x^{1} : x^{2} : x^{3}$ &c. en la que la variable x vaya decreciendo hasta llegar al límite de sus incrementos, esto es, hasta ser infinita, la serie se transformará en $\infty^{-3} : \infty^{-2} : \infty^{-1} : \infty^{0} : \infty^{1} : \infty^{2} : \infty^{3}$: &c. ó lo que es lo mismo, en $\frac{1}{\infty^{3}} : \frac{1}{\infty^{2}} : \frac{1}{\infty} : 1 : \infty^{1} : \infty^{2} : \infty^{3}$ &c. (tom. I. 139) que nos da á conocer los varios órdenes de infinitos é infinitamente pequeños; y como el infinito aumentado ó disminuido de una unidad qualquiera ú otra cantidad debe quedar en su propio ser, esto es $\infty \pm 1 = \infty$ (porque si el infinito aumentado ó disminuido de una cantidad fuese capaz de alterar su valor, no sería la mayor cantidad que podemos imaginar, y por tanto dexaría de ser infinito); las canti-

tidades finitas respecto el infinito son como la línea respecto de la superficie, ó ésta respecto del sólido, esto es, son despreciables, pues aunque es cierto que una superficie ó una línea respecto de otras cantidades de su especie admiten comparacion, no la admiten la primera respecto de un sólido, y la segunda respecto de una superficie, pues el sólido no se aumenta por añadirle una superficie, ni ésta por añadirle una línea: consideracion que se hace aplicable á otras cantidades, y siendo ademas proporcionales $1 : \infty :: \infty : \infty^{2} :: \infty^{2} : \infty^{3} :: 1 : \frac{1}{\infty} :: \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^{2}} :: \frac{1}{\infty^{2}} : \frac{1}{\infty^{3}}$; siendo $\infty \pm 1 = \infty$, será $\infty^{2} \pm \infty = \infty^{2}$, $\infty^{3} \pm \infty^{2} = \infty^{3}$; $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$; $\frac{1}{8} \pm \frac{1}{\infty^{2}} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty^{2}} \pm \frac{1}{\infty^{3}} = \frac{1}{\infty^{2}}$ &c. que nos manifiesta que los infinitos de una órden inferior son nada respecto de los infinitos de un órden superior; verificándose lo contrario con los infinitamente pequeños, pues un infinitamente pequeño es nada respecto de la unidad, y tambien lo es un infinitamente pequeño de órden superior respecto de un infinitamente pequeño de órden inferior.

14 Tambien podemos deducir de la misma progresion que la unidad es medio geométrico entre el infinitamente grande y el infinitamente pequeño; pues siendo $\infty : 1 :: 1 : \frac{1}{\infty}$; si multiplicamos extremos y medios, tendrémos $1 = \infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$; esto es, el producto de los extremos igual al quadrado del término medio.

15 Quando una cantidad (por exemplo x) es infinita, sus raices tambien son infinitas. Para convencernos de esta verdad, supongamos que una raiz qualquiera de x (por exemplo la segunda) sea b; si b es una cantidad finita, tambien lo será su quadrado b^{2}, pero $b^{2} = x$; luego x es una cantidad finita, lo que es contra el supuesto; luego &c.

El que quiera imponerse mas por extenso en esta materia de los límites, infinitos, é infinitamente pequeños, vea el cálculo diferencial de Mr. Cusen, y el primer tomo de las Instituciones matemáticas de Don Antonio Rosell, mi antecesor.

CA-

CAPÍTULO II.

De la naturaleza de las series, y su formacion.

16 Llámase *serie* una multitud ó continuacion de términos, los quales crecen ó menguan en virtud de cierta ley: tales son las progresiones aritméticas ó geométricas, &c.

Quando nos empeñamos en hallar el cociente de una division, donde el dividendo no es múltiplo del divisor, nos vemos en la precision de hacerlo por medio de las decimales, aproxîmándonos al cociente con el auxîlio de éstas mas ó ménos, segun las circunstancias de la qüestion, y lo que resulta de esta aproxîmacion es lo que llamamos serie; si nos proponemos dividir 1 por 3, y al 3 le damos esta forma 1+2 ó 2+1, tendrémos

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \&c. \text{ y}$$

$$\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \&c.$$

Si exâminamos con cuidado las dos series que acabamos de sacar, echarémos de ver que son muy diversas, pues en la una sus términos van siendo menores, y por tanto su suma se acerca mas al valor del quebrado; al paso que en la otra los términos van creciendo, y desviándose mas y mas del verdadero valor, sin embargo de ser cociente de una misma division, pues $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{1+2}$; lo que nos da motivo para distinguir las series en *convergentes* y *divergentes*. La primera de las dos series que nos ha dado nuestra division, es serie convergente, y la segunda divergente.

17 Tambien resultan las series quando nos empeñamos en extraer la raiz de un número que no es potencia

del grado que expresa la raiz, como si queremos extraer la raiz quadrada del número 2: no tenemos otro recurso que extraerla por aproxîmacion, reduciéndola á una serie de decimales tanto mayor, quanto mas queramos aproxîmarnos á su verdadero valor. Luego ya que las series solo sirven para darnos á conocer al poco mas ó ménos una cantidad, que nos sería imposible determinar de otro modo, solo nos pueden ser útiles para estos casos las series convergentes, y por tanto las series divergentes son despreciables. Si nos proponemos hallar en decimales el valor del quebrado $\frac{7}{8}$, será $\frac{7}{8}=0,875$. Pero si la fraccion que queremos determinar por medio de las decimales fuese $\frac{2}{3}$, en este caso tendrémos $\frac{2}{3}=0,66666$ &c. que si nos empeñamos en su aproxîmacion, resultará una serie de guarismos decimales, que apurará nuestra paciencia primero que consigamos finalizarla. Las series de esta naturaleza se llaman series *infinitas* á distincion de aquellas que tienen un limitado número de términos, y se llaman series *finitas*, tal es la que nos resulta del quebrado $\frac{7}{8}$. Del mismo modo resultan las series algebráicas que las numéricas. Si dividimos la cantidad 1 por $a-x$ (tom. I. 114), tendrémos el cociente $\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \&c.$, que es una serie infinita; la qual será creciente siempre que sea $x>a$; pero siendo $a>x$, la serie será convergente ó decreciente, y menguará con tanta mas rapidez, y por consiguiente será tanto mas ventajosa quanto menor sea x respecto de a.

18 Si en vez de ser x una cantidad constante, que solo pueda tener un solo valor, admitimos que sea una variable, esto es, una cantidad que puede variar su valor, en este caso la serie se llama *funcion de la variable*; y en general llámase funcion qualquiera expresion analítica, en la que entra una variable enlazada de tal modo consigo misma ó con otras cantidades, que al incremento ó decremento de la variable, se sigue incremento ó decremento en la expresion, tal es $x^2+2nx+n^2$. Es claro que

que si el valor de esta expresion le llamamos z, de suerte que sea $z=x^2+2nx+n^2$, será z funcion de x; pues no podrá ésta tener alteracion en su valor sin que lo experimente aquella. Pero las expresiones x^0, 1^x, $\frac{a^2-ax}{a-x}$ no son funciones mas que en la apariencia; pues es claro que aunque á la variable se le dé el valor que se quiera, las expresiones conservan el suyo.

19 La doctrina de las series presenta un campo tan extenso, que sería un proceder bastante difuso y ageno del plan que me he propuesto seguir en la composicion de esta obra, si hubiera de tratarla con toda la extension que permite, por cuya razon me ceñiré á tratar solo tres puntos, que en lo sucesivo no dexarán de tener algun juego, especialmente el segundo, y son los siguientes: 1.º cómo se determina el valor de una fraccion por medio de una serie, siguiendo un camino mas breve que el que se dixo (tom. I. 114): 2.º cómo se forman las potencias, y se extraen las raices de los binomios por medio de una serie: 3.º cómo se determina la suma de todos los términos de una serie en algunos casos; pero ántes de tratar de ellos me es indispensable explicar el siguiente lema.

20 Si llamamos z el valor de una serie ordenada por las diferentes potencias de una variable x, qual es $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$&c, no podrá ser $z=0$, sin que los coeficientes a, b, c, d, e, &c. que tiene la variable en los diversos términos de la serie sean tambien 0.

Para demostrarlo supongamos $x=0$; pues siendo x una variable, podrémos darle qualquier valor; es claro que en vista de este supuesto la serie se transformará en $z=a+0$, donde se manifiesta que la funcion z no puede ser igual al 0, sin que la a lo sea tambien; luego $a=0$. La cantidad $bx+cx^2+dx^3+ex^4+$&c. tambien es igual á 0 por hallarse la x en todos los términos; y si dividimos los miembros de esta equacion por x, será $b+cx+dx^2+ex^3=0$, pero $cx+dx^2+ex^3=0$; luego $b=0$. Si la cantidad

cx

$cx+dx^2+ex^3=0$ la dividimos tambien por x, se reducirá á $c+dx+ex^2=0$, cuya expresion no podrá ser 0 sin que c lo sea; siguiendo las mismas reglas, probarémos que d, e tambien han de ser 0.

21 Esta proposicion nos conduce á deducir que si tenemos dos series iguales, quales son estas $ax+bx^2+cx^3+dx^4=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4$, los coeficientes de los términos homólogos, esto es, de aquellos en que la variable está elevada á una misma potencia, han de ser iguales; porque si traspasamos á un solo miembro todos los términos, de la equacion tendrémos

$$\left.\begin{array}{r} ax+bx^2+cx^3+dx^4+\&c. \\ -Ax-Bx^2-Cx^3-Dx^4+\&c. \end{array}\right\}=0.$$

Pero no puede la serie ser igual á 0 sin que los coeficientes de los términos homólogos lo sean (20). Luego $a-A=0$, $b-B=0$, $c-C=0$, $d-D=0$, esto es, $a=A$, $b=B$, $c=C$, $d=D$. Sentada esta proposicion, solo resta explicar lo insinuado (19).

22 Y así para cumplir con la primera parte propongámonos hallar una serie que exprese el valor del qnebrado $\frac{1}{a-x}$. Para lo qual harémos $\frac{1}{a-x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$&c., siendo A, B, C, D unas cantidades indeterminadas, cuyo valor hemos de hallar; es evidente que si multiplicamos los dos miembros de la equacion por $a-x$, será

$$1=\left\{\begin{array}{l} aA+aBx+aCx^2+aDx^3+aEx^4+\&c. \\ -Ax-Bx^2-Cx^3-Dx^4-\&c. \end{array}\right.$$

que pasado el 1 al otro miembro, se reduce á

$$0=\left\{\begin{array}{l} aA+aBx+aCx^2+aDx^3+aEx^4+\&c. \\ -1-Ax-Bx^2-Cx^3-Dx^4-\&c. \end{array}\right.$$

Pero segun lo demostrado (20) no puede una serie ser 0 sin que los coeficientes de las varias potencias de la variable lo sean; luego $aA-1=0$, $aB-A=0$, $aC-B=0$, $aD-C=0$, y $aE-D=0$; ó lo que es lo mismo, $aA=1$,

AB

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE

$aB=A$, $aC=B$, $aD=C$, y $aE=D$, haciendo las transposiciones necesarias. De la primera de las últimas equaciones sale $A=\frac{1}{a}$: de la segunda $B=\frac{A}{a}$, que substituyendo por A su valor $\frac{1}{a}$, se reduce á $B=\frac{1}{a^2}$: de la tercera se saca $C=\frac{B}{a}=\frac{1}{a^3}$, substituyendo por B su valor $\frac{1}{a^2}$; por la misma regla sacarémos $D=\frac{1}{a^4}$ y $E=\frac{1}{a^5}$. Substituyendo ahora en la serie por A, B, C, D, &c. sus valores, tendrémos $\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\frac{x^4}{a^5}+$ &c. que es la misma que encontramos (17), aunque por diverso camino. Por la misma regla se convierte en serie qualquiera otra fraccion mas simple ó mas compuesta que la anterior.

23 Por lo que corresponde á la segunda parte propongámonos elevar el binomio $(a+b)$ á las potencias que expresan los números 2, 3, 4, &c., tendrémos

$$(a\pm b)^2=1a^2\pm 2a^1b^1+1b^2$$
$$(a\pm b)^3=1a^3\pm 3a^2b^1+3a^1b^2\pm 1b^3$$
$$(a\pm b)^4=1a^4\pm 4a^3b^1+6a^2b^2\pm 4a^1b^3+1b^4$$
$$(a\pm b)^5=1a^5\pm 5a^4b^1+10a^3b^2\pm 10a^2b^3+5a^1b^4\pm 1b^5$$
$$(a\pm b)^6=1a^6\pm 6a^5b^1+15a^4b^2\pm 20a^3b^3+15a^2b^4\pm 6a^1b^5+1b^6$$

Solo nos resta deducir de estas potencias una fórmula general, que nos manifieste el camino mas breve para formar con brevedad la potencia de un binomio qualquiera. Para lo qual debemos exâminar la ley que siguen sus exponentes y sus coeficientes. La ley que siguen los exponentes fácilmente se percibe, pues no es otra que la de los números naturales 1, 2, 3, &c., con la distincion que los de a van disminuyendo desde el primer término en que su exponente es el mismo que el de la potencia hasta el último en el que no se halla la a; y los de b van creciendo desde el segundo término en que empieza á encontrarse esta cantidad hasta el último, en el qual se encuentra sola sin la a, con un exponente igual al de la potencia. Por lo que hace á los coeficientes numéricos de cada uno de los términos, se hallan éstos multiplicando los exponentes de la a por sus coeficientes, y dividiendo los productos por un número compuesto de tantas unidades como términos anteceden á aquel que se ha de formar; ó lo que es lo mismo, para hallar el coeficiente de un término qualquiera n multiplíquese el exponente que lleva a en el término anterior por el coeficiente que tiene el mismo término; pártase el producto por $n-1$, que es el número de términos que anteceden al que se quiere formar, y el cociente es el coeficiente que ha de llevar el término que se pide; luego si llamamos m el exponente de la potencia á que se ha de elevar el binomio $(a\pm b)$, tendrémos que los exponentes de a en los diversos términos de la potencia serán m, $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$, &c. y los de b serán 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. El primer término de la potencia será a^m: el segundo término tendrá por coeficiente el exponente m que lleva la a en el primer término; el exponente de la tal letra habrá disminuido una unidad, y será $m-1$, y en este término se encontrará la b elevada á la primera potencia, por manera que dicho término será $ma^{m-1}b$: el tercer término tendrá por coeficiente $m(\frac{m-1}{2})$; esto es, el exponente que tiene a en el segundo término multiplicado por el coeficiente del mismo término dividido por 2 (por ser otros tantos los términos que le anteceden), el exponente de la a será $m-2$, y el de la b, 2; de suerte que el tercer término será $m(\frac{m-1}{2})a^{m-2}b^2$. Siguiendo la misma regla hallarémos que el quarto término es $m(\frac{m-1}{2})\times(\frac{m-2}{3})a^{m-3}b^3$, y el quinto $m\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\times 3\times 4}a^{m-4}b^4$. Luego $(a\pm b)^m=a^m\pm ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2\pm$

m

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}a^{m-3}b^3 + m\times\frac{(m-1)(m-2)}{2\times 3}\times\frac{(m-3)}{4}a^{m-4}b^4 \pm$ &c., que es la fórmula general que se pide.

24 Para aplicarla á la formacion de la tercera potencia del binomio $(2c+4x)$ harémos $3=m$, $2c=a$, $4x=b$; y haciendo las substituciones correspondientes en la fórmula, será $(2c+4x)^3 = (2c)^3 + 3(2c)^{3-1}4x + 3(\frac{3-1}{2})(2c)^{3-2}\times(4x)^2 + 3(\frac{3-1}{2})\times(\frac{3-2}{3})\times(2c)^{3-3}\times(4x)^3 = 8c^3+48c^2x+96cx^2+64x^3$.

25 Por la misma regla elevarémos qualquier otro binomio á una potencia. Si la cantidad cuya potencia se hubiese de formar fuere un trinomio, como $x+c+d$, en este caso se supone $x+c=a$, $d=b$, y la cantidad $x+c+d$ queda reducida á un binomio $a+b$, cuya potencia se forma del modo que dexamos explicado.

26 La fórmula que hemos deducido no se limita á formar solamente las potencias de los polinomios quando el exponente de éstas es un número entero; se extiende tambien á la extraccion de las raices; pues es evidente que siendo m una cantidad indeterminada, puede expresar un quebrado qualquiera, por exemplo $\frac{r}{n}$, y en este caso la fórmula se transforma en $(a\pm b)^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{(a\pm b)^r} = a^{\frac{r}{n}} \pm \frac{r}{n}(a^{\frac{r}{n}-1}b) + \frac{r}{n}\frac{(\frac{r}{n}-1)}{2}a^{\frac{r}{n}-2}b^2 \pm \frac{r}{n}\frac{(\frac{r}{n}-1)}{2}\times\frac{(\frac{r}{n}-2)}{3}a^{\frac{r}{n}-3}b^3 \ldots\ldots + \frac{r}{n}\frac{(\frac{r}{n}-1)(\frac{r}{n}-2)(\frac{r}{n}-3)}{2\times 3\times 4}a^{\frac{r}{n}-4}b^4$ &c., que es aplicable á la extraccion de las raices, por no ser éstas otra cosa que unas potencias de exponente fraccionario.

27 La mayor parte de los autores dan á esta fórmula otra forma distinta, que dicen se aplica con mas facilidad á la formacion de potencias y extraccion de raices de los binomios: no comprehendo el motivo que tengan para decirlo; porque yo en quanto á su formacion la hallo mucho mas difícil, y en quanto á la aplicacion no la encuentro mas fácil.

Confieso ingenuamente que en tratando de esta materia, jamas he hecho uso de las fórmulas, pues siempre he encontrado tanta dificultad en la aplicacion como en la formacion de la potencia ó raiz que me proponia sacar. Por cuya razon aconsejo á todos los que estudien por este Compendio se hagan cargo, y procuren tener presentes las reglas que en él (23 y 24) hemos dado para formar las potencias; que yo estoy seguro de que si las retienen, pensarán conmigo en esta parte; quiero decir, que elegirán mejor formar desde luego la potencia, ó extraer la raiz de la cantidad propuesta, observando las reglas dadas (23 y 24), que aplicar la fórmula. Pero de qualquier modo hallarémos

28 1.° $\sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}\times b + \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2}-1)}{2}a^{\frac{1}{2}-2}\times b^2 + \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{2\times 3}a^{\frac{1}{2}-3}\times b^3 +$ &c. $= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}b^2 + \frac{3}{48}a^{-\frac{5}{2}}b^3 - \frac{5}{128}a^{-\frac{7}{2}}b^4 +$ &c.

2.° $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 -$ &c.

3.° $\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})} = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} + \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} - \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 +$ &c.

29 El tercer punto que nos resta tratar es de la sumacion de las series, operacion difícil, y al mismo tiempo

po bastante útil por ser ordinariamente en esta expresion en la que estriba la resolucion de muchos problemas, cuyos términos es indispensable descomponer en una serie.

Pero ántes de entrar en materia, no estará por de mas que á los principiantes manifestemos la naturaleza de los *números figurados*. Esta especie de números figurados forman tres series diferentes, á saber: la de los números figurados propiamente dichos: la de los números polígonos, y la de las potencias, aunque solo tratarémos de la sumacion de estos últimos. Las series de los números figurados son las siguientes:

Nombres.	Constantes, ó del 1.[r] órden..	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . &c.
	Naturales, ó del 2.[o] órden....	1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . &c.
	Triangulares, ó del 3.[r] órden	1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . &c.
	Piramidales, ó del 4.[o] órden.	1 . 4 . 10 . 20 . 35 . 56 . &c.

La ley de cada una de las series de los números figurados es el que cada uno de sus términos, es la suma de los términos que le preceden en la serie anterior. Así la segunda serie es formada de la adicion continua de las unidades; los términos de la tercera serie son formados de la suma continua de los de la serie segunda; esto es, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, $1+2+3+4+5=15$, &c. Y lo mismo sucede de la quarta serie respecto de la tercera.

30 Los números polígonos son aquellos que estan formados por la suma de los términos consecutivos de una progresion aritmética, que empieza por la unidad; y estos números se llaman *triangulares*, *quadrados*, *pentágonos*, *exágonos*, &c., segun que la diferencia de las progresiones sea 1 . 2 . 3 . 4 . &c.

Progresiones aritméticas.		*Números polígonos.*
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c. difer.[s]	1 „	1 . 3 . 6 . 10 . 15 . &c. triangul.[s]
1 . 3 . 5 . 7 . 9 . &c. dif. . .	2 „	1 . 4 . 9 . 16 . 25 . &c. quadrad.[s]
1 . 4 . 7 . 10 . 13 . &c. dif. . .	3 „	1 . 5 . 12 . 22 . 35 . &c. pentag.[s]
1 . 5 . 9 . 13 . 17 . &c. dif. . .	4 „	1 . 6 . 15 . 28 . 45 . &c. exág.[s]

Estos números se llaman polígonos, porque ellos expresan los números de los puntos necesarios para terminar los espacios de los polígonos regulares, disponiendo estos puntos en simetría sobre líneas paralelas á los costados de los polígonos.

31 Las series de las potencias de los números son las de los quadrados de los cubos &c. de los términos consecutivos de los números naturales 1 . 2 . 3 . &c. La suma de las series presenta un campo tan vasto quanto lo son las diferentes series que se nos pueden proponer; pero nos limitarémos á tratar solamente de aquellas que estan mas en uso. Manifestémoslo, pues, con algunos exemplos, buscando una fórmula para sumar todos los términos de una progresion geométrica decreciente que se extiende al infinito; la qual se pueda aplicar para sumar tambien todas aquellas series que puedan descomponerse en otras cuyos términos formen progresion geométrica decreciente. Sea $\div \frac{d}{b} : \frac{d}{bq} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3} : \frac{d}{bq^4} \ldots\ldots \frac{d}{bq^x}$ una progresion geométrica, que será decreciente siempre que sea q menor que la unidad. Si para hallar su suma la aplicamos á la fórmula $s = \frac{uq-a}{q-1}$ (tom. I. 346), haciendo $\frac{d}{b} = u$, y $a = \frac{d}{bq^x}$, tendrémos $s = \frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^x} = \frac{dq}{bq-b}$, despreciando el término $\frac{d}{bq^x}$ por ser infinitamente pequeño, y es la fórmula para sumar toda progresion geométrica decreciente al infinito.

32 Esto sentado, propongámonos sumar una serie de fracciones, en la qual los numeradores forman una progresion aritmética, y los denominadores una progresion geométrica, qual es $\frac{a}{b} : \frac{a+d}{bq} . \frac{a+2d}{bq^2} . \frac{a+3d}{bq^3}$. &c., á la qual podemos dar la forma $\frac{a}{b} . \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq} . \frac{a}{bq^2}$

$+\frac{d}{bq^2}+\frac{d}{bq^2}\cdot\frac{a}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}+\frac{d}{bq^3}$; y de la qual podemos sacar las siguientes series, que son otras tantas progresiones geométricas decrecientes.

$\div\frac{a}{b}:\frac{a}{bq}:\frac{a}{bq^2}:\frac{a}{bq^3}:$ &c., que tiene por suma la expresion $\frac{aq}{bq-b}$ (31).

$\div\frac{d}{bq}:\frac{d}{bq^2}:\frac{d}{bq^3}$ &c. cuya suma es $\frac{bq^2-bq}{dq}=\frac{d}{bq-b}$.

$\div\frac{d}{bq^2}:\frac{d}{bq^3}$ &c. su suma es $\frac{dq}{bq^3-bq^2}=\frac{d}{bq^2-bq}$.

$\div\frac{d}{bq^3}$ &c. su suma es $\frac{dq}{bq^4-bq^3}=\frac{d}{bq^3-bq^2}$.

Pero todas estas sumas, excepto la de la primera serie, forman la progresion geométrica $\div\frac{d}{bq-b}:\frac{d}{bq^2-bq}:\frac{d}{bq^3-bq^2}$ &c., que tiene por suma $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$. Luego si á esta suma juntamos la de la primera serie, que es $\frac{aq}{bq-b}$, tendrémos por suma de todas las series $\frac{aq^2-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$. Y esta es una fórmula general para sumar las series de fracciones en las que los numeradores forman progresion aritmética, y los denominadores la forman geométrica.

33 Quando no se puede expresar en términos finitos una serie infinita, es preciso hacer de modo que sea la serie la mas convergente que se pueda; porque en este caso con un corto número de sus términos que tomemos, tendrémos una cantidad, que discrepará muy poco de la verdadera suma, v. gr. en la serie $a+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$ &c. $=\sqrt{a^2+x^2}$, quanto menor sea x respecto de a, tanto mas convergente será la serie, y tantos ménos términos se necesitarán para tener un resultado que discrepe de la suma una cantidad tan pequeña como se quiera; lo que no sucederá si $x=$, ó $>a$; porque en el primer caso la serie será poco convergente, y se necesitará un número de términos muy crecido para tener un valor tan aproxîmado á la suma como se desea; y en el segundo caso la serie será divergente, y quantos mas términos se tomen de ella, mas nos desviarémos de su suma.

34 Pasemos ahora á tratar de las sumas de los números naturales y sus potencias, estableciendo fórmulas que nos faciliten hallar las sumas de qualquier número de términos que en ellas se consideran. Y supuesto que la diferencia entre estos números es de solo una unidad, si llamamos l, m, n, p, q, r qualquiera serie de estos números, empezando desde la unidad, ó desde otro número qualquiera, es evidente que excediéndose estos números en una unidad, será $r=q+1$, $q=p+1$, $p=n+1$, $n=m+1$, $m=l+1$; y elevando estos números al quadrado, cubo y quarta potencia, &c., tendrémos

$r^2=q^2+2q+1$	$n^2=m^2+2m+1$
$q^2=p^2+2p+1$	$m^2=l^2+2l+1$
$p^2=n^2+2n+1$	
$r^3=q^3+3q^2+3q+1$	$r^4=q^4+4q^3+6q^2+4q+1$
$q^3=p^3+3p^2+3p+1$	$q^4=p^4+4p^3+6p^2+4p+1$
$p^3=n^3+3n^2+3n+1$	$p^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$
$n^3=m^3+3m^2+3m+1$	$n^4=m^4+4m^3+6m^2+4m+1$
$m^3=l^3+3l^2+3l+1$	$m^4=l^4+4l^3+6l^2+4l+1$

Si reducimos ahora por medio de la suma á una sola equacion las potencias de cada género, tendrémos

$$r^2=\left\{\begin{array}{l}2q+1\\2p+1\\2n+1\\2m+1\\l^2+2l+1\end{array}\right.\qquad r^3=\left\{\begin{array}{l}3q^2+3q+1\\3p^2+3p+1\\3n^2+3n+1\\3m^2+3m+1\\l^3+3l^2+3l+1\end{array}\right.$$

$$r^4 = \begin{cases} 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1 \\ 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \\ 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \\ 1^3 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1 \end{cases}$$

35 De cuyas operaciones se deduce, que teniendo una serie de números naturales consecutivos: 1.° *el quadrado* r^2 *del último es igual al quadrado* l^2 *del primero, mas dos veces la suma de los números que le preceden, mas tantas unidades como términos le anteceden*: 2.° *el cubo* r^3 *del mismo número es igual al cubo* l^3 *del primer número, mas la suma de los quadrados de los números que le preceden tomada tres veces, mas tres veces la suma de los mismos números, mas la suma de tantas unidades como términos le anteceden*: 3.° *la quarta potencia* r^4 *del mismo número es igual á la quarta potencia* l^4 *del primero, mas la suma de los cubos de los números que le preceden tomada quatro veces, la de los quadrados seis veces, la de los mismos números quatro veces, mas tantas unidades como números le anteceden; y así sucesivamente respecto de otras potencias mas elevadas.*

De donde se deduce que llamando a el primer término, y u el último, el número de términos que preceden al último será $u-a$; y si llamamos s la suma de todos los términos, s^2 la suma de los quadrados, y s^3 la de los cubos; tendrémos que la suma de todos los términos que preceden al último será $s-u$, la de los quadrados s^2-u^2, y la de los cubos s^3-n^3 &c. Luego segun lo deducido de las diversas potencias de r será en quanto á lo primero $u^2=a^2+2s-2u+u-a=a^2-a+2s-u$: segundo $u^3=a^3+3s^2-3u^2+3s-3u+u-a=a^3-a+3s^2-3u^2+3s-2u$: tercero $u^4=a^4+4s^3-4u^3+6s^2-6u^2+4s-4u+u-a=a^4-a+4s^3-4u^3+6s^2-6u^2+4s-3u$, que son otras tantas equaciones que nos facilitarán conocer el valor de s.

36 De la primera de estas equaciones sale $s=\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$; substituyendo este valor en la segunda equacion, tendrémos $u^3=a^3+3s^2-\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}u-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}a$, y por consiguiente $s^2=\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}a$. Substituyendo los valores de s y s^2 en la última equacion, tendrémos $u^4=a^4+4s^3-2u^3-u^2-2a^3+a^2$, y por consiguiente $s^3=\frac{1}{4}u^4+\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{4}a^2$. Por las mismas reglas hallarémos las sumas de otras potencias mas elevadas de los números naturales.

37 Si el primer término de la serie de los números naturales fuese 0 ó 1, entónces será $s=\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u=u\frac{u+1}{2}$, que es la misma expresion que hallamos (tom. I. 344) $s^2=\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u=\frac{2u^3+3u^2+u}{6}$, y $s^3=\frac{1}{4}u^4+\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{4}u^2$.

38 Las aplicaciones de las series son ilimitadas; pero solo elijo aquella que nos enseña las reglas que debemos seguir para medir las pilas de las balas ó bombas en los parques de artillería.

Por *pila* de bombas ó balas entendemos un monton de ellas arregladas de tal manera, que sin deshacerlo pueda saberse el número que contiene. Su formacion regular es sobre tres distintas bases: una quadrada (figura 1): otra triangular equilátera (fig. 3), y otra quadrilonga (fig. 2); en cuyos planos se acomodan las balas, de suerte que entre los huecos intermedios del primer plano se forma el segundo, sobre éste el tercero, y así hasta su vértice, formando sus caras un triángulo con una progresion decreciente natural, de forma que si la primera fila interior consta de 10 balas, la segunda consta de 9, y la tercera de 8, &c.; y con este órden cada fila va excediendo á su inmediata superior en una unidad hasta finalizar en una bala (excepto en las caras ó frentes mayores de las pilas quadrilongas que terminan en mas de una bala), por cuya razon la fila angular en las pilas quadradas ó triangulares es igual á la fila de la base.

Son varios los métodos por los quales se miden las pi-

pilas de las balas; pero nosotros elegimos aquel que se funda en la sumacion de los números naturales y sus potencias, manifestándolo con la resolucion de varias qüestiones.

39 Qüestion I. *Hallar la expresion general para sumar las balas que tienen las caras triangulares.*

Supuesto que en las caras triangulares cada fila excede á la que le sigue (empezando á contar desde abaxo) en una unidad, estos números forman la progresion aritmética de los números naturales, empezando por la unidad, donde el último término expresa tambien el número de los términos. Y así la fórmula $s = u \times (\frac{u+1}{2})$ (37) nos servirá para resolver la qüestion con solo substituir por u el número que expresa las balas que tiene la fila mayor de la cara triangular; luego si suponemos que el lado mayor de la cara triangular tenga 10 balas, tendrémos $s = 10 \frac{(10+1)}{2} = 55$, y este es el número de balas que contiene la cara.

40 Qüestion II. *Hallar la fórmula general para medir las pilas quadradas.*

Las pilas ó pirámides quadrados se forman colocando unos quadrados de balas sobre otros, de suerte que
Fig. 1 cada lado ó raiz de los que forman los qnadrados tenga una bala ménos que el que le antecede hasta terminar en el último quadrado, que es de una bala sola.

La resolucion de esta qüestion se reduce á hallar la suma de los quadrados de una serie de números naturales, que empieza por la unidad, y cuyo último término expresa el número de balas que tiene por lado el primer quadrado que sirve de base á la pirámide. Luego con substituir en la fórmula $s^2 = \frac{2u^3+3u^2+u}{6} = \frac{u}{6}(2u+1) \times (u+1)$ (37) en lugar de u el número de balas que contiene el lado del primer quadrado, y efectuando todas las operaciones indicadas en la fórmula, tendrémos resuelta la qüestion. Y así si admitimos que dicho lado tenga 10 balas, será $s^2 = 10 \frac{(20+1) \times (10+1)}{6} = 385$; y este es el número de balas de la pila quadrada.

41 Qüestion III. *Hallar la expresion general para las pilas triangulares.*

Toda la pila ó pirámide triangular es una serie de triángulos equiláteros, cuyos lados se van disminuyendo de una unidad hasta terminar en una sola bala: cada uno de estos triángulos forma una progresion aritmética, que tendrá por término sumatorio la expresion $u \times (\frac{u+1}{2}) = \frac{(u^2+u)}{2}$ (37), luego si los lados de cada uno de estos triángulos los representamos por a, b, c, d, &c. tendremos que la suma del triángulo, cuyo lado es a, será $\frac{a^2+a}{2}$; la del triángulo que tiene por lado b, $\frac{b^2+b}{2}$, y la de los otros triángulos que siguen $\frac{c^2+c}{2}, \frac{d^2+d}{2}$, &c. Pero la solidez de la pirámide es igual á la suma de estas expresiones, luego $\frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2} + \frac{c^2+c}{2} + \frac{d^2+d}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2 \text{ &c.}}{2} + \frac{a+b+c+d \text{ &c.}}{2}$ es la solidez que se pide; pero esta expresion se compone de dos partes, que la 1.ª es la semisuma de los quadrados de los números naturales, y la 2.ª la semisuma de los mismos números; luego la expresion que se busca será $\frac{2u+3u^2+u}{12} + \frac{u^2+u}{4} = \frac{2a^3+3u^2+u+3u^2+3u}{12} = \frac{2u^3+6u^2+4u}{12} = \frac{u^3+3u^2+2u}{6}$: si suponemos que el lado de la base sea 10 balas, tendrémos que el número de balas de la pila será....... $\frac{1000+300+20}{6} = 220$.

42 Qüestion IV. *Medir las Pilas quadrilongas.*

Las pilas quadrilongas se componen de una pila quadrada A, B, C, E formada del lado menor EC de la pila, y de tantas caras triangulares FD como unidades contiene la fila angular DB, quitándole una unidad; de suerte que estas pilas se deben medir de dos veces, esto es, se ha de medir primero la pila quadrada A, B, C, E por

por la regla dicha (40), y despues se ha de medir una de las filas triangulares $DF = EBC$ por la regla establecida (39), y este último resultado se ha de tomar tantas veces ménos una como unidades tiene la fila angular DB; y así, si llamamos m el número de balas que tiene DB despues de rebaxarle una unidad, tendremos que el número de balas de las filas triangulares será $\frac{u^2+u}{2} \times m$, y el de la pila quadrada $ABCE$ $\frac{2u^3+3u^2+u}{6}$, y la suma $\frac{2u^3+3u^2+u}{6} + \frac{(u^2+u)\times m}{2}$ de estas expresiones será el total de las balas que comprehende la pila quadrangular.

43 Quando algunas de las pilas por medir está incompleta se consideran sus caras prolongadas hasta completarla: se mide la pila como si estuviera completa, y se mide la parte añadida; se restan una de otra estas solideces, y la diferencia es el número de balas de la pila incompleta.

Habiendo manifestado en el primer tomo de esta obra, con la individualidad que permite un compendio harto sucinto, todo lo correspondiente á la resolucion de las equaciones determinadas del 1.° y 2° grado, nos resta tratar en éste de las equaciones superiores; pero como esta materia requiere límites mas extensos que los que permite esta obrita, me ceñiré solamente á tratar de las equaciones numéricas determinadas de 3.° y 4.° grado en todos los casos posibles, explicando el modo de resolverlas por aproxîmacion, quando no se puede por ninguno de los medios que aquí se explican.

CAPÍTULO III.

De las Equaciones de tercer grado.

Las equaciones de tercer grado se dividen en *puras y mixtas*: equacion pura ó simple es aquella en la qual se encuentra solamente la tercera potencia de la incógnita como $x^3 = a$, $x^3 - a = c - d$, &c.; y equacion compuesta es aquella, en que ademas del cubo de la incógnita, se hallan tambien sus potencias inferiores, ó alguna de ellas, tales son, $x^3 + ax^2 + cx = m$, $x^3 + ax^2 = n$, y $x^3 + ax = b$, &c.

De las Equaciones puras de tercero grado.

44 La resolucion de estas equaciones no tiene dificultad alguna, teniendo presente lo insinuado (tom. I. 332); pues es evidente que si en la equacion $x^3 = 27$ extraemos la raiz cúbica de uno y otro miembro, tendrémos $x = 3$; y la equacion $x^3 = \frac{a}{b}$ da $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Lo mismo podemos decir de otras muchas.

45 Pero por esta regla se halla que la incógnita tiene un solo valor, y parece deba tener tres, supuesto que hemos visto que en las del segundo grado tiene dos valores diferentes: para salir de dudas propongámonos resolver la equacion $x^3 = 8$ con la mira de saber quantos son los números que tienen por cubo el 8; desde luego se manifiesta que el 2 es uno de ellos; pues $2^3 = 8$, y así $x = 2$ y $x - 2 = 0$. No es ménos evidente que si la equacion $x^3 = 8$, ó mas propiamente $x^3 - 8 = 0$ la dividimos por $x - 2$, nos saldrá al quociente una equacion de un grado inferior al propuesto, esto es, una equacion del segundo grado. Con efecto, executando la division (tom I. 115), sale el quociente $x^2 + 2x + 4 = 0$, ó $x^2 + 2x = -4$, la qual resuelta segun lo insinuado (tom. I. 353), produce $x = -1 \pm \sqrt{-3}$, esto es, $x = -1 + \sqrt{-3}$, y $x = -1 - \sqrt{-3}$. Luego los números que elevados al cubo producen 8 son $2, -1 + \sqrt{-3}$, y $-1 - \sqrt{-3}$, como se manifiesta en las multiplicaciones siguientes:

$$\begin{array}{lr}
-1+\sqrt{-3} & 2 \\
-1+\sqrt{-3} & 2 \\
\hline
1-\sqrt{-3} & 4 \text{ quadrado.} \\
-\sqrt{-3}-3 & 2 \\
\hline
 & 8 \text{ cubo.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-2-2\sqrt{-3} \text{ quadrado.} \\
-1+\sqrt{-3} \\
\hline
2+2\sqrt{-3} \\
-2\sqrt{-3}+6 \\
\hline
8 \text{ cubo.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-1-\sqrt{-3} \\
-1-\sqrt{-3} \\
\hline
1+\sqrt{-3} \\
+\sqrt{-3}-3 \\
\hline
-2+2\sqrt{-3} \text{ quadrado.} \\
-1-\sqrt{-3} \\
\hline
+2-2\sqrt{-3} \\
+2\sqrt{-3}+6 \\
\hline
8 \text{ cubo.}
\end{array}$$

Lo que hemos dicho respecto de la equacion x^3-8 se podrá aplicar á qualquiera otra equacion simple del tercer grado, tal es, $x^3=a^3$, ó $x^3-a^3=0$, de la qual sacarémos una raiz real, que será $x=a$, y dos imaginarias, que son $x=\frac{-a+a\sqrt{-3}}{2}$, y $x=\frac{-a-a\sqrt{-3}}{2}$. Así esta equa-

equacion como la anterior nos manifiestan que en las equaciones del tercer grado, la incógnita debe tener tres valores diferentes.

De las Equaciones compuestas del tercer grado.

46 Se dice que una equacion *compuesta* del tercer grado es completa, quando ademas del cubo de la incógnita tiene tambien su quadrado, y la primera potencia con algun término constante; pero quando á la equacion le falta la primera ó segunda potencia de la incógnita, entónces se llama *incompleta*; pero de qualquier modo la equacion es compuesta. Qualquiera equacion completa del tercer grado debe tener esta forma $px^3 \pm qx^2 \pm rx = \pm s$, que haciendo la transposicion del segundo miembro al primero, se reduce á $px^3 \pm qx^2 \pm rx \mp s = 0$.

Para manifestar ser esta la forma que debe tener una equacion completa del segundo grado, y deducir varias particularidades que nos conduzcan en su resolucion; supongamos que las tres raices de una equacion completa del tercer grado sean $x=a$, $x=b$, y $x=c$, ó lo que es lo mismo $x-a=0$, $x-b=0$, y $x-c=0$; si multiplicamos las dos primeras entre sí tendrémos el producto $x^2-x(a+b)+ab$; y multiplicando este producto por el tercer factor $x-c=0$, tendrémos el segundo producto $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$, que con hacer $p=1$, $a+b+c=q$, $ab+ac+bc=r$, y $abc=s$, queda reducida á la forma $px^3-qx^2+rx-s=0$.

47 Si exâminamos con atencion las partes que componen la equacion ó fórmula echarémos de ver: 1.º que el primer término de la serie es la incógnita elevada á una potencia, cuyo exponente es igual al grado de la equacion: 2.º que en el segundo término está la incógnita elevada al quadrado, y tiene por coeficiente la suma de todas las raices: 3.º que en el tercer término se halla la incógnita elevada á la primera potencia, y tiene por coeficiente la suma de los productos de todas las raices

ces multiplicadas de dos en dos: 4.° que el quarto y último término es el producto de todas las raices.

48 Para este exemplo hemos tomado todas las raices positivas, pero si las hacemos todas negativas, esto es, si hacemos $x=-a$, $x=-b$, $x=-c$, y dándoles primero esta forma $x+a=0$, $x-c=0$, $x+b=0$, las multiplicamos unas por otras, tendrémos $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)\times x+abc=0$, que se diferencia de la anterior en que todos sus signos son positivos; pero si tomamos por raices $x+2=0$, $x+3=0$, y $x-4=0$, de las quales las dos primeras son negativas y la otra positiva, y las multiplicamos unas por otras, tendrémos la equacion $x^3+x^2-14x+24=0$, que en quanto á los signos no concuerda con las anteriores.

Luego 1.° quando en una equacion compuesta del tercer grado, y lo mismo en las de grados superiores, no hay raices imaginarias, y sus términos siguen la alternativa de *mas* y *ménos*, son todas las raices positivas: si todos los términos son positivos, sus raices son negativas; y en general habrá tantas raices negativas como veces de seguida se halle un mismo signo. Regla que se verifica en todas las equaciones superiores de quarto, quinto, &c. grado.

2.° Si en una equacion superior falta el segundo término, habrá raices positivas y raices negativas, siendo la suma de las unas igual á la suma de las otras; de suerte, que si la equacion es de tercero grado ha de tener una raiz positiva $=$ á dos negativas, ó una negativa igual á dos positivas; y si falta el último término, habrá indispensablemente una raiz igual á cero.

3. El número de raices imaginarias que tiene una equacion, cuyos términos son todos reales, han de ser en número par; y así en una equacion del tercer grado, que no contiene alguna cantidad imaginaria, ha de tener precisamente una raiz real y dos imaginarias, ó todas tres raices han de ser reales.

4.° Si en una equacion superior se substituye por la in-

incógnita alguno de sus valores, la equacion se ha de reducir á cero. Porque siendo la equacion ó fórmula general $x^3\pm(a+b+c)x^2\pm(ab+ac+bc)x^3\pm abc=0=(x\pm a)(x\pm b)\times(x\pm c)$, se manifiesta á primera vista, que con ser igual á cero qualquiera de los factores que la componen, la equacion ha de ser tambien cero; pero qualquiera de los factores de la equacion se hace cero con substituir por la incógnita uno de los valores; pues siendo $x=\pm a$, ha de ser $x\mp a=0$, luego, &c.

49 Esta propiedad nos suministra un medio, aunque no sea el mas sencillo, para resolver en muchos casos las equaciones superiores, el qual se reduce á substituir por la incógnita sucesivamente diferentes cantidades positivas y negativas hasta encontrar con una que reduzca la equacion á cero, y aquella es una raiz suya: dividiendo despues la equacion por la incógnita *mas* ó *ménos*, dicha cantidad quedará, reducida la equacion, á otra de un grado inferior. Así, si en la equacion $x^3+x^2-14x-24=0$, substituimos por la x los números $2,3,4,-2-3,-4$, encontrarémos que el 4, el -2 y -3 la reducen á cero, y por consiguiente son sus raices ó valores de x.

50 Pero este método sería sumamente penoso por las innumerables tentativas que habria que executar, á no tener presente la propiedad que tiene el último término de una equacion, de ser el producto de todas las raices; pues buscando todos los divisores de este término, es claro que entre ellos se han de hallar las raices, las que se encontrarán con substituirlos sucesivamente en la equacion por la incógnita para exâminar quales son aquellos que la reducen á cero (48. 4.°). Manifestémoslo buscando las raices de la equacion $x^3-x-6=0$, en la qual la cantidad x^3 solo lleva por coeficiente la unidad. Búsquense primeramente todos los factores del término constante 6 (tom. I. 71), que son $1,2,3,6$, y substitúyanse sucesivamente por la incógnita hasta encontrar con uno que reduzca la equacion á cero, y aquel será una de las raices de la equacion.

Ope-

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA

Operacion.

$$\text{haciendo}\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=6 \end{array}\right\}\text{se tiene}\left\{\begin{array}{l} 1-1-6=-6 \\ 8-2-6=\ \ 0 \\ 27-3-6=\ \ 18 \\ 216-6-6=216 \end{array}\right.$$

Y supuesto que de todos los valores substituidos por la incógnita, solo el 2 reduce la equacion á cero, dirémos que una de sus raices es el 2, esto es, $x=2$, ó $x-2=0$. Dividiendo ahora la equacion $x^3-x-6=0$ por $x-2$, sale el quociente $x^2+2x-3=0$, equacion del segundo grado, que resuelta del modo que se insinuó (tom. I. 353), sale $x=-1\pm\sqrt{-2}$, y así la equacion propuesta tiene una raiz real y dos imaginarias.

51 Contra el método que acabamos de explicar para encontrar las raices comensurables de una equacion por medio de los divisores del último término, se puede poner un reparo que á primera vista parece muy considerable, y es: que si una de las raices de la equacion es un quebrado, no se sabrá como encontrarla, pues los divisores quebrados de un número entero son infinitos; pero es fácil responder á esta dificultad, considerando que siendo números enteros todos los coeficientes de una equacion, es imposible que la incógnita tenga por valor una fraccion: sea $x^3+4x^2+3x=8$ una equacion qualquiera, si x es una fraccion $\frac{a}{b}$, tambien lo serán x^3 y x^2; y substituyendo en la equacion por x su valor $\frac{a}{b}$, se transformará en $\frac{a^3}{b^3}+\frac{4a^2}{b^2}+\frac{3a}{b}=8$. De donde forzosamente se deduce una de dos, ó que a es un multiplo de b, ó que 8 es un quebrado: esto último es falso; luego lo otro es cierto; y así x^3+4x^2+3x ha de ser un número entero. La misma consideracion se puede hacer respecto de otras equaciones.

Quan-

52 Quando en la equacion propuesta el coeficiente de x^3 es mayor que la unidad, ó hay algunos términos que llevan quebrados, no es aplicable el método antecedente si no se transforma la equacion en otra que tenga las condiciones que se han dicho: para aclararlo mejor, propongámonos resolver la equacion $x^3-3x^2+\frac{11x}{4}-\frac{3}{4}=0$, por quanto el denominador es 4 supondrémos $x=\frac{y}{2}$, siendo y otra nueva incógnita, y substituyendo una incógnita por otra en la equacion, tendrémos $\frac{y^3}{8}-\frac{3y^2}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0$, que multiplicando por 8, se reduce á $y^3-6y^2+11y-6=0$; equacion sin quebrados, que resuelta del modo que hemos dicho (50), salen sus tres raices $y=1, y=2$, é $y=3$, ó por ser $y=2x$; $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ y $x=\frac{3}{2}$; luego las raices de la equacion $x^3-3x^2+\frac{11x}{4}-\frac{3}{4}$ son $1, \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$; todas tres reales.

53 Para aclarar mejor este punto supongamos otra equacion $6x^3-11x^2+6x-1=0$, que dividiendo todos sus términos por 6, se reduce á $x^3-\frac{11x^2}{6}+x-\frac{1}{6}=0$. Si suponemos $x=\frac{y}{6}$, y substituimos esta última cantidad por x, se transformará la equacion en $\frac{y^3}{216}-\frac{11y^2}{216}+\frac{y}{6}-\frac{1}{6}=0$; de la qual quitarémos los quebrados con multiplicar todos sus términos por 216, que reducirá la equacion á $y^3-11y^2+36y-36=0$; que se puede resolver del mismo modo que las anteriores, esto es, buscando todos los divisores del número 36, y exâminando qual es aquel que substituido por la incógnita reduce la equacion á cero.

54 Pero este método, aunque al parecer sencillo, no lo es en la equacion, donde el último término tiene muchos divisores por las muchas tentativas en que empeña al calculador; lo que ha motivado á los Matemáticos á sutilizar el ingenio, é idear otro método sumamente ingenioso, que con facilidad manifieste entre todos los divisores del último término quales son los que se deben elegir.

Pa-

Para manifestar qual sea éste volvamos á nuestra equacion $x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+ac+bc)\,x + abc$ (46) $= (x+a) \times (x+b) \times (x+c) = 0$. Si en la equacion descompuesta en sus factores, y en uno de estos, por exemplo, $x+a=0$ substituimos sucesivamente por la incógnita 1, 0, -1, siempre será el factor una raiz de la equacion, como se manifiesta en la operacion.

$$\text{Haciendo}\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}\text{se transforma la}\\ \text{equacion en}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} (1+a)(1+b)(1+c) \\ a\times b\times c \\ (-1+a)(-1+b)(-1+c) \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}\text{y la}\\ \text{raiz en}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 1+a \\ +a \\ -1+a \end{array}\right.$$

Pero las cantidades $1+a, a, -1+a$, en que por los supuestos se transforma la raiz, forman una progresion aritmética; luego para resolver las equaciones por este método, se ha de practicar lo siguiente: 1.° se substituirán por la incógnita en la equacion los valores 1, 0 y -1: 2.° se buscarán todos los divisores de la cantidad en que cada uno de los supuestos transforma la equacion: 3.° se elegirán entre los divisores que resultan del supuesto $x=0$ todos aquellos que sean una unidad menores que los divisores del supuesto $x=1$, y una unidad mayores que los del supuesto $x=-1$: 4.° se dividirá la equacion por la incógnita *mas* ó *ménos* uno de aquellos divisores; y si sale bien la division, se tiene una de las raices, y la equacion queda reducida á un grado ménos; pero si no sale bien la division, se prueba á dividir por otro, y de este modo se continúa hasta encontrar todas las raices, ó á lo ménos hasta dexarla en una equacion del segundo grado, y resolverla como tal. Aclarémoslo con el siguiente exemplo.

55 Propongámonos encontrar las raices de la equacion $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$; substituyendo en la equacion por la incógnita 1, se reduce á 8, cuyos divisores son 1, 2, 4, 8; substituyendo 0 se reduce á 6, que tiene por divisores 1, 2, 3, 6; y substituyendo -1, queda reducida á 16, y los divisores de este número son 1, 2, 4, 8, 16. Hecho esto escríbanse las cantidades del modo que se manifiesta en la operacion, poniendo en la primera columna los supuestos, en la segunda los resultados, en la tercera los divisores, y búsquense en éstos todos aquellos que resultan del supuesto de $x=0$ que sean una unidad menores que los del supuesto $x=1$, y una unidad mayores que los del supuesto $x=-1$, y escríbanse tambien en columnas á la derecha de las otras. En este exemplo se ve que el 3 tomado positivo cumple con las condiciones expresadas, porque tiene encima el $+4$, y debaxo el $+2$, cuyas cantidades las escribirémos en su lugar correspondiente. El mismo número 3, el 2 de arriba, y el 4 de abaxo, tomados con el signo *ménos*, tambien tienen las propiedades dichas, que tambien los escribirémos en su respectivo lugar.

Haciendo el mismo exámen respecto de los otros divisores, hallarémos que ninguno tiene las condiciones que se requieren, y así el 1, el 2 y 6 tomados con qualquier signo no pueden ser raices de la equacion, y solo pueden serlo el $+3$ y -3; pero como estos números multiplicados uno por otro dan un producto mayor que el 6, último término de la equacion, no pueden ser los dos raices de ella: y nos es indispensable hacer un nuevo supuesto en la equacion para ver qual de ellos se debe despreciar: hagamos $x=-2$ con lo que se reducirá la equacion á 16, que tiene por divisores tambien el 1, 2, 4, 8, 16; y como entre estos divisores solo se halla el $+1$, que contiene la progresion $+4+3+2$, y no se halla el -5 que continue la otra progresion $-2, -3, -4$, dirémos que solo el $+3$ es el divisor de la equacion, y por tanto debe despreciarse el -3.

Equacion propuesta.

$$x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0.$$

Supuestos.	*Resultados.*	*Divisores.*	*Divisores elegidos.*	
$x=1$......	8..........	1,2,4,8.......	+4............	—4
$x=0$......	6..........	1,2,3,6........	+3............	—3
$x=-1$...	16..........	1,2,4,8, 16...	+2............	—2
$x=-2$...	16.	1,2,4,8, 16...	+1............	

Hallado por este método que el $+3$ es el divisor que se debe elegir, dirémos que una de las raices de la equacion es -3; pues siendo $x+3=0$, será $x=-3$. Si se divide la equacion $x^3-2x^2-13x+6=0$ por $x+3=0$, tendrémos el cociente $x^2-5x+2=0$, que es una equacion del segundo grado, que resolviéndola como tal, nos da los otros dos valores de la incógnita, que son $x=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ y $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$, y así dirémos que en esta equacion las tres raices son reales; bien que solo la una es racional.

56 Para aclarar mejor este método propongámonos resolver otra equacion del tercer grado, y sea la siguiente $x^3-3x^2-10x+24=0$, que practicando lo mismo que en el exemplo anterior, verémos que el supuesto de $x=1$ transforma la equacion en 12, que tiene por divisores los números 1,2,3,4,6,12; el supuesto $x=0$ la transforma en 24, que sus divisores son 1,2,3,4,6,8,12,24; y el supuesto $x=-1$ la convierte en 30, cuyos divisores son 1,2,3,5,6,10,15,30. Escritas estas cantidades del modo que se ha dicho y se manifiesta en la siguiente

Operacion.

Supuestos.	*Resultad.*	*Divisores.*	*Divisores elegidos.*			
$x=2$.....	0.........	....				
$x=1$.....	12.........	1,2,3,4,6.................	—1	+3	+4	—3
$x=0$.....	24.........	1,2,3,4,6,8, 12,24...	—2	+2	+3	—4
$x=-1$	30.........	1,2,3,5,6,10,15,30.	—3	+1	+2	—5
$x=-2$	24.........	1,2,3,4,6,8,12,24...	—4		+1	—6

Em-

Empezarémos á elegir los divisores del supuesto $x=0$, que sean una unidad menores que los del supuesto $x=1$, y una unidad mayores que los del supuesto $x-1$, y los sentarémos á la derecha en columnas verticales. Principiando por el 1 vemos que éste no puede ser divisor, tómese positivo ó negativo, porque en el un caso falta el cero abaxo y en el otro arriba; pasando al 2 verémos que si se toma positivo tiene encima el 3 y debaxo el 1, y si se toma negativo tiene debaxo el 3, y encima el 1; y así este número nos da dos columnas que las escribirémos como se ha dicho: el 3 tomado con el signo + tambien cumple por tener encima el 4 y debaxo el 2; y estos números formarán otra columna: el 4 tomado con el signo — tiene encima á el -3 y debaxo el -5, los quales nos dan otra columna. Por lo que hace á los demas divisores 6, 8, &c. no tienen lugar por no poder producir la progresion; luego los divisores que pueden ser raices de la equacion son el $-2,+2,+3$ y -4; pero como todos estos dan un producto mayor que el 24, último término de la equacion, no pueden ser todos raices de ellas. Para exâminar quales se deben desechar, harémos otros supuestos por exemplo $x=2$, pero como este supuesto reduce la equacion á cero, no nos da luz alguna de lo que necesitamos; pero haciendo $x=-2$, este supuesto reduce la equacion á 24, que tiene por divisores 1,2,3,4,6,8,12,24, entre los quales se halla el 4, que tomado negativo puede continuar la progresion de la primera columna: no se halla el cero que continue la de la segunda, se halla el 1 que continúa la tercera, y se halla tambien el 6, que con el signo — puede continuar la quarta columna: por tanto dirémos que las raices de la equacion son $-2,+3,-4$, ó lo que es lo mismo $x-2=0$, $x+3=0$ y $x-4=0$; con efecto multiplicándolas entre sí producen la equacion.

57 El método que acabamos de explicar para resolver las equaciones del tercer grado se puede aplicar tambien á otras equaciones de grado mas elevado, que son

C 3 to-

todas aquellas á las quales se puede dar la forma de las anteriores con solo hacer en ellas una simple substitucion; tal es la equacion $x^6+4x^4+3x^2+8=0$; porque es evidente que si tomamos otra incógnita qualquiera como y, y la hacemos igual á x^2, de suerte que sea $y=x^2$, será $x^4=y^2$ y $x^6=y^3$; luego si en la equacion hacemos las substituciones correspondientes se transformará en $y^3+4y^2+3y+8=0$, equacion completa del tercer grado que se resolverá cómo tal; bien que despues de encontrados los valores de y será preciso buscar los de x por medio de la equacion $y=x^2$ ó $\sqrt{y}=x$.

58 El método explicado para resolver las equaciones del tercer grado no es tan general que baste á resolver todas las que nos podemos proponer; hay casos en que nos es indispensable recurrir á otro sumamente ingenioso, y que no dexa de admitir sus excepciones, conocido con el nombre de *método de Cardano*; pero este solo puede practicarse quando las equaciones ó no tienen segundo término, ó se las ha despojado de él por el método que vamos á explicar.

Represente la equacion $y^3 \pm dy^2 \pm ey \pm f=0$ en general qualquiera equacion del tercer grado; para transformarla en otra que carezca del segundo término supongamos $y=x+r$, siendo x una nueva incógnita, y r una constante, que se determinará por las circunstancias de la equacion. Substituyendo en la equacion en lugar de y, $x+r$, y ordenando la equacion por las diferentes potencias de la incógnita, se transformará en

$$\left.\begin{array}{r} x^3+3rx^2+3r^2x+r^3 \\ \pm dx^2 \pm 2drx \pm dr^2 \\ \pm ex \pm er \\ \pm f \end{array}\right\}=0$$

Donde se manifiesta que para que el segundo término desaparezca bastará que sea $3r \pm d=0$; de cuya equacion sale $r=\mp\frac{d}{3}$, que nos manifiesta que el valor de

de la constante que ha de acompañar á la nueva incógnita ha de ser el coeficiente del segundo término dividido por el exponente que lleva la mas alta potencia de la incógnita, tomado con un signo contrario al que lleva el segundo término; de suerte que quando éste sea negativo ha de ser $r=\frac{d}{3}$, y quando sea positivo $r=-\frac{d}{3}$, este valor de r substituido en la equacion la reduce á

$$\left.\begin{array}{l} x^3+ex+\frac{2}{27}d^3 \\ -\frac{d^2}{3}x-\frac{de}{3} \\ \quad f \end{array}\right\}=0$$

la qual carece de segundo término, y á la que por la mayor brevedad podemos expresar de este modo.

$$x^3+px+q=0$$

Por un método semejante se desvanece el segundo término en una equacion qualquiera, sea del grado que fuese.

59 Para explicar nuestro método insinuado volvamos á la equacion $x^3+px+q=0$, y supongamos $x=u+z$, siendo estas últimas cantidades otras nuevas incógnitas, y substitúyanse por x en la equacion que nos sirve de fórmula, que la transformarán en $u^3+3u^2z+3uz^2+z^3+pu+pz+q=0$. Supongamos tambien que una de las incógnitas u ó z sea tal que $u^3+z^3+q=0$, en este caso tendrémos la equacion $3u^2z+3uz^2+pu+pz=0$, que dividida por $u+z$ da al cociente $3uz+p=0$, de donde sale $u=-\frac{p}{3z}$, equacion que nos dará el valor de u en conociendo el de z. Para conseguir esto introducirémos el valor de u en la equacion $u^3+3z+q=0$ con lo que se reducirá á $-\frac{p^3}{27z^3}+z^3+q=0$, ó $z^6+qz^3=\frac{p^3}{27}$, equacion de sexto grado, pero de aquellas que se resuelven

por

por el método de las del segundo (*) que resuelta como tal, nos da el valor de $z = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$, cuyo valor, substituido en lugar de z en la equacion $u = -\frac{p}{3z} = -\frac{\frac{1}{3}p}{z}$, la reduce á $u = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\frac{1}{3}p}{-\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}}.$$

Pero si consideramos que $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ multiplicado por $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ produce $\frac{1}{27}p^3$, y que la raiz de ésta cantidad es $\frac{1}{3}p$, será $\frac{1}{3}p = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} \times (-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})$, cuyo valor substituido en lugar de $\frac{1}{3}p$ en la equacion de u, y suprimiendo los factores comunes en los términos de las fracciones, tendrémos $x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} - \sqrt[3]{(+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$, ó mas simplemente

$$x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} - \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})};$$

pues el radical $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$, tómese con el signo que se requiera, siempre da el mismo valor de x.

60 Para encontrar los otros dos valores de x es indispensable dividir la equacion $x^3+px+q=0$, por el valor de x; pero como esta division sería sumamente complicada, la simplificarémos haciendo $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} = m$, y $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} = n$; pero estos valores de m y n multiplicados entre sí dan $\frac{1}{3}p$, luego $m \times n = \frac{1}{3}p$; y ademas $m^3 - n^3 = q$. Esto supuesto, la division de la equacion $x^3+px+q=0$ por $x=m+n$, ó $x-m-n=0$, da por cociente $x^2+nx-mx+mm+nn+mn=0$. Equacion del segundo grado que tiene por raices $x = \frac{m-n}{2} \pm \frac{1}{2}(m+n)\sqrt{-3}$ ó substituyendo por m y n sus valores

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} \pm \frac{1}{2}\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}\right) \times \sqrt{-3}.$$

Por manera que los tres valores de x son.....

$$x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} - \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}\right) \times \sqrt{-3}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}\right) \times \sqrt{-3}.$$

61 Si exâminamos con atencion los dos últimos valores de x hallarémos que son necesariamente imaginarios todas las veces que $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ es una cantidad real (I. 240.), esto es, siempre que p sea positiva; y de ser negativa será $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, y en este caso no hay mas raiz real que la primera. Pero siendo $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ una cantidad imaginaria, los tres valores de x son reales. Para demostrarlo hagamos $\frac{1}{2}q = a$; y $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = b\sqrt{-1}$; haciendo las substituciones correspondientes en el primer valor de x tendrémos $x = \sqrt[3]{(-a + b\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(a + b\sqrt{-1})}$. Si de estos binomios extraemos la raiz tercera por el método explicado (28. 3.°), la primera de estas dos cantidades será $-a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} +$ &c.

(*) Se resuelven las equaciones de esta especie por el método de las del segundo grado, considerando z^3 como una incógnita elevada á la primera potencia.

&c. ; y la segunda $-a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1}+$, &c. Despues de trocar los signos, como lo manifiesta el signo que precede al radical; y así el valor de x será la serie infinita............... $-2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 -$, &c. en la que no hay radical alguno imaginario, y por tanto el primer valor de x en este caso será real; bien que no se encontrará sino es por aproxîmacion.

62 Por lo que corresponde á los otros dos valores de x comprehendidos en la fórmula...............................

$$x=\tfrac{1}{2}\Big[\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}\pm \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}\Big]\times\sqrt{-3}$$

desde luego se manifiesta que la parte que antecede al signo $\pm$ es indispensablemente una cantidad real, como se comprueba convirtiéndola en serie; pues teniendo la misma forma que el primer valor de x nos ha de resultar una serie idéntica á aquella, la qual no ha de tener ningun término imaginario. Y por lo que corresponde á la otra tambien se evidencia que no puede ser cantidad imaginaria; pues siéndolo $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$, esta cantidad multiplicada por $\sqrt{-3}$, que tambien es imaginaria, ha de producir una cantidad real; y aunque es cierto que la cantidad $\frac{1}{2}q$, que lleva cada uno de los radicales multiplicada por $\sqrt{-3}$ ha de dar una cantidad imaginaria, como en el un radical cúbico se halla $-\frac{1}{2}q$, y en el otro $\frac{1}{2}q$, es claro que $-\frac{1}{2}q\times\sqrt{-3}+\frac{1}{2}q\times\sqrt{-3}=0$, tambien se podria demostrar convirtiendo toda la expresion en serie.

63 De todas estas consideraciones se deduce que quando las tres raices de x son reales no se puede encontrar ninguno de ellos sino es por aproxîmacion, convirtiéndolos en una serie infinita. Y este es el caso que se ha hecho famoso con el nombre *del caso irreductible.*

64 Pero en la equacion propuesta el valor de la incógnita no era x, que era y (58), pues para quitarle el segundo término tuvimos que hacer $y=x+r=x-\frac{d}{3}$, luego para tener los valores de y en la equacion $y^3+dy^2+ey+f=0$, no es indispensable restar de cada uno de los valores de x la cantidad $-\frac{d}{3}$.

De lo que se infiere que una equacion de tercer grado estará en el mismo caso por razon á sus raices reales ó imaginarias, que la equacion en que se transforma por el desvanecimiento de su segundo término, y así ha de tener por precision ó tres raices reales, ó una raiz real y dos imaginarias.

65 Habiendo explicado ya la fórmula para resolver las equaciones del tercer grado en todos los casos posibles, quando su resolucion no se puede conseguir por el método de los divisores, solo nos resta hacer alguna aplicacion de ella; para lo qual propongámonos resolver primeramente la equacion $y^3+3y^2+3y+25=0$. Por quanto tiene segundo término, es preciso destruirlo substituyendo en ella por la incógnita otra nueva incógnita $+$, ó $-$ una cantidad constante (58); de suerte que será $y=x-1$, que haciendo la substitucion correspondiente, se transformará en $x^3-6x+30=0$. Cotejando los términos de esta equacion con los de la fórmula $x^3+px+q=0$, tendrémos $p=-6$, y $q=30$: substituyendo estos valores en la expresion $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$, se reducirá á $\sqrt{217}$ cantidad real. Y por tanto x no pueden tener mas de un valor real, que será el de $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q+\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)\right)}$............ $-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$. La substitucion de 15 por $\frac{1}{2}q$, y $\sqrt{217}$ por $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$, la transforma en.....

$$x=\sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})}-\sqrt[3]{(15+\sqrt{217})},$$ que es el valor de la raiz real que contiene la equacion $x^3-6x+30=0$; pero hemos visto que $y=x-1$; luego restando de la

la raiz hallada la cantidad -1 tendrémos la raiz de la equacion $y^3+3y^2-3y+25=0$, que será $\sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})}$ $-\sqrt[3]{(15+\sqrt{217})}-1$.

66 Sea $z^6+9z^4+39z^2+55=0$ otra equacion que nos proponemos resolver. Esta equacion, aunque del sexto grado, se puede resolver por el método de las del tercero con suponer $z^2=x$, pues entónces se reduce á una equacion del tercer grado; pero si en vez de hacer $z^2=x$ suponemos $z^2=x-3$, tendrémos una equacion destituida de segundo término, que será $x^3+12x-8=0$. Para aplicar la fórmula á su resolucion la compararémos con ella, en virtud de lo qual tendrémos $p=12$, y $q=-8$, y por tanto $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=\sqrt{80}$, cantidad real, y así la equacion solo tiene una raiz real, que será........................

$x=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}-\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}=$ $\sqrt[3]{(-4+\sqrt{(80)})}-\sqrt[3]{(4+\sqrt{80})}$; y como por el supuesto $z^2=x-3$, será $z^2=\sqrt[3]{(4+\sqrt{80})}$.....................

$-\sqrt[3]{(-4+\sqrt{80})}-3$; y $z=\pm\sqrt{[\sqrt[3]{(-4+\sqrt{80})}}$ $\overline{-\sqrt[3]{(+4+\sqrt{80})}]-3}$.

67 Concluyamos esta materia con la resolucion de la equacion $x^3-90x-98=0$, que se halla destituida de segundo término. Cotejándola con la fórmula $x^3+px+q=0$ tendrémos $p=-90$, y $q=-98$. Substituyendo estas cantidades en el radical $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$, será igual á $\sqrt{(-24599)}$; cantidad imaginaria, y que nos hace conocer que las tres raices de la equacion $x^3-90x-98=0$, son todas tres reales, pero ninguna de ellas se puede encontrar sino por aproxîmacion: véase el método que para ello se explica en el capítulo siguiente.

CA-

CAPITULO IV.

De las equaciones del quarto grado.

Quando la mas alta potencia de la incógnita asciende al quarto grado, la equacion se llama de *quarto grado*, tales son $x^4=n$, y $x^4+bx^3+cx^2+dx=n$. Las equaciones del quarto grado se dividen tambien en *simples y compuestas*: la primera de las dos equaciones es simple, y la segunda compuesta.

De las equaciones simples del quarto grado.

68 Representemos generalmente toda equacion simple por $x^4=f$; que si extraemos de uno y otro miembro la raiz quarta tendrémos $x=\sqrt[4]{f}$; pero por este método encontrarémos que una equacion del quarto grado tiene una sola raiz, quando tenemos razones bastantes para inferir que deba tener quatro. Para salir de esta duda supongamos la equacion $x^4=2401$; si extraemos la raiz quadrada de uno y otro miembro tendrémos $x^2=\pm49$, esto es, $x^2=+49$, y $x^2=-49$; si de cada una de estas dos últimas equaciones extraemos tambien la raiz quadrada, la primera nos dará $x=\pm7$, y la segunda $x=\pm\sqrt{(-49)}$, donde se manifiesta que la incógnita tiene quatro valores diferentes, que son $x=7$, $x=-7$, $x=+\sqrt{(-49)}$, y $x=-\sqrt{(-49)}$).

De las equaciones compuestas del quarto grado.

69 Una equacion compuesta de quarto grado se llama completa, quando ademas de la quarta potencia de la incógnita se halla tambien su cubo, su quadrado y su primera potencia con algun término constante; pero para ex-

explicar esta materia con la generalidad que se requiere nos es indispensable tratar primero de su composicion, deduciendo de camino algunas propiedades que nos conduzcan en su resolucion, como hicimos en las del tercer grado: para lo qual supongamos que las quatro raices de una equacion sean $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, ó lo que es lo mismo, $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$; si las multiplicamos entre sí unas por otras, tendrémos la equacion completa del quarto grado $x^4-(a+b+c+d)x^3$....... $+(ab+ac+dc+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd=0$, en la qual podemos hacer consideraciones análogas á las que hicimos (48). Luego si en esta equacion substituimos por la incógnita qualquiera de sus valores a,b,c,d, se habrá de reducir la equacion á cero; propiedad que nos manifiesta que las equaciones del quarto grado se pueden resolver por el método de los divisores del mismo modo que las del tercero (49 y 50).

70 Pero como puede suceder que una equacion del quarto grado solo tenga divisores del segundo grado, nos es preciso explicar como se hallan éstos. Para lo qual supongamos que los dos factores del segundo grado, que componen una equacion del quarto, sean $x^2+bx+c=0$, y $x^2+ax+d=0$, que multiplicados uno por otro, producen la equacion $x^4+(b+a)x^3+(c+ab+d)x^2+(ac+bd)x+cd=0$.

Si en la equacion y en uno de los divisores, por exemplo en $x^2+ax+d=0$ hacemos sucesivamente $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, la cantidad en que los supuestos transformará la equacion será divisible sucesivamente por $4+2a+d$, $+1+a+d$, d, $1-a+d$, $4-2a+d$...en que los mismos supuestos transforman el factor, como mejor se manifiesta en la siguiente

Ope-

Operacion.

Supuestos.	*Transforman la equacion en*	*Y el primer factor*	*Quadrados.*	*Restas.*
$x=2$	$(4+2a+d)\,(4+2b+c)$	$4+2a+d$	....4...	$2a+d$
$x=1$	$(1+a+d)\,(1+b+c)$	$1+a+d$..	...1....	....$a+d$
$x=0$	$d\times.c$................	d.......	...0...	........d
$x=-1$	$(1-a+d)\,(1-b+c)$	$1-a+d$.	...1....	$-a+d$
$x=-2$	$(4-2a+d)\,(4-2b+c)$	$4-2a+d$	...4....	$-2a+d$

71 Donde se manifiesta que si de las cantidades en que los supuestos transforman uno de los factores restamos los quadrados de los supuestos, las cantidades $2a+d$, $+a+d$, d, $-a+d$, $-2a+d$ que restan forman una progresion aritmética: luego si de la cantidad $a+d$ (en que se transforma el factor de suponer $x=1$, y restar de lo que resulta el quadrado del supuesto) restamos la cantidad d que nos proviene del supuesto $x=0$, la resta a será la cantidad que acompaña á la primera potencia de la x en el primer factor x^2+ax+d; y como dicha cantidad d es el último término del mismo factor, se deduce que para hallar los factores del segundo grado, que contiene una equacion superior, se han de observar las reglas siguientes: 1.ª se substituirán por la incógnita en la equacion las cantidades siguientes 2,1,0,−1,−2, cuyos supuestos se sentarán en la primera columna, como se ha manifestado en la fórmula: 2.ª se buscarán todos los divisores de las cantidades en que los supuestos transforman la equacion, y se escribirán en la tercera columna: 3.ª se tomarán los quadrados de los supuestos, que se colocarán en la quarta columna: 4.ª se restarán dichos quadrados de los divisores tomados con + y con −: 5.ª se elegirán entre estas restas todas aquellas que forman progresion aritmética, como se hizo (54), las que se escribirán en otras columnas mas á la derecha.

Es-

72 Escritas de este modo las cantidades, no hay duda que entre los divisores del supuesto $x=0$ habrá alguna que será el último término del factor compuesto, el que tendrá su correspondiente entre los del supuesto $x=1$; luego restando el divisor que sale del supuesto $x=0$, del que le corresponde en el supuesto $x=1$, tendrémos la cantidad que acompaña á x en el factor, cuyas cantidades substituidas por a y d nos darán uno de los factores de dos dimensiones que buscamos: y dividiendo por él la equacion, saldrá el otro factor al quociente.

73 Para aclararlo mejor propongámonos hallar los factores de dos dimensiones de la equacion $x^4+x^3-6x^2+15x-9=0$, la que no tiene factores del primer grado; sea porque nunca los tuvo, ó por habérselos quitado ya: substitúyase en primer lugar por la incógnita $2,1,0,-1,-2$, con lo que tendrémos que el supuesto $x=2$ reduce la equacion á 21, cuyos divisores son 1,3,7,21. El supuesto $x=1$ la reduce á 2 que tiene por divisores el 1 y el 2; el supuesto $x=0$, á -9, que sus divisores son 1,3,9; el supuesto $x=-1$ la reduce á 30, y los divisores de éste son 1,2,3,5,6,10,15,30. El último supuesto la reduce á 55, que tiene por divisores 1,5,11,55. Hecho esto se escribirán en una columna los supuestos, en otra los resultados, en tercera columna los divisores de aquellos, y en la quarta los quadrados de los supuestos, que son 4.1.0.1.4.

Supuestos.	*Resultados.*	*Divisiones.*	*Quadrados.*	*Restas.*	*Progresiones.*		
$x=2$	21	1.3.7.21	4	17.3 −1 −3 −5 −7 −11 −25	−3	−1	3
$x=1$	2	1.2	1	1.0 −3 −2	−2	1	0
$x=0$	9	1.3.9	0	9.3.1 −9 −3 −1	−1	3	−3
$x=-1$	30	1.2.3.5.6.10.15.30	1	29.14.9.5.4.2.1.0. −31 −16 −11 −7 −6 −4 −3 −2	−0	5	−6
$x=-2$	55	1.5.11.55	4	−51.7.1 −3 −59 −15 −9 −5	−1	7	−9

Hecho esto restarémos los quadrados de los supuestos, de los divisores correspondientes á cada uno de ellos, tomados con los signos + ó —, escribiendo las restas en otro

otro lugar mas á la derecha; y así empezarémos por los divisores correspondientes al primer supuesto, diciendo $21-04=17$, $7-4=3$, $3-4=-1$, $1-4=-3$, $-1-4=-5$; $-3-4=-7$, $-7-4=-11$, $-21-4=-25$: para los del segundo supuesto $2-1=1$; $1-1=0$, $-2-1=-3$, $-1-1=-2$: para los del tercero $9-0=9$, $3-0=3$, $1-0=1$, $-9-0=-9$, $-3-0=-3$, $-1-0=-1$: para los del quarto $30-1=29$, $15-1=14$; $10-1=9$, $6-1=5$, $5-1=4$; $3-1=2$, $2-1=1$, $1-5=0$, $-30-1=-31$, $-15-1=-16$, $-10-1=-11$, $-6-1=-7$, $-5-1=-6$, $-3-1=-4$, $-2-1=-3$, $-1-1=-2$: para los del quinto $55-4=51$, $11-4=7$, $5-4=1$, $1-4=-3$, $-55-4=-59$; $-11-4=-15$, $-5-4=-9$, $-1-4=-5$. Practicado esto buscarémos entre todas las restas quales son aquellas que forman progresion aritmética, y se escribirán en otras columnas mas á la derecha. En efecto las cantidades $-3,-2,-1,0,1$; $-1,1,3,5,7$; $3,0,-3,-6,-9$ tienen las condiciones pedidas. Luego los números que pueden ser el último término de los factores compuestos de la equacion son $-1,+3,-3$; y así si el $+3$ es el último término del factor x^2+ax+d, será $3=d$, y $1=a+d$, y $1-3=a+d-d$, $=a$, esto es, $-2=a$; luego haciendo las substituciones en lugar de a y d en el factor compuesto, se transformará en $x^2-2x+3=0$; para comprobar si éste es uno de los factores que se buscan, dividirémos la equacion por él, á ver si da un cociente justo: en efecto, hecha la division, sale el cociente $x^3+3x-3=0$, y este es otro factor de la equacion, que tambien lo podrémos determinar del mismo modo que el otro; pues si suponemos $-3=d$, será $0=a+d$, y $0+3=a+d-d$, esto es, $3=a$, y el factor será entónces $x^2+3x-3=0$, el mismo que salió al cociente.

En este método, como en el que se explicó (55.), suele haber divisores inútiles, pero estos se conocerán con hacer otros nuevos supuestos de $x=3$, ó $x=-3$, pues de ellos han de salir unas restas que solo permitirán continuar las progresiones correspondientes, aquellas cantidades que sean los últimos términos de los factores que se buscan.

74 Para hallar ahora los factores simples ó las raices de la equacion, se resolverán cada uno de los factores compuestos por el método que se dixo tratando de las equaciones del segundo grado; y así tendrémos que las quatro raices de la equacion $x^4+x^3-6x^2+15x-9=0$ son $x=1+\sqrt{-2}$, $x=1-\sqrt{-2}$, $x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{15}{4}}$, y $x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{15}{4}}$, que las dos primeras son imaginarias, y las otras dos reales.

75 Los métodos declarados para resolver las equaciones de tercero y quarto grado por el de los divisores son aplicables á todas las equaciones de un grado superior al de aquellas; pero quando las equaciones sean numéricas ó literales, no pueden resolverse por medio de los divisores, nos es indispensable resolver las del tercer grado por la regla de *Cardano* (58), y las del quarto por la de *Bombelli*; pero como la de este último nos empeña en cálculos muy prolixos, pues nos es indispensable reducir la equacion del quarto grado á una de tercero, para resolverla despues por la regla de Cardano; y una regla y otra admiten muchas restricciones, y al fin suelen empeñarnos en una resolucion aproxîmada: he tenido por conveniente desentenderme del método de Bombelli, y concluir este capítulo con explicar el modo de resolverlas por aproxîmacion.

De la resolucion de las equaciones numéricas por aproxîmacion.

76 Sea la equacion $x^4+2x^3-36x^2+5x-116=0$, la que nos proponemos resolver por aproxîmacion á causa de no haberlo conseguido por ninguno de los métodos que dexamos insinuados. Substituyamos sucesivamente en la equacion por la incógnita los números 1.2.3.4.5. hasta encontrar con uno que mude de signo la cantidad á que se reduce la equacion en virtud de los supuestos; y en este caso la raiz estará entre aquellos dos supuestos, de cu-

cuya substitucion el uno ha dado un resultado positivo y el otro negativo. Y así, haciendo las substituciones en la equacion propuesta, tendrémos

Supuestos.	*Se reduce la equacion.*
1	$1+2-36+5-116=-144$
2	$16+16-144+10-116=-218$
3	$81+54-324+15-116=-290$
4	$256+128-576+20-116=-288$
5	$625+250-900+25-116=-116$
6	$1296+432-1296+30-116=346$

Luego ya que el 5 y 6 son los supuestos que hacen mudar de signo á la cantidad en que se transforma la equacion, dirémos que la raiz que se busca está entre 5 y 6, y por tanto ha de ser 5 y un quebrado: si este quebrado le representamos por d, será una de las raices de la equacion $5+d$, esto es, $x=5+d$. Para determinar el valor de ésta substitúyase en la equacion en lugar de x, su igual $5+d$, con lo que tendrémos,

$$\left.\begin{array}{l} x^4=625+500d+150d^2+20d^3+d^4 \\ +2x^3=+250+150d+30d^2+2d^3 \\ -36x^2=-900-360d-36d^2 \\ +5x=25+5d \\ -16=-16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =-116+295d+ \\ 144d^2+22d^3+d^4=0, \end{array}$$

que nos da una transformada, en la qual la incógnita d es la fraccion que se busca; pero como las potencias de las fracciones de los números son tanto menores, quanto menores son las fracciones, y mas elevados son los exponentes de aquellas, se puede suponer $22d^3+d^4$ tan pequeña que se pueda despreciar, y entónces la transformada queda reducida á una equacion de segundo grado, que resuelta como tal, nos da $d=0,337$ (aproxîmandola por medio de las decimales), y por tanto el valor de x será 5,337.

 Pe-

Pero la fraccion d no es tan pequeña que puedan despreciarse sus tercera y quarta potencia, mayormente estando multiplicadas por cantidades constantes. Para emendar este defecto substitúyase en la equacion por x; 5,337, que la transformará en $+811,313703+304,033616-1025,408484+26,685-116=0$, 623835. La cantidad á que el nuevo supuesto reduce la equacion es mayor que d, y por tanto hay necesidad de quitar á d una cierta cantidad, para lo qual harémos $x=5,337-n$, cuyo valor substituido en la equacion nos dará

$$\left.\begin{array}{l} +x^4=811,313703-608,067231n+170,901414n^2 \\ +2x^3=304,033616-170,901414n+32,022000n^2 \\ -36x^2=-1025,408484+384,264000n-36,000000n^2 \\ +5x=26,685000-5,000000n \\ -116=-116 \end{array}\right\} =$$

$+0,623835-399,704645n+166,923414n^2$, que es una equacion del segundo grado, que resuelta como tal, sale $n=0,001562$, restando este valor de 5,337, se tiene $x=5,335438$; valor bastante aproxîmado. Se puede hallar una raiz negativa con substituir por x sucesivamente las cantidades $-1, -2, -3, -4$, &c., y tambien las raices que son puras fracciones con substituir por la incógnita 0, 1; 0,2; 0,3, &c

77 Quando en una equacion hay raices que no difieren mas que de una unidad, la serie de los números que resultan de las substituciones 1,2,3,4, &c. por lo regular no cambian de signo; pero estos números despues de haber disminuido, y acercado al punto en que debian cambiar de signo, crecen con mucha rapidez, como si en la equacion $x^3-2x^2-20x+53=0$ se substituye por la incógnita 1.2.3.4, &c. se encontrarán los números 32.13.2.5.28.77 &c.; y en este caso el número mas pequeño, ó el mas próxîmo á cambiar de signo, sirve para conocer entre todos los supuestos qual es el que mas se aproxîma al valor de x, que en este caso es el 3; porque éste es el número que ha producido el $+2$, y así dirémos

mos que la raiz pedida es $x+d$, la qual, substituida en la equacion propuesta, da una transformada, que se resolverá por el método de las del segundo grado, y dará el valor de d.

78 Hallada por este método una de las raices de una equacion, se dividirá la equacion por ella, con lo que se tendrá otra equacion un grado ménos elevada que la propuesta, y cuyas raices se irán determinando una á una por el mismo método.

79 Hemos explicado el modo de resolver las equaciones por aproxîmacion sin haber tocado hasta ahora su fundamento. Este consiste, en que siendo $x-a$ una raiz de una equacion y $x-b$ otra, siempre que por x se substituya una cantidad menor que $a, x-a$, ha de ser indispensablemente negativa, y la equacion ha de mudar en este caso de signo; luego si siendo $b>a$, ponemos por x una cantidad mayor que b y menor que a, la equacion ha de conservar su signo.

El que quiera imponerse mas á fondo en los diversos métodos que se han inventado para resolver las equaciones superiores podrá ver á *Clairaut y Euler*.

CAPÍTULO V.

De la aplicacion del Algebra á la Geometría.

La resolucion de las equaciones por medio de la geometría presenta un campo de mayor extension que lo que permite un compendio; por tanto me ceñiré á tratar solamente de la construccion geométrica de las equaciones de primero y segundo grado.

De la construccion geométrica de las equaciones de primer grado.

Qüestion. *Teniendo las equaciones la forma que se expresa al márgen, hallar en líneas el valor de la incógnita.*

Equaciones. *Resolucion.*

$$x = \frac{ab}{c}$$

80 Fórmese la siguiente proporcion $c:b::a:x$, y hállese una quarta proporcional á las tres líneas representadas por c, b, a (tom. I.484), y estará resuelta la qüestion.

$$x = \frac{abc}{cf}$$

81 La fraccion $\frac{abe}{cf} = \frac{ab}{c} \times \frac{e}{f}$, búsquese la línea que representa $\frac{ab}{c}$ (párrafo citado), y ésta sea m, que substituida en la equacion, la transformará en $\frac{me}{f}$, cuyo valor se hallará como en el caso anterior.

$$x = \frac{abch}{cfg}$$

82 Descompóngase la fraccion de este modo $\frac{abc}{cf} \times \frac{h}{g}$: hállese la línea de la primera expresion (81) y sea n; substitúyase esta cantidad en la equacion, y tendrémos $\frac{nh}{g}$, que se construirá como en el caso primero (80).

$$x = a + \frac{ab}{c} + \frac{a^2b}{cf} - \frac{a^2c^2}{b^3}$$

83 Sea m la línea que expresa $\frac{ab}{c}$ (80); n, la que expresa $\frac{a^2b}{cf}$ (81) y p, la de $\frac{a^2c^2}{b^3}$ (82) júntense las líneas a, m, n y réstese de ellas p, y la diferencia será la línea que expresa el valor de $x = a + m + n - p$.

Há-

$$x = \frac{age - bce}{b^2 + af}$$

84 Hágase el denominador de la fraccion igual á una cantidad m multiplicada por uno de los factores que contiene, esto es, $am = b^2 + af$, ó $m = \frac{b^2}{a} + f$, y substitúyase en la equacion, la qual se transformará en $\frac{age - bce}{am} = \frac{ge}{m} - \frac{bce}{am}$, que se construirá del modo que se ha dicho (83). Y así si llamamos m la línea que da la una parte, y n la que da la otra, será $x = m - n$.

$$x = \frac{a^3b + a^2c^2 - abcf}{a^2f + c^2f + bf^2}$$

85 Búsquese una línea m, que multiplicada por algunos de los factores del denominador, sea igual á él, esto es, $afm = a^2f + c^2f + bf$, ó $m = a + \frac{c^2}{a} + \frac{bf}{a}$, y substitúyase en la equacion, que la transformará en $x = \frac{a^3b + a^2c^2 - abcf}{amf} = \frac{a^2b}{fm} + \frac{ac^2}{fm} - \frac{bc}{m}$, que se construirá como en los casos anteriores.

$$\frac{x}{a} = \frac{c^2 + f^2}{af + cf} + \frac{a^2}{g^2}$$

86 Elimínese el denominador a con lo que será $x = \frac{ac^2 + af^2}{af + cf} + \frac{a^3}{g^2}$ que tiene la forma de la fraccion anterior, y por tanto se resolverá del mismo modo.

$$x^2 = s^2 - \frac{c^2e^2 - e^2h^2}{b^2 + af}$$
$$= \left(\frac{s^2}{e} - \frac{c^2e - eh^2}{b^2 + af}\right) \times e$$

87 Búsquese una línea $m = \frac{s^2}{e} - \ldots \frac{c^2e - ch^2}{b^2 + af}$, con lo qual se tendrá una superficie $em = s^2 - \frac{c^2e^2 - c^2h^2}{b^2 + af}$, luego $x^2 = em$ y $x = \sqrt{em}$; y así si en una línea indefinida AB (fig. 4) hacemos $AD = e$, y $BD = m$, y sobre la AB, como diámetro, trazamos un semicírculo, y en el punto D levantamos al diámetro la perpendicular DN que encuentre la circunferencia, ésta perpendicular será el valor de x (tom. I. 566).

Ex-

$$x^2=a^2+b^2$$

88 Extrayendo la raiz quadrada será $x=\sqrt{(a^2+b^2)}$; para conocer x constrúyase un triángulo rectángulo ABC (*fig.* 5.ª), cuyo lado $AB=a$ y $BC=b$, y la hipotenusa AC , será el valor de x (tom. I. 471)

$$x^2=a^2-b^2$$

89 Extrayendo la raiz quadrada será $x=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}\times\sqrt{a-b}$. Para construir esta equacion tírese una recta indefinida AB (*fig.* 4.ª), y tómense $AD=a-b$ y $DB=a+b$; sobre la AB trácese un semicírculo, y levántese la perpendicular DN, y ésta es el valor de x.

$$x^2=s^2+4e^2-\frac{4c^2e^2}{a^2}$$

90 Tómese la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tenga un lado igual á s y el otro $=2e$, á la que llamarémos m; tómese otra línea $n=\frac{2ce}{a}$, háganse en la equacion las substituciones correspondientes y tendrémos $x^2=m^2-n^2$, y $x=\sqrt{m^2-n^2}$, que se construirá del modo que queda explicado en el exemplo anterior.

$$x^2=s^2-\frac{c^2e^2-e^2h^2}{b^2+af}$$

91 Hállese un medio proporcional l entre los dos factores de la superficie af y será $l=\sqrt{af}$ y $l^2=af$; y así la equacion se transformará en $x^2=s^2-\frac{c^2e^2-e^2h^2}{b^2+l^2}$. Búsquese igualmente (tom. I. 545) un quadrado $m^2=b^2+l^2$ y otro quadrado $n^2=c^2+b^2$, y substitúyanse en la equacion, que se reducirá á $x^2=s^2-\frac{e^2n^2}{m^2}$. Hállese una cantidad $d=\frac{\sqrt{e^2n^2}}{m^2}$, ó lo que es lo mismo , $d^2=\frac{e^2n^2}{m^2}$, que haciendo la substitucion correspondiente en la equacion , será $x^2=s^2-d^2$ y $x=\sqrt{s^2-d^2}$, que se construirá del modo que se ha dicho (89).

De la construccion geométrica de las equaciones del segundo grado.

Qüestion. *Teniendo las equaciones la forma que se expresa al márgen, hallar en líneas el valor de la incógnita.*

Resolucion.

Equaciones.

$$x^2\pm ax-b^2=0$$

92 Fórmese un ángulo recto CAB (*fig.* 6.ª), que el uno de sus lados AC sea $\frac{1}{2}a$ y el otro lado $AB=b$; y habiendo tirado la hipotenusa BC , y prolongado del lado de C , se describirá desde este punto como centro con el radio AC un círculo que corte la BC prolongada en los puntos E y D , y las rectas BD y BE son las raices de la equacion propuesta ; esto es , BD es la raiz positiva, y BE la negativa;

Porque si hacemos $BE=x$, se tendrá BD, ó $BE+ED=x+a$; y si se hace $BD=-x$, será $BE=BD-ED=-x-a$; luego en el uno y en el otro caso $BD\times BE=x^2+ax=\overline{AB}^2=b^2$ (tom. I. 534), esto es , $x^2+ax-b^2=0$; pero si se hace $BD=x$, y $BE=x-a$, será $DB\times BE=x^2-ax=b^2$, que por último da $x^2-ax-b^2=0$.

$$x^2\pm ax+b^2=0$$

93 Fórmese como en el primer caso un ángulo recto CAB (*fig.* 7.) haciendo $CA=\frac{1}{2}a$ y $AB=b$, y tirando una recta indefinida BD paralela á AC, descríbase desde el punto C con el radio AC un arco de círculo que corte la línea BD en los puntos E y D , y las rectas BE y BD son las raices de la equacion

cion propuesta ; esto es, las dos raices positivas de la equacion $x^2-ax+b^2=0$, y las dos raices negativas de la equacion $x^2+ax+b^2=0$; porque tirando á la AB las paralelas GD y EF tendrémos en haciendo BE ó $AF=x$; $FH=a-x$; $AF\times FH=ax-x^2=\overline{FE}^2=b^2$ (tom. I. 534), esto es, $ax-x^2-b^2=0$; ú trocando los signos á la equacion $x^2-ax+b^2=0$. Pero si se hace BD ó $AG=x$, GH será $a-x$, y $AG\times GH=ax-x^2=\overline{GD}^2=b^2$, que haciendo la transposicion, y trocando los signos á la equacion, se reduce á $x^2-2ax+b^2$, donde se ve que en uno y otro caso sale una misma cantidad.

Si admitimos ahora que BE ó AF sea igual $-x$; BD, ó AG tambien $=-x$, serán FA ó $GH=(a+x)AF\times FH$, ó $AG\times GH=-x^2-ax=\overline{FE}^2$, ó $\overline{CD}^2=b^2$; esto es, $x^2+ax+b^2=0$.

Si el círculo cuyo centro es C, y su radio CA no corta ni toca la paralela BD, ántes se desvia de ella tanto como á la AB supera AC, las raices de la equacion serán todas imaginarias ; pero si la toca en un solo punto, las dos raices BE y BD son iguales al radio AC.

94 Hemos supuesto en estas equaciones que el último término era un quadrado ; si esto no se verificare como si dicho término fuese bc, hallaríamos una media proporcional n á las cantidades b y c, y quedaria la qüestion reducida á la del caso anterior.

Pero pueden hallarse tambien la raiz de una equacion de segundo grado sin transformar el último término, practicando el método siguiente.

Re-

Resolucion.

Equaciones.

$x^2\mp ax-bc=0$

95 Descríbase un círculo qualquiera ADB (*fig.* 8), tal que el diámetro no sea menor que los datos a y $b-c$ (admitiendo que b sea mayor que c), y desde un punto qualquiera A de su circunferencia tírense dos cuerdas, la una $AB=a$ y la otra $AD=b-c$, y prolónguese AD hasta F, de suerte que sea $DF=c$; y desde el centro c con el radio CF trácese otro círculo concéntrico con el primero que corte en los puntos E,F,G,H las cuerdas AD, AB prolongadas ; con lo que tendrémos que AG será la raiz positiva, y AH la negativa de la equacion $x^2+ax-bc=0$; y al contrario AG será la raiz negativa y AH la positiva en la otra equacion $x^2-ax-bc=0$; porque siendo AF ó $AD+DF=b$ y $AE=c$; si hacemos AG ó $BH=x$, será $AH=a+x$; pero por la propiedad del círculo (tom. I. 532) el rectángulo de $EA\times AF=bc=GA\times AH=x^2+ax$, luego $x^2+ax=bc$, ó $x^2+ax-bc=0$.

96 Pero si hacemos $AH=-x$, AG ó BH, será $=-x-a$, y $GA\times AH=x^2+ax$, esto es, $x^2+ax-bc=0$; por una regla semejante se probará que AG es la raiz negativa y AH la positiva en la equacion $x^2-ax-bc=0$.

$x^2\mp ax+bc=0$

Habiendo descrito un círculo ABD (*fig.* 9) con un diámetro que no sea menor que las cantidades dadas a y $b+c$, se tirarán á este círculo desde un punto de su circunferencia la cuerda $AB=a$ y la cuerda $AD=b+c$, y tomando la parte te $DF=c$ se describirá desde el centro C con un radio CF otro círculo concéntrico con el primero que corte las cuerdas AB,AD en los puntos F,E,G,H; y AG y AH serán las raices positivas de la equacion $x^2-ax+bc=0$, y las raices negativas de la equacion $x^2+ax+bc=0$, lo que se demuestra del mismo modo que en el caso anterior.

Si el círculo que tiene por radio CF no encuentra la línea AB, las raices de la equacion son imaginarias.

DE LAS SECCIONES CÓNICAS.

CAPITULO VI.

Nociones preliminares.

1.ª

Fig. 97 Si sobre un plano qualquiera tiramos dos líneas
10 AB,DE que formen un ángulo qualquiera ACE, é imaginamos que otra línea recta PM, conservándose siempre paralela á la AB, se acerque ó desvie del punto C, menguando ó creciendo en una misma razon, esto es, que sus aumentos ó diminuciones tengan una cierta razon con lo que se desvia ó acerca al punto C, el rastro que trazará el punto M será una línea recta ó curva: será recta si los aumentos ó diminuciones de PM siguen una razon simple y constante; pero si esta razon no es simple, esto es, si PM aumenta ó disminuye al paso que se alarga ó desvia del punto C en una razon compuesta, el punto M trazará una línea curva.

Si

98 Si la razon compuesta es constante, la curva descripta será una *curva algebráyca*, esto es, una curva cuyas propiedades podrán ser cifradas por una equacion que convenga igualmente á todos sus puntos. Fig.

Pero quando la razon compuesta no es la misma en todos los puntos de la curva, en este caso se llama *curva transcendental ó mecánica*; y no puede cifrarse su naturaleza por una equacion algebráyca.

99 Las líneas curvas, sean algebráycas ó transcendentales, las superficies que terminan, é igualmente que los sólidos que ellas producen, son el objeto de la geometría sublime; pero en este tratado solo comprenderémos las curvas algebráycas conocidas con el nombre de *secciones cónicas*, por la razon que mas adelante se dirá.

2.ª

100 Todas las líneas como DE, á las quales se refieren los puntos de una curva, se llama *exe*, ó *línea de* 11
las abscisas; y no es preciso que esta línea haya de pasar por la curva.

3.ª

101 El punto C, el qual es el orígen de la curva, ó se considera como tal, se llama el *vértice* de la curva.

4.ª

102 Las líneas como PM, PM paralelas á una línea AB tangente de la curva, baxadas desde los puntos de la curva á la línea de las abscisas, se llaman *ordenadas* ó *aplicadas*.

5.ª

103 Las líneas como CP, CP tomadas en la línea de las abscisas comprehendidas entre el vértice de la curva, ú otro punto determinado, ó el punto que se considera como tal, y las ordenadas correspondientes, se llaman

abs-

Fig. *abscisas*, y el punto desde el qual empiezan á contarse las abscisas, *origen de las abscisas.*

6.ª

104 Se llaman coordenadas las abscisas y ordenadas correspondientes á un punto de la curva; así *CP* y *PM* son las coordenadas del punto *M*.

12 7.ª

105 Si la línea de las abscisas pasa por una curva de modo que divida en dos partes iguales las dobles ordenadas *MPM*, que se terminan por uno y otro extremo en la curva, y son paralelas á una tangente *HAI* de la curva, esta línea se llama generalmente *diámetro*; pero si el ángulo que ella forma con sus ordenadas es recto, toma el nombre de *exe*, y el punto *A*, donde el exe corta la curva, se llama *vértice.*

8.ª

13 106 Se llama *diámetro conjugado* una línea recta paralela á las ordenadas de un diámetro qualquiera, y que corta á este diámetro en dos partes iguales: así *Rr*, *AB* son dos diámetros conjugados.

9.ª

107 Todas las líneas como *CP* y *PM* que aumentan ó disminuyen continuamente respecto de otras que son constantes se llaman *variables*, las quales se señalan con las letras x y z; al paso que las constantes se expresan por las a,b,c,d, &c. Es costumbre señalar las abscisas por x y las ordenadas por y.

10.

108 Las curvas algebráycas ó geométricas se distinguen de las transcendentes ó mecánicas, en que las primeras siempre tienen por coordenadas dos líneas rectas, y las segundas una línea recta y otra curva, ó dos líneas curvas. Las

11.

109 Las líneas cuya equacion algebráyca no contiene mas que la x y la y, sin que estén multiplicadas una por otra, tal es $ax=by$, se llaman *líneas del primer género*; de las quales no hay mas que la línea recta.

110 Las líneas en que su equacion contiene el quadrado de las coordenadas x ó y, ó el de una sola, ó bien el producto de las dos, son *líneas de segundo género*, las quales se nombran tambien *curvas del primer órden.*

111 Y en general, las curvas son del primero, 2.º, 3.º género, &c., segun el número de dimensiones incógnitas de que consta alguno de sus términos.

112 Si imaginamos una recta *ZAx* prolongada inde- 14
finidamente por uno y otro extremo, la qual pasando por un punto fixo *A* se mueva en la circunferencia de un círculo *BZD*, esta línea con su movimiento trazará las superficies curvas de dos conos opuestos, que tendrán sus vértices en el punto *A*, los quales serán rectos si el exe *AC* es perpendicular á la base *BZD*, y obliqüos ú escalenos, quando el exe no sea perpendicular á las bases; pero de qualquiera suerte, si cortamos uno de los conos con un plano paralelo á la base, la seccion *mnx* que resulte será un círculo; pues si tiramos la recta *ox* tendrémos por la semejanza de los triángulos *AZC*, *Axo*; $AC : CZ :: Ao : ox$; pero es claro que los tres primeros términos de esta proporcion son constantes, luego la recta *ox* ha de ser una misma siempre á qualquiera punto de la curva que se tire desde el punto o; luego *ox* es radio, y *mxn* un círculo.

113 Si cortamos un cono *ABC* con cinco planos di- 15
ferentes *ABC*, *DrMRD*, *DSsD*, *DENeD*, *DQqD*, de suerte que el primero *ABC* pase por el vértice del cono y por el diámetro *BC* del círculo de su base; el segundo sea paralelo á la base; el tercero sea paralelo al lado *AB*; el quarto encuentre los dos lados del cono; y el quinto prolongado por encima del punto *D* vaya á encon-

contrar el lado opuesto, las secciones que produzcan estos planos se llaman *secciones cónicas*; bien que por secciones cónicas por lo regular se entienden solamente las tres últimas, llamadas comunmente, la primera *area parabólica*, la segunda *area elíptica*, y la tercera *area hiperbólica*; á causa que las curvas que la terminan son conocidas con los nombres de *Parábola*, *Elipse é Hipérbola*. La teoría de estas tres curvas será el objeto de los tres capítulos siguientes, bien que quando tratemos de las propiedades de la elipse dirémos alguna cosa del círculo, dexando para otro lugar el tratar de las areas que terminan y los sólidos que producen estas líneas; y aunque las del triángulo quedan demostradas con la mayor extension en el tom. I. de esta obra, por seguir en todo el mejor órden, diré alguna cosa sobre la expresion analítica de la línea recta.

Consideraciones sobre lo dicho.

1.ª

114 Como por el punto D no se puede tirar mas de una línea que sea paralela al lado AB del cono, no puede pasar por este punto mas de una sola parábola.

2.ª

115 Como por el punto D se pueden tirar entre el punto A y el punto F sobre la seccion triangular ABC una infinidad de líneas que todas vayan á encontrar los lados de dicho triángulo prolongados, si es necesario, se infiere que por el punto D entre el vértice A del cono y el punto F de la parábola se pueden tirar una infinidad de elipses, hasta que alguna de ellas sea paralela á la base del cono, pues ésta entónces será un círculo; y así el círculo puede mirarse como una elipse recogida, y la elipse como un círculo prolongado.

Ya

3.ª

116 Ya que el plano $DQqD$ no es paralelo á ninguno de los dos lados del cono prolongado, ha de cortar precisamente otro cono que esté opuesto al primero, causando en él otra seccion semejante á la primera; en cuyo caso las dos curvas que terminan estas secciones se llaman hipérbolas opuestas: y como desde el punto D sobre la seccion triangular ABC se pueden tirar entre el punto F y el punto C una infinidad de líneas rectas, que prolongadas por encima de este punto, irán á atravesar la otra seccion triangular ACH, es evidente que por el punto D, entre el punto C de la superficie del cono, y el punto F de la parábola, se pueden trazar una infinidad de secciones hiperbólicas, que todas irán á cortar en el cono opuesto ACH las secciones hiperbólicas opuestas.

4.ª

117 La recta TM, que toca una curva qualquiera sin cortarla, se llama tangente, y la perpendicular RM á la tangente en el punto de contacto, se llama *normal*. 16

118 La línea PT comprehendida entre la ordenada MP, y el punto T de la tangente se llama *subtangente*, y la línea RP terminada por la ordenada y la normal, se llama *subnormal*.

119 Por ser perpendiculares las rectas TP y FM, y tambien TM y RM, los triángulos rectángulos semejantes TPM, PRM nos dan las siguientes proporciones $PT:PM::PM:PR$, y $PT:TM::MP:MR$, esto es, que en qualquiera curva *la subnormal es tercera proporcional á la subtangente y á la ordenada, y la normal es quarta proporcional á la subtangente, la tangente y la ordenada.*

De la línea recta.

120 La equacion de esta línea se saca (*fig.* 10) de la semejanza de los triángulos CPM, CPM; pues es claro

 que

Fig. que son proporcionales $CP:CP::PM:PM$; luego ya que la razon de la abscisa con la ordenada en qualquier punto de la curva es constante, si esta razon la expresamos por $a:b$, y hacemos $cp=x$ y $PM=y$, será $a:b::x:y=\frac{bx}{a}$, ó lo que es lo mismo, $y-\frac{bx}{a}=0$, y esta es la equacion de la línea recta, cuya forma puede variar, segun varíe el orígen c de las abcisas.

CAPITULO VII.

De la parábola.

Despues de haber considerado la principal propiedad de la parábola en el cono, esto es, aquella que nos da á conocer su naturaleza, nos es indispensable exâminarla separada de él ; para averiguar mejor sus propiedades mas esenciales, especialmente aquellas que están mas en uso, cuyo método practicarémos igualmente con la elipse é hipérbola.

17 121 Qüestion. *Hallar la propiedad principal de la parábola.*

Siendo la parábola formada por un plano perpendicular á la seccion del triángulo por el exe AGB y paralela á AG, la interseccion de este plano con el triángulo AGB, que es una línea recta DE, divide en dos partes iguales la superficie parabólica $DLND$, supuesto que esta seccion se termina de una y otra parte por la superficie del cono.

Si se corta el cono por un plano HMI paralelo á la base ANB que corte la superficie parabólica en PM, esta seccion será un círculo, y las líneas paralelas PM y LN serán dos dobles ordenadas de la curva LDN, cuyo exe será DE, una vez que los ángulos DPM, DEN son rectos; y ademas los diámetros paralelos HI, AB, y el exe DE estarán en un mismo plano, supuesto que dichas líneas son

son la interseccion de varios planos cortados por el plano ABG perpendicular á ellos, y así PM y EN han de ser dos ordenadas comunes á los dos círculos HMY, ANB y á la parábola LDN, cuyas abscisas son DP y DE. Por la propiedad del círculo tendrémos $\overline{PM}^2=HP\times PI$, y $\overline{EN}^2=AE\times EB$; y comparando estas expresiones $\overline{PM}^2:\overline{EN}^2::HP\times PI:AE\times EB::PI:EB$ despues de suprimir las cantidades iguales PH y AE : lo que se deduce fácilmente del paralelogramo $AHPE$; pero los triángulos semejantes DPI, DEB nos dan $DP:DE::PI:EB$, que haciendo la substitucion correspondiente en la proporcion anterior, tendrémos $\overline{PM}^2:\overline{EN}^2::DP:DE$, *que nos manifiesta que en la parábola los quadrados de las ordenadas son constantemente como las abscisas correspondientes.* Y esta es la propiedad principal de la parábola, de la qual se deduce:

1.° $\frac{\overline{PM}^2}{DP}=\frac{\overline{EN}^2}{DE}$; esto es, que la razon de los incrementos de PM con los de DP es compuesta y constante ; y como esta razon no pasa de dos dimensiones, la curva DMN es del primer género.

2.° Siendo constante la razon de los quadrados de las ordenadas á las abscisas, el exponente de éstas ha de ser tambien una cantidad constante, que llamarémos p, esto es, $\frac{\overline{PM}^2}{DE}=\frac{\overline{EN}^2}{DE}=p$, ó $\overline{PM}^2=DE\times p$. *Esto es, en la parábola el quadrado de la ordenada es igual al rectángulo de la abscisa por una cantidad constante, tercera proporcional á la abscisa y su ordenada*, cuya cantidad se llama *parámetro*, la qual se considera como la escala, á la qual se refieren las demas líneas que se consideran en la parábola, así como el radio lo es en el círculo.

Para expresar analíticamente esta propiedad de la parábola sea $PM=y$; $EN=z$; $DP=x$; $DE=t$, y el pará-

 me-

Fig. metro p ; haciendo las substituciones respectivas en las equaciones anteriores tendrémos $y^2 : z^2 :: x : t$; $\frac{y^2}{x} = \frac{z}{t}$, $\frac{y^2}{x} = p$, é $y^2 = px$. En esta última equacion $y^2 = px$ está cifrada la naturaleza de la parábola , y por ella hemos de sacar las propiedades esenciales : 3.º como al paso que crecen las abscisas crecen tambien las ordenadas , la parábola se desvia mas y mas de su exe hasta el infinito por una y otra parte : 4.º por ser $y^2 = px$ será $x : y :: y : p$, esto es, la ordenada es media proporcional entre el parámetro y la abscisa.

Esta última conseqüencia nos suministra un medio sencillo para trazar una parábola en un plano qualquiera , y es el siguiente.

18 122 En un plano arbitrario trácese una recta qualquiera AX , que será el exe de la parábola , y trácese otra recta CD perpendicular á la primera que la corte en un punto A ; hágase $AB =$ al parámetro ; y desde el punto A tómense sobre el exe AX las abscisas AP, AP, AP , &c. que tengan entre sí una razon qualquiera , y tírense las indefinidas II, HH , MM , &c. paralelas á la CD : sobre las rectas BP , BP, BP, &c. como diámetros trácense varios círculos que cortarán á la CD por uno y otro lado en los puntos 1,2,3 , &c. ; háganse las partes PI,PH,PM iguales á las partes $A1$, $A2$, $A3$ á uno y otro lado del exe ; y las rectas PI,PH,PM, &c. serán las ordenadas á la curva ; y así , tirando por los puntos A,I,H,M, &c. una curva , ésta será la parábola : para demostrarlo considerémos que en qualquiera de los círculos que tomemos por exe $BHPHB$, $(A3)^2 = AB \times AP$; pero $A3 = PM$ es la ordenada , AP la abscisa , y AB el parámetro ; luego si por estas cantidades substituimos sus expresiones analíticas , será $y^2 = px$, equacion á la parábola ; luego , &c.

Habiendo explicado el modo de trasladar la parábola desde el cono á un plano , tenemos adelantado quanto podíamos desear para explicar las demas propiedades, que

que en el cono sería dificil y tal vez imposible conseguir. Fig.

123 Si sobre el exe de una parábola se toma una línea AF igual á la quarta parte del parámento , el punto F se llama el *focus* de la parábola ; de esta difinicion se deduce : 1.º que el focus F se podrá determinar con tomar AF tercera proporcional á la abscisa y la mitad de la ordenada ; porque siendo $AF = \frac{1}{4}p$, será $4AF = P$, que haciendo la substitucion en la equacion $y^2 = px$ se transformará en $y^2 = 4AF \times x$, $\frac{y^2}{4} = AF \times x$, y por último $x : \frac{1}{2}y :: \frac{1}{2}y : AF$. 19

2.º Que FN es igual á la mitad del parámetro , porque la equacion $y^2 = px$ nos da tambien $y^2 = 4AF \times x$; pero siendo NF la ordenada es $AF = x$ que transforma la equacion en $\overline{NF}^2 = 4AF \times AF = 4 \times \overline{AF}^2$, y extrayendo la raiz $NF = 2AF = \frac{1}{2}p$, luego *la doble ordenada que pasa por el focus de una parábola, es igual al parámetro.*

124 *Una línea* FM *tirada desde el focus* F *á la extremidad* M *de la ordenada es igual á la abscisa correspondiente mas la quarta parte del parámetro.* 19

124 *Una línea* FM. *tirada desde el focus* F *á la extremidad* M *de la ordenada es igual á la abscisa correspondiente mas la quarta parte del parámetro.*

El triángulo rectángulo MPF nos da (tom. I. 471.) $\overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$; pero $\overline{MP}^2 = y^2 = px$, $AP = x$, $AF = \frac{1}{4}p$, $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, y $\overline{PF}^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$, que haciendo en la equacion primera las substituciones correspondientes , tendrémos $(FM)^2 = px + x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$, y extrayendo la raiz quadrada $FM = x + \frac{1}{4}p$. Esta recta FM se llama *radio vuton*. De esta demostracion se deduce , que si sobre el exe prolongado 20 por encima del punto A se hace $Af = AF = \frac{1}{4}p$, y levantando en el punto P una perpendicular , la cortamos ésta desde el punto F , como centro con un radio igual á Ff, el punto en que se corte será un punto de la parábola ; lo que nos manifiesta un método ingenioso para tra-

Fig. trazar una parábola por un movimiento continuo, y es el siguiente.

125 En el punto f colóquese una regla BB perpendicular al exe; y á lo largo de esta regla hágase mover otra regla BEC en forma de esquadra, cuyos brazos sean desiguales, que el brazo menor CB esté sentado en la regla BB, y el brazo mayor EC coincida con su canto con el exe DF: supongamos que á lo largo de EC hayga atado un hilo que sea igual á $AD+AF=Df$, el qual tenga el un cabo atado al extremo C de la esquadra, y el otro lo esté al punto fixo F, y que estando el hilo tirante y sujeto á la regla en un punto M por medio de un alfiler ó estilo, la esquadra se mueva en la direccion fB; la curva trazada por el estilo será una parábola tal como se encuentra en el cono.

21 126 *El rectángulo formado por la suma y la diferencia de las dos ordenadas* PM *y* SL *es igual al rectángulo del parámetro, y la diferencia* PS *de las abscisas.*

Para la demostracion, sea $SL=z$ y $AS=t$; por la propiedad de la parábola (121. 2.°) tendrémos $y^2=px$, y $z^2=Pt$; y restando de la segunda equacion la primera $z^2-y^2=pt-px$, esto es, $(z-y)(z+y)=p(t-x)$; pero $z-y=SL-PM=LR$; $z+y=LS+PM$: $t-x=AS-AP=PS$, y $t-x=AS-AP=PS$; luego substituyendo estos valores en la equacion tendrémos $(SL+PM)\times LR=p\times PS$; luego &c.

De esta proposicion se deduce que *el parámetro es á la suma de las ordenadas, como la diferencia de éstas, es á la diferencia de las abscisas, esto es*, P : SL + PM :: RL : PS.

127 *El rectángulo de la abscisa por la ordenada es al quadrado de la abscisa, como el parámetro es á la ordenada.*

Por la propiedad de la parábola es $y^2=px$, y si multiplicamos por x tendrémos $xy^2=px^2$, ó $xy\times y=p\times x^2$, que nos da la siguiente proporcion $xy : x^2 :: p : y$; ó que nos facilita el modo de conocer el rectángulo de la abscisa por la ordenada.

El

128 *El rectángulo de dos abscisas, multiplicada la* Fig.
una por la otra, es al quadrado de una de las dos ordenadas correspondientes á estas abscisas, como el quadrado 21
de la otra ordenada es al quadrado del parámetro.

Conservando los mismos datos que ántes, tendrémos $x=\frac{y^2}{p}$, y $t=\frac{z^2}{p}$, que multiplicando ordenadamente estas dos equaciones, será $tx=\frac{y^2\times z^2}{p^2}$, y $tx\times p^2=y^2\times z^2$, que nos da la siguiente proporcion $tx : y^2 :: z^2 : p^2$; por cuyo medio se podrá conocer el rectángulo de las abscisas.

129 *Si del vértice* A *de una parábola se tira una se-* 21
cante AN *que la corte en un punto* M; *se tira por este punto la ordenada* PM, *y por otro punto qualquiera* S *del exe otra ordenada, qué prolongada encuentre la secante en un punto* N: *el rectángulo de la abscisa* AS *por el parámetro es igual al rectángulo de la ordenada* PM *por la recta* SN.

Los triángulos semejantes APM, ASN nos dan la siguiente proporcion $AP : PM :: AS : SN$, ó haciendo $SN=l$, y substituyendo por estas líneas sus expresiones $x : y :: t : l$, la qual nos da $lx=ty$; pero $x=\frac{y^2}{p}$; luego haciendo la substitucion, será $\frac{ly^2}{p}=ty$, $ly^2=pty$, y suprimiendo una y, $ly=pt$.

130 *Si se prolonga el exe* AS *de una parábola hasta un punto qualquiera* R, *y por este punto se tira una secante* RL *que corte la curva en dos puntos* M *y* L, *y por* 22
estos puntos se tiran las ordenadas PM, LS, *el quadrado de la parte exterior* AR *es igual al rectángulo de las dos abscisas* AP, AS.

Llamando AR, l, y las demas cantidades como en los casos anteriores. Por la semejanza de los triángulos RPM, RSL *serán* $\overline{RP}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{Rs}^2 : \overline{SL}^2$; pero por lo demostrado (121) $\overline{PM}^2 : \overline{SL}^2 :: AP : AS$;

lue-

Fig. luego por una igualdad de razones $\overline{RP}^2 : \overline{RS}^2 :: AP : AS$, pero $\overline{RP}^2 = (RA + AP)^2 = (l+x)^2$, y $(RS)^2 = (RA + AS)^2 = (l+t)^2$, que substituyendo en la última proporcion estos valores, se transformará en $(l+x)^2 : (l+t)^2 :: AP : AS :: x : t$, ó $l^2+2lx+x^2 : l^2+2lt+t^2 :: x : t$; y multiplicando extremos y medios $l^2t+2tlx+tx^2 = l^2x + 2ltx + t^2x$; ó suprimiendo el término $2ltx$ nos queda $l^2t+tx^2 = l^2x + t^2x$, á cuya expresion le darémos esta forma $l^2t - l^2x = t^2x - x^2t$, ó $l^2(t-x) = tx(t-x)$, que dividiendo por el factor comun, sale $l^2 = tx$; luego, &c.

21 131 *En la parábola la cuerda* AM *es media proporcional entre la abscisa, y la suma del parámetro y la abscisa.*

El triángulo rectángulo AMP nos da $\overline{AM}^2 = AP^2 + PM^2$, ó $AM^2 = x^2 + px^2 + px(x+p)$, de cuya equacion sacarémos la siguiente proporcion $x : AM :: AM : x+p$, y por este medio se hallará el valor de AM quando sea necesario.

23 132 Qüestion II. *Determinar el valor de la subtangente* PT, *y de la subnormal* PR.

Supongamos que una secante que pasa por el punto M llegue á cortar la parábola en otro punto m; por los puntos M, m báxense al exe las ordenadas PM, pm, y desde el punto M báxese la MQ paralela al exe; sea $PT = s$ y $Mq = Pp = f$.

Los triángulos semejantes TPM, MQm nos darán $mq = \frac{fy}{s}$, con lo que será $pm = y + \frac{fy}{s}$, y elevándola al quadrado $(pm)^2 = Ap \times p$ (221.2.°) $= y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2}$, tambien tenemos $Ap = x+f$, cuyo valor, substituido en la última equacion, la reduce á $px+pf = y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2}$; $pf = \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2}$ con restar de uno y otro miembro la cantidad $px = y^2$; que dividiendo despues por f, sale $p = \frac{f \times y^2}{s^2} + \frac{2y^2}{s}$. Si suponemos ahora que el punto

to m se haya confundido con el punto M, la cantidad Fig.
$MQ = pP = f$ será o, y esta substitucion transformará la equacion en $2y^2 = sp$, ó substituyendo en lugar de y^2 su igual px; y haciendo la reduccion correspondiente, tendrémos por último $2x = s = PT$; *esto es, la subtangente de la parábola es dupla de la abscisa.*

133 La subnormal la sacarémos por medio del triángulo rectángulo TRM, el qual nos dará $TP : PM :: PM : PR = \frac{(PM)^2}{TP} = \frac{y^2}{2x} = \frac{Px}{2x} = \frac{1}{2}p$, *que nos manifiesta que la subnormal* de la parábola es la mitad del parámetro.

134 De esta qüestion se deduce 1.° que $TF =$
$x + \frac{p}{4}$, pues $TF = AT + AF = x + \frac{1}{4}p$; y como MF 24
$= x + \frac{1}{4}p$, el triángulo MFT es isósteles; ademas de esto, como $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, y $RP = \frac{1}{2}p$, es $RF = x - \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}p = x + \frac{1}{4}p$, que nos manifiesta que las tres rectas RF, FT, FM, son iguales. 2.° que si se tira QS paralela al exe, el ángulo GMS es igual al ángulo FMF; porque el ángulo $GMS = EMT$, pero $EMT = FMT$ por ser isósceles el triángulo MFE; luego, &c.

135 *La línea* AQ *tirada por el vértice de la parábola paralela á* PM, *y que va á cortar la tangente en un punto* D, *es igual á la mitad de la ordenada* PM *baxada desde el punto del contacto.*

Los triángulos semejantes TAD y TPM dan $TA : TP :: AD : PM$, pero TA es la mitad de TP, luego AD es la mitad de PM; luego 1.° si se prolonga AD hasta que encuentre en Q la ES paralela al exe, será $DQ = DA = \frac{PM}{2}$: 2.° para tirar una tangente á la parábola, siendo conocido el punto M, se hará de este modo: tírese por el punto M la paralela ES al exe, y por el punto A la AQ paralela á la ordenada que se termine en el punto Q: divídase la AQ por medio en el punto D; y por este punto y el punto M tírese la recta MT, y ésta será tangente á la curva.

136 De otros dos modos se puede tirar una tangente

Fig. te á la parábola, y son: el 1.º haciendo $AT=AP$, y tirando la TM, ésta será la tangente pedida (132); el 2.º es tirando la EF, dividiéndola en dos partes iguales en el punto D, y tirando por este punto y el punto M la MF, pues es claro que siendo $EM=Pf=MF$, el triángulo EMF es isósceles, y como EF está dividida en dos partes iguales, tambien lo ha de estar el ángulo opuesto; de donde resulta que el triángulo MTF es tambien isósceles y PT la subtangente, de donde se deduce que las dos líneas AQ y EF se cortan en dos partes iguales en el punto D; y como $EQ=Af=AF$, los dos triángulos AFD,EDQ son iguales.

137 *Si se tiran en la parábola una recta* NH *paralela á la tangente* MT, *y otra recta* EG *paralela al exe, la*
25 NH *queda dividida en dos partes iguales en el punto* Q *por la recta* EG.

Por los puntos N y H báxense al exe las ordenadas HL,NS que encuentren la EG prolongadas, si fuese necesario; y por los puntos M y Q báxense al exe las perpendiculares MP,QI, y prolónguese NH hasta que encuentre al exe en el punto O. Por ser $TO=MQ=PI$, será $OI=TP=2AP$; tambien tendrémos $AI=AP+PI$; $AS=AI+IS$, y $AL=AI-IL$; $OL=OI-IL$. Es evidente que con probar que $IL=IS$ habrémos cumplido con la proposicion, pues en este caso ha de ser $HQ=NQ$.

Por la propiedad de la parábola es $\overline{NS}^2=AS\times p=(AI+IS)\times p$; y por la semejanza de los triángulos OQI, ONS, $\overline{OI}^2 : \overline{IQ}^2 :: \overline{OS}^2=(OI+IS) : \overline{NS}^2 = \ldots\ldots \frac{(OI+IS)^2\times\overline{IQ}^2}{\overline{OI}^2}$: é igualando los dos valores de $\overline{NS}^2$;

$(AI+IS)p=\frac{(OI+IS)^2\times(\overline{IQ})^2}{(OI)^2}$; ó substituyendo por OI, $IQ=PM$, y AI sus valores será $\frac{(2AP+IS)^2\times AP\times p}{4\overline{AP}^2}=$

$=(AP+PI+IS)\times p$, ó $(4(AP)^2+4AP\times IS+(IS)^2)\times AP\times p=(AP+PI+IS)\times 4(AP)^2\times p$ con eliminar el denominador y formar la potencia del primer binomio, ó $4(AP)^2+4AP\times IS+\overline{IS}^2=4(AP)^2+4AP\times PI+4AP\times IS$; suprimiendo el factor comun $AP\times p$, que borrando las cantidades comunes á los dos miembros, nos sale por último $\overline{IS}^2=4AP\times PI$; y $IS=\sqrt{(4AP\times PI)}$. Hallado por este método el valor de IS, nos resta encontrar el de LI, lo que conseguirémos fácilmente siguiendo el mismo método que acabamos de practicar; en virtud del qual tendrémos $\overline{LH}^2=AL\times p$, y por la semejanza de los triángulos OIQ, OLH; $\overline{OI}^2 : \overline{IQ}^2 :: \overline{OL}^2 : \overline{LH}^2$, ó $\overline{OI}^2 : \overline{IQ}^2 :: (OI-IL)^2 : \overline{LH}^2 = \frac{(OI-IL)^2\times\overline{IQ}^2}{(OI)^2}=AL\times p$; si en esta última equacion substituimos en lugar de OI, $2AP$, en lugar de $AL=AI-IL$, su valor $AP+PI-LI$ se transformará en $(AP+PI-LI)\times p=\ldots\ldots \frac{(2AP-LI)^2\times AP\times p}{4(AP)^2}$, que eliminando el denominador, y haciendo las reducciones correspondientes, sale por último $\overline{LI}^2=4AP\times PI$, y $LI=\sqrt{(4AP\times PI)}$, que es el mismo valor de SI; pero por la propiedad de las paralelas HL, IQ, NS son proporcionales $LI : IS :: HQ : QN$; luego $HQ=QN$.

La igualdad de HQ y QN se puede demostrar de otro modo mas simple, porque si imaginamos que el punto H cayga sobre A, tambien caerá el punto O sobre A, se desvanecerán precisamente AO,AL, y HL, y en este caso ha de ser $AI=IS$, porque $PI=AP$, y $AI=$ 26
$2AP$, é $\overline{IS}^2=4(AP)^2$. De lo dicho se deduce que MG es un diámetro (105), NH una doble ordenada, y MQ la abscisa correspondiente á esta ordenada.

La

Fig. La propiedad de la parábola (121. II.) por razon del exe se debe verificar tambien por razon á un diámetro qualquiera; pues por la semejanza de los triángulos TPM, NQG, $\overline{TP}^2 : \overline{MP}^2 :: \overline{GQ}^2 = \overline{IS}^2 = 4\overline{AP}^2$ (137): $\overline{NG}^2$; ó $4\overline{AP}^2 : AP \times P :: 4\overline{AP}^2 : \overline{NG}^2$, que multiplicando extremos y medios, sale $\overline{NG}^2 = AP\times p$, y extrayendo la raiz $NG = \sqrt{(AP\times p)}$.

Ademas de esto el triángulo rectángulo NQG nos da $\overline{NQ}^2 = \overline{QG}^2 + \overline{NG}^2$, y substituyendo por $\overline{QG}^2 = \overline{SI}^2$, y NG sus valores $4AP \times PI$, y $AP\times p = PI\times p$, será $\overline{NQ}^2 = 4AP\times PI + PI\times p = (4AP+p)\times PI$; pero siendo $PI = MQ$, y AP constante respecto el punto M; $4AP+p$, es el parámetro del diámetro, MQ la abscisa, y NQ la ordenada. Luego en la parábola el quadrado de una ordenada á un diámetro qualquiera es igual al rectángulo de la abscisa por el parámetro.

27 138 Por ser el parámetro del diámetro $4AP\times p$, se infiere que este parámetro es quatro veces mayor que la línea MF tirada del punto de contacto al focus, y excede al parámetro del exe en el quádruplo de la abscisa AP.

139 Todas aquellas propiedades de la parábola que no dependen del focus, respecto del exe, se verifican tambien respecto del diámetro; y así, si al parámetro del diámetro le llamamos q, la ordenada HQ, y, y la abscisa MQ, x, tendrémos la expresion analítica de la parábola respecto del diámetro $y^2 = qx$, que es semejante á la del exe.

27 140 *Si por el focus* F *de la parábola se tira una perpendicular* FO *á la tangente* TM, *la línea* FO *es media proporcional entre* AF *quarta parte del parámetro y el radio vector* FM.

Por ser isósceles el triángulo TFM es $TO = OM = \frac{1}{2}TM$; $2OM = TM$, $4\overline{OM}^2 = \overline{TM}^2$; y como el triángulo rectángulo TPM

Fig.

TPM nos da $\overline{TM}^2 = \overline{TP}^2 + \overline{PM}^2$, será haciendo las substituciones correspondientes en todas estas cantidades $4\overline{OM}^2 = 4\overline{AP}^2 + AP\times p$, y $\overline{OM}^2 = \overline{Ap}^2 + \frac{1}{4} AP\times p$.

Pero $\overline{FO}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{MO}^2$; luego substituyendo en lugar de FM, $AP+\frac{1}{4}p$, y en lugar de MO el valor que acabamos de hallar, tendrémos $\overline{FO}^2 = \overline{AP}^2 + \frac{AP\times p}{2} + \frac{1}{16}p^2 - AP^2 - \frac{1}{4}AP\times p = \frac{p^2}{16} + \frac{1}{4}AP\times p = AF\times AF + AP\times AF$ (134) $= AF(AF+AP)$, que nos da la siguiente proporcion $AF+AP = MF : FO :: FO : AF$.

142 *Si por el punto* R, *donde la normal corta el exe, se tira una perpendicular* RH *al radio vector, se tendrá* HM = *á la subnormal* PR *y* HF = FP.

Los triángulos MPR y RHM son semejantes, pues siendo isósceles el triángulo FRM, el ángulo $FMR = FRM$; los ángulos MHR y MPR tambien son iguales por ser rectos, por consiguiente los ángulos restantes tambien son iguales; y como el lado MR es comun á los dos triángulos, éstos son iguales por precision, y así $MH = PR$. Por ser $FR = FM$ (134), restando iguales de iguales, será $FR - PR = MF - MH$, es decir, $PF = FH$.

143 Qüestion. *Encontrar la equacion de la parábola* 28
respecto su convexìdad, esto es, relativamente á una línea AQ *tangente en el punto* A; sea la abscisa $AQ = x$, $QM = y$, y el parámetro igual p; una vez que AQ es perpendicular á AP, esta línea es paralela á PM, y por consiguiente $AQ = PM$, y $QM = AP$; luego $PM = x$, y $AP = y$, con lo que será $x^2 = py$, y ésta es la equacion exterior de la parábola.

CA-

Fig.

CAPITULO VIII.

De la Elipse.

144 Qüestion. *Determinar la principal propiedad de la elipse.*

Ya que la elipse es una curva producida por un plano que corta un cono atravesando sus dos lados (113);
29 y que ademas es perpendicular á la seccion triangular AEB, la línea Dd, que es la interseccion de estos dos planos, parte la superficie elíptica en dos partes iguales, pues esta seccion va á encontrar á un lado y otro la superficie del cono, que tambien está dividida en dos partes iguales por la seccion triangular AEB.

Si cortamos el cono con dos planos paralelos á su base, que vayan á encontrar la línea Dd en dos puntos P y G, y la superficie elíptica en las rectas PM y LN, estas últimas líneas son dobles ordenadas comunes á los dos círculos y á la elipse, cuyo exe es Dd (105); y supuesto que el ángulo MPD, que forma con sus ordenadas, es recto, y las líneas DP y DG son sus abscisas correspondientes, y ademas los dos círculos y la elipse van á cortar un mismo plano, que es la seccion triangular; las líneas de las intersecciones con este plano, quales son HI, RS y Dd se han de hallar en un mismo plano.

Esto supuesto por la propiedad del círculo es $\overline{PM}^2 = HP \times PI$ y $\overline{GN}^2 = RG \times GS$, y comparando entre sí estas expresiones $\overline{PM}^2 : \overline{GN}^2 :: HP \times PI : RG \times GS$. Ademas de esto, los triángulos semejantes DPI, DGS nos dan $DP : DG :: PI : GS$, y por la misma razon los triángulos DGR, DPH nos dan tambien $dP : dG :: PH : RG$, y multiplicando ordenadamente estas dos proporciones $DP \times dP : DG \times dG :: PI \times PH : GS \times RG$; pero acabamos de sacar $\overline{PM}^2 : \overline{GN}^2 :: PI \times PH : RG \times GI$; luego por una igual-

igualdad de razones será $\overline{PM}^2 : \overline{GN}^2 :: DP \times dP : DG \times dG$, *que nos manifiesta que en la elipse los quadrados de las ordenadas son como los rectángulos de las partes en que cada ordenada divide al exe*, y ésta es la principal propiedad de la elipse.

144 Si el uno de los dos círculos paralelos á la base del cono corta el exe por medio en un punto C, este punto se llama centro de la elipse, pues la figura se halla igualmente distribuida alrededor de él; y en este caso el rectángulo de las partes interceptadas en el exe por la ordenada correspondiente al punto C, es igual al quadrado del semiexe, esto es, $DC \times dC = \overline{DC}^2$; con lo que tenemos que el quadrado de una ordenada qualquiera $\overline{GN}^2$ es al rectángulo $DG \times dG$ de las partes en que corta al exe, como $\overline{CF}^2$, que es el quadrado de la ordenada al centro C es á $\overline{DC}^2$ quadrado de la mitad del exe, esto es, $\overline{GN}^2 : dG \times DG :: \overline{CF}^2 : \overline{DC}^2$; y como no hay mas de un solo punto C donde el quadrado de la ordenada sea como el quadrado de la mitad del exe, ó como el quadrado de una de sus abscisas; y ademas sabemos que una ordenada se desvanece en el punto d, esto es, quando su abscisa llega á ser igual al exe Dd; es evidente que la curva vuelve sobre ella misma, y que la línea $\overline{CF}^2$ es la mayor ordenada, de suerte que el punto F es el mas elevado, supuesto que las disminuciones de PM, despues del punto F, se hacen en la misma razon que sus aumentos ántes de llegar á dichos puntos; y como esta línea CF divide en dos partes iguales el exe de la elipse, la recta Ff dupla de la CF, que forma ángulos rectos con el exe Dd, se llama *exe segundo*, *ó exe conjugado*, *ó exe menor* (106).

145 Si consideramos el orígen de las abscisas en C, la propiedad que acabamos de demostrar (144) se verificará

rá igualmente, pues no habrá mas diferencia que haberse trocado los nombres, esto es, que en este caso será CP la abscisa, y DP la diferencia entre la abscisa y el semiexe, y tambien habrán mudado de nombre las expresiones de los rectángulos de las partes interceptadas; por cuya razon será $DP = CD \mp CP$ y $Pd = CD \pm CP$, segun que el punto P caiga por encima ó por debaxo del centro C y $DP \times Pd = \overline{DC}^2 - \overline{CP}^2$; de modo que substituyendo en la proporcion anterior estas cantidades, será $\overline{CF}^2 : \overline{PM}^2 :: CD \times Cd = \overline{CD}^2 : (CD \mp CP) \times (Cd \pm CP)$, ó $\overline{CF}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{PM}^2 : \overline{CD}^2 - \overline{CP}^2$; *esto es, el quadrado del primer exe es al quadrado del segundo* (pues las mitades siguen la razon de los todos), *como el quadrado de una ordenada qualquiera es el rectángulo de las partes en que corta al exe mayor.*

146 Para expresar analíticamente esta propiedad de la elipse harémos $Dd = 2a$, $Cp = x$, $PM = y$, y $Ff = 2b$, con lo que será $DP = a \mp x$, y $dp = a \pm x$; cuyos valores substituidos en la proporcion anterior, la transformará en $b^2 : a^2 :: y^2 : a^2 - x^2$, que multiplicando extremos y medios, y despejando el y^2, sale $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, y esta es la equacion de la elipse considerando el orígen de las abscisas en el centro C.

147 Pero si se toma el orígen en el extremo D del diámetro, y hacemos $Dd = a$ $Ef = b$, $DP = x$, $PM = y$, será $Dp = a - x$, y en virtud de esta suposicion tendrémos $(a - x)x : y^2 :: a^2 : b^2$, é $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2) = \frac{ab^2x - b^2x^2}{a^2}$, que es la equacion de la elipse, considerando el orígen en el vértice.

148 Como los dos exes de la elipse son constantes, una línea que sea tercera proporcional á uno y á otro exe tambien será constante; y como entre las muchas líneas que se consideran en una elipse (prescindiendo de los exes) no hay otra constante mas que dicha tercera proporcional á los dos exes, han convenido los Matemáticos en referir á ella todas las demas líneas, considerándola como escala, y dándole el nombre de *parámento*: pero como pueden resultar dos terceras proporcionales diferentes, segun que la proporcion principie por el primero ó segundo exe, de aquí es que esta línea se distingue si es parámetro del primer exe, ó parámetro del segundo exe, en que siempre es parámetro del exe que ocupa el primer término de la proporcion; luego si conservando los exes y coordenadas sus valores, llamamos p el parámetro, tendrémos (quando el orígen se considera en el vértice) $a : b :: b : p$, de donde sale $b^2 = ap$ (y quando se considera en el centro) $2a : 2b :: 2b : p$, que nos da $4b^2 = 2ap$, y $b^2 = \frac{1}{2}ap$.

Luego si en las equaciones de la elipse substituimos por b^2 su valor, esto es, en la primera $\frac{1}{2}ap$, y en la segunda ap, tendrémos que se transforma la primera en $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$, y la segunda en $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$.

Y así la elipse formada en el cono nos da (considerando en el centro el orígen de las abscisas) $b^2 : a^2 :: y^2 : a^2 - x^2$; $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$; é $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$ (y considerando el orígen en el extremo del exe) $b^2 : a^2 :: y^2 : (a - x)x$; $y^2 = \frac{ab^2x - b^2x^2}{a^2}$; é $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$.

149 Si suponemos que los dos exes de la elipse sean iguales, esto es, $a = b$, ó $2a = 2b$, la elipse será un círculo, y las equaciones que expresan su naturaleza serán $y^2 = b^2 - x^2 = a^2 - x^2$, é $y^2 = ax - x^2$, y estas son las expresiones analíticas que manifiestan la naturaleza del círculo; la primera quando el orígen se toma en el centro, y la segunda quando se toma en el extremo de un diámetro: de suerte que el círculo se puede considerar como una elipse, cuyos dos exes son iguales, y por consiguiente iguales al parámetro.

150 De quanto hemos dicho acerca de la elipse se in-

Fig. infiere que esta curva está formada de quatro porciones perfectamente semejantes é iguales comprehendidas en los quatro ángulos iguales que forman la interseccion de los dos exes ; y que ademas hay quatro puntos que están igualmente situados por razon á los exes ; porque una vez que las diminuciones de PM á qualquiera lado que se desvie del punto C, son todas en razon de los rectángulos de las partes interceptadas por cada punto donde se encuentra el punto P ; y como ademas este rectángulo es el mismo en las quatro ordenadas baxadas desde los quatro puntos M sobre el exe, y que pasen de una parte y otra por el mismo punto, igualmente distante del centro C ; estas quatro ordenadas son iguales, y por consiguiente habrá quatro puntos en la elipse igualmente distantes de su exe.

151 Tambien se deduce que la elipse encuentra perpendicularmente á su exe, pues siendo la tangente en este punto paralela á la ordenada PM, y confundiéndose con la curva, es perpendicular al exe, y tambien lo ha de ser la curva.

152 Si en la equacion $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ en vez de suponer que los exes están representados por a y b, los expresamos por $2a$ y $2b$, se transformará en $y^2 = 4b^2 - \frac{4b^2x^2}{4a^2}$, la que nos da $2a = \frac{2bx}{\sqrt{(b^2-y^2)}}$, y formando una proporcion $\sqrt{(b^2-y^2)} : x :: 2b : 2a$; cuya expresion manifiesta que para hallar el exe mayor de una elipse, conociendo el exe menor, la abscisa y la ordenada se ha de hallar una quarta proporcional á la raiz quadrada de la diferencia entre el quadrado del semiexe menor, y el quadrado de la ordenada, á la abscisa y al exe menor. Lo que se consigue del modo siguiente.

30 153 Sobre una recta CD dada de posicion levántese la perpendicular CQ, la que se prolongará al otro lado del punto C; tómense las partes CB, Cb iguales al pequeño semiexe, el qual es conocido ; sobre la CD tómese la $CP = x$, y tírese $PM = y$ paralela á la CB; por el punto M tírese una indefinida MH que corte la CB en H; describase sobre Bb un semicírculo que cortará la HM en G ; trasládese HG desde C á E, y tírese la EP, y por el punto b la bA paralela á la EP, y la CA será la mitad del exe mayor.

Fig.

Para tener todo el exe se hará $QC = 2b$, se llevará HG desde Q á S ; por este punto se tirará la SR paralela á la CA, que cortará la PM prolongada en R ; por este punto y el punto Q se tirará la QR que se prolongará hasta que encuentre la AC prolongada en el punto D, y la CD será el exe pedido.

Por la semejanza de los triángulos CEP, CbA, es $CE : CP :: Cb : CA$; pero $CE = GH = \sqrt{(bH \times HB)} = \sqrt{(b+y \times (b-y))} = \sqrt{(b^2-y^2)}$; $CP = x$, $Cb = b$; luego $\sqrt{(b^2-y^2)} : x :: b : CA = \frac{bx}{\sqrt{(b^2-y^2)}}$. Esto es por lo que hace al primer caso ; por lo que toca al segundo, los triángulos semejantes QSR, QCD nos dan $QS : SR :: QC : CD$, pero $QS = HG = \sqrt{(b^2-y^2)}$; $SR = CP = x$, y $CQ = 2b$; luego $\sqrt{(b^2-y^2)} : x :: 2b : CD = \frac{2bx}{(\sqrt{b^2-y^2})} = 2a$. De la equacion $a = \frac{bx}{\sqrt{(b^2-y^2)}}$ sale $b = \frac{ay}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, que nos manifiesta que siendo dado el exe mayor, la ordenada y la abscisa, se encontrará el exe menor por una construccion geométrica semejante á la que acabamos de explicar.

154 La misma equacion da $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$, que nos dice que siendo dados los dos exes y la abscisa, conocerémos la ordenada, buscando la raiz z de $a^2 - x^2$ (89), y formando despues la siguiente proporcion $a : b :: z : y$, cuya construccion geométrica se executa del modo siguiente. Sobre $Aa = 2a$ trácese un semicírculo que corte el semiexe menor $CB = b$ prolongado en el punto 31
D ; por el punto P, extremo de la abscisa $CP = x$, tírese una paralela á la CB, que será cortada por el círculo en N desde el punto P, como centro ; con un radio PN trácese un arco que corte el exe mayor en un punto E ; tírese la aB, y por el punto E una paralela á

Fig. á la aB, que cortará la PN en M; y PM es la ordenada pedida.

Por la propiedad del círculo $PN = \sqrt{(a^2 - x^2)} = z$, y á causa de las paralelas aB y EM es $aC = CD = a : CB = b : EP = PN = z : PM = y = \frac{bz}{a}$, de donde se deduce, que si se describe un semicírculo qualquiera aDA, y en el diámetro levantamos quantas ordenadas se quieran PN, PN, &c. y todas ellas las dividimos en los puntos M, M, &c.; de suerte que $PN : PM :: b : a$, la curva que pase por los puntos M, M, &c. será una elipse.

155 Esta misma propiedad se hallará tambien si comparamos el valor de la ordenada al círculo con el de la ordenada de la elipse; porque $\overline{PN}^2 = Z^2 = AP \times aP = (a - x) \times (a + x) = (a^2 - x^2)$, y $\overline{PM}^2 = (a^2 - x^2) \times \frac{b^2}{a^2}$; luego $z^2 : y^2 :: a^2 - x^2 : (a^2 - x^2)\frac{b^2}{a^2} :: a^2 : b^2$, que extrayendo la raiz quadrada, es $z : y :: a : b$.

Una vez que las variables que lleva la equacion de la elipse no pasan de dos dimensiones, la elipse es una curva del primer género.

32 156 Si del extremo B del pequeño exe, como centro con un radio igual á la mitad AC del exe mayor, se traza un arco que corte este último exe en dos puntos F, f, estos dos puntos se llaman los *focus* de la elipse; y si se tiran las rectas BF y Bf, éstas se llaman *radios vectores*, los quales son iguales siempre que se tiran desde el punto B; pero tirados desde otro punto qualquiera de la curva son desiguales, y en este caso el uno se llama *radio mayor* y el otro *radio menor*.

157 Una parte como FC del exe se llama *excentricidad*; las dos excentricidades FC, fC de la elipse son iguales: para convencernos basta atender á la total igualdad de los triángulos rectángulos BFC, BfC; y como tambien son iguales las partes del exe mayor AC, y aC, es claro que si de estas partes restamos FC y fC iguales, las diferencias AF, af han de ser iguales: lo que nos manifiesta que los focus de la elipse distan igualmente de los extremos del exe mayor.

De lo que dexamos dicho acerca de los focus *se infiere, que si por uno de ellos* F *tiramos una ordenada* FN, *esta ordenada es igual á la mitad del parámetro.*

Porque la equacion de la elipse es $(NF)^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$; y como en este caso x es igual á la excentricidad, que llamarémos c, haciendo la substitucion, y extrayendo la raiz es $FN = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 - c^2)}$; pero el triángulo rectángulo BFC nos da $b^2 = a^2 - c^2$; luego $FN = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \frac{b^2}{a}$, y $2FN = \frac{2b^2}{a} = p$, por ser $2a : 2b :: 2b : p = \frac{2b^2}{a}$, y por consiguiente $FN = \frac{1}{2}p$.

159 La equacion $b^2 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = aF \times AF$ nos manifiesta *que el semiexe menor de la elipse es medio proporcional entre las distancias que hay desde el uno de los focus á los extremos del exe mayor*; y así, conociendo este exe y la excentricidad, será fácil hallar el exe menor. De la misma sacamos $c^2 = a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$ que nos manifiesta el modo de hallar la excentricidad conocidos los dos exes, *pues es una media proporcional entre la suma y la diferencia de ellas* (la que tambien se podrá determinar conociendo el exe mayor y el parámetro): pues la equacion $c^2 = a^2 - b^2$ nos da $c = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{2}p \times a)} = \sqrt{(a \times (a - \frac{1}{2}p))}$ con extraer la raiz, y substituir por b^2 su valor $\frac{p}{2} \times a$.

160 La expresion $AF \times Fa = (a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = b^2 = \frac{2a \times p}{4} = \frac{aA \times p}{4}$ nos manifiesta *que el rectángulo de las partes interceptadas por uno de los focus sobre el exe mayor es igual á la quarta parte del rectángulo del exe mayor y el parámetro.*

161 Qüestion I. *Hallar el valor de los radios vectores* FM, fM.

Por el punto M báxese al exe la ordenada MP, con lo que se tendrá $FP = FC + CP$, y $fP = FC - CP$, y quadran-

Fig. drando estas expresiones $(FP)^2=(FC)^2+2FC\times CP+(CP)^2$ y $(fP)^2=(FC)^2-2CF\times CP+(CP)^2$.

Por otra parte $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{FC}^2$ (tom. I. 472); y como $\overline{PM}^2=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}(\overline{AC}^2-\overline{CP}^2)$, substituyendo en esta cantidad en lugar de $\overline{BC}^2$ su valor $\overline{AC}^2-\overline{FC}^2$ sale $(\overline{PM})^2=\overline{AC}^2-\overline{FC}^2-\overline{CP}^2+\frac{\overline{FC}^2\times\overline{CP}^2}{\overline{AC}^2}$, pero á causa de los triángulos rectángulos FPM, fPM, es $\overline{FM}^2=\overline{PM}^2+\overline{FP}^2$, y $\overline{fM}^2=\overline{PM}^2+\overline{Pf}^2$. Si se substituyen en estas equaciones en lugar de $\overline{PM}^2$, $\overline{FP}^2$, y $\overline{fP}^2$ sus expresiones, tendrémos $\overline{FM}^2=\overline{AC}^2-\overline{FC}^2-\overline{CP}^2+$....

$$\frac{\overline{FC}^2\times CP}{\overline{AC}^2}+\overline{FC}^2+2FC\times CP+\overline{CP}^2,$$

y $\overline{fM}^2=\overline{AC}^2$

$$-\overline{FC}^2-\overline{CP}^2+\frac{\overline{FC}^2\times\overline{CP}^2}{\overline{AC}^2}+\overline{FC}^2-2FC\times CP+\overline{CP}^2;$$

que haciendo las reducciones, y extrayendo la raiz quadrada, nos queda $FM=AC+\frac{FC\times CP}{AC}$ y $fM=AC-\frac{FC\times CP}{AC}$, que son las expresiones de los radios vectores; si sumamos estas dos equaciones será $FM+fM=2AC=2a=Aa$, esto es, que la suma de los radios vectores es igual al exe mayor.

162 De todo esto se deduce: 1.º que siendo dados los dos exes, se puede trazar la elipse por un movimiento continuo; porque conocidos los focus F y f, si atamos á estos puntos por medio de dos clavos una cuerda igual á la longitud del exe mayor, y poniéndola tirante por medio de un estilo, hacemos que éste vaya corriendo á lo largo de la cuerda, teniéndola tirante y empezando desde el punto A, el rastro que el estilo haya trazado con su punta será la elipse.

Fig.

2.º Que se pueden determinar quantos puntos se quieran de una elipse y trazarla mecánicamente; pues siendo $FM=AC+\frac{FC\times CP}{AC}$ y $FM=AC-\frac{FC\times CP}{AC}$; si hallamos una quarta proporcional Q al semiexe mayor, la excentricidad y la abscisa de suerte que sean $AC:FC::PC:Q$, y con los intervalos $FM=AC+Q$, y $fM=AC-Q$, como radios desde los puntos F y f, trazamos unos arcos que se corten en un punto M', este punto será uno de la curva; y con los mismos radios se puede señalar otro punto debaxo del exe, y como á cada lado del exe segundo se pueden señalar dos puntos sin necesidad de variar los radios, (pues éstos á cada punto varian del mismo modo que la abscisa) tendrémos quatro puntos de la elipse; por el mismo método se determinarán otros muchos puntos.

Por consiguiente la elipse se compone de quatro porciones iguales y semejantes en todo comprehendidas en los quatro ángulos formados por la interseccion de los dos exes, que confirma lo dicho (150).

163 Qüestion II. *Hallar el valor de una ordenada al pequeño exe de la elipse.*

Habiendo baxado la ordenada $M'O$ al exe menor 32
Bb y del punto M' la ordenada Mp' al exe mayor haciendo $BO=z$, y las demas líneas nombrándolas como ántes, tendrémos que CO será igual $PM'=y=b-z$; con lo que será $y^2=b^2-2bz+z^2$; pero $y^2=b^2-$...... $\frac{b^2x^2}{a^2}$ (146); luego $b^2-2bz+z^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$, que eliminando el denominador, y dexando en un solo miembro el término en que está la x, tendrémos $a^2b^2-a^2b^2-2a^2bz+a^2z^2=-b^2x^2$; ó $-2a^2bz+a^2z^2=-b^2x^2$; y $a^2\times(2bz-z^2)=b^2x^2$, que nos da la siguiente proporcion $b^2:a^2::2bz-z^2:x^2$, ó $\overline{BC}^2:\overline{AC}^2::BO\times bO:\overline{CP'}^2=\overline{OM}^2$, *esto es, el quadrado del pequeño exe* (pues las mitades son como los to-

Fig. todos) *es al quadrado del exe mayor como el rectángulo de las partes interceptadas en el pequeño exe por su ordenada es á esta misma línea.*

164 De esta proporcion sale $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(2az - z^2) = \frac{a^2}{b^2} \times (2b - z)z$, que extrayendo la raiz quadrada, y substituyendo $b-y$ en lugar de z es $x = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$, que nos manifiesta que siendo conocidos los dos exes de la elipse y una abscisa sobre el exe menor, se encontrará su ordenada, y por consiguiente se trazará la elipse conociendo muchos puntos del modo siguiente. Levántese en el punto Q, extremo de la abscisa $BQ=z$, ó $CQ=y$, una línea indeterminada MQ paralela al exe mayor $AC=a$; descríbase sobre $Bb=2a$ un semicírculo que cor-
33 te la línea MQ en N, y trasládese la línea QN desde Q hasta E; tírese por las extremidades de los dos exes la línea ab, y por el punto E una paralela á la ab, que cortará á MQ en el punto M; y MQ será la ordenada que se busca $=x$. Porque los triángulos semejantes aCb, MQE nos dan $bC=b : Ca=a :: EQ = QN = \sqrt{(BQ \times bQ)} = \sqrt{(2bz-z^2)} : QM = x = \frac{a}{b}\sqrt{(2bz-z^2)} = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$; ó haciendo $\sqrt{(b^2-y^2)} = t$, $b : a :: t : x$, ó $Cb = CB : Ca :: QN : QM$, que nos dice, que habiendo descrito sobre un diámetro qualquiera un semicírculo; si en el diámetro levantamos muchas ordenadas, y las prolongamos proporcionalmente de suerte que sean $QN : QM :: b : a$, la curva que pasare por todos los puntos M, M, &c. será una elipse.

34 165 Luego con trazar sobre un diámetro qualquiera un círculo, levantar muchas ordenadas y prolongarlas de suerte que la parte añadida sea igual á la misma ordenada, la curva que pasare por estas ordenadas prolongadas tambien será elipse: en vez de prolongar las ordenadas se pueden tambien acortar; pero siempre proporcionalmente, esto es, haciendo que las partes que hayan de quedar tengan con las ordenadas ántes de acortarlas la

la razon del exe mayor al menor; y en este caso tambien será elipse la curva trazada por los extremos de las últimas ordenadas; bien que el diámetro viene á ser exe mayor. No nos quedará duda acerca de esto, si consideramos que hay la misma razon entre las ordenadas al exe mayor que entre las ordenadas al exe menor. Y así por los métodos dados se puede construir fácilmente una elipse. Fig.

167 Si llamamos q el parámetro del exe menor, será $2b : 2a :: 2a : q$, $4b^2 : 4a^2 :: 2b : q$ (tom. I. 278), y por último $\frac{q}{2b} = \frac{a^2}{b^2}$, cuya cantidad substituida en la equacion de la elipse respecto el exe menor en lugar de $\frac{a^2}{b^2}$, será $x = \frac{q}{2b}(b^2 - y^2) = \frac{bq}{2} - \frac{qy^2}{2b}$.

168 Qüestion III. *Determinar el valor de la subtangente y de la subnormal en la elipse.*

1.º Concíbase que una secante pasando por el punto M 35
corta la curva en otro punto m infinitamente próximo á M: si del punto M se baxa la ordenada mp, y del punto M una paralela MQ al exe, y suponemos el parámetro $=p$, $CP=x$, $PM=y$, $MQ=Pp=f$, $AC=a$, $BC=b$, y $PT=s$, tendrémos $Cp=x-f$, $AP=a-x+f$; $pa=a+x-f$, y $Ap \times Pa = a^2 - x^2 + 2fx - f^2$. Los triángulos semejantes TPM, MQm nos dan tambien $Qm = \frac{fy}{s}$, con lo que será $pm = y + \frac{fy}{s}$, y $\overline{pm}^2 = y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2}$; pero (148) $\overline{pm}^2 = AP \times Pa \times \frac{p}{Aa}$ (148) $= (a^2 - x^2 + 2fx - f^2) \times \frac{p}{2a}$; luego $y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = (a^2 - x^2 + 2fx - f^2) \times \frac{p}{2a} = \frac{ap}{2} - \frac{px^2}{2a} + \frac{2fxp}{2a} - \frac{f^2p}{2a}$; y suprimiendo en él un miembro y^2, y el otro $\frac{ap}{2} - \frac{px^2}{2a}$ por ser cantidades iguales (148), será $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = \frac{2fpx}{2a} - \frac{f^2p}{2a}$, ó divi-

vidiendo por f, $\frac{2y^2}{s} + \frac{fy^2}{s^2} = \frac{2px - pf}{2a}$. Si imaginamos ahora que el punto m caiga sobre M, en este caso será $MQ = pP = f = 0$, y todos los términos en que está la f desaparecerán, y la equacion será $\frac{2y}{s} = p\frac{x}{a}$, ó $2ay^2 = s \times px$, y $s = \frac{2ay^2}{px} = \frac{2a}{px}\left(\frac{pa}{2} - \frac{px^2}{2a}\right) = \frac{a^2 - x^2}{x}$, de donde sacarémos la siguiente proporcion $x : a+x :: a-x : s$, ó $CP : aP :: AP : TP$, *esto es, la subtangente es quarta proporcional á la abscisa, y las dos partes en que la ordenada divide el exe*: 2.º el triángulo rectángulo RMT da $TP : PM :: PM : PR$, ó $\frac{a^2 - x^2}{x} : y :: y : PR = \frac{y^2 x}{a^2 - x^2} = x\frac{\left(\frac{p}{2a} \times (a^2 - x^2)\right)}{a^2 - x^2} = \frac{px}{2a}$ *que manifiesta que la subnormal es quarta proporcional al exe mayor, al parámetro y la abscisa.*

3.º $CT = CP + PT = x + \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{x^2 + a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x}$, *que nos dice que la distancia* CT *que hay del centro de la elipse hasta el punto de concurso de la tangente y subtangente, es tercera proporcional á la abscisa y al semiexe mayor.*

4.º $AT = PT - AP = \frac{a^2 - x^2}{x} - a + x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{a^2 - x^2 - ax + x^2}{x} = \frac{a^2 - ax}{x} = a\left(\frac{a - x}{x}\right)$, que nos da $x : a :: a - x : AT$, *esto es, la abscisa es al semiexe mayor, como la diferencia entre este semiexe y la abscisa es á la parte de la subtangente interceptada entre el vértice y la tangente.*

168 De todo lo dicho en esta qüestion se deduce: 1.º que si la abscisa x ó CP crece, CT, AT y PT disminuyen sucesivamente; de suerte que quando x llegue á ser igual á $CA = a$, entónces AT es cero igualmente que

que la subtangente, pero CT llega á ser igual á CA, y la tangente es paralela al exe menor.

2.º Quando llega á ser $CP = x = 0$, entónces las líneas CT, PT y AT llegan á ser infinitas, y la tangente en este caso es paralela al exe mayor.

3.º Si se cuentan las abscisas desde el extremo del exe, $PT = s$ es igual á $\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$, que si suponemos $x = 0$, PT y AT son cero, y $CT = \frac{1}{2}a$; pero si al contrario suponemos x ó $AP = \frac{1}{2}a$, PT llega á ser infinita igualmente que CT y AT.

4.º Se puede por el mismo método (167) hallar la subtangente en el círculo; pues si en la expresion de la subtangente de la elipse suponemos $2a = p$, y en lugar de y^2 substituimos su valor $a^2 - x^2$, tomando las abscisas desde el centro, será $s = \frac{a^2 - x^2}{x}$, que es la misma expresion que en la elipse; la que se encontrará igualmente siguiendo el mismo método de que hemos hecho uso para las tangentes.

5.º Por el mismo método se encontrará la subtangente ST de la elipse por razon al pequeño exe $= \ldots$ $\frac{b^2 - y^2}{y}$, y las demas líneas lo mismo que para el exe mayor; supuesto dexamos probado (165) que hay la misma razon entre las coordenadas al primer exe que entre las coordenadas al segundo.

6.º Que el rectángulo de la subtangente por la abscisa es igual al rectángulo de las partes interceptadas en el exe por el punto P, pues la equacion $s = \frac{a^2 - x^2}{x}$ nos da $sx = a^2 - x^2$, ó $CP \times PT = AP \times aP$.

7.º Que aT es quarta proporcional á la abscisa, á la mitad del exe, y á la parte del exe comprehendido entre la extremidad del exe y la extremidad P de la abscisa, esto es, á la mitad del exe, mas la abscisa, porque por ser $CT = \frac{a^2}{x}$ (168.3.º) es $x : a :: a : CT$, y $x : a +$

Fig $a+x :: a : a+CT$; ó $x : a :: a+x : a+CT$, esto es, $CP : CA :: AC+CP = aP : aT$.

169 *Si por el focus* f *opuesto á la tangente* TM *y por*
36 *el punto de contacto* M *se tira la línea* fM *prolongada indefinidamente, y por el otro focus* F *la perpendicular* FS *á la tangente, que prolongada vaya á encontrar la* fM *en* G, *dirémos que* SG = FS.

Para la demostracion tírese la FM. Es evidente que por ser TM perpendicular á FS por construccion, y pasando por el punto M, el ángulo FMG está dividido en dos partes iguales por la SM, y así el ángulo $SMG=SMF$; y como los ángulos MSG, MSF tambien son iguales por ser rectos, los triángulos SMG, SMF son semejantes é iguales; luego $SG=SF$.

170 De esta proposicion se deduce: 1.° que el ángulo $FMV = FMT$, porque el ángulo $SMG = FMV$ por por opuestos al vértice.

2.° Que se puede tirar con mucha facilidad una tangente á la elipse; porque si por el punto f opuesto al punto M se tira la línea FM prolongada indefinidamente, y sobre su prolongacion se toma $MG=FM$, se tira FG, y se divide por medio en S; y por este punto y el punto M se tira la MS que encuentre el exe prolongado en T, la línea TM será la tangente pedida.

3.° Que por ser $MG = FM$, el triángulo FMG es isósceles y $fG = Aa$, y por tanto TM no podrá ser tangente en el punto M miéntras que fG no sea igual á $aA = 2a =$ al exe mayor.

37 171 *Si se tiran en la elipse una recta* NH *paralela á la tangente* TM, *y por el punto de contacto y el centro otra recta* MC *esta línea cortará á* HN *en dos partes iguales en el punto* Q.

Por los puntos N,Q,H tírense paralelas á la ordenada PM, y por los puntos H,Q otras paralelas al exe; de modo que la una de ellas, por exemplo, la QG prolongada al otro lado del punto Q corte la HL prolongada en R; hemos de probar que $IS=IL$, porque en este

te caso $QN=QH$; para lo qual sea $IL=t$ y $RL=GS=QI=u$. Por la semejanza de los triángulos TPM, y HQY, es $TP : PM :: HY : QY$, ó $\frac{a^2-x^2}{x}$ (168): $y :: HI=LI=t : QI = \frac{tyx}{a^2-x^2}$; luego $HL=RL-RH$ $=QI-QY=u-\frac{tyx}{a^2-x^2}$, y $(HL)^2=u^2-\frac{2tuxy}{a^2-x^2}+\frac{t^2x^2y^2}{(a^2-x^2)^2}$.

Los triángulos semejantes CPM, CIQ dan $PM : PC :: QI : CI$, ó $y : x :: u : CI = \frac{ux}{y}$; y como $CL = CI + LI$, será CL igual á $\frac{ux}{y}+t=\frac{ux+ty}{y}$; ademas $AL \times La = \overline{AC}^2 - \overline{LC}^2 = a^2 - \frac{(ux+ty)^2}{y^2} = a^2 - \ldots\ldots$ $\frac{u^2x^2+2tuxy+t^2y^2}{y^2} = \frac{a^2y^2-u^2x^2-2tuyx-t^2y^2}{y^2}$. Por lo demostrado (143) $AP \times Pa : AL \times La :: \overline{PM}^2 : \overline{HL}^2$; ó substituyendo por estas líneas sus expresiones $a^2-x^2 : \ldots$ $\frac{a^2y^2-u^2x^2-2tuxy-t^2y^2}{y^2} :: y^2 : \overline{HL}^2 = \ldots\ldots$ $\frac{a^2y^2-u^2x^2-2tuxy-t^2y^2}{a^2-x^2}$. Comparando los dos valores de HL tendrémos $u^2-\frac{2utxy}{a^2-x^2}+\frac{t^2x^2y^2}{(a^2-x^2)^2}=\ldots$ $\frac{a^2y^2-u^2x^2-2utxy-t^2y^2}{a^2-x^2}$, y multiplicando por a^2-x^2; $a^2u^2-u^2x^2-2utxy+\frac{t^2x^2y^2}{a^2-x^2}=a^2y^2-u^2x^2-2utxy-t^2y^2$, que suprimiendo los dos términos comunes, se reduce $a^2u^2+\frac{t^2x^2y^2}{a^2-x^2}=a^2y^2-t^2y^2$. Eliminando el de-

no-

nominador a^2-x^2, y despejando la t, tendrémos $t^2 = \overline{IL}^2 = a^2 - x^2 - \frac{a^2u^2+u^2x^2}{y^2}$. Ahora nos resta probar que esta expresion es tambien el valor de IS, para lo qual sea $IS=z$. Los triángulos semejantes TPM, NGQ darán $GN = \frac{xyz}{a^2-x^2}$; y como $NS = QI + GN$ será tambien $= u + \frac{xyz}{a^2-x^2}$ y $\overline{NS}^2 = u^2 + \frac{2uxyz}{(a^2-x^2)^2} + \frac{x^2y^2z^2}{(a^2-x^2)^2}$; ademas $CS = CI - IS = \frac{ux-yz}{y}$, y como $AS \times Sa = \overline{AC}^2 - \overline{CI}^2 = a^2 - \left(\frac{ux-yz}{y}\right)^2$, y son proporcionales $AP \times Pa : AS \times Sa :: \overline{PM}^2 : \overline{NS}^2$ será $a^2 - x^2 : a^2 - \frac{(ux-yz)^2}{y^2} :: y^2 : \overline{NS}^2 = a^2y^2 - \frac{(ux-yz)^2}{a^2-x^2}$. Igualando este valor de $\overline{NS}^2$ con el anterior, y haciendo todas las operaciones que son precisas hasta encontrar el valor de z^2, nos saldrá éste $= a^2 - x^2 - \frac{a^2u^2+u^2x^2}{y^2}$, que es el mismo que el de t^2; luego $z=t$, ó $YL=IS$, pero son proporcionales $IS : IL :: NQ : QH$, luego $NQ=QH$, que es lo que propusimos demostrar.

Luego 1.° Mm es un diámetro (105), cuya ordenada es NH, y la abscisa MQ.

2.° Si por el centro C se tira la paralela Xx á TM, la Xx es un diámetro conjugado, y las dos líneas Xx, Mm son dos diámetros conjugados.

172 *Si por uno de los extremos* X *de un diámetro conjugado se baxa una perpendicular* XV *al exe* aA, *la línea* CV *interceptada entre el centro* C *y el punto* V *por la* VX *es media proporcional entre las partes interceptadas en el exe mayor por la ordenada* PM *baxada del punto del contacto.*

Por

Por lo demostrado (143) $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = CP \times PT : \overline{CA}^2 - \overline{CV}^2 :: \overline{PM}^2 : \overline{XV}^2$; pero por razon de las paralelas MT y Xx es el ángulo $MTP = PCX$; y los triángulos MPT, XCV son semejantes; luego tendrémos $\overline{PM}^2 : \overline{XV}^2 :: \overline{PT}^2 : \overline{CV}^2$; y por una igualdad de razones $CP \times PT : \overline{CA}^2 - \overline{CV}^2 :: \overline{PT}^2 : \overline{CV}^2$; y multiplicando extremos y medios $CP \times PT \times \overline{CV}^2 = (\overline{CA}^2 - \overline{CV}^2) \times PT^2$; pero $\overline{AC}^2 = CT \times CP = (CP + PT)\, CP = CP \times PT + \overline{CP}^2$, cuyo valor, substituido en la equacion en lugar de $\overline{AC}^2$, la transformará en $CP \times PT \times \overline{CV}^2 = (CP \times PT + \overline{CP}^2 - \overline{CV}^2) \times \overline{PT}^2$, ó suprimiendo el factor comun PT, $CP \times \overline{CV}^2 = (CP \times PT + \overline{CP}^2 - \overline{CV}^2) \times PT = CP \times PT^2 + CP^2 \times PT - \overline{CV}^2 \times PT$; y $CP \times \overline{CV}^2 + PT \times \overline{CV}^2 = CP \times \overline{PT}^2 + \overline{CP}^2 \times PT$; y descomponiendo en factores $(CP+PT) \times \overline{CV}^2 = (CP + PT) \times CP \times PT$, que sacamos por último $\overline{CV}^2 = CP \times PT = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2$ (158); luego $CA + CP : CV :: CV : CA - CP$.

173 *El rectángulo de las partes interceptadas en un diámetro por una ordenada al mismo diámetro, es al quadrado de esta ordenada, como el quadrado de dicho diámetro es al quadrado de su conjugado.*

Sea el diámetro $CM=f$ por la semejanza de los triángulos CPM, CIQ es $PM : CM :: IQ : CQ$, y substituyendo por estas líneas sus expresiones $y : f :: u : CQ = \frac{uf}{y}$. Si multiplicamos el quadrado de $GQ = IS = IL$, que es $a^2 - x^2 - \frac{a^2u^2+u^2x^2}{y^2} = a^2 - x^2 - \frac{u^2}{y^2}(a^2 - x)$ (171), por el quadrado de $CM = f$ tendrémos

GQ

Fig.

$\overline{GQ}^2 \times \overline{CM}^2 = f^2(a^2-x^2) - \frac{f^2u^2}{y^2}(a^2-x^2)$, ó $\overline{GQ}^2 \times \overline{CM}^2 = \left(f^2 - \frac{f^2u^2}{y^2}\right)(a^2-x^2)$, pero $f^2 = \overline{CM}^2$; $\frac{f^2u^2}{y^2} = \overline{CQ}^2$; y $a^2-x^2 = \overline{CV}^2$ (172); luego haciendo las substituciones $\overline{GQ}^2 \times \overline{CM}^2 = (\overline{CM}^2 - \overline{CQ}^2) \times \overline{CV}^2$, que nos da $\overline{CM}^2 - \overline{CQ}^2 : \overline{CM}^2 :: \overline{GQ}^2 : \overline{CV}^2$; pero á causa de los triángulos semejantes CVX, GQN es $\overline{GQ}^2 : \overline{CV}^2 :: \overline{NQ}^2 : \overline{CX}^2$; luego por una igualdad de razones $\overline{CM}^2 - \overline{CQ}^2 = MQ \times Qm : \overline{CM}^2 :: \overline{QN}^2 : \overline{CX}^2$, ó alternando $MQ \times Qm : \overline{QN}^2 :: \overline{CM}^2 : \overline{CX}^2$; luego &c.

174 Por consiguiente en la elipse hay la misma razon entre las ordenadas á los diámetros que entre las ordenadas á los exes; y así quanto se ha dicho respecto de los exes se dirá de los diámetros en todo aquello que no depende de los focus.

CAPITULO IX.

De la Hipérbola.

175 Qüestion. *Encontrar la principal propiedad de la hipérbola*

Hemos visto (113) que la hipérbola es una curva
38 formada por un plano que ni corta los dos lados del cono, ni es paralela á ninguno de ellos; pero sí que es perpendicular á la seccion triangular AFB, y prolongado va á cortar en d el cono opuesto.

Si se corta el cono por un plano paralelo á la base que pase por un punto P de la línea DE, las líneas DE, HI, AB estarán en un mismo plano, supuesto que ellas son las intersecciones de muchos planos con un mismo plano: las líneas PM y LN, que son las intersecciones de los dos círculos HMI y ANB con la seccion hiperbólica son dos dobles ordenadas comunes á los círculos y á la hipérbola, en la qual como el exe de las abscisas DE, y la línea dD comprehendida entre los conos opuestos, y prolongada de una parte y de otra, corta las dobles ordenadas PM, LN en dos partes iguales, y en ángulos rectos, es un exe transversal (105); y si se divide esta línea en dos partes iguales en el punto C, dicho punto se llama centro de las hipérbolas opuestas, y á él se refieren las propiedades de la hipérbola, y las mas veces se toma por orígen de las abscisas.

Fig.

176 Por la propiedad del círculo es $\overline{PM}^2 : \overline{EN}^2 :: HP \times PI : AE \times EB$; pero los triángulos semejantes DEB, DPI dan $DE : DP :: EB : PI$; y por la misma razon los triángulos dEA, dPH nos dan tambien $dE : dP :: EA : PH$; luego multiplicando ordenadamente estas dos proporciones tendrémos $DE \times dE : DP \times Pd :: EB \times AE : PI \times PH$; y por una igualdad de razones $\overline{PM}^2 : \overline{EN}^2 :: DP \times dp :: DE \times dE$, que nos manifiesta *que en la hipérbola los quadrados de las ordenadas son como los rectángulos de las distancias que hay desde cada ordenada á los extremos en que cada uno de los exes corta los conos opuestos*; que es la principal propiedad en que se cifra la naturaleza de la hipérbola.

177 Para expresar esta propiedad analíticamente sea $Dd = 2a$, ó $DC = a$ (contando las abscisas desde el centro) $CP = x$, $CE = t$, $PM = y$, $EN = z$, con lo que será $dP = dC + CP = PC + DC = x + a$; $DP = PC - CD = x - a$; $dE = t + a$, y $DE = t - a$, y así tendrémos $dP \times DP = \overline{PC}^2 - \overline{DC}^2 = x^2 - a^2$, y $dE \times ED = t^2 - a^2$, con lo qual la proporcion anterior se transformará en $y^2 : z^2 :: x^2 - a^2 : t^2 - a^2$.

178 La línea Bb, ó su mitad BC perpendicular al 39
exe transversal ó exe primero Aa en el punto C, dividida en dos partes iguales por este punto y quarta proporcional á la raiz quadrada de $aP \times AP$ (que supondrémos

es

es CG) á la ordenada PM, y la mitad del exe primero AC, se llama *exe conjugado*, *ó exe segundo de la hipérbola*: con lo que tendrémos CG, ó $\sqrt{(AP \times aP)} : PM :: AC : BC$, y elevando al quadrado $aP \times PA : \overline{PM}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$, ó $x^2 - a^2 : y^2 :: a^2 : \overline{BC}^2 = b^2$ (llamando b el segundo semiexe), *que nos manifiesta que en la hipérbola el rectángulo del exe primero mas la parte de este exe prolongado comprehendido entre una ordenada y el vértice de la curva, por esta línea, es al quadrado de la ordenada, como el quadrado del exe primero es al quadrado del exe segundo*; de cuya proporcion sale la siguiente equacion $y^2 = \frac{(x^2 - a^2)\,b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, que comprehende las principales propiedades de la hipérbola respecto de sus exes, contando las abscisas desde el centro.

179 Si se toman las abscisas desde el vértice A de la curva, siendo en este caso $AP = x$ y $aP = a + x$, será $AP \times aP = (2a + x)x = 2ax + x^2$, y la equacion se transformará en $y^2 = (2ax + x^2) \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$. *

180 Una tercera proporcional á los dos exes de la hipérbola es el parámetro del exe, que ocupa el primer término de la proporcion.

Luego si llamamos p el parámetro del exe primero será $2a : 2b :: 2b : p$, y $4a^2 : 4b^2 :: 2a : p$, que nos da $\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$; substituyendo $\frac{p}{2a}$ en las equaciones en lugar de $\frac{b^2}{a^2}$, tendrémos $y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - a^2) = \frac{Px^2}{2a} - \frac{Pa}{2}$; é $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax + x^2) = px + \frac{Px^2}{2a}$. La última de estas dos equaciones nos manifiesta *que en la hipérbola el quadrado de una ordenada es igual al rectángulo de la abscisa y parámetro, mas otro rectángulo formado de la abscisa y una quarta proporcional al exe primero, el parámetro y la abscisa.*

* Si en las equaciones de la hipérbola hacemos $a = b$, se reducirán una y otra á $y^2 = x^2 - a^2$ é $y^2 = 2ax + x^2$. Y en este caso la hipérbola se llama hipérbola equilátera.

Fig.

181 De la equacion $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ sale $a = \frac{bx}{\sqrt{(y^2 + b^2)}}$, que nos suministra un medio para determinar el exe primero, siendo conocido el segundo exe, la abscisa al centro, y la ordenada correspondiente, y es el siguiente:

En la extremidad C de la abscisa $PC = x$ levántese la 40
perpendicular $CB = b$; trasládese la ordenada $PM = y$ desde C á G, y tírese la BG; trasládese BG de C á D, y tírese la DP, y por el punto B la BA paralela á DP, que cortará CP en el punto A, y CA será la mitad del exe mayor; porque el triángulo rectángulo BCG nos da $\overline{BG}^2 = \overline{CD}^2 = \sqrt{(\overline{CG}^2 + \overline{BC}^2)} = \sqrt{(y^2 + b^2)}$, y los triángulos semejantes CDP, CAB, $CD : CP :: CB : CA$, ó $\sqrt{(y^2 + b^2)} : x :: b : AC = \frac{bx}{\sqrt{(y^2 + b^2)}} = a$.

182 La misma equacion anterior (181) nos da $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{(x^2 - a^2)}$, que nos manifiesta el modo de conocer la ordenada al exe primero en conociendo su abscisa y los dos exes, por el qual se podrá trazar la hipérbola, y es el siguiente.

Habiendo elevado en el punto P la indefinida PM, 41
y en el punto A la AH, las dos paralelas á la CB; con el radio CP descríbase un semicírculo que corte á la AH en el punto H; llévese AH de P á G, tírese la Ba y por el punto G una paralela á Ba que corte la PM en M, y esta línea PM es la ordenada pedida; porque por la propiedad del círculo es $AH = PG = \sqrt{(AP \times Ap)} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$, y por la semejanza de los triángulos aCB, GPM, $aC : CB :: PG : PM = \frac{CB \times PG}{aC} = \frac{b}{a}(x^2 - a^2) = y$. Determinando por este método muchas ordenadas, ó lo que es lo mismo, muchos puntos de la curva, se podrá trazar mecánicamente una hipérbola semejante á la que hemos descrito en el cono.

 Si

Fig. 183 Si por los extremos de los exes se tira la AB, y
42 esta línea la trasladamos desde C á F y á f, estos dos puntos F, f, adonde llega á uno y otro lado del centro, se llaman los *focus*; las líneas MF, Mf, tiradas desde qualquiera punto M de la curva al focus, se llaman *radios vectores*; y la línea $FC = fC$ *excentricidad*.

184 Luego ya que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$, será tambien $\overline{BC}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{AC}^2$, ó llamando FC, c, y substituyendo por las demas líneas sus expresiones $b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$, ó $c+a : b :: b : c-a$; esto es, *el semiexe segundo es medio proporcional entre las distancias* FA *y* Fa, *que hay desde uno de los focus á los extremos* A *y* a *del exe mayor, ó al vértice de la curva.*

185 De lo que se deduce, que conocido uno de los focus y el exe primero, se tendrá el exe segundo trazando con FC, como radio desde el punto A, un arco que corte en dos puntos B y b una perpendicular al exe primero, levantada en el punto C, y Bb será el exe segundo.

186 *La ordenada* FN, *que pasa por el focus de la hipérbola, es igual á la mitad del parámetro.*

Por lo demostrado (180) es $\overline{FN}^2 = (\overline{CF}^2 - \overline{CA}^2) \times \frac{p}{Aa}$; pero $\overline{CF}^2 = \overline{BA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, y $\overline{CB}^2 = AC \times \frac{1}{2} p$ (sácase de la proporcion $2a : 2b :: 2b : p$ (párrafo citado)); luego $\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times \frac{1}{2} p$; cuyo valor substituido en la primera equacion, tendrémos $\overline{FN}^2 = (\overline{AC}^2 + AC \times \frac{1}{2} p - \overline{AC}^2 \times) \frac{p}{2AC} = \frac{AC \times p}{2} \times \frac{p}{2AC} = \frac{1}{4} p^2$, haciendo operaciones análogas á las que se hiciéron (158), y por consiguiente $FN = \frac{1}{2} p$.

187 Qüestion I. *Hallar el valor de los radios vectores* FM *y* fM.

Tí-

Tírese la ordenada PM con lo que tendrémos $FP =$ Fig.
$CP - CF$, y $fP = CP + Cf$, y elevando al quadrado estas cantidades $\overline{FP}^2 = \overline{CP}^2 - 2CP \times CF + \overline{CF}^2$, y $\overline{fP}^2 = \overline{CP}^2 + 2CP \times CF + \overline{CF}^2$; pero siendo (tom. I. 472) $\overline{BC}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{AC}^2$; y $\overline{PM}^2 = (x^2 - a^2) \frac{b^2}{a^2} = (\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2) \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{CP}^2 \times \overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 \times \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}$: si substituimos por BC su valor será $\overline{PM}^2 = \frac{\overline{CP}^2 (\overline{CF}^2 - \overline{AC}^2) - \overline{AC}^2 (\overline{CF}^2 - \overline{AC}^2)}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{CP}^2 \times \overline{CF}^2}{\overline{CA}^2} - \overline{CP}^2 - \overline{CF}^2 + \overline{CA}^2$.

Los triángulos rectángulos MPF, MPf nos dan $\overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$, y $\overline{Mf}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{Pf}^2$, que substituyendo en lugar de estas cantidades sus expresiones, será $\overline{FM}^2 = \frac{\overline{CP}^2 \times \overline{CF}^2}{\overline{AC}^2} - 2CP \times CF + \overline{AC}^2$, y $fM = \frac{\overline{CP}^2 \times \overline{CF}^2}{\overline{AC}^2} + \ldots 2CP \times CF + \overline{AC}^2$: despues de hacer la reduccion; que extrayendo la raiz quadrada, tendrémos por último $FM = \frac{CP \times CF}{AC} - AC$ y $fM = \frac{CP \times CF}{AC} + AC$; y éstas son las expresiones de los radios vectores de la hipérbola, que restando la primera de la segunda, nos dan $Mf - MF = 2AC = Aa$, cuyo último resultado nos manifiesta *que la diferencia de los radios vectores de la hipérbola es igual al exe primero.*

188 De lo dicho se deduce: 1.° que siendo conocidos

los

Fig. los dos exes, se podrá trazar la hipérbola con un movimiento continuo; para lo qual, determinando los focus
43 del modo dicho (183), se atará la extremidad de un hilo *FMG* á uno de los focus, y el otro cabo al extremo de una regla larga movible por el otro extremo alrededor del otro focus, cuya longitud sea diferente del hilo; y teniendo éste tendido á lo largo de la regla, y sujeto por medio de un estilo, se hará mover la regla alrededor del focus, y el rastro que trazará el estilo será un ramo de hipérbola.

189 Lo segundo, que se pueden determinar muchos puntos de la hipérbola y construirla mecánicamente; porque hemos visto que FM, ó fM es igual á una línea .... $\frac{CP \times CF}{AC}$, quarta proporcional á la mitad del exe pri-
42 mero, á la abscisa y á la distancia que hay del centro á uno de los focus, mas ó ménos el semiexe primero; de suerte que si esta línea la llamamos Q, será $MF = Q - AC$, y $Mf = Q + AC$. Luego si sobre el exe primero prolongado, con estas líneas como radios, haciendo centro en los focus, trazamos dos arcos que se corten en un punto M, este punto será de la hipérbola; y como esta operacion la podemos repetir quatro veces sin variar los radios, solo con trocar los centros y hacer las intersecciones á los dos lados del exe primero, se podrán trazar á un tiempo las dos hipérbolas opuestas.

190 Qüestion II. *Encontrar el valor de una ordenada al exe segundo de la hipérbola.*

Báxese la ordenada MQ al exe segundo, prolongándolo, si fuese necesario, y sea $BQ = z$, y las demas cantidades conserven sus valores, será $QC = MP = y = b \pm z$ (segun que el punto Q esté mas arriba ó mas abaxo del punto B), con lo que será $y^2 = b^2 \pm 2bz + z^2$, pero hemos visto que $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$; luego $b^2 \pm 2bz + z^2 = ...$ $\frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$; $a^2(b^2 + b^2 \pm 2bz + z^2) = b^2x^2$; pero $b^2 \pm$

$2bz + z^2 = y^2$; luego haciendo las substituciones correspondientes, tendrémos $a^2(b^2 + y^2) = b^2x^2$, y formando una proporcion $b^2 + y^2 : x^2 :: b^2 : a^2$, que nos manifiesta *que el quadrado del semiexe segundo, mas el quadrado de una abscisa á este exe, es al quadrado de la ordenada correspondiente, como el quadrado del exe segundo es al quadrado del exe primero.*

191 De la misma proporcion sale $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2)$ y $x = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 + y^2)}$, que es la equacion de la hipérbola respecto del exe segundo, tomando las abscisas desde el centro.

192 Luego 1.º la razon de las coordenadas al exe segundo es diferente de la razon de las coordenadas al exe primero.

193 2.º Si llamamos q el parámetro del exe segundo, que es una tercera proporcional á este exe y al primero, será $2b : 2a :: 2a : q$ y $a^2 = \frac{bq}{2}$, cuyo valor, substituido en la equacion que expresa el valor de x, dará $x^2 = \frac{bq}{2} + \frac{qy^2}{2b}$.

194 3.º Si llamamos y la ordenada del exe segundo su abscisa x, el exe segundo a, y el primero b, la equacion de la hipérbola respecto el segundo exe, se transformará en $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + a^2) = \frac{b^2x^2}{a^2} + b^2$, y como la equacion respecto el primero es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2) = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, la equacion $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} \pm \frac{b^2}{2}$ representa de un modo general la naturaleza de la hipérbola por razon á sus exes quando el orígen de las abscisas se toma desde el centro, siendo b^2 negativa para el exe primero, y positiva para el segundo.

Fig. 195 4.º Quanto mas aumente la abscisa CP, tanto mayor será la ordenada PM; de suerte que si CP llega á ser infinita, PM lo será tambien; pero si al contrario CP llega á ser igual a, entónces $PM = 0$; y por razon al exe segundo si la abscisa $CQ = 0$, QM viene á ser igual AC, y es la mas pequeña de las ordenadas respecto al segundo exe, siempre que se considere en el centro el orígen de las abscisas.

196 5.º Si se tiran por los puntos A y a, extremos del exe primero, dos paralelas al exe segundo, estas líneas serán tangentes á la curva en estos puntos.

197 6.º Las hipérbolas opuestas se desvian mas y mas hasta el infinito de sus exes conjugados; y solo el exe primero toca cada una de ellas en un punto; pues el exe segundo jamas las encuentra aunque se extienda hasta el infinito.

198 7.º Supuesto que las variables x é y no pasan de dos dimensiones, la hipérbola es una curva del primer género.

199 Qüestion III. *Hallar el valor de la subtangente y subnormal de la hipérbola.*

44 Por un punto m infinitamente próxîmo á M tírese la mp paralela al segundo exe, y la MQ perpendicular á mp, y sea $MQ = pP = f$, y $Tp = s$, será $Cp = x+f$, $aP \times AP = \overline{Cp}^2 - \overline{AC}^2 = x^2 + 2fx + f^2 - a^2$; y por la semejanza de los triángulos TMP, Mqm, $qm = \frac{fy}{s}$, $mp = y + \frac{fy}{s}$, y $\overline{mp}^2 = y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2}$. Tomando la equacion de la curva respecto el punto m, tendrémos $\overline{mp}^2 = (\overline{Cp}^2 - \overline{CA}^2) \times \frac{p}{AC} = (x^2 + 2fx + f^2 - a^2) \times \frac{p}{2a}$. Luego $y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = \frac{px^2}{2a} - \frac{ap}{2} + \frac{pf^2 + 2pfx}{2a}$; y como $y^2 = \frac{px^2}{2a} - \frac{ap}{2}$ (180),

(180), restando estas cantidades de la equacion cada una de su miembro, dividiendo por f, y considerando por último que los puntos M y m se confundan, de lo que resultará ser $f = 0$, como se hizo en la parábola y elipse (167); tendrémos $s = \frac{2ay^2}{px} = \frac{x^2 - a^2}{x}$ (substituyendo por y^2 su valor); y éste es el valor de la subtangente, que nos da la siguiente proporcion $x : x + a :: x - a : s$, *que nos manifiesta que la subtangente de la hipérbola es quarta proporcional á la abscisa, al semiexe mas la abscisa y á la parte del exe prolongado, comprehendido entre la ordenada baxada al punto de contacto, y el vértice.*

Luego 1.º CT es tercera proporcional á la abscisa y al semiexe; porque $CT = CP - PT = x - s = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x}$, que nos da la proporcion $x : a :: a : CT$.

2.º AT es quarta proporcional á la abscisa x, á AP y AC; porque $AT = AC - CT = a - \frac{a^2}{x} = \frac{ax - a^2}{x} = \frac{x - a}{x} \times a$, que nos da $x : x - a = AP :: a = AC : AT$.

3.º La subnormal PQ es quarta proporcional al exe, al parámetro y á la abscisa. Del triángulo rectángulo QMT sale $PT : PM :: PM : PQ = \frac{\overline{PM}^2}{PT} = \frac{y^2}{\frac{x^2 - a^2}{x}} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}{\frac{x^2 - a^2}{x}} = \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{px}{2a}$, esto es, $2a : p : x : PQ$.

4.º La línea aT es quarta proporcional á las rectas CP, aP y AC. La cantidad $aT = Aa - AT = aC + CT = a +$

Fig.

$a + \frac{a^2}{x} = \frac{ax+a^2}{x} = \frac{a(x+a)}{x}$, esto es, $x : x+a :: a : aT$.

45 200 Se podrá demostrar del mismo modo que en la elipse (169), que si por un mismo punto M de la hipérbola se tiran desde los focus los radios vectores fM; FM, y del focus F mas inmediato al punto M la perpendicular FS á la tangente MT, que prolongada vaya á encontrar el radio fM en G, que $FS = SG$; y que por consiguiente $MF = MG$, y que por ser isósceles el triángulo MFG, es el ángulo $HML = FMS$.

201 Luego si por el focus f opuesto al punto M se tira la línea fM, y se toma en ésta la parte $MG = FM$, se tira la FG, y por el punto S medio de esta línea y el punto M se tira la recta MS, que vaya á encontrar el exe primero en T, la MT será tangente de la hipérbola en el punto M.

Tambien se deduce de lo dicho, que siendo $fG = fM - MG$ es igual $Mf - FM = Aa = 2a$. Luego

La recta TM no puede ser tangente en el punto M interin que fG no sea igual al exe mayor.

46 202 Si suponemos que $CP = x$ vaya creciendo, quanto mayor sea esta cantidad tanto menor será $CT = \frac{a^2}{x}$, pues dexamos probado (tom. I. 269) que el valor de un quebrado está en razon inversa del denominador; de suerte que si CP, ó x llega á ser infinita, entónces el punto T se confundirá con el punto C, esto es, $CT = x - s = \frac{a^2}{x} = 0$; de donde sale $x = s$, que nos manifiesta que quando la abscisa es infinita, la subtangente es tambien infinita; y como la ordenada crece conforme la abscisa crece, tambien en este caso ha de ser la ordenada infinita; luego la tangente que sale del centro no encuentra la hipérbola sino es á una distancia infinita.

Pa-

203 Para determinar esta tangente por medio de un segundo punto diferente del centro tírese por el punto A una tangente indeterminada que vaya á encontrar la tangente infinita en un punto D, y tírese una ordenada PM, que se prolongará hasta encontrar la tangente infinita en un punto E, y sea la incógnita $AD = z$.

Por la semejanza de los triángulos CAD, CPE es $AC : AD :: CP : PE$, ó $a : z :: x : PE = \frac{zx}{a}$, y como $EM = PE - PM$, substituyendo por estas líneas sus expresiones, será $ME = \frac{zx}{a} - y$; pero siendo $x = \infty$, tambien y es infinita, y en este caso la línea ME, diferencia de dos cantidades infinitas, ha de ser igual á cero; y así $\frac{zx}{a} - y = 0$, $z = \frac{ay}{x}$, ó $x : y :: a : z$. Si en la equacion $y = \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$ suprimimos la cantidad a^2 (13), á causa de ser $x = \infty$, tendrémos $y = \frac{bx}{a}$, ó, $x : y :: a : b$; pero acabamos de ver que $x : y :: a : z$, luego por una igualdad de razones $a : b :: a : z$, ó lo que es lo mismo, $b = z = AD$, que nos manifiesta que si sobre la tangente paralela al segundo exe tomamos á una y otra parte del vértice las porciones AD, Ad iguales cada una al semiexe segundo y por el centro C, y los puntos que acabamos de determinar se tiran las indefinidas CDE; Cde, y las prolongamos infinitamente por debaxo y por encima del punto C, ellas serán tangentes infinitas de las dos hipérbolas opuestas.

204 Estas líneas que no encuentran la hipérbola sino es á una distancia infinita se llaman *asimtotas*.

Esta propiedad admirable de las asimtotas nos manifies-

Fig. fiesta que el espíritu humano puede concebir el infinito, pero no puede medirlo.

205 De lo dicho se deduce : 1.° que si se tiran las líneas AB, Ab, y por el centro C se las tira las paralelas CE, Ce, éstas serán las asímtotas ; pues ellas cortarán $AD = CB$, y $Ad = Cb$ (203)

206 2.° Que si se dividen las líneas AB, Ab en dos partes iguales, y por los puntos G y g y el centro se tiran las rectas CE y Ce, éstas tambien serán asímtotas; pues por cortar BA y Bb, ó bA y Bb en partes proporcionales han de ser paralelas AB y Ce.

207 *Si por un punto* M *de una hipérbola se tira una línea* Ee *perpendicular al exe mayor que se termine por uno y otro extremo en las asímtotas, el rectángulo de las partes* EM *y* Me *es igual al quadrado de la mitad del exe segundo.*

Por la semejanza de los triángulos CPE, CAD es $PE = \frac{CB \times CP}{AC}$; pero $EM = PE - PM$ y $eM = PE + PM$; luego $EM \times eM = \overline{PE}^2 - \overline{PM}^2 = \frac{\overline{CB}^2 \times \overline{CP}^2}{\overline{AC}^2} - \frac{\overline{CB}^2}{\overline{AC}^2}(\overline{CP}^2 - \overline{AC}^2) = \overline{CB}^2$.

De todo esto se deduce, que si se tiran por los puntos M y N de una hipérbola, ó de dos hipérbolas opuestas, las líneas Ee, Hh paralelas al exe conjugado y terminadas por las asímtotas, el rectángulo $EM \times Me = HN \times Nh$, que nos da la siguiente proporcion $EM : HN :: Nh : Me$.

47 208 *Si por dos puntos qualesquiera* M *y* N *de una hipérbola, ó de las hipérbolas opuestas se tiran dos rectas* Ii, Ll *paralelas entre sí, y terminadas por las asímtotas, los rectángulos* IM × Mi *y* LN × Nl, son iguales.

Por la semejanza de los triángulos GIM, ELN y Mgi Nel es $GM : EN :: MI : NL$ y $eN : gM :: Nl : Mi$; pero $GM : EN :: Ne : Mg$ (207) ; luego por una igualdad de razones $MI : NL :: Nl : Mi$, que nos da la equacion $IM \times Mi = LN \times Nl$.

209 De esta proposicion se deduce : primero, que si la línea NL pasa por el centro vendrá á ser igual á $\overline{CK}^2$, ó $\overline{RK}^2$, segun que se mueva de baxo á arriba, ó de derecha á izquierda ; y en este caso los dos puntos L y l se reunirán en el centro ó en el punto R, y así $LN \times Nl = \overline{CK}^2$, ó $\overline{RK}^2$; y si por el punto M se tira una paralela MI á CK, ó RK terminada por las asímtotas, tendrémos igualmente $IM \times Mi = \overline{CK}^2 = \overline{RK}^2$; donde se manifiesta que toda línea Nn terminada por las asímtotas ó por las hipérbolas opuestas, que se supone pasa por el centro, ó por un punto R de la curva, ha de ser, ó un primer diámetro conjugado KK, ó una tangente kK, y está dividida en dos partes iguales por el centro ó por el punto R ; porque toda línea como Nn terminada por las asímtotas, ó por las hipérbolas opuestas, tiene sus dos partes NL y nl comprehendidas entre las asímtotas y la curva iguales entre ellas ; porque $NL \times Nl = NL \times (Nn \pm nl) = NL \times Nn \pm NL \times nl$, y $nl \times nL = nl \times (Nn \pm NL) = nl \times Nn \pm NL \times nl$, pero los primeros miembros de estas equaciones son iguales ; luego tambien lo son los segundos, con lo que tendrémos $NL \times Nn \pm NL \times nl = nl \times Nn \pm NL \times nl$, ó $NL \times Nn = nl \times Nn$ (suprimiendo los términos comunes) ; y dividiendo últimamente por Nn, nos sale $NL = nl$.

210 2.° Que si tenemos un punto N de una hipérbola entre sus asímtotas, y por éste tiramos una recta Nl, y prolongándola, si fuese necesario, hacemos $nl = NL$, tendrémos otro punto mas de la curva ; de suerte que si conociésemos un ramo de la hipérbola, podíamos por este método trazar las dos hipérbolas opuestas con mucha facilidad.

3.°

Fig. 211 3.° Que siendo $MI : Nl :: NE : Mg$, y $MI \times Mg = Nl \times NE$, será tambien $MI : NL :: EN : GM$, y $MI \times GM = NL \times EN$, es á saber, que si por dos puntos M y N de una hipérbola, ó de dos hipérbolas opuestas, se tiran dos líneas Mg, NE, ó MI, Nl paralelas entre sí y terminadas por una asímtota, y otras dos líneas Mi, NE, ó MG, Ne paralela tambien entre ellas, y terminadas por la otra asímtota, se tendrá siempre $Mg \times MI = NE \times NL$, ó $MI \times MG = NE \times Nl$.

48 212 4.° Si por dos puntos M y N de las hipérbolas opuestas se tiran las líneas MI, Mi, NL, Nl paralelas á las asímtotas, se tendrá á causa de los ángulos iguales en C los paralelogramos $MICi$, $NLCl$ iguales entre sí, pues tienen los lados que forman ángulos iguales recíprocamente proporcionales (tom. I. 462), con lo que tendrémos $MI \times Mi = NL \times Nl$: lo mismo dirémos de los triángulos CMI, CM que son la mitad de los paralelogramos.

213 5.° Como las líneas AB, Ab tiradas desde los extremos del exe segundo á los extremos del exe primero son paralelas (205) cada una á su asímtota, y están divididas en dos partes iguales por estas líneas; y como á causa de ser CG, ó Cg paralela á Ab, ó AB es CG la mitad de AB y Cg la mitad de Ab, esto es, $CG = GA = Cg = gA$, tendrémos el paralelogramo constante $CGAg$, que se llama *potencia de la hipérbola*, igual á cada uno de los paralelogramos variables $MICi$; y así si hacemos $CG = a$, $GA = b$, $CI = x$, y $MI = y$, tendrémos $xy = ab$, que es la equacion de la hipérbola por razon de las asímtotas.

214 6.° La equacion $xy = ab$ nos da $y = \frac{ab}{x}$, que nos manifiesta que quanto mayor sea x, tanto menor ha de ser y; así quando x llegue á ser infinita, y será cero por razon á x, y en este caso la potencia de la hipérbola será igual á un espacio infinitamente pequeño, esto es, á una línea; y como entónces la asímtota ha de tocar la hipérbola en el punto en que la ordenada es cero, se ve que

que la asímtota solo encuentra á la hipérbola á una distancia infinita. Fig.

De la misma equacion $xy = ab$ sale $x : a :: b : y$, de suerte que se podrá tambien trazar la hipérbola determinando sobre la asímtota sucesivamente los valores de x para tener otros tantos valores de y.

215 Hemos visto (209) que toda tangente terminada por las asímtotas está dividida por medio en el punto 49
de contacto M; luego si tiramos MI paralela á la otra asímtota, tendrémos que la subtangente TI es igual á la abscisa IC; supongamos otra ordenada muy infinitamente próxîma á IM, y por el punto m tírese una paralela mR á la asímtota CT, y sea $Ii = mR = f$, $TI = s$, $IM = y$, $IC = x$: por ser mR paralela á TI será $Rm = Ii = f$, $Ci = x + f$, $im = IM - MR = y - \frac{fy}{s}$. Tomando la equacion de la curva por razon de sus asímtotas desde el punto m, tendrémos $xy + fy - \frac{fxy - f^2y}{s} = ab$, restando de esta equacion $xy = ab$, que es la equacion de la curva respecto de las asímtotas, dividiendo por f, y haciendo por último $f = 0$, nos quedará $sy - xy = 0$, $sy = xy$, y $s = x$, esto es, que la subtangente TI es igual á la abscisa CI, como hemos dicho ántes; de donde se deduce tambien $TM = Mt$, á causa de que TC es cortada en dos partes iguales por IM paralela á CT.

216 De todo esto se deduce que si por el punto de 50
contacto M tiramos una recta CM, y se prolonga indefinidamente de una y otra parte hasta que corte las hipérbolas opuestas; dicha recta cortará en dos partes iguales todas las líneas como Gg paralelas á la tangente Tt, y terminadas por dos ramos de la hipérbola; porque prolongando las paralelas Kk, Tt, la Kk está cortada en dos partes iguales en Q por la CM prolongada, del mismo modo que lo está la Tt, pero $KG = kg$; luego $GQ = Qg$, y

Fig. y así CM (105) es un diámetro cuyas ordenadas son $GQ = Qg$.

217 *El rectángulo de* mQ *por* MQ *es al quadrado de* QG , *como el quadrado de* CM *es al quadrado de* TM, *esto es* , $mQ \times QM = \overline{CQ}^2 - \overline{CM}^2 : \overline{QG}^2 :: \overline{CM}^2 : \overline{MT}^2$.

Habiendo prolongado GQ hasta K , tendrémos por la
50 semejanza de los triángulos CMT , CQK , $QK = \frac{MT \times CQ}{CM}$, con lo que será $GK = \frac{MT \times CQ}{CM} - QG$ y $Gk = \frac{MT \times CQ}{CM} + GQ$, pero $GK \times Gk = \overline{MT}^2$; luego substituyendo por GK y Gk sus valores , tendrémos $GK \times Gk = \frac{\overline{MT}^2 \times \overline{CQ}^2}{\overline{CM}^2} - \overline{QG}^2 = \overline{TM}^2$, y quitando las fracciones $\overline{MT}^2 \times \overline{GQ}^2 - \overline{CM}^2 \times \overline{GQ}^2 = \overline{CM}^2 \times \overline{TM}^2$, ó $\overline{MT}^2 \times \overline{CQ}^2 - \overline{CM}^2 \times \overline{TM}^2 = \overline{CM}^2 \times \overline{QG}^2$, y descomponiendo el primer miembro $\overline{TM}^2 \times (\overline{CQ}^2 - \overline{CM}^2) = \overline{CM}^2 \times \overline{QG}^2$; y por último $\overline{CQ}^2 - \overline{CM}^2 : \overline{GQ}^2 :: \overline{CM}^2 : \overline{TM}^2$, por consiguiente TM es el diámetro conjugado de Mm ; y así , si por el centro C se tira una paralela Nn á la tangente Tt , y por el punto de contacto dos paralelas MN , Mn á las asímtotas que vayan á cortar la Nn en los puntos N,n , la línea Nn será el diámetro conjugado de Mm ; porque á causa de las paralelas Ct y MN, $CN = Mt$, y por tanto $Nn = Tt$, y como $TM = Mt$, $CN = Cn$, y así todo diámetro segundo está dividido por medio en el centro.

218 Como la relacion de las ordenadas respecto del diámetro es la misma que respecto de los exes ; quanto hemos dicho de los exes en todo lo que no depende de los focus se dirá igualmente de los diámetros , y por tanto , si hacemos $CM = a$, $CN = MT = b$; $CQ = x$, y $QG = y$, tendrémos (176, 177) $x^2 - a^2 : y^2 :: a^2 : b^2$, y por último $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, y esta es la expresion analítica de la hipérbola respecto de los diámetros considerando el orígen en el centro ; si la quisiéramos considerando el orígen en el punto M, con llamar MQ,x tendríamos $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$; y así en ésta como en la anterior podrémos introducir el parámetro , que siempre será una tercera proporcional á los dos diámetros (180).

Fig.

219 Quando el ángulo que forman las asímtotas es recto, ó los diámetros conjugados son iguales, las hipérbolas opuestas se llaman equiláteras; y en este caso las equaciones de la hipérbola respecto del exe primero son $y^2 = x^2 - a^2$, é $y^2 = 2ax + x^2$; y la equacion respecto el exe segundo, considerando el orígen en el centro, es $y^2 = x^2 + a^2$. La expresion de la subtangente es la misma que para la hipérbola ordinaria; pero la de la subnormal es diferente; y así quando el origen de las abscisas se toma en el centro es igual á x , pero quando se toma en el vértice es igual á $\frac{1}{2}\ a + x$.

220 La equacion $y^2 = x^2 + a^2$ de la hipérbola equilátera respecto el segundo exe nos manifiesta , que conociendo uno de los diámetros , se puede construir la hipérbola mecánicamente determinando muchos de sus puntos del modo siguiente. 51

Haciendo $CA = CB$ tírese por el punto A una paralela indefinida AQ á CB ; tómense las abscisas $AQ = x$, y tírese la CQ , la que se llevará desde C á P sobre la CA prolongada ; por los puntos P se elevarán las líneas PM paralelas á AQ , que serán cortadas en M por la paralela QM á CA , y la curva que pase por los puntos M, M, &c. será una hipérbola equilátera , pues $CP = CQ = \sqrt{(\overline{AC}^2 + \overline{PM}^2)} = \sqrt{(a^2 + x^2)} = y$. Habiendo hecho $CB = a$ se llevarán las abscisas x de C á P sobre la línea CR prolongada indefinidamente. Se tirará la BP , y en los puntos

Fig. tos P se tirarán paralelas á CB; se llevarán sobre estas paralelas de P á N las líneas correspondientes BP; y la curva que pasare por los puntos N es tambien una hipérbola equilátera, pues $PN = BP = \sqrt{(x^2+a^2)}$.

221 Quando el ángulo de las asímtotas es recto, la potencia de la hipérbola equilátera es un quadrado, y en este caso $ab = a^2$, y la equacion de las asímtotas se transforma en $xy = a^2$ (215).

Advertencias sobre las secciones cónicas.

1.ª

Hemos hallado las equaciones de las secciones cónicas considerando el orígen de las abscisas en el centro ó en el vértice; ahora nos resta manifestar como el orígen se puede tomar en qualquiera punto del plano en que está trazada la seccion; y para que sea mas perceptible darémos principio por la línea del primer género, esto es, por la línea recta ó el lado del triángulo por el exe, concluyendo con la hipérbola.

Para el triángulo.

52 222 La equacion de la línea recta (120), considerando el orígen de las abscisas en el punto A, y haciendo $AP = x$; $PM = y$, $AB = a$ y $BC = b$, es $y = \frac{bx}{a}$. Pues considerémos el orígen en un punto qualquiera G del exe, y sea $AG = c$, y $GP = z$, será $AP = PG \pm GA$, ó $x = z \pm c$. Substituyendo este valor de x en la equacion $y = \frac{bx}{a}$ se transformará en $y = \frac{bz \pm bc}{a}$, que tambien es equacion á la línea recta.

Pa-

Fig.

Para la parábola.

223 Tratando de la parábola hemos visto que su equacion respecto del vértice era $y^2 = px$; pero si tomamos el orígen en un punto f ó F, haciendo $fP = FP = z$, será $AP = x = z \pm \frac{1}{4}p$; este valor substituido en la equacion, la transformará en $y^2 = p(z \pm \frac{1}{4}p) = pz \pm \frac{1}{4}p^2$, que es otra equacion á la parábola; pero si el punto P estuviese mas arriba del focus, en este caso será $x = \frac{1}{4}p \pm z$, y la equacion se transformará en $y^2 = \frac{1}{4}p^2 \pm pz$. 20

224 Supongamos ahora que el orígen se halle en un punto qualquiera C que no sea del exe, ya esté dentro, ó ya esté fuera de la area que encierra la curva. Con tirar por este punto un diámetro MG, y prolongándolo si fuese necesario, llamando $CM = a$, $CQ = z$, y substituyendo en la equacion de la curva respecto el diámetro, que es $y^2 = qx$; en lugar de $MQ = x$, $a - z$, quando el punto C está mas abaxo de Q, y $z - a$, quando está mas arriba, tendrémos $y^2 = q(a - z) = aq - az$, é $y^2 = q(z - a) = zq - aq$, que son otras tantas equaciones distintas de la parábola. 25

Para la elipse.

225 La equacion de la elipse, considerando el orígen en el vértice a, hemos visto que es $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ (147); pues supongamos ahora que el orígen se tome en un punto qualquiera G del exe mayor, que sea $GP = z$, y $aG = c$, será $aP = x = z + c$, ó á $c - z$, segun que el punto G esté á la derecha ó la izquierda del punto P, cuyos valores substituidos en la equacion la transforma en $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a(z+c) - (z+c)^2) = \frac{b^2}{a^2}(2az + 2ac - z^2 + cz - c^2)$, é $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a(c - z) - (c - z)^2) = \frac{b^2}{a^2}(2ac - 2az - c^2 + 2cz - z^2)$. 32

H 2 Pe-

Pero si el orígen le consideramos en un punto qualquiera S', que no sea del exe mayor ni del exe menor, ya esté dentro ó fuera de la curva, con tirar un diámetro qualquiera Mm, y substituir en la equacion de la curva respecto del diámetro, que es idéntica á la del exe (174), en lugar de la abscisa MQ su igual á $QS'-MS'$ ó $SM-$
37 QS', nos resultarán otras equaciones distintas de la elipse.

Para el círculo.

226 Todas las equaciones que hemos encontrado para la elipse sirven tambien para el círculo con hacer $b=a$ (149).

Para la hipérbola.

227 La equacion de la hipérbola considerado el orígen en el vértice A es $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$ (179). Pues supongamos ahora que el orígen se halle en un punto qualquiera H, es claro que si hacemos $PH=z$, y $AH=c$, se-
43 rá $AP=x=z-c$, quando el punto H cae á la derecha del punto A; y $AP=x=z+c$, quando el punto H cae á la izquierda del punto A; por manera que haciendo las substituciones correspondientes en la equacion, se transformará en $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2a(z\pm c)+(z\pm c)^2)$, que es otra equacion á la hipérbola.

Si el punto dado no estuviese en ninguno de los exes de la hipérbola, con tirar un diámetro que pasase por aquel punto, tomar la equacion respecto del diámetro, y substituir por la abscisa x otra abscisa $z\pm c$, nos resultaria la equacion de la hipérbola respecto aquel punto.

228 De toda esta doctrina se infiere: 1.° que la naturaleza de una curva regular puede ser cifrada por muchas equaciones diferentes, que todas son de un mismo grado.

229 2.° Que dada la equacion de una curva regular, respecto un orígen conocido, es fácil hallar la equacion de la misma curva respecto otro orígen dado, siempre que se conozca la posicion que tiene éste respecto de aquel.

2.ª

230 Siendo las equaciones que expresan la naturaleza de la parábola, elipse, círculo é hipérbola equaciones del segundo grado, la variable y ha de tener indispensablemente dos valores, uno positivo y otro negativo, ó lo que es lo mismo, á cada abscisa han de corresponder dos ordenadas iguales, una positiva y otra negativa, lo que no sucede respecto de la línea recta, que en ésta á cada abscisa corresponde una sola ordenada, y en general á cada abscisa corresponden tantas ordenadas diferentes como unidades tenga el exponente de la mas alta potencia de éste. Tambien podria suceder que en una curva algebráyca la ordenada estuviese elevada al primer grado, y en este caso á cada abscisa corresponderia una sola ordenada, ya fuese positiva, ó negativa; pero en estos casos, si la línea es de segundo órden, ha de estar la abscisa elevada al quadrado; y tomando el valor de ésta, han de salir dos valores distintos, uno positivo y otro negativo.

231 Para que nos enteremos mejor de quales sean ordenadas ó abscisas, positivas y negativas:

Supongamos que siendo A el orígen de una curva, y BC y DE sus exes, queremos determinar la posicion de 53
un punto M, sabiendo que la abscisa que le corresponde es $=a$ y la ordenada $=b$; es evidente que si sobre el exe BC tomamos $Ao=a$, y en el punto o levantamos la perpendicular $oM=b$, tendrémos la posicion del punto M de la curva; pero si exâminamos con atencion la figura, echarémos de ver que hay quatro puntos M, M', &c. de tal suerte colocados, que sus distancias á los exes son a y b. Luego la qüestion es indeterminada; pero si consi-

deramos que las líneas que están colocadas sobre el exe *BC*, son diametralmente opuestas á las que están debaxo de él, y que las que están á la derecha de *DE* tambien lo son respecto las que están á la izquierda, quando unas y otras son perpendiculares á los exes; inferirémos que si oM y rM se consideran positivas, oM'' y rM''' serán negativas; y que por la misma razon, siendo *Ao* positiva, ha de ser *Ar* negativa.

232 Luego si se nos dice que al punto de la curva que nos conviene determinar corresponden las coordenadas positivas, será el punto M el que se pide; pero si las coordenadas son negativas, será M'''; si la ordenada es positiva y la abscisa es negativa, será M'; y si la ordenada es negativa y la abscisa positiva, será M'', donde se manifiesta, que dada la naturaleza de las coordenadas, su magnitud y el ángulo que forman, no tiene dificultad determinar un punto de una curva.

El ángulo *DAC* es el ángulo de las coordenadas *positivas*; *BAE* el de las coordenadas *negativas*; *BAD* el de la ordenada *positiva* y la abscisa *negativa*; y *EAC* el de la abscisa *positiva* y la ordenada *negativa*.

Del cálculo infinitesimal.

Dos grandes Filósofos, que con justicia se los puede mirar como los príncipes de los Geómetras, tales han sido *Newton* y *Leibnitz*, fuéron los autores del cálculo infinitesimal: ellos hiciéron un descubrimiento que ha sido y será largo tiempo el estudio de los mayores Geómetras: publicáron sus maravillosos descubrimientos, el primero en la célebre obra intitulada *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, y el segundo en los diarios de *Leipsik*.

Newton ha dado á este método el nombre de *cálculo de las fluxîones*, porque considera las cantidades infinitamente pequeñas como los aumentos momentáneos de una cantidad variable: á dicha cantidad le ha dado el nombre

bre de *fluxîon*, y á las cantidades crecientes el de *fluentes*. La característica ó signo con que señala las fluxîones es un punto puesto encima de la variable; de suerte que el incremento ó fluxîon infinitamente pequeña de una fluente ó variable x se señala así $\dot{x}$, la de z por $\dot{z}$, y así sucesivamente; y para expresar los aumentos infinitamente pequeños de estas fluxîones, considerándolas como fluentes capaces de recibir aumento ó diminucion, esto es, para expresar las fluxîones de fluxîones, pone dos puntos sobre la variable de este modo $\ddot{x}$, y las fluxîones de esta última cantidad las señala con tres puntos, como $\dddot{x}$, &c.

Leibnitz, considerando las cantidades infinitamente pequeñas como los elementos de cantidades variables, ha dado á su método el nombre de *cálculo diferencial*, y los elementos los señala con la característica y signo d: es á saber, que la diferencia entre una cantidad creciente x, y otra cantidad de la misma naturaleza que la primera, pero mayor que ella, de una cantidad infinitamente pequeña, la señala por dx y la de z por dz, &c.; y considerando (conducido siempre por el principio de la indivisibilidad de la materia) otras diferencias en estas primeras diferencias, las representa por dd de este modo ddx, y las llama *diferencias segundas*, y las diferencias de estas últimas diferencias, ó las *diferencias terceras*, las expresa así $dddx$, ó d^3x, &c.

233 Pero yo en este tratado seguiré á Newton en quanto á considerar las cantidades como producidas por la fluxîon de uno de sus elementos; esto es, consideraré que el punto, fluyendo sucesivamente, produce la línea: que la fluxîon continua de la línea, moviéndose paralela á sí misma, produce la superficie, y la fluxîon de las superficie el sólido, por parecerme sea este método mas conforme á los principios establecidos en la Geometría Elemental (tom. I. 363), y á lo dicho acerca de los límites (8); é imitaré á Leibnitz en el modo de expresar las flu-

xîo-

Fig. xîones, nombrándolas del mismo modo que este autor; esto es, á la fluxîon primera de una variable x la expresaré por dx, y la nombraré *diferencial* primera. La fluxîon segunda de la misma variable la expresaré de este modo ddx, llamándola *diferencial segunda*; y lo mismo haré con otras fluxîones superiores.

234 Estos son los principios del cálculo infinitesimal, el qual se divide en cálculo *diferencial*, y cálculo *integral*. El cálculo diferencial es el que nos enseña á exâminar las cantidades por sus elementos, ó ya sea por sus límites infinitamente pequeños, ó últimos decrementos á que pueden llegar. Y el cálculo integral es el que nos suministra reglas para conocer las cantidades por medio de sus diferenciales ó últimos decrementos.

CAPITULO X.

Del cálculo diferencial.

235 Hemos dicho que el objeto del cálculo diferencial es el que nos enseña á exâminar las cantidades por la relacion que tienen entre sí sus límites, ó últimos decrementos ó incrementos: para manifestar como se haga
54 esto, supongamos que por un punto M de una curva qualquiera se la quiera tirar una tangente MN; como un solo punto M no determina la posicion de una línea recta, nos es indispensable conocer otro punto qualquiera N: para determinar este punto tírese por el punto M y otro punto qualquiera R de la curva la secante MR, y desde los mismos puntos báxense al exe AQ las ordenadas MP, RQ, y tírese la MH paralela al exe; es evidente que MH será la diferencia de las abscisas AP, AQ, y HR la diferencia de las ordenadas; y si hacemos $MH = Dx$ y $HR = Dy$, la razon entre la diferencia de las abscisas y la de las ordenadas será $\frac{Dx}{Dy}$.

Su-

236 Supongamos ahora que el punto R se vaya acercando al punto M, la secante irá girando alrededor de este punto, y acercándose mas y mas á la tangente, y la razon $\frac{Dx}{Dy}$ irá variando y acercándose á un cierto término ó límite, que será $\frac{MH}{NH}$. Luego esta última expresion es el límite de $\frac{Dx}{Dy}$; y aunque es cierto que quando los tres puntos M, H, R se confunden, las cantidades MH, HR desaparecen ó son cero, y entre cantidades que no exîsten no hay razon alguna, no por eso dexa de ser $\frac{MH}{HN}$ el límite de la razon; y como estas cantidades nos dan á conocer el punto N que buscamos para tirar la tangente MN, con buscar el límite de la razon $\frac{Dx}{Dy}$, tendrémos cumplido con la qüestion; pero como nunca está dicha razon mas cerca de su límite que quando se consideran en el estado mas próxîmo á desvanecerse, ó á ser $\frac{0}{0}$, se acostumbra señalar el límite de las razones de esta naturaleza por $\frac{0}{0}$, ó mas bien por $\frac{dx}{dy}$ por la razon insinuada (110, 111); y á las expresiones dx, dy se les da el nombre de diferenciales.

237 Pero siendo imposible la comparacion de cantidades desconocidas, tambien lo es la de las diferenciales, cuya expresion ignoramos. Luego ántes de tratar de la comparacion de estas cantidades infinitamente pequeñas, debemos manifestar el modo de encontrarlas, ó mas bien del signo con que deben señalarse, atendiendo á los diversos modos con que las variables pueden estar combinadas consigo mismo, ó con cantidades constantes; porque es evidente que en una expresion que se ha de diferenciar puede estar la variable acompañada con cantidades constantes: 1.° por adicion ó substraccion: 2.° por multiplicacion ó division: 3.° puede estar elevada á á alguna potencia: 4.° puede ser un producto de dos ó mas variables: 5.° puede ser un quebrado: 6.° puede ser

lo-

logaritmo de una cantidad: 7.º puede estar por exponente de otra cantidad constante ó variable: 8.º puede ser un arco de círculo, ó qualquiera línea trigonométrica; que son otros tantos casos diferentes de diferenciacion, que tratarémos cada uno de por sí.

238 Caso I. *Quando la variable está acompañada con constantes por adicion ó substraccion.*

Sea $y = x \pm a$ la cantidad que queremos diferenciar; si suponemos que quando la variable x ha recibido un incremento infinitamente pequeño dx, su funcion y haya pasado á ser y', será $y' = x + dx \pm a$, y restando la primera equacion de la segunda $y' - y = dy = x + dx \pm a - x \mp a = dx$, que nos manifiesta *que la diferencial de una variable acompañada con constantes por adicion ó substraccion, es igual á la diferencial de la variable.* Luego $d(z+n) = dz$; $d(a-y) = -dy$; $d(x-y+z) = dx - dy + dz$; $d(-x+b-z) = -dx - dz$, diferenciando á cada una de las variables como si fuera sola, y dando á la diferencial el mismo signo de la variable.

239 Caso II. *Quando la variable está multiplicada ó partida por cantidades constantes.*

Sea $\frac{ax}{b}$ la cantidad por diferenciar; si suponemos que la cantidad x en un instante qualquiera haya recibido el incremento infinitamente pequeño dx, se transformará la expresion $\frac{ax}{b}$ en $\frac{a}{b}(x+dx) = \frac{ax}{b} + \frac{adx}{b}$; y restando aquella expresion de ésta, tendrémos $\frac{ax}{b} + \frac{adx}{b} - \frac{ax}{b} = \frac{adx}{b}$; *de donde se deduce que las cantidades que multiplican y dividen á la variable, se hallan en la diferencial del mismo modo que se hallan en la variable.* Luego $d(3x) = 3dx$; $d\left(\frac{z}{4}\right) = \frac{dz}{4}$; $d\left(\frac{x}{a+b}\right) = \frac{dx}{a+b}$; $d\left(ax + \frac{y}{b} - \frac{3z}{4}\right) = adx + \frac{dy}{b} - \frac{3dz}{4}$; .... $d\left(\frac{x+z-y}{a+b+c}\right) = \frac{dx+dz-dy}{a+b+c}$.

Ca-

240 Caso III. *Quando la variable es una potencia.*

Sea $y = ax^n$ la expresion por diferencia; si quando x pasa á ser $x+dx$, su funcion y llega á ser y'; tendrémos $y' = a(x+dx)^n = a(x^n + nx^{n-1}dx + n\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2}dx^2 +$, &c. (23); y restando de esta equacion la primera, será $y' - y = ax^n - ax^n + nax^{n-1}dx + an \times \ldots\ldots \frac{(n-1)x^{n-2}dx^2}{2} +$ &c. $= nax^{n-1}dx + an \times \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(n-1)x^{n-2}dx^2 + \&c.}{2}$; pero la cantidad $\frac{a'n(n-1)x^{n-2}dx^2}{2}$ es una diferencial del segundo órden, y por consiguiente muy pequeña respecto de $anx^{n-1}dx$; luego se debe despreciar (113); con lo qual tendrémos $dy = d(ax^n) = anx^{n-1}dx$. Cuya expresion nos manifiesta, *que para diferenciar una potencia qualquiera de una variable, se le quite una unidad á su exponente, y lo que queda se multiplique por el exponente y por la diferencial de la variable.* Así $d(x^3) = 3x^2dx$; $d(4x^m) = 4mx^{m-1}dx$; $d(a+x)^n = n(a+x)^{n-1}dx$; $d(a+x)^2 = d(a^2+2ax+x^2) = 2adx + 2xdx$; $d\sqrt{(ax-x^2)} = d(ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(ax-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (adx - 2xdx)$; y $d\sqrt[n]{(a^2-x^2)} = d(a^2-x^2)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(a^2-x^2) \times -2xdx$. Estos últimos exemplos nos manifiestan *que quando la cantidad que se ha de diferenciar es un radical, se la da primeramente la forma de potencia de exponente fraccionario, y luego se diferencia como potencia.*

Ca-

241 Caso IV. *Quando la cantidad es un producto compuesto de variables.*

Sea xy el producto de dos variables que nos proponemos diferenciar; si en lugar de x substituimos $x+dx$, y en lugar de y, $y+dy$, se transformará la expresion xy en $(x+dx)(y+dy)=xy+ydx+xdy+dydx$, que restando de esta expresion xy, queda la diferencial $ydx+xdy+dydx$; pero como el último término de esta diferencial es una cantidad infinitamente pequeña de segundo órden, se despreciará, y tendrémos $d(xy)=xdy+ydx$, que nos manifiesta *que la diferencial del producto de dos variables es igual al producto de la diferencial de cada una de las variables por la diferencial de la otra.*

Si la cantidad por diferenciar fuese un producto de tres variables como x,y,z, aumentando á cada una de las variables su diferencial, se transformará en $(x+dx)\times(y+dy)\times(z+dz)=(xyz+zydx+xzdy+xydz+zdxdy+ydxdz+xdydz+dxdydz$, que restando la cantidad xyz, y suprimiendo los quatro últimos términos por ser infinitamente pequeños de segundo y tercer órden (113 y 114), tendrémos $d(xyz)=zydx+xzdy+xydz$, que confirma lo dicho en el caso anterior; esto es, *que para diferenciar un producto de muchas variables se diferencia cada uno de por sí, se multiplica su diferencial por las otras variables, y la suma de todos estos productos es la diferencial que se busca.* Así $d(x+zy)=dx+zdy+ydz$; $d(x^2+a^2)\times(2ax+b^2)=(2ax+b^2)\times d(x^2+a^2)+(x^2+a^2)\times d(2ax+b^2)=2xdx(2ax+b^2)+2adx(x^2+a^2)$.

242 Caso V. *Quando la diferencial es un quebrado cuyos términos son variables.*

Propongámonos diferenciar el quebrado $\frac{x}{y}$; como esta cantidad es igual á $xy^{-1}=x\times y^{-1}$ (tom. I. 138); es claro que la diferencial de esta expresion se reduce á diferenciar un producto de dos variables x é y^{-1}, pero que la una está elevada á una potencia de exponente negativo; con lo que practicando las reglas del caso anterior (241) tendrémos $d\frac{x}{y}=d(xy^{-1})=y^{-1}dx-xy^{-2}dy=\frac{dx}{y}-\frac{xdy}{y^2}=\frac{ydx-xdy}{y^2}$ (reduciéndolos á un comun denominador (tom. I. 150), de cuyo resultado se deduce, *que la diferencial de un quebrado cuyos dos términos son variables, es igual al denominador multiplicado por la diferencial del numerador, ménos el numerador multiplicado por la diferencial del denominador, partido todo por el quadrado del denominador*; luego $d\left(\frac{x}{az}\right)=\frac{azdx-axdz}{a^2z^2}=\frac{zdx-xdz}{az^2}$; $d\left(\frac{n}{x}\right)=\frac{x\times 0-ndx}{x^2}=\frac{-ndx}{x^2}$; $d\left(\frac{(a+x)^2}{b+x}\right)=\frac{(b+x)\times d(a+x)^2-(a+x)^2\times d(b+x)}{(b+x)^2}=\frac{(b+x)(2adx+2xdx)-(a+x)^2dx}{(b+x)^2}$.

243 Caso VI. *Quando la cantidad por diferenciar es un logaritmo.*

Si en una línea indefinida XN tomamos (contando desde un punto A) á la derecha las partes AC, CE, EG, GI, &c., y á la izquierda las partes AR, RX, &c. todas iguales entre sí, y en los puntos de division levantamos las perpendiculares XZ, RS, AB, CD, EF, &c. que formen una progresion geométrica, y representen los números naturales, siendo AB la unidad, las cantidades AC, AE, AG, &c. que son las distancias á que cada número está de la unidad, formarán una progresion aritmética, y por consiguiente serán los logaritmos de dichos números, esto es o será el logaritmo de AB, que es la unidad: AC lo será de CD: AG de GH, y así sucesivamente; y si por los extremos de las ordenadas que expresan estos números tiramos una curva Z,S,D, ésta se llama la curva *logarítmica.*

244 Supongamos ahora que la abscisa P haya crecido

do la cantidad infinitamente pequeña Pp; que en el punto p se levante la ordenada pm, y se tire Mr paralela al exe XN; si llamamos PT, A; AP, x; y PM, y, será $Pp = Mr = dx$, y $mr = dy$. Supongamos ademas de esto que por el punto M de la curva se tire la tangente M que corte el exe en el punto T, y que la subtangente TP sea igual A; como el arco Mm es infinitamente pequeño, le podrémos mirar como una línea recta confundido con la tangente en el punto M, de lo que resultará que el triángulo infinitésimo Mrm se podrá mirar como un triángulo rectilíneo, tanto mas semejante al triángulo TMP, quanto mas pequeño sea, ó esté mas próximo á desvanecerse; luego $\frac{MP}{PT}$ es el límite de la razon de $\frac{mr}{Mr}$ (236), con lo que tendrémos la siguiente proporcion $MP : PT :: mr : Mr$; ó substituyendo por estas líneas sus expresiones $y : A :: dy : dx = \frac{Ady}{y}$, que nos manifiesta *que la diferencial del logaritmo de un número* y *es igual á la diferencial del número que le corresponde, multiplicada por la subtangente, partido este producto por el mismo número.* Pero desde luego se manifiesta que esta expresion no puede ser general para todos los números interin no se verifique que la subtangente de todos ellos, tomada en diversos puntos de una logarítmica, sea siempre una misma. En efecto, todas las subtangentes correspondientes á las diversas ordenadas de una misma logarítmica son iguales.

245 Para demostrarlo, supongamos una progresion geométrica expresada por $\div a : aq : aq^2 : aq^3$, &c. si de cada conseqüente restamos su antecedente, dos de estas restas consecutivas tendrán entre sí la misma razon que una antecedente de la progresion tendrá con su conseqüente: esto es, $a : aq :: aq - a : aq^2 - aq$; porque si multiplicamos extremos y medios, tendremos productos iguales: de la misma proporcion, si alternamos, tendrémos $a : aq - a :: aq : aq^2 - aq$.

Es-

246 Esto supuesto, en el exe de la logarítmica levántense las ordenadas GH, EF, AB, CD que estén en proporcion geométrica; tírense las rectas HS, BR paralelas al exe, y por los puntos H y B las tangentes HV, BE; y tírense las secantes PHF, EBD, que corten al exe en los puntos V, P, T, E: hemos de probar que GP y AE son iguales. Fig. 56

Por ser $GH : EF :: AB : CD$ será $GH : FS :: AB : DR$ (245). Por la semejanza de los triángulos PGH, HSF, y tambien de los triángulos EAB, BRD, sacamos de los primeros $PG : HS :: GH : FS$, y de los segundos $AE : BR :: AB : DR$. Pero por lo dicho (246) es $GH : FS :: AB : DR$; luego por una igualdad de razones es $PG : HS :: AE : BR$; pero $HS = BR$ por suponer las ordenadas proporcionales; luego $PG = AE$.

Si suponemos ahora que las rectas $CD : EF$ se vayan acercando respectivamente á las rectas AB, GH, hasta que el punto D se confunda con B y el punto F con H, las rectas DBE, FHP, que ántes eran secantes de la curva, se confundirán con las tangentes $BEHV$; y las rectas AE, GP pasarán á ser subtangentes, pero estas líneas han de conservar su igualdad; luego las subtangentes de una misma logarítmica son iguales. Luego si la subtangente de una logarítmica la hacemos igual á la unidad, la expresion $dx = \frac{Ady}{y}$ se transforma en $dx = \frac{dy}{y}$, que nos manifiesta *que la diferencial de un logaritmo qualquiera es igual á la diferencial del número á quien corresponde partido por el mismo número*; en virtud de lo qual tendrémos $dLx = \frac{dx}{x}$; $dL(a+x) = \frac{dx}{a+x}$; $dL(a-x) = \frac{-dx}{a-x}$ $dL\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = d\big(L(a+x) - L(a-x)\big) = \frac{dx}{a+x} - \frac{-dx}{a-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{adx - xdx + adx + xdx}{a^2 - x^2}$ (con reducirlos á un comun de-

no-

nominador) $= \frac{2adx}{a^2 - x^2}$; $dL\sqrt{(a^2+x^2)} = dL(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{d(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2xdx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{xdx}{a^2+x^2}$; $d(xLx) =$

$d(x \times Lx) = x \times dLx + Lx \times dx = \frac{xdx}{x} + Lx \times dx = dx +$ $Lx \times dx = dx\,(1+Lx)$.

247 Caso VII. *Quando la cantidad por diferenciar es exponente de una cantidad qualquiera, sea constante ó variable.*

Las cantidades que tienen el exponente variable, ya sean ellas constantes, ya sean variables, como x^y, a^x, &c. se llaman cantidades exponenciales; estas cantidades se diferencian con gran facilidad teniendo presente lo explicado (caso 6.º). Para manifestar como esto se executa propongámonos diferenciar la cantidad a^x: si suponemos que dicha cantidad sea funcion de una variable z, será $a^x = z$; $La^x = Lz$, ó $xLa = Lz$; y diferenciando $dx \times La = \frac{dz}{z}$, y $zdx \times La = dz$, que substituyendo por z su valor a^x, se transforma en $d(a^x) = a^x\,dx.La$.

Si la cantidad por diferenciar fuese y^x, con suponerla igual á z, será $z = y^x$, $Lz = xLy$; y diferenciando $\frac{dz}{z} = dx.\,Ly + \frac{xdy}{y}$, que eliminando el denominador z, y substituyendo en su lugar y^x, sale por último $d(y^x) = y^x\,(dx.Ly + \frac{xdy}{y})$, cuyo resultado nos manifiesta *que la diferencial de una cantidad exponencial es igual á la misma exponencial multiplicada por la diferencial de su logaritmo.*

248 Caso VIII. *Quando las cantidades por diferenciar son arcos de círculo, ó alguna línea trigonométrica.*

Sea ABC un quadrante de círculo cuyo radio es AC; si tomamos un arco AM, y suponemos que este arco haya recibido el incremento infinitamente pequeño Mm, el

seno MP la tangente AD y la secante CD crecerán respectivamente las cantidades infinitamente pequeñas Nm, Fig.
DT, y TR, y el coseno $MQ = PC$ recibirá el decremento 57
$MN = Pp$: esto supuesto, si hacemos $AC = CM = r$, $AM = u$, $CP = x$, $MP = y$, $AD = t$, y $CD = z$; será $Mm = du$, $Pp = MN = dx$, $mN = dy$, $DT = dt$, y $TR = dz$.

Por ser el arco Mm infinitamente pequeño lo podrémos mirar como una línea recta confundida con la tangente tirada én el punto M, y por tanto el triángulo infinitesimal MmN se podrá mirar como un triángulo rectángulo, que será tanto mas semejante al triángulo MPC quanto mas próxîmo esté á desvanecerse, y por tanto $\frac{MC}{CP}$ será el límite de la razon de $\frac{Mm}{Nm}$, y $\frac{MC}{MP}$ el de la razon de $\frac{Mm}{MN}$; de suerte que quando sea el triángulo $MmN = 0$, será $\frac{MC}{CP} = \frac{Mm}{Nm}$ y $\frac{MC}{MP} = \frac{Mm}{MN}$; ó lo que es lo mismo, $CM : CP :: Mm : Nm$ y $MC : MP :: Mm : MN$, ó substituyendo en lugar de estas líneas sus expresiones $r : x :: du : dy$, y $r : y :: du : -dx$; la primera de las dos proporciones nos da $du = \frac{rdy}{x} = \ldots\ldots\ldots \frac{r.d\,(\text{sen.}\,u)}{\text{cos.}\,u}$, y la segunda $du = \frac{-rdx}{y} = \frac{-rd\,(\text{cos.}\,u)}{\text{sen}\,u}$, *que nos manifiestan que la diferencial de un arco qualquiera* u *es igual al radio multiplicado por la diferencial del seno partido por su coseno, é igual al radio multiplicado por la diferencial del coseno tomada negativamente partido por el seno.*

249 De la primera de las últimas equaciones sale $d.\,\text{sen.}\,u = \frac{du.\,(\text{cos.}\,u)}{r}$, y de la segunda $d.\,\text{cos.}\,u = \frac{-d.\,u\,(\text{sen.}\,u)}{r}$, que nos manifiestan que la diferencial del seno de un arco es igual á la diferencial del arco multiplicado por el coseno partido por el radio; y la diferencial del coseno igual á la diferencial del arco toma-

 do

do negativamente multiplicado por el seno partido por el radio.

El seno verso $AP = AC - CP$, ó *sen. verso* $u = r - \cos. u$, y diferenciando $d.$ *seno* verso $u = -d$ cosen. u; pero $d.$ cosen. $u = \frac{-du.\ \text{sen.}\ u}{r}$ (248); luego haciendo la substitucion, tendrémos $d.$ sen. v. $u = \frac{du.\ \text{sen.}\ u}{r}$; esto es, la diferencial del seno verso de un arco es igual á la diferencial del arco multiplicado por el seno partido todo por el radio. De esta equacion sale tambien $du = \frac{r.\ d.\ \text{sen. v.}\ u}{\text{sen.}\ u}$.

250 Con un radio CD, haciendo centro en C, trácese un arco DR; este arco por ser la medida de un ángulo infinitamente pequeño DCR, se puede mirar como una línea recta infinitamente pequeña perpendicular á la secante CT, cuya consideracion se puede aplicar igualmente al arco Mm; de suerte que tendrémos dos triángulos MCm y DCR semejantes, y cuyos lados nos darán la siguiente proporcion $CD : CM :: DR : Mm$.

Los triángulos ACT, TDR, por tener un ángulo comun en T y ser rectángulos, son semejantes, y como tambien son semejantes los triángulos ACD, ACT; pues sobre ser rectángulos en A, tienen los ángulos ACD, ACT iguales, pues solo difieren de una cantidad infinitamente pequeña, qual es el ángulo DCT, los triángulos ACD, DRT son semejantes, y comparando sus lados homólogos, tendrémos la proporcion $CD : CA :: DT : DR$, multiplicando ordenadamente los términos de esta proporcion con los de $CD : CM :: DR : Mm$, que sacamos ántes, tendrémos $CD^2 : CM \times CA :: DT \times DR : DR \times Mm$, que haciendo la reduccion, y substituyendo por $\overline{CD}^2$ su igual $\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2$, se transformará en $\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 : CM \times AC :: DT : Mm$, ó substituyendo por estas líneas sus expresiones (248) $r^2 + t^2 : r^2 :: dt : du$

Fig.

$: du = \frac{r^2 \times dt}{r^2 + t^2}$, que es la expresion de la diferencial del arco con relacion á la tangente.

251 De los mismos triángulos ACD y DTR sale la proporcion $DA : AC :: TR : RD$, que multiplicándola ordenadamente por la proporcion $CD : CM :: DR : Mm$, tendrémos $DA \times CD : AC \times CM :: TR : Mm$ (despues de suprimir los términos comunes en la última razon): pero $DA = \sqrt{(\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2)}$; luego haciendo la substitucion correspondiente, tendrémos $CD \times \sqrt{(\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2)} : AC \times CM :: TR : Mm$, ó substituyendo por estas líneas sus expresiones (párrafo citado) $z \times \sqrt{(z^2 - r^2)} : r^2 :: dz : du = \frac{r^2 dz}{z\sqrt{(z^2 - r^2)}}$, y es la expresion de la diferencial del arco con relacion á la secante, de cuya equacion se puede sacar el valor de la diferencial de z.

Habiendo manifestado las reglas generales que deben practicarse para diferenciar las cantidades variables, nos resta manifestar cómo se hace la aplicacion de las diferenciales en la resolucion de varias qüestiones; pero ántes de entrar en esta materia me veo precisado á tratar de una curva llamada *cicloide*, la qual, aunque no es una curva algebráyca, el mucho uso que tiene en la mecánica acerca de los péndulos (como á su tiempo se verá) me precisa colocarla en este lugar.

De la cicloide.

252 Si imaginamos un círculo R, Y, S, T, que saliendo desde un punto A se mueva rodando sobre una recta AB, de tal modo que un punto qualquiera Y de su circunferencia describa una línea curva ACB, esta línea curva se llama *cicloide*: el círculo que la ha descrito, *círculo generador*; y el punto mas distante C de la 58

base, vértice de la cicloide: la perpendicular CD á la base se llama *exe* (este exe siempre es igual al diámetro del círculo generador), y una recta qualquiera como YP, perpendicular al exe, se llama *ordenada*.

253 De la formacion del círculo se infiere: 1.° que la circunferencia del círculo generador es igual á la recta AB (cuya recta se llama *base de la cicloide*), y por consiguiente la mitad de la base igual á la mitad de la circunferencia, y el tercio al tercio, &c.

254 2.° Que si habiendo llegado á E el centro del círculo generador y el punto A á Y, tiramos por este punto al exe CD la ordenada YP: y habiendo trazado desde el centro O el círculo DtC que corte la ordenada en t, tiramos por este punto la recta Ct, esta línea será paralela á la tangente YS de la cicloide.

Para demostrarlo tírese por el punto E el diámetro SR perpendicular á la base AB, y las cuerdas RY y YS, que por estar apoyadas sobre el diámetro SR, forman un ángulo recto en Y; pero como al moverse el círculo generador llega éste á descansar sobre R al mismo tiempo que el punto A llega á Y, es indispensable que la direccion del punto Y sea perpendicular á YR, de suerte que la prolongacion del arco infinitamente pequeño de la cicloide en el punto Y ha de ser la cuerda YS; pero los arcos YR, tD, por estar comprehendidos entre paralelas, han de ser iguales; luego tambien serán iguales sus suplementos YS, tC, y las cuerdas de estos arcos paralelas una á otra; pero YS es tangente de la cicloide; luego, &c.

255 3.° Que si de un punto qualquiera P del exe se tira una ordenada $P'Q$ á la cicloide que corte en M al círculo generador CMD; y se tira la cuerda CM, esta cuerda es la mitad del arco de la cicloide CQ, que le corresponde.

Por un punto p infinitamente próxîmo á P tírese la ordenada pq, que cortará en H al círculo generador; tírese la cuerda CH; prolónguese CM hasta que encuentre en N la ordenada pq, y desde el punto C, como centro

tro con el radio CH trácese un arco HO; tírense por Fig.
los puntos C y M las tangentes CF, MF al círculo, y por el punto Q tírese la tangente QZ á la cicloide.

Por la propiedad del círculo, el triángulo CFM es isósceles (tom. I. 517), y semejante al triángulo infinitesimal MHN; luego los lados HM, HN son iguales, y la perpendicular OH baxada del vértice á la base la divide en dos partes iguales MO y ON; de suerte que MO es á un tiempo diferencial de las dos cuerdas CM, CH, pero por ser $MNQq$ un paralelogramo, es el arco infinitamente pequeño Qq diferencial de la cicloide, y como este arco es tambien igual á MN, duplo de MO, tenemos que la diferencial de la cicloide es dupla de la diferencial de la cuerda CM, pero el límite de la razon de $\frac{Qq}{MO}$ es $\frac{CQ}{CM}$; luego $CQ = 2 \times CM$.

256 Habiendo manifestado algunas de las principales propiedades de la cicloide, solo nos resta hallar su equacion; para lo qual sea $CD = 2a$; $P'C = x$, $P'M = y$, $P'Q = z$, con lo que será $z = y + MQ$, pero por la propiedad de la cicloide es $MQ =$ al arco CM; luego si llamamos s este arco, será $z = y + s$, y diferenciando esta equacion $dz = dy + ds$.

En las diferenciales de los arcos de círculo hemos visto (249) que respecto el seno verso es $ds = \frac{adx}{y}$, y respecto el seno recto (248) $ds = \frac{ady}{a-x}$; lue- 58
go $\frac{adx}{y} = \frac{ady}{a-x}$, de cuya equacion sacarémos $dx = \frac{ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, y $dy = \frac{dx(a-x)}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, que haciendo las substituciones correspondientes en los valores ds, será $ds = \frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, y $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$; pero hemos visto que $dz = ds + dy$; luego substituyendo en esta última equacion los valores de ds y dy tomado en cantidades

de x y dx, será $dz = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} + \frac{dx(a-x)}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \ldots\ldots \frac{dx\sqrt{(2a-x)}}{x}$, y esta es la equacion de la cicloide. Podrémos hallar otra diferente si en la equacion que expresa el valor de dz substituimos por ds su valor en cantidades de y, y dy, porque en este caso tendrémos $dz = dy + \frac{ady}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

Quando el círculo generador no tiene otro movimiento que el de rotacion, la cicloide se llama *vulgar*; pero si ademas del movimiento de rotacion tiene un movimiento de translacion de A á B, ó de B á A, la cicloide se llama *prolongada* en el primer caso, y *acortada* en el segundo.

CAPÍTULO XI.

De la aplicacion de las diferenciales primeras.

Aplicacion de las diferenciales primeras para tirar tangentes á las líneas curvas, ó bien sea el método directo de las tangentes.

Como un punto solo no determina la posicion de una línea recta, es evidente que por un punto dado en una curva qualquiera no es posible tirarle una tangente; pero si ademas de este punto se conoce otra qualquiera por el qual ha de pasar la tangente, la qüestion es disoluble. Y como la tangente de una curva está terminada por la subtangente y la ordenada correspondiente al punto de la curva por el qual se ha de tirar; es evidente que con conocer la longitud de la subtangente tendrémos lo suficiente para resolver la qüestion. Luego todo el artificio en que estriba el método directo de las tangentes se reduce á encontrar el valor de las subtangentes, y por el punto en que éstas terminan y el extremo de la ordenada tirar una línea recta, y ésta será la tangente.

Fig.

257 Qüestion I. *Encontrar la subtangente de una curva algebráyca qualquiera.* 59

Tírese la ordenada pm infinitamente próxima á PM, que es la ordenada por cuyo extremo M ha de pasar la tangente de la curva: tírese la MR paralela al exe, y por el punto M la tangente TM. Por ser MR infinitamente pequeña lo será tambien el arco Mm, el qual se confundirá con la tangente, y por tanto serán semejantes el triángulo MRm (que se llama *triángulo caracteristico de la curva*) y el triángulo MPT, y tendrán sus lados proporcionales; luego si hacemos $PT=s$, $AP=x$, y $PM=y$, será $Pp=MR=dx$, y $Rm=dy$; pero $Rm : MR :: MP : PT$, ó substituyendo por estas líneas sus expresiones $dy : dx :: y : s = \frac{ydx}{dy}$, y esta es la expresion de la subtangente, que nos puede servir de fórmula general para todas las curvas algebráycas; pues es evidente que con diferenciar la equacion de la curva, cuya subtangente se pide sacar el valor de dx en cantidades de y, y dy, y substituirlo en la fórmula, tendrémos el valor de la subtangente; manifestémoslo resolviendo las siguientes qüestiones.

258 Qüestion II. *Hallar el valor de la subtangante de la parábola vulgar.* 61

La equacion de la parábola es (121) $y^2 = px$, y la diferencial de esta equacion $2ydy = pdx$, que nos da $dx = \frac{2ydy}{p}$; substituyendo esta cantidad por dx en la fórmula general $\frac{ydx}{dy}$ (257), tendrémos $s = \frac{2y^2dy}{pdy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$, que es la misma expresion que hallamos (132). Conocido por este medio el valor de la subtangente PT; si por el punto T y el extremo M de la

Fig. la ordenada tiramos la recta *TM*, esta línea será tangente á la parábola en el punto *M*.

259 Qüestion III. *Hallar la subtangente de la elipse.*

60 La equacion de la elipse, contando las abscisas desde el centro, es (148) $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2) = \frac{ap}{2} - \frac{px^2}{2a}$, cuya diferencial es $2ydy = -\frac{pxdx}{a}$, la que nos da $dx = -\frac{2aydy}{px}$; este valor substituido en la expresion de la fórmula, la reduce á $s = \frac{-y}{dy} \times \frac{2aydy}{px} = \frac{-2ay^2}{px} = \frac{-2a}{px} \times \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$ (con substituir por y^2 su valor) $= \frac{-a^2 - x^2}{x}$, que nos manifiesta que la subtangente es negativa en este caso; luego si las subtangentes positivas se toman de *CA*, las negativas se deben tomar en sentido contrario, esto es, de *C* á *a*, y así $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$, y tirando por los puntos *T* y *M* la recta *MT*, ésta será tangente á la elipse.

Si consideramos el orígen de las abscisas en el punto *a*, la equacion de la elipse será en este caso (148) $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2) = px - \frac{px^2}{2a}$; que diferenciándola y sacando el valor de la diferencial, será $dx = \frac{2aydy}{p(a^2 - x^2)}$: que haciendo la substitucion correspondiente en la expresion de la subtangente, tendrémos $\frac{2ay^2dy}{p(a-x)dy} = \frac{2a}{p} \times \frac{y^2}{a-x} = \frac{2a}{p} \times \frac{p}{2a} \times \frac{(2ax - x^2)}{a-x} = \frac{2ax - x^2}{a-x}$.

260 Qüestion IV. *Hallar la subtangente del círculo.*

El círculo es una elipse cuyos dos exes son iguales (149), ó lo que es lo mismo, $p = 2a$; luego las expresiones que hemos hallado de las subtangentes de la elipse sirven tambien para el círculo.

Fig.

261 Qüestion V. *Hallar la subtangente de la hipérbola.*

La equacion de la hipérbola, considerando el orígen en el centro, es $y^2 = \frac{px^2}{2a} - \frac{pa}{2}$ (180), y su diferencial $2ydy = \frac{pxdx}{a}$, que nos da $dx = \frac{2aydy}{px}$, cuyo valor substituido en la expresion de la fórmula $\frac{ydx}{dy}$, la transforma en $\frac{y}{dy} \times \frac{2aydy}{px} = \frac{2ay^2}{px} = \frac{2a}{px}\left(\frac{px^2}{2a} - \frac{pa}{2}\right) = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$, que es la misma que encontramos (199).

262 Si el orígen de las abscisas se toma desde el vertice, la equacion será entónces (180) $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$, ó $2ay^2 = 2apx + px^2$, que si la diferenciamos, tendrémos $4aydy = 2apdx + 2pxdx$, la qual nos da $dx = \frac{2aydy}{ap + px}$, cuyo valor multiplicado por $\frac{y}{dy}$, se reduce á $\frac{2ay^2dy}{apdy + pxdy} = \frac{2a}{ap + px} \times \frac{2apx + px^2}{2a}$ (despues de haber substituido por y^2 su valor; que haciendo la reduccion correspondiente, se reduce últimamente á....... $\frac{2ax + x^2}{a + x}$, y éste el valor de la subtangente *PT* de la hipérbola.

263 Qüestion VI. *Hallar el valor de la subtangente correspondiente al punto* M *de una hipérbola entre sus asímtotas.*

La equacion de la hipérbola referida á sus asímtotas es $c^2 = xy$ en el supuesto de ser $AP = x$, $PM = y$, y c^2 la potencia de la hipérbola; cuya diferencial es $xdy + ydx = 0$ (241 y 238), de la que sacarémos $dx = \frac{-xdy}{y}$, cu- 62 cuyo valor substituido en la fórmula, la convierte en $-x$; resultado que nos manifiesta que la subtangente es igual á la abscisa correspondiente al punto M, pero que se ha de tomar á la parte opuesta del orígen A.

Si en el punto M levantamos á la tangente la perpendicular MQ, esta línea será la normal y PQ la subnormal, y los triángulos semejantes MPQ, MmR nos darán $MR : Rm :: MP : PQ$; ó substituyendo por estas líneas sus expresiones $dx : dy :: y : pq = \frac{ydy}{dx} = \frac{y}{dx} \times dy$; y esta es la fórmula para determinar las subnormales de las líneas curvas algebráycas. Para hacer aplicacion de esta fórmula se diferencia la equacion de la curva cuya subnormal se quiere determinar; se toma el valor de dy en cantidades de x, dx é y, el qual se substituye en la fórmula, y haciendo operaciones análogas á las que hemos hecho para determinar las subtangentes, se hallará el valor de la subnormal: para aclararlo mejor propongamos determinar la subnormal de la parábola, cuya equacion es $y^2 = px$, la diferencial de esta expresion es $2ydy = pdx$, de donde sale $dy = \frac{pdx}{2y}$, este valor substituido en la fórmula, la transforma en $\frac{y}{dx} \times \frac{pdx}{2y} = \frac{p}{2}$, que nos manifiesta que la subnormal de la parábola es igual á la mitad del parámetro. La misma aplicacion se hace respecto de otras curvas.

265 Los mismos triángulos MPQ, MRm dan tambien $MR : Mm :: MP : MQ$, pero $Mm = \sqrt{(\overline{MR}^2 + \overline{Rm}^2)} = \sqrt{(\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2)}$; luego la proporcion se transformará en $dx : \sqrt{(\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2)} :: y : MQ = \frac{y\sqrt{(\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2)}}{dx}$, que es otra fórmula que nos conduce á determinar las normales de las líneas curvas, haciendo operaciones análogas á las que hemos practicado para determinar las subtangentes y subnormales. Fig.

Aplicacion de las diferenciales primeras á la resolucion de las qüestiones de máxîmos y mínimos.

266 Quando en una qüestion se encuentra una variable x, ó y, &c., la qual va sucesivamente creciendo hasta cierto punto para menguar despues, ó que por la contraria mengua al principio para crecer despues, si se pide el lugar donde esta variable es la mayor ó la menor, tenemos una qüestion de máxîmos y mínimos.

Y lo mismo si hallándose en una qüestion dos ó mas variables x é y, se pide qual es el máxîmo ó mínimo producto xy, ó $x^m \times y^m$, &c. de las variables.

267 Para la inteligencia de esta materia supongamos 63
que el exe ó diámetro AL de una curva sea dividido en una infinidad de partes iguales infinitamente pequeñas AG, GH, HI &c., y que en los puntos de division se hayan levantando las ordenadas infinitamente próxîmas GB, HC, ID, &c. los pequeños arcos AB, BC, CD, &c. comprehendidos entre ellas podrán considerarse como líneas rectas sumamente pequeñas, las quales formarán un polígono de una infinidad de lados, y que podrá mirarse como que está confundido con la curva que es su *límite*. Tambien es evidente que todos estos lados tendrán diferentes direcciones.

Si de las extremidades de las ordenadas se tiran las líneas infinitamente pequeñas BM, CN, DO, &c. que sean paralelas al exe, resultarán los pequeños triángulos BMC, CND, &c.; y si llamamos las abscisas x, las ordenadas y, las diferenciales de las abscisas dx, y las de las ordenadas dy, echarémos de ver que los lados BM, CN, DO paralelos al exe en los pequeños triángulos serán iguales á dx, y los otros MC, ND, EO serán iguales á dy.

268 Si la curva tiene su concavidad al lado del exe, y

Fig. y no vuelve sobre sí acercándose á él, la razon de $\frac{dx}{dy}$ irá creciendo sucesivamente al paso que las ordenadas se van alejando del punto A. Para manifestarlo prolónguese el pequeño lado BC del polígono circunscripto, es claro que el pequeño lado CD no tendrá la misma direccion que el lado $BC4$, esto es, pasará por mas arriba, ó mas abaxo que la prolongacion de BC; si pasa por mas arriba la curva mudará su concavidad á la otra parte del exe, esto es, en sentido contrario; pero hemos supuesto que la curva tiene su concavidad al lado del exe, luego la direccion de CD no puede pasar por mas arriba de $BC4$, y así ha de pasar por mas abaxo; de suerte que cortando la ordenada ID á la recta $C4$, la prolongacion de la ID ha de estar al otro lado del punto D.

Los triángulos semejantes $CN5, BMC$ tienen los ángulos $N5C, MCB$ iguales, pero el ángulo NDC exterior al triángulo $CD5$ es mayor que el ángulo $C5D$; luego tambien será mayor que el ángulo MCB; y así en los triángulos rectángulos BMC, CND, siendo el ángulo BCM menor que el ángulo CDN, el otro ángulo CBM será mayor que el ángulo DCN. Luego $\frac{BM}{MC}$ es menor que $\frac{CN}{ND}$; pero la misma consideracion podemos hacer respecto de los demas triángulos. Luego la razon de $\frac{dx}{dy}$ va creciendo al paso que las ordenadas se desvian del vértice.

Por un método semejante probarémos, que quando las ordenadas se acercan al vértice, la razon de dx á dy va decreciendo; luego $\frac{dy}{dx}$ irá creciendo.

269 Si la curva tuviese su convexidad del lado del
64 exe AK, y no volviese sobre sí la razon $\frac{dx}{dy}$, irá disminuyendo á medida que las ordenadas se desvian del

vértice A; porque si hacemos la misma construccion que Fig.
en el caso anterior, se probará facilmente que el ángulo CDN es menor que el ángulo $C5N$, y por consiguiente menor que el ángulo BCM: luego el ángulo NCD es mayor que el ángulo MBC, y por consiguiente
$\frac{BM}{MC} > \frac{CN}{ND}$, esto es, la expresion $\frac{dx}{dy}$ disminuye al 65
paso que las ordenadas se desvian del vértice.

270 Quando la curva tiene su concavidad hácia el exe, y vuelve sobre sí, la razon $\frac{dx}{dy}$ crece, hasta el punto en que la curva vuelve sobre sí acercándose al exe, y en este punto $\frac{dx}{dy} = \infty$, ó lo que es lo mismo, $dy = 0$; pero pasado dicho punto, la razon $\frac{dx}{dy}$ empieza á menguar hasta ser cero.

271 Luego si hacemos la misma construccion que en los casos anteriores, podrémos mirar el punto donde la curva empieza á acercarse al exe, como un pequeño lado del polígono inscripto, el qual será paralelo al exe, y la ordenada á este punto, como que son dos ordenadas infinitamente próximas que se terminan en los extremos del pequeño lado del polígono; pero es evidente que la diferencia entre estas dos ordenadas es nula, ó $dy = 0$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{0} = \infty$.

272 Ya que el punto donde la curva empieza á volver sobre sí es un lado del polígono inscripto á la curva, y este lado es paralelo al exe, se deduce que la tangente á la curva en aquel punto es paralela al exe, pues la tangente no es otra cosa que la prolongacion de dicho lado.

273 Supongamos que la curva sea cóncava hácia su 66
exe AL, y vuelva sobre sí: si referimos las abscisas á una recta BG paralela al exe, al empezar desde el punto B, la razon $\frac{dx}{dy}$ va aumentando hasta un punto en que la curva vuelve sobre sí, y en este punto

Fig. la razon $\frac{dx}{dy}$ llega á ser infinita; pero despues de él la razon irá disminuyendo hasta llegar á L, lo que se demuestra del mismo modo que en el caso anterior.

274 En todas las curvas donde la razon $\frac{dx}{dy}$ va disminuyendo hasta el vértice A (268), la tangente en este punto es paralela á las ordenadas; porque si se considera el punto A como un lado infinitamente pequeño del polígono inscripto, el ángulo que este lado formará con la ordenada inmediata será infinitamente pequeño, á causa que en los pequeños triángulos EPF; DEO; CDN, &c. (268) los ángulos EFP, DEO, CDN van disminuyendo á medida que se acercan al vértice; luego los otros dos ángulos del triángulo que forma el pequeño lado A con la ordenada mas inmediata y la abscisa correspondiente serán dos ángulos rectos, y por consiguiente el pequeño lado A y la ordenada inmediata serán paralelos; pero la tangente en el vértice no es otra cosa que la prolongacion del pequeño lado A; luego, &c.

275 Siendo infinitamente pequeño el ángulo que forma el pequeño lado en A con la ordenada inmediata, se deduce que el lado opuesto á este ángulo en el pequeño triángulo es infinitamente pequeño respecto la ordenada que forma el otro lado del triángulo, es decir, que la razon de dy á dx es infinitamente grande, ó lo que es lo mismo, $dx = 0$.

64 276 En aquellas curvas donde la razon $\frac{dx}{dy}$ va aumentando hasta el vértice A (269), la tangente en A es paralela al exe de las abscisas AK; pues si consideramos el punto A como un lado infinitamente pequeño del polígono inscripto á la curva, el ángulo que este pequeño lado formará con dx será infinitamente pequeño, á causa que los ángulos que los lados del polígono inscripto hacen con dx van disminuyendo hasta el vértice; luego los otros dos ángulos del triángulo que este pequeño lado forma con dx, y la ordenada mas inmediata valdrán dos ángulos rectos; luego dx y el pequeño lado en A serán paralelos, pero la tangente es la prolongacion de dicho lado: luego, &c. Fig.

277 Siendo el ángulo formado por el pequeño lado en A con su dx infinitamente pequeño, el lado dy opuesto á este ángulo en el pequeño triángulo es infinitamente pequeño respecto de dx; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{0} = \infty$.

278 Si una curva ABC toda cóncava hácia su exe retrocede en llegando á un punto B extendiéndose hasta C, la razon $\frac{dx}{dy}$ irá disminuyendo desde el punto A hasta B, en el qual dicha expresion será $= 0$; pero pasado este punto, la razon irá aumentando hasta C, y la tangente en el punto B será paralela á las ordenadas. Es una conseqüencia de lo dicho en los párrafos anteriores. 67

279 De toda esta teoría venimos á deducir: lo 1.º que quando una tangente es paralela al exe de las ordenadas, la dx ha de ser igual á cero (275): 2.º quando la tangente de la curva es paralela al exe de las abscisas, entónces dy es igual á cero (276); de suerte que en la expresion $\frac{dx}{dy}$, que expresa la razon que tienen los incrementos de las abscisas con los de las ordenadas, ha de ser cero el numerador ó el denominador quando se atiende á la razon que tienen dichas cantidades en el vértice de la curva.

280 Y como en una curva qualquiera que vuelve sobre sí acercándose á su exe, la mayor ordenada, quando éstas se refieren á su exe AL (270), y la menor quando se refieren á una recta BG (269), es la que va á parar al punto donde la tangente es paralela al exe de las abscisas, como CH ó su igual ED, y la mayor ó menor abscisa es aquella que corresponde á un punto de la curva en que la tangente es paralela al exe de las ordenadas, se deduce que por un mismo método se deter- 65 y 66

Fig. terminan los puntos en que las tangentes son paralelas á qualquiera de los exes de la curva; y las mayores y menores abscisas y ordenadas.

280 Este método se reduce á tomar la equacion de la curva á quien se refiere la qüestion; diferenciarla; sacar el valor de $\frac{dx}{dy}$ en otra fraccion compuesta de cantidades variables y constantes; é igualar con cero el numerador ó el denominador de la nueva fraccion para conocer el valor de una de las variables, el qual substituido en la equacion de la curva, nos dará á conocer el valor máxîmo de la otra variable. Manifestémoslo resolviendo algunas qüestiones.

281 Qüestion I. *Hallar la mayor ordenada de una curva qualquiera* KYX, *cuyo exe es la recta* KX, *y el orígen está en el punto* X.

Una vez que la curva vuelve á encontrar su exe en
68 el punto K, la mayor ordenada será aquella que pase por el punto Y en que la tangente es paralela al exe de las abscisas; y así, si suponemos que la curva sea un círculo, su equacion será $y^2=2ax-x^2$, y la diferencial de esta expresion $2ydy=2adx-2xdx$, ó $ydy=dx(a-x)$; que dividiendo primero por dy, y despues por $a-x$, tendrémos $\frac{y}{a-x}=\frac{dx}{dy}$; y como en el punto Y la diferencial de la ordenada es cero, será $a-x=0$, ó $a=x$. Substituyendo en la equacion del círculo en lugar de x su valor a será $y^2=2a^2-a^2=a^2$, y extrayendo la raiz $y=\pm a$, que nos manifiesta que la ordenada máxîma del círculo es igual al radio quando éstas se refieren al diámetro, y que tiene dos ordenadas máxîmas iguales, una positiva, que es la CY, y otra negativa, que es CT, las quales se determinarán con tomar $CX=a$, y tirar por el punto C la YT que se termine en la circunferencia. Pero si refiriendo las ordenadas al diámetro consideramos el orígen de las abscisas en el centro, tendrémos la equacion $y^2=aa-xx$ (149), que la podemos tomar tambien del triángulo rectángulo OMP (tom. I. 472) con hacer $CP=x$, $CM=a$, $PM=y$; cuya diferencial es $2ydy=-2xdx$, de la que sale $\frac{dx}{dy}=\frac{-y}{x}$, y como en este caso es $dy=0$, tambien será $x=0$; luego la ordenada máxîma es la que pasa por el orígen C, en el qual la abscisa es cero; para determinar el valor de esta ordenada substituirémos en la equacion en lugar de x, 0, con lo que se transformará en $y^2=a^2$, que nos da $y=\pm a$, que tambien nos da dos ordenadas, una positiva y otra negativa.

282 Para hacer mas general esta doctrina, supongamos ahora que el orígen se tome en el punto A fuera del círculo, siendo los exes AS, AH perpendiculares uno á otro, y las rectas CR, CQ que miden las distancias que hay al centro de los exes dos cantidades conocidas; y sea la abscisa $AD=PQ=u$, la ordenada $DM=z$, $CM=a$, $CR=PD=c$, y $AR=CQ=b$; será $CP=CQ-PQ$, ó $x=b-u$; $PM=MD-DP$; ó $y=z-c$; y substituyendo en la equacion $y^2=aa-xx$ en lugar de x é y sus valores, tendrémos $(z-c)^2=a^2-(b-u)^2$, y efectuando las operaciones indicadas $z^2-2cz+c^2=a^2-b^2+2bu-u^2$; la diferencial de esta equacion es $2zdz-2cdz=2bdu-2udu$ y $dz(z-c)=du(b-u)$, que nos da $\frac{du}{dz}=\frac{z-c}{b-u}$. Si querémos la ordenada máxîma harémos $b-u=0$, que nos da $u=b$; luego para determinar la máxîma ordenada tomarémos $u=AR=b$, y tirando la ordena RY, ésta será la ordenada máxîma que se pide. Para conocer su valor substituirémos en la equacion del círculo en lugar de la u la cantidad b, con lo que tendrémos $z^2-2cz+c^2=a^2-b^2+2b^2-b^2$, ó $z^2-2cz+c^2=a^2$, y extrayendo la raiz quadrada $z-c=\pm a$, y $z=c\pm a$, esto es, $z=RY$ y $z=RT$; pero RT es la mínima ordenada que se puede tirar al círculo desde el exe AS. Luego por un mismo camino se determinan las mayores y menores ordenadas de las líneas curvas. Por un método semejante podrémos determinar las mayores y menores abs-

abscisas ; pues habiendo demostrado (278) que las diferenciales de las abscisas en el vértice de las curvas eran cero, ó lo que es lo mismo, $\frac{dx}{dy}=0$; si en la diferencial de la equacion de la curva, despues de haberle dado la forma de quebrado, igualamos con cero el numerador, sacarémos el valor de la ordenada correspondiente á la abscisa que se busca. En efecto, si en la fraccion $\frac{z-c}{b-u}$ que acabamos de sacar igualamos con cero el numerador, tendrémos $z-c=0$, ú $z=c$, cuyo resultado transformará la equacion del círculo en $0=a^2-b^2+2bu-u^2$, ó $u^2-2bu+b^2=a^2$, y extrayendo la raiz quadrada $u=b\pm a$, esto es, $u=AS$, y $u=AB$, que nos da á conocer que en este caso tambien tiene el círculo dos abscisas, una máxîma y otra mínima; y en efecto, si atendemos á la construccion de la figura, desde luego echarémos de ver que no puede darse mayor abscisa que AS, ni menor que AB.

283 Pero en las curvas cerradas, como la elipse, el círculo, &c. quando sus cordenadas se refieren á una recta AS fuera de la figura, resultan unas ordenadas como BX, SK, que á un tiempo son máxîmas y mínimas, esto es, son máxîmas respecto de la parte convexâ KTX, y mínimas respecto de la parte cóncava KYX, lo qual nos obliga á detenernos en esta materia, á fin de averiguar los medios que debe practicar el calculador para conocer si una cantidad es un máxîmo, un mínimo, ó uno y otro.

284 Hemos visto que la mayor ordenada del círculo refiriéndolas al exe AS es $YR=z=c+a$; pero como el valor de esta ordenada máxîma y el de la ordenada mínima $TR=z=c-a$, y el de la máxîma y mínima á un tiempo quales $BX=SK=c$ dependen del valor de la abscisa variable u, la que unas veces es igual á AB, otras igual á AR, &c. es evidente que si en lugar de la abscisa correspondiente á la máxîma, ó mínima ordenada, ó la que á un tiempo es máxîma y mínima, substituimos un valor mayor ó menor que el que le correspon-

 de,

de, y despejamos la ordenada, ésta variará y no será la que ántes, pues vemos las variaciones que éstas experimentan variando la abscisa.

285 La máxîma ordenada del círculo hemos visto que es $c+a$, la mínima ordenada $c-a$, y que la abscisa que les corresponde es $u=b$; substituyamos en la equacion (282) por u una cantidad mayor ó menor que b; esto es, hagamos $u=b\pm n$; en virtud de esta substitucion tendrémos $z^2-2cz+c^2=a^2-b^2+b^2\pm2bn-b^2\pm2bn-b^2\pm2bn-n^2$, que haciendo la reduccion y despejando la z, sale $z=c\pm\sqrt{(a^2-n^2)}$, esto es, $z=c+\sqrt{(a^2-n^2)}$, y $z=c-\sqrt{(a^2-n^2)}$, cuyos resultados nos dan á conocer, que por pequeña que sea n siempre será $\sqrt{(a^2-n^2)}$ menor que a, y por consiguiente $c+a>c+\sqrt{(a^2-n^2)}$, y $c-a<c-\sqrt{(a^2-n^2)}$, que nos manifiestan que para conocer si una cantidad es un máxîmo ó un mínimo, se substituya en la equacion en que se halla cifrado el máxîmo en lugar de la abscisa ú otra variable de quien dependa una cantidad mayor, y otra menor que la que corresponde al máxîmo ó mínimo; y si los dos resultados que dan estas substituciones son menores que la cantidad que se habia encontrado, ésta será un máxîmo; pero si dichos resultados son mayores, será entónces un mínimo.

286 La abscisa correspondiente á la cantidad BX, que es á un tiempo máxîma y mínima ordenada es $u=b-a$; pues substituyamos en la equacion por u una cantidad mayor y otra menor que $b-a$, esto es, hagamos $u=b-a\pm n$, la substitucion de $b-a+n$ en la equacion la transformará en $z^2-2cz+c^2=a^2-b^2+2b^2-2ab+2bn-b^2+2ab-a^2-2bn+2an-n^2=2an-n^2$, y despejando la incógnita $z=c\pm\sqrt{(2an-n^2)}$, que es una cantidad real, ínterin que no sea $n>2a$, como debe suponerse; pero si hacemos $u=b-a-n$, y haciendo la substitucion en la equacion despejamos la ordenada, será $z=c\pm\sqrt{(-2an-n^2)}$, que es una cantidad imaginaria.

287 Luego para conocer si una cantidad es máxîmo y mínimo á un tiempo, se substituirá sucesivamente en

K 2 lu-

lugar de la abscisa ó variable de quien dependa una cantidad mayor y menor que la que le corresponde; y si de los dos nuevos resultados el uno es real y el otro imaginario, dicha cantidad es máxîmo y mínimo á un mismo tiempo.

288 Este método de conocer los máxîmos y mínimos no es tan limitado que se extienda solamente á establecer reglas para conocer las máxîmas y mínimas ordenadas de una línea curva; se extiende en general á la determinacion de todas aquellas cantidades que pueden ser máxîmas ó mínimas entre sus semejantes, ó en general á todas aquellas que están representadas por qualquiera expresion analítica que sea funcion de una variable. Por exemplo, la expresion $ax^m - bx^n + c$, que es una funcion de la variable x; porque es evidente que si á esta funcion, ya sea que exprese una línea, una superficie, un sólido, la velocidad con que se mueve un cuerpo, el tiempo en que se mueve, ó el espacio en que anda (pues estas tres últimas cantídades se pueden representar por una línea recta, como lo verémos en la mecánica; y el aumento ó diminucion de un cuerpo depende de una de sus dimensiones) lo hacemos igual á otra variable, y será $y = ax^m - bx^n + c$, que diferenciándola como si fuera equacion de una curva, sacarémos un quebrado igual á $\frac{dx}{dy}$ compuesto de cantidades constantes y variables, en el que igualando con cero el numerador ó el denominador, segun las circunstancias de la qüestion, nos dará á conocer el máxîmo ó mínimo que se busca, siempre que lo haya; pero si al determinar el valor de x correspondiente al máxîmo ó mínimo sale un valor negativo, en este caso es imposible la qüestion en los términos en que viene propuesta.

Enterados por medio de esta qüestion de las ventajas que nos proporciona el método de máxîmos y mínimos continuemos aplicándolo á la resolucion que otras qüestiones.

Qües-

289 Qüestion II. *Dividir un número* a *en dos partes tales que el producto de una por otra sea el mayor posible.* Fig.

Si llamamos x la una de las dos partes, es claro que la otra será $a-x$, y su producto $ax-x^2$, que lo mirarémos como funcion de una variable y; con lo que tendrémos $y = ax - x^2$, cuya diferencial será $dy = adx - 2xdx$ y por último $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a-2x}$; que si hay un máxîmo lo hemos de sacar del denominador, pues el numerador es una cantidad constante; y así, igualando con cero el denominador, será $a - 2x = 0$ y $x = \frac{1}{2}a$, cuyo resultado nos dice que para que el producto de las partes en que se divide el número a sea el mayor posible, han de ser iguales estas partes.

Para resolver esta qüestion hemos supuesto que $ax - x^2$ era igual á una nueva variable y; pero no hay necesidad de hacer este supuesto, sinó es diferenciar desde luego la expresion, é igualar con cero la diferencial (pues la diferencial de los máxîmos y mínimos es nula) y sacar por este medio el valor de la variable correspondiente al máxîmo ó mínimo. Por exemplo, la diferencial de $ax - x^2$ es $adx - 2xdx$, que la podemos dar esta forma $adx - 2xdx = 0$, y $adx = 2xdx, a = 2x$, y por último $x = \frac{1}{2}a$, que sale el mismo resultado que ántes; y así en las demas qüestiones seguirémos este método.

290 Qüestion III. *Cortar una línea recta* AB *en un punto* D, *de suerte que* $\overline{AD}^m \times \overline{BD}^n$ *sea la mayor posible.*

Sea $AB = a$, y $AD = x$, será $DB = a - x$, y el producto de estas partes $x^m \times (a-x)^n$. La diferencial de esta cantidad (240, 241) es $m(a-x)^n x^{m-1} dx - nx^m \times (a-x)^{n-1} dx = 0$, que traspasando la cantidad negativa al segundo miem- 69
bro, y partiendo por el factor comun $(a-x)^{n-1} \times x^{m-1} dx$, se reduce á $m(a-x) = nx$, ó $ma - mx = nx$, y por último $x = \frac{ma}{m+n}$, que con suponer $m = 2$, y $n = 1$, sale $x = \frac{2}{3}a$; luego será $AD = \frac{2}{3}a$ y $DB = \frac{1}{3}a$; y si suponemos

que

Fig. que sea BD la altura de un prisma y AD el lado del quadrado de su base, tendrémos que el mayor prisma formado con las partes de esta recta será $\frac{4}{27}a^3$.

70 291 Qüestion IV. *Determinar el rectángulo mayor que se pueda inscribir en un triángulo* ABC, *cuya altura* BH *cae dentro de la base.*

Sea $AC=b$, $BH=a$, y $HG=x$, será $BG=a-x$; y por razon de las paralelas AC y DE serán proporcionales $BH : AC :: BG : DE$, ó $a : b :: a-x : DE=\frac{ba-bx}{a}$; pero la superficie del rectángulo es $DE\times GH=\frac{ba-ba}{x}\times x=\frac{bax-ba^2}{a}$, que diferenciando esta expresion é igualando con cero la diferencial, tendrémos $\frac{badx}{a}-\ldots\frac{2bxdx}{a}=0$, $a=2x$, y por último $x=\frac{1}{2}a$; que nos manifiesta que el máximo rectángulo será aquel cuya altura GH sea la mitad de BH.

292 Qüestion V. *Sobre una recta* AB, *tomada por hipotenusa, construir un triángulo rectángulo* ABC *que sea el mayor posible.*

71 Supongamos $AB=a$, y el cateto $AC=x$; por la propiedad del triángulo rectángulo será $BC=\sqrt{(a^2-x^2)}$, y $AC\times\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}$, que es la superficie del triángulo, pero ésta ha de ser la mayor posible; luego su diferencial ha de ser nula, y tambien será nula la diferencial de su quadrado $\frac{x^2}{4}(a^2-x^2)=\frac{a^2x^2}{4}-\frac{x^4}{4}$; luego $\frac{a^2xdx}{2}-x^3dx=0$, que haciendo la transformacion, y suprimiendo los factores comunes nos da por último $x=\sqrt{(\frac{1}{2}a^2)}=AC$; y como era $CB=\sqrt{(a^2-x^2)}$, haciendo la substitucion correspondiente en esta expresion, tendrémos $CB=\sqrt{(a^2-\frac{1}{2}a^2)}=\frac{\sqrt{(2a^2-a^2)}}{2}=\sqrt{(\frac{1}{2}a^2)}$, que nos manifiesta que para que el triángulo ABC sea el mayor posible ha de tener sus catetos iguales.

293 Qüestion VI. *Hallar entre todos los triángulos rec-*

rectilíneos rectángulos de una misma area, uno tal que la suma de sus lados AB+BC *sea la menor posible.* Fig.

Sea $AB=x$; $BC=y$, y la area del triángulo $=a$; será 72
$a=\frac{xy}{2}$, de cuya equacion sale $y=\frac{2a}{x}$, y la suma de los lados será $\frac{2a}{x}+x$; la diferencial de esta equacion es $dx-\frac{2adx}{x^2}$, que por expresar un mínimo ha de ser cero (278); y así $dx-\frac{2adx}{x^2}=0$: $x^2=2a$, y $x=\sqrt{2a}=AB$, y como $y=\frac{2a}{x}$, substituyendo por x su valor será $y=BC=\sqrt{(2a)}$, que nos manifiesta que los dos lados han de ser iguales.

294 Qüestion VII. *Desde un punto* D *tomado en el exe* 73
de una curva algebráyca tirar á esta curva la mas corta línea que sea posible.

Sea la curva ABC una parábola, y supóngase la construccion hecha; tírese la ordenada MB, y sea $AM=x$ $MB=y$, $AD=c$, el parámetro $=a$ y $DB=z$; con lo que será $MD=c-x$.

El triángulo rectángulo MDB da $\overline{DB}^2=\overline{DM}^2+\overline{MB}^2$, y substituyendo por estas lineas sus valores $z^3=c^2-2cx+x^2+y^2$; pero siendo z la línea mas corta que se tire del punto D, su diferencial ha de ser cero, luego diferenciando la equacion será $0=-2cdx+2xdx+2ydy$, ó, $-cdx+xdx+ydy=0$.

Pero la equacion de la parábola $y^2=ax$ da $ydy=\frac{1}{2}adx$, cuyo valor substituido en la equacion anterior la transforma en $-cdx+xdx+\frac{1}{2}adx=0$, que nos da $xdx=cdx-\frac{1}{2}adx$, y por último $x=c-\frac{1}{2}a$; que nos manifiesta que si de la recta AD restamos la mitad del parámetro, tendrémos un punto M, por el qual se tirará la ordenada MB correspondiente al punto B donde ha de ir á pasar la DB para que sea la mas corta posible.

CAPITULO XII.

De las diferenciales segundas, terceras, &c.

295 Quando las variables x,y,u reciben siempre incrementos iguales á cada instante, las diferenciales de estas cantidades se llaman constantes; pero si las cantidades dx, dy, du, &c. reciben en el mismo tiempo otros incrementos ó decrementos infinitamente pequeños respecto de ellas, en este caso se dice que las cantidades dx, dy, du, &c. son variables, y los aumentos infinitamente pequeños que reciben á cada instante es lo que se llaman diferenciales segundas; y si admitimos que estas segundas diferenciales sean tambien variables, los incrementos que recibirán á cada instante son las diferenciales terceras, y así sucesivamente.

296 En las curvas donde las ordenadas son paralelas entre sí y de las que nos proponemos tratar solamente se suponen las diferenciales de la abscisa x constante.

297 Dexamos explicado en los capítulos anteriores cómo se determinan las diferenciales primeras de las cantidades variables, y cómo el límite de la razon de dos cantidades dx y dy, ó lo que es lo mismo $\frac{dx}{dy}$, es una cantidad finita, de cuya propiedad nos hemos servido (cap. 11.) para resolver una infinidad de qüestiones relativas á las líneas rectas, curvas y superficies; por lo que en este capítulo nos resta tratar de las diferenciales segundas y la comparacion entre ellas, manifestando como la razon de dos diferenciales de segundo órden, ó de qualquiera órden superior, expresan una cantidad real para dar solucion á aquellas qüestiones que no pueden resolverse por medio de las diferenciales primeras.

298 Y así para proceder con método en esta materia explicaré ante todas cosas el orígen de las diferenciales segundas: para lo qual supongamos una curva *ACEGO* que tiene su concavidad del lado del exe *AV*, y concibamos las ordenadas infinitamente próximas *CR*, *ES*,*GT*, &c. y las pequeñas líneas *CD*,*EF*,*GN*, &c. paralelas al exe; es evidente que las rectas *AR*, *CD*, *EF*, &c serán representadas por dx; las rectas *CR*,*ED*,*GF*, *ON*, &c. por dy, y los pequeños arcos ó cuerdas *AC*, *CE*,*EG*,*GO*, &c. por du. Esto supuesto tírese la recta *RD*, y del punto *C* la *CP* paralela á *RD*; y prolónguese *SE* hasta *P*; á causa de las paralelas *CP*,*RD*, y *RC* y *DP*, tendrémos $CR=PD$; luego *DE*, que es igual $DP-EP$, será tambien igual á $RC-EP$; pero $CR=DP=dy$, luego $EP=ddy$.

Fig. 74

299 Si tiramos *DF*, y del punto *E* la *HE* paralela á *DF*, y prolongamos *FG* hasta *H*, será *GH* la diferencia entre *DE* y *FG*, ó lo que es lo mismo, la diferencial segunda de y.

Pero como en este caso las diferenciales primeras de y contadas desde *A* van decreciendo, sus diferenciales segundas son negativas: lo que no sucede quando la curva tiene su convexidad del lado del exe (*fig.* 74); en este caso las diferenciales primeras de las ordenadas contadas desde el punto *A* van creciendo, y por tanto sus diferenciales segundas han de ser positivas.

De todo quanto llevamos dicho sobre el orígen de las diferenciales segundas se infiere:

300 1. Que quando la curva tiene la concavidad hácia su exe sin volver sobre él, y las abscisas se cuentan desde el punto *A*, las diferenciales segundas de y van decreciendo sucesivamente; pero si las abscisas las contamos desde el punto *V* hasta *A*, entónces las diferenciales segundas de y van creciendo. 74

301 2.° Quando la curva siendo cóncava hácia su exe vuelve ácia éste acercándose á él; si las ordenadas las contamos desde el punto *A*, las diferenciales segundas de éstas van decreciendo hasta cierto punto, que es aquel al qual corresponde la máxima ordenada, y en

Fig. en el que la diferencial segunda de y es cero; pero pasado este punto, las diferenciales segundas de y continúan creciendo hasta que la curva vuelve á encontrar el exe.

302 3.º Quando la curva tiene la convexîdad hácia el exe, las diferenciales segundas de y van creciendo de A á O, y decreciendo de O á A.

Llámanse *puntos de inflexîon* aquellos como B, donde
75 la concavidad de una curva se muda en convexîdad,
y 76 ó la convexîdad en concavidad.

303 *Quando una curva ABC es al principio cóncava*
75 *hácia su exe y despues convexâ, la diferencial segunda de la ordenada en el punto B de inflexîon es igual á cero.*

Para demostrarlo concibamos que las primeras diferencias sean trasladadas perpendicularmente debaxo del exe en las prolongaciones de las mismas ordenadas, y supongamos que por sus extremos pase una curva PRS; es claro que esta curva tendrá su convexîdad hácia el exe, y por tanto será MR la mínima ordenada; y como las diferenciales de las mínimas ordenadas son cero, la diferencial de MR será igual á cero; pero la diferencial primera de MR es la diferencial segunda de la ordenada MB correspondiente al punto de inflexîon: luego, &c.

76 304 *Quando una curva* ABC *es al principio convexâ hácia su exe y despues cóncava, la diferencial segunda de la ordenada correspondiente al punto de inflexîon es infinita.*

Prolónguense las ordenadas hácia la parte opuesta del exe haciendo sus prolongaciones iguales á las diferenciales primeras como en el caso anterior, é imagínese que por ellas pase una curva; es evidente que las primeras diferenciales de las ordenadas hasta el punto B serán las ordenadas de una línea AR, que tendrá su convexîdad hácia el exe, y se irá desviando de él hácia R, y las primeras diferenciales de las ordenadas correspondientes á BC serán las ordenadas de otra curva convexâ RD, que se irá acercando al exe hácia la parte D; luego la mayor ordenada de la curva ARD será la MR correspondiente al punto de inflexîon: luego la diferencial de esta ordenada será infinita; pero esta diferencial es la diferencial segunda de la ordenada MB en el punto de inflexîon; luego, &c. Fig.

305 Hay unas curvas que tienen toda su concavidad vuelta ácia el exe, y otras que tienen su convexîdad tambien hácia el exe, y en unas y otras pasa el exe por el punto de inflexîon. En las primeras de estas curvas (*fig.* 77) las diferenciales de y van aumentando de A hasta B, y desde este punto hasta C van disminuyendo sucesivamente, de donde se deduce que la dy correspondiente al punto B es infinita; y en las segundas curvas (*fig.* 78) las diferenciales de y van disminuyendo de A á B, y aumentando de B á C; y por tanto la dy correspondiente al punto B es infinitamente pequeña, y así el punto de inflexîon en estas dos especies de curvas se halla del mismo modo que se encuentra la mayor ó menor ordenada de una curva, esto es haciendo $dy = 0$, ó $dy = x$.

306 Quando una curva AC, habiéndose desviado 79
mediante cierto tiempo de un punto de orígen A, retrocede su camino dirigiéndose á B; el punto C donde se hace este retroceso se llama punto de regreso.

307 En las curvas que tienen un punto de regreso, las diferenciales de las ordenadas van disminuyendo en la parte cóncava hasta un punto C; pasado el qual, si la parte CB se desvia del exe dirigiéndose hácia B, las diferencias de las ordenadas van aumentando, y así el punto C es la parte de la curva donde se encuentra la menor diferencial, y por consiguiente la diferencial segunda de la ordenada ha de ser cero.

308 Pero si la parte CB se aproxîma al exe, las di- 80
ferenciales van disminuyendo de C hasta B, ó lo que es lo mismo, aumentando de B hasta C, de suerte que el punto C es el punto donde se encuentra la menor diferencial de la parte convexâ; y así la segunda diferencial

Fig. cial en la parte cóncava en C es cero, y en la parte convexâ es infinita en el mismo punto; de suerte que en este caso es preciso hacer la diferencial segunda de la ordenada igual á cero ó al infinito.

Aunque hasta aquí hemos supuesto dx constante, como pueden ocurrir casos en que sea preciso considerar como constantes dy ó du, explicarémos cómo se expresan las segundas diferenciales.

81 y 82 309 Sea una curva MHT cóncava ó convexâ hácia su exe, y sean las MR, HS las dx; RH,ST las dy; y los pequeños arcos ó cuerdas MH,HT las du: prolónguese la cuerda MH, y desde el punto H como centro con el intervalo HT trácese el pequeño arco TL, y tírese TN paralela á HP, y OQ y PN paralelas á TS. Hecha esta construccion se ve que si consideramos dx constantes, los triángulos MHR,HSK son semejantes é iguales; luego TK es la diferencial de dy, ó la segunda diferencial de y, y KL la diferencial de du; si se quiere que las du sean constantes, los triángulos MHR,HLQ serán semejantes é iguales, y en este caso $SQ=TO$ es la diferencial de dx, y OL es la diferencial de dy; y por último si se quiere que las dy sean constantes, los triángulos MHR,HNP serán semejantes é iguales, y así SP es la diferencial de dx, y NL la diferencial de du.

310 Una vez que las diferenciales segundas de las cantidades variables no son otra cosa que las diferenciales de las diferenciales primeras de dichas variables consideradas como unas nuevas variables, se deduce que para encontrar las diferenciales segundas de una cantidad variable qualquiera, se ha de hallar ántes la primera diferencial, y despues la diferencial de ésta, ó lo que es lo mismo, se ha de diferenciar dos veces. En virtud de lo qual tendrémos que $dd(xy)=d\times(xdy+ydx)$ (241)$=dxdy+xddy+yddx+dxdy=2xdx+xddy+yd^2x$; $d(dx.\,dy)=dxddy+dyd^2x$, que considerando dx constante, se reduce á dxd^2y; $d(x^2dxdy)=2xdydx^2+x^2dyd^2x+x^2dxd^2y$; que suprimiendo dx constante se reduce á $2xdydx^2+x^2dxd^2y$, y suponiendo dy constante á $2xdydx^2+x^2dyd^2x$; $d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ en suponiendo dx y dy variables es $\frac{dyd^2x-dxd^2y}{dy^2}$, que si suponemos dx constante es $\frac{-dxd^2y}{dy^2}$, y si suponemos constante la dy es $\frac{dyd^2x}{dy^2}=\frac{-ddx}{dy}$; por unas reglas análogas se encontrarán las diferenciales terceras, quartas, &c.

311 Concluyamos este capítulo manifestando como la razon entre las diferenciales superiores puede ser una cantidad real. Para lo qual supongamos que y sea funcion de una variable qualquiera x, de suerte que sea $y=a+bx+cx^2+ex^3+$ &c. Si admitimos que quando y pasa á ser y', x llegue á ser $x+dx$, tendrémos $y'=a+b(x+dx)+c(x+dx)^2+e(x+dx)^3+$ &c. $=a+bx+bdx+cx^2+2cxdx+cdx^2+ex^3+3ex^2dx+3exdx^2+edx^3$. Restando de esta equacion la anterior será $y'-y=dy=bdx+2cxdx+cdx^2+3ex^2dx+3exdx^2+edx^3$, ó lo que es lo mismo, $dy=dx(b+2cx+3ex^2)+dx^2(c+3ex)+e\times dx^3+$ &c. Dividiendo por dx los dos miembros de la equacion, y suprimiendo los últimos términos (13 y 241), tendrémos $\frac{dy}{dx}=b+2cx+3ex^2$. Volvamos á diferenciar esta equacion considerando dx constante, y será $\frac{ddy}{dx}=2cdx+6exdx$; y dividiendo por dx, $\frac{ddy}{dx^2}=2c+6ex$. Cuyo resultado nos enseña que la razon entre dos diferenciales de segundo órden puede expresar una cantidad finita, mediante á que lo es $2c+6ex$. Si continuamos diferenciando la equacion, y dividiendo por dx, tendrémos $\frac{d^3y}{dx^3}=6e$, que tambien nos da una cantidad finita. Luego, &c.

Enterados de lo que son las diferenciales segundas y cómo se hallan, hagamos algunas aplicaciones de ellas.

CA-

Fig.

CAPITULO XIII.

Aplicacion de las diferenciales segundas para determinar los puntos de inflexîon y radios de curvatura de las líneas curvas.

312 Dexamos demostrado que las diferenciales segundas de las ordenadas de las líneas curvas correspondientes á los puntos de inflexîon son cero, ó ∞ (303 y 304), en virtud de lo qual para determinar los puntos de inflexîon de las líneas curvas se hallará la diferencial segunda de la variable y cantidades de x, y, dx; se igualará con cero, ó con el ∞, y de esta equacion se sacará el valor de la abscisa correspondiente al punto de inflexîon. Aclarémoslo con varios exemplos.

313 Qüestion I. *Hallar el punto de inflexîon de una*

83 *semicicloyde prolongada, cuya semicircunferencia* ARD *es igual á la base* DC$=$b; *el diámetro* AD$=$2c; *la abscisa* AS$=$x, *la ordenada* SP$=$y; *la recta* SR$=$z, *y el arco* AR$=$u.

Por la propiedad de la cicloyde es $ARD : DC :: AR : RP$, ó $a : b :: u : RP = \frac{bu}{a}$; y por consiguiente $SP = SR - RP = z + \frac{bu}{a}$, ó lo que es lo mismo, $y = z + \frac{bu}{a}$, que es la equacion de la cicloyde, y su diferencial es $dy = dz + \frac{bdu}{a}$.

Pero por la propiedad del círculo tenemos $(SR)^2 = AS \times SD$, ó $z^2 = 2cx - x^2$, $z = \sqrt{(2cx - x^2)}$, y $dz = cdx - xdx \times (2cx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{(2cx - x^2)}}$.

Imagínese otra ordenada sr infinitamente próxîma á SR, y la pequeña perpendicular rM á SM, será $Mr = dx$, $RM = -dz$, y $Rr = du$; y considerando Rr como una pe-

pequeña línea, el triángulo rectángulo RMR nos da $(Rr)^2 = (RM)^2 + (Mr)^2$, ó $du^2 = dx^2 + dz^2$, y $du = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$. Fig.

Substituyendo ahora en la equacion de la diferencial de la curva en lugar de dz y du sus valores, será $dy = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{(2cx - x^2)}} + \frac{b\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}{a}$; y substituyendo por dz^2 su valor $\frac{(cdx - xdx)^2}{2cx - x^2}$; $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{(2cx - x^2)}}$, y diferenciando esta última equacion, considerando dx constante, es $d^2y = \frac{(bcx - bc^2 ac^2)dx^2}{(2cx - x^2) \times a\sqrt{(2cx - x^2)}}$; pero $ddy = 0$ en el punto de inflexîon por tener la curva su concavidad hácia el exe (303); luego el segundo miembro de esta equacion ha de ser cero, y por tanto $(bcx - bc^2 - ac^2)dx^2 = 0$; $bcx = bc^2 + ac^2$, y $x = c + \frac{ac}{b}$, que nos manifiesta que se halle una quarta proporcional á las tres líneas b, a, c se junte con c, y se tendrá el valor de la abscisa AS correspondiente al punto de inflexîon; y levantando la ordenada SP, ésta nos dará á conocer el punto que se busca.

314 Qüestion II. *Dada una curva* ABC, *cuyas ordenadas* BR *son medias proporcionales entre las ordenadas* RO *de una parábola vulgar y las partes* PO, *que es lo que falta á cada ordenada de la parábola para igualar con el lado* DE; *determinar el punto de inflexîon B.*

Sea el parámetro de la parábola $= a$, la recta $PR = ED = FC = b$, la abscisa $DR = EP = x$, la ordenada á la 84
parábola $OR = y$, y la ordenada $RB = z$, tendrémos $PO = PR - OR = b - y$; y supuesto que $PR : RB :: RB : OP$, ó $b : z :: z : b - y$, será $z^2 = b^2 - by$; y esta es la equacion de la curva, cuya diferencial es $2zdz = -bdy$, ó $-dz = \frac{bdy}{2z}$; á causa que quando las abscisas DR crecen, las ordenadas RB disminuyen.

Pero por la propiedad de la parábola es $y = \sqrt{(ax)} = ax^{\frac{1}{2}}$;

$\overline{ax}^{\,-\frac{1}{2}}$; y $dx = \frac{1}{2}\, adx \times \overline{ax}^{\,-\frac{1}{2}}$, y por la propiedad de la curva $z = \sqrt{(b^2 - by)}$, que substituyendo en lugar de y, dy, y z sus valores en la equacion $-dz = \frac{bdy}{2z}$, tendrémos $-dz = \frac{badx \times \overline{ax}^{\,-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{(b^2 - b\sqrt{(ax)})}}$; y elevando al quadrado

$$dz^2 = \frac{b^2a^2dx^2 \times \overline{ax}^{\,-1}}{16b^2 - 16b(\sqrt{ax})} = \frac{b^2a^2dx^2 \times \overline{ax}^{\,-1}}{16b^2 - \sqrt{(256b^2ax)}} = \frac{b^2a^2dx^2}{16b^2ax - \sqrt{(256a^3b^2x^3)}};$$

pero siendo la diferencia de dz igual á cero, á causa de que la curva tiene su convexîdad hácia el exe, tambien la diferencial de su quadrado será cero; luego $d(dz^2) =$

$$\frac{-16b^4a^3xdx^3 + 384ba^5x^2dx^3(256a^3b^3x^3)^{\frac{1}{2}}}{(16b^2ax - \sqrt{(256a^3b^3x^3)})^2} = 0,$$

que igualando con cero el numerador, haciendo la transposicion necesaria, y suprimiendo los factores comunes, nos sale $x = \frac{4b^2}{9a}$; y así hallando una tercera proporcional á $9a$ y $2b$, tendrémos la abscisa DR; y la ordenada RB tirada por su extremo dará á conocer el punto B de inflexîon.

315 Pero si la curva, siendo tratada en virtud de la ley que se ha dicho, tuviese su convexîdad hácia el exe, como $CSHA$, en este caso será $ddy = \infty$ (304); y como esta cantidad está expresada por un quebrado, no puede ser éste infinito sin que su numerador sea cero; luego $(16b^2ax - \sqrt{(256a^3b^2x^3)})^2 = 0$, ó extrayendo la raiz quadrada, y haciendo la transposicion $16b^2ax = \ldots\ldots$ $\sqrt{(256a^3b^2x^3)}$, que quadrando y suprimiendo los factores comunes sale por último $x = \frac{b^2}{a}$, y éste es el valor de la abscisa DG correspondiente á la ordenada GZ que señala el punto Z de inflexîon.

Por un método semejante al que hemos explicado para conocer los puntos de inflexîon se determinan los puntos de regreso.

Si

316 Si se nos diese la equacion de una curva, y quisiésemos averiguar si tiene algun punto de inflexîon, ó regreso sin necesidad de trazarla, harémos su diferencial segunda igual á cero ó al infinito; y si el uno ó el otro de estos supuestos diese á conocer la magnitud de x ó y, será señal que tiene un punto de regreso ó inflexîon; pero si estos supuestos no diesen á conocer cosa alguna será señal que la curva es toda cóncava ó toda convexâ hácia un mismo lado. Fig.

Aplicacion del cálculo de las diferenciales segundas para determinar los radios de curvatura de las líneas curvas.

317 Si suponemos que á una curva AB se haya envuelto ó ceñido un hilo, y que manteniéndose éste siempre tirante se vaya desviando su extremo A, este punto trazará con su movimiento una curva $ADEC$; y la línea AHB se llama la *evoluta* de la curva $ADEC$; las partes HD, EB del hilo desenvuelto se llaman *radios de la evoluta*, *radios de curvatura*, ó *radios osculadores*; y el círculo á quien corresponde cada uno de estos radios se llama *círculo osculador*. 85

Quando el hilo desenvuelto es igual á la curva en que estaba ceñido, cada radio evoluto es igual al arco á que estaba ceñido; pero si el hilo es mayor ó menor que el arco, entónces el radio es mayor ó menor que el mismo arco una cierta cantidad.

318 De la naturaleza de la evoluta se infiere: 1.° *que el radio osculador es tangente á la evoluta*; porque si se concibe la curva AQ (317) como un polígono regular de una infinidad de lados BC, CD, &c. es evidente que el radio GB es la prolongacion del lado BC, y por consiguiente toca la curva sin cortarla; lo mismo dirémos del radio CH, pues ésta tambien es la prolongacion del lado CD, y así de los demas. 86

319 2.° *El radio es perpendicular á la curva que traza*; porque ínterin que la parte AB del hilo se desen-

 vuel-

vuelve, traza un arco *AG*, cuyo centro está en *B*, y así el radio *GB* es perpendicular á este arco, y por la misma razon ínterin que el hilo pasa de la posicion *GB* á la posicion *HC*, su extremo traza otro arco *GH*, cuyo centro está en *C*, y por tanto ha de ser perpendicular á este arco; del mismo modo se probara que los demas radios son perpendiculares á los arcos respectivos; pero la línea *AL* no es otra cosa que la suma de los pequeños arcos *AG*,*GH*,*HI*, &c. Luego ya que los radios son perpendiculares á estos arcos, lo son tambien á la curva que trazan, ó mas bien á las tangentes tiradas por los puntos *A*, *G*, *H*, &c.

320 Si se continúa hácia *L*, el pequeño lado *IK* descripto por el radio *IE* ó *KE*, pasará por debaxo del arco *KL*, y encontrará la area que termina la curva, á causa de que el arco *KL* es trazado con un radio *KF* mayor que *KE*, que es el que describe el arco *IK*; y si se continúa hácia la parte *A* el mismo arco *IK*, éste pasará por encima del arco *HI*, pues el radio *ID* que traza este arco es menor que *EK*, y así el círculo que traza cada radio toca la curva dentro y fuera, y la corta en un solo punto.

321 De todo esto se deduce que cada punto de la evoluta es el punto de concurso de dos líneas infinitamente próxîmas perpendiculares sobre la línea que traza el hilo. Por exemplo, el punto *D* es el punto de concurso de dos rectas *HD*, *ID* infinitamente próxîmas y perpendiculares á la curva *AL*.

322 *Toda línea curva de qualquier naturaleza que sea puede considerarse como línea producida de otra curva que es su evoluta.* Porque como no hay curva alguna en la que no se puedan tirar tangentes en todos sus puntos, no se puede dar punto alguno de una curva, en la qual no se pueda levantar una perpendicular; y por tanto, no siendo paralelas entre sí las perpendiculares que se levanten en los diversos puntos de una curva, se han de encontrar precisamente; luego si concebimos que estas per-

pendiculares estén infinitamente próxîmas, todos los puntos de concurso de cada dos perpendiculares infinitamente próxîmas formarán otra curva, que será su evoluta, y las perpendiculares serán los radios osculadores. Fig.

La curvatura de la línea AL (317) *disminuye al paso que se desvia del punto de orígen* A: porque una vez que el radio *BG* del arco *AG* es menor que el radio *GC* del arco *GH*, el arco *GA* ha de ser mas curvo que el arco *GH*, y así de los demas arcos.

323 Qüestion I. *Hallar una expresion general para el radio de la evoluta quando las ordenadas son perpendiculares al exe.*

Sea una curva qualquiera *AMm*, que supondrémos 87
conocida, y á la qual se quiera tirar una tangente á un punto qualquiera *M*, y supongamos que su exe sea la recta *AB*, á la qual las ordenadas son perpendiculares; por el punto *M* tírese la ordenada *MP*; y por otro punto *m* infinitamente próxîmo al primero otra ordenada *mp*, y en los extremos del arco *Mm* levántense las perpendiculares *MC*, *mc*, que se encuentren en un punto *C*, y por este punto tírense la *CB* perpendicular al exe, y la *CE* paralela á él, que encuentre las ordenadas prolongadas en los puntos *E*, *e*; tírese la *MR* paralela al exe. Y sea $AP = x$, $MP = y$, la incógnita $ME = z$, $Mm = du$, y $MC = r$; con lo que será $Ee = Pp = MR = dx$, $Rm = dy = dz$, y $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Los triángulos rectángulos *MRm*, *MEC* son semejantes por tener sus lados perpendiculares, y de ellos sacarémos la siguiente proporcion $MR : Mm :: ME : MC$, ó $dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} :: z : MC = \ldots\ldots\ldots \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Pero el punto *C* donde concurren las perpendiculares *MC*,*mC* es un punto de la evoluta; y como ademas estas perpendiculares son iguales, la diferencial de $MC = d\left(\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}\right) = 0$; y así diferenciando

 es-

esta expresion, considerando dx constante, tendrémos $\frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyd^2y}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=0$, que multiplicando por el denominador haciendo la transposicion necesaria y despejando z, sale $z=\frac{dzdx^2+dzdy^2}{-dyd^2y}=\frac{dx^2+dy^2}{-d^2y}=ME$; poniendo por dz su igual dy, y substituyendo por z este valor en $\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}=MC$, tendrémos $MC=$............

$$\frac{(dx^2+dy^2)\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}.$$

Consideraciones.

324 Si suponemos $Mm=du$ constante la diferencial de $MC=\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$, será $\frac{dzdx\sqrt{(dx^2+dy^2)}-zddx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx^2}$ $=0$, que nos da $z=\frac{dzdx}{ddx}$, ó por ser $dy=dz$; $z=\frac{dydx}{ddx}=ME$, cuyo valor substituido en el de MC, nos da $MC=r=\frac{dy\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$.

Y por último si consideramos dy constante, y las demas diferenciales variables, la diferencial de $MC=\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$ se transformará en $\frac{dzdx^3+dzdxdy^2-zddxdy^2}{dx^2\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ $=0$, que nos da $z=\frac{dzdx^3+dzdxdy^2}{dy^2+ddx}=\frac{dx^3+dxdy^2}{dyd^2x}=ME$, cu-

yo valor substituido en el de MC nos da $MC=r=$ Fig.
$\frac{(dx^2+dy^2)\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dyddx}$. De todas estas expresiones que hemos encontrado para el radio de curvatura solo usarémos la que nos ha resultado de suponer dx constante; pero nunca estará por de mas el que los jóvenes sepan las otras por lo que pueda ocurrirles.

325 Qüestion II. *Encontrar el radio de curvatura de la parábola vulgar* AD. 87

Tómense en la curva dos puntos M y m infinitamente próxîmos, y levántense en ellos las perpendiculares ME, mC; tírese la ordenada MP, que prolongada encuentre en un punto E la recta EC paralela al exe AB, y sea el parámetro $=a$, $AP=x$, y $PM=y$. Por la propiedad de la parábola será $y^2=ax$; $2ydy=adx$; $ydy=\frac{adx}{2y}$, ó poniendo por y su valor $\sqrt{(ax)}$; $dy=\frac{adx}{2\sqrt{(ax)}}$; y volviendo á diferenciar esta expresion, considerando dx constante $ddy=\frac{-adx^2}{4x\sqrt{(ax)}}$.

Si en la expresion del radio MC substituimos por ddy y dy^2 sus valores, tendrémos $MC=r=\frac{(dx^2+dy^2)\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-ddy}$ $=\left(dx^2+\frac{adx^2}{4x}\right)\times\sqrt{\left(dx^2+\frac{adx^2}{4x}\right)}\times\frac{4x\sqrt{(ax)}}{adx^3}=$.........
$\frac{(4xdx^3+adx^3)\times\sqrt{(4x+a)}\times 4x\sqrt{(ax)}}{8axdx^3\sqrt{x}}=\frac{(4x+a)\times\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{a}}$, ó multiplicando los dos términos del quebrado por $a\sqrt{a}$ $r=\frac{(4x+a)\times(\sqrt{(4x+a)})\times a\sqrt{a}}{2a\times\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{(4ax+a^2)\times\sqrt{(4ax+a^2)}}{2a^2}$; pero en el triángulo rectángulo MPQ, $(MQ)^2=(MP)^2+(PQ)^2$,

$(PQ)^2$, ó por ser $MP = y^2 = px$; la subnormal $PQ = \frac{1}{2}a$; si llamamos N la normal será $(N)^2 = ax + \frac{1}{4}a^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{4ax+a^2}{4}$; y extrayendo la raiz quadrada $N = \ldots\ldots$ $\frac{\surd(4ax+a^2)}{2}$, ó $2N = \surd(4ax+a^2)$, que elevando al cubo sale $8N^3 = (\surd(4ax+a^2))^3 = (4ax+a^2)^{\frac{3}{2}} = (4ax+a^2) \times \surd(4ax+a^2)$; y dividiendo por $2a^2$, sale por último $\frac{8N^3}{2a^2} = \frac{(4ax+a^2)\times\surd(4ax+a^2)}{2a^2} = r$; esto es, $r = \frac{8N^3}{2a^2} = \frac{N^3}{\frac{1}{4}a^2}$, que nos manifiesta que el radio osculador de la parábola es igual al cubo de la normal partido por el quadrado del semiparámetro.

326 Qüestion III. *Hallar el radio osculador de la elipse vulgar.*

Sea a el exe mayor de la elipse, el parámetro $= b$, la abscisa igual x, y la ordenada y; por la naturaleza de esta curva (147) será $y^2 = \frac{b}{a}(ax - x^2)$, é $y = \ldots$ $\frac{\surd(abx-bx^2)}{\surd a}$, la diferencial primera de esta equacion es $dy = \frac{abdx - 2bxdx}{2\surd(a^2bx - abx^2)}$, y la diferencial segunda considerando dx constante, $ddy = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{-a^3b^2dx^3}{(4a^2bx - 4abx^2)\surd(a\,bx - abx^2)}$. Substituyendo los valores de dy, dy^2 y ddy en la fórmula $r = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{(dx^2+dy^2)\times\surd(dx^2+dy^2)}{-dxddy}$; tendrémos $MC = r = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\times\surd(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - abx^2)}{2a^3b^2}.$$

Los

Los triángulos semejantes MRm, MPQ nos dan Fig.
$MR : Mm :: MP : MQ$, ó $dx : \surd(dx^2 + dy^2) :: y : MQ$ $= \frac{y\surd(dx^2+dy^2)}{dx} = \frac{\surd(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - abx^2)}{2a}$, despues de substituir por y y dy^2 sus valores: que nos manifiesta que el numerador de $MC = r$ es el cubo del numerador de $MQ = N$; de suerte que si elevamos al cubo MQ tendrémos una fraccion que tendrá por numerador el mismo que MC, y por denominador $8a^3$; y por tanto tendrémos $MC = r = \frac{(MQ)^3}{\frac{2a^3b^2}{8a^3}} = \frac{4N^3}{b^2}$, que nos dice *que el radio osculador de la elipse es igual á quatro veces el cubo de la normal partido por el quadrado del parámetro.*

Si la elipse tuviese sus exes iguales como en este caso sería $N = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$ la expresion del radio osculador, se transformaría en $r = \frac{4}{8}\frac{b^3}{b^2} = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a$, lo que nos da á conocer que en el círculo el radio osculador es la mitad del diámetro.

327 Qüestion IV. *Hallar la expresion del radio de curvatura de la hipérbola, cuyo exe sea* a, *el parámetro* b, *la abscisa* x, *y la ordenada* y.

La equacion de esta curva es $y^2 = \frac{b}{a}(ax + x^2)$, que solo difiere de la elipse en el signo del segundo término que allí era negativo, y aquí es positivo; y así los valores de $MC = r$, y $MQ = N$ serán los mismos que en la elipse, haciendo todos los términos positivos, y por tanto dirémos que el *radio osculador de la hipérbola es igual á quatro veces el cubo de la normal partido por el quadrado del parámetro.*

328 Qüestion V. *Hallar la expresion del radio de* 88
curvatura de la cicloyde vulgar.

La

La equacion de esta curva (256) es $dz = \dots\dots \frac{dx\sqrt{(2a-x)}}{x}$; cuya diferencial considerando dx constante es $ddz = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax-x^2)}}$; la expresion del radio de curvatura es $\frac{(dx^2+dy^2)\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy} = \dots\dots \frac{(dx^2+dz^2)\sqrt{(dx^2+dz^2)}}{-dxddz}$, y por ser z la ordenada de la cicloyde. Substituyendo en esta última expresion por dz^2, ddz sus valores, tendrémos $r = \dots\dots$

$$\frac{(dx^2+dx^2\times\frac{2a-x}{x})\times\sqrt{(dx^2+dx^2\times\frac{2a-x}{x})}}{\frac{+adx^3}{x\sqrt{(2ax-x^2)}}} = \dots\dots$$

$$\frac{\left(\frac{dx^2(x+2a-x)}{x}\times\frac{\sqrt{(dx^2(x+2a-x))}}{x}\right)}{adx^3}\times x\sqrt{(2ax-x^2)} =$$

$$\frac{\frac{2adx^3}{x}\times\sqrt{(\frac{2a}{x})}\times x\sqrt{(2ax-x^2)}}{adx^3} = 2\sqrt{\frac{2a}{x}})\times\sqrt{(2ax-x^2)}$$

$= 2\sqrt{(\frac{4a^2x}{x} - \frac{2ax^2}{x})} = 2\sqrt{(4a^2-2ax)}$, y esta es la expresion del radio de curvatura de la cicloyde vulgar de la que sale $\frac{1}{2}r = \sqrt{(2a(2a-x))}$; cuya expresion nos dice que el radio de curvatura de la parábola vulgar es medio proporcional entre el diámetro $2a$ del círculo generador, y la abscisa $2a-x$.

Luego si desde un punto M de la cicloyde DBD' se tira á su exe GB la ordenada MP que encuentre en H el círculo generador GHB; y se tira la cuerda GH, siendo $GB=2a$, y $BP=x$ (párrafo citado), será $GH=\sqrt{(GB\times GP)} = \sqrt{(2a\times(2a-x))} = \sqrt{(4a^2-2ax)} = \frac{1}{2}r$; y por tanto será $r=2GH$; pero si suponemos que otro círculo generador DC igual al primero trae con su movimiento de rotacion otra semicicloyde AD, ésta será igual á la otra semicicloyde DB; y si sobre el círculo CD tomamos $DL=GP$, y tiramos la ordenada LN, y la cuerda DF, ésta cuerda será igual á GH, y por consiguiente igual á la mitad del radio de curvatura; pero DF es la mitad del arco correspondiente DN (255); luego este arco DN es igual al radio de curvatura, y como el hilo desenvuelto MN es igual al arco DN sobre que estaba ceñido; MN es el radio de curvatura, y DA la evoluta de DB, que nos enseña *que las evolutas de la cicloyde son otras cicloydes de las mismas dimensiones que ella.*

CAPITULO XIV.

Del cálculo integral.

329 Habiendo tratado en los dos capítulos anteriores la primera parte del cálculo infinitesimal y sus aplicaciones, nos resta tratar de la segunda, esto es, del cálculo integral, que es el que nos enseña á restituir á su estado primitivo todas aquellas cantidades que el cálculo diferencial descompuso en sus elementos; esto es, *dadas las diferenciales de las cantidades, ó ya sean los signos con que se expresan, conocer por medio de ellos las cantidades de donde provienen.* De esta difinicion se infiere, que si con las diferenciales practicamos operaciones contrarias á aquellas que hemos seguido quando las hemos determinado, tendrémos las cantidades de donde han provenido; de modo que si expresamos por este signo S la integral de las cantidades, tendrémos $S\,dx=x$, $S.(adx+dz+ndy)=ax+z+ny+c$, añadiendo á la integral que da el cálculo una cantidad constante c por si acaso en la diferenciacion se omitió; pues si esto sucedió no pue-

puede salir completa la integral si no se le añade. El valor constante c, le determinan las circunstancias de la qüestion, como á su tiempo se verá: por la misma regla hallarémos que $S(xdy+ydx)=xy$; (241)....
$S\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)=\frac{x}{y}$ (242); $S\left(\frac{-adx}{x^2}\right)=\frac{a}{x}$; $S\left(\frac{dx}{a}\right)$
$=\frac{x}{a}$; $S(max^{m-1}dx)=\frac{max^{m-1+1}}{m-1+1}=ax^m$ (240).

230 Este último exemplo nos dice, que para integrar aquellas cantidades, cuya variable esté elevada á una potencia qualquiera, se aumente una unidad á su exponente, se suprima el factor dx, y lo restante se divida por el exponente despues de aumentada la unidad, y lo que resulta es la integral que se busca; y así

$$S(3x^2dx)=\frac{3x^3}{3}=x^3;\ S\left(\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\right)=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}.$$

331 Pero esta regla no es tan general que no admita alguna restriccion; porque si en virtud de lo dicho queremos integrar la expresion $x^{-1}dx$, la integral será $\frac{x^{-1+1}}{-1+1}=\frac{x^0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$, que no nos da á conocer cosa alguna. Y así las expresiones de esta naturaleza no pueden integrarse por la regla general que hemos sentado; pero si consideramos que $x^{-1}dx=\frac{dx}{x}$, esto es, que dicha expresion es un quebrado que tiene por numerador la diferencial del denominador, inferirémos fácilmente que su integral será el logaritmo del denominador (243), y que las expresiones de esta forma se deben integrar por logaritmo así:

$S\left(\frac{dx}{x}\right)=Lx+c$; $S\left(\frac{dx}{a+x}\right)=L(a+x)+c$; ......

$S\left(\frac{2xdx}{a^2+x^2}\right)=L(a^2+x^2)+c$; $S\left(\frac{adx-2xdx}{ax-x^2}\right)=L(ax-x^2)$ $+c$. Para interpretar $\frac{dx}{xlx}$ nos valdrémos de las substituciones, haciendo $lx=y$, con lo que tendrémos diferenciando esta última equacion $\frac{dx}{x}=dy$, y $\frac{dx}{xlx}=\frac{dx}{x}\times\frac{1}{lx}=dy\times\frac{1}{y}=\frac{dy}{y}$; cuya integral es ly, pero $y=lx$; luego $S.\frac{dx}{xlx}=L.lx$; del mismo modo para integrar $m(Lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$ harémos tambien $lx=y$, con lo que tendrémos $\frac{dx}{x}=dy$; $(Lx)^{m-1}=y^{m-1}$; y haciendo las substituciones correspondientes $m(Lx)^{m-1}\frac{dx}{x}=my^{m-1}dy$; pero la integral de esta última cantidad es y^m. Luego $Sm(Lx)^{m-1}\frac{dx}{x}=(Lx)^m$, habiendo substituido por y su valor Lx.

$S.c^x dx=c^x$; $S.(x^y dyl.x+x^{y-1}ydx)=x^y$ (247).

332 Si llamamos a el radio de un círculo, y u un arco qualquiera, t la tangente, y' z la secante será........
$S\left(\frac{ad.\ \text{sen.}\ u}{\text{cosen.}\ u}\right)=u$; $S\left(\frac{-ad.\ \text{cos.}\ u}{\text{sen.}\ u}\right)=u$; $S\left(\frac{ad.\ \text{sen. vers.}\ u}{\text{sen.}\ u}\right)=u$;
$S\left(\frac{a^2dt}{r^2+t^2}\right)=u$, y $S\left(\frac{a^2dz}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}\right)=u$.

333 Si todas las catidades que se han de integrar proviniesen de una diferenciacion exâcta, desde luego nos sería fácil su integracion practicando alguna de las reglas que dexamos explicadas; pero son pocas las cantidades que admiten una integracion exâcta; por lo que los analistas se han visto precisados á inventar algunas reglas, á fin de conseguir por ellas unas integrales aproxîmadas, ya que no les fuese posible conocer las verdaderas.

Estas reglas son tres: la primera enseña á convertir la cantidad propuesta en una serie que sea muy convergente, y que en todos sus terminos tenga la diferencial de la variable; pues tomando de éstos aquel número de términos que convengan al intento del calculador, tendrá un polinomio que se integrará del modo dicho (329). La segunda consiste en transformar la diferencial propuesta en otra expresion compuesta de dos factores, que el uno sea constante y el otro un quebrado, cuyo numerador sea la diferencial del denominador para integrarla por logaritmos.

La tercera regla se reduce á dar á la expresion tal forma, que descompuesta en dos partes, la una sea constante, y la otra tenga por integral un arco de círculo; pues de este modo será fácil integrarla (332). Explicarémos cada una de estas reglas en particular.

334 *Regla I.* Las cantidades cuya integracion aproxîmada depende de una serie infinita son todas aquellas que tienen, ó que se las puede reducir á esta forma $dx(a+x)^n$, siendo n un quebrado positivo ó negativo, ó un número entero negativo; porque quando n es un número entero positivo, elevando el binomio á la potencia que expresa su exponente, tendrémos un polinomio finito, cuyos términos multiplicados por dx serán integrales cada uno de por sí, por exemplo; si hacemos $n=3$, será $S.\,dx(a+x)^n = S.dx(a+x)^3 = S.\,dx(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3) = S(a^3dx+3a^2xdx+3ax^2dx+x^3dx) = a^3x+\frac{3a^2x^2}{2}+ax^3+\frac{x^4}{4}$; pero si fuese $n=-2$, en este caso sería $S.\,dx(a+x)^n = S.dx\times(a+x)^{-2} = S.\,dx(a^{-2}-2a^{-3}x+3a^{-4}x^2-3a^{-5}x^3+\&c.) = S\,dx\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2x}{a^3}+\frac{3x^2}{a^4}-\frac{3x^3}{a^5}, \&c.\right) = S\left(\frac{dx}{a^2}-\ldots\ldots\frac{2xdx}{a^3}+\frac{3x^2dx}{a^4}-\frac{3x^3dx}{a^5}+, \&c.\right) = \frac{x}{a^2}-\frac{x^2}{a^3}+\ldots\frac{x^3}{a^4}-\frac{3x^4}{4a^5}+\&c.$, que es una integral aproxîmada.

Lo

Lo mismo sucede si se hace $n=\frac{1}{2}$; porque entónces $S.dx(a+x)^n = S.\,dx(a+x)^{\frac{1}{2}} = S.dx(a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}x+\frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}x^2-\frac{1}{16}a^{-\frac{5}{2}}x^3+\&c.) = S.\,dx(a^{\frac{1}{2}}-\ldots\ldots\frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^2}{8a^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^3}{16a^{\frac{5}{2}}}+\&c.) = S.(a^{\frac{1}{2}}dx-\ldots\frac{xdx}{2a^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^2dx}{8a^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^3dx}{16a^{\frac{5}{2}}}+\&c.) = a^{\frac{1}{2}}x-\frac{x^2}{4a^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^3}{24a^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^4}{64a^{\frac{5}{2}}}+\&c.$, que tambien es una integral aproxîmada.

335 A esta primera regla corresponde tambien la integral de aquellas expresiones que tienen ó puede dárseles esta forma $x^pdx\times(a+bx^n)^m$, siendo p, m, n exponentes indeterminados: para integrar esta expresion hagamos $a+bx^n=u$, siendo u una variable qualquiera, con lo que tendrémos $x^n=\frac{u-a}{b}$, y $x=\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; $dx=\frac{1}{n}\times\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}du = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(u-a)^{\frac{1-n}{n}}du}{nb^{\frac{1}{n}}}$ (240), y $x^p=\frac{(u-a)^{\frac{p}{n}}}{b^{\frac{p}{n}}}$. Luego.....

$$x^pdx(a+bx^n)^m = \frac{(u-a)^{\frac{p}{n}}}{b^{\frac{p}{n}}}\times\frac{(u-a)^{\frac{1-n}{n}}}{nb^{\frac{1}{n}}}\times u^mdu = \ldots$$

$\frac{(u-a)^{\frac{p+1-1}{n}}}{nb^{\frac{p-1}{n}}}u^mdu$: en esta última expresion el

de-

denominador es una cantidad constante, y por consiguiente será integrable algebráycamente siempre que el exponente $\frac{p+1-1}{n} = \frac{p+1}{n} - 1$ de la potencia á que está elevado el binomio $u-a$ sea un número entero positivo ó negativo; porque siendo positivo, con elevar $u-a$ á la potencia $\frac{p+1}{n} - 1$, saldrá un polinomio finito, que multiplicado por $u^m du$, é integrado despues, tendrémos la integral que se pide; pero el exponente $\frac{p+1}{n} - 1$ será un número entero siempre lo sea $\frac{p+1}{n}$; y como p es el exponente de x, fuera del paréntesis, y n el exponente que tiene dentro, dirémos que toda diferencial como $x^p dx\,(a+bx^n)^m$ tendrá integral exâcta quando el exponente de la variable fuera del paréntesis aumentado de una unidad sea divisible por el exponente que tiene la variable dentro del paréntesis. Quando el exponente $\frac{p+n}{n} - 1$ es un número entero negativo, entónces la expresion muda de forma con pasar el binomio al denominador con un exponente de signo contrario; pero si dicho exponente no es número entero, entónces se convierte el binomio en serie, y se integra por aproxîmacion: apliquemos la fórmula para integrar algunas diferenciales, y sea la primera.. .... $x^3dx\left(\sqrt{(a^2-x^3)}\right) = x^3\,dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, cotejando esta expresion con la fórmula $x^p dx(a+bx^n)^m$, tendrémos $p=3, a=a^2, b=-1, n=2, m=\frac{1}{2}$; y por tanto $p+1=4$, que es divisible por el exponente 2; luego la cantidad propuesta es integrable; y así haciendo la substitucion correspondiente en la expresion diferencial......................

$$\frac{(u-a)^{\frac{p-1}{n}-1}\,u^m\,du}{nb^{\frac{p+1}{n}}}$$ se transformará en ....

$$\frac{(u-a^2)^{2-1}\,u^{\frac{1}{2}}\,du}{2} = \frac{(u-a^2)\times u^{\frac{1}{2}}\,du}{2} = \frac{u^{\frac{3}{2}}\,du}{2} - \text{.....}$$

$\frac{a^2u^{\frac{1}{2}}\,du}{2}$, cuya integral es $\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{a^2u^{\frac{3}{2}}}{3} = \text{.........}$

$\frac{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{a^2(a^2-x^2)}{3}$, despues de substituir por u su valor a^2-x^2.

336 Si la cantidad por integrar fuese $x^2dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ como en este caso $p+1$ no es un multiplo al n, la expresion no puede integrarse por la fórmula, y así es preciso integrarla por aproxîmacion convirtiéndola en serie (334). Pero no sucede lo mismo con la diferencial $x^2dx(a^3-x^3)^2$, pues aunque es verífico que en ésta $p+1$ no es multiplo de n, y por tanto no puede integrarse por medio de la fórmula; á causa de ser m un número entero, es integrable algebráycamente elevándola primero á la potencia que expresa su exponente m, que en este caso es 2; multiplicando el polinomio que resulte por x^2dx, é integrando despues cada término de por sí. Este exemplo nos manifiesta que quando tengamos que integrar alguna diferencial binomia, ántes de hacer aplicacion para ello de la fórmula, no estará por demas que exâminemos si el exponente que equivale á m es un número entero; porqùe siéndolo, no hay necesidad de recurrir á la fórmula: todo esto nos hace conocer que la fórmula es limitada, y solo tiene lugar en algunos casos.

337 *Regla II.* Sea en primer lugar $\frac{dx}{a-x}$ la cantidad que se ha de integrar, exâminando con atencion sus partes, echarémos de ver que si el numerador de esta fraccion fuese $-dx$ sería integrable por logaritmos;

porque en este caso el numerador sería la diferencial del denominador (243) ; pero aunque dicha diferencial no tenga la forma necesaria para ser integrable por los logaritmos, se la podemos dar fácilmente con multiplicar sus dos términos por -1 (tom. I. 134); luego $\frac{dx}{a-x} = \frac{-1\times dx}{-1(a-x)} = \frac{1}{-1}\times\frac{-dx}{a-x}$; y por tanto

$$S.\frac{dx}{a-x} = S\frac{+1}{-1}\times\frac{-dx}{a-x} = -1\times S\frac{-dx}{a-x} = -1\times L(a-x) = -L(a-x) = 0-L(a-x)+c, L1-L(a-x)$$

(tom. I. 289) $= L\frac{1}{a-x}$.

337 Sea en segundo lugar $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$ la cantidad por diferenciar, por quanto la diferencial del denominador es $3x^2dx$, cotejando esta cantidad con el numerador de la fraccion, echarémos de ver que para que ésta sea la diferencial del denominador le falta el factor 3, y le sobra el factor a; luego si multiplicamos sus dos términos por 3, y separamos la a, tendrémos.................. $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3} = \frac{3ax^2dx}{3(a^3+x^3)} = \frac{a}{3}\times\frac{3ax^2dx}{a^3+x^3}$; pero de estos dos factores en que se ha descompuesto la fraccion, el uno tiene por integral el logaritmo del denominador, luego $S.\frac{ax^2dx}{a^3+x^3} = \frac{a}{3}\ L(a^3+x^3)+c$.

Siguiendo la misma regla dirémos que $S.\frac{xdx}{a^2+x^2} = S.\frac{1}{2}\times\frac{2xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}L(a^2+x^2)+c = L(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+c = L.\sqrt{(a^2+x^2)}+c.\ \left(\frac{ax^{n-1}dx}{h+bx^n}\right) = S.\frac{a}{bn}\times\frac{nbx^{n-1}dx}{h+bx^n} = \frac{a}{bn}\times L(h+bx^n)+c$ &c.

338 *Regla III.* Propongámonos integrar la expresion $\frac{2adx}{\sqrt{(4x-x^2)}}$; si á esta diferencial le damos la siguiente forma $\frac{a}{1}\times\frac{2dx}{\sqrt{(4x-x^2)}}$, echarémos de ver que $\frac{a}{1}$ es una cantidad constante, la qual no tiene integral; y el otro factor es la diferencial de un arco de círculo, cuyo seno verso es x, el radio 2, y el seno $\sqrt{(4x-x^2)}$; luego si en un círculo qualquiera, cuyo radio AC sea igual 89 á 2 tomamos $AP=x$ será $PM=\sqrt{(4x-x^2)}$, y el arco AM será la integral de $\frac{2dx}{\sqrt{(4x-x^2)}}$: luego $S.\frac{2adx}{\sqrt{(4x-x^2)}} = S.\frac{a}{1}\times\frac{2dx}{\sqrt{(4x-x^2)}} = \frac{a}{1}\times S.\frac{2dx}{\sqrt{(4x-x^2)}} = a\times$ arco $AM+c$ (248).

Fig.

339 Solo nos resta conocer el valor del arco AM para cumplir con la qüestion; para ello restarémos de AC, que es el radio, el seno verso $AP=x$, y nos saldrá CP; con lo qual en el triángulo rectángulo CMP tendrémos conocidos los lados CP y CM, y así nos será fácil conocer el ángulo ACM; conocido este ángulo, dirémos luego 360° es á la longitud de toda la circunferencia referida al diámetro, como el número de grados del ángulo ACM á la longitud del arco AM que le mide.

340 Sea $\frac{mdx}{\sqrt{\left(n^2-\frac{x^2}{b}\right)}}$ la cantidad por integrar. Comparándola con la expresion $du = \frac{-adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ ..... (248), que es la diferencial del arco de un círculo, cuyo coseno es x, tendrémos que para darle la misma forma y poderla integrar por arcos de círculo quitarémos primeramente la m del numerador, y multiplicarémos sus dos términos por -1; con lo que se transformará en $-\frac{m}{1}\times\frac{-dx}{\sqrt{\left(n^2-\frac{x^2}{b}\right)}}$: hecho esto multipli-

plicarémos sus dos términos por $\sqrt{b}$, y tendrémos $-m\sqrt{b} \times \frac{-dx}{\sqrt{(bn^2 - x^2)}}$. Y por último multiplicando el numerador y denominador por $\sqrt{(n^2 b)}$, sale $\frac{mdx}{\sqrt{\left(n^2 - \frac{x^2}{b}\right)}} = \frac{-m\sqrt{b}}{\sqrt{(n^2 b)}} \times \frac{\sqrt{(n^2 b)}dx}{\sqrt{(bn^2 - x^2)}}$; pero de las dos partes que componen esta expresion, la una es una cantidad constante, y la otra la diferencial de un arco de círculo con relacion á su coseno x; luego si llamamos u este arco, será $S. \frac{mdx}{\sqrt{\left(n^2 - \frac{x^2}{b}\right)}} = -\frac{m\sqrt{b}}{\sqrt{(n^2 b)}} \times$ ....

$S. \frac{\sqrt{(n^2 bdx)}}{\sqrt{(bn^2 - x^2)}} = \frac{-m\sqrt{b}}{\sqrt{(n^2 b)}} \times u$. Y como dado el coseno $CP = x$, y el radio, que siempre ha de ser conocido para estas integrales, es conocido tambien $MP = \sqrt{(BP \times PA)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ no hay dificultad en conocer el arco $AM = u$.

341 Todo esto nos manifiesta que hay diferenciales de tal naturaleza que se las puede integrar por arcos de círculo con solo multiplicar ó partir (segun lo exîgen las circunstancias) los dos términos de la fraccion que la expresa por una misma cantidad hasta transformarla en otra, que conservando el mismo valor, se componga de dos factores tales, que el uno sea constante, y el otro la diferencial de un arco de círculo de radio conocido con relacion á una línea trigonométrica, sea el seno coseno, &c.: esto que hemos practicado respecto del seno verso y coseno (338 y sigg.) es aplicable á las demas líneas trigonométricas.

Aplicaciones del cálculo integral.

Habiendo explicado ya el modo de integrar las cantidades diferenciales, nos resta tratar de la aplicacion ó uso de estas reglas en la quadratura de las superficies, rec-

Fig.

rectificacion de las líneas curvas, y medida de las solideces y superficies de los sólidos de revolucion.

342 Así como las líneas tienen sus incrementos ó diferenciales señalados por dx ó dy, &c. los tienen tambien las 90
superficies y los sólidos: si concebimos, por exemplo, que el triángulo ABC crezca ó mengüe á cada instante el pequeño trapecio $PMmp$, cuya altura Oo sea infinitamente pequeña, este trapecio se llama *diferencial ó elemento del triángulo*, y el triángulo se dice que es la integral del trapecio. Del mismo modo si imaginamos el sólido AD compuesto de una infinidad de hojas, como MN 91
de un grueso infinitamente pequeño, dicha hoja es la diferencial del sólido, y el sólido la integral de la hoja.

Aplicacion del cálculo integral para quadrar las superficies planas curvilíneas.

343 Qüestion I. *Quadrar el triángulo rectilíneo ABC.* Aunque el triángulo no sea una superficie curvilínea, y que ademas su area se halla fácilmente por la Geometría Elemental, no obstante esto darémos principio á la aplicacion del cálculo por esta figura, á fin de que la sencillez de este exemplo haga comprehender mejor á los principiantes la evidencia de este método.

Supongamos que las areas se empiecen á contar desde el vértice A: por un punto O de la altura AF tírese la MP paralela á la base, é infinitamente próxima 90
á ésta la mp; con lo que resultará el trapecio $PpmM$, que por su pequeñez se podrá considerar como un rectángulo, el qual es la diferencia del triángulo APM al triángulo Apm; y por tanto es la diferencial del triángulo APM, ó lo que es lo mismo, el triángulo APM es la integral del trapecio $PpmM$; y así hemos de hallar la expresion del trapecio diferencial, y su integral será el triángulo PAM, que una vez hallada esta parte, no tiene dificultad conocer el triángulo total.

344 Para manifestar como esto se hace, sea $AF = a$, $BC = b$, $AO = x$, y la doble ordenada $PM = y$, será

 $Oo =$

$Oo=dx$, y el trapecio $PpmM=PM\times Oo=ydx$, é $Sydx=PAM$; pero como esta cantidad no proviene de una diferenciacion exâcta, no puede integrarse ínterin no se substituya por y su valor en cantidades de x tomada de la naturaleza del triángulo; pues siendo PM paralela á BC, son $AO : PM :: AF : BC$, ó $x : y :: a : b$, de donde sale $y=\frac{bx}{a}$; y substituyendo este valor en la expresion ydx, tendrémos $ydx=\frac{bxdx}{a}$, y por consiguiente $PpmM=\frac{bxdx}{a}$, y $S.PpmM=\frac{bx^2}{2a}$; ó suponiendo $x=a$, $S.PpmM=\frac{ba}{2}=a\times\frac{1}{2}b=AF\times\frac{1}{2}BC$, que es el mismo resultado que se encontró por la Geometría Elemental (tom. I. 433).

345 Pero como el trapecio $PpmM$ es elemento ó diferencial del triángulo APM, y tambien lo es de otro espacio superficial qualquiera $LKMP$; para proceder con toda seguridad en esta materia nos es indispensable añadir al resultado que da el cálculo alguna cantidad constante; si á ésta la llamamos c, será $S.\ PpmM=\frac{bx^2}{2a}+c$.

346 El valor de la constante c se deduce de las circunstancias de la qüestion que se resuelve, procurando dar á la variable x un valor tal que reduzca á cero el primer miembro de la equacion; porque es evidente que si en la equacion $S.\ PpmM=\frac{bx^2}{2a}+c$, el primer miembro se reduce á cero con hacer $x=n$, siendo n una cantidad qual se requiere, la equacion se transformará en $o=\frac{bn^2}{2a}+c$, la que nos da $c=\frac{-bn^2}{2a}$, é $S.PpmM=\frac{bx^2}{2a}-\frac{bn^2}{2a}$; habiendo substituido por c su valor. Esta regla es general para todas las integrales, y así á todas las que da el cálculo se debe añadir la constante c por si acaso la necesitare, á no ser que por los datos de la misma qüestion se sepa no hay necesidad de ella, como sucede en la medicion de nuestro triángulo quan-

do se cuentan los espacios desde el vértice; pues en este caso para que $S.\ PpmM=PAM$ sea cero es preciso hacer $x=o$, cuyo supuesto reduce la equacion á $o=o+c$, que da $c=o$, lo que nos da á conocer que en este caso no hay necesidad de la constante, pues nada vale.

347 Pero si contamos los espacios desde una recta qualquiera LK, y llamamos e la distancia At á que está del vértice A, es claro que para que $S.PpmM=LPMK$ sea cero, basta hacer $x=e$, con lo que tenemos $o=\frac{be^2}{a}+c$, y $c=\frac{-be^2}{a}$; este valor substituido por c en la equacion, la reduce á $LPMK=\frac{bx^2}{2a}-\frac{be^2}{2a}$, ó haciendo $x=a$, para tener la superficie de todo el trapecio $LBCK=\frac{ba^2}{2a}-\frac{be^2}{2a}=\frac{ba}{2}-\frac{be^2}{2a}=a\times\frac{1}{2}b-c\times\frac{1}{2}\frac{bc}{a}$; ó por ser $\frac{bc}{a}=LK$, como se deduce de la proporcion $AF : BC :: AT : LK$, ó $a : b :: e : LK=\frac{be}{a}$; es $LBCK=a\times\frac{1}{2}b-e\times\frac{1}{2}LK=AF\times\frac{1}{2}BC-At\times\frac{1}{2}LK=$ al triángulo $ABC-$ el triángulo $ALK=(AF-At)\times\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}LK=tF\times\frac{BC+LK}{2}$, que tambien es la misma expresion que da la Geometría (tom. I. 448); por lo que se evidencia que los resultados del cálculo son ciertos.

348 Qüestion II. *Quadrar la area parabólica* ABC. 92

Tírese la ordenada pm infinitamente próxima á PM, y sea $BA=a$, $AC=b$, $BP=x$, y $PM=y$, y el parámetro $=p$; con lo qual será $Pp=dx$, y el pequeño trapecio, ó elemento $PMmp=ydx$ (pues estando las ordenadas MP, mp infinitamente próxîmas, su diferencia ha de ser despreciable, y por tanto el trapecio $PMmp$ ha de mirarse como un rectángulo). La equacion de la parábola vulgar es $y^2=px$, de donde sale $y=\sqrt{(px)}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; este valor de y substituido en la expresion ydx, nos da

Fig.

$PMmp = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$; é integrando $S.PMmp = BMP =$ $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x$, ó poniendo por $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ su valor y; $BMP = \frac{2}{3} yx + c$, que es la expresion del segmento parabólico BPM.

349 Para hallar el de todo el espacio ABC harémos $x = a$, con lo que será $y = b$, y $ABC = \frac{2}{3} ab + c = \frac{2}{3} AB \times AC + C$, cuyo resultado nos manifiesta que el espacio parabólico ABC *es igual á los dos tercios del rectángulo* ABCD *formado sobre las ordenadas, mas una cantidad indeterminada* C. Para conocer esta cantidad considerarémos que quando $x = a = 0$ (346), la equacion $ABC = \frac{2}{3} ab + C$ se transforma en $0 = 0 + C$, que da $C = 0$: luego quando el espacio parabólico se cuente desde el vértice B, el valor de la constante C es nulo.

350 Pero si el espacio parabólico lo contásemos desde una recta HR paralela á AC, y hacemos $BH = n$, y $HR = s$ la cantidad ABC, será en este caso $HACR$, y la equacion se reducirá á $HACR = \frac{2}{3} ab + C$. Para que el primer miembro sea cero basta hacer $x = a = n$, con lo que será $y = b = s$, y la equacion se transformará en $0 = \frac{2}{3} ns + C$, de donde sale $C = -\frac{2}{3} ns$; cuyo valor substituido en la equacion, nos da $HACR = \frac{2}{3} ab - \frac{2}{3} ns = \frac{2}{3} AB \times AC - \frac{2}{3} BH \times HR$.

Me parece que en esta qüestion y en la anterior he dicho lo suficiente sobre las reglas que se deben observar para determinar el valor de la constante C, de cuyo punto me desentenderé en las qüestiones siguientes.

93 351 Qüestion III. *Hallar la quadratura del círculo.* Sea $AB = 1$, $AP = x$, y $PM = y$; la equacion del círculo será $y = \sqrt{(x - x^2)}$ (149), y multiplicando por dx; $ydx = dx\sqrt{(x - x^2)} = dx(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$; y ésta será la expresion de un elemento de la area del círculo, que no siendo integrable algebráycamente, la convertirémos en serie (26);

Fig.

(26); en virtud de lo qual tendrémos $dx(x - x^2)^{\frac{1}{2}} = \ldots$ $dx(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16} x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{144} x^{\frac{9}{2}} - \text{\&c.}) = x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} dx - \frac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} dx - \frac{1}{16} x^{\frac{7}{2}} dx - \frac{1}{144} x^{\frac{9}{2}} dx - \text{\&c.}$; é integrando será $S.ydx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704} x^{\frac{11}{2}}$, &c. $= \sqrt{x} \times (\frac{2}{3} x - \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{18} x^3 - \frac{1}{27} x^4 - \frac{5}{704} x^5$, &c.).

352 Esta serie representa la quadratura indeterminada del segmento AMP; para tener la de todo el semicírculo harémos $x = 1$, y tendrémos $S.ydx = ADB = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{28} - \frac{1}{72} - \frac{5}{704}$.

353 Pero si hacemos el radio $AC = 1$, $CP = x$, y $PM = y$, en este caso será $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ (149); $\sqrt{(1 - x^2)} = 1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 - \frac{7}{256} x^{10}$, &c. $ydx = dx - \frac{1}{2} x^2 dx - \frac{1}{8} x^4 dx - \frac{1}{16} x^6 dx - \frac{5}{128} x^8 dx - \ldots \frac{7}{256} x^{10} dx$, &c.; é integrando $S.ydx = x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 - \frac{1}{112} x^7 - \frac{5}{1152} x^9 - \frac{7}{2816} x^{11}$ &c., que con hacer $x = 1$, tendrémos la superficie del sector $ACD = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. Si la primera serie la multiplicamos por 2, y esta última por 4, qualquiera de ellas nos dará una superficie del círculo, tanto mas aproxîmada quanto sea mayor el número de términos que se tomen.

354 Qüestion IV. *Hallar la quadratura de la elipse.* 94
Sea $AC = a$, $GC = b$, $PC = x$, y $PM = y$, por lo demostrado (148), será $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, é $y = \ldots\ldots$ $\frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; pero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2a}$ —

$$-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\frac{7x^{10}}{256a^9}$$, &c. Luego ydx $=\frac{b}{a}\times dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=bdx-\frac{bx^2dx}{2a}-\frac{bx^4dx}{8a^4}-\frac{bx^6dx}{16a^6}-\frac{5bx^8dx}{128a^8}-\frac{7bx^{10}dx}{256a^{10}}$, &c. y $S.ydx=bx-\frac{bx^3}{6a^2}-\frac{bx^5}{40a^4}-\frac{bx^7}{120a^6}-\frac{5bx^9}{1152a^8}-\frac{7bx^{11}}{2816a^{10}}$, &c.

Y esta es la expresion de la area elíptica *CPMG*. Para hallar el area del quadrante *GCA* harémos $x=a$, y tendrémos $GCA=ab-\frac{1}{6}ab-\frac{1}{40}ab-\frac{1}{112}ab-\frac{7}{1816}ab$, &c., que para tener la superficie de toda la elipse bastará multiplicar por 4.

355 Siendo la equacion de la elipse y .... $=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$, y la del círculo $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$ (148, 149), la diferencial de la area elíptica *CPMG* será $\frac{a}{b}dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, y la del area circular correspondiente *CPKD*, $dx\sqrt{(a^2-x^2)}$; luego $CPMG=\frac{a}{b}S.dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, y $CPKD=S.dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, que comparando una con otra estas expresiones, tendrémos $CPMG:CPKD::b:a$. De donde se deduce, *que la superficie de la elipse es á la superficie del círculo, como el exe menor de la elipse es al exe mayor, que es el diámetro del círculo circunscripto á la elipse.*

356 Luego la quadratura de la elipse depende de la quadratura del círculo; y por tanto para medir una elipse buscarémos primero la superficie del círculo trazado sobre el exe mayor, y dirémos despues que el exe mayor es al exe menor, como la superficie de este círculo es á la superficie de la elipse que se ha de medir: y así expresando por $1:p$ la razon del diámetro á la circunferencia de un círculo, hallarémos la circunferencia de un círculo cuyo radio es a por la siguiente proporcion $1:p::2a:2pa$; y su superficie será $2pa\times\frac{a}{2}=pa^2$. Para hallar la superficie de la elipse dirémos $a:b::pa^2:pab$. Llamemos R el radio de otro círculo de igual superficie que la elipse, su superficie será pR^2, con lo que tendrémos $pab=pR^2$, $ab=R^2$, y $\sqrt{ab}=R$, que nos manifiesta que la superficie de la elipse es igual á la de un círculo, cuyo radio sea medio proporcional entre los dos semiexes de la elipse; y esto nos suministra otro medio para medir la elipse. Luego si en la serie hallada (354) para quadrar la elipse hacemos $\sqrt{ab}=1$, se transformará en $1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}-\frac{5}{1152}-\frac{7}{2816}$ &c., que es la misma serie que hemos hallado para quadrar el círculo (351).

Fig.

357 Qüestion V. *Quadrar la hipérbola* ABD *cuyo centro está en* C, *y el vértice y orígen principal en* A.

Sea pues $AB=x$, $BD=y$, $CA=a$, y el exe conjugado $=b$; la equacion de la elipse será $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$; é $y=\frac{a}{b}\sqrt{(2ax+x^2)}$, por manera que el elemento, ó diferencial hipérbolica será $ydx=\frac{b}{a}dx\sqrt{(2ax+x^2)}$, y $S.ydx=ADB=\frac{b}{a}S.dx\sqrt{(2ax+x^2)}$; pero......... 95

$S.dx\sqrt{(2ax+x^2)}$ es la diferencial, ó elemento de la hipérbola equilátera (179); y como es esta la expresion variable, y la que se debe integrar para conocer la superficie de la hipérbola vulgar, dirémos que la quadratura de esta curva depende de la quadratura de la hipérbola equilátera.

La cantidad $\sqrt{(2ax+x^2)}=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(2a+x)}$ convertida en serie (26) es $=x^{\frac{1}{2}}\Big(\sqrt{(}2a+\frac{x}{2\sqrt{(2a)}}-\frac{x^2}{16a\sqrt{(2a)}}+\frac{x^3}{64a^2\sqrt{(2a)}}-\frac{5x^4}{1024a^3\sqrt{(2a)}}+$ &c. $\Big)$; luego $S.ydx=$...... $\frac{b}{a}S.x^{\frac{1}{2}}dx(2a+x)^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{a}S.\Big(x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(2a)}+\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{(2a)}}$

Fig.

$$-\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a\sqrt{(2a)}}+\frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{64a^2\sqrt{(2a)}}-\frac{x^{\frac{9}{2}}dx}{1024a^3\sqrt{(2a)}}+\&c.\Big)\ldots\ldots$$

$$=\frac{b}{a}\Big(\frac{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2a)}}{3}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{(2a)}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a\sqrt{(2a)}}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{288a^2\sqrt{(2a)}}$$

$$-\frac{5x^{\frac{11}{2}}}{5632a\sqrt{(2a)}},\ \&c.\Big)=\frac{b}{a\sqrt{(2a)}}\Big(\frac{4x^{3}}{3}+\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{5a}+$$

$$\frac{x^{\frac{9}{2}}}{288a^2}-\frac{x^{\frac{11}{2}}}{5632a^3}+\&c.\Big)$$ despues de multiplicar el numerador y denominador del primer término de la serie por $\sqrt{(2a)}$, y sacar esta cantidad fuera del paréntesis, como factor comun que es en todos los denominadores de los términos de la serie, y ésta es la expresion de la area hipérbolica ABD.

Si se nos pidiese la superficie del sector CAD comprehendido entre la curva, la tangente en el punto D, y el semiexe AC, mediríamos el triángulo CBD, y de su superficie restaríamos la parte ABD, y la resta sería la superficie pedida.

96 358 Qüestion VI. *Quadrar la cicloide, ó hallar el espacio cicloidal* ABDA.

Sea $AB=x$, $BD=y$, $AE=2r$, $FC=u$, y el arco $AC=s$. Por la propiedad del círculo será $u^2=AF\times FE=2ry-y^2$; $2udu=2rdy-2ydy$; Y', $du=\frac{rdy-ydy}{u}$.

Tírense las fg y bg infinitamente próxîmas y paralelas á las FD y DB, con lo que será $eg=dy=Cm$, $Cc=ds$; y de los triángulos semejantes COF, Ccm sacarémos $CF : CO :: Cm : Cc$, ó $u : r :: dy : ds=\frac{rdy}{u}$. Pero por la propiedad de la cicloide (253) es $AB=FC+CD=FC+AC$, ó $x=s+u$; Y' $dx=ds+du=\frac{rdy}{u}+\frac{rdy-ydy}{u}=\ldots$

2rdy

$\frac{2rdy-ydy}{u}=\frac{2rdy-ydy}{\sqrt{(2ry-y^2)}}$. Luego $ydx=\frac{2ry-y^2}{\sqrt{(2ry-y^2)}}\times dy=\ldots$ Fig.
$dy\sqrt{(2ry-y^2)}=dy\sqrt{(y-y^2)}$ con suponer $r=1$; pero esta última expresion es la diferencial ó elemento del segmento circular AFC (351); luego la area $ABDA$ es igual al expresado segmento. Para conocer la superficie de la area cicloidal $ADFA$ se medirá el rectángulo $ABDF$, y de su superficie se restará el espacio $ABDA$.

359 Pero si la cantidad por medir fuese el espacio $ADCA$ restaríamos de dicho rectángulo el duplo de la area $ABDA$.

Aplicacion del cálculo integral para rectificar las líneas curvas.

360 Ya que se pueden considerar las líneas curvas como polígonos de una infinidad de lados, esto es, como compuestas de una infinidad de líneas rectas sumamente pequeñas, que forman unas con otras varios ángulos tanto mayores quanto menor es la curvatura, es evidente que se pueden tirar por las extremidades de estas líneas infinitamente pequeñas dos ordenadas que estarán infinitamente próxîmas; y que si por la extremidad de la mas corta de estas ordenadas se tira una perpendicular sobre la otra ordenada, resultará un pequeño triángulo rectángulo, cuya hipotenusa será el pequeño arco, y los catetos las diferenciales de las abscisas y la ordenada; y así por la equacion de la curva se hallará el valor de una de estas diferenciales en funciones de la otra diferencial; y como por la propiedad del triángulo rectángulo el quadrado del pequeño arco ha de ser igual á la suma de los quadrados de las diferenciales de la abscisa y ordenada, extrayendo la raiz de los dos miembros, é integrando, tendrémos la longitud de la curva: este método de medir las líneas curvas es lo que llamamos *rectificacion*.

361 Para aclararlo mejor sea AM una curva qualquiera, y Mm uno de los pequeños arcos que hemos di- 97
cho,

Fig. cho, el qual por su infinita pequeñez le podemos mirar como una línea recta confundido con la tangente; es claro que si por sus extremos M,m baxamos al exe las ordenadas MP, mp, y por el punto M tiramos la Mr perpendicular á mp, y hacemos $AP=x$, $Pm=y$, y $AM=u$, será $Mr=dx$, $mr=dy$, y $Mm=du$, y siendo Mrm un triángulo rectángulo, será $du=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, y $S.du=u=AM=S.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Pero como este segundo miembro de la equacion no es integrable, ni aun por aproxîmacion, por contener baxo el radical dos diferenciales distintas, nos es indispensable acudir á la equacion de la curva, diferenciarla, y tomar el valor de dx en funciones de y, ó el de dy en funciones de x para substituir en el radical; pues de este modo será integrable á lo ménos por aproxîmacion, y nos dará á conocer la longitud de la curva á quien corresponde.

Apliquemos este método á la resolucion de varias qüestiones.

98 362 Qüestion I. *Rectificar la parábola vulgar* AM, *cuya equacion es* $y^2=ax$.

La diferencial de esta equacion es $2ydy=adx$, que da $dx=\frac{2ydy}{2a}$.

Este valor substituido en la expresion, ó fórmula $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ la transforma en $\sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2}{4a^2}+dy^2\right)}=\frac{dy}{a}\times\sqrt{(a^2+y^2)}$; y la integral de esta cantidad será la longitud del arco AM. Pero si en el vértice de la parábola tiramos la tangente AP, haciendo $AP=y$, levantamos á la tangente la perpendicular $AB=a$, será $adu=dy\sqrt{(y^2+a^2)}$; y si trazamos una hipérbola equilátera BR, cuyo centro esté en A, será la equacion de esta curva $PQ=x=\sqrt{(y^2+a^2)}$, y la expresion del elemento hiperbólico $PStp=SP\times PQ=dy.\sqrt{(y^2+a^2)}$, que nos dice que la rectificacion de la parábola depende de la quadratura de la hipérbola equilátera, y por tanto una y otra se hallan por aproxîmacion.

Qües-

363 Qüestion II. *Rectificar el círculo.* Fig.

Hemos visto (250) que la diferencial de un arco con relacion á la tangente era $\frac{r^2dt}{r^2+t^2}$, siendo t la tangente y r el radio; luego $S.\frac{r^2dt}{r^2+t^2}$ será la expresion del arco; pero como esta cantidad no es integrable algebráycamente, nos es indispensable acudir á la aproxîmacion convirtiéndola en serie, para lo qual le darémos la siguiente forma $r^2dt(r^2+t^2)^{-1}$, y como $(r^2+t^2)^{-1}=\ldots r^{-2}\left(1-\frac{t^2}{r^2}+\frac{t^4}{r^4}-\frac{t^6}{r^6}+\frac{t^8}{r^8}, \&c.\right)$: despues de convertirlo en serie (23 y 26) y sacar el factor comun r^{-2}. Con lo que será $S.r^2dt(r^2+t^2)^{-1}=S\left(dt-\frac{t^2dt}{r^2}+\frac{t^4dt}{r^4}-\frac{t^6dt}{r^6}+\frac{t^8dt}{r^8}, \&c.\right)=t-\frac{t^3}{3r^2}+\frac{t^5}{5r^4}-\frac{t^7}{7r^6}+\frac{t^9}{9r^8}, \&c.=t\left(1-\frac{t^2}{3r^2}+\frac{t^4}{5r^4}-\frac{t^6}{7r^6}+\frac{t^8}{9r^8}-\&c.\right)$

Y como el arco de 45° grados cabe 8 veces en la circunferencia, y ademas su tangente es igual al radio, harémos $t=r$, y tendrémos la longitud de un arco de 45 grados $=r\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\&c.\right)$, que solo nos resta sumar esta serie y multiplicarla por 8 para tener el valor de toda la circunferencia; bien que como esta serie no es de las convergentes, nos es preciso tomar un número de términos bastante crecido.

364 Qüestion III. *Rectificar un arco* FM *de la elipse, al qual llamarémos* u. 99

La

La equacion de la elipse, considerando el orígen en el centro, es (148) $y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$; y su diferencial $dy = \frac{-bxdx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$; luego $du = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \ldots\ldots$

$$\frac{dx\sqrt{(a^4-a^2x^2+b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4-a^2x^2)}} = \frac{dx \times \sqrt{(a^4-x^2(a^2-b^2))}}{\sqrt{(a^4-a^2x^2)}},$$ con dividir los dos términos del quebrado por a^2, y hacer ....
$\frac{a^2-b^2}{a^2} = m$; $\frac{dx\sqrt{(a^2-mx^2)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{dx\sqrt{((a^2-mx^2)(a^2-x^2))}}{a^2-x^2}$ (con multiplicar los dos términos del quebrado por el denominador) $= \frac{dx\sqrt{(a^4-mx^4)-a^2x^2(m-1)}}{a^2-x^2}$, que podrémos simplificar haciendo $a^2-x^2=r$, $a^4-mx^4=s$, y $a^2x^2(m-1)=n$; en virtud de lo qual tendrémos $u = S.\frac{dx \times \sqrt{(s-n)}}{r}$, que se convertirá en serie, y despues se integrará como en los exemplos anteriores.

100 365 Qüestion IV. *Rectificar el arco* FM *de una hipérbola vulgar.*

La equacion de la hipérbola (178) es $y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$, cuya diferencial es $dy = \frac{bxdx}{\sqrt{(a^4+a^2x^2)}}$. Luego $du = \ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{\sqrt{(a^4+a^2x^2+b^2x^2)}}{\sqrt{(a^4+a^2x^2)}}$; equacion análoga á la de la qüestion anterior, y por tanto practicarémos las mismas reglas que en aquella hasta conseguir su integral, que nos dará á conocer el valor del arco FM correspondiente á la abscisa x.

Aplicacion del cálculo integral para medir las solideces de los cuerpos formados por la revolucion de las superficies alrededor de una línea.

366 Así como las superficies las hemos considerado compuestas de una infinidad de trapecios infinitamente pequeños, los quales hemos mirado como sus elementos ó diferenciales, supondrémos los cuerpos compuestos de una infinidad de hojas de un grueso infinitamente pequeño, las quales serán tambien sus elementos; y así el artificio para medir los sólidos de revolucion se reduce á encontrar la expresion de uno de estos elementos, é integrarla para tener el sólido á quien corresponde, lo qual se manifiesta en las qüestiones siguientes.

367 Qüestion I. *Hallar la solidez del cilindro* AB *formado por la revolucion del rectángulo* ACDH *alrededor del exe* CD. 101

Sea $CD=a$, $PC=x$, $PM=r$: si consideramos que sea MN uno de los elementos de este sólido, será $Pp=dx$; y si suponemos que $1:c$ exprese la razon del diámetro de un círculo á la circunferencia, tendrémos $1 : c :: 2r : 2rc$, circunferencia del círculo ML, la qual multiplicada por $\frac{1}{2}r$, nos dará su superficie cr^2. Esta superficie multiplicada por dx dará la expresion del elemento $MN = cr^2dx$, é $S.\,cr^2dx = cr^2dx$, ó haciendo $x=a$; $cr^2a = cr^2 \times a =$ á la solidez del cilindro propuesto AB; que siendo cr^2 la superficie de su base y a su altura, nos da el mismo resultado que la Geometría Elemental.

308 Qüestion II. *Hallar la solidez del cono* ABC *producido por la revolucion del triángulo rectángulo alrededor del exe* AB. 102

Sea $AB=x$, $BD=y$, y el ángulo $BAD=u$: si tomamos AD por radio, será $\cos. u : \text{sen.}\, u :: x : y = \ldots$ $\frac{x \times \text{sen.}\, u}{\cos. u}$, é $y^2 = \frac{(\text{sen.}\, u^2)}{(\cos. u^2)} \times x^2$. La circunferencia del

Fig. círculo cuyo radio es y la hallarémos diciendo $1 : c :: 2y : 2cy$; y su superficie, multiplicando $2cy$ por $\frac{1}{2}y$, esto es, $\frac{2cy^2}{2} = cy^2$, cuya cantidad multiplicada por dx nos dará cy^2dx, que es la expresion del elemento del cono, y la solidez de éste será $S. cy^2 dx = \ldots\ldots$ $S. \frac{\text{sen.}^2 u}{\text{cosen.}^2 u} \times x^2dx = \frac{\text{sen.}^2 u}{\text{cosen}^2 u} \times \frac{x^3}{3} = cy^2 \times \frac{x}{3}$; pero cy^2 es la base del cono, y x su altura; luego este resultado es el mismo que dió la Geometría (tom. I. 610).

369 La expresion cy^2dx del elemento del cono puede representar en general el elemento de qualquiera sólido de revolucion; pues en todos ellos, siendo el grueso de sus hojas infinitamente pequeñas, se pueden mirar sus dos caras como iguales, y así nos servirá de fórmula para las qüestiones siguientes.

370 Qüestion III. *Hallar la solidez del* conoyde *parabólico, ó paraboloyde formado por el movimiento de la area parabólica* ABD *alrededor del exe* AC.

103 La equacion de la parábola es $y^2 = ax$ llamando a el parámetro; este valor de y^2 substituido en la expresion cy^2dx se transforma en $caxdx$, cuya integral es .... $\frac{cax^2}{2} = cax \times \frac{1}{2} x = cy^2 \times \frac{1}{2}x$; y como cy^2 es la superficie del círculo LM, y x la altura AP, se infiere, que la solidez de un paraboloyde es igual al producto de su base por la mitad de la altura; pero si el espacio por medir fuese $DBLM$ terminado por dos círculos paralelos, del espacio ALM se ha de restar la parte AER, que haciendo $AK = n$, y $EK = r$, será $cr^2 \times \frac{1}{2} n$; y así $DRLM = cy^2 \times \frac{1}{2}x - cr^2 \times \frac{1}{2}n$.

371 Qüestion IV. *Hallar la solidez del esferoyde prolongado formado por el movimiento de la elipse alrededor del exe mayor.*

104 Si llamamos el exe mayor a, la equacion de la elipse respecto del exe mayor será $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$; substituyendo este valor en la fórmula diferencial (369), se

se transformará en $\frac{c \times b^2}{a^2}(ax - x^2)dx = \frac{cab^2xdx}{a^2} - \ldots\ldots$ $\frac{cb^2x^2dx}{a^2}$. La integral de esta expresion es $\frac{cab^2x^2}{2a^2} - \ldots\ldots$ $\frac{cb^2x^3}{3a^2} + C$, que nos da la solidez desde el vértice A hasta un plano que pase por la recta MH, y sea perpendicular al exe; pero como en este caso para que el espacio AMH sea cero basta que x lo sea, el valor de la constante C sale tambien cero, y por lo mismo no hay necesidad de añadir cosa alguna á la integral que da el cálculo.

Si queremos la solidez de todo el esferoyde harémos $x = a$, con lo que tendrémos la solidez $ADBC = \ldots$ $\frac{ca^3b^2}{2a^2} - \frac{cb^2a^3}{3a^2} = \frac{cab^2}{2} - \frac{cab^2}{3} = \frac{3cab^2 - 2cab^2}{6} = \frac{cab^2}{6} = \frac{cb^2}{2} \times \frac{1}{3}a = \frac{cb^2}{4} \times \frac{1}{3}a$, pero $\frac{cb^2}{4}$ es la expresion de un círculo cuyo radio es $\frac{1}{2}b$, como se puede comprobar diciendo $1 : c :: \frac{1}{2}b : \frac{cb}{2}$; y $\frac{2a}{3}$ son los dos tercios de la altura del esferoyde. Luego la solidez de un esferoyde prolongado es los dos tercios del cilindro circunscripto á él; de suerte que para medir un esferoyde prolongado se ha de multiplicar el círculo trazado sobre el exe menor por los dos tercios del exe mayor.

Si el esferoyde fuese formado alrededor del exe menor, entónces sería aplanado; y tomando la equacion de la elipse respecto el exe segundo, y haciendo con ella las mismas operaciones que con las del exe mayor, sacaríamos su solidez igual $\frac{ca^2}{4} \times \frac{2}{3}b$.

Si suponemos los dos exes iguales, el esferoyde se transformará en una esfera, y su solidez será.......... $\frac{ca^2}{4} \times \frac{2}{3}a$, que es el mismo resultado que dió la Geometría.

Fig. 372 Si comparamos una con otra las expresiones .. $\frac{cb^3}{4}\times\frac{2}{3}a$, y $\frac{ca^2}{4}\times\frac{2}{3}b$, hallarémos que son entre sí como $b : a$. Luego los dos esferoydes son como el exe menor al mayor.

373 Qüestion V. *Hallar la solidez del hiperboloyde formado por el movimiento de la area hiperbólica alrededor del exe primero, que llamarémos a.*

105 La equacion de la hipérbola respecto el exe primero con relacion al parámetro es $y^2=\frac{p}{a}(ax+x^2)$, cuyo valor substituido en la fórmula, la reduce á $\frac{cp}{a}S.(axdx+x^2dx)=\frac{cp}{a}\left(\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$; y haciendo $x=a$, el conoyde hiperbólico será $=c\times\frac{p}{a}\times\frac{5a^3}{6}=ca^2\times\frac{5p}{6}$; y como ca^2 es la superficie de un círculo, cuyo radio es a, dirémos que la solidez del hiperboloyde es igual á un cilindro que tenga por base un círculo, cuyo radio sea el exe primero, y la altura $\frac{5}{6}$ del parámetro.

Si comparamos este cilindro con otro de igual base, pero que su altura $=a$, tendrémos $ca^2\times\frac{5p}{6} : ca^2\times a :: 5p : 6a$.

58 *Aplicacion del cálculo integral para quadrar las superficies de los sólidos de revolucion.*

374 Para medir la superficie de un sólido de revolucion formado por el plano de una curva alrededor de su exe, ó de otro modo qualquiera sin contar la de las bases, se tirarán dos ordenadas infinitamente próximas á la curva, las que terminarán un elemento de la supercie, el qual con su revolucion formará un cono truncado infinitamente pequeño, y la superficie curva de este cono será el elemento, ó diferencial de todo el sólido. Para hallar la expresion de este elemento se multiplicará el elemento de la curva generatriz, que es lado del

del pequeño trapecio elemental (el qual es igual (tom. I. 471) á la raiz quadrada de la suma de los quadrados de las diferenciales de abscisa y ordenada) por el camino ó circunferencia que traza la mas pequeña de las dos ordenadas; es á saber, que haciendo el arco de la curva $=u$, la abscisa $=x$, y la ordenada $=y$, es $du=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; y esta cantidad se ha de multiplicar por la circunferencia de y, y el producto, que es la diferencial de la superficie, lo que se ha de integrar para tener toda la superficie curva del sólido. Luego si expresa $n : m$ la razon del radio de un círculo á la circunferencia, para conocer la circunferencia de otro círculo cuyo radio sea y, dirémos $n : m :: y : \frac{my}{n}$; y como la diferencial de la curva es $\sqrt{(dx+dy^2)}$; la diferencial de la superficie curva será $\frac{my}{n}\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, y la integral de esta cantidad dará la superficie curva de todo el sólido; pero como en esta cantidad hay dos variables, no puede integrarse sin substituir por dx su valor en cantidades de y y dy, tomado de la equacion de la curva. Aclarémoslo resolviendo algunas qüestiones.

375 Qüestion I. *Hallar la superficie curva de un cono.*

La equacion á la línea recta (320), siendo $DC=a$, $AC=n$, $MP=y$, y $DP=x$, es $y=\frac{nx}{a}$, que nos da $x=$ 106
$\frac{ay}{n}$, y $dx=\frac{ady}{n}$; este valor substituido en la expresion $\frac{my}{n}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ la transforma en $\frac{my}{n}\sqrt{\left(\frac{a^2dy^2}{n^2}+dy^2\right)}=\frac{my}{n}\frac{\sqrt{(a^2dy^2+n^2dy^2)}}{n^2}=\frac{mydy}{n^2}\sqrt{(a^2+n^2)}$, é integrando $\frac{my^2}{2n^2}\sqrt{(a^2+n^2)}$, y haciendo $y=n$ para tener la superficie de todo el cono $\frac{1}{2}m\sqrt{(a^2+n^2)}=\frac{1}{2}m\times AD$, que nos manifiesta que la superficie del cono es igual al producto de la mitad de la circunferencia por el lado.

376 Qüestion II. *Hallar la superficie de un conoyde parabólico.*

La equacion de la parábola es $y^2 = px$, que nos da $dx = \frac{2ydy}{p}$, cuyo valor substituido en la expresion $\frac{my}{n} \surd(dx^2 + dy^2)$, la reduce á $\frac{my}{n} \surd(\frac{4y^2}{p^2} + by^2)$ $= \frac{my}{n} \surd(\frac{4y^2dy^2 + p^2dy^2}{p^2}) = \frac{mydy}{np} \surd(4y^2 + p^2)$. Para integrar esta expresion harémos $\surd(4y^2 + p^2) = r$; siendo r una variable qualquiera, con lo que será $4y^2 + p^2 = r^2$, $8ydy = 2rdr$, é $ydy = \frac{1}{4} rdr$; y haciendo las substituciones en la fórmula, tendrémos $\frac{mydy}{np} \surd(4y^2 + p^2) = \frac{mr^2dr}{4np}$, é $S. \frac{mydy}{np} \surd(4y^2 + p^2) = \frac{mr^3}{12np} = \frac{m}{12np}(4y^2 + p^2)$. $\surd(4y^2 + p^2)$, que suponiendo $y = 0$, se reduce á $\frac{mp^2}{12n}$; y así dirémos que la superficie completa del paraboloyde es $\frac{m}{12np}(4y^2 + p^2) \times \surd(4y^2 \times p^2) - \frac{mp^2}{12n}$.

377 Qüestion III. *Hallar la superficie de la esfera.* Sea $= 1$ el diámetro y x el seno verso, ó la abscisa contada desde el vértice, la expresion del seno recto será $\surd(x - x^2)$; y la diferencial de un arco de circunferencia con relacion al seno verso $= \frac{dx}{2\surd(x - x^2)}$. Si multiplicamos esta cantidad por $\frac{m}{n}y$, que es la circunferencia que describe la ordenada $y = \surd(x - x^2)$, tendrémos el elemento de la superficie de la esfera $= \frac{dx}{2y} \times \frac{my}{n} = \frac{mdx}{2n} = mdx$, por ser $n = \frac{1}{2}$; cuya integral mx expresa la superficie de un segmento de esfera, cuya altura es x. Para tener la de toda la esfera harémos $x = 1$, con lo que será $mx = m \times 1$, esto es, igual á la circunferencia del círculo máxîmo por el diámetro, ó bien quadruplo de la de un círculo máxîmo, por ser éste $= m \times \frac{1}{4}$; cuyos resultados concuerdan en un todo con los que dió la Geometría Elemental (tom. I. 624).

Acerca de la quadratura de superficies, rectificacion de líneas curvas, medida de la solidez y superficie de los cuerpos de revolucion por medio del cálculo integral,

gral, me he limitado lo posible, ciñéndome solamente á la resolucion de aquellas qüestiones que son mas usuales, y cuyos resultados nos manifiestan la evidencia del cálculo por ser los mismos que nos dió la Geometría Elemental. Ademas, que siendo generales las reglas que para ello se han dado, no será dificil á qualquiera aplicarlas para la resolucion de otras muchas qüestiones.

Solo nos resta para terminar esta segunda parte decir alguna cosa sobre el método inverso de las tangentes.

Del método inverso de las tangentes.

378 Hasta el presente solo hemos considerado las propiedades de las cantidades por medio de sus elementos, esto es, hemos considerado la relacion de estos elementos, á fin de poder determinar por su medio las cantidades á quienes corresponden, que es todo lo que hemos practicado para conocer las tangentes, subtangentes, areas, rectificaciones, &c.; y este método se llama *método directo.*

Pero quando por la contraria se pide la naturaleza de una curva, ó de otra magnitud, dada qualquiera de sus propiedades, como si se pidiese la curva, cuya tangente ó area, &c. es dada: este modo de determinar la cantidad por medio de las propiedades se llama método inverso de las tangentes.

379 Así para conocer una curva quando se tiene alguna de sus propiedades, como tangente, subtangente, normal, subnormal, rectificacion, area, &c. no se hará otra cosa que igualar simplemente la expresion de esta propiedad dada ó su diferencial á la expresion general diferencial que conviene al caso que se propone. Si la expresion dada es, por exemplo, una subtangente, se hará su diferencial $= \frac{ydx}{dy}$, que es la expresion general de la diferencial de las subtangentes. Si la expresion es de una area, la igualarémos con ydx, y así de

de las demas propiedades ; despues se integrará y saldrá la equacion de la curva á quien corresponde.

380 Qüestion I. *Encontrar la naturaleza de la curva, cuya subtangente es* $\frac{2y^2}{p}$.

La expresion general diferencial de las subtangentes es $\frac{ydx}{dy}$ (257). La comparacion de esta cantidad con $\frac{2y^2}{p}$ nos da la equacion $\frac{2y^2}{p}=\frac{ydx}{dy}$; $2y^2dy=pydx$; $2ydy=pdx$, é integrando $y^2=px$, equacion de la parábola.

381 Qüestion II. *Encontrar la naturaleza de la curva cuya subtangente es* $\frac{y^2}{a-x}$.

La igualacion de esta cantidad con $\frac{ydx}{dy}$ nos da $\frac{y^2}{a-x}=\frac{ydx}{dy}$; $y^2dy=aydx-yxdx$; $ydy=adx-xdx$; é integrando $\frac{y^2}{2}=ax-\frac{x^2}{2}$, y por último $y^2=2ax-x^2$, equacion que corresponde al círculo ; y si hacemos positivo el quadrado $-x^2$ corresponde á la hipérbola equilátera (178).

381 Qüestion III. *Encontrar la naturaleza de la línea, cuya subtangente es igual á la ordenada* y.

Por el supuesto será $\frac{ydx}{dy}=y$; $ydx=ydy$; $dx=dy$, é integrando $x=y$, que nos manifiesta que esta línea es una ordenada de un triángulo rectángulo isósceles referida á la hipotenusa como exe.

382 Qüestion IV. *Hallar la naturaleza de la curva, cuya normal es constante.*

Sea a esta cantidad constante , la ordenada y , y la abscisa x , tendrémos (265) $\frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2+dx^2)}=a$, $y\sqrt{(dy^2+dx^2)}=adx$, $y^2dy^2+y^2dx^2=a^2dx^2$; $y^2dy^2=a^2dx^2-y^2dx^2$; $y^2dy^2=dx^2(a^2-y^2)$; $ydy=dx\sqrt{(a^2-y^2)}$, é integrando $\frac{y^2}{2}=S.\,dx\sqrt{(a^2-y^2)}$. Equacion que corresponde á un círculo , cuyo radio es a , y el seno y ; en efecto en este caso es $\sqrt{(a^2-y^2)}=a-x=$ al cosen. y

y por tanto es $y^2=2S.dx(a-x)=2ax-x^2$.

383 Qüestion V. *Encontrar la curva cuya subnormal es* $\frac{1}{2}a-x$.

Siendo la expresion de la subnormal $\frac{ydy}{dx}$ será por el dato $\frac{ydy}{dx}=\frac{1}{2}a-x$; $ydy=\frac{1}{2}adx-xdx$, é integrando $y^2=ax-x^2$, equacion del círculo.

384 Qüestion VI. *Hallar la naturaleza de la curva, cuya subtangente es* $\frac{ay}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$.

Tendrémos $\frac{ay}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{ydx}{dy}$; $\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=dx$, é integrando $x=S.\frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, que es la longitud de un arco de círculo , cuyo radio $=a$, y la ordenada $=y$.

Por el mismo método se podrán resolver otras muchas qüestiones.

PARTE SEGUNDA.

DE LA MECÁNICA.

CAPÍTULO I.

De algunas nociones de la Mecánica para su mejor inteligencia.

Habiendo tratado en las tres primeras partes de este Compendio aquellas partes de las Matemáticas puras, que son indispensables á todos los Jóvenes que se dedican al estudio de la naturaleza, nos resta para completar esta obrita, segun el plan que me he propuesto seguir, insertar en ella la parte mas esencial de las Matemáticas mixtas, qual es la *Mecánica*: esta parte, tomada en el sentido mas extenso, es una ciencia, cuyo objeto es averiguar las leyes del equilibrio, y movimiento de los cuerpos sólidos y fluidos.

385 Llámase *cuerpo* la union, ó conjunto de muchas partes de materia.

Quando las partes materiales de un cuerpo tienen tal adherencia unas con otras que resisten á su separacion mutua, se dice que el cuerpo es *sólido.* Pero quando las partes están separadas las unas de las otras, ó su adherencia es tan corta que con facilidad se las hace mudar de lugar, el cuerpo se llama *fluido.* Las piedras, metales, &c. son cuerpos sólidos, y el agua, el vino, &c. son cuerpos fluidos.

386 La parte de Mecánica que trata de los cuerpos sólidos se llama *Dinámica*, y la que trata de los cuerpos fluidos *Hidrodinámica.*

La Dinámica se divide en *Estática* y *Dinámica* propia: la primera trata del equilibrio de los cuerpos sólidos, y la segunda del movimiento de ellos. Tambien se divide la Hidrodinámica en *Hidrostática* é *Hidráulica*, segun que trata del equilibrio, ó movimientos de los fluidos.

387 Todo cuerpo, sea sólido ó fluido, es pesado, esto es, tiene tendencia á descender, y desciende en efecto hasta la superficie de la tierra (quando no hay causa alguna que impida su movimiento) por líneas verticales ó perpendiculares á la superficie de las aguas, ó lo que es lo mismo, por líneas que se dirigen al centro del globo, considerándolo perfectamente esférico.

388 Esta fuerza ó causa (provenga de donde quisiere), que obliga á los cuerpos á descender, se llama *pesantez* ó *gravedad.*

Quando en un cuerpo se prescinde de este atributo se llama solamente *cuerpo*; pero quando no se prescinde de él, se nombra *cuerpo pesado* ó *grave.*

389 Como un cuerpo puede ser mas ó ménos poroso, segun que las partes de que se compone estén mas ó ménos unidas á las otras, nos es preciso hacer distincion entre su *masa* y su *volúmen.*

Por masa de un cuerpo se entiende la cantidad de materia propia de que se compone, y por volúmen el espacio aparente que ocupa, ó la extension del cuerpo, segun las tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad. La Geometría considera el volúmen, y la Mecánica solo considera la masa. Por tanto en lo sucesivo por la voz *cuerpo* entenderémos toda la masa de que está compuesto.

390 La razon de la masa de un cuerpo con su volúmen, ó lo que es lo mismo, la cantidad de materia com-

comprehendida en un volúmen determinado, se llama *densidad.* Desde luego se manifiesta que la densidad no es una qualidad absoluta, esto es, no podemos decir que un cuerpo sea mas, ó ménos denso si no es comparándolo con otro. Para hacer esta comparacion es preciso dividir las masas por los números de unidades que tienen los volúmenes, ya sea que estas unidades se tomen en varas cúbicas, pies, pulgadas, &c.; y cotejando los quocientes que resulten, se conocerán sus densidades. Así, llamando A y a las masas de dos cuerpos D y d: sus densidades S y s, sus volúmenes serán $D : d :: \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$, que nos da á conocer las densidades de estos cuerpos; de esta proporcion se saca tambien $A : a :: SD : sd$, que nos manifiesta *que las masas están en razon compuesta de las densidades y los volúmenes.*

391 Quando un cuerpo se mantiene constantemente en un mismo lugar se dice que está en reposo, y quando pasa de un lugar á otro se dice que está en movimiento.

392 El tiempo le consideramos como originado por la fluxîon sucesiva y uniforme del instante mirado como elemento suyo.

393 Se dice que un cuerpo se mueve con mayor ó menor velocidad, segun que corre mayor ó menor espacio en un tiempo dado. Luego la velocidad es la razon del espacio corrido con el tiempo que se emplea en correrlo, ó *el quociente que resulta de dividir el número de unidades que tiene el espacio por el número de unidades que tiene el tiempo.*

394 Es claro que no puede conocerse la veleidad de un cuerpo si no es por la comparacion de estos dos elementos, á saber, el espacio y el tiempo. Si suponemos que dos hombres saliendo de Madrid para viajar caminan de tal modo, que el uno anda 30 leguas en 3 dias, y el otro 60 leguas en 5 dias, serán las veloci-

da-

dades con que estos hombres andan como $\frac{30}{3} : \frac{60}{5} :: 10 : 12$, donde se ve que el segundo camina mas apriesa que el primero en la misma razon que 12 es mayor que 10.

395 Un cuerpo que está en reposo no puede moverse si alguna causa exterior no le obliga á ello; esta causa, ó agente se llama *fuerza* ó *potencia*; y esta fuerza aplicada al cuerpo es la que le mueve, ó intenta mover, lo que nos obliga á distinguir la *fuerza* en *fuerza motriz* y *fuerza de presion*: la primera mueve al cuerpo, y por tanto produce un movimiento real, y la segunda pretende moverlo; pero á causa de la resistencia que encuentra no lo consigue. La velocidad que produce en un cuerpo la primera fuerza se llama *velocidad real*, y la que intenta producir la segunda, *velocidad virtual.* Por exemplo, un cuerpo que cae libremente desde una altura de 15 pies adquiere en virtud de los impulsos instantaneos, y repetidos de la pesantez, una velocidad capaz de hacerle correr uniformemente en un segundo 30 pies de París, como se hará ver á su tiempo. Y así la suma de los impulsos de la pesantez durante la caida de 15 pies es una fuerza motriz que produce una velocidad real y uniforme de 30 pies por segundo. Pero si un cuerpo animado por la pesantez es sostenido por una tabla que impida su descenso; como en este caso cada accion instantanea es destruida por la tabla, la pesantez es una fuerza de presion, la qual no produce otro efecto que comprimir el cuerpo contra la tabla sin causar movimiento alguno.

396 Toda fuerza, sea la que fuese, su naturaleza no puede medirse de otro modo que por su efecto; éste no es otro que el mover, ó intentar mover de una parte á otra una cantidad de materia en cierto tiempo. Luego hay dos cosas que considerar en el efecto; á saber, la masa que mueve ó intenta mover, y la velocidad comunicada á todas las partículas de la materia, ó repartida en tantas partes como puntos materiales hayga; es-

to

to es, el producto de la masa por la velocidad. Este producto es lo que se llama *cantidad de movimiento*, y esta cantidad es real ó virtual, segun que la velocidad lo sea.

397 *En la Mecánica la fuerza de presion se aprecia por el producto de la masa, por la velocidad que es capaz de comunicarle*; y todas las veces que los productos de esta naturaleza sean iguales indican presiones iguales.

La fuerza se representa por el producto de la masa y la velocidad que realmente le comunica.

398 Llámase *sistema de cuerpos* el conjunto de muchos cuerpos de tal modo unidos unos con otros, ya sea por medio de hilos, varillas, ó de qualquier otro modo, que qual si compusieran un solo cuerpo, no puede moverse ninguna de sus partes sin que las demas participen del movimiento. *Y sistema de fuerzas*, se llama el conjunto de muchas fuerzas que obran á un mismo tiempo sobre un cuerpo, ó sistema de cuerpo con qualesquiera direcciones.

399 Quando muchas fuerzas aplicadas á un cuerpo ó sistema de cuerpos se destruyen unas á otras de tal modo que al cuerpo no le resulte movimiento, se dice que dichas fuerzas están en *equilibrio*.

400 La determinacion de la razon de muchas fuerzas que se equilibran es el objeto de la *estática* ó *maquinaria*.

401 Pero quando las fuerzas no se equilibran producen ciertos movimientos en los cuerpos, y la determinacion de éstos es el objeto de la *Dinámica*, de cuyos ramos vamos á tratar.

De los principios generales del equilibrio.

402 En toda fuerza hay dos cosas que considerar; á saber, la accion que exerce, y el sentido en el qual exerce esta accion. Para comparar entre sí muchas fuerzas de un modo exâcto y completo se debe atender á estas dos circunstancias; pero una y otra las comprehenderémos tomando sobre las direcciones de las fuerzas unas líneas rectas que les sean proporcionales; porque estas líneas representarán á un mismo tiempo la magnitud de las fuerzas y las direcciones con que obran. Por exemplo, sean dos fuerzas P y Q, que tiran de un cuerpo A por medio de dos hilos, ó de dos varillas en las direcciones AP, AQ; y supongamos que la potencia P sea dupla de la potencia Q: tomando sobre AQ direccion de la potencia Q una parte arbitraria AC para representar esta potencia, y sobre AP direccion de la potencia P, la parte AB dupla de AC para que exprese ésta los efectos completos de las dos potencias P y Q estarán representados por las líneas AC y AB; y si dichas potencias tuvieren entre sí otra razon qualquiera, se tomarán las líneas AC y AB que tengan la misma razon, esto es, que se verifique la proporcion $Q : P :: AC : AB$; de suerte que en la Mecánica se nombran las fuerzas por las líneas que las representan. Así, si se quiere señalar la potencia P por su efecto completo, en lugar de decir *la potencia representada por la parte* AB *de su direccion*, se dice simplemente *la potencia* AB.

Fig.

107

403 Siendo las fuerzas cantidades de una misma especie, ó reductibles á una misma especie, deben valuarse por una medida que sea comun á todos, á la qual deben referirse; y como encontramos que todos los cuerpos son pesados, ó que este atributo que llamamos peso no puede destruirse sin que se le oponga alguna fuerza, puede tomarse por unidad de fuerza un peso determinado, por exemplo, la libra: en este caso, siendo las fuerzas P y Q como 2 á 1, si la fuerza P equivale á un peso de 16 libras, la fuerza Q es equivalente á 8 libras.

Axîomas propios para la Mecánica.

404 I. *Un punto no puede seguir moviéndose por muchos caminos diferentes á un mismo tiempo.*

Así

Así, quando muchas fuerzas son aplicadas á un mismo tiempo á un punto, ó á un cuerpo, cuya masa pueda considerarse como reunida en un solo punto, el cuerpo se moverá por un solo camino, del mismo modo que si estuviera impelido por una sola y única fuerza equivalente en quanto al efecto en este sentido á todas las fuerzas propuestas.

405 La fuerza que produce en un cierto sentido el mismo efecto que todas las otras juntas se llama la *resultante* ó derivada de todas ellas; y dichas fuerzas se llaman sus *componentes*.

El encontrar la resultante quando se tienen las componentes es lo que se llama *la composicion de fuerzas*, y la inversa, esto es, hallar las fuerzas competentes quando se tiene la resultante, es lo que se llama la *resolucion ó descomposicion de fuerzas*.

406 II. *Dos fuerzas iguales, y directamente opuestas se destruyen una á otra, y por consiguiente producen equilibro*; pues no hay razon para que la una supere á la otra. *Y recíprocamente quando dos fuerzas se destruyen son iguales y directamente opuestas.* Porque se viene á la vista que una fuerza no puede ser destruida si no es por algun obstáculo colocado en su misma direccion.

407 De todo esto se deduce: 1° que hay equilibrio entre muchas fuerzas aplicadas á un mismo punto quando la resultante de todas ellas es cero, ó quando la resultante de todas las que obran en un sentido es igual y directamente opuesta á la resultante de las fuerzas que obran en sentido contrario.

408 2.° Y recíprocamente si muchas potencias aplicadas á un mismo punto se equilibran, será porque una de ellas será igual y directamente opuesta á la resultante de las otras, ó la resultante de cierto número de fuerzas será igual y diametralmente opuesta á la resultante de las restantes.

409 III. *Si una fuerza obra sobre un cuerpo con direccion perpendicular a una línea ó á un plano, no puede imprimir al cuerpo ningun movimiento en direccion paralela á la línea ó al plano*; porque no hay razon, ó á lo ménos no la encontramos para creer que la fuerza pueda producir mayor porcion de movimiento paralelo á un lado que á otro; y como no puede producirlo en los dos sentidos contrarios á un mismo tiempo, no lo produce en ninguno de ellos, y así el movimiento paralelo á la línea ó al plano ha de ser nulo.

Fig.

Advertencias.

410 1.ª *Quando una fuerza obra en un cuerqo qualquiera, siempre que su impulso no lo comunique por medio de alguna máquina, podemos suponerla aplicada en qualquiera punto de su direccion, sin que por esto dexe el efecto de ser el mismo.*

De suerte que si dos potencias *P* y *Q* tiran de un cuerpo *A* por medio de dos cuerdas inextensibles y sin masa, ó le impelen por medio de dos varillas *AP*, *AQ* inflexîbles y sin peso, el efecto que producirán será siempre el mismo, no variando sus direcciones, ya sea que las potencias se apliquen inmediatamente al cuerpo, ya sean aplicadas en los puntos *P* y *Q*, ó ya sea que se apliquen en qualesquiera otros puntos de su direccion. 107

411 2.ª *Los cuerpos á los quales suponemos aplicadas las potencias los podemos considerar como destituidos de pesantez.*

Aunque la pesantez es un atributo universal de todos los cuerpos, bástanos considerar el que es una fuerza que obra de arriba abaxo en los cuerpos, la qual se combina con las demas fuerzas á que el cuerpo está sometido.

CA-

Fig.

CAPITULO II.

De la composicion y resolucion de las fuerzas.

108 412 Si dos potencias P y Q tiran de un cuerpo A en un mismo sentido AQ, resultará sobre este cuerpo la misma accion que si estuviera tirado de una potencia única igual á la suma de las dos potencias P y Q.

Es evidente, pues las dos potencias P y Q se pueden aplicar en un solo punto, y en este caso la potencia aplicada á dicho punto ha de ser indispensablemente igual á $P+Q$; luego 1.º para hacer equilibrio á las dos potencias P y Q bastará aplicar en la direccion AS una potencia $S=P+Q$.

2.º Si muchas fuerzas tiran de un cuerpo en una misma direccion, será preciso para que se verifique el equilibrio aplicarle una fuerza igual á la suma de todas ellas, y que obre en una direccion diametralmente opuesta.

3.º Si dos potencias desiguales S y P con direcciones encontradas tiran de un cuerpo siendo $S>P$, será preciso para el equilibrio aplicar á la potencia P otra fuerza $Q=S-P$, y que obre en la direccion AP.

4.º Si un número qualquiera de fuerzas obra en un cuerpo, tirando unas en una direccion, y las restantes en otra direccion contraria, habrá equilibrio siempre que la suma de las unas sea igual á las uma de las otras; pero si estas sumas son desiguales, será preciso para que se verifique el equilibrio añadir á la suma menor una potencia que sea igual á la diferencia que haya entre las dos sumas propuestas.

109 413 *Si una potencia* P *impele, ó tira de un cuerpo en*
una direccion perpendicular á una recta EG, *la potencia*
solo moverá al cuerpo en la direccion de AP (*axiom.* 3.)
sin que produzca movimiento alguno en el sentido AE, *ni*
110 *en el sentido* AG. *Pero si la potencia tira obliqüamente*

por

por razon á EG, *en este caso el cuerpo se desviará á un mismo tiempo de la recta* EG, *y de la perpendicular* AZ. Fig.

Esta proposicion es tan evidente, que con solo enunciarla se manifiesta su evidencia.

414 Luego si representamos la potencia P por la parte AB de su direccion, y del punto P baxamos las perpendiculares BE, BF á las rectas AE, AZ, es evidente que tirando la potencia P del cuerpo desde A hácia B, le desviará de la recta AF de una cantidad representada por FB, ó por AE; y de la recta AE de una cantidad expresada por FA, ó por BE; de suerte que por el primer desvío el cuerpo se halla en el mismo caso que si fuese impelido por una potencia representada por AE, y por razon al segundo desvío se halla en el mismo caso que si hubiera sido impelido por una fuerza representada por AF.

415 *Si dos potencias* P *y* Q *representadas por las par-* 111
tes AB,AC *impelen, ó tiran de un cuerpo* A, *segun las direcciones* AP,AQ, *que formen un ángulo qualquiera* PAQ, *se moverá del mismo modo que si estuviera impelido el cuerpo por una fuerza única representada por la diagonal* AD *del paralelogramo* ABDC.

En esta proposicion pueden ocurrir dos casos, porque los dos ángulos PAD, QAD son agudos (*fig.* 111), ó el uno es agudo y el otro obtuso (*fig.* 112).

416 Caso I. No obrando las dos fuerzas P y Q en un mismo sentido, ni en sentidos directamente contrarios, deben en parte destruirse, y en parte juntarse. Y como (*axiom.* 2.º) dos fuerzas no pueden destruirse, ni ménos juntarse, ínterin no obren en sentido contrario, ó en una misma direccion, las dos potencias P y Q pueden considerarse como las resultantes de quatro fuerzas, de las quales dos obran en sentido contrario, miéntras las otras dos obran en un mismo sentido; pero el cuerpo no puede seguir mas de un camino (*axiom.* 1.º), y éste ha de ser el de las fuerzas que causan el movimiento; pues ellas le impelen una y otra en un mismo sentido,

 sin

Fig. sin que causa alguna se oponga á este movimiento. Luego 1.º las dos fuerzas opuestas deben destruirse, pues de lo contrario resultaria otro movimiento al cuerpo, y entónces se veria precisado á seguir dos caminos á la par, lo que es imposible.

417 2.º Las dos fuerzas que causan el movimiento deben ser perpendiculares á las otras; porque si esta propiedad no se verificase, el cuerpo tendria, fuese en un sentido, fuese en sentido contrario, un movimiento paralelo á la línea recta, sobre la qual caen las direcciones de las fuerzas opuestas, y estas fuerzas no podrian ser totalmente destruidas; lo que se opone á todo lo que acabamos de establecer (*axîom.* 3.).

418 Estas son las dos condiciones, á las quales debe satisfacer la expresion de la resultante de las dos fuerzas AB y AC. Aclarémoslo.

111 Tírese por el punto A en el plano en que están las potencias la recta EG perpendicular á la diagonal AD, y conclúyanse los dos rectángulos $AEBF$, $AGCH$; suponiendo ahora que por la fuerza AB se substituyan las dos fuerzas AF, AE, y por la fuerza AC las dos fuerzas AG, AH, las dos fuerzas AF y AE representarán respectivamente (414) las cantidades que la fuerza AB desvia el cuerpo de las rectas EG y AD; y del mismo modo expresarán las fuerzas AG, AH las cantidades que la fuerza AC desvia el cuerpo de las rectas EG y AD. Si exâminamos con atencion la figura verémos desde luego que los triángulos AGC, ACH y BFD son totalmente iguales, y que por consiguiente tambien han de ser iguales los lados AG y BF, AH y FD, pero $AE = BF$; luego $AE = AG$, esto es, las dos fuerzas se destruyen; de suerte que de las quatro fuerzas en que habíamos descompuesto las AB y AC, solo quedan para el movimiento las dos fuerzas AH y AF, pero $AH = FD$; luego $AH + AF = AF + FD = AD$. Luego las dos fuerzas propuestas AB, AC se pueden reducir á una sola fuerza representada por la diagonal AD.

Ca-

419 Caso II. Tírese por el punto A la recta EG que esté en el plano de las potencias, y sea perpendicular á la diagonal AD, y fórmense los rectángulos $AEBF$, 112 $AHCG$. Haciendo consideraciones análogas á las del caso anterior, verémos que en vez de las fuerzas AB y AC podemos substituir las quatro fuerzas AE, AF, AG, AH; que de todas éstas las AE y AG por iguales y directamente opuestas se han de destruir (*axîom.* 2.º), y solo causan el movimiento las fuerzas AF y AH, pero éstas obran en sentidos contrarios, y ademas $AH = DF$; luego (412. III) al cuerpo le moverá una fuerza representada por $AF - AH = AF - DF = AD$, que tambien es la diagonal; luego &c.

Estando en un mismo plano los lados AB, AC, y la diagonal del paralelogramo, se ve que dos fuerzas que concurren en un punto y su resultante tambien deben estar en un plano.

420 De esta proposicion se deduce: 1.º que si dos fuerzas son representadas por dos lados contiguos de un paralelogramo, se puede substituir en su lugar una fuerza expresada por la diagonal del mismo paralelogramo correspondiente á dichos lados; y que recíprocamente en lugar de una fuerza única expresada por la diagonal se pueden substituir dos expresadas por los lados de el paralelogramo adyacentes á dicha diagonal.

421 2.º Que si tenemos dos fuerzas P y Q expresa- 113 das por los lados AB, AC de un paralelogramo, y queremos una tercera fuerza S que haga equilibrio con ellas, continuarémos el paralelogramo $ABDC$, tirarémos la diagonal AD, la que prolongarémos hasta S haciendo $AS = AD$ y AS será la magnitud de la fuerza S, que hará equilibrio con las fuerzas P y Q, obrando en una direccion AS; pues es igual y opuesta á la resultante AD.

422 3.º Que estando las potencias P, Q, y su resultante expresadas por los lados AB, AC, y la diagonal AD, dichas tres fuerzas serán como estas líneas, ó por ser $AS = AD$ serán $P : Q :: AB : AC$, $P : S :: AB : AD$,

 y

Fig. y $Q : S :: AC : AD$, ó abreviando la expresion $P : Q : S :: AB : AC : AD$, ó por ser $AC = BD$, $P : Q : S :: AB : BD : AD$, que nos da á conocer *que dos fuerzas y su resultante, ó dos fuerzas, y otra tercera fuerza que haga equilibrio con ellas, pueden representarse por los tres lados de un triángulo.* Y como en el triángulo los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos (tom. I. 658), será $P : Q : S ::$ sen. BDA : sen. BAD : sen. ABD. Pero sen. $BDA =$ sen CAD (tom, I. 423) $=$ sen. CAS (tom. I 644): sen. $BAD =$ sen. BAS, y sen. $ABD =$ sen. BAC (párrafo citado), que haciendo las substituciones correspondientes, concluirémos con que son $P : Q : S ::$ sen. CAS : sen. BAS : sen. BAC, esto es, *para que tres potencias que están en un mismo plano, y concurren en un punto se equilibren, han de ser entre sí como los senos de los ángulos formados por las direcciones de las otras dos.*

114 423 *Si de un punto qualquiera* D *tomado en la direccion de la resultante* $AD = R$ *de dos potencias* P *y* Q *se baxan las perpendiculares* DE, DF *sobre las direcciones de estas mismas potencias, y se tira la recta* EF, *serán* $P : Q : R :: DF : DE : EF$.

Construyendo el paralelogramo $ABDC$ serán $P : Q : R :: AB : BD : AD$ (422); pero siendo rectos los ángulos AED, AFD, la circunferencia descrita sobre AD como diámetro pasará por los puntos E y F, y será el ángulo $BAD =$ áng. EFD (tom. I. 522), y áng. $BDA =$ áng. $DAF =$ áng. DEF; luego los triángulos ABD, DEF son semejantes, y tendrán sus lados proporcionales; pero las tres potencias son como los lados del triángulo ABD; luego tambien serán proporcionales á los del triángulo DEF, con lo que tendrémos $P : Q : R = S :: DF : DE : EF$.

424 Si de estas tres razones tomamos las dos primeras, tendrémos $P : Q :: DF : DE$. Donde se ve *que las dos potencias* P *y* Q *son recíprocamente como las perpendiculares baxadas á sus direcciones desde un punto tomado en la direccion de la resultante.*

425 Si desde un punto F de la fuerza Q baxamos á las potencias P y $R = S$ las perpendiculares Fa Fb, se tira la recta ab; y desde un punto E tomado en la direccion de la fuerza P, se baxan á las direcciones de las fuerzas Q y R las perpendiculares Ef, Eg, y se tira la recta gf, resultarán dos triángulos Fab, Egf semejantes al triángulo ABD, con que serán proporcionales $P : R = S :: Fb : Fa$, y $Q : R = S : Ef : Eg$; (la semejanza de los triángulos se deduce fácilmente; pues si sobre las rectas AF y AE, como diámetros, se suponen trazados dos círculos, las circunferencias pasarán indispensablemente, la primera por los puntos a y b, y la segunda por los puntos f y g, de donde resultará áng. $Fab =$ áng. $DAC =$ áng. BDA, y áng. $aFb =$ áng. BAD, &c.).

Así en general *dos potencias qualesquiera de tres que se equilibran son recíprocamente como las perpendiculares baxadas á ellas desde un mismo punto de la direccion de la tercera.*

426 Las proporciones $P : Q :: DF : DE$, $P : S :: Fb : Fa$, y $Q : S :: Ef : Eg$, que acabamos de sacar, nos dan $P \times DE = Q \times DF$, $P \times Fa = S \times Fb$, y $Q \times Eg = S \times Ef$, donde se ve que si tres potencias P, Q, S están en equilibrio, los productos de dos de ellas por sus distancias á un punto fixo tomado en la direccion de la tercera son iguales. Los productos de las potencias por sus distancias á un punto fixo se llaman *momentos de potencias.*

427 Supongamos ahora que pasando siempre las direcciones de las tres potencias P, R, Q por los puntos fixos E, D, F el punto A se vaya moviendo en la direccion AS, es claro que los ángulos BAD, BAC, DAC irán decreciendo sucesivamente, y las rectas DE, DF se irán acercando á confundirse con la recta EF; de suerte que quando el punto A haya llegado al infinito, los ángulos BAD, BAC, DAC serán cero; las direcciones de las potencias serán paralelas; las rectas DE, DF se habrán confundido con EF, serán iguales á ellas, y todas tres perpendiculares á las direcciones de las potencias. Y como las pro-

Fig. propiedades demostradas en esta proposicion no dependen de modo alguno de la cantidad de los ángulos que forman entre sí las direcciones de las potencias, dirémos: *que si dos potencias paralelas y su resultante son cortadas perpendicularmente por una recta, serán entre sí como las partes de la recta comprehendidas entre las direcciones de las otras, ó lo que es lo mismo, cada potencia está representada por la parte de la recta comprehendida entre las direcciones de las otras dos.*

115 428 Así, si dos potencias P y Q obran con direcciones paralelas en un cuerpo qualquiera, y tiramos la recta AB perpendicular á sus direcciones, tendrémos $P : Q : R = S :: DB : AD : AB$; pero si tiramos una recta EF que corte de qualquier modo las direcciones de las potencias serán proporcionales $DB : AD : AB :: GF : GE : EF$; luego tambien serán $P : Q : S :: GF : GE : FE$, que nos manifiesta *que siempre que dos potencias que obran en direcciones paralelas, y su resultante, ó potencia que haga equilibrio con ellas, sean cortadas por una línea recta de qualquier modo, dichas potencias son entre sí como las partes de las rectas comprehendidas entre las direcciones de las otras dos.*

429 Luego 1.° si suponemos que EF sea una vara inflexîble y sin masa, de cuyos extremos cuelguen dos pesos, ó tiren dos potencias con direcciones paralelas, será preciso para el equilibrio 1.° que $P\times GF = Q\times EG$, esto es, que los momentos de las potencias P y Q sean iguales: 2.° que la potencia S que sostiene el sistema sea igual á $P+Q$, y paralela á las direcciones de las potencias: 3.° estando en equilibrio las tres potencias P, Q y S, cada una de ellas indiferentemente puede considerarse como que hace equilibrio con las otras dos, ó como que es igual y directamente contraria á la resultante de las otras dos. Considerando, por exemplo, la potencia Q baxo este punto de vista, es evidente que esta potencia es paralela á las dos componentes P y S, que ella está situada mas allá del punto D al lado de la mayor fuerza S, que obra en el mismo sentido que la fuerza menor P, y que es igual á la diferencia de las componentes; pues la equacion $S = P+Q$ da $Q = S-P$. La posicion del punto B á que está aplicada la potencia Q la hallarémos siempre que se conozca el punto D por medio de la equacion $P\times AD = Q\times DB$, pues de ella sacarémos $DB = \frac{P\times AD}{Q}$: si la potencia que hace equilibrio con las otras dos fuese P, tendríamos por las mismas reglas $P = S-Q$, $AD = \frac{Q\times DB}{P}$. En fin, teniendo presente que estas potencias son proporcionales á las partes de la recta comprehendida entre las direcciones de las otras, no tendrémos dificultad alguna en conocer qualquiera de las potencias, ni el punto á que debe aplicarse para que se verifique el equilibrio.

Qüestiones sobre la composicion y resolucion de las fuerzas.

430 I. *Hallar la resultante de dos fuerzas* P *y* Q *que están en un plano representadas por las rectas* AP, AQ *que concurren en un punto* A. 116

Sobre las rectas AP y AQ, como lados contiguos, trácese el paralelogramo $APRQ$, tírese la diagonal AR, y esta línea expresará la resultante de las dos fuerzas P y Q.

431 Qüestion II. *Hallar la resultante de las fuerzas* P, Q, S, *que están en un mismo plano, representadas por las rectas* Pn, Qu, Sz, *y que son inclinadas entre sí.*

Prolónguese la potencia Q hasta que encuentre en t la potencia P; tómese $OQ = ut$, y $Ph = tn$: sobre th y to, como lados contiguos, trácese un paralelogramo th, Do, y tírese la diagonal Dt; y ésta es la resultante de las dos potencias P y Q. Prolónguese la resultante D hasta que encuentre la fuerza S prolongada en el punto V; hágase $Dl = tV$, y $Sx = Zu$, y sobre XV y lV, como lados contiguos, trácese el paralelogramo $lVXR$, y tírese la diagonal VR; y esta línea será la resultante que se bus- 117

Fig. busca : fúndase esta práctica en lo dicho (420). Para encontrar una fuerza que ponga el sistema en equilibrio se prolongará *RV* hácia el punto *V*, haciendo la prolongacion $=VR$, y tendrémos la fuerza, que obrando en la direccion *RV*, hace equilibrio con todas las demas potencias.

Si las potencias fuesen mas se hallará la resultante por un método semejante.

118 432 Qüestion III. *Hallar la resultante de dos fuerzas paralelas* P *y* Q *que están en un mismo plano, y tienen una misma direccion.*

Súmense las dos potencias *P* y *Q*, y se tendrá el valor de la resultante *R*. Para conocer el punto *D* por donde pasa fórmese la siguiente proporcion $P+Q=R:P::AB:BD$.

Si las fuerzas paralelas tuviesen direcciones encontradas, como *P* y *S*, y quisiéramos la resultante *Q*, esta fuerza sería igual $S-P$ (429). Para conocer el punto *B* por donde pasa dirémos $P:S-P=Q::AD:DB$.

433 Si las fuerzas paralelas, cuya resultante se pide, fuesen muchas, y estuviesen en un mismo plano, se hallará la resultante de dos de ellas; despues se buscará la resultante de esta resultante hallada, y otra fuerza qualquiera, y se continuará de este modo hasta encontrar una sola fuerza única, y ésta es la resultante de todo el sistema.

119 434 Qüestion IV. *Descomponer una fuerza* AP *en otras dos que produzcan el mismo efecto que ella.*

Para resolver esta qüestion basta trazar sobre *AP*, como diagonal, un paralelogramo qualquiera, y los lados contiguos al punto *A* serán las fuerzas que se piden; pero ínterin no se dé la posicion y magnitud de una de las fuerzas, la qüestion admite una infinidad de soluciones; pues sobre la recta *AP* se pueden trazar una infinidad de paralelogramos diferentes, como *DABP*, *tAnP*, &c. : pero si se nos dice, que la una fuerza esté sobre la recta *Am*, y representada por *AD*, la qüestion solo admite una solucion, que será la que dé el paralelogramo *DABP*.

Si

Si cada una de las fuerzas *AD*, *AB* se descompone en Fig.
otras dos, quedará la fuerza *PA* resuelta en quatro fuerzas; y siguiendo las mismas reglas, se podrá resolver en quantas se quiera, colocadas si conviene en distintos planos.

CAPITULO III.

De los momentos y su aplicacion para la composicion y descomposicion de las fuerzas, y determinacion de los centros de gravedad.

435 *Si desde un punto* E *tomado en el plano de dos fuer-* 120
zas componentes P *y* Q, *y su resultante* R, *que concurren* y
en un punto A, *se baxan á sus direcciones* AP, AQ, AR 121
las perpendiculares EF, EG, EH, *se verificará que el momento de la resultante es igual á la suma ó á la diferencia de los momentos de las componentes, segun que el punto* E *cayga fuera* (fig. 120), *ó dentro* (fig. 121) *del ángulo* BAC, *esto es*, $Q\times EG+P\times EF=R\times EH$, ó $Q\times EG-P\times EF=R\times EH$. Construyendo el paralelogramo *ABDC* sobre las direcciones de las potencias se tendrá $P:Q:R::AB:BD:AD$; tírese la recta *AE*, y sobre esta línea, como diámetro, descríbase la circunferencia *AMEG*, que pasará precisamente por los puntos *E,G,H*, por ser rectos los ángulos *EFA*, *EGA*, *EHA*; tírense las cuerdas *EH*, *HG* y del punto *B* la *BK* paralela á *AE* que encuentre en *K* la recta *AR*, ó su prolongacion *AS*. Los dos triángulos *ABK*,*EHF* serán semejantes; porque el ángulo *ABK* es igual á su alterno *EAF*, y éste igual al ángulo *EHF*, por tener su vértice en la circunferencia, y abrazar un mismo arco; ademas son iguales los ángulos *BAK*,*HEF* por la misma razon. Luego sus lados nos darán la siguiente proporcion $AB:EH::AK:EF$, y por consiguiente $AB\times EF=HE\times AK$. Los triángulos *DBK*,*EHG* tambien son semejantes por la misma razon que

que los otros, con lo que tendrémos $DB : EH :: DK : EG$, ó $DB \times EG = EH \times DK$.

436 Sumando ahora una con otra estas dos equaciones tendrémos $BD\times EG + AB\times EF = EH\times(DK+AK)$ para la figura 120, y restando la primera de la segunda $BD\times EG - AB\times EF = EH\times(DK-AK)$ para la figura 121. Pero $DK+AK = AD$, y $DK-AK = AD$; luego haciendo las substituciones correspondientes, tendrémos para el primer caso $BD\times EG + AB\times EF = EH\times AD$; y para el segundo $BD\times EG - AB\times EF = EH\times AD$, &c., ó poniendo por AB, AD y AC las fuerzas P, Q, R, y reduciendo las dos expresiones á una sola por medio del signo $\pm$, tendrémos por último $Q\times EG \pm P\times EF = R\times EH$. El signo $+$ para quando el punto E cae fuera del ángulo PAQ, y el signo $-$ para quando dicho punto cae fuera del mismo ángulo.

437 Si el punto E estuviese dentro del ángulo QAR, en este caso el momento de P sería positivo, y el de Q negativo (*fig.* 121), y la expresion que ántes era $Q\times EG - P\times EF = R\times EH$ se transformaria en $P\times EF - Q\times EG = R\times EH$.

Luego 1.º Si á la resultante R se le opone una fuerza S igual y directamente opuesta, el sistema estará en equilibrio.

2.º Si suponemos que pasando siempre las potencias por los puntos P, Q, R el punto A se vaya desviando mas hasta el infinito, de suerte que las direcciones de las potencias sean paralelas, las rectas EF, EH, EG serán perpendiculares á las direcciones de las potencias, y se confundirán en una sola línea EG (*fig.* 120), ó FG (*fig.* 121).

438 Supongamos que la recta EG ó FE sean dos varillas inflexibles, y sin masa, sujetas en el punto E, sin mas accion que la de girar el sistema alrededor de este punto; desde luego se manifiesta que en (*fig.* 120) las dos potencias P y Q intentan hacer que el sistema gire de izquierda á derecha, y en (*fig.* 121) la potencia P inten-

ta

ta hacerle girar de derecha á izquierda, y la potencia Q de izquierda á derecha. Fig.

439 Luego 1.º quando dos potencias P y Q con direcciones paralelas obran en un cuerpo ó sistema de cuerpos, si las dos potencias intentan hacer que el sistema gire hácia una misma direccion, la suma de los momentos de estas potencias es igual al momento de la resultante; pero quando las potencias intentan hacer que el sistema gire hácia direcciones encontradas, el momento de la resultante es igual á la diferencia de los momentos de las componentes.

440 2.º Como cada una de las potencias componentes P y Q se puede mirar como la resultante de otras muchas fuerzas, sean ó no paralelas, dirémos por regla general que sea el que fuere el número de fuerzas que obran en un sistema de cuerpos, el momento de la resultante es igual á la suma ó diferencia de los momentos de las componentes; segun que éstas intentan hacer que el sistema gire hácia una misma direccion, ó hácia direcciones encontradas.

441 3.º Si la resultante pasa por el punto fixo E, el momento de esta fuerza ha de ser cero, y en este caso tendrémos $Q\times GH - P\times FH = 0$, ó lo que es lo mismo, $Q\times GH = P\times FH$, esto es, los momentos de las fuerzas componentes son iguales; de suerte que si las potencias son muchas, siempre que la resultante pase por el punto fixo E, la suma de las potencias que intentan hacer que el sistema gire hácia una direccion, es igual á la suma de los momentos de aquellas potencias que intentan hacer que gire en direccion contraria.

442 4.º Si por el punto E tiramos una recta qualquiera EX que no sea paralela á las direcciones de las potencias, y de los puntos F, H, G tiramos las rectas FV, HT, GX que sean paralelas entre sí, y vayan á encontrar la recta EX de qualquier modo, será $Q\times GX \pm P\times FV = R\times HT$. Basta considerar que son proporcionales $EG : GX :: EH : TH :: EF : EV$, y que en la equacion 122 y 123

Q

Fig. $Q\times GE\pm P\times EF=R\times EH$ se pueden substituir unas líneas por otras, y tendrémos la equacion propuesta $Q\times GX\pm P\times FV=R\times HT$, que nos dice, que quando los momentos de muchas fuerzas paralelas se refieren á una recta, ó á un exe, el momento de la resultante tambien es igual á la suma ó diferencia de los momentos de las componentes.

Y si por el punto E tiramos la recta En paralela á XG que encuentre las potencias (prolongándolas si fuese necesario) en los puntos d, m, n, probaríamos igualmente que $Q\times En\pm P\times Ed=R\times Em$.

Habiendo explicado ya la teoría de los momentos, nos resta hacer algunas aplicaciones á la composicion de las fuerzas (sin embargo de haber dicho lo bastante en otro lugar) y determinacion de los centros de gravedad.

443 Qüestion I. *Determinar por medio de los momentos la resultante de muchas fuerzas paralelas colocadas en un mismo plano, y que obran en un mismo sentido, igualmente que el punto por donde pasa.*

124 Sean las potencias P, S, Q, L: tírese una recta MD que las corte perpendicularmente (aunque podria cortarlas de qualquier modo), por lo dicho en los párrafos anteriores tendrémos llamando R esta resultante $R\times Mr = P\times MA+S\times MB+Q\times MC+L\times MD$. No hay duda que si en esta equacion conociéramos el valor de R, tendríamos hallado el de Mr con dividir por R los dos miembros de la equacion. Para conocer esta resultante refiramos los momentos á otro punto qualquiera N de la misma recta, y tendrémos $R\times Nr=P\times NA+S\times NB+Q\times NC+L\times ND$, restando esta equacion de la anterior, será $R\times Mr-R\times Nr=P\times MA-P\times NA+S\times MB-S\times NB+Q\times MC-Q\times NC+L\times MD-L\times ND$, ó lo que es lo mismo, $R(Mr-Nr)=P\times(MA-NA)+S(MB-NB)+Q(MC-NC)+L(MD-ND)$, ó $R\times MN=P\times MN+S\times MN+Q\times MN+L\times MN$, ó suprimiendo el factor comun, $MN, R=P+S+Q+L$, que nos dice, *que la resultante de muchas fuerzas paralelas situadas en un mismo plano, y que obran en una misma direccion, es igual á la suma de las componentes.* Hallado por este medio el valor de la resultante, conocerémos el punto por donde pasa con dividir por $R=P+S+Q+L$ los dos miembros de la primera equacion; con lo que tendrémos $Mr=\frac{P\times MA+S\times MB+Q\times MC+L\times MD}{P+S+Q+L}$, que nos dice, *que para hallar la distancia á que pasa la resultante del punto fixo* M *se divida la suma de los momentos de todas las potencias referidas al mismo punto por la suma de las mismas potencias.*

444 Si los momentos se refiriesen á un punto u tomado entre las direcciones de las potencias, como en este caso las potencias P y S intentan hacer que el sistema gire en una direccion, y las potencias Q y L en direccion contraria, los momentos de estas últimas potencias deberian señalarse con signo contrario al que lleven los momentos de las otras; de suerte que si á éstas les damos el signo negativo, las otras lo han de llevar positivo, y así tendrémos $ru=\frac{Q\times Cu+L\times Du-S\times Bu-P\times Au}{Q+L+S+P}$.

445 Si alguna de las potencias obrase en direccion contraria la señalarémos con el signo negativo, aunque todas las potencias intenten hacer que el sistema gire hácia una misma direccion, como se verificaría si el punto fixo se tomase en medio de las potencias.

446 Luego por regla general, *sea el que fuere el número de potencias, que con direcciones paralelas, ya sigan una misma direccion ó direcciones encontradas, obran en un cuerpo ó sistema de cuerpos la distancia á que pasa la resultante de todas ellas, respecto de un punto fixo, es igual á la suma de los momentos de la potencia que intentan hacer girar al sistema hácia una direccion, ménos la suma de los momentos de las que intentan hacerle girar en direccion contraria, partida por la suma de las fuerzas que obran hácia una misma direccion, ménos la suma de las que obran en direccion contraria.*

Qües-

Fig. 447 Qüestion II. *Hallar la resultante de quatro fuer-*
125 *zas paralelas* P,S,Q,L, *que están en distintos planos, y obran en una misma direccion, y tambien el punto por donde pasa la resultante.*

Supongamos las direcciones de las potencias perpendiculares al plano del papel, y que sean B, C, D, E los puntos donde la encuentra: imagínense en este plano dos exes AK, AF perpendiculares entre sí, y desde los puntos B, C, D, E tírense á los exes las perpendiculares $BV, BX, CY, CF, DG, DZ, EK, EH$. Como las direcciones de las potencias son paralelas, la resultante ha de ser indispensablemente igual á la suma de las componentes: bastará para convencernos de esta verdad considerar que cada dos fuerzas componentes tiene una resultante igual á la suma de las dos, y que se halla en el mismo plano que ellas. Por lo que hace á la determinacion del punto por donde pasa la resultante, si suponemos que éste sea R, y baxamos á los exes las perpendiculares RT, RS', la distancia á que pasará la resultante del exe AF (443), será $= S'R = \frac{P \times AX + AY + Q \times AG + L \times AK}{P + S + Q + L}$. Y por la misma regla hallarémos que la distancia á que la resultante pasará del exe AK será $TR = \ldots\ldots \frac{P \times AV + S \times AF + Q \times AZ + L \times AH}{P + S + Q + L}$. Luego si sobre el exe AK tomamos $AT = S'R$, y $AS' = TR$, y en los puntos T y S' levantamos las perpendiculares $TR, S'R$ que se corten en el punto R, éste será el punto por donde pasa la resultante, el qual suele llamarse *centro de fuerzas*. Si el punto A donde se encuentran los exes cayese entre las direcciones de las potencias, en este caso habria momentos positivos y momentos negativos, y la suma de los unos sería igual á la suma de los otros, siempre que el punto A se confundiese con el punto R. Luego 1.° la suma de los momentos de las potencias quando éstas se refieren al centro de fuerzas es cero: 2.° para hallar el centro de fuerzas de muchas potencias paralelas se imaginarán dos rectas perpendiculares entre sí (aunque pueden formar qualquier ángulo) se hallarán los momentos de las potencias respecto de cada línea, se dividirán por la suma de las potencias, y los quocientes serán las distancias á que se halla el centro de cada uno de los exes, el que se determinará del modo que dexamos dicho.

448 Quando las fuerzas, cuya resultante se busca no son paralelas, y están en distintos planos, se descompone cada fuerza en otras dos, procurando que la una de ellas esté en un plano, y la otra en otro que sea perpendicular á aquel: se halla la resultante de las fuerzas paralelas que hay en cada uno de los planos, y queda el sistema reducido á solas dos fuerzas, y éstas se podrán reducir á una sola, siempre que prolongadas se encuentren en un punto; pero de no encontrarse, el sistema tendrá dos resultantes.

Aplicacion de los momentos para determinar los centros de gravedad.

449 Hemos dicho en otro lugar que todos los cuerpos son pesados. Abandonados á ellos mismos descienden siguiendo unas direcciones que caminan al centro de la tierra. Las partes integrantes de que se componen son unos cuerpecitos pequeños, que tambien son pesados. Todo cuerpo finito puede considerarse como un sistema de una infinidad de cuerpecitos, liados entre sí de tal suerte que todos ellos forman un solo cuerpo. Y como el punto donde van á concurrir las direcciones de todos estos cuerpecitos, esto es, el centro de la tierra, está colocado á una distancia muy grande respecto de la extension que el cuerpo ocupa en la superficie de la tierra, podemos considerar, sin cometer error sensible, todas las direcciones de la gravedad como paralelas entre sí.

En efecto se encuentra que siendo el radio de la tierra de cerca de 1500 leguas de 20 al grado, una distancia de 37 varas tomada en la superficie de la tierra, subten-

Fig. tende un ángulo que apénas es de un segundo.

450 Se sabe por los fenómenos astronómicos que un mismo cuerpo no pesa igualmente á diferentes distancias del centro de la tierra, y que la pesantez de un cuerpo que se desvía ó se aproxîma al centro de la tierra, disminuye ó aumenta en la misma razon que aumenta ó disminuye el quadrado de la distancia á dicho centro. Pero esta variacion de pesantez no puede ser sensible en los cuerpos que la Estática considera, porque estos cuerpos están todos colocados á distancias del centro, que no difieren sensiblemente las unas de las otras.

451 Por cuya razon considerarémos la pesantez de cada molécula de la materia como una fuerza constante, y las direcciones de la pesantez de todas las partes de un mismo cuerpo ó sistema de cuerpos, como que son paralelas entre sí; y por tanto la teoría que dexamos establecida sobre la composicion y descomposicion de las fuerzas paralelas la aplicarémos á los cuerpos pesados, tomando en lugar de las fuerzas las pesanteces de las partes de un mismo cuerpo.

452 Se llama *línea vertical* la línea que siguen los cuerpos que caen á impulsos de la pesantez; y *línea horizontal* se llama una línea perpendicular á la horizontal: *plano vertical*, un plano que pasa por una línea vertical; y *plano horizontal*, un plano al qual son perpendiculares las direcciones de la pesantez, ó lo que es lo mismo, aquel al qual se pueden tirar dos líneas horizontales que se corten.

125 453 Esto supuesto, sean B, C, D, E los cuerpos elementales que componen un mismo sistema, y supongamos que las fuerzas paralelas P, S, Q, L sean las pesanteces que obran todas en una misma direccion, tendrémos:

1.° El peso total del sistema es igual á la suma de los pesos elementales de que se compone, pues la resultante de todas las fuerzas es igual á $P+S+Q+L$ (443).

2.° Qualquiera posicion que se dé al sistema conserva

va su peso total, pues cada cuerpo elemental lo conserva tambien, pero el peso total es $=$ á la suma de los pesos particulares; luego, &c.

3.° Si conservando las partes del sistema sus respectivas distancias le damos varias posiciones, las direcciones del peso de todo el sistema se cortarán en un mismo punto. Este punto, al qual hemos llamado *centro de fuerzas* paralelas, le llamarémos tratando de los cuerpos *centro de gravedad*.

454 Por esta nocion que dexamos dada del centro de gravedad se infiere, que si se suspende un cuerpo por un cordon, cuya direccion prolongada pase por este punto, el cuerpo quedará inmóvil en qualquiera situacion que se ponga: en todo cuerpo ó sistema de cuerpos exîste un tal punto, esto es, un punto por donde pasa la resultante de todos los impulsos con que la gravedad obra en todas sus partes; de suerte que suspender el cuerpo en la direccion de este punto, es lo mismo que destruir la resultante, y por esta razon el cuerpo queda inmóvil.

455 Pero no es preciso para destruir la resultante que el cuerpo se haya de suspender; lo mismo sucede apoyando el cuerpo en la direccion de la vertical que pasa por su centro de gravedad. Por esta razon puede un edificio desplomarse sin caer hasta cierto punto, esto es, hasta que la vertical esté si sale ó no de su base; pues en saliendo, como esta fuerza no queda destruida, ha de producir su efecto derribando el edificio. Lo mismo nos sucede á nosotros: podemos ladearnos sin caer, ínterin nuestra vertical no salga de los pies; pues en saliendo, sin remedio hemos de caer. Quando subimos una cuesta nos inclinamos hácia delante, y quando la baxamos hácia atras. Estas posiciones nos son precisas para sostener la vertical, y preservarnos por este medio de caer. El volatin se mantiene en la maroma miéntras está sostenida dicha línea: un cuerpo que descansa sobre un plano en un solo punto no puede caer, si la vertical pasa por el pun-

Fig. to de contacto ; pero si el cuerpo toca al plano en dos puntos, las verticales tiradas por estos dos puntos, y la que pasa por el centro de gravedad han de estar en un mismo plano.

456 De lo qual se deduce un método muy sencillo para hallar el centro de gravedad de un cuerpo de figura qualquiera.

Suspéndase este cuerpo por medio de un cordon que se sostenga sucesivamente por dos puntos diferentes; prolónguense mentalmente hácia lo interior del cuerpo las dos direcciones del cordon, y el punto donde se cortan será el centro de gravedad del cuerpo.

457 Quando el cuerpo cuyo centro se busca por este método es tan grande que no sea fácil colgarlo, se hará de la misma materia otro mas pequeño semejante á él; se hallará el centro del cuerpo pequeño; y por la posicion que tenga en éste, se podrá fácilmente hallar la del cuerpo grande.

Todas las propiedades que dexamos explicadas de los momentos de las fuerzas paralelas, que obran en un mismo sentido, se verifican en un sistema de cuerpos sumiso á la accion de la pesantez. Apliquémosla para determinar los centros de gravedad.

126 458 Sea un número qualquiera de pesos P,Q,R,S en-
127 filados por medio de una varilla inflexíble y sin masa, si consideramos todo el peso del sistema, como reunido en un punto G, y referimos los momentos á un punto E tomado en la misma varilla, tendrémos en virtud de lo dicho (447) $P\times PE + Q\times QE \pm R\times RE \pm S\times SE = (P+Q+R+S)GE$, los signos positivos para la primera figura, y los negativos para la segunda.

459 No puede quedarnos duda acerca de esto considerando los cuerpos como otras tantas fuerzas paralelas, cuyos momentos se refieren á un punto fixo.

Si dividimos los dos miembros de la equacion por la suma de los pesos, tendrémos la distancia EG á que está el centro de gravedad del punto E, que será igual

á

á la suma de los momentos de los pesos partida por la suma de las masas. Pero si el punto E cayese sobre G, esto es, si los momentos se refiriesen al centro de gravedad como en este caso, el momento de todo el sistema ó el segundo miembro de la equacion es cero, tendrémos $P\times PG + Q\times QG = R\times RG + S\times SG$: despues de pasar las cantidades negativas al segundo miembro : que nos da á conocer que respecto el centro de gravedad la suma de los momentos de los cuerpos que están á un lado es igual á la suma de los momentos de los cuerpos que están al otro lado.

460 Si tiramos otro exe qualquiera ES, y las paralelas entre sí Pp, Qq, &c. por ser proporcionales $PE : QE : GE : RE : SE :: Pp : Qq : Gg : Rr : Ss$, substituyendo unas líneas por otras en la equacion, tendrémos $P\times Pp + Q\times Qq \pm R\times Rr \pm S\times Ss = (P+Q+R+S)\times Gg$, que concuerda con lo dicho (453): que suponiendo que el exe ES pase por el centro, será $P\times Pp + Q\times Qq = R\times Rr + S\times Ss$.

461 Todo lo qual nos manifiesta, que si se consideran los momentos de muchos pesos, y el del sistema reunido al centro de gravedad, por razon á un exe ó á un plano, *la suma ó la diferencia de los momentos de estos pesos será igual al momento del sistema ; y si el exe ó el plano de los momentos pasa por el centro de gravedad, la suma de los momentos de los pesos que están á un lado será igual á la suma de los momentos de los que están al otro lado.* Por estas propiedades se encuentra en todos los casos el centro de gravedad de un sistema de cuerpos, como lo dexamos explicado.

462 Se hace mucho uso en la Mecánica de los centros de gravedad, y por tanto es indispensable tener presentes los métodos que se han explicado para determinarlos. Estos suponen, como se ha visto, que un sistema, ó un cuerpo considerado como tal, es compuesto de partes aisladas, de las quales cada una se considera como reunida ó concentrada en un solo punto,

P 2 que

que es su centro de gravedad particular.

463 Pero todos estos métodos, aunque ciertos en la teoría, no son susceptibles de precision en la práctica; porque siendo sumamente vastas las partes de un sistema, no podemos considerar que cada una de ellas esté reunida en un punto; ademas que la irregularidad freqüente de las figuras, y muchas veces las de los pesos, quando éstos no son homogéneos en toda su extension, no permiten hallar los centros particulares de gravedad, sino es por aproxîmacion.

464 Hay un gran número de cuerpos, cuyos centros de gravedad se pueden determinar con solo el auxîlio de la Geometría, tales son los cuerpos homogéneos, cuya figura está ajustada á una ley de continuidad, como el triángulo, quadrado, círculo, elipse, cilindro, prisma, esfera, esferoyde, &c.; en éstos el centro de gravedad es el mismo que el de la figura. De suerte que la Geometría y la Mecánica pueden auxîliarse mútuamente para determinar este punto.

465 Hemos dicho que la pesantez de un cuerpo se puede mirar como reunida en el centro de gravedad; pero para medir esta fuerza es preciso atender á la calidad de la materia del cuerpo. Por exemplo, dos esferas, la una de oro y la otra de plata de un mismo diámetro no pesan igualmente: sus pesos, con corta diferencia, son como 19 á 10. Es evidente que el peso de un cuerpo homogéneo es tanto mayor quanto lo es su volúmen, y que contiene tantas mas partes pesadas quanta es mayor su densidad. Por consiguiente, si llamamos G el volúmen de este cuerpo p, su densidad ó *pesantez específica*; es á saber, el peso de una parte suya (por exemp. de una pulgada cúbica), de las quales podemos considerar compuesto el cuerpo; el peso absoluto, ó total de él será representado por el producto $G\times p$. En el exemplo que hemos propuesto de las esferas: los volúmenes G son los mismos, pero las pesanteces específicas p son como 19 y 10. Luego si los pesos absolutos los ex-

expresamos por P y P' será $P : P' :: G\times 19\ G\times 10 :: 19$ Fig.
$: 10$. El peso que tiene un cuerpo quando se prescinde de su volúmen se llama *peso absoluto*; y se llama *peso específico* ó *gravedad específica* el que tiene un cuerpo de un volúmen determinado.

466 Qüestion II. *Hallar el centro de gravedad de la línea recta y perímetros rectilíneos de las figuras.*

Dexamos dicho (464) que el centro de gravedad de un cuerpo homogéneo es el mismo que el centro de figura; luego si suponemos una línea recta como uniformemente pesada en toda su longitud, esto es, si suponemos que sea una línea física compuesta de partes materiales, aunque éstas sean muy pequeñas, siendo homogéneas, estará su centro de gravedad en medio de ella: aunque en esto no puede ocurrir duda, conviene que lo demostremos.

Sea la recta AB cargada de pequeños pesos iguales 128
en toda su longitud; si se la suspende de su medio C por un hilo, ó de otro qualquier modo, quedará en equilibrio, porque cada dos puntos colocados á igual distancia del punto C tienen su centro de gravedad en este punto; de donde se deduce que la resultante de todos los pesos que forma la línea AB está dirigida segun la vertical KC. Supongamos que se incline la recta AB hasta la posicion ab; la resultante de todos los pesos se dirigirá tambien segun la vertical KC. Luego el punto C de la línea es su centro de gravedad.

467 Conocido el método de hallar el centro de gravedad de la línea recta, no tendrémos dificultad en encontrar el del perímetro de un polígono qualquiera. Propongámonos primero hallar el centro de gravedad de dos 129
líneas que forman un ángulo qualquiera ABC.

Hállense los centros m y n de los lados del ángulo (466), y tírese la recta mn. Considérese el peso de estas líneas reunido en sus centros particulares de gravedad, y dígase despues $AB+BC : AB :: mn : mG$, y el punto G hallado por esta proporcion es el centro de gra-

Fig. vedad pedido. No tendrémos duda acerca de esto si consideramos que los pesos de las líneas reunidos en sus centros particulares nos presentan un sistema de fuerzas paralelas (447), cuya resultante ha de pasar indispensablemente por un punto G, determinado del modo que hemos visto.

130 468 2.° *El del perímetro de un triángulo* ABC. Hállese el centro de gravedad de los lados AB,AC, como en el caso anterior, y sea O este centro; hállese el centro S de la recta BC, y tírese la OS: hecho esto fórmese la siguiente proporcion $AB+BC+AC$: BC :: SO : OG, y el punto G es el centro que se pide.

131 469 3.° *El de un quadrilátero qualquiera* ABCD. Hállese el centro de sus lados AB,AD (468), y sea éste O: hállese igualmente el de los lados BC,CD, y sea éste P; tírese la recta OP, y dígase despues $AB+BC+CD+DA$: $AB+AD$ :: OP : PG, y G es el centro.

132 470 4.° *El del perímetro de un polígono irregular* ABCDE (digo polígono irregular, porque el del polígono regular, igualmente que el del triángulo equilátero y paralelógramo, es fácil inferir que coincide con el centro de figura): divídanse todos los lados por medio, y tírense las rectas Sm, nr: búsquese el centro de gravedad O de los lados AB, AE (467) igualmente que el de los lados BC,CD, y tírese la recta ap; búsquese el centro de gravedad Q de los quatro lados EA, AB, BC, CD (469), y tírese la recta Qt: hecho esto dígase despues $AB+BC+CD+DE+AE$: ED :: qt : Gq, y G es el centro que se pide. Por las mismas reglas se hallará el centro de gravedad del perímetro de qualquiera figura rectilínea.

471 Qüestion II. *Hallar el centro de gravedad de las figuras planas rectilíneas.*

133 *Busquemos primero el centro de gravedad de un triángulo* ABC. Divídanse los lados AC,BC en dos partes iguales con las rectas Ap, Bn, y el punto G donde éstas se cortan es el centro de gravedad. Porque si consideramos la

la area del triángulo compuesta de una multitud de elementos ó líneas físicas paralelas á AC (porque las líneas matemáticas, como que no tienen materia, no están sujetas á las leyes de la gravitacion, y por tanto no pueden tener centro de gravedad) todas ellas tendrán sus centros particulares en la recta Bn; y si consideramos del mismo modo que la area del triángulo se componga de líneas paralelas á BC, tambien tendrán sus centros en la recta AP. Luego si suspendemos el triángulo de un cordon que pase por Bn, se mantendrá inmóvil, y lo mismo sucederá si lo suspendemos de un cordon que pase por Ap. Luego el punto G (454) es el centro de gravedad.

472 Para encontrar quanto dista este punto del vértice A tirarémos la recta np, la qual será paralela á AB por estar divididos por medio los lados AC y BC, con lo que resultarán los triángulos semejantes Cpn,CBA, y PGn, ABG. Los primeros nos dan $Cp : CB :: pn : AB$, y los segundos $pn : AB :: Gp : AG$; y suprimiendo la razon comun $Cp : CB :: pG : AG$; pero $Cp = \frac{1}{2}CB$, luego $pG = \frac{1}{2}\frac{AG}{1} = \frac{1}{3}AP$. Este resultado nos enseña que para hallar el centro de gravedad de un triángulo, se tire desde uno de los vértices una recta que divida el lado opuesto por medio, se tome en esta recta (contando desde el vértice) las dos terceras partes de ella, y el punto donde terminan es el centro que se pide.

473 2.° *La de un quadrilátero* ABCD. Tírese la diagonal BD, y quedará dividido en dos triángulos; hállanse los centros o y p de estos triángulos (471), y tírese la recta op: hecho esto dígase despues, el quadrilátero $ABCD$: al triángulo ABD :: op : pG, y el punto G hallado por este medio es el centro de gravedad. 134

474 Luego el centro de gravedad de un paralelogramo $ABCD$ coincide con el centro de figura; porque si tiramos las diagonales AC,BD, tendrémos que el centro del triángulo ABD estará en un punto O de la recta 135

Fig. ta AG, tal que sea $Ao = \frac{2}{3} AG$, y por la misma razon estará el punto p, centro de gravedad del triángulo BDC en la recta CG, y á una distancia Cp del vértice igual á $\frac{2}{3} CG$; pero como los triángulos son iguales, ha de estar op dividida por medio en G, esto es, en el punto de concurso de las diagonales.

136 475 3.º *El de un polígono qualquiera* ABCDE. Divídase en triángulos con las diagonales EB, EC, y hállense los centros de gravedad o, p, q de cada uno de ellos (471); tírese la recta op, y dígase: el quadrilátero $ABCE$: es al triángulo $ABD :: op : ps$; hecho esto tírese la recta Sq, y dígase: el polígono es al triángulo $EDC :: Sq : GS$, y G es el centro de gravedad del polígono.

Por la misma regla se hallará el centro de gravedad de otro polígono mas compuesto.

476 4.º *El de un círculo.* Con atender á la simetría de esta superficie se hace patente que es el mismo que el de su figura.

137 477 Qüestion III. *Hallar el centro de gravedad de algunos sólidos.*

El de una pirámide triangular SABC. Hállense los centros de gravedad de los triángulos ABC, SBC, y tírense desde los vértices opuestos las rectas AF, SE, que se cortarán precisamente en un punto G, por hallarse en el plano del triángulo ADS, y el punto G es el centro de gravedad de la pirámide: para demostrarlo considérese la pirámide compuesta de una infinidad de elementos paralelos á ABC: todos ellos tendrán sus centros particulares en la recta SE, y si se suspende la pirámide por un cordon que pase en la direccion de esta recta quedará inmóvil, y así el centro de la pirámide ha de estar en algun punto de la recta SE. Si consideramos igualmente que la pirámide esté compuesta de elementos paralelos al triángulo SBC, todos tendrán sus centros en la recta AF; y si se cuelga la pirámide por un cordon que pase por esta línea, tambien quedará inmóvil, y por tanto se ha de hallar en ella el centro de la pirámide; y como hemos visto que tambien debe hallarse en la recta SE, ha de estar precisamente en el punto G donde se cortan.

Fig.

478 Para conocer la posicion de este punto tírense las rectas SD, AD, EF, y tendrémos los triángulos semejantes DEF, DAS y EGF, ASG: los primeros dan $DE : DA :: EF : AS$, y los segundos $EF : AS :: EG : SG$, y por una igualdad de razones $DE : AD :: EG : SG$, pero $ED = \frac{AD}{3}$; luego $EG = \frac{SG}{3} = \frac{SE}{4}$. Esto nos manifiesta que el centro de gravedad de la pirámide se halla á los $\frac{3}{4}$ de la recta tirada desde el vértice al centro de gravedad de la base contando desde el vértice. Por el mismo método se hallará el centro de gravedad de otra pirámide qualquiera, y tambien la de un cono.

Hasta aquí no hemos hecho uso de los momentos para hallar los centros de gravedad por parecerme ser mas sencillo el que he seguido, pero en las qüestiones que sigan nos es mas cómodo apelar á ellos.

479 Qüestion IV. *Encontrar el centro de gravedad de un arco de círculo* AOB.

Desde luego se infiere que dicho centro ha de estar 138
en algun punto del radio CO, que divide el arco en dos partes iguales; fixemos su posicion por medio de los momentos, para lo qual concibamos que el arco AOB está dividido en una infinidad de partes mn, que se pueden mirar como unas pequeñas líneas rectas, cuyos centros particulares de gravedad estarán en medio de ellas. Y refiriendo los momentos de estas partes pequeñas al diámetro EK, será el momento de la resultante igual á la suma de los momentos particulares de los pequeños arcos (461).

Sea q el centro de gravedad del pequeño arco mn, y desde los puntos A, B, m, n, q báxense al diámetro las perpendiculares AV, BZ, mx, ny, qz; tírese mr paralela al diámetro, y tírese el radio Cq, los dos triángulos nrm, ezq, Fig. Czq, que tienen los lados perpendiculares cada uno al suyo, son semejantes, y dan $mn : mr = xy :: Cq = CO : qz$. Luego $mn \times qz = xy \times CO$: el mismo razonamiento, y la misma conclusion tiene lugar para los demas elementos del arco AOB, de donde se deduce que la suma de todos los momentos $mn \times qz$ es igual al producto de la linea finita VZ, ó AB por CO. Con lo que tendrémos $AOB \times GC = AB \times CO$, y por consiguiente $GC = \frac{AB \times CO}{AOB}$, que nos manifiesta que la distancia del centro de gravedad de un arco de círculo al centro del círculo es igual al quociente del producto de la cuerda, y el radio dividido por el arco.

480 Qüestion V. *Hallar el centro de gravedad* G *de un sector de círculo* ACBO.

139 Este centro debe estar sobre el radio CO, que divide al sector en dos partes iguales; nos resta saber en que parte de él se halla este punto.

Para lo qual imaginarémos que el sector ABC está compuesto de una infinidad de triángulos como Cmn; sea q el medio de la base de este triángulo, y tírese el radio Cq, sobre el qual se tomará la $Ct = \frac{2}{3} Cq$, y el punto t será el centro de gravedad del pequeño triángulo Cmn. Desde los puntos A, B, m, n, q tírense al diámetro HK, que supondrémos paralelo á la cuerda AB, las perpendiculares AV, BZ, mx, ny, qz, y tírese mr paralela á la misma cuerda. El momento del triángulo Cmn por razon al diámetro HK estará expresado por $\frac{mn \times Cq}{2} \times tu$, ó por ser $tu = \frac{2}{3} qz$, y $CO = Cq$; $\frac{mn \times CO}{2} \times \frac{2}{3} qz$. Pero á causa de los triángulos semejantes mrn, Czq es $mn \times qz = xy \times CO$. Luego el momento propuesto será.... $\frac{\overline{CO}^2}{2} \times \frac{2}{3} xy$. Luego la suma de los momentos de todos los triángulos elementales que componen el sector es $\frac{\overline{CO}^2}{2} \times \frac{2}{3} VZ$, ó $\frac{\overline{CO}^2 \times AB}{3}$; pero esta suma es igual

igual (461) á $ACBO \times CG$, es á saber, á $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG$; luego tendrémos la siguiente equacion $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG = \frac{\overline{CO}^2 \times AB}{3}$, que nos da $CG = \frac{2CO \times AB}{3AOB}$. Fig.

Conocido el centro del sector $ACBO$, y hallando el del triángulo ACB, se determinará fácilmente el del segmento ABO, considerando que el momento del segmento por razon al centro es igual á la diferencia de los momentos del sector y del triángulo.

481 Qüestion VI. *Hallar el centro de gravedad de un* 140
tronco de pirámide de bases paralelas ABCDEMHIKL.

Desde luego se infiere que suponiendo que $SABCD$ sea la pirámide entera, y tirando del vértice S al centro de gravedad q de la base la recta Sq, pasará indispensablemente por el centro q' del polígono $HIKLM$; y si suspendemos el tronco, segun la direccion Sq, se mantendrá inmóvil, y así su centro de gravedad ha de estar en un punto r de esta recta; pero como este punto sería dificil de encontrar de un modo directo, por la dificultad de hallar otro punto de suspension, acudirémos á los momentos. Y así llamarémos S la solidez de la pirámide entera, s la pirámide añadida, será $S-s$ la del tronco, y considerando los momentos de estos tres sólidos con relacion al vértice S, tendrémos $S \times \frac{3}{4} Sq = s \times \frac{3}{4} Sq' + (S-s) \times Sr$, ó bien $S \times \frac{3}{4} Sq - s \times \frac{3}{4} Sq' = (S-s) \times Sr$ (tom. I. 336), y por consiguiente $Sr = \frac{S \times \frac{3}{4} Sq - s \times \frac{3}{4} Sq'}{S-s}$, que nos da á conocer el punto r, centro de gravedad del tronco.

Del equilibrio en las máquinas.

482 Todo agente de qualquiera naturaleza que sea no contiene en sí mas de una cierta medida de fuerza, que no es capaz de aumentar realmente. Pero se puede al-

alterar una misma fuerza, de suerte que produzca muchos efectos, que aunque todos tengan el mismo valor absoluto, difieran por razon de los elementos ó factores que la componen.

Esto es, si llamamos $M\times V$ una fuerza, siendo M la masa del cuerpo que mueve, y V la velocidad que le comunica, podemos hacer que conservando $M\times V$ su valor absoluto, se aumente uno de sus factores quanto se quiera, con tal que el otro disminuya en la misma razon.

483 Este es el objeto general de las máquinas: en unos casos las usamos para mover un gran cuerpo, lo que conseguimos dándole una velocidad muy pequeña, y en otros nos acomoda que un cuerpo tenga una gran velocidad, y para ello nos es indispensable disminuir el cuerpo.

484 Las máquinas conocidas son infinitas, y cada dia se aumenta su número; pero todas ellas se reducen á cinco especies, que son: *la máquina funicular*, *la palanca*, *la polea*, *el torno*, *y el plano inclinado.*

A éstas se las llama *máquinas simples*, y las que se componen de la combinacion de dos ó mas de éstas, se llaman *máquinas compuestas.* Tratarémos de cada una de las máquinas simples en particular, y de las máquinas compuestas solo tratarémos de la *rosca*, *la cuña*, *las tróculas y ruedas dentadas*: de estas quatro máquinas, las dos primeras son tan sencillas, que muchos Autores las incluyen en el número de las máquinas simples.

CAPITULO IV.

De las máquinas simples.

De la máquina funicular.

485 Llámase máquina funicular aquella en que solo se hace uso de cuerdas para sostener un peso, ó para contrabalancear muchas fuerzas. La teoría de esta máquina es tan extensa, que sería exceder los límites de este Compendio si la tratásemos toda; por cuya razon nos ceñirémos solo á tratar primero del equilibrio entre las potencias quando son tres que están en un mismo plano, y tiran de otros tantos cordones atados de un mismo nudo: 2.° quando las potencias siendo mas de tres están en un mismo plano, y obran en otros tantos cordones atados de tres en tres en un mismo nudo.

Fig. 141

486 *En quanto á lo primero* sean tres potencias P,Q,S, que están en un mismo plano, y obran en otros tantos cordones atados en un mismo nudo A, y exprese AB la potencia Q, y AC la potencia S; construyendo sobre estas partes el paralelogramo $ABDC$, y tirando la diagonal AD, será preciso para que haya equilibrio, que la fuerza AD resultante de las dos potencias s y Q sea igual y diametralmente opuesta á la potencia P, que es lo mismo que decir que las tres potencias han de estar representadas por los lados contiguos y diagonal de un paralelogramo formado sobre sus direcciones: en virtud de lo qual tendrémos $P : Q : S :: AD : AB : AC{=}BD$, ó (422) $P : Q : S ::$ sen. QAS : sen. SAR : sen. QAR, que nos dice *que para que estas tres potencias estén en equilibrio, han de ser entre sí como los senos de los ángulos formados por las direcciones de las otras dos.*

Luego 1.°, si las potencias tiran de los extremos de una cuerda que abraza un apoyo fixo, ó el contorno 142
de una curva ó polea serán precisamente iguales; porque habiendo equilibrio, es señal que la cuerda no se corre á ningun lado; pero esto no puede verificarse si las potencias son desiguales. Luego; &c.

Siendo las potencias iguales, lo han de ser los ángulos QAR,RAS, cuyos senos son sus medidas, y la resistencia, ó presion del apoyo en este caso será á una de las potencias, como sen. QAS : sen. $\frac{1}{2}$ QAS.

2.° En vez de la potencia P se puede substituir un peso qualquiera, y la razon de las potencias al peso que han de sostener será la misma que dexamos averiguada.

En

Fig. 3.° En vez de las potencias Q y S podemos considerar dos apoyos fixos como dos clavos que tienen su-
143 jetos los extremos de la cuerda.

487 *En quanto á lo segundo*, sean A,P,S,Q,H cin-
144 co potencias que tiran de otros tantos cordones atados de tres en tres en los nudos B,C,D: que todas estén en un mismo plano, y las potencias A,H sean ó puedan ser dos apoyos fixos. Ya que todo el sistema está en equilibrio, lo estará cada una de sus partes; y así tomando solo la parte $APCB$, y mirando la tension del cordon BC como una potencia T que tira en la direccion BC, tendrémos que $A : P : T ::$ seno PBC: sen. ABC: sen. ABP (422); y haciendo lo mismo con cada una de las partes $BSDC$, $CQHD$, tendrémos la relacion que las cinco potencias guardan entre sí para que el sistema esté en equilibrio.

Prolónguense las direcciones de los cordones BC y CD: supongamos que la fuerza S esté expresada por CF, y trácese el paralelogramo $CdFb$, la tension del cordon CD será Cd, y la del cordon BC será Cb; la potencia P y la tension del órden BC obran contra la potencia A, y así han de tener una resultante en la direccion ABG. Por la misma razon la potencia Q, y la tension del cordon CD obran contra la fuerza H, y han de tener una resultante en la direccion HDG. De suerte que la resultante de las quatro potencias P, Cb, Q, Cd, ó de las tres P,S,Q es la misma que la de los cordones extremos; y como esta resultante pasa por el punto G, si suponemos que sea R esta fuerza, obrará en una direccion ZGR, y será tal que se verifique $A : H : R ::$ sen. ZGH: sen. AGZ: sen. AGH. De todo esto se deduce, que sea el que fuere el número de potencias que están en un mismo plano, y obran en otros tantos cordones atadas de tres en tres, todo el sistema se puede reducir al de solas tres potencias unidas en un mismo punto, que será aquel en que se encuentran las direcciones de los cordones extremos.

Lue-

488 Luego si consideramos una cuerda como un po- Fig.
lígono de una infinidad de lados cargada en toda su ex- 145
tension de unos pesos pequeños, como m, n, p, &c., cuya suma será igual al peso de la cuerda; y por los extremos A y H tiramos las tangentes AX,HX que concurran en un punto X, y por este punto tiramos la vertical ZXR, quedará el sistema reducido al de tres potencias que obran en las direcciones XH, XA, XR. Esta última será la resultante de todos los pesos pequeños, y como es paralela á las direcciones de ellos ha de ser igual á su suma, y ha de representar el peso de la cuerda; luego llamando R, este peso será $R : A : H ::$ sen. AXH: sen. ZXH: sen. AXZ.

489 Esto supuesto nos será fácil averiguar el esfuer- 146
zo que pasa á una máquina quando el agente obra en ella por medio de una cuerda pesada. Sea P la potencia que tira del extremo P de una cuerda que se comunica á una máquina por el otro extremo A: por los extremos de la cuerda tírense las tangentes AX, PX, y por el punto X donde se encuentran la vertical ZXR, y fórmese la siguiente proporcion. La potencia P es á la fuerza que pasa á la máquina, como sen. AXZ al sen. ZXP; de suerte que segun que el ángulo ZXp sea mayor ó menor que AXZ; así el esfuerzo que pasa á la máquina será mayor ó menor que la potencia P. Todo esto nos manifiesta que un agente que no pueda mover una máquina directamente, tal vez podrá moverla si comunica su esfuerzo por medio de una cuerda.

490 Concluirémos esta teoría manifestando que por
grandes que sean las potencias que tiran de los extre- 147
mos de una cuerda, cuya posicion no sea vertical, no la pondrán en línea recta. Para manifestarlo tírense por los extremos de las cuerdas las tangentes AX,HXS, y por el punto X donde se cortan la vertical RXZ; si llamamos R el peso de la cuerda, y A y H las potencias que tiran de sus extremos; por lo dicho ántes será $H : R ::$ sen. AXZ: sen. $AXH =$ sen. SXA. Pero quando la cuer-

Fig. cuerda toma la posicion horizontal AH, el seno del ángulo AXH es cero, y el sen. del áng. AXZ es $=$ al radio, que lo podemos expresar por la unidad. Y entónces la proporcion se reduce á $H : R :: 1 : 0$; pero $1 : 0 :: \infty : 1$, que nos manifiesta que para que la cuerda no pandee, ha de ser su peso nulo, ó las potencias que tiran de ella infinitas; pero uno y otro es imposible, luego la cuerda ha de pandear.

De la palanca.

148 491 La palanca es una barra inflexîble AB recta ó curva, de hierro ú otra materia dura qualquiera, la qual sirve para levantar pesos ó equilibrar las potencias por medio de un punto fixo C, llamado apoyo, alrededor del qual puede girar con libertad, y en cuyos extremos se colocan las potencias que se han de contrarrestar, ó bien sean dos pesos, ó ya sean un peso y una potencia, que para lo que es del equilibrio viene á ser lo mismo.

Para determinar las condiciones del equilibrio en esta máquina supongamos dos potencias P y Q que obran en los extremos de una palanca AB sostenida sobre un apoyo C, por medio del qual se equilibran, y supongamos que sus direcciones son obliqüas, y están en un mismo plano; si prolongamos estas direcciones hasta que se encuentren en un punto D, y suponemos que AD,BD sean dos cuerdas atadas en un punto D, señalamos las fuerzas por las partes DF,DE, construimos el paralelogramo $DFGE$, y tiramos la diagonal DG, quedará el sistema reducido á una máquina funicular de tres potencias que están en un mismo plano, y obran en otros tantos cordones atados en un mismo nudo (486). Luego para que se verifique el equilibrio será preciso que la resultante de estas fuerzas se destruya, ó poniéndole otra R igual y contraria, ó lo que es lo mismo, dirigiéndose la resultante al punto de apoyo. De suerte que la carga de apoyo debe mirarse como una fuerza igual

igual y contraria á DG. Luego comparando entre sí las dos potencias P y Q, será (422) $P : Q ::$ sen. CDB : sen. CDA, esto es, como los senos de los ángulos formados por las direcciones de la otra potencia y la resultante. De suerte que si con un radio DC, haciendo centro en D, trazamos el arco OCS, y desde el punto C baxamos á las direcciones de las potencias las perpendiculares CH, CK, estas líneas serán los senos de los ángulos ADC, BDC, y serán $P : Q :: CK : CH$, esto es, las potencias que se equilibran en una palanca están en razon inversa de las distancias al punto de apoyo, ó lo que es lo mismo, los momentos de las potencias han de ser iguales, porque la proporcion $P : Q :: CK : CH$ nos da $P \times CH = Q \times CK$. Fig.

492 Pero quando las direcciones de las potencias son paralelas, como sucede quando de los extremos de la palanca cuelgan dos pesos M y N, las rectas CH, CK se confunden con los brazos de la palanca, y en este caso tenemos $P : Q :: CB : CA$, *esto es, las potencias paralelas que se equilibran por medio de una palanca recta están en razon inversa de los brazos de la palanca.*

493 Como las tres cosas principales que se consideran en una palanca, á saber, la potencia, la resistencia y el apoyo pueden combinarse de distintos modos, de aquí proviene la division que se hace de la palanca en 1.º 2.º y 3.º género. La palanca del primer género es aquella en que el apoyo está en medio, la potencia en un extremo, y la resistencia en el otro. Palanca del segundo 148
género es aquella donde el apoyo está en un extremo, la potencia en otro extremo, y la resistencia en medio; 149
y palanca del tercer género es aquella en que el apoyo está en un extremo, la resistencia en otro, y la potencia en medio. De estas palancas puede ser ventajosa la 150
primera; la segunda lo es siempre, excepto el caso en que sea tan larga, que su peso supere la fuerza del agente; pero la del tercero siempre es desventajosa, y así esta palanca jamas se usa para vencer grandes pesos

Fig. sos, como sucede con las anteriores, y solo se aplica para arreglar ciertos movimientos, como hace el texedor.

494 Hemos tratado de la palanca sin atender á su peso, del que no podemos prescindir en muchas oca-
151 siones, el qual se considera como otra fuerza aplicada en su centro de gravedad, y en estos casos la palanca queda reducida á un sistema de tres potencias, dos de las quales intentan hacer que el sistema gire hácia una direccion, y la otra pretende hacerle girar en sentido contrario. Y por tanto la suma de los momentos respecto el apoyo de las que intentan hacer que el sistema gire hácia una direccion, ha de ser igual al momento de la otra potencia. Esto es, si llamamos M el peso de la palanca, y suponemos que las direcciones de las potencias sean paralelas para mayor facilidad, será $Q\times AC = M\times CG + P\times CB$.

495 Si en la palanca se equilibrasen muchas potencias, ó muchos cuerpos, la suma de los momentos de los que intentarian hacerle que girase hácia una direccion sería igual á la suma de los que intentasen hacerle girar en direccion contraria. De suerte que si en el equilibrio de muchas potencias por medio de la palanca ignorásemos el valor de qualquiera potencia ó distancia á que estaba del apoyo, lo hallaríamos fácilmente con substituir una incógnita por aquella cantidad desconocida, igualar unos con otros los momentos, y despejar la incógnita en esta equacion.

Entre las máquinas que se refieren á la palanca, las mas principales son el *peso*, ó *balanza* y la *romana*, de las que trataré, aunque sea con brevedad.

De las balanzas.

496 La balanza, máquina destinada á pesar las mer-
152 cancias, es compuesta de una barra recta AB, á cuyas extremidades están pendientes con cordones dos platillos C y D, en los que se colocan las mercancías que se quieren pesar: dicha barra lleva en su centro un exe xy, que la atraviesa perpendicularmente, y cuyas extremidades entran y giran con libertad en los ojos construidos en una caxa grande EM, que sostiene la máquina. Las extremidades del exe no tienen la figura cilíndrica, tienen un corte romo en la parte inferior que lude con las armas, lleva una aguja fq, que está en la caxa quando la barra está horizontal, y que sale de la caxa quando la barra está inclinada á qualquiera lado.

Es claro que la balanza es una palanca del primer género. Quando se quiere hacer uso de esta máquina se coloca en un platillo el género, cuyo peso se desea conocer, y en el otro se ponen unas pesas, que ya de antemano son conocidas, hasta que se verifique el equilibrio, y por este medio se viene en conocimiento de lo que pesa el género.

497 Para que un peso sea exâcto es necesario que sus dos brazos sean igualmente largos, que si forman entre sí algun ángulo á la parte superior ó á la inferior, éste sea tan grande, que los dos brazos puedan considerarse como que están en línea recta; pues si el ángulo es muy sensible quando tiene el vértice hácia abaxo, la balanza es tan ligera que con dificultad se puede pesar en ella; y si el vértice está hácia arriba es muy pesada, y tampoco se pueden pesar cosas delicadas. En el primer caso las balanzas se llaman *locas*, y en el segundo *pesadas*. Tambien es preciso que los brazos sean sólidos para que no se doblen, pues de suceder esto podria quedar un brazo mas corto que otro, y no es ménos esencial que gire con libertad alrededor de su exe.

498 Aunque los brazos de una balanza sean desiguales, puede conocerse el peso de una mercancía practicando lo siguiente: sin embarazarnos en exâminar qual es el menor brazo de una balanza, que suponemos ser falsa, en el uno de los platillos, por exemplo en D, pondrémos la mercancía Q que querémos pesar, y ob-

Fig. sírvese el peso P con quien se equilibra: traspásese la mercancía Q al platillo C, y véase con que peso P' se equilibra: multiplíquese P por P', y del producto $P \times P'$ extráygase la raiz quadrada, y se tendrá el peso exácto de Q.

Porque el primer equilibrio da $P \times AE = Q \times BE$ (492), y el segundo da $Q \times AE = P' \times BE$. Dividiendo la primera equacion por la segunda, tendrémos $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{P'}$; y por último $P \times P' = Q^2$, y $\sqrt{(P \times P')} = Q$.

De la romana.

499 La romana es una especie de balanza de brazos desiguales, en la qual un mismo peso puede hacer equilibrio con muchos pesos desiguales, y por esta razon se puede poner el peso á diferentes distancias del punto de suspension: dicho peso se llama comunmente *pilon*: este cuerpo se coloca en el brazo mas largo, y en el brazo mas corto se coloca el género que se quiere pesar, para lo qual suele llevar en este brazo un platillo ó un garfio: el brazo mayor está dividido en partes iguales, y por la distancia que hay desde la division donde se coloca el peso hasta el punto en que se empezó á dividir, se viene en conocimiento de lo que pesa el género, fundados en aquel principio general de la palanca, en el qual se manifiesta que dos pesos que se equilibran están en razon recíproca de las distancias del punto de apoyo (492).

De la polea.

153 590 *Polea ó garrucha* se llama un cilindro ABH de un diámetro arbitrario, y de poco grueso, el qual en su circunferencia lleva un carril ó canal para que pueda entrar una cuerda, de cuyos extremos tiran dos potencias, ó una potencia y un peso. La polea gira con libertad por medio de un exe que la atraviesa perpendicularmente en su centro, y los extremos de éste entran

tran con libertad en unos ojos hechos en una caxa, dentro de la qual está la polea. Fig.

Llámase *polea fixa* aquella que no sube ni baxa con el peso que ha de mover, y *polea movil* se llama aquella que sube y baxa con el peso. La polea fixa no nos trae otra ventaja que poder variar las direcciones de las potencias; pues en quanto al esfuerzo, no es posible nos proporcione ventaja alguna: para manifestarlo prolónguense las direcciones de las potencias hasta que se encuentren en un punto G, representen las partes AG, BG estas potencias: constrúyase el paralelogramo $AGBK$, y tírese la diagonal GK, los radios AC, BC, y la cuerda AB; desde luego se manifiesta que el triángulo ACB es isósceles, y semejante á los triángulos GAK, GBK, pues tiene los lados perpendiculares á los de éstos, y por tanto serán iguales los ángulos AGK, BGK; pero las potencias son como los senos de estos ángulos; luego las potencias son iguales. Y así es indispensable que para que la potencia se equilibre con un peso de 20 arrobas haga un esfuerzo de las mismas 20 arrobas. 153 154 153

501 Pero no sucede así con la polea movil, porque como en ésta el un extremo de la cuerda está fixo en A, y el otro tira de la potencia, si hacemos la misma construccion que en el caso anterior, será $P : Q :: DG : HG$; y por ser semejantes los triángulos $DHG, DCEP : Q :: DC : DE$, esto es, como el radio á la subtensa del arco que abraza la cuerda, que siempre que éste sea mayor que 60.°, ha de ser la potencia inferior al peso. Pero si suponemos que las direcciones de las potencias sean paralelas, en este caso la subtensa DE se confundirá con el diámetro, será igual á dos radios, y es el caso en que la potencia produce el efecto máximo, y $P : Q ::$ el radio es al diámetro, ó como $1 : 2$. Por cuya razon, quando se quiera que una potencia que mueve un cuerpo por medio de una polea produzca el mayor efecto, se ha de procurar que las direcciones de las potencias, y el peso sean paralelas. El efecto que la potencia no produz- 154

Fig. duzca de este modo, no lo producirá de otro alguno en la polea.

Del torno.

502 El *torno* ó *cabestante* es una máquina compuesta de un cilindro y una rueda que tienen el mismo exe:
155 una potencia P, aplicada á la circunferencia de la rueda, obliga á la cuerda que sostiene el peso Q á envolverse alrededor del cilindro, y por consiguiente levanta el peso Q que cuelga de su extremo. El cilindro lleva en sus extremos dos espigas ó manecillas que descansan sobre dos apoyos.

Quando el cilindro de esta máquina es horizontal se llama propiamente *torno*; pero quando es vertical, se llama *cabestante*. Las condiciones del equilibrio son las mismas en una posicion que en otra. Averigüemos quales son éstas.

503 Sea el círculo DEH el plano de la rueda, que siempre es perpendicular al cilindro que la atraviesa; AB el exe del cilindro, P la potencia que mueve la má-
156 quina tirando en una direccion EP tangencial á la circunferencia de la rueda, y cuya direccion supondrémos para mayor facilidad que es vertical; CE un radio de la rueda tirado al punto de contacto E; Q el peso que se quiere mover por medio de la cuerda QO que toca la superficie curva del cilindro en un punto O; SO una perpendicular baxada desde el punto de contacto O al exe del cilindro. Esto supuesto, imagínese que por el radio CE, y el exe AB del cilindro pase un plano $EKMN$, que por ser horizontal pasará por el punto O cortando el cilindro en la parte posterior por la OZ; y tírese la recta OE, que cortará el exe del cilindro en un punto n. Las rectas EC, OS que están en un mismo plano, y son perpendiculares á AB, son paralelas entre sí; y por tanto serán semejantes los triángulos EnC, OSn, y de sus lados sacarémos la siguiente proporcion $En : On :: CE : OS$; pero por otra parte tenemos que OnE es una palanca

del

del primer género, cuyo apoyo está en n, la potencia Fig.
en E, y la resistencia en O, y así han de ser $P : Q :: On : nE$ (492); luego por una igualdad de razones $P : Q :: OS : EC$; esto es, para que se verifique el equilibrio en el torno, *ha de ser la potencia á la resistencia ó peso, como el radio del cilindro al radio de la rueda.* Luego quanto menor sea el radio del cilindro, y mayor el de la rueda, tanto mayor efecto producirá una misma potencia; bien que se moverá con mas lentitud, y nos exponemos á que el cilindro siendo muy delgado se rompa.

504 Hemos supuesto que el radio CE era horizontal; pero desde luego se infiere que las condiciones del equilibrio han de ser las mismas, aun quando se le dé otra posicion; pues qualquiera que ésta sea, siempre han de ser constantes las rectas EC, SO, Cn, Sn, En, nO, y los triángulos que resulten iguales á los triángulos CEn, OSn; y como tambien son constantes P y Q, siempre será $P : Q :: SO : CE$. No todos los tornos suelen llevar rueda, muchos de ellos llevan unas palancas; pero éstas equivalen á los radios de la rueda, y el equilibrio es el mismo.

Del cric ó gato.

505 El *cric* es una máquina que se refiere al torno: se compone de una caxa de madera AB, de una barra 157
dentada MN, y de un piñon armado de alas como q. El piñon se mueve por medio de un manubrio ó cigüeña SP. Quando se mueve el piñon, sus alas engargantan en los dientes de la barra, y saliendo ésta, levanta qualquier peso que se coloque en él; para lo qual es indispensable que el extremo B de la máquina esté apoyado en tierra.

Las condiciones del equilibrio en esta máquina son las mismas que las del torno, porque es evidente que la cigüeña en este caso traza un círculo con su movimiento que equivale á la rueda del torno, y el piñon hace oficio de cilindro; y así llamando P la potencia, Q la

re-

Fig. resistencia que opone la barra, el radio del piñon r, y el del círculo que traza la cigüeña R, será $P:Q::r:R$.

Del plano inclinado.

506 Llámase plano inclinado aquel que forma un án-
158 gulo agudo con el horizonte, ó lo que es lo mismo, aquel que ni es horizontal ni vertical, cuyo perfil es representado por AB. Si desde el punto B, el mas elevado del plano, baxamos la perpendicular BC que encuentre en un punto C la horizontal AC, la recta BC se llama la *altura* del plano, y la AC su base. Supongamos un cuerpo G puesto sobre un plano, y sostenido por una potencia P que tira de él en una direccion GP dirigida á su centro de gravedad; representemos el peso del cuerpo por la vertical GM, y llamémosle Q, y la potencia expresémosla por la parte GO de su direccion; y constrúyase el paralelogramo $GOMN$, y tírese la diagonal GN, que por ser la resultante de las fuerzas GM y GO será la que comprimirá el plano, y estará en el mismo que ellas, y ademas será perpendicular al plano, pues de otro modo no podia el cuerpo estar inmóvil; y ésta es una circunstancia precisa para que el cuerpo se mantenga en equilibrio. Comparando ahora entre sí estas potencias, y llamando GN, F será $P:Q::GO:GMP:F::GO:GN, Q:F::GM:GN$. De la primera de estas proporciones, la qual nos sirve para comparar la potencia con el peso del cuerpo, sacamos tambien $P:Q$ :: sen. MGN : sen. NGO (422): y estas son las condiciones del equilibrio en el plano inclinado.

507 Pero si suponemos que la direccion de la poten-
159 cia sea paralela al plano, el ángulo NGO será recto, y su seno será el mayor de todos los senos, é igual al radio, que si le llamamos R, tendrémos $P:Q$ :: sen. $MGN:R$; pero la última de estas dos razones es la menor posible supuesto que el ángulo MGN es agudo. Luego tambien la razon de $P:Q$ será la menor potencia

sible. Luego la menor potencia que ha de sostener un cuerpo sobre un plano inclinado será aquella cuya direccion sea paralela al plano. Pero hemos visto que $P:Q$ :: $MN=GO:MG$; y por otra parte tenemos que los triángulos GMN, ABC, cuyos lados son perpendiculares son semejantes, y sus lados nos dan $MN:GM::BC:AB$. Luego por una igualdad de razones $P:Q::BC:AB$, que nos manifiesta que quando la direccion de la potencia es paralela al plano, es quando produce el efecto máximo, y en este caso la potencia y el peso son como la altura del plano á su longitud. Fig.

508 Supongamos ahora que la potencia tire en una 160
direccion paralela á la base del plano. Como en este caso son tambien semejantes los triángulos MGN, ABC, será $MN=GO:MG::BC:AC$, y como tambien tenemos $P:Q::MN:MG$, suprimiendo la razon comun, será $P:Q::BC:AC$, esto es, quando la potencia tira del cuerpo en una direccion paralela á la base, la potencia y el peso del cuerpo son como la altura del plano á su base. En este caso la potencia puede ser igual al peso, puede ser mayor, y tambien menor que él: lo mismo sucede en el primer caso (506), donde la potencia puede tener tal direccion que sea $MG=GO$; pero en el segundo caso siempre es la potencia menor que el peso.

CAPÍTULO V.

De las máquinas compuestas.

De la rosca.

509 La *rosca* es un cilindro de madera ú otra materia sólida como AB, el qual tiene en su circunferencia tallado un filete en forma espiral: este sólido se introduce en otro llamado *tuerca*, cuya concavidad tiene un re-

Fig. rebaxo, en el qual se ajusta la rosca; de suerte que el filete de la rosca, y la concavidad de la tuerca se pueden mirar como molde uno de otro. Una vuelta completa del filete se llama *espira* ó *paso de la rosca*, y el intervalo que hay de una espira á otra medido por una recta paralela al exe de la rosca, se llama *paso de la rosca.* La rosca AB se mueve por una palanca CP, en cuyo extremo se aplica una potencia: esta potencia, haciendo que la rosca gire alrededor de la altura, la obliga á que suba ó baxe trepando ó baxando por el filete de la tuerca. Desde luego se infiere que si en el extremo de la rosca ponemos un cuerpo qualquiera al baxar ésta, la comprimirá siempre que la tuerca esté fixa, y por el contrario, si el cuerpo está asido al extremo de la rosca quando ésta suba, lo levantará. De suerte que la rosca sirve para dos fines, que son para comprimir los cuerpos, ó para levantarlos.

162 510 Para manifestar las condiciones del equilibrio en esta máquina, supongamos que $ABCD$ sea una parte de la rosca correspondiente á una espira, y que cortando su superficie por el lado AB la desarrollamos, nos resultará un rectángulo $CMND$, cuya altura CD será la base de la rosca, DM la espira, y DN la circunferencia del cilindro sobre que está ceñida la rosca. De suerte que la rosca resbala por el filete de la tuerca lo mismo que por un plano inclinado. Y así, llamando Q el peso de la tuerca quando pasa por el filete de la rosca, ó el de la rosca quando baxa por la tuerca (pues para el equilibrio viene á ser lo mismo) como la potencia obra en una direccion paralela á la base, si á ésta la llamamos R, y la suponemos aplicada inmediatamente al cuerpo, será (508) $R : Q :: MN : ND$, ó $R : Q :: CD$: circunferencia $SD =$ circunferencia OQ; pero la potencia no se aplica inmediatamente al punto Q, se aplica á un punto P extremo de la palanca OP. De suerte que llamando esta última fuerza P, será $P : Q :: OQ : OP ::$ cir. OQ : cir. OP. Si multiplicamos ordenadamente una por otra, las dos proporciones $R : Q :: CD$: cir. OQ, y $P : R ::$ cir. OQ : cir. OP, será $P : Q :: CD$: cir. OP, que nos manifiesta que para el equilibrio en la rosca ha de ser la potencia á la resistencia ó peso, como el paso de la rosca á la circunferencia que traza la palanca. Con atender á que el paso de la rosca siempre es muy pequeño, y la palanca de bastante longitud, se infieren los prodigiosos efectos de la rosca. Esta máquina es compuesta, pues participa de la palanca del segundo género, y del plano inclinado.

Fig.

De la cuña.

511 La cuña ordinaria es un cuerpo de hierro, ú otra materia sólida, el qual tiene la figura de un prisma triangular: EG es el corte de la cuña: $ABCD$ la cabeza: $ABGE$, $DCGE$ son las caras; y DAE, BCG son dos triángulos que dan á la cuña la figura de un prisma triangular. 563

La cuña se puede mirar baxo dos aspectos diferentes, esto es, como una máquina que sirve para levantar los cuerpos, ó como máquina destinada á rajarlos: la consideraremos de uno y otro modo.

Del equilibrio en la cuña en quanto se destina á separar, ó levantar un cuerpo de encima de otro.

512 En la cuña ínterin que eleva un cuerpo es preciso considerar dos potencias, la una que retiene el peso R, segun la direccion CO, y la otra que empuja la cuña segun la direccion PE, la pesantez del peso R, y la potencia que le tira segun CO, producen una resultante perpendicular al plano inclinado AD; pero esta resultante, siendo obliqüa al plano DB sobre el qual la cuña está puesta, ha de producir dos esfuerzos, el uno que comprima el plano BD, á quien es perpendicular en una direccion Et, y el otro que arroje la cuña fuera, 164

Fig. ra, segun la direccion En, y este es el esfuerzo que ha de destruir la potencia, segun la direccion PE. Luego si miramos DBD como otro plano inclinado, cuya base sea la recta dB paralela á AD, ó perpendicular á CX, podrémos mirar la cuña como otro cuerpo sostenido sobre el plano inclinado BD por una potencia que llamarémos P. Esto supuesto, si llamamos R el peso de la cuña, y F el esfuerzo segun CE, será (506) $R : F :: AD : DB$; y si desde el punto D baxamos al plano dB la perpendicular Dd, ésta será la altura del plano Dd: como la potencia P, que sostiene la cuña sobre el plano DB, tiene una direccion paralela á él, será $F : P :: DB : Dd$ (507), ó por ser semejantes los triángulos ADB, DBd, $F : P :: AD : AB$, multiplicando ordenadamente los términos de esta última proporcion por los de $R : F :: AD : DB$, y haciendo la reduccion, será $R : P :: \overline{AD}^2 : DB \times AB$, é invirtiendo $P : R :: DB \times AB : \overline{AD}^2$, que nos manifiesta que la potencia es al peso del cuerpo que se quiere levantar, como el rectángulo formado sobre lo largo de la cara y grueso de la cuña es al quadrado de su longitud.

La primera de las dos proporciones que hemos sacado varía segun que la direccion de la potencia que sostiene el cuerpo sobre la cuña sea paralela al plano, ó á su base.

De la cuña destinada á rajar los cuerpos.

165 513 Quando por medio de esta máquina se quiere abrir un cuerpo se coloca sobre él de suerte que el corte siente en aquella parte por donde se ha de empezar á hendir, y se le da con un martillo en su cabeza en la direccion PD, haciéndole á fuerza de golpes que se introduzca en el cuerpo. Para determinar el equilibrio en esta máquina supongamos que el impulso que le comunica

nica el martillo á la cuña, ó ya sea un peso que se ponga sobre ella, que para el caso es lo mismo, sea P, y expresemos esta fuerza por la recta CS. Esta fuerza se descompondrá precisamente en otras dos CL,CH perpendiculares á las caras de la cuña, y que serán las que intentarán separar una de otra las dos partes MNO, HGO del cuerpo, destruyendo la resistencia que en el punto x donde llega la tendidura oponen á su separacion. Esto supuesto, constrúyase el paralelogramo $HCLS$, y llámese L la fuerza que obra en la direccion CL, será $P : L :: CS : CL$, ó por ser semejantes los triángulos $ADB : CSL$, $P : L :: AB : BD$. Pero si baxamos desde el punto G la perpendicular GK á la recta CL, ó su prolongacion, tendrémos que KGR será una palanca angular, cuya potencia está aplicada en K, la resistencia en R (esta resistencia se puede mirar como la que opondria una cuerda ó liston, como TR que uniese las dos partes del cuerpo), y á la qual llamarémos R, y el apoyo en G. Luego será $L : R :: GR : GK$, y multiplicando esta proporcion por la anterior, y suprimiendo la L en la primera razon $P : R :: AB \times GR : DB \times GK$; y éstas son las condiciones del equilibrio en la cuña quando se mira como instrumento destinado á hendir los cuerpos. Qualquiera se hará cargo que quanto mas estrecha y larga sea la cuña, tanto mayor efecto producirá, y que la base del cuerpo ha de estar sostenida. Pero si miramos la imposibilidad de apreciar la resistencia que oponen las fibras á su separacion, que en cada especie de madera es distinta, y que ésta varía aún en una misma calidad, segun esté mas ó ménos curada, deducirémos que la teoría de la cuña, quando se destina á hendir los cuerpos, ha de ser imperfecta.

514 Supongamos que MNO,HGO sean dos cuerpos unidos, los quales se quieren separar por medio de una cuña, ya sea que ésta obre solamente por su propio peso, ó ya sea que obre por un peso extraño que se le pon-

Fig. ponga encima, el cuerpo HGO no puede oponer al movimiento mas resistencia que la que le permita su propio peso; y así, suponiendo que sea g su centro de gravedad, y considerando su peso como una fuerza V que obra en la direccion gV, la palanca que ántes era KGR ahora será KGV, y la resistencia ya no estará en R sino es V; de suerte que substituido en la última proporcion V en lugar de R, y GV en lugar de GR, será $P : V :: AB \times GV : BD \times GK$.

515 El que exâmine con atencion este último resultado conocerá facilmente el efecto de que es capaz un cuerpo pesado en figura de cuña entre otros dos cuerpos, si estos no están muy asegurados: la robustez que necesitan los pilares que sostienen un arco, pues las dobelas de éste son otras tantas cuñas, que sin mas fuerza que su propio peso, trabajan en destruir el edificio: lo mismo dirémos de las bóvedas y los terraplenes que obran contra los edificios.

De las tróculas.

166 516 Llámanse tróculas un conjunto de poleas, unas fixas y otras movibles, enlazadas con una cuerda. Las poleas fixas están colocadas en una barra fixa HK, de suerte que todas están en un mismo plano, y las poleas movibles están colocadas del mismo modo en otra barra DE, solo que ésta sube y baxa con el peso que ha de levantar. En el extremo P de la cuerda que abraza las poleas se coloca una potencia, que tirando de ella, obliga á la trócula móvil á que suba y lleve tras sí el peso R que se quiere levantar.

Sin mas que atender á la figura se echa de ver que el peso R está distribuido igualmente en todos los cordones; porque de no verificarse, la tension de todos no sería igual, y la máquina no estaría en equilibrio: esto es, subiria del lado que los cordones estuviesen mas tirantes, y baxaria del lado que estuviesen mas floxos. De

De suerte que la tension de los cordones P, 1, 2, 3, &c. ha de ser precisamente igual. Esto supuesto, supongamos que las direcciones de los cordones sean obliqüas respecto del horizonte; y atendiendo á la polea A, prolónguense las direcciones de los cordones hasta que se encuentren en V: tírense á los puntos de contacto los radios Ao, At, la cuerda ot, y la vertical AV. Es claro que la parte de peso que sufre la polea A estará expresado por ot, y la que sufren los cordones por los radios Ao, At (501), esto es, la fuerza que el cordon 1 emplea para sostener el cuerpo, estará representada por Ao, ó lo que es lo mismo, por el seno del ángulo $Ato =$ sen. AVt, es á saber, por el seno del ángulo que forman las direcciones del cordon con la vertical; y como podemos hacer la misma consideracion respecto los demas cordones, dirémos *que la potencia será á la suma de los esfuerzos que hacen los cordones para sostener el peso, como la tension de un cordon á la suma de los senos que los cordones forman con la vertical, ó los cosenos que forman con el horizonte.* Así, llamando t una de estas tensiones, será $P : R :: t :$ sen. $AVt +$ sen. $AVo +$ sen., &c., ó $P : R :: t :$ cosen. Vto $+$ cosen. $Vot +$ cosen. &c., que quando son paralelas las direcciones de los cordones, los cosenos de los ángulos que éstos forman con el horizonte son cero, y los senos iguales al radio; y como la tension del cordon P es expresada tambien por el radio es $P : R :: 1 : 1 + 1 + 1 +$, &c., esto es, como la unidad á tantas unidades como cordones rematan en las tróculas movibles; y así para que esta máquina produzca el mayor efecto se han de colocar las poleas de suerte que las direcciones de los cordones sean paralelas.

Las tróculas no suelen colocarse como se manifiesta en la figura: es costumbre ponerlas de modo que las varas en que están las poleas sean verticales, y se consigue que los cordones sean paralelos con hacer las poleas de diámetros desiguales. Pero las condiciones del equi-

Fig. equilibrio son las mismas en un caso que en otro.

De las ruedas dentadas.

167 517 Las ruedas dentadas tienen su circunferencia dividida en un cierto número de dientes iguales, é igualmente distantes los unos de los otros. Quando se juntan muchas de estas ruedas de modo que las unas obren sobre las otras por medio de un esfuerzo que tira á hacerles rodar, se tiene la máquina compuesta de ruedas dentadas.

Supongamos una máquina de éstas compuesta de quatro ruedas dentadas, que cada una, excepto la primera, obra en la rueda inmediata por medio de un piñon armado tambien de dientes y colocado en su exe, con la qual se quiere mover un peso R que cuelga de una cuerda que arrolla en un cilindro, tiene el mismo exe que la rueda, por medio de una potencia P que obra en una direccion MV tangente á la rueda A: para hallar la razon que en esta máquina tiene la potencia con el peso, la irémos exâminando por partes; para lo qual, atendiendo á la rueda A, encontrarémos que al moverse encuentra en el punto en que engargantan los dientes de su piñon con los de la rueda inmediata C una resistencia que tiene que superar la potencia P: exâminando la segunda rueda, encontrarémos tambien que quando se mueve tiene que superar la resistencia que la rueda E le opone en el punto en que engarganta con su piñon. La misma consideracion podemos hacer respecto de las demas ruedas hasta la última, á cuyo movimiento se opone el peso R. Luego cada rueda se puede mirar como un torno particular; y así, llamando X, Z, V, N los radios de las ruedas, los de sus piñones correspondientes x, z, u, n, y las resistencias que experimentan en los puntos en que los dientes de sus piñones tocan los dientes de las ruedas inmediatas B, D, E, R, tendrémos respecto de la primera rueda P:

$P : B :: x : X$, respecto de la segunda $B : D :: z : Z$, respecto de la tercera $D : F :: u : V$, y respecto de la quarta $F : R :: n : N$. Multiplicando unas por otras estas quatro proporciones, y suprimiendo los factores comunes en los términos de la primera razon, será $P : R :: x \times z \times u \times n : X \times Z \times V \times N$, que nos manifiesta que en esta máquina la potencia es á la resistencia, como el producto de los radios de los piñones al producto de los radios de la rueda. Luego si suponemos que los números de los dientes de las ruedas sean iguales, y que tambien sean los de los piñones, tendrémos $P : R :: x^4 : X^4$, que haciendo $x = 6$, y $X = 30$, esto es, dando á las ruedas cinco veces mas dientes que á los piñones, será $P : R :: 1 : 5^4 :: 1 : 625$. Luego prescindiendo del rozamiento y rigidez de la cuerda, la fuerza de un hombre por medio de esta máquina puede contrarestar la de 625 hombres. Basta esto para conocer el prodigioso efecto de esta máquina, y que con multiplicar las ruedas se podrá conseguir aun mayor efecto, si los exes sobre que estriban, y los dientes con que se enlazan pudiesen resistir.

Consideraciones sobre las máquinas.

518 El que se ve empleado en la construccion de una máquina para producir un efecto determinado debe procurar que ésta sea la mas simple, pues en qualquiera ocasion se debe preferir la máquina ménos compuesta á la mas compuesta, aunque para mover aquella se necesite emplear alguna mayor fuerza que para mover ésta; y las máquinas compuestas están expuestas á freqüentes quiebras, y son costosas de construir y de mantener. Qualquiera que esté enterado del modo con que se encuentra la razon que tiene la potencia con la resistencia en las máquinas de que hemos tratado, no tendrá dificultad en conocer á poco mas ó ménos el efecto de que es capaz otra máquina qualquiera simple, ó compuesta. Digo á poco mas ó ménos por la imposibilidad

 de

de poder calcular á punto fixo la fuerza que pierden, así por el rozamiento, como por la rigidez de las cuerdas, teniendo presente el esfuerzo de que es capaz el agente que la ha de mover. Las máquinas son movidas por un hombre, una caballería, el agua, ó el viento.

519 Para que los que se dedican á la maquinaria tengan algun conocimiento sobre los efectos de que son capaces estos agentes, les doy las siguientes noticias. Quando una máquina ha de ser movida por un hombre debe disponerse ésta de suerte que el esfuerzo que el hombre haga sea de 20 á 25 libras: siendo mayor aguantará muy poco el trabajo.

El que ha de hacer una caballería menor, debe regularse de 50 á 60 libras.

El que ha de hacer una caballería mediana, de 100 á 120 libras.

Y el que ha de hacer una caballería mayor, de 180 á 200 libras.

De suerte que una caballería mayor que ha de estar seis horas moviendo una máquina, sea noria, tahona, carro, &c., produce el mismo efecto que ocho hombres.

520 Los otros agentes, como el agua y el viento, se emplean por lo regular en los molinos. Los que se dedican á esta especie de máquinas deben saber: 1.º que segun observó *Bellidor*, la resistencia que una muela de molino opone á su nacimiento por razon del grano que ha de moler (pues las partes de éste equivalen á unas cuñas pequeñas, que introducidas entre las dos muelas se oponen al movimiento) es $\frac{1}{35}$ del peso de la piedra.

2.º Que la fuerza con que el agua detenida en un estanque, saliendo por una abertura, choca perpendicularmente en una superficie, es con corta diferencia igual á dos veces el peso de una columna de agua que tenga por base la superficie de la abertura, y de alto la distancia que hay desde el centro de gravedad de ésta á la superficie del agua, ó lo que es lo mismo, al peso de

de una columna doble de la que hay sobre la abertura.

3.º Que la fuerza con que un viento capaz de andar 24 pies por segundo choca en una superficie de un pie quadrado, equivale con corta diferencia á un peso de 18 onzas.

4º. Que la fuerza con que el ayre choca en una superficie crece como el quadrado de la velocidad.

5.º Que el efecto de que es capaz una muela de molino está en razon compuesta del peso que tiene, la velocidad con que se mueve, y los dos tercios de la longitud de su radio.

6.º Que de la fuerza que hace el viento en las velas de un molino solo se emplea en hacerle girar una parte de él, que es poco mas del tercio. En efecto, como el ayre choca á la vela con bastante obliqüidad, pues el plano de ésta forma con la direccion del viento un ángulo que en la parte mas próxîma del exe de las velas tiene cerca de 60º, y va aumentando sensiblemente hácia su extremo, la fuerza con que choca el viento se ha de descomponer en dos, una que mueva las velas, y otra que las impela contra la fábrica. De estas dos fuerzas, siempre es menor la que produce el movimiento, y viene á ser como $\frac{5}{13}$ de la fuerza absoluta con que choca el viento.

7.º Que para que el rozamiento de una máquina sea el menor posible se procure que las espigas de los exes ó piezas que tienen que moverse sean de hierro, y los apoyos ó buques en que se mueven de bronce; pues se ha observado que el rozamiento entre cuerpos de una misma materia, como hierro con hierro, &c. es mayor que entre cuerpos de distintas materias; como hierro con bronce, &c.

521 Todos estos conocimientos son hijos de la experiencia, y aunque no sean exâctos, son lo suficiente para que qualquiera que se dedique á la maquinaria pueda formar juicio de los efectos de que es capaz una máquina, no olvidando (como he dicho en otro lugar) que

que las máquinas nunca aumentan la fuerza, esto es, no producen mas efecto que aquel de que es capaz la potencia que la mueve. Lo que sucede es, que para mover un gran peso lo hacemos por medio de una máquina tal que le comunique una velocidad muy pequeña; y por la contraria, quando queremos que un cuerpo tenga una velocidad muy grande, es indispensable que su masa sea muy pequeña. Esto supuesto, propongámonos resolver algunas qüestiones acerca de ello.

522 Qüestion I. *Dado el peso de una muela de molino determinar la fuerza que necesita hacer el agua, ó el viento para moverla.*

Hemos dicho (520) que la fuerza que emplea una piedra de molino para moler los granos es con corta diferencia igual á $\frac{1}{35}$ del peso de la piedra. Luego si suponemos que la piedra pese 175 arrobas, dividiendo este número por 35, el quociente 5 manifestará que la fuerza que ha de hacer el agua ó el ayre, prescindiendo del rozamiento, ha de equivaler á un peso de cinco arrobas. Pero el rozamiento no es un elemento que no merezca la mayor atencion en las máquinas, y lo peor la dificultad, ó mas bien imposibilidad, de apreciarlo principalmente en las máquinas. Algunos Autores de Mecánica tratan de este punto con alguna extension, y enseñan el modo de apreciarlo; pero todos los resultados son teóricos, que discrepan mucho en la práctica. Quanto mas compuestas son las máquinas, mayor es el rozamiento. Yo soy de opinion que en las máquinas grandes, como los molinos, se regule la fuerza del rozamiento por la mitad de la presion, ó á lo ménos por el tercio: y por tanto en nuestra qüestion consideraremos esta fuerza como equivalente á un peso de $2\frac{1}{2}$ arrobas: sumando esta cantidad con las 5 arrobas anteriores, tendrémos que la resistencia que opone al movimiento nuestra muela es de $7\frac{1}{2}$ arrobas; pues en estos cálculos siempre se ha de pecar por carta de mas. Luego si aplicamos á la circunferencia de la muela una fuerza como la

la que acabamos de calcular, la moverá y hará moler. Pero si esta fuerza se la comunicamos por medio de un rodete ó rueda de alas que sea de un radio doble de los $\frac{2}{3}$ de el de la muela, bastará un esfuerzo de 4 arrobas para moverla: viendo que su velocidad será tambien la mitad ménos, y siendo la cantidad de movimiento en este caso la mitad de lo que era ántes, ha de ser al doble menor el efecto que produzca, esto es, si ántes molia 4 fanegas de grano por hora, ahora no molerá mas que la mitad.

523 Esto nos da á conocer que un agente aun mas pequeño puede mover una muela de molino por muy grande que sea, pero la velocidad de ésta será tal que no molerá los granos. Para que una piedra de 6 á 7 pies de diámetro produzca un buen efecto, es preciso que en un minuto dé de 30 á 40 vueltas á lo ménos, y si la piedra es de 4 á 5 pies de diámetro, ha de dar por lo ménos 60 vueltas en el mismo tiempo.

524 Luego deben disponerse los molinos de tal modo que las piedras se muevan con bastante velocidad, y sean de bastante magnitud para que muelan qualquiera especie de granos en bastante cantidad. Conocida por este medio la fuerza que se necesita para mover la muela, se ve si el agente que la ha de mover (520) es capaz de producirla, si no se disminuye el peso de la piedra quitándole de lo ancho ó de lo grueso, ó uno y otro; pero siempre con la precaucion de que no quede tan pequeña que no sirva: puestas muelas en igual velocidad muelen á proporcion de su peso. En los molinos de cubo ó rodete, como el agua tiene una caida muy grande, y á la piedra la mueve con mucha velocidad, suele dársele á ésta de 70 á 80 arrobas de peso; pero en los molinos que se mueven por medio de unas ruedas de alas muy grandes, y la velocidad de las piedras es muy pequeña, es preciso que las piedras pesen al doble, por lo ménos, que en las anteriores: sabiendo medir el volúmen de una piedra se hallará facilmente su peso, teniendo pre-

 sen-

sente que un pie cúbico de las piedras que se gastan para los molinos, pesa alrededor de 170 libras.

525 La velocidad con que el agua ha de comunicar á una máquina para que produzca el mayor efecto de que es capaz ha de ser el tercio de la velocidad con que se mueve el agua, y lo mismo sucede respecto del ayre; y así, calculada la velocidad de qualquiera de estos dos elementos, se podrá conocer muy bien el efecto del molino.

526 Quando el choque del agua no es suficiente para mover un molino se dispone la máquina de suerte que el agua obre por su peso y por el choque: esto se consigue de dos modos; el 1.º y mas ventajoso es el de una rueda de alas metida en una caxa ó canal concéntrico, con la circunferencia de la rueda y las alas de ésta tan ajustadas al canal, que no les quede mas holgura que para poderse mover. Y el segundo es valerse de una rueda de caxones; pero en estas ruedas la velocidad del agua se desperdicia, y ademas el choque de ella no se hace sobre una superficie plana; lo que no sucede en el caso anterior, y por tanto aquel método debe preferirse á éste.

527 Qüestion II. *Dado el peso de una muela de molino, su velocidad y diámetro, y la cantidad de grano que muele en un tiempo determinado, encontrar quanto molerá en el mismo tiempo otra muela cuyo peso, velocidad y diámetro sean conocidos.*

Se sabe por experiencia que una muela de 6 pies de diámetro y 4000 libras de peso, dando 50 vueltas por minuto, muele al pie de 100 fanegas en 24 horas. Luego para saber quanto molerá en el mismo tiempo otra muela de 5 pies de diámetro y 2000 libras de peso, dando 60 vueltas por minuto, formarémos la siguiente proporcion (520) $4000 \times 24 \times 50 : 100$ fanegas :: $2000 \times 20 \times 60 : \infty$ fanegas $= 50$ fanegas, y este es el número de fanegas que en las 24 horas molerá la muela propuesta.

Si la muela propuesta solo tuviese 4 pies de diámetro, pesase 880 libras, y diese 40 vueltas por minuto, determinaríamos lo que moleria en 24 horas diciendo: $4000 \times 24 \times 50 = 4800000 : 100 :: 563200 : \infty = 12$ fanegas con corta diferencia.

Por las mismas reglas hallaríamos que una piedra de tahona de 60 arrobas de peso, 3 pies de diámetro, y que da 60 vueltas por minuto, muele cerca de 24 fanegas de trigo por dia, que es lo mismo que acredita la experiencia.

Solo resta para concluir este capítulo decir alguna cosa sobre el rozamiento, manifestando las ventajas ó desventajas que de él nos resultan en los usos de la vida civil.

Del rozamiento.

528 Todos los cuerpos que conocemos en la naturaleza son porosos, aunque en la mayor parte de ellos la simple vista no los perciba: los buenos microscopios nos no lo manifiestan; de donde proviene que quando dos cuerpos, aunque sean los mas tersos, descansa uno sobre otro, é intentamos hacer que el de arriba resbale por la superficie del otro, experimentamos alguna resistencia. La fuerza que hacemos para vencerla es lo que llamamos *fuerza del rozamiento.* Si las superficies en que se tocan no estuviesen acribilladas de asperezas y cavidades, no habria rozamiento, y se moverian un cuerpo sobre otro sin la menor resistencia (pues la gravedad en este caso es una fuerza muerta, incapaz de producir efecto alguno); pero introduciéndose las asperezas del uno en las cavidades del otro, nos obligan á efectuar una fuerza capaz de romper las puntas que se han enlazado, ó desviar uno de otro los cuerpos en una direccion perpendicular á las superficies que se tocan.

529 Hay rozamiento de primera y segunda especie: el rozamiento de primera especie es el que experimentan los cuerpos que resbalan uno en otro. Y rozamien-

to de segunda especie es el que padecen los cuerpos que se mueven rodando sobre otros cuerpos, como el de las ruedas de los carruages: este último rozamiento es de tan poca consideracion que no merece llevarse en cuenta, y solo merece la atencion el de la primera especie. Este es el que echa por tierra toda la teórica de las máquinas, y la causa de que los primeros modelos no produzcan en grande los efectos que se esperaba. Como en los modelos las piezas pesan poco, las asperezas de las unas no se introducen lo suficiente en las cavidades de las otras, y de aquí es que el rozamiento se opone poco á los efectos que se quiere que produzca. Pero en las máquinas en grande, donde las piezas que se tocan son de mucho peso, resulta un rozamiento aun mayor que lo que se podia esperar. Los que se dedican á inventar máquinas no deben despreciar esta noticia.

530 Se disputa sobre si el rozamiento es proporcional á la presion que los cuerpos causan por razon de su peso, ó á la extension de la superficie que presentan. La experiencia manifiesta que es proporcional á la presion; pero no sabemos si los cuerpos de que se valiéron para ello tenian las superficies con toda la extension que se necesitaba; pues es regular que para exâminarlo se valiesen de cuerpos manuables y no de masas enormes. Yo me persuado que la presion sea la que mas contribuya á aumentar el rozamiento, pero no confesaré que sea la única. Y éste creo sea principal motivo de que la teórica y la práctica en órden al rozamiento discrepen una de otra. *Bossut* y *Henry*, el primero en su Mecánica, y el segundo en el suplemento que hizo del Compendio de Don Benito Bails, tratan muy bien del rozamiento en las máquinas; y por lo que hace á Henry, en tratando del torno, dice quanto se puede desear; pero como uno y otro toman á la presion por único elemento, no me conformo en seguirlos. Y sin embargo aconsejo á qualquiera que procure verlos.

Quan-

531 Quando una máquina es compuesta de ruedas y linternas solo la experiencia puede dar á conocer su rozamiento, y lo mismo sucede en las tróculas donde la rigidez de las cuerdas es otro obstáculo no ménos dificil de calcular que el rozamiento; pues aunque á primera vista se conoce que quanto ménos delgado sea el cilindro ó polea donde se arrolla la cuerda, y mas flexible sea ésta, tanto ménos será su rigidez, no tenemos medio conocido para calcularla: para conocer en un torno, tróculas y algunas otras máquinas, la fuerza del rozamiento y rigidez de la cuerda (si la hubiese) todo junto, en la parte que se ha de aplicar la potencia se irán poniendo varios pesos hasta que la máquina esté si se mueve ó no se mueve, y supongamos que este peso era m: hecho esto se le irán quitando poco á poco los pesos que se pusiéron hasta que la máquina llegue á estar en el estado mas próximo al movimiento en sentido contrario, y sea n lo que se le quitó, será $\frac{n}{2}$ la fuerza del rozamiento y rigidez de la cuerda, si la hubiese; y así, si suponemos $m=12$ libras, y $n=4$ libras, será 2 libras la fuerza del rozamiento y rigidez de la cuerda; y como el peso que quedó á la máquina despues de rebaxar n es $m-n=12-4=8$, será $8+2=10$ la potencia que en la máquina hace equilibrio con la resistencia.

532 Aunque el rozamiento perjudique en las máquinas en otras muchas ocasiones, nos favorece presentándonos las mayores ventajas. Si no fuera por él nos sería moralmente imposible el andar, el ponernos de pie quando estamos sentados ó echados; pues no pudiendo executar estos movimientos sin tomar una posicion oblíqüa, indispensablemente habíamos de resbalar: no cogiéramos en la mano cosa alguna que al instante no se escurriese: no podríamos hacer uso de las herramientas cortantes, como tixeras, navajas, &c.; pues éstas no son otra cosa que unas sierras armadas de dientes muy sutiles,

que

que se introducen en los poros de los cuerpos, y no pudiendo resbalar por su trabazon hácia atras, hienden el cuerpo.

533 Si no fuera por el rozamiento no podríamos destruir el mismo rozamiento frotando unos cuerpos con otros: no conseguiríamos que las piezas de una máquina estuviesen fixas: no podríamos hacer uso de los tornillos, ni ménos el que un caballo en el picadero diese vueltas al rededor de un punto fixo; pues teniendo el caballo precision de inclinarse hácia el centro de movimiento para destruir la fuerza centrífuga que adquiere, tomaria una posicion obliqüa respecto del horizonte, y precisamente habia de caer; ni tampoco conseguiríamos que un carruage baxase por una cuesta, aunque se atasen las ruedas.

534 El rozamiento es la causa de que una esfera que se mueve por un plano inclinado baxe rodando y no resbalando. La fuerza que le comunica la gravedad pasando por su centro de figura se descompone en dos, una perpendicular al plano, que queda destruida, y otra paralela al mismo plano, que es la que produce el movimiento; pero como ésta pasa por el centro de gravedad de la esfera, se ha de distribuir igualmente entre todas sus partes. Luego si no hubiese rozamiento, moviéndose todas las partes de la esfera con igual velocidad, ha de baxar resbalando. Pero como el rozamiento es una fuerza que mueve la esfera á lo largo del plano, y obra en el punto de contacto, de aquí es que las partes de la esfera mas próximas á este punto pierden gran parte de su velocidad; y como las que están mas distantes de dicho punto pierden ménos, ó no pierden ninguna, han de avanzar mas que las otras, obligando á la esfera á que gire alrededor de su centro de gravedad.

535 En los carruages se encuentran las dos especies de rozamiento juntas, una en la rueda quando voltea, y otra en la parte interior del cubo, donde descansa el exe: para convencernos de que es cierto basta considerar que la parte en que el exe y el cubo luden avanza tanto como un punto tomado en la circunferencia, lo que no sucederia si el exe no resbalase dentro del cubo; pues es claro que trazando uno de los puntos en que se tocan un círculo menor que el que traza un punto de la circunferencia de la rueda debe avanzar ménos, pero avanza lo mismo; luego, &c.

CAPITULO VI.

De los principios generales del movimiento.

536 El movimiento presenta muchos aspectos, y se puede considerar baxo diversas razones. Los metafisicos meditan sobre su naturaleza: los fisicos contemplan sus efectos, los estudian, y son la historia de sus producciones: los matemáticos consideran el movimiento como una magnitud que es susceptible de diversos grados de aumento y diminucion.

537 Dexamos dicho (391) que un cuerpo se mueve en tanto que pasa de un lugar á otro: si en esta traslacion el cuerpo anda en tiempos iguales espacios iguales, se dice que su movimiento *es uniforme*; pero si por qualquier causa el cuerpo aumenta ó disminuye su velocidad, el movimiento se llama *movimiento acelerado*, *ó movimiento retardado*, y en general *movimiento variado.*

538 El movimiento, sea la que fuere su naturaleza, puede ser *rectilíneo*, ó *curvilíneo*: es rectilíneo quando el móvil sigue siempre la misma direccion, y curvilíneo quando el móvil muda á cada instante de direccion.

539 Todo cuerpo es indiferente por sí mismo al reposo ó al movimiento: por tanto, un cuerpo que está en reposo conservará eternamente su lugar, si alguna causa externa no lo saca de él; y puesto en movimiento, se moverá eternamente si algun obstáculo no le hace pa-

parar: esta ley está confirmada por la experiencia.

540 De la misma indiferencia se deduce que todo cuerpo debe oponer á su mudanza de estado, sea para que se mueva estando en reposo, ó sea para que pare estando en movimiento, una fuerza proporcional á la masa, y esta resistencia se llama *fuerza de inercia.*

En efecto ya que un cuerpo no puede mudar de estado, ínterin no sea excitado por algun agente exterior, y él ha de consumir en el agente tanta fuerza como ha recibido, debe resistir á mudar de estado con una fuerza que se puede considerar como que es igual y contraria á la que ha perdido el agente; pero no hay razon alguna para creer que dicha fuerza resida mas bien en una partícula que en otra. Luego ella debe ser comun á todas las moléculas; y así la inercia total es igual á la suma de todas las inercias particulares, y por consiguiente proporcional á la masa del cuerpo.

541 Se ha creido por largo tiempo entre los escolásticos que la inercia era un efecto de la pesantez de los cuerpos; pero la experiencia manifiesta que están engañados; pues si dexamos caer un cuerpo libremente, y le damos con la mano un impulso hácia abaxo, tambien experimentamos resistencia, y ésta no puede provenir de la gravedad, pues el impulso favorece esta fuerza léjos de serle contraria. Tampoco se puede atribuir la inercia al ayre, porque este elemento no retarda la caida de los cuerpos al principio de su descenso sino de un modo insensible, especialmente si el cuerpo contiene en poco volúmen gran cantidad de materia, como sucede con una bala de plomo, &c.

542 De suerte que la inercia es una propiedad esencial de los cuerpos, y absolutamente independiente de su pesantez. Tambien podemos decir que la inercia es un medio para que los cuerpos se comuniquen el movimiento; pues es claro que si quando impelemos un cuerpo, éste no resistiese, no tendríamos sobre que exercer nuestra fuerza, y el cuerpo se moveria por sí mismo, lo que es imposible.

De qualquiera modo que se quiera trocar el estado de movimiento ó de reposo de un cuerpo, se reduce todo á vencer la inercia que se dexa sentir en qualquier sentido, siguiendo siempre la razon de la masa.

543 De lo dicho se infiere que un cuerpo que ha recibido un impulso qualquiera, siempre que en su camino no encuentre obstáculo alguno, se moverá eternamente con un movimiento uniforme siguiendo una línea recta, que es la direccion en que fué impelido; porque en virtud de la inercia, él debe seguir el camino que se le señala sin poder por sí mismo acelerar, ó retardar el movimiento, ni ménos mudar su direccion. Y así los cuerpos en movimiento siempre siguen ó afectan seguir la direccion rectilínea, y solo se apartan de ella obligados por algun obstáculo.

544 Todo movimiento producido por una fuerza única, y que es por consiguiente rectilíneo, se llama *movimiento simple.* Tal es el que recibe una bola quando es chocada por otra bola.

Y se llama *movimiento compuesto* aquel que resulta de la accion simultanea de muchas fuerzas en un móvil. Tal es el movimiento de una bomba en tanto que es producido ó alterado por la fuerza impulsiva de la pólvora, por la pesantez, y por la resistencia del ayre.

545 Qualquiera que sea el número, las cantidades y direcciones de muchas fuerzas que obran sobre un cuerpo, el movimiento que le causan puede considerarse como simple á cada instante; porque las fuerzas obran en una misma línea recta, ó sus direcciones forman ángulos. En el primer caso, si todas las fuerzas obran en un mismo sentido, producen el mismo efecto que produciria una fuerza única igual á la suma de todos. Y si obran en sentidos contrarios producirán el mismo efecto que una sola fuerza igual á la diferencia.

En quanto á lo segundo, el efecto resultante de todas

Fig. das las fuerzas tambien puede considerarse igualmente como producido por una fuerza única; porque sea un
168 cuerpo *A* impelido por las potencias *P* y *Q*, cuyas direcciones forman un ángulo, y capaces de hacerle correr en un mismo tiempo los espacios *AB*,*AC*, este cuerpo correrá la diagonal *AD* (420) del mismo modo que si solamente estuviera impelido por una sola fuerza representada por *AD*, ínterin que las potencias *P* y *Q* son expresadas por *AB* y *AC*. Obre una tercera fuerza sobre el móvil; en combinando esta fuerza con la fuerza *AD* del mismo modo que se combináron las fuerbas *AB*,*AC*, encontrarémos que el cuerpo será movido del mismo modo que si estuviese impelido por una sola fuerza expresada por la diagonal del segundo paralelogramo, y así sucesivamente; luego el movimiento del cuerpo podrá considerarse á cada instante como producido por una fuerza única, que es la resultante de todas las fuerzas que obran en él en este mismo instante, lo que se determinará por lo dicho (430).

546 Hemos supuesto que á cada instante las fuerzas concurrian en un mismo punto, ó que la extension del cuerpo sobre que obran es infinitamente pequeña, y por tanto puede mirarse como un punto. Pero si el cuerpo tuviese una magnitud sensible, y las fuerzas no fuesen aplicadas á un mismo punto de la masa, podrémos considerarle como un sistema de muchos cuerpos pequeños solicitados al movimiento por diferentes fuerzas, y estos cuerpos materiales tendrán distintos movimientos, de los que se tratará mas adelante, hablando por ahora del movimiento de un cuerpo simple, ó considerado como un punto móvil.

547 Quando un cuerpo describe en virtud de tan-
169 tas fuerzas como se quieran una curva *AMD*, si imaginamos que ésta curva esté dividida en una infinidad de partes *Mm*, *mn*, *nq*, &c. iguales, ó desiguales, cada una de estas partes podrá considerarse como una pequeña línea recta descrita en virtud de una fuerza única,

que es la resultante de todas las fuerzas que actuan en este instante sobre el móvil. En efecto, supongamos por exemplo que á cada punto de la curva el móvil sea impelido por dos fuerzas, la una paralela y la otra perpendicular al exe *AB*, y que las líneas infinitamente pequeñas *Mr*, *Ms* representen los espacios que estas fuerzas le hacian correr separadamente en un mismo instante, el móvil trazará por la accion simultanea de estas dos fuerzas la pequeña diagonal *Mm* del paralelogramo *Mrms*. Del mismo modo en llegando el móvil á *m*, si las dos fuerzas que le impelen son capaces de hacerle andar los pequeños espacios *mu*, *mt* en un mismo instante, describirá por el concurso de estas fuerzas la pequeña diagonal *mn*, y así sucesivamente; donde se ve que el móvil andará el pequeño espacio *Mm*, como si estuviera impelido por una fuerza representada por *Mm*, y que correrá el espacio *mn* del mismo modo que si estuviera impelido por otra fuerza única expresada por *mn*.

548 Luego en general todo movimiento puede considerarse como compuesto de movimientos rectilíneos, y como producido á cada instante por una fuerza única, que es la resultante de todas las fuerzas, á las quales el móvil está realmente sometido. Considerarémos pues los movimientos rectilíneos, deduciendo que la misma teoría es aplicable á los movimientos curvilíneos.

Del movimiento uniforme.

549 Cinco cosas hay que considerar en todo movimiento, á saber, el espacio que corre el móvil, la direccion del movimiento, la velocidad, la masa del cuerpo, y la fuerza que produce el movimiento. De estas cantidades ninguna es absoluta, todas son relativas á otras de su misma naturaleza, que sirven de unidad. Así la ciencia de las propiedades generales del movimiento se reduce á comparar las circunstancias de un movimiento con las de otro movimiento, en el qual son

son consabidas. Empezarémos á comparar los movimientos uniformes ; pues sobre ser los mas simples , son ellos á quien se refieren todos los demas.

550 En rigor no existe movimiento alguno que sea uniforme. Conocemos en la naturaleza una porcion de agentes que procuran alterarle. Por exemplo , un relox el mas perfecto no tiene jamas un movimiento uniforme é igual. La resistencia del ayre , el frotamiento y desigualdad de la graduacion de sus piezas , &c. son otros tantos obstáculos que alteran la regularidad del movimiento. Pero nosotros prescindirémos de todos estos obstáculos considerando el movimiento uniforme.

551 *Los espacios corridos por dos cuerpos que se mueven uniformemente están en razon compuesta de las velocidades y tiempos.*

Sean respectivamente E y e los espacios corridos , T y t los tiempos en que se han corrido , y V y u las velocidades. Por lo dicho (393) será $V = \frac{E}{T}$, y $u = \frac{e}{t}$, y comparando estas expresiones $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$, de donde sale $E : e :: VT : ut$. Multipliquemos extremos y medios en esta proporcion , tendrémos $Eut = eVT$, que es una fórmula , por medio de la qual se halla fácilmente la relacion de las cantidades que incluye.

552 Luego si los espacios corridos son como los cubos de los tiempos , las velocidades serán como los quadrados de los mismos tiempos ; pues siendo por el supuesto $E : e :: T^3 : t^3$, multiplicando extremos y medios , será $Et^3 = eT^3$. Dividiendo por esta equacion la fórmula $Eut = eTV$, y haciendo la reduccion , tendrémos $\frac{u}{t^2} = \frac{V}{T^2}$, que nos da $u : V :: t^2 : T^2$.

553 *En los movimientos uniformes las fuerzas motrices son en general como los productos de masas y velocidades, ó lo que es lo mismo , están en razon compuesta de masas y velocidades.*

Siendo la fuerza motriz la causa del movimiento, ha de

de ser indispensablemente proporcional á la cantidad de movimiento que produce. Pero la cantidad de movimiento es el producto de la masa por la velocidad, pues no podemos dudar que el movimiento es tanto mayor quanto lo es el número de partículas que se mueven, y mayor la velocidad con que éstas caminan. De suerte que la cantidad total de movimiento está en razon compuesta del número de partículas que se mueven , y la velocidad con que se mueven. Luego si llamamos F y f las fuerzas motrices , M y m las masas que mueven , y V y u las velocidades que les comunican, será $F : f :: MV : mu$. Si multiplicamos extremos y medios , tendrémos $Fmu = fMV$, que sirve para determinar la razon de qualquiera de dos cantidades de una especie. Dividiendo esta fórmula , por la que sacamos (552) $Eut = eVT$, tendrémos $\frac{Fm}{Et} = \frac{fM}{eT}$, ó $FTme = ftME$, que tambien nos sirve para determinar otras muchas propiedades del movimiento uniforme.

Del movimiento uniformemente acelerado ó retardado.

554 Dexamos dicho (540) que un cuerpo puesto en movimiento se moverá eternamente siempre que no haya obstáculo que se le oponga ; luego un movimiento no puede acelerarse , ó retardarse sino por la intervencion de una nueva fuerza constante ó variable , que obre sin cesar en el móvil , en el sentido de su direccion , ó en sentido contrario.

555 Esta nueva fuerza , que á cada instante impele al móvil para acelerar ó retardar su movimiento , se llama *fuerza aceleratriz* , ó *fuerza retardatriz*. Cada grado de velocidad que ella comunica ó destruye á cada instante en el móvil es infinitamente pequeño ; porque en un tiempo finito , que es la suma de una infinidad de instantes , la velocidad entera que produce la fuerza aceleratriz , ó destruye la retardatriz , y que es la suma

 de

de todos los grados de velocidad producidos, ó destruidos de un tiempo á otro, es una cantidad finita que tiene por elementos las partes infinitamente pequeñas.

556 De donde se deduce la distincion que se debe hacer entre la fuerza de un cuerpo que se mueve con un movimiento actual y finito, y la fuerza aceleratriz ó retardatriz. La primera que causa la accion de que el cuerpo es capaz, y que se puede llamar *fuerza de percusion*, es infinito respecto de la segunda, que es una simple presion. Se puede considerar la fuerza de percusion como la suma de una infinidad de presiones acumuladas durante un tiempo finito. Así, si un cuerpo que á impulsos de su gravedad desciende de una altura de 45 pies de Paris, la fuerza con que se hallará en el último instante de su descenso, ó el producto de su masa por la velocidad, será la suma de todos los impulsos que durante el tiempo de su caida le habrá comunicado la pesantez multiplicada por la masa.

557 Esta es la razon por que un martillo con sus golpes introduce un clavo en un cuerpo, lo que no consigue un gran cuerpo privado de movimiento. El golpe del martillo es una fuerza finita que se valúa por el producto de su masa, y la velocidad finita con que se mueve. Lo que el peso destituido de movimiento local es una fuerza infinitamente pequeña que se valúa por el producto de la masa, y una velocidad infinitamente pequeña.

558 Como las fuerzas aceleratrices ó retardatrices pueden variar segun una infinidad de leyes diferentes, hay una infinidad de diferentes movimientos uniformemente acelerados ó retardados. Y así deducirémos varias fórmulas que sean aplicables á qualquiera de ellos.

559 Ya que el movimiento uniformemente acelerado, ó retardado de un cuerpo es aquel donde la velocidad recibe en tiempos iguales incrementos, ó decrementos iguales, se deduce *que en el movimiento uniformemente acelerado las velocidades son como los tiempos en que se han adquirido.* Supongamos por exemplo que un cuerpo A al fin del primer minuto haya adquirido un grado de velocidad, al fin del segundo minuto habrá adquirido otro grado de velocidad mas, al fin del tercero otro, y así sucesivamente. Luego la velocidad adquirida al fin de dos minutos será doble de la que adquirió al fin de un minuto, y la que habrá adquirido al fin de tres minutos será tripla de la que adquirió al fin del primero; y así de los demas. De suerte que siendo las velocidades adquiridas como los tiempos en que se adquiriéron, han de ser como los números 1, 2, 3, 4, 5, &c.

Fig.

560 *En el movimiento uniformemente acelerados los espacios corridos por un cuerpo A son entre sí como los quadrados de los tiempos que ha empleado en correrlos.* 170

Supongamos que una recta AF represente el tiempo durante el qual se mueve un cuerpo con movimiento uniformemente acelerado: que esta recta esté dividida en una infinidad de partes infinitamente pequeñas, é iguales entre sí, como AB, BC, CD, &c., las quales representen los instantes iguales en que el tiempo se ha dividido: que sobre los puntos de division se hayan levantado las perpendiculares BG, CH, &c. que sean entre sí como las velocidades adquiridas durante los tiempos AB, AC, AD, &c. Una vez que en este movimiento las velocidades adquiridas son como los tiempos, será $AB : AC :: BG : CH$, $AC : AD :: CH : DI$, y así sucesivamente. Luego si hacemos pasar una línea por los puntos A, G, H, I, esta línea será recta, y las figuras ABG, ACH, ADI, &c. serán unos triángulos rectángulos semejantes, y el triángulo AFM tendrá por elementos las rectas BG, CH, DI, &c. (pues las superficies las podemos mirar como compuestas de una infinidad de líneas); pero como las pequeñas líneas AB, BC, CD, &c. representan los instantes de tiempo, y las velocidades durante cada uno de de estos instantes se puede considerar como uniforme. Y ademas en el movimiento uniforme los espacios corridos por un mismo cuerpo son como las velocidades. Si suponemos que el espacio corrido en el primer instante *AB* con la velocidad *BG* sea igual á *BG*, el espacio corrido en el segundo tiempo *BC* con la velocidad *CH*, será $= CH$, y así de los demas. Luego los espacios corridos durante los instantes *AB*,*BC*,*CD*, &c., que componen el tiempo total *AF*, serán iguales á las rectas *BG*, *HC*, *DI*, &c., es á saber; á la suma de los elementos del triángulo *AFM*, y por consiguiente á todo el triángulo. Por la misma razon los espacios corridos durante los instantes que componen el tiempo *AD* serán iguales al triángulo *ADI*. Luego los triángulos *AFM*, *ADI* expresan los espacios que el cuerpo anda durante los tiempos *AF*,*AD*; y como sabemos que los triángulos semejantes son como los quadrados de sus lados homólogos, será $AFM : ADI :: (AF)^2 : (AD)^2$, esto es, *los espacios son como los quadrados de los tiempos*. Y como las velocidades son proporcionales á los tiempos, *tambien serán los espacios como los quadrados de las velocidades; y tiempos y velocidades, como las raices quadradas de los espacios.*

561 Si por los puntos *G*,*H*,*I*, &c. tiramos las rectas *GX*,*HZ*,*IN* paralelas á *AF*, y por los puntos *B*, *C*, *D* las rectas *BN*, *CZ*, *DX* paralelas á *AM*, quedará el triángulo *AFM* dividido en una multitud de triángulos iguales todos al triángulo *ABG*. Y como el espacio andado en la primera parte de tiempo *AB* es el triángulo *ABG*, los trapecios *BGHC*, *CHID*, *DIMF*, &c. expresan los espacios andados en las otras unidades de tiempo iguales á la primera; pero el trapecio *BGHC* contiene tres triángulos iguales al triángulo *ABG*: el trapecio *CHID* contiene cinco de estos mismos triángulos, y el trapecio *DIMF* contiene siete, &c. Luego el espacio que anda el móvil en el primer instante es como 1, el que anda en el segundo es como 3, el que anda en el

tercero como 5, y como 7 en el quarto instante, *que nos manifiesta que los espacios que anda un móvil con movimiento uniformemente acelerado durante las unidades de tiempo* AB,BC,CD,DF, *&c. son como los números impares* 1,3,5,7,9,&c.

562 Para hacer mas general esta teoría del movimiento uniformemente acelerado nos resta deducir varias fórmulas que sean aplicables á qualquiera de estos movimientos; para lo qual llamemos p la velocidad que adquiere un móvil que se mueve con movimiento uniformemente acelerado despues de haber caminado un segundo, y u la velocidad que adquiere en un tiempo t. Por lo demostrado (560) será $1 : t :: p : u = pt$, y esta expresion es una de las fórmulas que se buscan.

563 Sea $AF=t$, y $FM=u$, representando el triángulo *AFM* el espacio que anda el móvil en el tiempo t, para conocer este espacio bastaria medir el triángulo *AFM*, con lo que tendrémos $AFM = \frac{AF \times FM}{2}$, ó llamando e el espacio, y haciendo las substituciones correspondientes $e = \frac{ut}{2}$, que es otra fórmula. Substituyendo en esta equacion en lugar de u, su valor pt tomado de la anterior, será $e = \frac{pt^2}{2}$, con lo que habrémos encontrado tres fórmulas, que son $u = pt$, $e = \frac{ut}{2}$, y $e = \frac{pt^2}{2}$, que cada una de por sí ó combinadas, sirven para conocer la relacion que tienen unas con otras las cantidades que son elementos del movimiento uniformemente acelerado. De la primera equacion sale $t = \frac{u}{p}$, de la segunda $t = \frac{2e}{u}$, que igualándolos uno con otro, y despejando la u, sale $u = \sqrt{(2ep)}$ y $u^2 = 2ep$, sacando tambien de la tercera equacion el valor de t, tendrémos $t = \sqrt{\left(\frac{2e}{p}\right)}$. Y si en la misma equacion $e = \frac{pt^2}{2}$ ponemos por t su valor $\frac{u}{p}$ sacado de la primera equacion, será $e = \frac{u^2}{2p}$. Otras mu-

muchas equaciones podríamos deducir despejando en cada una de las quatro primeras el valor de cada una de las cantidades que incluye; pero me parece son suficientes las que hemos dicho para quanto se nos pida sobre el movimiento uniformemente acelerado.

564 La cantidad p que hemos dicho era la velocidad que adquiria un móvil despues de caminar un segundo con movimiento uniformemente acelerado es lo que comunmente se llama la *fuerza aceleratriz*: de la variacion de ella depende la de todas las cantidades elementales del movimiento que produce; de suerte que en esta especie de movimiento para averiguar sus circunstancias se debe conocer de antemano el valor de p. Si admitimos que p', t', e', u' sean la fuerza aceleratriz, tiempo, espacio y velocidad de otro movimiento uniformemente acelerado, pero distinto del primero, nos resultarán otras fórmulas análogas á las de aquel; y por medio de unas y otras nos será sumamente fácil conocer qué razon tienen entre sí los espacios, tiempos y velocidades, siempre que se conozcan p' y p'; porque comparándolas entre sí, tendrémos:

1.° Para los espacios $e : e' :: \frac{1}{2}pt^2 : \frac{1}{2}p't'^2$.

2.° Para los tiempos $t : t' :: \sqrt{\left(\frac{2e}{p}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2e'}{p'}\right)}$.

3.° Para las velocidades $u : u' :: \sqrt{(2ep)} : \sqrt{(2e'p')}$.

Hagamos aplicacion de toda esta doctrina determinando las circunstancias del movimiento de los cuerpos que descienden libremente, y de los que se mueven por planos inclinados.

Del movimiento libre de los cuerpos pesados.

565 Siendo la gravedad ó pesantez la fuerza que anima los cuerpos que descienden libremente, y sabiendo que ésta es una fuerza aceleratriz constante, que en tiempos iguales comunica á un móvil iguales grados de velocidad, el movimiento libre de los cuerpos pesados ha de ser uniformemente acelerado; y así para determinar sus circunstancias nos valdrémos de las fórmulas $u = pt$, $e = \frac{pt^2}{2}$, $e = \frac{u^2}{2p}$, y $e = \frac{ut}{2}$ siempre que sea conocido el valor de p.

566 La equacion $e = \frac{ut}{2}$ nos dice que el espacio que anda un móvil que se mueve con movimiento uniforme acelerado en un tiempo es la mitad de lo que andaria en el mismo tiempo con movimiento uniforme con la velocidad u; pues en este caso el espacio es $e = ut$ (552). Luego si al cabo de un tiempo t la fuerza aceleratriz dexase de obrar, el cuerpo se moveria con un movimiento uniforme, y la velocidad adquirida durante las aceleraciones le obligaria á andar en el mismo tiempo un espacio duplo de e. Y como p es la velocidad que adquiere un grave despues de haber descendido un segundo, será preciso que ella le obligue á andar en él otro segundo inmediato un espacio duplo de lo que anduvo; y como por otra parte sabemos que la velocidad es el espacio andado en una unidad de tiempo, en conociendo lo que un grave anda en el primer segundo de su descenso, tendrémos conocido p. Se sabe por experiencia, y mas adelante se explicará, el modo con que se ha hallado que un cuerpo á quien el ayre no hace una resistencia sensible anda en el primer segundo de su descenso 15 pies de París, y una décima ó solamente 15 pies, despreciando el quebrado; luego $p = 30$ pies Al fin de este capítulo se incluye una tabla de los espacios que anda un móvil en distintas unidades de tiempo. Esto supuesto, propongámonos resolver las qüestiones siguientes.

I. *Hallar la velocidad que adquiere un grave despues de haber descendido quatro segundos.* La equacion $u = pt$, haciendo $p = 30$, $t = 4$, nos da $u = 30 \times 4 = 120$, y éste es el número de pies que el grave podria andar por segundo, des-

despues de haber descendido libremente por espacio de 4 segundos.

II. *Determinar el espacio que anda un grave en 8 segundos.* La fórmula $e=\frac{pt^2}{2}$, haciendo $p=30$, y $t=8$, nos da $e=\frac{30\times 64}{2}=960$, que es el número de pies que anda el cuerpo en 8 segundos.

III. *Hallar la altura de donde ha de caer un grave para adquirir una velocidad de 1000 pies por segundo.* En la fórmula $e=\frac{u^2}{2p}$ se pondrá por u, 1000, y por p 30, y tendrémos $e=\frac{1000000}{60}=16666\frac{2}{3}$.

IV. *La altura de donde ha de caer un cuerpo de 4 arrobas para que produzca un efecto equivalente á 400 arrobas.* Divídanse las 400 arrobas por 4 arrobas y saldrá 100 al cociente. Hecho esto por la fórmula anterior búsquese la altura correspondiente á 100 pies de velocidad, y se tendrá $e=\frac{10000}{60}=166\frac{2}{3}$, que es la altura de donde ha de caer el cuerpo para que produzca el efecto que se desea. En efecto las 4 arrobas por los 100 pies de velocidad producen las 400 arrobas.

567 Quando se arroja un cuerpo de abaxo arriba en una direccion vertical, el movimiento de este cuerpo es uniformemente retardado. Y así como en el movimiento uniformemente acelerado los grados de velocidad que adquiere el móvil siguen la serie de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c., tambien la siguen en el retardado, pero tomada al revés; pues en éste pierden los grados de velocidad que se adquieren en aquel.

568 Las fórmulas que hemos deducido para el movimiento acelerado son aplicables para el retardado, pero con la diferencia de que el espacio que en aquel ha de baxar el móvil para adquirir una cierta velocidad, en éste ha de subir para perderla, y la p, que en uno es positiva, en otro es negativa. Hechas estas advertencias no hay necesidad de detenernos en tratar del movimiento uniforme retardado.

Del

Del movimiento de los cuerpos por planos inclinados.

569 Represente la recta AB un plano inclinado visto de perfil, cuya base es AC y la altura BC: sea G un cuerpo que resbala á lo largo de este plano por su propia pesantez, y represente la vertical GR el espacio que esta fuerza le hacia andar en un instante, si estuviese libre ó la fuerza con que intenta moverlo, y descompóngase en dos GK y GH una perpendicular y otra paralela al plano. De estas dos fuerzas la GK es destruida por el plano, y solo causa el movimiento la GH. Si respecto de los demas instantes que dure el movimiento hacemos la misma descomposicion de fuerzas en cada uno de ellos, hallarémos una fuerza paralela al plano, é igual á GH, que será la que cause el movimiento. Luego el cuerpo se halla animado á cada instante por una fuerza aceleratriz representada por GH, y así su movimiento ha de ser uniformemente acelerado. 171

570 Para hallar las circunstancias de este movimiento, y aplicarle las fórmulas halladas (564), solo nos resta conocer el valor de la fuerza aceleratriz, ó mas bien qué relacion tiene con la pesantez. Para esto sea p el efecto de la pesantez en una unidad de tiempo, por exemplo un segundo, y sea p' el efecto de la fuerza aceleratriz que mueve el cuerpo por el plano en el mismo tiempo, será $GR : GH :: p : p'$, pero por la semejanza de los triángulos HGR, ABC es $GR : GH :: AB : BC$. Luego por una igualdad de razones es $AB : BC :: p : p'$, *que nos manifiesta que en el plano inclinado la pesantez es á la fuerza aceleratriz como la longitud del plano á su altura.* De la misma proporcion sale $p'=p\times\frac{BC}{BA}$, que es la expresion de la fuerza aceleratriz.

571 Comparémos ahora uno con otro los movimientos de los cuerpos que se muevan libremente el uno á lo largo del plano inclinado, y el otro por la vertical

BC,

Fig. *BC*, que es su altura, para deducir la razon que tienen entre sí los espacios que andan, los tiempos en que son andados, y las velocidades que adquieren; para lo qual harémos uso de las fórmulas establecidas (565), y resolverémos las siguientes qüestiones.

572 I. *Hallar en qué razon están los espacios que andan en un mismo tiempo dos cuerpos que se mueven, el uno por la vertical* BC, *y el otro por el plano inclinado* BA. Si llamamos e y e' los espacios, t y t' los tiempos, y las fuerzas aceleratrices p y p', tendrémos (565) $e : e' :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p't'^2}{2}$, y suprimiendo $\frac{t^2}{2}$ por ser igual á $\frac{t'^2}{2}$, y poniendo por p' su valor $p \times \frac{BC}{BA}$ (571) $e : e' :: p : p \times \frac{BC}{BA} :: p \times BA : p \times BC :: BA : BC$, que nos manifiesta
172 *que los espacios andados en un mismo tiempo son como la longitud del plano á su altura.* Luego si desde el punto *C* baxamos á la *AB* la perpendicular *CD*, será *BD* el espacio que habrá andado el cuerpo que se mueve por el plano miéntras el otro anda *BC*; pues los triángulos semejantes *ABC*,*BCD* nos dan $BC : BA :: BD : BC$. Y así, si sobre *BC*, como diámetro, trazamos una circunferencia, pasará por el punto *D* por ser recto el ángulo *BDC*. Lo que nos da á conocer que si desde el punto *B* se dexan caer dos cuerpos, el uno por el diámetro vertical *BC*, y el otro por la cuerda *BD*, ámbos llegan á un mismo tiempo á la circunferencia.

573 II. *Hallar los tiempos que tardan los mismos cuerpos en andar los espacios* BC *y* BA.

Las fórmulas citadas nos dan $t : t' :: \sqrt{\left(\frac{2e}{p}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2e'}{p}\right)}$, ó poniendo por e y e' sus iguales *BC* y *BA*, y por p' su valor (571) $t : t' :: \sqrt{\left(\frac{BC}{p}\right)} : \sqrt{\left(\frac{BA}{\frac{p \times BC}{AB}}\right)} :: \sqrt{\left(\frac{BC}{p}\right)} : \sqrt{\left(\frac{(BA)^2}{p \times BC}\right)} :: \sqrt{(\overline{BC}^2)} : \sqrt{(\overline{BA}^2)} :: BC : BA$, *que nos dice que los tiempos son como los espacios que andan.*

III.

574 III. *Determinar las velocidades con que los cuerpos llegarán á la horizontal.*

Si llamamos u y u' estas velocidades, las fórmulas $u = \sqrt{(2ep)}$, y $u' = \sqrt{(2e'p')}$, poniendo por p' su valor, y por e' y e los suyos *BC* y *BA*, nos darán $u : u' :: \sqrt{(BC \times p)} : \sqrt{\left(BA \times p \times \frac{BC}{BA}\right)} :: \sqrt{(BC \times p)} : \sqrt{(BC \times p)} :: 1 : 1$, que nos manifiesta *que los dos cuerpos llegan con una misma velocidad á la horizontal* AC.

Del movimiento variado de qualquier modo.

575 Quando una fuerza qualquiera obra sucesivamente en un cuerpo puesto en movimiento, su velocidad ha de ser indispensablemente alterada, aumentando ó disminuyendo segun que la fuerza sea aceleratriz, ó retardatriz, el cuerpo ya no se moverá uniformemente, y sí con un movimiento acelerado ó retardado.

576 Pero la fuerza aceleratriz, ó retardatriz que obra en un cuerpo para acelerar ó retardar su movimiento puede variar segun una infinidad de diferentes leyes; luego indispensablemente ha de haber en la naturaleza una infinidad de especies de movimientos variados.

577 Luego para tratar de esta materia con la generalidad que se requiere nos es indispensable el recurso de nuevas fórmulas diferentes de las que conocemos para el movimiento uniforme, y uniformemente acelerado ó retardado. Estas fórmulas, aunque generales en estos movimientos, no tienen aplicacion al movimiento variado sino en el caso de considerar que los efectos los producen en tiempos infinitamente pequeños.

578 Nada se hace por saltos en la naturaleza: una cantidad que varía no pasa de un estado á otro sino por todos los grados posibles de aumentacion ó diminucion. Tal es el órden que siguen en su variacion las cantidades geométricas ó algebráycas. Las fuerzas acelera-

tri-

trices ó retardatrices, los tiempos, los espacios, las velocidades, y en general todas las cantidades que la Mecánica considera están ajustadas al mismo órden; así las relaciones que tienen unas con otras estas cantidades pueden ser sometidas á la Geometría y al cálculo.

579 Sea la que fuere la ley, segun la qual varía continuamente una fuerza aceleratriz ó retardatriz, podemos considerar que por un instante su variacion se hace al principio ó al fin de dicho instante, y que por consiguiente durante dicho intervalo de tiempo la fuerza sigue constante; de suerte que si este instante le suponemos dividido en una infinidad de partes iguales, el movimiento durante cada instante será uniformemente acelerado, donde se ve que todo movimiento variado le podemos considerar como uniformemente acelerado durante un instante.

580 Luego las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado ó retardado, aunque no tengan lugar en el movimiento variado, de qualquier modo nos conducirán para determinar nuevas fórmulas generales que con facilidad nos den á conocer la relacion de las cantidades que entren como elementos en estos movimientos, considerando el espacio corrido y el tiempo por correr como cantidades infinitamente pequeñas.

581 En el movimiento uniformemente acelerado se demuestra que los productos de las fuerzas aceleratrices absolutas que animan los móviles, multiplicadas por los tiempos en que están obrando, son entre sí como los productos de las masas por sus velocidades finales, ó mas bien el producto de la fuerza aceleratriz absoluta por el tiempo de su aplicacion igual al producto de la masa por su velocidad final. Luego si llamamos E la fuerza absoluta aceleratriz, ó retardatriz que anima á un cuerpo, m su masa, s el espacio que andará en un tiempo t, y u su velocidad al fin del movimiento, tendrémos la equacion $Edt = \pm mdu$, el signo positivo para quando la fuerza sea aceleratriz, y el negativo para quando sea retardatriz.

582 Porque en efecto, siendo la fuerza E seguida, ella da un pequeño impulso al móvil durante cada instante; luego esta fuerza multiplicada por la duracion de su aplicacion debe ser proporcional á la pequeña cantidad de movimiento que produce ó que destruye; esto es, al producto de la masa por el incremento de la velocidad.

583 Si dividimos los miembros de la equacion por m se transformará en $\frac{E}{m}dt = \pm du$, ó suponiendo que la razon de E á m sea p; y substituyendo esta cantidad en la equacion, tendrémos $pdt = \pm du$, en la qual p es la fuerza aceleratriz ó retardatriz simple; pero como en esta equacion no se halla comprehendido el espacio s, nos es indispensable recurrir á otra fórmula que lo comprehenda, para lo qual debemos considerar que la variacion que padece u de un instante á otro es una cantidad infinitamente pequeña; de suerte que miéntras el cuerpo anda el espacio infinitésimo ds en un tiempo dt podemos considerar la velocidad constante, y por la naturaleza del movimiento uniforme tendrémos $u = \frac{ds}{dt}$, de la que sacarémos $dt = \frac{ds}{u}$.

584 Si substituimos en la equacion anterior el valor de dt se transformará $\frac{pds}{u} = \pm du$, ó $pds = \pm udu$.

Otras muchas fórmulas podríamos deducir solamente con diferenciar y combinar una con otra las dos que se han sacado; pero basta lo dicho para quanto se nos ofrezca tratar en este Compendio.

CA-

CAPITULO VII.

Del choque de los cuerpos.

585 Se distinguen en general tres especies de cuerpos; á saber, los cuerpos *duros*, los cuerpos *blandos*, y los cuerpos *elásticos*.

Un cuerpo es duro, y su dureza es perfecta quando tiene una rigidez inflexîble que no cede á ninguna fuerza por grande que sea.

Un cuerpo es blando, y su blandura es perfecta quando muda de figura por la compresion, y permanece en el estado á que se ha reducido, aunque cesen de comprimirlo.

Un cuerpo es elástico, y su elasticidad es perfecta quando varía de figura por la compresion, y se restituye á su primer estado así que cesa la fuerza comprimente.

En la naturaleza no exîsten dureza, elasticidad, ni blandura perfectas: todos los cuerpos participan mas ó ménos de estas tres qualidades; pero nos es preciso admitir por via de hipótesis la exîstencia de cuerpos perfectamente duros, elásticos y blandos para establecer la teoría del choque.

586 Tratarémos primero del choque de los cuerpos duros suponiendo que su dureza es perfecta, despues de los cuerpos elásticos, sea la elasticidad ó no perfecta. Los cuerpos perfectamente blandos pueden referirse á los elásticos suponiendo que la elasticidad es infinitamente pequeña; pero verémos que la ley del choque de los cuerpos blandos es la misma que la de los cuerpos duros.

587 Antes de entrar en esta materia observarémos que en quanto al efecto de la percusion es indiferente que los cuerpos se muevan sobre un plano horizontal, ó sobre otro plano qualquiera; porque siendo infinita la fuerza de percusion respecto de cada accion instantánea y sola de la pesantez, es claro que los efectos que resulten del choque mútuo de los cuerpos son los mismos que la pesantez obre ó no en los cuerpos. Todas las variaciones que la pesantez puede producir en las velocidades de los cuerpos son anteriores ó posteriores á las que se producen por la percusion. Pero sin embargo, para la mejor comprehension imaginarémos que los cuerpos se mueven uniformemente sobre planos horizontales perfectamente lisos, que destruyen por consiguiente el efecto de la pesantez, y no ocasionan ningun rozamiento. Ademas supondrémos que los cuerpos son esféricos y homogéneos; pues aquí solo tratamos del movimiento progresivo de los centros de gravedad, y no de los movimientos de rotacion alrededor de este punto.

Fig.

588 Como los centros de gravedad de los cuerpos que se chocan pueden moverse en una misma línea, ó en líneas diferentes, de aquí es que el choqne se divide en *directo é indirecto*: el primero tratarémos con alguna extension, y del segundo nos ceñirémos á lo mas preciso. Todo lo qual se manifiesta por medio de las siguientes qüestiones.

Del choque directo.

589 1.ª *Dado un cuerpo duro* A *que va á chocar con otro cuerpo duro* B, *que se mueve directamente delante de él con menor velocidad, encontrar la velocidad de los dos cuerpos despues del choque.*

Siendo la materia impenetrable, es claro que apénas el cuerpo *A* (que llamarémos cuerpo chocante) alcance al cuerpo *B* (que llamarémos cuerpo chocado), que está en su misma direccion, obrará sobre él empujándole hasta que los dos tengan una misma velocidad. Entónces la accion de un cuerpo en otro que dura muy poco tiempo cesará, y los dos se moverán unidos uno á otro como si fueran una sola masa; pues no hay resorte alguno en ellos que los obligue á separarse. 173

Ade-

Ademas de esto, por las inercias particulares los dos cuerpos resisten á la mudanza de estado que el choque ha producido en sus respectivos estados; y esta resistencia es tal, que la cantidad de movimiento ganada por el cuerpo chocado B es igual á la cantidad de movimiento perdida por el cuerpo chocante A. Luego si llamamos V la velocidad del cuerpo A ántes del choque, u la del cuerpo B, tambien ántes del choque, y x la que tendrán los dos despues del choque, es evidente que la velocidad que A pierde por razon del choque es $V-x$, y la que gana B, $x-u$, la cantidad de movimiento que pierde el cuerpo A, es $A(V-x)$, y la que gana B, $B(x-u)$; pero estas cantidades han de ser iguales; luego $A(V-x) = B\times(x-u)$, de donde sale $x=\frac{AV+Bu}{A+B}$, que nos dice que la velocidad comun de los dos cuerpos despues del choque es igual á la suma de sus cantidades de movimiento dividida por la suma de las masas.

590 Substituyendo en las expresiones $V-x$, y $x-u$ en lugar de x su valor, será $V-x=\frac{B(V-u)}{A+B}$, y $x-u=\frac{A(V-u)}{A+B}$; y comparándolas será $\frac{B(V-u)}{A+B} : \frac{A(V-u)}{A+B} :: B : A$: esto nos dice que la velocidad que gana un cuerpo, y la que pierde el otro están en razon inversa de sus masas.

591 De la equacion $x=\frac{AV+Bu}{A+B}$ sale $(A+B)x=AV+Bu$, el primer miembro de esta equacion es la cantidad de movimiento de los dos cuerpos despues del choque, y el segundo miembro la cantidad de movimiento que tenian ántes de él, que confirma lo que dexamos dicho de que la cantidad de movimiento que pierde un cuerpo es igual á la que gana el otro.

592 Si el cuerpo B estuviese en reposo su velocidad u sería cero, la velocidad con que se moverian los dos cuerpos despues del choque $x=\frac{AV}{A+B}$ la que perderia el cuerpo chocante $\frac{BV}{A+B}$, y la que ganaria el chocado $\frac{AV}{A+B}$.

Fig.

593 Pero si los dos cuerpos siguiendo una misma direccion caminan al encuentro uno de otro, siendo la velocidad de A mayor que la de B, la velocidad de este último cuerpo respecto de la del otro será negativa. Y así las fórmulas que acabamos de sacar nos servirán en este caso con trocar el signo de u; en virtud de lo qual tendrémos que la velocidad con que estos cuerpos se mueven despues del choque es $x=\frac{AV-Bu}{A+B}$, la que pierde el cuerpo chocante $\frac{B(V+u)}{A+B}$, y la que gana el chocado $\frac{A(V+u)}{A+B}$, que si comparamos una con otra estas últimas expresiones serán como $B : A$.

594 2.ª *Dado un cuerpo elástico que va á chocar con otro cuerpo tambien elástico, que se mueve delante de él, ó que viene al encuentro, determinar las velocidades de los dos cuerpos despues del choque.* 174

Supongamos los cuerpos privados de elasticidad, pero que en lugar de ésta se coloque entre ellos un resorte ACB, que se comprime quando los cuerpos se encuentran, y que se extiende luego que cesa la accion de un cuerpo sobre otro. Esto supuesto, sea ACB el estado natural del resorte, ó la extension que toma quando está libre, y supongamos que en virtud de la percusion se reduce al espacio acb. Si los dos cuerpos fuesen perfectamente elásticos, ó lo fuese el resorte interpuesto entre ellos, en cesando la percusion se restituirá á su estado primitivo; pero de no tener una perfecta elasticidad no volverá á la primera posicion, sino es que tomará otra DCE. Supongamos, para dar toda la generalidad posible á la qüestion, que el resorte tome la posicion indeterminada DCE. En el caso en que el resorte vuelve á su primitivo estado ACB la fuerza elástica es igual á la fuerza que produce la percusion. Pero en en el caso presente la primera fuerza no es mas de una parte de la segunda. Sea en general $\frac{p}{1}$, la razon de la elasticidad á la percusion será $p = 0$ siempre que los cuerpos sean duros ó blandos, y será $= 1$ quando sean perfectamente elásticos; de suerte que todos los valores de p estarán entre los límites 0 y 1.

595 Esto supuesto observarémos que en el instante en que los cuerpos se encuentran obra el uno sobre el otro del mismo modo que si fueran perfectamente duros. Miéntras ellos se empujan los resortes se contraen, y la percusion no fenece hasta que ellos dos tienen una misma velocidad, y en un mismo sentido. Entónces la elasticidad entra en exercicio, y produce un nuevo efecto en direcciones contrarias á las velocidades de los dos cuerpos. Este doble efecto de la percusion y la elasticidad se produce en un tiempo, que por muy corto que sea, se pueden distinguir en él dos partes, una relativa á la percusion, mediante la qual el resorte se comprime, y la otra relativa á la elasticidad, durante la qual el resorte se dilata.

596 Sea A el cuerpo chocante, esto es, el que tiene mayor velocidad quando caminan en un sentido, ó el que tiene mayor cantidad de movimiento quando se mueven en sentidos contrarios; B el cuerpo chocado, V la velocidad de A ántes del choque en el sentido MN, u la velocidad de B en el sentido MN, ó NM; es claro que la velocidad de A despues del choque será la velocidad V ménos la velocidad que pierda, y que la velocidad de B en el sentido MN será la velocidad que habrá ganado $\pm$ la primitiva. Pero primero, en virtud de la percusion, el cuerpo A pierde una velocidad representada por $B \times \frac{(V \mp u)}{A + B}$ (590); y en virtud del resorte, como éste le empuja en el sentido AM, pierde una nueva velocidad representada por $p.B \frac{(V \mp u)}{A + B}$; pues la percusion y la elasticidad están en razon de $1 : p$. Y así el cuerpo A pierde en todo una velocidad expresada por $\frac{B(V \mp u)}{A + B} + \frac{p.B(V \mp u)}{A + B} = \frac{(1 + p) \times B(V \mp u)}{A + B}$. Luego la velocidad despues del choque en el sentido MN será $V - \frac{(1 + p)B(V \mp u)}{A + B}$.

597 2.° En virtud de la percusion el cuerpo B gana en el sentido MN una velocidad representada por....... $\frac{A(V \mp u)}{A + B}$ (590), y en virtud del resorte quando se extiende debe ganar en la misma direccion otra velocidad expresada por $\frac{p.A(V \mp u)}{A + B}$. Y así el cuerpo B gana en el sentido MN una velocidad igual á .... $\frac{(1 + p)B(V \mp u)}{A + B}$. Luego la velocidad del cuerpo B despues del choque en el sentido MN estará expresada por $\frac{(1 + p) B(V \mp u)}{A + B} + u$.

598 Estas fórmulas son susceptibles de una infinidad de aplicaciones. Pero es preciso considerar en estas aplicaciones, 1.° que el cuerpo chocado B marchará despues del choque en sentido del cuerpo chocante A; no puede haber duda en ello quando los dos cuerpos se mueven en un mismo sentido: por lo que hace quando se mueven en sentido contrario tampoco puede ocurrirnos duda alguna, considerando que en este caso llamamos cuerpo chocante al que tiene mayor cantidad de movimiento, y que por esta razon debe llevar al otro por delante.

599 2.° Que el cuerpo chocante puede retroceder y volver hácia atras, lo qual sucederá siempre que la velocidad de este cuerpo despues del choque salga una cantidad negativa.

600 Enterados de esto, supongamos en nuestras fórmulas 1.° que $p = 0$, ó que el resorte despues de la percusion quede reducido al estado acb, que es el caso de los cuerpos blandos. En este caso saldrá como en los cuerpos duros que las velocidades de A y B despues del cho-

choque son iguales, y se expresan por $\frac{AV \mp Bu}{A+B}$.

601 2.° Que $p=1$, que es el caso de los cuerpos elásticos, la velocidad de A es $V - \frac{2B(V \mp u)}{A+B}$, y la de B es $\frac{2B(V \mp u)}{A+B} \pm u$.

602 Si multiplicamos los cuerpos A y B cada uno por la expresion de su velocidad despues del choque, y se suman los dos productos, saldrá la suma $AV - \dots\dots \frac{(1+p)AB(V \mp u)}{A+B} + \frac{(1+p)AB(V \mp u)}{A+B} \pm Bu = AV \pm Bu$ despues de hacer la reduccion. De donde resulta que despues del choque la cantidad de movimiento del sistema, y la velocidad del centro de gravedad en el sentido del cuerpo chocante son las mismas que ántes del choque; porque si llamamos x la velocidad del centro de gravedad ántes del choque, y Z la velocidad que tiene despues de choque, tendrémos las equaciones $(A+B)x = AV \pm Bu$, y $x = \frac{AV \pm Bu}{A+B}$; $(A+B)Z = AV \pm Bu$, y $Z = \frac{AV \pm Bu}{A+B}$.

603 Si se multiplica cada uno de los cuerpos por los quadrados de sus velocidades despues del choque, y se juntan los productos, saldrá la suma ....
$A\left(V - \frac{(1+P)B(V \mp u)}{A+B}\right)^2 + B\left(\frac{(1+p')A(V \mp u)}{A+B} \pm u\right)^2$; expresion que se reduce á $AV^2 + Bu^2 - \frac{(1-p^2)AB(V \mp u)^2}{A+B}$, que si hacemos $p=1$, se reduce á $AV^2 + Bu^2$. Lo que nos manifiesta que la suma de los productos de los cuerpos por los quadrados de sus velocidades es la misma ántes que despues del choque. Y esto es lo que se llama *la conservacion de las fuerzas vivas*; porque por *fuerza viva* se entiende el producto de la masa de un cuerpo por el quadrado de su velocidad; pero quando p no es igual 1, se tiene en virtud del choque una pérdida de fuerzas vivas expresada por $\frac{(1-p^2)AB(V \mp u)^2}{A+B}$.

Así

604 Así en el choque de los cuerpos perfectamente elásticos se verifica la conservacion de las fuerzas vivas; pero en los cuerpos que no tienen una elasticidad perfecta sale en virtud del choque una pérdida de fuerza, que es tanto mayor quanto menor es p.

605 La cantidad p, que representa la razon de la elasticidad á la percusion, se puede determinar en cada caso por una experiencia inmediata. Para lo qual no hay mas que igualar la expresion general de la velocidad de uno de los cuerpos despues de choque con la velocidad que tenga realmente, y sacar de esta equacion el valor de p. Supongamos que los dos cuerpos A y B sean iguales, y que B esté en reposo en el instante del choque.

606 En haciendo $A=B$, y $u=0$ en las fórmulas que hemos hallado para las velocidades despues de choque, la velocidad de A será $V - \frac{(1+p)V}{2}$, y la de B $\frac{(1+p)V}{2}$. Sean a y b las velocidades que realmente tienen estos cuerpos despues del choque, será $a = V - \frac{(1+P)}{2}$, y $b = \frac{(1+p)V}{2}$, las quales dan $p = 1 - \frac{2a}{V}$ y $p = \frac{2b}{V} - 1$, y así se conocerá por medio de qualquiera de estas dos expresiones el valor de p.

Del choque indirecto de los cuerpos.

607 Esta materia es muy vasta, y así solo nos ceñirémos á resolver alguna que otra qüestion para que qualquiera pueda formar idea de esta especie de choque; para lo qual nos es preciso anteponer los siguientes lemas.

1.ª Si expresamos por 1 el radio de las tablas, y por 175
A y B dos ángulos qualesquiera, el seno $(A+B)$ es $=$ sen. $A \times$ cos. B + sen. $B \times$ cos. A, y cos. $(A+B) =$ cos. $A \times$ cos. B — sen. A. sen. B.

Siendo la suma de dos ángulos de un triángulo BCA

 su-

suplemento del tercero, esto es $A+B=180-ACB$, síguese que sen. $ACB=$ sen $(A+B)$.

608 Por lo demostrado (Trigon. práctica) es AC : sen B :: AB : sen. $ACB=\frac{AB.\ \text{sen.}\ B}{AC}=$ sen. $(A+B)$. Si tiramos la CD perpendicular al lado AB, tendrémos $BC : CD :: R$: sen. $B=\frac{R\times CD}{BC}$, suponiendo por ahora el radio $=R$. Si substituimos el valor de sen. B en la equacion anterior, será sen. $(A+B)=\frac{R\times CD\times AB}{AC\times BC}$, ó por ser $AB=BD+AD$, sen. $(A+B)=\frac{R\times CD\times BD}{AC\times BC}+\frac{R\times CD\times AD}{AC\times BC}$. Pero $\frac{CD}{AC}=\frac{\text{sen.}\ A}{R}$, $\frac{BD}{BC}=\frac{\text{cos.}\ B}{R}$, $\frac{CD}{BC}=\frac{\text{sen.}\ B}{R}$, y $\frac{AD}{AC}=\frac{\text{cos.}\ A}{R}$. Luego seno $(A+B)=\frac{\text{sen.}\ A\times\text{cos.}\ B+\text{sen}\ B\times\text{cos.}\ A}{R}=$ sen. $A\times$ cos $B+$ sen. $B\times$ cos. A. Con hacer $R=1$.

609 Por lo que hace al coseno recordarémos que el quadrado del coseno de un ángulo qualquiera es igual al quadrado del radio ménos el quadrado del seno. Luego cosen $(A+B)=R^2-\text{sen.}^2\,(A+B)=$ ....

$$\frac{R^4-\text{sen.}^2 A\times\text{cos.}^2 B-2\ \text{sen.}A.\ \text{cos.}A\times\text{sen.}\ B\times\text{cos.}\ B-\text{sen.}^2 B\times\text{cos.}^2 A}{R^2},$$

ó substituyendo por $\text{cos.}^2 B, R^2-\text{sen.}^2 B$; y por $\text{sen.}^2 B-R^2-\text{cos.}^2 B$, considerando que $R^4-R^2\,(\text{sen.}^2 A+\text{cos.}^2 A)$ es igual á cero, tendrémos $\text{cos.}^2\,(A+B)=$ .....

$$\frac{\text{cos.}^3 A\times\text{cos.}^2 B-2\ \text{sen.}\ A.\ \text{cos.}\ A.\ \text{sen.}\ B.\ \text{cos.}\ B+\text{sen.}^2 A\times\text{sen.}^2 B}{R^2},$$

que extrayendo la raiz quadrada y suprimiendo la R, sale por último cos. $(A+B)=$ cos. $A\times$ cos. $B-$ sen. $A\times$ sen. B. Luego, &c.

610 2.° *Si un cuerpo duro y esférico* A *va á chocar obliquamente á otro cuerpo* B *que está en reposo, de la misma*

ma especie y figura que él, la velocidad del cuerpo A *despues del choque será á la velocidad del cuerpo* B, *como* Fig.
el seno total es al coseno del ángulo que forman entre sí 176
las direcciones de las velocidades.

Sea IAF la direccion del cuerpo A ántes del choque, es claro que la percusion se hace al instante que la distancia AB de los centros de los cuerpos es igual á la suma de los dos radios. Tambien se infiere que esta misma línea será la direccion en que se moverá el cuerpo B despues del choque. Sea AZ la direccion del cuerpo A despues del choque, y supongamos que durante la accion instantánea de la percusion los dos cuerpos corran los espacios infinitamente pequeños Aa, Bb; tírese la recta ab, que será igual á AB'' supuesto que los dos cuerpos se tocan quando corren los pequeños espacios Aa, Bb. Del punto b, como centro con el radio bA, trácese el arco infinitamente pequeño Am entre los lados bA, bam, réstese ordenadamente la equacion $BA=ba$ de la equacion $bA=bm$, y se tendrá $Bb=am$. Esto supuesto el pequeño triángulo amA, que se puede considerar como un triángulo rectilíneo rectángulo en m (llamando R el radio) da la siguiente proporcion $Aa : am=Bb :: R$: seno $aAm :: R$: cosen. BAF. Pero Aa y Bb son las velocidades de los dos cuerpos en el instante ó fin del choque, y por consiguiente las velocidades despues del choque; luego la velocidad del cuerpo A despues del choque es á la velocidad del cuerpo B como el seno total es al coseno del ángulo que forman entre sí las direcciones de sus velocidades. Hecho esto demos solucion á las siguientes qüestiones.

611 I. *Dado un cuerpo duro* A *que va á chocar con* 177
otro cuerpo duro B, *que está en reposo, encontrar la velocidad de estos dos cuerpos despues del choque.*

Supongamos que en el instante del choque se juntan los centros de los dos cuerpos con la recta AB, cuya línea será la direccion del cuerpo B despues del choque. Sea AM la velocidad del cuerpo B, AF la velocidad del

del cuerpo A ántes del choque, y AE su velocidad despues del choque. Habiendo construido el paralelogramo $AEFH$, advertirémos que la velocidad primitiva AF puede descomponerse en otras dos AE, AH; de suerte que el cuerpo chocante está en el mismo caso que si quando llegó A se viese impelido de dos velocidades AE, AH; pero él tiene realmente la velocidad AE despues del choque. Luego AH es la velocidad que pierde, y en virtud de la qual empuja al cuerpo B, y así AH ha de caer sobre la direccion AB, con lo que tendrémos la equacion fundamental.

$$A \times AH = B \times AM.$$

Supongamos:
- La velocidad dada AF . . . . . . $= V$
- El seno total . . . . $= 1$
- El seno del ángulo dado BAF . . $= a$
- Su coseno . . . . $= b$
- La velocidad incógnita AE . . . $= x$
- El seno del ángulo incógnito FAE $= y$
- Su coseno . . . . $= z$

Siendo el ángulo BAE = á la suma de los dos ángulos BAF, FAE, tendrémos sen. BAE, ó sen. $AEF = az + by$, y cos. $BAE = bz - ay$ (608 y 609).

El triángulo AEF da sen. AFE, ó sen. $BAF = a$: sen. $FAE = y$ :: $AE = x$: EF, ó $AH = \frac{xy}{a}$. Por otro lado tenemos $AM = AE \times$ cos. $BAE = x(bz - ay)$, que substituyendo estos valores en la equacion fundamental, se tendrá $\frac{Axy}{a} = Bx(bz - ay)$, ó $Ay = Babz - Ba^2y$, ó bien $(A + Ba^2)y = Babz$, ó poniendo por z su valor $\sqrt{(1 - y^2)}$, quadrando los dos miembros, y despejando la $y = \frac{Bab}{\sqrt{((A+Ba^2)^2 + B^2a^2b^2)}}$.

El triángulo AEF da tambien sen. AFE, ó sen. BAF

$BAF = a$: sen. $AEF = (az + by)$ :: $AE = x$: $AF = V$, y por consiguiente $x = \frac{aV}{az+by}$, substituyendo en esta equacion por y y z sus valores, y observando que $a^2 + b^2 = 1$, Fig.
tendrémos por último $x = \frac{V\sqrt{((A+Ba^2) + B^2a^2b^2)}}{A+B}$, conociendo por medio de los valores de y, z, x la direccion y velocidad AE del cuerpo chocante despues del choque, se conocerá tambien la velocidad AM del cuerpo chocado; pues $AM = AE \times$ cos. BAE. La expresion de esta velocidad en línea se encuentra baxando del punto E la perpendicular EM sobre AB, porque en este caso es $AM = AE \times$ cos. BAE.

612 II. *Dado un cuerpo elástico* A *que va á chocar obliqüamente con otro cuerpo tambien elástico* B *en reposo, encontrar las velocidades de estos dos cuerpos despues del choque.*

Búsquense las velocidades AE, AM como si los cuerpos fueran duros. Por lo dicho (595) en el choque directo de los cuerpos elásticos hemos visto que la velocidad que gana el uno y pierde el otro son dobles de lo que serian si fuesen cuerpos duros. Lo mismo sucede en el choque obliqüo. Luego si prolongamos EF de suerte que sea $Fe = 2FE$, se tira AE y se dobla AM, las líneas Ae y $2AM$ serán las velocidades que tendrán estos dos cuerpos despues del choque; pues las líneas EF, AM representan respectivamente la velocidad que pierde y la que gana otro siendo duros. Concluiré este capítulo manifestando que

613 *Quando un cuerpo esférico homogeneo perfectamente elástico choca obliqüamente con un plano* MN *per-* 178
fectamente elástico ó perfectamente duro, se reflexa formando el ángulo de reflexîon EAD = *al de incidencia* BAD; *pero quando el cuerpo no tiene una elasticidad perfecta, el ángulo de reflexîon es mayor que el de incidencia.*

Sea BA la direccion y velocidad con que el cuerpo choca al plano, báxese la perpendicular BC al plano, y constrúyase el rectángulo $BCAD$, cuyo lado AD se llama *el cateto de incidencia.* En vez de la velocidad BA podemos substituir las velocidades expresadas por CA y DA. De estas velocidades la CA no produce otro efecto que obligar al cuerpo á que ande en el mismo tiempo el espacio $AG = CA$. Por lo que hace á la DA, ésta es la que produce la percusion; pero como el cuerpo es elástico despues del choque, ha de retroceder con una velocidad igual á AD. Luego el cuerpo en el punto B se halla animado de dos velocidades, una AD y otra AN; luego se ha de mover en la direccion AE, y con una velocidad representada por esta línea, esto es, por la diagonal de un rectángulo $AGED = BCAD$, y así han de ser iguales los ángulos EAD, BAD. Pero quando el cuerpo no es perfectamente elástico, la velocidad DA no le hace retroceder hasta el punto D, sino que llega solamente á un punto H, y el cuerpo en este caso anda la diagonal del rectángulo $HKGA$, formando el ángulo KAH mayor que $EAD = DAB$.

CAPÍTULO VIII.

Del movimiento de rotacion de los cuerpos y de los que se mueven por líneas curvas.

Del movimiento de rotacion.

614 Quando á un cuerpo se le da un impulso en una direccion que pase por su centro de gravedad, todas las partes del cuerpo se mueven con igual velocidad. No tendrémos duda alguna acerca de esto si consideramos que cada dos partículas colocadas á distintos lados del centro y á igual distancia de él han de tener igual movimiento; pero como todas las partes del cuerpo estén li-

gadas entre sí, no pueden dichas partículas moverse con Fig.
igual velocidad sin que las demas partes se muevan del mismo modo. Luego si imaginamos una recta que sea perpendicular á la direccion de la potencia, y que pase por el centro de gravedad del cuerpo, ésta se moverá paralela á sí misma.

615 Pero quando la potencia no se dirige al centro de gravedad: 1.º *este centro se mueve del mismo modo que si estuviera colocado en la direccion de la potencia*: 2.º *el cuerpo gira en el primer instante al rededor de su centro de gravedad del mismo modo que giraria al rededor de un exe que pasase por este punto y fuese perpendicular á un plano que pasase por el centro y por la direccion de la potencia.*

Sea un cuerpo de figura qualquiera impelido por una 179
fuerza F, cuya direccion FK no pasa por el centro de gravedad G. Por este punto y por la recta EK imagínese un plano MKD que divida el cuerpo en dos partes iguales, y tírese el exe GV perpendicular al plano (ésta recta nos la debemos figurar levantada sobre el plano del papel á quien es perpendicular). Representemos por FA el impulso de la fuerza, y su mitad BF descompóngase en dos fuerzas FN, FO, que la una como FN se dirija al centro G, y la otra FO sea perpendicular á FA. Prolónguese FG haciendo $GT = FG$, y tómese $TQ = FN$. Imaginemos que la fuerza FN está aplicada en el punto T, y que está representada por TQ; y descompóngase esta fuerza en otras dos TE, TZ, la una perpendicular y la otra paralela al exe KGS.

616 Esto supuesto es evidente que el cuerpo es movido del mismo modo que si en lugar de ser animado de la fuerza primitiva FA lo estuviese por las quatro fuerzas BA, FO, TE, TZ; pero las dos fuerzas BA, TE, siendo paralelas é iguales, y pasando á distancias iguales del centro G, tienen por resultante una fuerza GP igual á su suma, y que pasa por el centro G. Ademas de esto, siendo $BA + TF = FA$, será tambien $GP = FA$;

de

Fig. de donde se sigue que el centro de gravedad es movido del mismo modo que si la direccion de la fuerza pasare por él.

Las dos fuerzas FO, TZ son evidentemente iguales, paralelas, y pasan á distancias iguales del centro de gravedad G con direcciones opuestas. Luego ellas no pueden obligar al centro á que avance segun GK, segun GS, ni segun otra direccion qualquiera. Luego el centro de gravedad ha de permanecer inmóvil, y como dichas fuerzas no se destruyen, el cuerpo ha de girar al rededor de dicho centro.

617 Lo que hemos dicho de un solo cuerpo dirémos
180 de un sistema de cuerpos qualquiera como A, B, C, D colocados en línea recta, é impelidos por muchas fuerzas paralelas, cuya resultante R no pasa por el centro de gravedad. El sistema AD tomará en el primer instante una posicion Ad girando al rededor de su centro de gravedad G; pero sin embargo este centro habrá andado un espacio Gg, el mismo que andaria si el punto P por donde pasa la resultante, y al qual hemos llamado *centro de fuerzas*, coincidiese con el de gravedad.

618 El ángulo DAd, ó GAg, que forman entre sí las dos posiciones distintas del sistema en dos instantes inmediatos, se llama *ángulo giratorio*; y el punto A, que en el primer instante podemos considerar como que se mantiene inmóvil, se llama *centro de conversion*.

Un plano que pase por la recta RP y por el centro de gravedad del sistema, se llama *plano giratorio*, y se llama *exe de rotacion* una línea que pasa por el centro de conversion, y es perpendicular al plano giratorio: tal sería una recta levantada en el punto A perpendicular al plano de la lámina.

619 Y por último llámase *radio de rotacion* la distancia que hay del centro de gravedad al de conversion.

620 Esto supuesto veamos como se determinan: 1.° el espacio que ha andado el centro de gravedad: 2.° la cantidad del ángulo giratorio: 3.° el radio de rotacion.

En quanto á lo primero debemos considerar que la fuer- Fig.
za absoluta con que se mueve el sistema es igual á su masa total multiplicada por la velocidad con que se mue- 621
ve su centro de gravedad, ó lo que es lo mismo, al producto de la masa y el espacio que anda en una unidad de tiempo. Luego llamando Sf la fuerza única, ó suma de fuerzas paralelas que obran el sistema $S.M$ la masa total ó suma de las masas particulares de los cuerpos A, B, C, D, &c., y e el espacio andado en una unidad de tiempo, será $e \times S.M = S.f$ y $e = \frac{S.f}{S.M}$; pero como el espacio Gg que buscamos no es andado en una unidad de tiempo finito, sino es en un instante, si llamamos á éste dt, tendrémos $1 : dt :: \frac{S.f}{S.M} : Gg = \frac{dt\, S.f}{S.M}$ (551), y ésta es la expresion del espacio que anda el centro de gravedad en el primer instante del movimiento, *que se ve que es igual á la suma de las fuerzas que obran en el sistema multiplicada por el tiempo, partido todo por la suma de los cuerpos.*

621 En quanto á lo 2.°, que es hallar el ángulo giratorio, debemos advertir que éste no depende del movimiento de translacion que pueda tener el cuerpo, y que por consiguiente debemos prescindir de él, y atender solamente al movimiento de rotacion. Por lo que hace á éste debemos considerar: 1.° que haciéndose al rededor del centro de gravedad, los cuerpos que componen el sistema han de oponer al movimiento por razon de su inercia una resistencia proporcional á la suma de los momentos de las potencias referidos al centro de gravedad; pero como el momento de una potencia qualquiera es igual al producto de ella por la distancia á que pasa su direccion de un punto fixo, si suponemos que una de las fuerzas paralelas que obran en este sistema sea Q y DG la distancia á que pasa del centro G, será el momento de esta fuerza $Q \times DG$; pero la fuerza Q se mide tambien por su cantidad de movimiento, esto es,

es, por la masa D que mueve, y la velocidad Dd que le comunica. Y así el momento de la fuerza Q será tambien $D \times DG \times Dd$: el momento de otra fuerza H será $C \times CG \times CD$; pero GC y CD son proporcionales con Cc y Dd; luego los momentos de las potencias Q, H, &c. serán como $D \times \overline{DG}^2$, $C \times \overline{CG}^2$, &c., esto es, *como los productos de las masas por los quadrados de las distancias á que están del centro de gravedad.* Estos productos de masas por los quadrados de sus distancias á un punto fixo se llaman *momentos de inercia*; luego si la suma de los momentos de inercia de todos los cuerpos del sistema la expresamos por S', estará el ángulo giratorio en razon inversa de esta cantidad.

2.° Que quanto mayor sea la inercia de las potencias, y mas diste la resultante del centro de rotacion, tanto mayor ángulo producirán. Y así, llamando P la distancia que hay del centro de fuerza al de gravedad estará el ángulo giratorio en razon directa de $dtP \times Sf$; y como hemos visto que tambien seguia la razon inversa de la suma de los momentos de inercia, será este ángulo $= \frac{dtP \times Sf}{S'}$.

622 Por lo que hace á determinar el radio de rotacion, que es el tercer caso, se ha de dividir el camino que anda el centro de gravedad por el ángulo giratorio. Luego será $AG = \frac{dtS.f}{S.M} : \frac{dtP.Sf}{S'} = \frac{S'}{P.SM}$ = á la suma de los momentos de inercia partida por el producto de la suma de las masas, y la distancia que hay del centro de fuerzas al de gravedad. Para la demostracion basta considerar que si entre dos líneas que forman un ángulo qualquiera trazamos desde el vértice varios arcos, y dividimos sucesivamente la longitud de cada uno de ellos por el valor del ángulo, el quociente será el radio con que ha sido trazado cada uno de ellos.

Del

Del movimiento por líneas curvas.

623 Una sola fuerza es suficiente á obligar á un cuerpo á que trace una línea recta; mas para trazar una línea curva es preciso mas de una fuerza; y así el movimiento curvilíneo es compuesto (544).

624 Si á uno de los extremos de una cuerda atamos un cuerpo de figura esférica, y sujetando el otro extremo á un punto fixo sobre un plano horizontal obligamos al cuerpo á que describa una circunferencia de círculo sobre este plano al rededor del punto fixo, se echará de ver que el cordon se mantendrá tirante, y esta tirantez será tanto mayor quanto mas apriesa se mueva el cuerpo. Y si el cordon se rompiese, el cuerpo dexaria de voltear, y se movería por una línea recta tangente á la circunferencia en el mismo punto en que se hallaba el cuerpo quando se rompió la cuerda. De lo que se deduce que el cordon en este caso hace el mismo oficio que una potencia que á cada instante impeliese el móvil dirigiéndolo hácia el punto fixo. La fuerza que obra en un móvil, dirigiéndolo á un punto fixo, se llama *fuerza centrípeta*, y es la que lo detiene; y aquella con que el cuerpo intenta escaparse, se llama *fuerza centrífuga.*

625 Los Geómetras consideran las líneas curvas como unos polígonos de una infinidad de lados. Y así, si suponemos que un cuerpo ande una curva $ABCD$, considerada como un polígono compuesto de los lados in- 181
finitamente pequeños AB, EC, &c. al pasar el cuerpo de un lado á otro parece debe perder alguna parte de su velocidad. Determinemos si es cierto, y qual sea ésta. Para lo qual supongamos que AB sea el espacio que el cuerpo anda en el primer instante en virtud de la velocidad primitiva, y BE el espacio que la fuerza centrífuga puede hacer andar el móvil en el mismo instante. Si no fuera por la resistencia que el cuerpo encuentra en

Fig. en el punto B, se moveria continuamente en la direccion ABH con una velocidad capaz de andar en el mismo tiempo el espacio $BH = BA$; y si construimos el paralelogramo $BEHF$ podrémos substituir en vez de la fuerza única BH, que anima el cuerpo, las dos fuerzas BE y BF. Pero de estas dos fuerzas la BE se destruye por la resistencia que opone la curva. Luego al cuerpo solo le mueve la fuerza BF; y si desde el punto B, como centro con un radio BH, trazamos el arco HC, la parte FC será la velocidad que habrá perdido el cuerpo al pasar de un lado á otro, la qual es el seno verso del ángulo HBC; y como este ángulo es infinitamente pequeño por ser AB y BF dos lados contiguos infinitamente pequeños de una curva FC, y por consiguiente la velocidad que pierde el cuerpo en cada punto de la curva es un infinitamente pequeño de segundo órden; porque siendo cierto *que en un círculo el seno de un ángulo es medio proporcional entre el diámetro y el seno verso*, siempre que el seno sea infinitamente pequeño, ha de ser el seno verso un infinitamente pequeño de segundo órden.

626 Luego quando un cuerpo se mueve por una curva, la velocidad que pierde durante su movimiento es nula; porque habiendo demostrado que la velocidad que pierde al pasar de un punto á otro de la curva es un infinitamente pequeño de segundo órden, aunque el número de puntos de la curva es infinito, la velocidad que pierde en todos ellos no puede ser mayor que un infinitamente pequeño del primer órden, que siempre es una cantidad despreciable.

Propongámonos ahora resolver algunas qüestiones sobre el movimiento curvilíneo.

627 I. *Suponiendo un cuerpo* M *que desciende á lo largo de una curva* AMB, *la qual puede mirarse como que es un canal de la figura que se representa, dentro del qual se mueve el cuerpo, hallar la velocidad que tendrá al llegar al punto mas baxo* B, *donde su tangente es horizontal.*

Con-

Considerémos la curva como un polígono regular de una infinidad de lados, é imaginemos que el cuerpo acaba de andar el pequeño lado nM, como al pasar al lado Mm no pierde ninguna velocidad, andará Mm con la velocidad que tenia en el punto M, si no obrase en él la gravedad; pero esta fuerza como obra en una direccion vertical MQ solicita al cuerpo á que baxe por esta línea, y si la accion de la gravedad la expresamos por MQ y descomponemos esta fuerza en dos, la una SM perpendicular á la curva, y la otra Mt que coincida en ella, es claro que sola ésta acelera el movimiento, pues la otra la destruye la resistencia de la curva. Esto supuesto tírese por el punto m la vertical mr; y comparando entre sí los triángulos semejantes Mrm, MtQ, tendrémos $Mm : mr :: MQ : Mt = \frac{MQ \times mr}{Mm}$.

628 Esto supuesto refiramos los diferentes puntos de la curva á un exe vertical qualquiera BZ, y llamemos BP, x; PM, y; t el tiempo, y el arco BM, s. Será $Pp = mr = -dx$; $Mm = -ds$ (se señalan estas cantidades con el signo negativo, porque al paso que crece el tiempo t menguan la abscisa y la ordenada). Sea p la velocidad que imprime la pesantez en un segundo á un cuerpo que desciende libremente, la que le comunicará en un instante dt, será pdt; por manera que será la velocidad $MQ = pdt$. Sea u la velocidad que tiene el cuerpo al llegar á M, el incremento de esta velocidad en el tiempo dt será du, tendrémos pues $Mt = du$. Substituyendo ahora estos valores en la equacion $Mt = \frac{MQ \times mr}{Mm}$ saldrá $du = pdt = \frac{-dx}{-ds} = pdt \times \frac{dx}{ds}$, pero $dt = \frac{-ds}{u}$ (583); luego haciendo la substitucion y eliminando el denominador, tendrémos $udu = -pdx$, cuya integral es $\frac{u^2}{2} = C - px$, ó $u^2 = 2C - 2px$.

629 Solo nos resta determinar la constante C para que quede conocido el valor de u, para lo qual supongamos que el cuerpo empezó á descender desde un pun-

to

Fig. to A mas elevado que la horizontal que pasa por el punto B, la cantidad $BZ=b$. No hay duda que quando la velocidad en A era cero era $x=b$; luego $0=2C-2pb$, y $C=pb$ y por tanto $u^2=2pb-2px=2p(b-x)=2p\times PZ$. Pero si un cuerpo pesado cayese de la altura $2p$, el quadrado de la velocidad que tendria al llegar al punto P sería (563) $2p\times PZ$. Luego quando un cuerpo se mueve á lo largo de una línea curva qualquiera, la velocidad que tiene en qualquiera de los puntos es la misma que si hubiese caido libremente de una altura igual. Y así el cuerpo al llegar al punto B tendrá la misma velocidad que si hubiese caido de la altura vertical ZB; y como no hemos explicado qual sea la naturaleza de la curva, es propiedad que conviene á todas ellas.

630 Luego si un cuerpo cayese á lo largo de un arco
183 AD, tendrá en el punto D la misma velocidad que si hubiese caido á lo largo de FD, siendo AF horizontal y CD vertical. Y por la misma razon, si cayese á lo largo del arco BD, tendrá en el punto D la misma velocidad que si hubiese caido á lo largo del ED. Si desde los puntos E y F dexáramos caer sucesivamente un mismo cuerpo al llegar á D tendrá velocidades, que serán como las raices quadradas de las alturas. Y si quisiéramos que un móvil adquiriese una velocidad de seis pies por segundo, lo conseguiríamos con determinar de qué altura ha de caer un grave para adquirir una velocidad de seis pies por segundo (566), y tomando en la vertical DC una parte DF igual á la dicha altura, y tomando un punto C mas arriba de F, se atará un hilo tan largo como CD, se colgará de él un cuerpo, y arrimándolo al punto A, donde la perpendicular AF corta el arco, se dexará caer, y al llegar al punto D tendrá la velocidad que se pide.

182 331 Luego *si quando el cuerpo llega al punto* B, *donde la tangente es horizontal, encuentra un ramo de la misma ú otra curva, subirá por ella hasta encontrar la horizontal tirada por el punto de donde empezó á descender.*

der. Para demostrarlo supongamos que el cuerpo esté Fig.
actualmente en B donde la altura x es $=0$: si llamamos V la velocidad que tendrá en este punto, será $V^2=2pb$. Supongamos que con esta velocidad suba á lo largo de la curva BM', discurriendo como ántes, tendrémos que su velocidad en un punto M' será $-du=pdt\times\frac{dx}{ds}$, advirtiendo que u mengua al paso que t, s, x crecen. Substituyendo en lugar de dt su valor $\frac{ds}{u}$, como hicimos ántes, tendrémos $udu=-pdx$, é integrando $uu=2C-2px$, pero quando $x=0$, $V=u$; luego $V^2=2C$, y como $u^2=2pb$ tambien será $2C=pb$, y por consiguiente $u^2=2pb-2px$; pero quando el cuerpo dexa de subir es $u=0$ y $2pb-2px=0$, y por último $x=b$, que nos manifiesta que el punto donde el cuerpo habrá llegado en virtud de la velocidad adquirida quando descendió al punto B es la misma que tenia en el punto A desde donde descendió.

632 II. *Determinar la razon que tienen la velocidad primitiva y la fuerza central para que un cuerpo* A *sin* 184
pesantez trace una circunferencia de círculo.

Debiéndose mover el cuerpo por la circunferencia, es indispensable que en cada punto de ella sean perpendiculares una á otra las dos fuerzas. Para conocer qué razon deban tener supongamos que AB sea el espacio que la fuerza primitiva, á quien llamarémos *fuerza de proyeccion*, hiciese andar al móvil en un instante si no fuera por la fuerza central, y que la línea AD infinitamente mas pequeña que AB sea el espacio que la fuerza central, obrando por sí sola sin descontinuar, le haría andar al móvil en el mismo tiempo. Siendo AB infinitamente pequeña podemos considerar la fuerza central como que obra paralela á sí misma en dos instantes inmediatos. Luego si tiramos Bb paralela á AD y construimos el paralelogramo $ABbD$, será preciso que la cantidad AB sea tal que la parte Bb, que es lo que el cuerpo en virtud de la fuerza centrífuga que adquiere se desvia, sea igual á la

 par-

parte AD, que es lo que la fuerza centrípeta le acerca al centro. Esto supuesto, si prolongamos el radio AC hasta que encuentre la circunferencia en E, tendrémos por la naturaleza del círculo $(Db)^2 = (AB)^2 = AD \times DE$; pero siendo AD infinitamente pequeña de segundo órden es $DE = AE = 2AC$. Luego $(AB)^2 = AD \times 2AC$. Sea V la velocidad comunicada al móvil en un segundo por la fuerza de proyeccion, será Vdt la que le comunicará en un instante, y tendrémos $V^2dt^2 = (AB)^2$. Y si llamamos g la velocidad que la fuerza central, obrando sola é igualmente á cada instante le comunicaria al móvil en un segundo, el espacio que le haria andar en un instante dt sería $\frac{gdt^2}{2}$ (563), y por tanto será $AD = \frac{gdt^2}{2}$. Luego $V^2dt^2 = \frac{gdt^2}{2} \times 2AC$ y $V^2 = g \times AC$, de donde sale la proporcion $g : V :: V : AC$, que nos manifiesta que la velocidad de proyeccion es media proporcional entre el radio y la fuerza centrípeta.

633 Llamemos h la altura de donde ha de caer un grave para adquirir la velocidad V, será $h = \frac{V^2}{2p}$ (566) y $2ph = V^2$, cuya cantidad substituida en la equacion anterior, la reduce á $2ph = g \times AC$, de donde sale la siguiente proporcion $g : p :: h : \frac{1}{2} AC$, que nos da á conocer que para que un cuerpo libre y sin pesantez ande una circunferencia de un radio conocido en virtud de una fuerza dirigida á su centro y de una velocidad primitiva, ha de ser la fuerza central á la gravedad, como la altura de donde ha de caer un grave para adquirir la velocidad de proyeccion es á la mitad del radio.

634 Siendo la fuerza central en qualquiera punto perpendicular á la direccion de la proyeccion no conspira á aumentar ni disminuir el movimiento de cuerpo, y así éste ha de ser uniforme.

Como en los movimientos curvilíneos las fuerzas centrípeta y centrífuga son iguales, quanto hemos dicho de la primera se aplicará igualmente á la segunda; y así, si

si suponemos que un cuerpo de una libra circule al extremo de una cuerda de 5 pies con una velocidad de 30 pies por segundo, hallarémos la fuerza centrífuga que adquiere, y con la qual intenta escaparse en la direccion de la tangente correspondiente al punto donde se halla el cuerpo con decir; 15 altura correspondiente á la velocidad 30 es á $\frac{5}{2}$, como la fuerza centrífuga es á la pesantez. Luego estas fuerzas son como $\frac{5}{2} : 15 :: 5 : 30 :: 1 : 6$; luego la fuerza con que el cuerpo de una libra intenta desviarse del centro equivale á 6 libras.

635 De la equacion $V^2 = g \times AC$ sale $g = \frac{V^2}{AC}$, y ya que g expresa la velocidad que la fuerza centrífuga comunica al móvil en un segundo, será gdt la que le comunicará en un instante dt, y la cantidad de movimiento que producirá en el mismo tiempo $Agdt = \frac{AV^2dt}{AC}$ despues de substituir por g su valor. Luego si llamamos F esta cantidad de movimiento ó fuerza centrífuga absoluta, tendrémos $F = \frac{AV^2dt}{AC}$, ó $F = \ldots\ldots \frac{AV^2dt}{R}$, llamando R el radio. Por las mismas reglas llamando A' otro cuerpo, F' su fuerza centrífuga, R' el radio, y V' la velocidad de proyeccion, tendrémos $F' = \frac{A'V'^2dt}{R'}$; y comparando esta expresion con la anterior, será $F : F' :: \frac{AV'^2dt}{R} : \frac{A'V'^2dt}{R'} :: \frac{AV^2}{R} : \frac{A'V'^2}{R'}$. Lo que nos da á conocer en qué razon se hallan las fuerzas centrífugas de los cuerpos.

636 Sean C y C' las circunferencias que trazan en los tiempos T y T', siendo sus movimientos uniformes, serán $V = \frac{C}{T}$ y $V' = \frac{C'}{T'}$, y como en el supuesto de ser $\frac{1}{c}$ la razon del radio á la circunferencia, son $C = cR$ y $C' = cR'$, serán $V = \frac{cR}{T}$ y $\frac{V'cR'}{T'}$, cuyos valores substituidos por V y V' en la proporcion anterior, nos da por último $F : F' :: \frac{Ac^2R^2}{RT^2} : \frac{A'c^2R'^2}{R'T'^2} :: \frac{AR}{T^2}$:

Fig. $: \frac{A'R'}{T'^2}$, esto es, las fuerzas centrífugas están en razon compuesta directa de masas y radios, é inversa de los quadrados de los tiempos.

637 III. *Determinar la curva que traza un cuerpo im-*
185 *pelido por una fuerza qualquiera en la direccion* AG *que no es vertical, despues de quedar entregado á la accion de la gravedad.*

Si el cuerpo despues del impulso que le da la fuerza motriz no quedara sujeto á la accion de la gravedad, permaneceria moviéndose con un movimiento uniforme y rectilineo en la direccion AG en que fué impelido. Pero desde el instante que el cuerpo parte del punto A se halla solicitado de la gravedad en una direccion vertical, la que intenta desviarle de su direccion primitiva, no permitiéndole mantenerse sobre la recta AG mas de un instante, que es aquel en que el cuerpo empezó á moverse; de suerte que al cabo de un tiempo finito determinado el cuerpo no se hallará en el punto Q donde debia encontrarse, sino es en otro punto M mas abaxo, habiendo descendido la cantidad QM: ademas de esto, como el móvil se halla á cada instante impelido de dos fuerzas que le comunican, la una un movimiento uniforme, y la otra uniformemente acelerado, ha de andar una línea curva $AMEB$, cuya tangente en el punto A es la recta AG.

638 Para determinar la naturaleza de esta curva é igualmente las circunstancias del movimiento del proyectil, supongamos que $AC = h$ sea la altura de donde ha de caer un grave para adquirir la velocidad de proyeccion que se le comunicó al móvil en el sentido AG, $AQ = s$ el espacio que en virtud de la fuerza de proyeccion andaria con movimiento uniforme en un tiempo determinado, y $QM = z$ el efecto de la gravedad en un mismo tiempo, por exemplo, en un segundo. Como AQ y QM son los espacios que cada una de las dos fuerzas, obrando de por sí, haria andar al móvil en la

unidad de tiempo, será AQ la velocidad que le comunica la fuerza de proyeccion, y $2QM$ la que le comunica la gravedad (566); y así tendrémos $s : 2z :: \sqrt{h} : \sqrt{z}$, y $s^2\ 4z^2 :: h : z$, que multiplicando extremos y medios, nos sale $s^2 = 4hz$.

639 Pero si prolongamos CA hasta R haciendo $AR = QM$, y tiramos RM, tendrémos que siendo AG tangente de la curva y AR un diámetro, la RM paralela á AG ha de ser una ordenada de la curva, y $AR = QM$ la abscisa correspondiente. Luego $s^2 = 4h \times z$ es una equacion á la parábola, por ser el quadrado de la ordenada igual al rectángulo de la abscisa por una cantidad constante $4h$, y así la curva que traza el proyectil es una parábola.

640 Esto supuesto, refiriendo al exe AB la naturaleza de esta curva, y llamando $AP = x$, $PM = y$, tangente $QAG = t$, y el radio $= 1$, tendrémos por la propiedad del triángulo rectángulo AQP: $1 : t :: x : PQ = tx$; $QM = PQ - PM$, ó $z = tx - y$; $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2$, $s^2 = x^2 + t^2x^2 = 4hz$, ó poniendo por z su valor $tx - y$; $x^2 + t^2x^2 = 4h(tx - y)$, y por último $x^2(1 + t^2) = 4h(tx - y)$. Equacion á las ordenadas al exe, en la qual hemos hecho entrar la tangente del ángulo de inclinacion QAP para determinar la direccion que se le ha de dar al proyectil.

641 Apliquémosla á la artillería, y supongamos que se quiere tirar una bala que vaya á parar al punto E con una carga de pólvora determinada. Mídanse la horizontal AD y la vertical DE, y supongamos que la primera sea b y la segunda c, y considerémos que quando es $x = b$, y es $= c$; y haciendo las substituciones correspondientes en la fórmula, y despejando la t, tendrémos $t = \frac{2h}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{(4h^2 - 4hc - b^2)}$. Luego al cañon se le puede dar dos diferentes direcciones para herir un mismo objeto.

642 Bien que los valores de t no pueden ser reales mién-

miéntras $4b^2$ no sea mayor ó igual á $4bc+b^2$. En estos movimientos el ángulo GAB se llama *ángulo de la proyeccion*, la distancia horizontal AB *amplitud de la proyeccion*, y b *la fuerza de la proyeccion*. Hemos considerado que el punto E que se quiere herir estaba sobre el horizonte, y en virtud de este supuesto hemos hallado el valor de t; pero como dicho punto puede estar en la horizontal AB, y tambien debaxo de ella, nos restan aun otras dos soluciones de este problema, que las verificarémos con solo substituir en la equacion formularia en lugar de c cero, en un caso, y $-c$ en otro, de cuyos supuestos nos resultan las dos equaciones siguientes $t = \frac{2h}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{(4b^2 - b^2)}$, y $t = \frac{2b}{b} \pm \frac{1}{b}$ .... $\sqrt{(4b^2 + 4bc - b^2)}$.

643 Supongamos ahora que dada la direccion del proyectil, ó el valor del ángulo t queramos determinar la velocidad de proyeccion, ó lo qne es lo mismo, la fuerza que le ha de dar la pólvora para herir un punto E. Despejarémos la b considerándola como incógnita, y tendrémos $b = \frac{b^2(1+t^2)}{4(bt-c)}$, que nos da á conocer la altura de la qual debia caer el proyectil para adquirir una velocidad igual á la que le ha de comunicar la pólvora.

644 Si los tiros se hiciesen en el horizonte será $c=0$, y la equacion se reducirá á $b = \frac{b^2(1+t^2)}{4bt}$, que nos da $b = \frac{4t}{(1+t^2)} \times b$, que si hacemos $t = 1$, nos da $b=2b$, que nos dice que quando los tiros son en el horizonte, y se hacen por una direccion de 45.°, ó en una direccion donde la tangente del ángulo es igual al radio, la amplitud es dupla de la altura de donde habia de caer el grave para adquirir la velocidad de proyeccion. Nos resta probar que esta amplitud es la máxima: para convencernos de ello diferenciemos la expresion de la amplitud substituyendo por b,x, esto es, la equacion

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA

cion $x = \frac{4t}{1+t^2} \times b$, ó $\frac{x}{h} = \frac{4t}{1+t^2}$; y haciendo su diferencial $=0$, tendrémos $t = \frac{c}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{(b^2 + c^2)}$, cuyo valor substituido en la equacion de b, la transforma en $b = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2)}$, cuyos resultados nos dan á conocer así el ángulo correspondiente á la menor cantidad de pólvora, como la velocidad de ésta.

645 Hemos deducido la teoría de los proyectiles considerando que los tiros se hacian en el vacío, y prescindiendo de una infinidad de obstáculos que se oponen á su movimiento; por cuya razon es indispensable que en esta especie de movimientos tropiecen á cada paso, tanto la teoría como la práctica con dificultades al parecer insuperables, nacidas de la naturaleza de la gravedad y resistencia del medio que atraviesan: aquella obra continuamente en el móvil con una fuerza que varía en razon inversa del quadrado de las distancias al centro de fuerzas; y aunque sus direcciones son perpendiculares á la superficie, no son paralelas entre sí, ni ménos concurren en el centro del elipsoide, sino es muchas leguas distantes de él, y la segunda opone á los cuerpos una resistencia que sigue la razon compuesta de sus superficies y el quadrado de las velocidades con que se mueven: de donde nace un tropel de dificultades para sujetarlo á leyes ciertas.

646 Tambien contribuye á aumentar el mayor número de obstáculos la dificultad de construir los cuerpos de modo que el centro de gravedad coincida con el de figura; pues girando éste al rededor de aquel, la resultante de todas las resistencias del ayre, que siempre pasa por el centro de figura, ha de obligar al centro de gravedad á que trace una curva compuesta de infinitas curvaturas que le han de desviar insensiblemente de la direccion del tiro, la mayor ó menor humedad de la pólvora quando se trata de las balas y bombas, la dificultad de apreciar la fuerza inicial de la bala al salir del

Fig. cañon, el modo de atacar; y la mayor ó menor densidad de la atmósfera.

186 647 IV. *Determinar el tiempo de la caida de los graves por la cicloyde.*

Sea DEB una semicicloyde, cuyo círculo generador sea $GHIB$, GB su exe, y M el punto desde donde empieza á caer un cuerpo á lo largo del arco ME; y llamemos el seno verso GP, b, y la parte PO, x. Por la propiedad de la cicloyde (255) será $BE = 2BI$; y llamando n el diámetro del círculo generador, tendrémos por la propiedad del círculo $BI = \sqrt{(n \times (n-b-x))}$; ó por ser $BE = 2BI$, $BE = 2\sqrt{(n \times (n-b-x))}$, y llamando s este arco y diferenciando $ds = \frac{-dx\sqrt{(n)}}{\sqrt{(n-b-x)}}$. Y la misma expresion con signo contrario es la diferencial de ME. Por otra parte tenemos (583) que $dt = \frac{de}{u}$, y (563) $u^2 = 2pe$, ó $u = \sqrt{(2pe)}$, que substituyendo este valor en su lugar en la equacion anterior, sale $dt = \frac{de}{\sqrt{(2ep)}}$; pero en la primera equacion $dt = \frac{de}{u}$, de es la diferencial del espacio corrido realmente por el cuerpo en su cicloyde é igual ds, y en la segunda $u = \sqrt{(2ep)}$; e expresa la altura vertical de donde cae el cuerpo (563), y así debe ser $e = x$. Luego $dt = \frac{ds}{\sqrt{(2px)}}$, ó por ser ds en este caso $= \frac{dx\sqrt{(n)}}{\sqrt{(n-b-x)}}$; $dt = \frac{\sqrt{(n)}}{\sqrt{(2p)}} \times \frac{dx}{\sqrt{(nx-bx-x^2)}}$. Pero llamando r el radio de un círculo y x el seno verso correspondiente á un arco qualquiera, la diferencial del arco es igual á $\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$; esto es, igual al radio multiplicado por la diferencial del seno verso partido por el seno.

648 Comparando esta fórmula con el valor de dt hallarémos, que para que ésta se pueda referir á la otra es preciso que sea $r = \frac{n-b}{2}$; luego $dt = \frac{2\sqrt{(n)}}{(n-b)\sqrt{(2p)}} \times$

$$\frac{\frac{n-b}{2} \times dx}{\sqrt{((n-b)x-x^2)}},$$

cuya integral es $t = \frac{2\sqrt{(n)}}{(n-b)\sqrt{(2p)}}$, multiplicado por un arco de círculo, cuyo seno verso es x y el radio $\frac{n-b}{2}$, ó $t = \frac{2\sqrt{(BG)}}{\sqrt{(2p)}} \times \frac{\text{arco } PR}{PB}$; y por la misma razon el tiempo T, que tardará el grave en andar todo el arco MB, será $\frac{2\sqrt{(GB)}}{\sqrt{(2p)}} \times \frac{PRB}{PB}$; pero este último factor es una cantidad constante que expresa la razon de la semicircunferencia de un círculo á su diámetro, que llamando C la circunferencia y 1 el radio, será $\frac{1}{4}C$. Luego $T = \frac{C\sqrt{(GB)}}{2\sqrt{(2p)}}$.

649 Y como hemos visto (631) que un cuerpo que desciende por un arco MB de una curva qualquiera al llegar al punto B tiene tal velocidad, que si encuentra un ramo de la misma, ú otra curva, sube por él hasta encontrar la horizontal Mm en un punto m, dirémos que el tiempo que tarda el cuerpo en andar toda la cicloyde MBm es $2T = \frac{C\sqrt{(GB)}}{\sqrt{(2p)}}$. Luego 1.°, si prescindimos de la resistencia del medio del rozamiento, y qualquier otro obstáculo que se oponga al movimiento del grave, saliendo éste de punto M, no parará hasta llegar á m, y en llegando á este punto volverá á descender, y continuará moviéndose hasta llegar al punto M de donde partió; y de este modo no cesará de ir y venir continuamente: cada una de estas idas y venidas del cuerpo se llama una *oscilacion*: 2.° que de qualquier punto de la curva DB que descienda un cuerpo siempre tardará el mismo tiempo en llegar al punto B, pues siempre sacarémos $T = \frac{C\sqrt{(GB)}}{2\sqrt{(2p)}}$.

CA-

CAPITULO IX.

De los péndulos simples y compuestos, y los centros de oscilacion y percusion.

650 Llámase *péndulo* una varilla flexîble CM, la qual tiene un extremo fixo en un punto C, al rededor del qual puede girar con libertad, y en el otro extremo lleva un cuerpo M. El péndulo puede ser *simple* y *compuesto*: es simple quando así la varilla, como el cuerpo que lleva en su extremo, tienen una inercia infinitamente pequeña, ó que puede considerarse como tal, y compuesto quando la inercia es de consideracion, esto es, quando la varilla tiene bastante cantidad de materia, y la tienen el cuerpo ó cuerpos que dependen de ella. Como quiera que sea, en la práctica no puede darse un péndulo simple como el que aquí hemos considerado sin embargo se tiene por péndulo simple un cuerpo muy pequeño de figura lenticular, y de una materia tal que en poco volúmen contenga mucho peso, colgado de un hilo muy delgado de alambre ú otra materia.

651 Para manifestar las condiciones del movimiento de los péndulos simples, advertirémos 1.° que como queda demostrado (631), quando un cuerpo desciende á lo largo de una curva al llegar, al punto ínfimo de ella, donde la tangente es horizontal, se halla con una velocidad capaz de subir por otro ramo de la misma curva hasta encontrar la horizontal tirada por el punto desde donde empezó á descender: 2.° que las evolutas de la cicloyde son otras cicloydes de las mismas dimensiones que ella (328): 3.° que desde qualquier punto de una cicloyde que empiece á descender un grave, siempre tarda un mismo tiempo en llegar al punto ínfimo (648).

Lue-

652 Luego si entre dos semicicloydes iguales CD,Cd hacemos oscilar un péndulo simple CM, cuya varilla ó Fig.
radio CM sea flexîble y dupla del diámetro GB del cír- 186
culo generador, 1.° este péndulo trazará con su movimiento otra cicloyde DBd igual á cada una de las evolutas: 2.° desde qualquier punto M,E, &c. que empiece á oscilar el péndulo, la expresion del tiempo que tardará en llegar al punto B, y por consiguiente en hacer una oscilacion entera, será siempre la misma. Esta hemos visto que es (649) $2T = \frac{c\surd(GB)}{\surd(2p)}$. Luego si respecto de otro péndulo que hace sus oscilaciones en otra cicloyde, y donde la gravedad que lo anima sea distinta, llamamos p' esta gravedad, el tiempo T' y el diámetro del círculo generador N, tendrémos respecto de este péndulo $2T' = \frac{c\surd(N')}{\surd(2p')}$, y comparando una con otra estas expresiones de los tiempos, será $2T : 2T' :: \frac{c\surd(GB)}{\surd(2p)} : \frac{c\surd(N')}{\surd(2p')}$, ó $T : T' :: \frac{\surd(2GB)}{\surd(p)} : \frac{\surd(2N)}{\surd(p')}$, ó haciendo $2GB = a$ y $2N = a'$, $T : T' :: \frac{\surd(a)}{p} : \frac{\surd(a')}{p'}$, que nos manifiesta que los tiempos en que hacen sus oscilaciones dos péndulos de distintas longitudes y animados por distintas gravedades, son como las raices quadradas de la longitud de los péndulos divididas por las raices quadradas de las gravedades; pero el círculo generador de una cicloyde se confunde sensiblemente con ella en el vértice: de donde resulta que quando un péndulo hace sus oscilaciones en arcos de círculo muy pequeños, como de 2 á 3 grados, se puede considerar como si se moviese en una cicloyde; y así las fórmulas halladas para calcular el tiempo de las oscilaciones por arcos de cicloyde serán aplicables á los péndulos circulares, siempre que éstas se hagan en arcos muy pequeños. Luego los tiempos con que dos péndulos simples circulares de

di-

diferente longitud, y animados por distintas gravedades hacen sus oscilaciones, serán como las raices quadradas de los radios divididas por las raices quadradas de las gravedades.

653 Luego si los péndulos tuviesen igual longitud ó radio estarán los tiempos en razon inversa de las raices quadradas de las pesanteces ó gravedades; pues será $T : T' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$, y si estuviesen animados de una misma gravedad, serán los tiempos como las raices quadradas de las longitudes de los péndulos, pues en este caso tendrémos $T : T' :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$.

654 Supongamos que n y n' representen los números de oscilaciones que hacen dos péndulos de distinta longitud animados por una misma gravedad en un tiempo determinado, por exemplo de una hora. Dividiendo la hora ó 3600″ por el número de oscilaciones que hacen cada una, tendrémos el tiempo que gasta cada uno de los enunciados péndulos en una oscilacion, por manera que será $T = \frac{3600}{n}$, y $T' = \frac{3600}{n'}$ y $T : T' :: \frac{3600}{n} : \frac{3600}{n'} :: n' : n$. Pero hemos visto que siendo la gravedad una misma era $T : T' :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$; luego por una igualdad de razones ha de ser $n' : n :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$, que nos manifiesta que los números de vibraciones que hacen en un mismo tiempo dos péndulos de diferente longitud, y animados por una misma gravedad, son en razon inversa de las raices quadradas de sus longitudes, ó lo que es lo mismo, las longitudes son en razon inversa de los quadrados de los números de oscilaciones que hacen en un mismo tiempo.

Luego si un péndulo llevado á diferentes paises de la tierra no hiciese en qualquiera de ellos el mismo número de oscilaciones en igual tiempo, debemos inferir que la pesantez no es una misma en todas las regiones. Por medio del péndulo han conocido los Matemáticos que esta fuerza no es la misma en todos los paises: que en el equador es la menor, y desde esta línea hasta los polos va creciendo. Observacion que ha dado motivo suficiente para creer que la tierra que habitamos no es perfectamente esférica; pues si suponemos una masa qualquiera esférica, y que todas sus partículas equidistantes del centro estén igualmente impelidas en las direcciones de los radios por una fuerza central, la reaccion mútua de todas estas partículas se destruirá, y la esfera conservará su figura. Pero si suponemos que esta esfera gire al rededor de un diámetro, la fuerza central no podrá subsistir la misma en todas las partículas equidistantes del centro: todas ellas adquirirán una fuerza centrífuga tanto mayor quanto mas disten de los polos; y como las fuerzas centrífuga y centrípeta son opuestas, pretenden destruirse una á otra. De donde resulta que las partes mas próxîmas al Equador perderán mayor parte de fuerza centrípeta que las que están cerca de los Polos. Luego las partículas de la esfera ya no pueden conservar el equilibrio, y así se han de mover acercándose unas y desviándose otras del centro, y obligando á la esfera á que se convierta en un esferoyde aplanado.

655 La última propiedad que hemos deducido de los péndulos (654) de tener sus longitudes en razon inversa de los quadrados de los números de vibraciones nos suministra un medio sencillo é ingenioso de conocer la longitud de un péndulo simple que señala los segundos, esto es, que en cada segundo de tiempo haga una oscilacion. Para lo qual tomarémos un hilo de alambre delgado y muy flexîble, cuya longitud sea de tres pies exâctos, medidos con la mayor exâctitud, y en su extremo colocarémos un cuerpo que en muy poco volúmen contenga la mayor cantidad de materia que sea posible; se hará oscilar este péndulo en un arco de círculo muy pequeño, y se observará el número de ostilaciones que hace en una hora, y despues se hará la siguiente proporcion: 3600 *número de oscilaciones que ha de hacer el péndulo que se busca es al número de oscila-cio-*

ciones observadas, como la raiz quadrada de la longitud del péndulo de observacion es á la raiz quadrada de la longitud del péndulo que se busca, y que es el que ha de señalar lo segundos.

656 Hallada por este medio la longitud del péndulo que bate los segundos en un pais qualquiera, podrémos determinar facilmente el espacio que anda un grave á quien el ayre no hace una resistencia sensible en el primer segundo de su descension, y para conseguirlo empecemos determinando el espacio que anda un grave miéntras el péndulo hace una semioscilacion.

Para lo qual tomarémos las equaciones $t = \sqrt{\left(\frac{2e}{p}\right)}$ (564) y $T' = \frac{C\sqrt{(GB)}}{2\sqrt{(2p)}}$ (649), ó $T = \frac{C\sqrt{(\frac{1}{2}a)}}{2\sqrt{(2p)}}$, habiendo hecho $GB = \frac{1}{2}a$. Igualando una con otra estas dos expresiones del tiempo y quadrándolas, será $\frac{2e}{p} = \frac{C^2a}{16p}$ y $e = \frac{C^2a}{32}$. Pero como en el movimiento uniforme acelerado los espacios son como los quadrados de los tiempos, siendo el tiempo que emplea el péndulo en hacer una oscilacion entera doble del que emplea en hacer media oscilacion el espacio que ande el grave durante una oscilacion, ha de ser quádruplo del que andaba durante la media oscilacion. Luego $4e = \frac{c^2a}{8}$, substituyendo este valor por e en la fórmula $t = \sqrt{\left(\frac{2e}{p}\right)}$, tendrémos $t = \sqrt{\left(\frac{c^2a}{4p}\right)}$, $t^2 = \frac{c^2a}{4p}$ y despejando la p', será $p = \frac{\frac{1}{4}c^2a}{t^2}$, que substituyendo por t un segundo; por $C\,\frac{355}{113}$; por a, que es una cantidad dupla de la longitud del diámetro del círculo generador 469, 5 líneas medida inglesa, que es la longitud del péndulo simple que bate los segundos en España, tendrémos $p = 9,8696 \times 469,5 = 32$ *P.* 2 *p*, 2 *l.*, que equivalen

len á 30 *p.* 2 *p.* 2 *l.*, pie de París. Pero la altura que anda un grave en el primer segundo de su descenso es la mitad de p (566). Luego un cuerpo que desciende libremente, y á quien el ayre no hace una resistencia sensible, anda en el primer segundo con corta diferencia 15 pies y 1 pulgada de París, ó 16 pies de Inglaterra. Fig.

657 Dexamos dicho que el péndulo compuesto es aquel en el qual se consideran muchos cuerpos colocados en línea recta, ó de qualquier otro modo. Para tratar del movimiento de este péndulo considerarémos que todos los cuerpos que le componen están en una línea recta. Luego si en la varilla inflexîble cargada de cuerpos de que hemos tratado (618) suponemos que uno 180
de los cuerpos extremos que la componen tenga una inercia infinita, la imposibilidad de mover este cuerpo reducirá la varilla á un péndulo compuesto, en el qual el centro de masas será el centro de rotacion; pues una masa de inercia infinita reune en sí todas las masas particulares de la vara; y así en el péndulo compuesto, la fórmula del ángulo giratorio será la misma que la de la vara libre (623), esto es $\frac{pdtSf}{S'}$; pero advertirémos 1.º que aquí P debe expresar la distancia del centro de fuerzas al punto fixo, y S' la suma de los momentos de inercia de las masas tambien al punto fixo: 2.º que como la fuerza que anima el péndulo es la gravedad, siendo las fuerzas proporcionales á las masas, el centro de masas ha de ser el mismo que de fuerzas: 3.º que como la gravedad obra en el péndulo en una direccion vertical, forma miéntras obra en él un ángulo que varía por instantes; y así llamando m este ángulo variable, la accion de la pesantez que obra perpendicularmente en el péndulo será la accion absoluta de esta fuerza multiplicada por el seno de m; y como la fuerza que anima á cada cuerpo para formar el ángulo giratorio en un instante dado es la que resulta de la accion de la pesantez desde el principio del movimien-

to

to hasta este instante, ha de ser la potencia que obra en el mismo instante $Sfdt.$ sen. m, y la expresion del ángulo giratorio en el péndulo compuesto para un instante dado $\frac{pdt.\,Sfdt}{S'} \times$ sen. $m = \frac{Pfdt.\,Sdt.\,\text{sen.}\,m}{S'}$; pues f es constante. Y como en el péndulo simple no hay mas de un cuerpo, el momento de inercia de éste, llamándole M, ha de ser MP^2, y la expresion del ángulo giratorio para éste en un instante $\frac{fdt.\,Sdt.\,\text{sen.}\,m}{MP.}$.

658 Si para evitar equivocaciones llamamos P' la distancia que hay en el péndulo simple desde el cuerpo único al centro de rotacion, y suponiendo que los ángulos giratorios, así en el pendulo simple como en el compuesto, sean iguales, ó igualamos una con otra sus expresiones, tendrémos $\frac{Pfdt.\,Sdt.\,\text{sen.}\,m}{S'} = \frac{fdt.\,Sdt.\,\text{sen.}\,m}{P'.\,M}$, de donde sale $P' = \frac{S}{PM}$, que si admitimos que la masa del péndulo simple sea igual á la suma de las masas del péndulo compuesto, nos manifestará que para hallar la longitud del péndulo simple, cuyo ángulo giratorio en qualquier instante de su movimiento sea igual al del péndulo compuesto en el mismo instante, se tome la suma de los momentos de inercia del péndulo compuesto referidos al punto fixo, y se parta por el producto de las masas por la distancia que hay entre su centro de gravedad y el punto fixo: y el cociente nos dará la longitud del péndulo simple buscado. Estos dos péndulos harán sus oscilaciones en tiempos iguales, y se llaman *isocronos.*

659 Una vez hallada la longitud del péndulo simple isocrono con el compuesto, si sobre el péndulo compuesto se señala un punto distante del punto fixo una cantidad igual á la longitud del péndulo simple, y se suponen reunidas en él todas las masas, el nuevo péndulo que resulte será tambien isocrono con el compuesto,

to, y dicho punto se llama centro de oscilacion. Fig.

660 Llámase *centro de percusion* de un cuerpo que gira aquel punto en el qual se debia colocar otro cuerpo qualquiera para que recibiese de aquel la mayor cantidad de movimiento de que es capaz; de donde se infiere, que el centro de oscilacion y el de percusion en un cuerpo que gira al rededor de un punto fixo, como sucede á un péndulo, han de coincidir uno con otro; porque el centro de percusion es el mismo que el centro de fuerzas, esto es, aquel punto por donde pasa la resultante de todas las fuerzas particulares que obran en el cuerpo, cuya distancia al punto fixo es igual á la suma de los momentos de inercia de todas las partes materiales del cuerpo dividida por la suma de los momentos de inercia de todas las masas (621); pero el centro de oscilacion se halla del mismo modo (658). Luego el centro de oscilacion y el de percusion son uno mismo.

661 Una vez que el centro de percusion se halla dividiendo la suma de los momentos de inercia de las masas referidos al exe de rotacion por la suma de los momentos de las mismas masas, no tendrémos dificultad alguna en resolver las siguientes qüestiones sobre los centros de percusion.

662 I. *Hallar el centro de percusion de un cilindro* 188
que se mueve al rededor de un punto A *tomado en la extremidad del exe.*

Considérese el cilindro como que está compuesto de una infinidad de hojas como $MM'm'm$, y sea $AB = a$, $AP = x$, el radio $PM = r$, y la circunferencia descrita por este radio $= p$, es claro que será $Pp = dx$ y el círculo $MM' = \frac{Pr}{2}$. Multiplicando esta superficie por dx, tendrémos la expresion del elemento $MM'm'm = \frac{Pr}{2} \times dx = \frac{Prdx}{2}$, que multiplicada 1.° por x y despues por x^2, nos dará las expresiones $\frac{P \times xdx}{2}$ y $\frac{P \times x^2dx}{2}$,

que

Fig. que la primera es el momento de la masa, y la segunda el momento de inercia del elemento $MM'm'm$. Para tener las sumas de los momentos de las masas y de inercia integrarémos estas expresiones, y dividiendo la 2.ª por la 1.ª, tendrémos $\frac{Sprx^2dx}{S.prxdx} = \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2x}{3} = \frac{2}{3}x$, ó haciendo $x = a$ para tener el centro de percusion de todo el cilindro, tendrémos que el centro de percusion del cilindro dista del punto A una cantidad $= \frac{2}{3}a$.

663 Luego siempre que se quiera que un cuerpo que gira al rededor de un punto qualquiera comunique á otro cuerpo con quien va á chocar la mayor impresion de que es capaz, se ha de procurar que el choque lo haga en la direccion del centro de percusion; y si el cuerqo que gira es un prisma ó cilindro, y tiene el movimiento al rededor de uno de sus extremos, se colocará el cuerpo chocado en la direccion de un punto del exe del cuerpo chocante que diste del centro de movimiento una cantidad $= \frac{2}{3}$ de su longitud.

664 II. *Hallar el centro de percusion de una esfera*
189 *que gira al rededor de una recta* EF *perpendicular al extremo del diámetro* AB.

Si llamamos AB, $2a$; AP, x; PM, y; $DC = AC$, a; y la circunferencia descrita por DC al rededor del diámetro p, será la circunferencia descrita por $PM = \frac{py}{a}$; el círculo correspondiente al radio $\frac{py^2}{2a}$; el elemento de la esfera $\frac{py^2dx}{2a}$, el qual multiplicado por la distancia $AP = x$ da la diferencial de los momentos de las masas $\frac{py^2xdx}{2a}$, y multiplicando por x^2 la diferencial de los momentos de fuerzas, ó momentos de inercia de las masas $\frac{py^2x^2dx}{2a}$; pero la equacion del círculo da $y^2 = 2ax - x^2$, que substituido este valor en las expresiones de los momentos que acabamos de encontrar en lugar de y^2, tendrémos $\frac{2apx^2dx - px^3dx}{2a}$ y $\frac{2pax^3dx - px^4dx}{2a}$, que integrándolas y dividiendo la segunda por la primera, será $\frac{S(2apx^3dx - px^4dx)}{S(2apx^2dx - px^3dx)} = \ldots$

$$\frac{\frac{2apx^4}{4} - \frac{px^5}{5}}{\frac{2apx^3}{3} - \frac{px^4}{4}} = \frac{\frac{10apx^4 - 4px^5}{20}}{8apx^3 - 3px^4} = \frac{30ax - 12x^2}{40a - 15x},$$

que es la distancia del centro de percusion del segmento esférico MAZ al punto A. Para tener la de toda la esfera harémos $x = 2a$, y tendrémos por último $\frac{60a^2 - 48a^2}{40a - 30a} = \frac{2a^2}{10a} = \frac{6}{5}a$.

DE LA HIDRODINÁMICA.

665 Como la Hidrodinámica es un ramo en quien corren parejas su extension y utilidad, no parece debia tratarse sino muy extensamente ; no obstante , atendiendo á que su teoría está fundada en experiencias, no solo muy finas y delicadas , sino prolixas , porque este ramo no les sea ageno á los jóvenes que se destinan á estudiar las Matemáticas por este Compendio , quando se apliquen al estudio de la Física , me ceñiré solamente á tratar aquellos puntos mas esenciales de ellas, refiriendo algunos experimentos , y demostrando alguna que otra proposicion.

La Hidrodinámica se divide en *Hidrostática* é *Hidráulica* : la Hidrostática trata del equilibrio de los cuerpos fluidos unos con otros , y con los sólidos sumergidos en ellos: y la Hidráulica del movimiento de los mismos cuerpos fluidos.

666 Llámase cuerpo *fluido* el conjunto ó agregado de partículas muy sutiles independientes unas de otras, y perfectamente movibles hácia todas las direcciones. De esta difinicion se infiere que no hay en la naturaleza fluido alguno perfecto ; pues las partículas de qualquiera de los que conocemos tienen tal coherencia entre sí , que procuran unirse unas á otras , como lo manifiestan las pequeñas gotas de agua , ó de otro licor, como el vino , aceyte , &c. que se dexan caer sobre una superficie horizontal : éstas siempre quedan en forma de esferitas ; lo que no sucederia si sus partículas no tuviesen entre sí alguna atraccion.

Los fluidos unos son incomprehensibles , como el agua , el vino, &c. ; y otros comprehensibles ó elásticos, como el ayre , el vapor del agua , espíritu de vino , &c. Que

Que el agua sea incomprehensible , ó á lo ménos de Fig
una comprehension imperceptible , lo acreditan varios experimentos executados para el fin ; con particularidad el que hizo la Academia del Cimento de Florencia , poniendo en una prensa una esfera hueca de oro llena de agua , la qual empezó á destilar por sus poros el agua en el mismo instante que la prensa comprimiendo la esfera disminuyó su volúmen.

CAPITULO X.

DE LA HIDROSTÁTICA.

Del equilibrio de los fluidos incomprehensibles.

667 De la difinicion que hemos dado de los fluidos (666) se deduce : 1.º que si se echa un licor qualquiera en un vaso de forma que no pueda escaparse , y se le comprime en una direccion qualquiera , la presion se comunica igualmente en todas las direcciones ; pues de no verificarse esto , no tendrian sus partículas aquella perfecta movilidad que les suponemos.

668 Por manera que si en un vaso cilíndrico AB
lleno de agua hacemos una abertura en D , y le apli- 190
camos una potencia P , que obre por medio de un émbolo , la presion se comunicará igualmente á toda la superficie interior ; y la presion que sufrirá el émbolo será á la que ocasionará en la base superior , como $\overline{DG}^2 : \overline{AL}^2$, ó suponiendo $DG = 1$, y $AL = 10$, serán dichas expresiones como $1 : 100$; y si en vez de aplicar la potencia inmediatamente al émbolo , como lo hemos supuesto , la aplicamos por medio de una palanca , se podrá hacer que el esfuerzo de un hombre produzca en la base AL, ó en un émbolo *rous* ajustado al cilindro un esfuerzo ca-

Fig. capaz de levantar ó comprimir qualquier cuerpo colocado sobre HK: este es el mecanismo de la famosa prensa hidráulica, cuya construccion la manifiesta la figura.

669 2.° Que si dentro de un vaso lleno de un fluido
191 que está en reposo colocamos una partícula sólida qualquiera n, ésta estará igualmente comprimida por el fluido en toda direccion; pues si en alguna parte de su superficie experimentase ménos presion, se escaparia por aquel lado.

670 3.° Que un fluido que no está igualmente comprimido en todas sus direcciones se dirige siempre hácia la parte en que encuentra ménos resistencia.

192 671. 4.° Que si en la base superior de un vaso de qualquiera figura se hacen dos aberturas m y M, y por ellas se introducen dos cuerpos p y P, cuyos pesos sean proporcionales á las aberturas, dichos cuerpos estarán en equilibrio; porque si suponemos que el cuerpo p pese la mitad de P, siendo $m=\frac{1}{2}M$, el número de partículas fluidas que comprime p ha de ser la mitad de las que comprime P; luego la superficie interior del vaso está igualmente comprimida en toda su extension, el fluido en reposo, y los cuerpos P y p en equilibrio.

672 Si los cuerpos p y P fuesen dos columnas de un mismo fluido, para que sus pesos sean proporcionales á las aberturas m y M habrán de tener igual altura; pero si las columnas fluidas fuesen de diversos licores, como agua y mercurio, no podrán tener sus pesos proporcionales á las aberturas si éstas no están en razon directa de sus gravedades específicas.

Luego quando dos columnas fluidas de diferentes gravedades específicas, y cuyos pesos son proporcionales á las bases se equilibran en un mismo fluido, tienen sus alturas en razon inversa de sus gravedades específicas.

La

Fig.

La superficie de un licor que está en reposo dentro de un vaso entregado asimismo es horizontal.

673 Supóngase el licor dividido en una infinidad de columnas verticales, si las partes superiores de todas ellas no forman una superficie horizontal, estarán unas partículas mas elevadas que otras, lo que no puede verificarse; pues por razon de su perfecta fluidez las mas elevadas se han de mover descendiendo hasta igualarse con las otras; y en este caso el fluido no está en reposo, lo que es contra el supuesto. Luego, &c.

674 Luego si en un plano horizontal que toca la superficie de la tierra, ó es tangente á ella, se echa un licor qualquiera, todas sus partículas se moverán hácia el punto de contacto, que es el ménos distante del centro de la tierra. 2.° Si en un tubo recurvo se echa una cantidad de li- 193
cor qualquiera, éste se pondrá á nivel en los dos brazos del tubo, aunque sean de desigual diámetro, con tal que alguno de ellos no sea tubo capilar. En esta propiedad de los fluidos de ponerse á nivel está fundado el mecanismo del nivel de agua; y se demuestra tambien el por qué, si en las inmediaciones de un rio se abre un pozo, el agua pasa al pozo, y sube hasta nivelarse con la del rio.

675 *Si un vaso está lleno de un licor, la presion que*
sufre el fondo del vaso es igual al peso absoluto de una 194,
columna del mismo fluido, que tenga por base la misma 195,
que el vaso, y por altura la distancia que hay del fondo 196.
al nivel de él.

Concibamos el licor dividido en una infinidad de hojas horizontales, é infinitamente delgadas: no hay duda que cada hoja es un peso que carga las hojas inferiores, y por consiguiente el fondo del vaso.

676 El vaso tiene sus lados rectos como un cilindro recto (*fig.* 194), ó los tiene inclinados á la base como un cono truncado directo (*fig.* 196), ó un cono truncado inverso (*fig.* 195).

Por

677 Por lo que hace al primer vaso (*fig.* 194), desde luego se ve que el fondo está comprimido por el peso absoluto de la columna fluida $ABCD$.

678 Por lo que corresponde al segundo (*fig.* 196), el licor contenido en el espacio $AEBDCF$ es comprimido por el peso de la columna $ABCD$, de tal modo, que las presiones que causa á iguales profundidades son proporcionales á las superficies comprimidas, del mismo modo este licor resiste á la columna ABE, y la impele contra las paredes del vaso con igual fuerza; luego la presion que el fluido contenido en los espacios AEB, DCF produce contra las partes EB, CF del fondo son proporcionales á estas partes, y por consiguiente iguales á los pesos de las columnas que tengan por bases EB y CF, y por alturas AB ó DC. Luego la presion total del fondo es igual al peso de una columna fluida que tenga por base el fondo EF, y por altura la distancia de este fondo al nivel del líquido.

679 Para la demostracion en el tercer vaso (*fig.* 195) debemos considerar no hay mas de la columna $ABCD$ que cargue el fondo BC, porque el licor que está en el espacio ABE, DCF está sostenido en parte por la resistencia de las paredes del vaso, y en parte por la columna $ABCD$; pero como la presion que ocasiona en esta columna la parte ABE, DCF se comunica á todos los puntos de su superficie curva y en direcciones perpendiculares á su exe, no puede de ningun modo aumentar ó disminuir su peso absoluto. Luego, &c.

680 De lo dicho en esta proposicion se deduce: 1.° que sea la que fuere la figura de un vaso que contiene un licor, la presion que sufre el fondo del vaso siempre es igual al peso absoluto de una columna del mismo fluido que tenga por base el fondo del vaso, y por altura la distancia que hay de su fondo al nivel del licor.

681 2.° Que las presiones que sufren los fondos de dos vasos que tengan igual base y altura, aunque sean de

de diversas figuras, llenándolos de un mismo licor, son iguales. Fig.

682 3.° Que con una cantidad muy pequeña de agua, ó de otro fluido qualquiera, se puede producir 197
una gran fuerza, disponiéndola de tal forma, que siendo un cilindro de un pie de diámetro y una pulgada de grueso, y estando cerrado por la base superior, se ajuste en ésta un cañon delgado y muy largo; no hay duda que la presion que experimentará la base será igual al peso de una columna que tenga la misma base y altura que el vaso, contando desde el fondo hasta el extremo superior del cañon.

683 Veamos ahora cómo averiguar la presion ó fuerza que hace el agua contra un rectángulo vertical $ABCD$ 198
que le podemos mirar como lado de un estanque ó bien una compuerta, conocida su longitud y latitud. Sea b la base, y a la altura del rectángulo, y supongamos su superficie compuesta de una infinidad de elementos verticales como $ABEF$, y el fluido tambien compuesto de una infinidad de hojas horizontales. Las presiones particulares que producen en el elemento $ABEF$, cada una de las hojas fluidas forman una progresion aritmética, cuyo primer término es cero y el último a; luego la presion total será (tom. I. 234) $(0+a)\frac{a}{2}=a\times\frac{a}{2}$, y el esfuerzo que el agua hará contra todo el rectángulo, será $a\times\frac{1}{2}a\times b=ab\times\frac{1}{2}a$; pero un $\frac{1}{2}a$ expresa la distancia á que está del nivel AD el centro de gravedad de la superficie. Luego el esfuerzo que hace el agua contra la superficie $ABCD$ es igual al peso absoluto de una columna de agua que tenga por base la superficie comprimida, y por altura la distancia que hay de su centro de gravedad al nivel del agua: lo mismo sucede quando la superficie está inclinada.

684 Si se quisiese el punto de la superficie $ABCD$, donde el agua hace la mayor impresion, y que puede mirarse como el centro de fuerzas de todos los impulsos que

Fig. que las diversas partículas del fluido exercen contra ella, se buscará el centro de gravedad g de un triángulo BHC que tenga por base BC, y el vértice esté en un punto H medio del lado AD.

Del equilibrio de los líquidos de diversas gravedades específicas.

685 *Si dos licores ocupan en un tubo recurvo dos alturas que estén en razon inversa de sus gravedades específicas, se equilibran.*

Supongamos 1.° que los brazos del tubo CF, DK sean de igual diámetro, y que el espacio que está encima de la horizontal LH sea ocupado por el licor que llena el
199 brazo CF, y que NH sea el espacio que llena el otro licor en el brazo DK; es evidente que el licor $LCDH$ está en equilibrio con el mismo por tener igual altura en los dos brazos; y solo resta que lo estén las columnas FL, NH. Lo que se verificará siempre que tengan igual peso; pero como sus bases son iguales por el supuesto, y ademas las gravedades específicas de pesos iguales están en razon inversa de sus volúmenes, siendo los volúmenes como las alturas, tambien han de ser éstas en razon inversa de las gravedades específicas.

686 2.° Si el brazo DK es mas estrecho que el brazo CF, las gravedades absolutas ó los pesos absolutos de las columnas FL, NH serán entre sí como sus bases; pero acabamos de ver que siendo iguales las bases, los pesos de las mismas columnas eran tambien iguales. Luego si la base de la columna NH disminuye en una razon dada, su pesantez disminuirá del mismo modo. De suerte que los pesos absolutos tambien seguirán la razon de las bases; luego tambien las alturas están en razon inversa de las gravedades específicas, y los fluidos se equilibran.

687 Qüestion. *Hallar la gravedad específica de dos licores.*

Si

Si los licores no se mezclan, como sucede con el agua y el aceyte, échese en el tubo recurvo $FCDK$ el uno de los licores, por exemplo, el mas grave hasta que llene la mitad del tubo: échese el otro licor hasta que el tubo esté casi lleno: désele una posicion tal que los brazos de él sean verticales, y por la extremidad inferior L del licor que ocupa ménos espacio en el tubo tírese la horizontal LH: tómense con un compas las alturas LF y HN: véase en qué razon están, y en una razon inversa estarán sus gravedades específicas. Fig. 199

688 Pero si los licores cuyas gravedades se han de determinar son de aquellos que se mezclan, como el agua y el vino, se echará primeramente en el tubo una porcion de mercurio que llegue, por exemplo, á LH, y despues los dos licores, el uno por la abertura F, y el otro por la abertura K; y las alturas LF y HN estarán en razon inversa de las gravedades específicas que se buscan.

De los fluidos elásticos.

689 Los fluidos elásticos son todos aquellos que se pueden reducir á mayor ó menor volúmen sin alterar la cantidad de su masa.

Como estos fluidos, igualmente que los incomprehensibles, se componen de partículas muy sutiles independientes unas de otras, todo quanto hemos deducido que sucede en los fluidos incomprehensibles (670, 673, 675, 676, &c.) debe verificarse en los comprehensibles.

Del equilibrio del ayre.

690 Aunque los fluidos elásticos son muchos, solo tratarémos aquí del ayre y sus propiedades, por ser el que mas espacio coge y el mas útil para nosotros.

691 Este fluido tiene la propiedad: 1.° de ser elástico: 2.° pesado: 3.° de que la fuerza elástica del ayre comprimido sea igual á la fuerza que causa su compresion:

Fig. sion : 4.° de comprimirse á sí mismo con su propio peso: 5.° y que quando se reduce una misma masa de ayre á que ocupe diversos volúmenes , estos volúmenes están en razon inversa de las fuerzas comprimentes.

692 El que sea elástico se prueba llenando una vexiga de ayre , en la que se notará que apretándola se comprime y ocupa menor lugar ; y en cesando la fuerza que la comprimia , se restituye á su primer estado.

197 693 El que sea pesado (aun quando se ignorase que la pesantez es una fuerza universal que abraza toda la naturaleza) lo acreditan varios experimentos , en partilar el de Torricelli , que es el siguiente. En un vaso *A* lleno de mercurio póngase un cañon *AB* de vidrio de tres ó quatro pies de largo , y hágase que por el cañon arriba corra un embolo empezando desde la superficie *A* del mercurio ; se notará que este fluido sube por el tubo arriba hasta la altura de 28 pulgadas con corta diferencia ; y que no pasa de allí por mas que suba el embolo. Lo que nos da á conocer que quien obliga al mercurio á que suba por el tubo arriba es el peso del ayre sobre la superficie *A* del vaso ; y lo confirma el que habiendo hecho en *B* un agujerito para que entrase el ayre, el mercurio se precipitó todo otra vez en el vaso. De esta experiencia se deduce que el ayre pesa sobre los cuerpos con una fuerza equivalente al peso de una columna de mercurio de 28 pulgadas francesas. Y como hemos visto (685) que dos fluidos que se equilibran uno con otro tienen sus gravedades específicas en razon inversa de sus alturas , siendo las gravedades del agua y el mercurio en razon de 1 á 14 ; para encontrar la altura á que el peso del ayre hará subir al agua por un cañon arriba , dirémos $1 : 14 :: 28$ pulgadas : $28 \times 14 = 32$ pies con corta diferencia ; luego el agua por el peso del ayre puede subir á la altura de 32 pies franceses , que hacen 37 pies de Castilla y algo mas.

694 En esto se funda el mecanismo de las bombas para levantar el agua á ciertas alturas , y tambien el mecanismo del tubo recurvo llamado siffon , como *ABO* de brazos desiguales : quando se quiere hacer uso de este instrumento para desaguar una cuba ú otra vasija , se introduce el brazo menor del siffon en la vasija que se quiere desaguar ; y chupando por el brazo mayor , se hace que salga todo el licor.

Fig. 200

Para percibir la razon de esto basta considerar que la fuerza que hace el ayre en la superficie del vaso *NM* para levantar el fluido á lo largo del tubo *AB* , y la que el mismo ayre hace en *O* , para evitar su salida son iguales: si los pesos de las columnas *AB* y *BO* fuesen iguales , habria equilibrio , y no saldria el fluido ; pero como *BO* pesa mas que *AB* , debe salir.

695 Que la fuerza elástica del ayre comprimido sea igual á la que causa su compresion , se infiere de aquella ley de la mecánica (406) , en que se prueba que á toda accion se opone una reaccion igual y contraria, y tambien de lo insinuado, tratando del equilibrio, en que éste no puede verificarse si las fuerzas opuestas no son iguales.

696 En quanto á que los diversos volúmenes á que se puede reducir una misma masa de ayre están en razon inversa de las fuerzas comprimentes, se prueba del modo siguiente.

Sea *ABC* un tubo de vidrio recurvo sellado hermé- 201 ticamente en su extremo *C* , y abierto en el otro extremo *A* ; las dos piernas *AD* y *CE* sean verticales , y el tubo *DE* que los une horizontal ; la pierna menor *EC* ha de ser perfectamente cilíndrica y de 12 pulgadas de alto ; la otra pierna *DA* ha de ser mucho mas larga. Échese en el tubo poco á poco una porcion de azogue hasta que enrase con la línea *DE* , procurando que el tubo *DE* se mantenga horizontal ; no hay duda que en este caso el ayre encerrado en el brazo *EC* está en el mismo estado que el ayre exterior ; y como el peso del ayre exterior equivale al de una columna de mercurio de 28 pulgadas de alto , dirémos que la fuerza que reduce

Fig. ce el ayre contenido en el espacio *EC* á una altura de 12 pulgadas es una fuerza equivalente al peso de una columna de mercurio de 28 pulgadas. Continúese echando en el tubo las cantidades de mercurio correspondiente á las alturas 14 pulgadas, 28 pulgads, 42 pulgadas, y se notará que el ayre contenido en el espacio *EC* se reduce á unos volúmenes, cuyas alturas son 8 pulgadas, 6 pulgadas, $4\frac{4}{5}$, &c. Luego quando las fuerzas comprimentes son 28, 28+14, 28+28, 28+42, ó lo que es lo mismo, 28, 42, 56, 70, &c. el ayre encerrado en el brazo *EC* se reduce á unas columnas de igual base, cuyas alturas son 12, 8, 6, $4\frac{4}{5}$, &c. y que por lo mismo han de ser como las alturas. De donde salen las siguientes proporciones $28 : 42 :: 8 : 12$; $28 : 56 :: 6 : 12$; $28 : 70 :: 4\frac{4}{5} : 12$, &c.

697 Pero tratando de las densidades de los cuerpos (390) hemos probado que quando las masas de dos cuerpos eran iguales, sus densidades estaban en razon inversa de los volúmenes. Luego ya que aquí los diversos volúmenes á que se reduce una misma masa de ayre están en razon inversa de las fuerzas comprimentes, estas mismas fuerzas han de ser como las densidades de dichos volúmenes de ayre, esto es, que el ayre se condensa á proporcion de los pesos comprimentes: de donde se sigue, que si suponemos que en las diferentes camas de la atmósfera no obra mas que la pesantez y la elasticidad, sus densidades compondrán una progresion geométrica.

Del equilibrio de los cuerpos sólidos sumergidos en los fluidos.

698 Quando un cuerpo sólido está sumergido en un fluido, éste intenta levantarle en alto con una fuerza que tiene cierta relacion con el peso del cuerpo: veamos qual sea dicha fuerza.

203 699 Concibamos el sólido sumergido *AMYB* cortado por una infinidad de planos horizontales, y que la superficie convexâ de la parte sumergida esté dividida en una infinidad de trapecios por planos verticales, y al mismo tiempo perpendiculares á ellos.

Fig. 202 y 203

700 Sea *MNYZ* (*fig.* 202) la base inferior y horizontal de una de las hojas de que acabamos de hablar; *Ma* la base de uno de los pequeños trapecios en que está dividida la superficie del cuerpo, y á cuyo trapecio le llamarémos x. Por el punto *M* figúrese el plano vertical *AMDB* (*fig.* 203), que cortará el plano horizontal en la direccion *MY* (*fig.* 202) perpendicular al elemento *Ma*. Imaginemos que por el punto m infinitamente próxîmo á *M* (*fig.* 203) pase otro plano horizontal *my*, que representará la base superior de la misma hoja. Desde el punto *M* levántese la vertical *MP* hasta la superficie del fluido *AB*. Por los principios establecidos (686) sabemos que todos los puntos de la superficie sumergida están perpendicularmente oprimidos por fuerzas proporcionales á la distancia del nivel *AB*: y por esta razon el trapecio x, cuya base es *Ma* (*fig.* 202), y la altura *Mm* (*fig.* 203) padece una presion perpendicular, cuya expresion es $Ma \times Mm \times MP$. Represénte esta fuerza la *MF* perpendicular á *Mm*, y descompongámosla en dos *MG* y *ME*, la una vertical y la otra horizontal, haciendo la misma descomposicion respecto de las fuerzas con que el fluido obra sobre los demas trapecios, hallarémos que las fuerzas horizontales como *ME* en nada contribuyen á levantar ó baxar el cuerpo; porque estando en un mismo plano, y siendo iguales y opuestas se destruyen mútuamente; y por tanto las que sostienen el cuerpo son las fuerzas verticales, como *MG*, y solo éstas hemos de calcular; para lo qual de los triángulos semejantes *MHm*, *MGF* sacarémos $Mm : Hm :: MF : MG = \frac{MF \times Hm}{Mm}$, ó por ser $MF = Ma \times Mm \times MP$; $MG = \frac{Ma \times Mm \times MP \times Hm}{Mm} = Ma \times MP \times Hm$; pero es-

este resultado es el peso de una columna fluida que tenga por base el pequeño trapecio $MaxHm$, y por altura MP. Luego la fuerza que el fluido hace para sostener el cuerpo es igual al peso de todo el fluido que el cuerpo echa de su lugar, de donde se deduce: 1º que el peso absoluto del cuerpo, y el del fluido desalojado de su lugar han de ser iguales: 2.º que la derivada de todas las fuerzas particulares con que el fluido intenta levantar el cuerpo ha de pasar por el centro de gravedad de éste; pues de no verificarse, el cuerpo fluctuaria, y no estaria en equilibrio.

701 Luego si llamamos M el volúmen del cuerpo fluctuante, p su gravedad específica, N el volúmen del fluido que desaloja (que es igual á la parte sumergida del cuerpo), y p' la gravedad específica de éste, será $p\times M$ el peso del cuerpo, y $p'\times N$ el del fluido, cuyo lugar ocupa, con lo que tendrémos $p\times M = p'\times N$; pero como esta equacion debe subsistir para que se verifique el equilibrio, siendo $p' > p$, será $M > N$: siendo $p = p'$, será $M = N$; y siendo $p > p'$, no pudiendo verificarse que sea $M < N$, habrá de ser $p\times M > p'N$. De estas consideraciones resulta: 1.º que si el cuerpo tiene ménos gravedad que el fluido, se mantiene sobre el agua sin cubrirse: 2.º que si tiene igual gravedad, se cubre todo, y se mantiene inmóvil en qualquiera parte dentro del fluido: 3.º que quando tiene mayor gravedad, se precipita á lo hondo, y no puede sostenerse sobre el fluido sin el auxîlio de alguna fuerza extraña.

702 De la equacion $p\times M = p'N$ sacamos $p : p' :: N : M$, *que nos dice que quando el cuerpo fluctúa sobre el fluido, la gravedad específica de aquel es á la del fluido, como el volúmen de la parte sumergida es al volúmen de todo el cuerpo.*

703 La misma equacion $p\times M = p'\times N$ nos suministra un medio para conocer la parte sumergida de un cuerpo, conociendo su peso absoluto, y la gravedad específica del fluido.

Su-

Supongamos que el peso fluctuante pese 20 libras, y que cada pie cúbico de agua pese 70 libras, tendrémos $p\times M = 20 = p'\times N$: solo nos resta hallar el volúmen de un cuerpo de agua que pese 20 libras, lo que conseguirémos con la siguiente proporcion: 70 libras : 1 pie cúbico $=$ 1728 pulgadas :: 20 libras : $N = 493\frac{5}{7}$ *pulgadas cúbicas.*

704 Si al volúmen N, que el cuerpo fluctuante tiene sumergido en el fluido añadimos la cantidad $\pm n$, será indispensable, si ha de subsistir el equilibrio, que al peso absoluto $p\times M$ del mismo cuerpo se le añada la cantidad $\pm q$, debiéndose verificar $p\times M \pm q = p'\times N \pm p'\times n$, ó restando de ésta la equacion $p\times M = p'\times N$; $q = p'\times n$, *que nos dice que el peso añadido ó quitado* q *es igual al peso del volúmen* n *del fluido que el cuerpo desaloja de su lugar de mas ó de ménos que en el primer caso.*

705 Hemos visto que quando la gravedad específica del cuerpo sumergido es mayor que la del fluido, el cuerpo se precipita al fondo; y es necesario, si ha de fluctuar, sostenerle por medio de alguna fuerza. Luego si llamamos Q el peso que se le debe añadir al uno de los brazos iguales de un peso que sostiene con el otro brazo el cuerpo propuesto, sumergido enteramente en el fluido, debe verificarse que sea $Q = p\times M - p'\times N$, ó $p\times M - Q = p'\times N$, ó multiplicando por p; $p(p\times M - Q) = p\times p'\times M$, por ser en este caso $M = N$; de donde sacarémos la siguiente proporcion: $p : p' :: p\times M : p\times M - Q$, que nos manifiesta *que la gravedad específica del cuerpo es á la del fluido, como el peso absoluto del cuerpo es á la parte del peso que pierde en el fluido*; y así en conociendo la gravedad específica de un cuerpo, su peso absoluto, y el peso que pierde en el fluido donde está enteramente sumergido, conocerémos la pesantez específica de dicho fluido.

706 Supongamos que el mismo cuerpo se meta todavía en otro fluido, cuya gravedad específica p'' sea menor que la suya, y que el contrapeso que se ha de

 po-

Fig. poner para mantenerlo en equilibrio dentro del fluido sea Q, tendrémos las dos equaciones siguientes $Q = p \times M - p' \times M$; y $Q' = p \times M - p'' \times M$, ó $p' \times M = p \times M - Q$, y $p'' \times M = p \times M - Q'$, ó multiplicando la primera equacion por p'', y la segunda por p', tendrémos $p' \times p'' \times M = p''(p \times M - Q)$, y $p' \times p'' \times M = p' \times (p \times M - Q')$, que nos da $p''(M \times p - Q) = p' \times (p \times M - Q')$, y $p : p'' :: p \times M - Q : p \times M - Q'$; lo que nos da á conocer *que las gravedades específicas de los fluidos son entre sí como las porciones que pierde de peso en dichos fluidos un cuerpo sólido de mayor gravedad específica que cada uno de ellos.*

707 La equacion $Q = p \times M - p' \times M$ puede servir para hallar el volúmen M de un cuerpo sólido que se sumerja enteramente en un fluido quando es conocida la gravedad específica de dicho fluido; porque siendo $p' \times M = p \times M - Q$, si del peso absoluto del cuerpo $p \times N$ restamos el peso Q, que tiene en el fluido, la resta $p' \times M$, será el peso del volúmen del fluido que echa de su lugar, el qual dividido por la gravedad específica del fluido dará el volúmen del cuerpo.

708 Métanse en un mismo fluido dos cuerpos de mayor gravedad específica que él, y sean M y M' sus volúmenes, p y p' sus gravedades específicas, Q y Q' sus contrapesos, y p'' la gravedad del fluido, tendrémos $p'' \times M = p \times M - Q$, y $p'' \times M' = p' \times M' - Q'$; luego si suponemos que los dos cuerpos pierdan partes iguales de sus pesos en el fluido, ó tengamos $p \times M - Q = p' \times M' - Q$, tendrémos tambien $p'' \times M = p'' \times M'$, ó $M = M'$; de donde sacamos que los cuerpos que pierden partes iguales de sus pesos en un mismo fluido tienen iguales sus volúmenes.

Del Hidrómetro.

709 El Hidrómetro ó pesa licores es un instrumen-
204 to de vidrio, como AB, que se compone de un tubo largo, el qual en su extremo inferior lleva una ampollita C, en la qual se ha echado un poco de azogue, que sir-

sirve de lastre, y obliga á hundirse el instrumento una Fig.
cierta cantidad quando se le mete en un fluido; en D lleva otra ampollita llena de ayre, y sirve para que se mantenga derecho sin cabecear; y en la parte AD lleva una escala. Sirve el hidrómetro para conocer entre varios fluidos qual tenga mayor gravedad esférica, que será aquel donde se sumerja ménos, lo que se conoce por medio de la escala que le acompaña.

CAPÍTULO XI.

De la Hidráulica.

Dexamos dicho que la Hidráulica es aquella parte de la Hidrodinámica, que trata del movimiento de los fluidos en general.

Si conociéramos la masa, figura y número de partículas de un fluido, se reduciría la determinacion del movimiento de los fluidos á la de un sistema de cuerpecillos libres que obran unos en otros, y pueden experimentar la accion de alguna fuerza extraña, como la gravedad; pero no siendo esto posible, nos ceñirémos á lo que enseña la experiencia, y de aquí sacarémos algunas conseqüencias, que aunque no sean rigurosamente exâctas, son lo suficiente en la práctica.

De la velocidad de las aguas que salen de los depósitos por aberturas horizontales ó laterales.

710 Si en un vaso $MCDN$ qualquiera lleno de agua 205,
se hace una abertura horizontal ó lateral PQ, se observará: 1.° que todas las partículas, comprimiéndose 206.
unas á otras, se encaminan hácia la abertura con velocidades verticales, é iguales hasta llegar á cierta distancia de ella, que entónces, dexando su primitiva di-

 rec-

reccion, se encaminan con direcciones mas ó ménos obliquas á meterse por la abertura.

711 2.° Que la vena fluida al desviarse de la abertura una cantidad $Pp=\frac{1}{2}PQ$ se contrae formando una especie de pirámide truncada $PQqp$, y pasado, dicho término vuelve á dilatarse: se ha averiguado que la area de la abertura y la de la seccion de la vena fluida, donde tiene su menor contraccion, están en razon de $8:5$, si la abertura está hecha en una pared delgada; pero si la pared del depósito es gruesa, ó el agua sale por un cañon, entónces dicha razon es la de $8:6\frac{1}{2}$, ó $16:13$.

712 3.° Que considerando el fluido como que está compuesto de una infinidad de hojas planas, ó curvas como MN, HK, LX, éstas se van substituyendo sucesivamente unas á otras; de forma que MN baxa á ocupar el lugar que tiene HK, y esta hoja el que tiene LX hasta llegar cerca de PQ, que entónces como las partículas se atropellan por salir quanto ántes, acelerando unas, y retrasando otras sus velocidades, ya no conservan las hojas su paralelismo.

713 Luego si suponemos que miéntras del depósito sale el pequeño prisma fluido $PQxy$, la hoja MN del fluido baxe hasta HK, será $MN\times MH=PQ\times Py$; pero como MH y Py son los espacios que andan en un mismo tiempo, la hoja MN, y el pequeño prisma $PQxy$, serán las velocidades con que descienden; y llamando A la base de la hoja, B la del prisma, V la velocidad de aquella, y v la velocidad de éste, será $AV=Bv$, y $A:B::v:V$, *esto es, las velocidades con que descienden la hoja y el prisma están en razon inversa de sus bases.* Luego si la superficie MN es sumamente grande respecto de PQ, la velocidad con que descenderá la hoja será imperceptible.

714 *Los volúmenes* PQgf (*fig.* 205) y PQxy (*fig.*206), *sean ó no de la misma especie, que salen en el mismo tiempo, y con velocidades uniformes de los vasos* MCDN (*fig.* 205, 206) *por las pequeñas aberturas* PQ, *son entre si*

como los productos de dichas aberturas por las velocidades de las evacuaciones. Fig.

Para demostrarlo basta considerar que los prismas $PQgf$ y $PQxy$ son los productos de sus bases PQ y PQ por sus alturas Pf, Py corridas segun el supuesto en tiempos iguales; por cuya razon han de expresar sus velocidades. Luego, &c.

715 *La velocidad de un licor al salir de un depósito qualquiera* MCDN *por una abertura pequeña* PQ *es igual* 205
á la que adquiriria un cuerpo pesado, si cayese de la altura vertical y constante hQ *de la superficie del fluido mas arriba de la abertura.*

Manteniéndose el vaso constantemente lleno, es evidente que la fuerza que á cada instante impele al fluido en la salida PQ para que salga es el peso absoluto de la columna fluida $hQPS$, cuya expresion será llamando p' la gravedad específica del fluido $hQ\times PQ\times p'$. Luego si suponemos que á cada instante salga un prisma fluido $PQgf$, será la fuerza $hQ\times PQ\times P'$, la que le obliga á salir.

Concibamos que en el tiempo que sale el prisma $PQgf$, otro pequeño prisma $PQxy$ impelido de su propio peso, que será $PQ\times Qx\times p'$, ande la pequeña altura Qx: esto supuesto, si llamamos V y v las velocidades con que se mueven los prismas $PQgf$ y $PQxy$, siendo las fuerzas motrices como las cantidades de movimiento que producen, será $hQ\times PQ\times p' : PQ\times Qx\times p' :: PQgf\times V : PQxy\times v :: PQ\times Qg\times V : PQ\times Qx\times v$, ó por ser Qg y Qx proporcionales á las velocidades, á causa de ser espacios andados en un mismo tiempo: $hQ\times PQ\times p' : PQ\times Qx\times p' :: PQ\times V^2 : PQ\times v^2$, que haciendo las reducciones, sale $hQ : Qx :: V^2 : v^2$.

716 Sea u la velocidad que adquiriria un grave si cayese de la altura hQ, tendrémos (560) $hQ : Qx :: u^2 : v^2$, y comparando esta proporcion con la anterior $u^2 : v^2 :: V^2 : v^2$; luego $V^2=u^2$, ó $V=u$. Pero V es la velocidad con que sale el fluido, y u la que adquiere el grave, descendiendo de la altura HQ. Luego, &c.

Fig. 717 De esta proposicion se infiere: 1.° que quando el fluido sale por la abertura tiene una velocidad tal, que con ella podria volver á subir á la misma altura hQ: 2.° que si se continuase moviendo con esta velocidad, andaria el fluido un espacio duplo de hQ en el mismo tiempo que emplea un grave en descender de dicha altura.

718 Quando la abertura es lateral, siempre que sea pequeña, se verifica todo lo que acabamos de manifestar respecto de la abertura horizontal, en quanto á la velocidad que tiene el fluido al salir por ella.

719 Qüestion. *Hallar una equacion que exprese la relacion que hay entre la cantidad del licor que sale de un depósito qualquiera* MCDN, *que se mantiene constantemente lleno por la pequeña abertura* PQ, *el tiempo de la evacuacion, y la altura del fluido en el depósito.*

205 Sea K la area de la abertura PQ; t el tiempo de la evacuacion; h la altura constante hQ del agua en el depósito; Q la cantidad de agua que ha salido en el tiempo t; y t' el tiempo que necesita un grave en andar una altura a.

Ya que en el descenso de los cuerpos libres los espacios andados son como las raices quadradas de los tiempos, para hallar el tiempo que tardará un grave en caer de la altura h, dirémos $\sqrt{(a)} : \sqrt{(h)} :: t' : \frac{t'\sqrt{(h)}}{\sqrt{(a)}}$; pero durante este mismo tiempo debe salir del depósito una columna fluida, cuya base sea la area K, y su altura $2h$. Luego $2Kh$ expresa la columna ó cantidad de fluido que sale en el tiempo $\frac{t'\sqrt{(h)}}{\sqrt{(a)}}$. Tambien es cierto que las cantidades de fluido que salen por una misma abertura en los tiempos $\frac{t'\sqrt{(h)}}{\sqrt{(a)}}$ y t son entre sí como estos tiempos. Luego será $\frac{t'\sqrt{(h)}}{\sqrt{(a)}} : t :: 2Kh : Q = \frac{2tK\sqrt{(ha)}}{t'}$, y ésta es la fórmula pedida, en la que a y t siempre son conocidas; pues siendo $a = 15$ pies, t' será un segundo; pero las demas cantidades t, K, h, q pueden mirarse sucesivamente como incógnitas, y despejándolas, tendrémos $K = \frac{t'Q}{2t\sqrt{(ah)}}$: $t = \frac{t'Q}{2K\sqrt{(ah)}}$, y $h = \ldots\ldots \frac{Q^2 t'^2}{4at^2K^2}$, que nos dan á conocer la area de la abertura, el tiempo de la evacuacion, y la altura del fluido en el depósito.

720 Si respecto otro depósito qualquiera llamamos K' la area de la abertura horizontal, T el tiempo de la evacuacion, h' la altura del fluido sobre la abertura, y Q' la cantidad de fluido que sale en el tiempo T, tendrémos tambien $Q' = \frac{2TK'\sqrt{(ah')}}{t'}$, en la qual, despejando sucesivamente la K', la T y la h', tendrémos otras quatro equaciones análogas á las anteriores, que si las comparamos con aquellas, nos darán

$$Q : Q' :: \frac{2tK\sqrt{(ah)}}{t'} : \frac{2TK'\sqrt{(ah')}}{t'} :: tK\sqrt{(h)} : TK'\sqrt{(h')}$$

$$K : K' :: \frac{t'Q}{2t\sqrt{(ah)}} : \frac{t'Q'}{2T\sqrt{(ah')}} :: \frac{Q}{t\sqrt{(h)}} : \frac{Q'}{T\sqrt{(h')}}$$

$$t : T :: \frac{t'Q}{2K\sqrt{(ah)}} : \frac{t'Q'}{2K'\sqrt{(ah')}} :: \frac{Q}{K\sqrt{(h)}} : \frac{Q'}{K'\sqrt{(h')}}$$

$$h : h' :: \frac{Q^2t'^2}{4at^2K^2} : \frac{Q'^2t'^2}{4aT^2K'^2} :: \frac{Q^2}{t^2K^2} : \frac{Q'^2}{T^2K'^2},$$

las quales sirven para comparar entre sí aquellas cantidades que se miran como elementos en las evacuaciones de dos depósitos que se mantienen constantemente llenos, y cuyas aberturas son horizontales; porque quando las aberturas son laterales se dexa conocer que no todos los filetes fluidos salen con la misma velocidad, pues no todos distan igualmente de la superficie del agua; bien que quando las aberturas laterales son muy pequeñas respecto de la superficie superior del depósito, pueden aplicarse las fórmulas sin error substancial. Y aun quando las aberturas laterales sean de algu-

Fig. guna consideracion, siempre que la altura del agua se cuente desde el centro de gravedad de la abertura, darán las fórmulas resultados, que aunque no serán muy exâctos, lo serán lo bastante en la práctica; pero teniendo siempre cuidado de no poner por K la area de la abertura si no es los $\frac{5}{8}\times K$, quando la abertura está hecha en una pared delgada, ó $\frac{13}{16}\times K$, quando está hecha en una pared gruesa, ó el agua sale por un tubo aditicio (714); pues aquí K debe expresar la seccion de la vena fluida en su mayor contraccion.

De la distribucion de las aguas.

207 721 Sea *MNOP* un depósito que surte las aguas de un aqüeducto, se trata de hacer á la pared *MO* varias aberturas, por las quales salga tanta agua como entra en el depósito; y que ademas dichas aberturas tengan entre sí una razon dada, para que por cada una salga la cantidad de agua que se desea.

Sean tres las partes en que se quiere distribuir la cantidad de agua que entra en el depósito, las quales tengan entre sí la razon de los números 5, 3, 1, y supongamos que la cantidad que entra en el depósito sea la que pueda salir por una abertura circular A de un diámetro conocido, es decir, que la cantidad que entra en el depósito sea tal, que dándole salida por la abertura A, se mantenga siempre en el depósito á la altura de la recta HK sin crecer ni menguar. Para conocer los diámetros de las aberturas B, C, D, por donde ha de salir el agua, suponiendo que éstas se quieren circulares, como es lo mas regular, divídase el diámetro ab de la abertura A (*fig.* 208) en tantas partes iguales como exprese la suma de los números 5, 3, 1, que serán 9: en los puntos 1, 3, 5 levántense al diámetro las perpendiculares $1c$, $3d$, $5h$ hasta que toquen la circunferencia en los puntos c, d, h; por estos puntos tírense las cuerdas cb, db, hb, y éstas serán los diámetros de las aberturas B, C, D, para que se verifique que todas ellas juntas den tanta agua como entra en el depósito.

722 Por el mismo método se distribuiría el agua en mayor número de partes que tuviesen entre sí la razon que se quisiese.

723 Si la abertura A fuese un quadrado, y no un círculo, como podria suceder, siempre que las aberturas hubiesen de ser tambien quadros, no tendríamos nada que innovar en el método declarado, quando todas ellas eran círculos; pero si sucediese que siendo la abertura A un quadrado, las otras hubiesen de ser círculos, se reduciría primero el quadrado á círculo por medio de la siguiente proposicion: 154 *superficie de un círculo es á* 196 *quadrado de su diámetro, como la superficie de la area* A *es al quadrado del diámetro que le corresponde*, que extrayendo la raiz quadrada de este quarto término, sale el diámetro de un círculo de igual superficie que la abertura A. Conocido este diámetro se hallan los de las otras aberturas B, C, D del modo que dexamos explicado párrafo anterior.

724 Para medir la cantidad de agua que entra en el depósito se suele hacer una abertura rectangular, á la qual se aplica una compuerta que se sube ó baxa hasta que el agua se mantiene á una altura permanente en el depósito, que ésta es la señal cierta de que entra tanta agua como sale. Pero como la abertura, por la qual se desagua el depósito, por lo regular suele ser un rectángulo, y no un quadrado, es indispensable para hacer la distribucion de las aguas reducirlo primero á quadrado y despues á círculo.

725 En los repartimientos de las aguas se acostumbra hacer circulares las aberturas por donde ha de salir el agua, y se colocan de forma que sus centros estén en una misma línea horizontal: lo primero porque el rozamiento que experimenta al salir el agua sea el menor posible, y las aberturas no se atasquen con tanta

Fig. ta facilidad con el légamo que suele traer el agua, y lo segundo porque la velocidad con que sale el agua sea una misma en todas las aberturas.

Del choque de los fluidos con los cuerpos sólidos.

726 Los fluidos chocan en los cuerpos sólidos, ó los cuerpos sólidos en los fluidos; quando un fluido choca con un cuerpo sólido le pone en movimiento, si alguna causa no destruye la impresion que le hace con el choque; pero si un cuerpo firme choca un fluido, él pierde parte de su velocidad, y su movimiento es retardado. Y así los fluidos resisten á los cuerpos en movimiento.

Un cuerpo firme choca, por decirlo así, en un instante con su masa, porque estando todas sus partes liadas no pueden avanzar las unas sin llevarse tras sí las otras: el choque de los fluidos es diferente, porque sus partículas se dividen á la mas ligera impresion: las primeras partículas chocan ántes, y luego se retiran dando lugar á las otras que la siguen.

727 *Si dos superficies iguales* DC, dc *que están en*
209, *reposo, son chocadas directamente por dos distintas cor-*
210 *rientes de agua: 1.º las impresiones que reciben son entre sí como los quadrados de las velocidades: 2.º si las velocidades de los fluidos son iguales, y tambien las superficies, las impresiones son iguales: 3.º si las velocidades y las superficies son desiguales, las impresiones que reciben están en razon compuesta de las superficies y de los quadrados de las velocidades.*

En quanto á lo primero, supongamos que la velocidad de la corriente *AB* sea tripla que la de la velocidad *ab*, y considerémos en cada corriente un solo filete como *AF* : *af*; es evidente que del filete *AF* se destacarán tres globulitos miéntras que del filete *af* se destaca uno solo. Esto supuesto, si se multiplican los tres globulitos del filete *AF* por su velocidad, que es como 3, y el globulillo del filete *af* por su velocidad, que es co-

como 1, tendrémos las fuerzas con que cada filete chocará su superficie: que la del primero será 9, y la del segundo 1; pero el mismo número de filetes chocan á una superficie que á otra; luego las fuerzas con que dichas superficies son chocadas son como 9 : 1, esto es, como los quadrados de las velocidades 3 y 1. Fig.

728 Para lo segundo, siendo los filetes *AF* y *af* movidos con la misma velocidad, y ademas, siendo el número de filetes que choca la primera superficie igual al que choca la segunda superficie, por ser éstas iguales, las impresiones que causen, ó lo que es lo mismo, las fuerzas con que chocan han de ser como los números de filetes, y tambien como las superficies; pero éstas son iguales: luego dichos choques han de ser iguales.

729 En quanto á lo tercero: sean las velocidades de las corrientes como 3 : 2, y las de las superficies *DC* y *dc* como 5 : 7. Esto supuesto, si consideramos que en las mismas corrientes se pongan dos superficies iguales á la unidad, las fuerzas con que las chocan serán como 9 : 4 (728). Pero siendo las superficies *DC* y *dc*, la una cinco y la otra siete veces mayor que las superficies iguales á la unidad, las fuerzas con que las chocan son tambien como 5 : 1, y 7 : 1. Luego las fuerzas con que dichas superficies son chocadas están en razon compuesta de 9 : 4, y 5 : 7, ó lo que es lo mismo, son como 45 : 28.

730 *Si dos superficies iguales* DE, DC *expuestas á* 211
una misma corriente, la DE *directamente, y la* DC *en posicion obliqüa, son chocadas por un mismo fluido, la fuerza del choque directo es á la fuerza del choque obliqüo, como el quadrado del seno total es al quadrado del seno del ángulo* BDC *de la incidencia.*

Siendo todos los filetes de la corriente paralelos entre sí, el ángulo *BDC* es igual á su alterno *DCF*. Luego si tomamos *DC* ó *DE* por seno total ó radio, será *DF* el seno del ángulo *DCF*, ó de su igual *BDC*; pero *DE* mide el número de filetes que chocan directamente, te, y DF el número de aquellos que chocan obliqüamente. Luego si los filetes que encuentran la superficie DC la chocan con tanta fuerza como los que encuentran la superficie DE, las fuerzas con las quales la corriente chocará estas dos superficies, serán entre ellas como DE y DF, ó como el seno total al seno del ángulo DCF; pero los filetes que encuentran la superficie DE la chocan con mas fuerza que los que encuentran la superficie DC en la misma razon que el radio, ó seno total es á el seno del ángulo de incidencia: luego la fuerza del choque directo es á la fuerza del choque obliqüo en razon compuesta del seno total al seno del ángulo de incidencia, y de la fuerza con que cada filete choca en la superficie directa á la fuerza con que choca en la superficie obliqüa; pero esta razon es tambien como el seno total al seno de incidencia. Luego la fuerza del choque en la superficie directa es á la fuerza del choque en la superficie obliqüa, como el quadrado del seno total es al quadrado del seno de incidencia.

731 Luego 1.° Si las superficies son desiguales, las fuerzas con las quales son chocadas están en razon compuesta de los quadrados del seno total, y seno de incidencia, y la que tienen una con otra dichas superficies.

732 2.° Si dos superficies desiguales son chocadas obliqüamente por un mismo fluido, las fuerzas con que chocan están tambien en razon compuesta de los quadrados de los senos de incidencia y las superficies.

733 3.° Quando los fluidos que chocan los cuerpos sean diferentes, debe llevarse en cuenta sus densidades; y en este caso las fuerzas de los choques están en razon compuesta de los quadrados de los senos, de las superficies y de las densidades.

734 Para hacer mas perceptible esta teoría, y poderla aplicar á algunos casos, sean F y f las fuerzas con que uno ó diversos fluidos chocan en las superficies A y a, con las velocidades V y u, D y d las densidades; y S s los senos de los ángulos de incidencia, tendrémos A

$A \times V^2 \times S^2 \times D : a \times v^2 \times s^2 \times d :: F : f$. Que quando las superficies sean iguales se suprimirán A y a; quando lo sean las velocidades, V y v; quando lo sean los ángulos con que chocan los fluidos, la S y s; y quando el fluido sea uno mismo, la D y d. Pero si uno de los choques fuese obliqüo y el otro directo, se substituirá en este último en lugar de la S una R.

735 Hemos supuesto que los planos chocados estaban en reposo; pero si tuviesen algun movimiento, ya fuese en la direccion del fluido, ó en direccion contraria, en el primer caso se debe substituir por las velocidades V y v las velocidades de los fluidos, ménos las de los planos, y en el segundo caso las velocidades de los fluidos mas las de los planos; suponiendo que los planos se mueven paralelos asimismo en uno y uno caso. Y así, llamando v' y u las velocidades de dichos planos, la proporcion anterior tomará esta forma $F : f$ $:: A(V \pm v')^2 \times S^2 \times D : a(v \pm u)^2 \times s^2 \times d$.

736 Para hacer aplicacion de esta fórmula en el choque de los fluidos con los cuerpos sólidos, nos es indispensable conocer la fuerza con que un fluido qualquiera, cuya gravedad específica sea conocida, choca directa ú obliqüamente contra una superficie determinada. La adjunta tabla nos da á conocer el impulso del agua contra una superficie de un pie en quadro chocada perpendicularmente con diferentes velocidades.

Ve-

Velocidad ó movimiento del agua en un segundo.	Impulsos.		Velocidad ó movimiento del agua en un segundo.	Impulsos.	
Pies.	*Lib.*	*Onz.*	*Pies.*	*Lib.*	*Onz.*
1	1	3	13	203	0
2	4	13	14	235	0
3	10	12	15	270	0
4	19	3	16	300	0
5	30	0	17	334	0
6	43	0	18	389	0
7	59	0	19	434	0
8	75	0	20	480	0
9	97	0	21	529	0
10	120	0	22	580	0
11	145	0	23	635	0
12	172	0	24	688	0

737 Qüestion I. *Hallar la fuerza con que choca con direccion perpendicular una corriente de agua, cuya velocidad es de ocho pies, en una superficie de quince pies quadrados que está en reposo.*

La fórmula $F:f :: AV^2S^2D : av^2s^2d$ nos da, haciendo las reducciones necesarias, $f=\frac{av^2\times F}{AV^2}$, que poniendo por F 75 libras, segun lo insinúa la tabla, por a 15 pies, por A 1 pie, y suprimiendo v^2 y V^2 porque son iguales, sale $f=\frac{15\times 75}{15}=1125$ libras, y éste es el esfuerzo que dicha corriente hace contra una superficie de 15 pies.

738 Qüestion II. *Determinar la fuerza con que choca contra una superficie de $\frac{1}{2}$ pie quadrado que está en reposo una corriente de agua que la hiere perpendicularmente con una velocidad de 30 pies por segundo.*

La fórmula $f=\frac{av^2F}{AV^2}$ nos manifiesta tambien el modo de resolver esta qüestion; solamente que como la velocidad 30 pasa los límites de la tabla, debemos tomar por V una velocidad que sea menor que 24, y por F el número de libras que le corresponde; y así, haciendo $V=6$ pies, será $F=43$: estas cantidades substituidas en la fórmula, y teniendo presente que $v=30$ pies, $a=\frac{1}{4}$ y $A=1$, tendrémos $f=\frac{\frac{1}{4}\times(30)^2\times 43}{1\times 6^2}=\ldots\ \frac{9675}{36}=265$ libras.

739 Qüestion III. *Hallar la fuerza con que una corriente de agua choca obliqüamente con una superficie de 12 pies, siendo la velocidad del fluido de 16 pies, y el ángulo con que encuentra á la superficie de 30°.*

La proporcion $AV^2S^2D : av^2s^2d :: F:f$ nos da $f=\frac{av^2s^2\times F}{AV^2S^2}$; pero siendo el ángulo con que choca el fluido de 30°, su seno ha de ser la mitad del radio; luego si hacemos $s^2=1$, será $S^2=\frac{1}{4}$, que haciendo las substituciones, y teniendo presente que segun la tabla, quando $V=6$ pies es $F=43$, tendrémos $f=\frac{12\times(16)^2\times\frac{1}{4}\times 43}{36\times 1}=917\frac{1}{3}$ libras.

740 Qüestion IV. *Determinar la fuerza con que el ayre choca perpendicularmente en una superficie de 20 pies, que está en reposo con una velocidad de 30 pies por segundo.*

De la proporcion fundamental (734), en que entran las densidades de los fluidos, sale $f=\frac{av^2d\times F}{AV^2D}=\ldots\ldots$

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

$\frac{20\times(30)^2\times 43\times\frac{1}{850}}{36}$: suponiendo que $V=6$; $F=43$, y la densidad del ayre $\frac{1}{850}$ de la densidad D del agua, que por último sale $f=26$ libras con corta diferencia.

741 Son innumerables las qüestiones que pueden resolverse por medio de estas fórmulas relativas á conocer la fuerza con que los fluidos, con especialidad el ayre y el agua, chocan en los cuerpos sólidos ; y aunque los resultados que dan los cálculos no sean rigurosamente exâctos, lo son lo bastante para que los Arquitectos hidráulicos, y los que se destinan á la construccion de las máquinas movidas por el impulso del agua y el ayre conozcan los efectos de que es capaz una corriente de estos fluidos, y les den toda aquella solidez que se requiere.

742 El que quiera enterarse por menor en esta materia vea la Hidráulica de M. Bossut : en ella encontrará, 1.° que quando una corriente de agua choca en los dos lados iguales de un triángulo isósceles que está en reposo con una direccion paralela á su altura, el impulso que reciben los lados es al que recibiría la base, como el quadrado de la semibase es al quadrado de uno de los lados.

743 2.° Que el impulso que recibe un cilindro vertical puesto en una corriente de agua es los dos tercios del que recibirá una seccion del mismo cilindro cortado por su exe en direccion perpendicular á la corriente.

744 3.° Que el impulso con que el agua choca perpendicularmente en una esfera es la mitad del que recibe un círculo máxîmo de la misma esfera que sea vertical, y perpendicular á la corriente.

De todo esto podrán deducir los Arquitectos hidráulicos la forma que deben dar á los tajamares ó machones de los puentes, y las presas con que se atajan los rios con el fin de levantar las aguas, para que mejor resistan al grande impulso que les comunica.

745 El mismo *Bossut*, tratando de los medios que deben adoptarse para mejor aprovechar el impulso del agua en el movimiento de las máquinas, demuestra : 1.° que para que una rueda movida por el impulso del agua, ó del ayre produzca el máxîmo efecto, debe verificarse que la velocidad del centro de impresion sea el tercio de la velocidad del fluido.

746 2.° Que dando á una rueda de alas de 24 á 30 de éstas produce mejor efecto que quando se le da ménos.

747 3.° Que las ruedas de caxones producen mejor efecto que las ruedas de alas, y por lo mismo deben preferirse aquellas á éstas quando el agua tiene suficiente caida.

748 *Las resistencias que un mismo cuerpo encuentra en un medio resistente son proporcionales á los quadrados de las velocidades con que se mueven.*

Supongamos al móvil dos velocidades, y que la una sea tripla de la otra, es evidente que con la velocidad tripla correrá un espacio triplo, lo que no puede executar á ménos que desaloje un fluido tres veces mayor con triple velocidad; pues debe correr en el tiempo que es desalojado delante del móvil el mismo espacio que él. Luego las resistencias que el móvil encuentra son entre sí como las cantidades de movimiento que comunica al móvil; pero estos movimientos son entre sí como los productos de las masas 3 y 1 por las velocidades 3 y 1, ó como $(3)^2 : (1)^2$; luego las resistencias que el móvil encuentra son como los quadrados de las velocidades.

De esta demostracion, y lo dicho (727), se deduce que la fuerza del choque es la misma quando el fluido choca en el cuerpo, que quando el cuerpo choca en el fluido.

749 *Si dos esferas se mueven en un fluido con velocidades desiguales, las resistencias que encuentran son entre sí como los quadrados de las velocidades multiplicadas por los quadrados de los diámetros.*

Porque las resistencias son como los quadrados de las velocidades multiplicadas por las superficies, y las superficies como los quadrados de los diámetros.

 Lue-

Fig. 750 Luego si las velocidades son iguales, las resistencias son como los quadrados de los diámetros; de forma que si los diámetros son como 3 y 1, las resistencias han de ser como 9 : 1; y como las cantidades de movimiento de dichas esferas son como sus masas, quando las velocidades son iguales, y ademas las masas son como los cubos de los diámetros, las cantidades de movimiento han de ser como los cubos de los diámetros, ó como 27 : 1. Esto supuesto, si las resistencias fueran entre sí como las cantidades de movimiento de los móviles, las dos esferas perderian sus velocidades á un mismo tiempo. Pero como las resistencias en la hipótesi presente son como los quadrados de los diámetros, y la razon de estos quadrados es menor que las de las solideces, se deduce que la razon de las resistencias es menor que la de las solideces, ó las cantidades de movimiento, ó las fuerzas con que se mueven; y así la esfera grande tardará mas tiempo en perder su velocidad que la mas pequeña; de forma que la pequeña esfera encuentra una resistencia mayor que la que encuentra la esfera grande.

Esta es la razon por que una bala de fusil que pese una onza corre mayor espacio que una bala de media onza, una posta, y un perdigon, aunque todas se disparen con igual cantidad de pólvora.

De algunos métodos para medir la velocidad y cantidad de agua de los rios ó canales.

Del tubo recurvo de Pitot.

751 Este instrumento es un tubo de vidrio como *AB*, que tiene un recodo en *G*, y se mete verticalmente en la
212 corriente cuya velocidad se quiere determinar, colocando la parte *AG* en la direccion contraria de la corriente. La altura *GM*, á la qual sube el agua en el tubo, es la que proviene de la velocidad con que camina el agua en *A*; porque manteniéndose invariable la altura *GM*, es evidente que la presion de la columna del agua *MG* hace equilibrio con la fuerza que obra para que el agua suba en la direccion *AGM*, y que por consiguiente la velocidad del punto *A* es la misma que si el agua en el mismo parage hubiese caido de la altura *MG*; con meter el tubo mas ó ménos dentro del agua, se determinan las alturas que corresponden á las velocidades de los diferentes puntos de las corrientes.

Del Regulador.

752 El Regulador es invencion de Guglielmini. Este Autor propone que para medir la cantidad de agua de una corriente se la cierre entre dos paredes verticales y paralelas, se allane bien el fondo del canal ó rio, y se ponga una compuerta de una á otra pared, la qual suba y baxe con libertad. Verificado ésto, se baxa ó sube la compuerta hasta que el agua de la corriente sea cabalmente la que pasa por la abertura rectangular que queda entre la compuerta, el fondo del canal y las paredes; y se determina la cantidad de agua por medio de la fórmula (719). Pero para que el resultado sea algo mas exâcto, conviene disponer la compuerta de modo que la abertura por donde sale el fluido sea un rectángulo de mucha base y poca altura; y se ha de tener cuidado quando se mida la altura del agua sobre la abertura, de contarla siempre desde el centro de ésta.

No es precision que las dos paredes que sostienen la compuerta sean de fábrica; pueden servir tambien de madera.

Del Barómetro.

753 Este instrumento no es otra cosa que el tubo, con el qual Torricelli averiguó el peso del ayre, solamente que se ha perfeccionado mucho, y se le ha aplicado á 213
una tabla vertical dividida en pulgadas, empezando desde la superficie *MN*, que está en el cubillo ó ampolla *AMN*, y subdivididas en líneas. Sirven estas graduaciones para co-

conocer lo que sube ó baxa el mercurio, á proporcion que la presion de la atmósfera sobre los cuerpos es mayor ó menor.

754 Siendo la elasticidad ó fuerza espansiva del ayre igual á la fuerza que le comprime (695), si el resorte de este fluido fuese contraido por solo su peso, qualquiera de estas dos fuerzas sostendrá el mercurio dentro del tubo á una misma altura. Esta es la causa de que en un quarto muy cerrado, ó debaxo de una campana grande, se mantiene el mercurio á la misma altura que si estuviese al ayre libre.

755 Para que el *Barómetro* tenga la mayor perfeccion es indispensable: 1.º que el tubo *AB* sea bien cilíndrico, y el vidrio tenga el mismo grueso en toda su extension: 2.º que el mercurio sea el mas puro que se encuentre: 3.º que en la parte superior del Barómetro no quede la menor cantidad de ayre.

756 Construido el Barómetro con estas precauciones, es fácil inferir que quanto mas baxo sea el sitio donde se coloque, tanto mayor será el peso de la atmósfera, y tanto mas subirá el mercurio. No obstante esto, se observa que en un mismo sitio se experimentan muchas variaciones en la altura del mercurio por razon de los diferentes estados de la atmósfera. El mercurio sube quando el tiempo es bueno, constante, seco, y sin ayre; y baxa quando el tiempo es vario, llovioso, borrascoso, y soplan ayres fuertes, y la atmósfera está cargada de vapores. Si haciendo buen tiempo baxa el mercurio, es señal de llover ó hacer ayre; pero al contrario, si estando el tiempo llovioso sube el mercurio, es señal de que se pondrá el tiempo bueno. Quando el mercurio baxa en el verano pronostica truenos; y quando sube en el invierno, anuncia hielos. Estos son los hechos generales que tiene acreditada la experiencia; pero padecen algunas excepciones, y en algunos se experimentan efectos contrarios.

757 Se hace tambien uso del Barómetro para medir la

diferencia de nivel entre muchos puntos de la superficie de la tierra.

Maraldi y Casini, comparando muchas observaciones de alturas medidas con el Barómetro con otras halladas geométricamente, deduxéron que el Barómetro daba con bastante exâctitud las alturas contadas desde el nivel del mar hasta siete ú ocho mil pies de altura sobre dicho nivel; dando por la primera línea que baxaba el mercurio 71 pies, por la segunda 72, por la tercera 73, y así sucesivamente. Pero como el mercurio se dilata con el calor, y contrae con el frio, para que estos resultados sean bastante exâctos, se ha de tener sumo cuidado que el temperamento de la atmósfera sea uno mismo quando se empieza la operacion y quando se acaba, lo que se conoce por medio de un buen Termómetro.

De las Bombas.

758 Las bombas son unos tubos largos, por los quales sube el agua por medio de la presion del ayre exterior ú otra causa qualquiera. En todas las bombas hay que distinguir tres partes principales, que son: el *tubo*, el *embolo*, y las *bálbulas*: en el tubo hay dos partes, aquella donde juega el embolo subiendo y baxando, que se llama *cuerpo de bomba*; y el tubo por el qual sube el agua, que es mucho mas delgado que el anterior, y se llama *tubo de atraccion*.

Las bombas son de tres especies, á saber, *atraentes*, *comprimentes* y *mixtas*; esto es, que son atraentes y comprimentes á un mismo tiempo.

759 La bomba atraente ó aspirante es aquella donde el agua sube por sola la presion del ayre. Si el extremo inferior del tubo *AC* (*fig.* 214) está metido en un depósito, y se levanta el embolo *EF* desde la superficie del agua hasta la altura de 37 pies de Castilla, de manera que en el tubo no quede la menor cantidad de ayre, el agua se levantará á esta altura; porque el ayre exterior gra-

gravita sobre la superficie del agua en el depósito con una fuerza equivalente al peso de una columna de agua de 37 pies de altura; pero aunque el embolo se levante mas de los 37 pies, el agua nunca sube mas que á esta dicha altura.

760 Quando el embolo *EF* se levanta, la bálbula en *G* se abre, y el agua entra en el tubo; quando se baxa el embolo, se cierra la balbula *G*, y se abre la balbula *E*, que lleva el embolo, y el agua pasa á la parte superior del tubo; y quando se vuelve á levantar el embolo segunda vez, el agua que ha pasado á la parte superior de él sale fuera de la bomba.

761 En las bombas comprimentes el cuerpo de bomba *AB* (*fig.* 215) está dentro del agua; quando se levanta el embolo, el agua que impele de abaxo á arriba la bálbula *G* la levanta y entra en el cuerpo de bomba, por la propension que tiene á nivelarse; pero baxando de seguida el embolo, se cierra la bálbula *G*, y el agua comprimida se ve forzada á abrir la bálbula *H* y pasar al tubo *NM*; si se vuelve á levantar el embolo, el peso del agua del tubo *NM* cierra la bálbula *H*, que le impide á descender, y entónces el agua que comprime la bálbula *G* entra como la primera vez en el cuerpo de bomba, desde donde pasa al tubo *MN* quando al baxar el embolo la comprime.

762 En las bombas mixtas el agua entra desde luego en el tubo *AB* (*fig.* 216) por aspiracion, esto es, por la sola presion del ayre, quando se levanta el embolo; si despues de esta primera operacion se baxa el embolo, la bálbula *G* se cierra, y la fuerza de la presion hace subir el agua por el tubo *NM*, del qual no puede descender; porque la bálbula *H*, que se abre para que suba, la cierra el agua con su propio peso.

763 En las bombas atraentes (*fig.* 214) la bálbula *E* se coloca por lo regular en la union del cuerpo de bomba y tubo de atraccion; pero siempre es preciso que el tubo de atraccion tenga una longitud menor que 37 pies de Castilla, pues de lo contrario no subiria el agua; pero como podria suceder que estando la bomba parada mucho tiempo se secasen las bálbulas, si acaso eran de cuero (que es de lo que suelen hacerse), convendrá que ántes que la bomba se ponga en movimiento se remojen bien las bálbulas.

764 El que quiera noticias mas circunstanciadas sobre el mecanismo de las bombas, vea la Hidrodinámica de Bossut; pues yo concluyo esta obra, advirtiendo á los Maquinistas: 1.° que la fuerza que se ha de hacer para poner una bomba en movimiento, sin contar el rozamiento, es igual al peso de una columna fluida, que tenga por base el embolo, y por altura la distancia que hay desde el nivel del agua á la altura á que se quiere remontar ésta: 2.° que un pie cúbico castellano de agua dulce pesa quarenta y seis libras, y un cilindro de la misma agua, que tenga un pie de diámetro, y otro pie de altura, pesa $\frac{11}{14}\times 46$ libras con corta diferencia.

TA-

TABLA

DE LAS GRAVEDADES ESPECIFICAS DE VARIAS MATERIAS.

Como la mayor parte de los que se dedican al estudio de las Matemáticas es con el objeto de estudiar la Física Experimental, me ha parecido mas á propósito insertar en este Compendio la tabla siguiente.

Habiendo tomado por término de comparacion el peso de un volúmen qualquiera de agua llovediza, y expresado por la unidad, se han buscado en fracciones decimales los pesos que en igual volúmen contienen otras diversas substancias; por manera que en conociendo lo que pesa un volúmen de agua pura, conocerémos el peso que en igual volúmen contiene otra substancia qualquiera de las que comprehende la tabla con multiplicar la gravedad específica de esta substancia por el peso que tiene el volúmen de agua.

Oro fino ó de crisol.	19,640
Oro de una Guinea.	19,888
Oro de un Ducado.	18,261
Oro de un Luis.	18,166
Mercurio.	14,000
Mercurio dulce.	13,382
Plomo.	11,325
Plata fina de crisol.	11,091
Plata monedada.	10,535
Mercurio dulce sublimado tres veces.	9,804
Bismut	9,700
Cobre roxo, ó del Japon.	9,000
Cobre de Suecia.	8,784
Turbith mineral.	8,235
Cinabrio artificial.	8,200
Mercurio dulce sublimado quatro veces.	8,170
Cobre amarillo, ó Laton.	8,000
Acero templado.	7,850
Hierro.	7,645
Regulo marcial.	7,500
Estaño.	7,471
Otro.	7,320
Cinabrio natural.	7,300
Cinabrio de Almaden.	6,188
Zinc.	7,107
Corrosivo sublimado.	6,325
Litargirio de oro	6,000
Litargirio de Plata	6,044
Cinabrio de Antimonio.	6,044
Vidrio de Antimonio.	5,280
Piedra Iman de Ungria.	5,106
Otra.	5,004
Iman de Cerpho.	5,245
Piedra Calaminar	5,000
Piedra azul de Namur.	5,000
Antimonio de Ungria.	4,700
Antimonio de Alemania.	4,000

Antimonio de Auverña	4,858
Tutie	4,615
Crocus Metallorum	4,500
Piedra de Bolonia	4,496
Granates de Bohemia	4,360
Piedra Hamatita	4,360
Topacio falso	4,270
Mina de Antimonio del Poitou	4,215
Mina de hierro de los Pirineos	4,171
Granates de Suecia	3,978
Mina de Granates Marquesita	3,100
Arsénico blanco	3,695
Oropimienta	3,521
Zafiro del Oriente	3,562
Pyrita vitriólica	3,512
Pizarra azul	3,500
Malachite	3,490
Diamante	3,400
Piedra para amolar, de Lorena	3,288
Albayalde	3,156
Vidrio blanco ó cristal	3,150
Calamina de Issi	3,108
Turquesa	3,088
Esmeril de la Isla de Najos	3,067
Esmeril de Normandía	3,038
Lapis-lazuli	3,054
Peridiote	3,052
Jalque de la Jamayca	3,000
Topacio	2,712
Amiantho	2,913
Azufre roxo de Quito	2,908
Piedra Divina ó nefrítica	2,894
Piedra Iris	2,882
Crepudiana	2,826
Piedra Hamatita de Menorca	2,806
Talque de Venecia	2,780
Esmeralda	2,777

Azúcar de Saturno	2,745
Bol de Armenia	2,727
Nitro concluido	2,723
Cristal de Islandia	2,720
Mármol	2,718
Mármol blanco de Italia	2,707
Mármol negro de Italia	2,704
Piedra Belemnita	2,675
Vidrio de Botella	2,666
Jada, género de Esmeralda	2,683
Coral roxo	2,689
Coral blanco	2,500
Cristal de Roca	2,650
Pedernal	2,641
Jacinto, piedra preciosa	2,631
Ágata Onix	2,627
Vidrio comun	2,620
Jaspe	2,610
Guijarro de Egipto	2,578
Ágata de Inglaterra	2,512
Piedra Judáyca	2,500
Piedra ó Guijarro ordinario	2,500
Barro de Marly	2,438
Salenita	2,322
Tártaro vitriolado	2,298
Tártaro Emético	2,246
Sal admirable de Glauber	2,246
Osteocolla	2,240
Hueso seco de carnero	2,222
Amatista, piedra preciosa	2,211
Sardónica	2,180
Piedra negra de Irlanda	2,165
Sal de Gayac	2,148
Sal artificial	2,148
Sal de Ciruela silvestre	2,148
Sal vírgen	2,143
Iris, piedra preciosa	2,130

Tierra de Xavon	2,094
Escamas de Ostra	2,092
Tierra de Pipas en Ruan	3,088
Azufre de la Guadalupe	2,077
Azufre del Archipiélago	2,018
Tierra de Lemnos	2,000
Ladrillo	2,000
Azufre vivo	2,000
Nitro	1,900
Crema de Tártaro	1,900
Vitriol blanco	1,900
Vitriol de Inglaterra	1,880
Asta de Ciervo	1,875
Asta de Buey	1,840
Alabastro	1,872
Tártaro	1,846
Marfil	1,825
Azufre mineral	1,800
Vitriol de Ganteic	1,715
Alumbre	1,714
Borrax	1,714
Verde arambre	1,714
Aceyte de Vitriol	1,700
Calcul humain	1,700
Otro	1,664
Hueso de Buey	1,656
Espíritu de Nitro rectificado	1,610
Aceyte de Tártaro	1,550
Bezar oriental	1,530
Bezar occidental	1,500
Sal de asta de Ciervo	1,496
Sal Ammoniaco	1,453
Ens de Mar sublimado una vez	1,453
——— sublimado tres veces	1,269
Miel	1,450
Espíritu de Nitro Bezardico	1,414
Goma Arábiga	1,375

Opio

Opio	1,363
Agua fuerte doble	1,341
Nuez de locos	1,340
Espíritu de Nitro de Monsieur Geoffroy	1,338
Madera de Guayac	1,337
Goma Dragante	1,333
Espíritu de Nitro comun	1,315
Agua fuerte	1,300
Mirrha	1,250
Carbon de tierra	1,240
Ágata negra	1,238
Agua Regia	1,234
Resina de Guayac	1,224
Azabache	1,224
Espíritu de Vitrol	1,203
Escamonea	1,200
Madera Nefrítica	1,200
Madera de Cicotrino	1,177
Ébano	1,177
Pez	1,150
Espíritu de Seda	1,145
Espíritu de Sal	1,130
El mismo por aceyte de Vitriol	1,154
Sediment de sangre humana	1,126
Espíritu de Orina	1,120
Cola de Pescado	1,111
Aceyte de Sasafrás	1,094
Decoccion de Genciana	1,085
Decoccion de Vistorta	1,073
Espíritu de Tártaro	1,073
Lomo de Caballo	1,071
Incienso	1,071
Lexía de potasa	1,060
Santal blanco	1,041
Ámbar	1,040
Sangre humana	1,040
Decoccion de *Arum*	1,036

Acey-

Aceyte de Canela	1,035
Aceyte de Geroffle	1,034
Nuez de Gales	1,034
Vino de Canarias	1,033
Humor agrio de sangre humana	1,030
Madera del Brasil	1,030
Box	1,030
Espíritu de ámbar	1,030
Agua del Mar	1,030
Orina	1,030
Vinagre destilada	1,030
Vinagre ordinaria	1,017
Leche de Vaca	1,030
Leche de Cabra	1,030
Láudanum, liq. de Sidenhan	1,024
Decoccion de Quinquina	1,024
Cerbeza	1,019
Madera verde	1,004
Agua de rio	1,009
Agua de lluvia	1,000
Agua de pozo	0,999
Agua destilada	0,993
Agua hirviendo	0,963
Alcanfor	0,996
Vino de Orleans	0,996
Vino de Pontac	0,993
Vino de Borgoña	0,992
Cera amarilla	0,995
Aceyte de Eueldo	0,994
Hissopo	0,986
Sabina	0,983
Ámbar	0,978
Comino	0,975
Aceyte de Yerba buena	0,975
Ruda	0,975
Moscada	0,948
Tanaisie	0,946

Oré-

Orégano	0,940
Alcaravea	0,940
Aceyte de Spicuard	7,936
Romero	0,934
Lino	0,932
Olivo	0,913
Genievre ou Cade	0,911
Madera de Campeche	0,931
Corazon de Encina	0,929
Elixir des proprietes avec le sel Volat.	0,939
Aceyte de Lino	0,936
Aceyte de Nuez	0,934
Aceyte de simiente de Nabos	0,919
Tintura de Quinquina	0,900
Tintura de Goma Ammoniaca	0,899
Espíritu de Miel	0,895
Bálsamo de Tolu	0,896
Aceyte de Naranja	0,888
Aceyte de Terbentina	0,871
Rama de Encina	0,870
Tintura de Antimonio	0,866
Aceyte de Nabos	0,853
Tintura de Acero de Mynsicht	0,853
Madera de Haya	0,854
Lentisco	0,849
Aceyte de Cera	0,831
Santal Citrin	0,809
Espíritu de Vino rectificado	0,806
Espíritu de Vino *etheré*	0,732
Raiz de Genciana	0,800
Fresno seco	0,800
Quinquina	0,784
Madera de Santa Lucía	0,773
Tejo	0,760
Arce seco	0,755
Ciruelo seco	0,663
Cedro	0,613

 Ol-

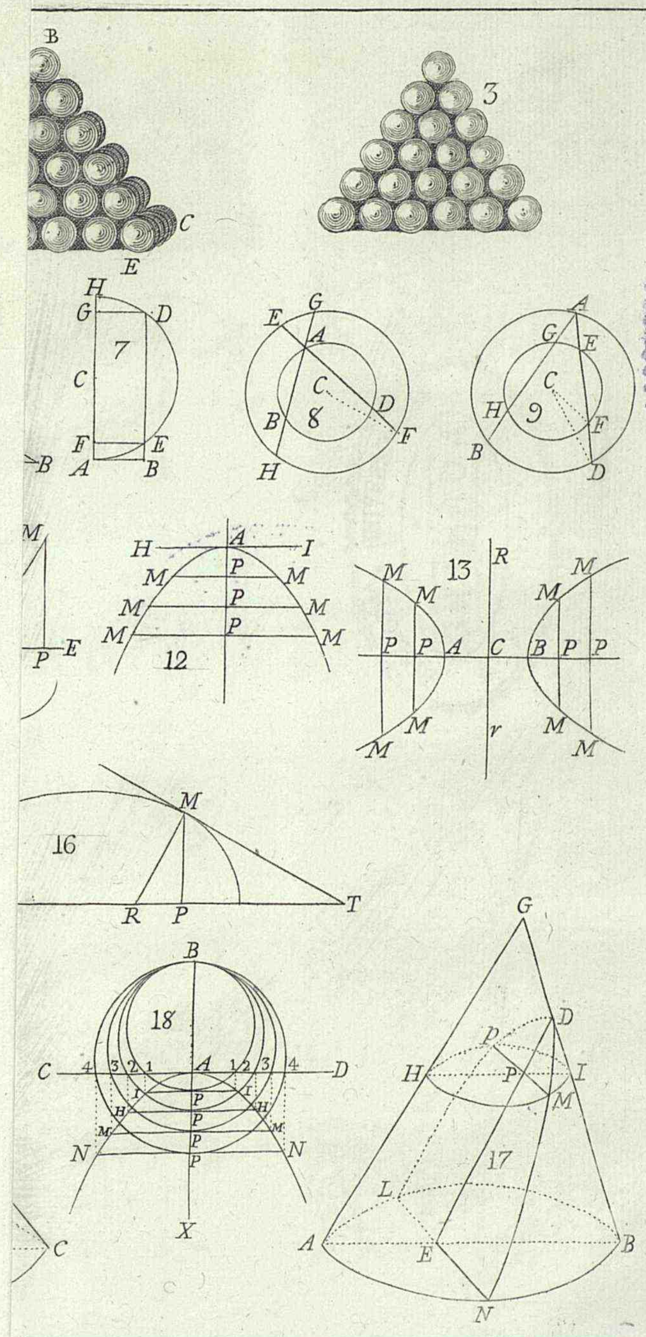
Olmo.	0,600
Cipres.	0,591
Enebro.	0,556
Pino.	0,550
Laurel.	0,549
Sassafras.	0,482
Pino.	0,430
Alcornoque.	0,240
Ayre.	0,001

FIN.

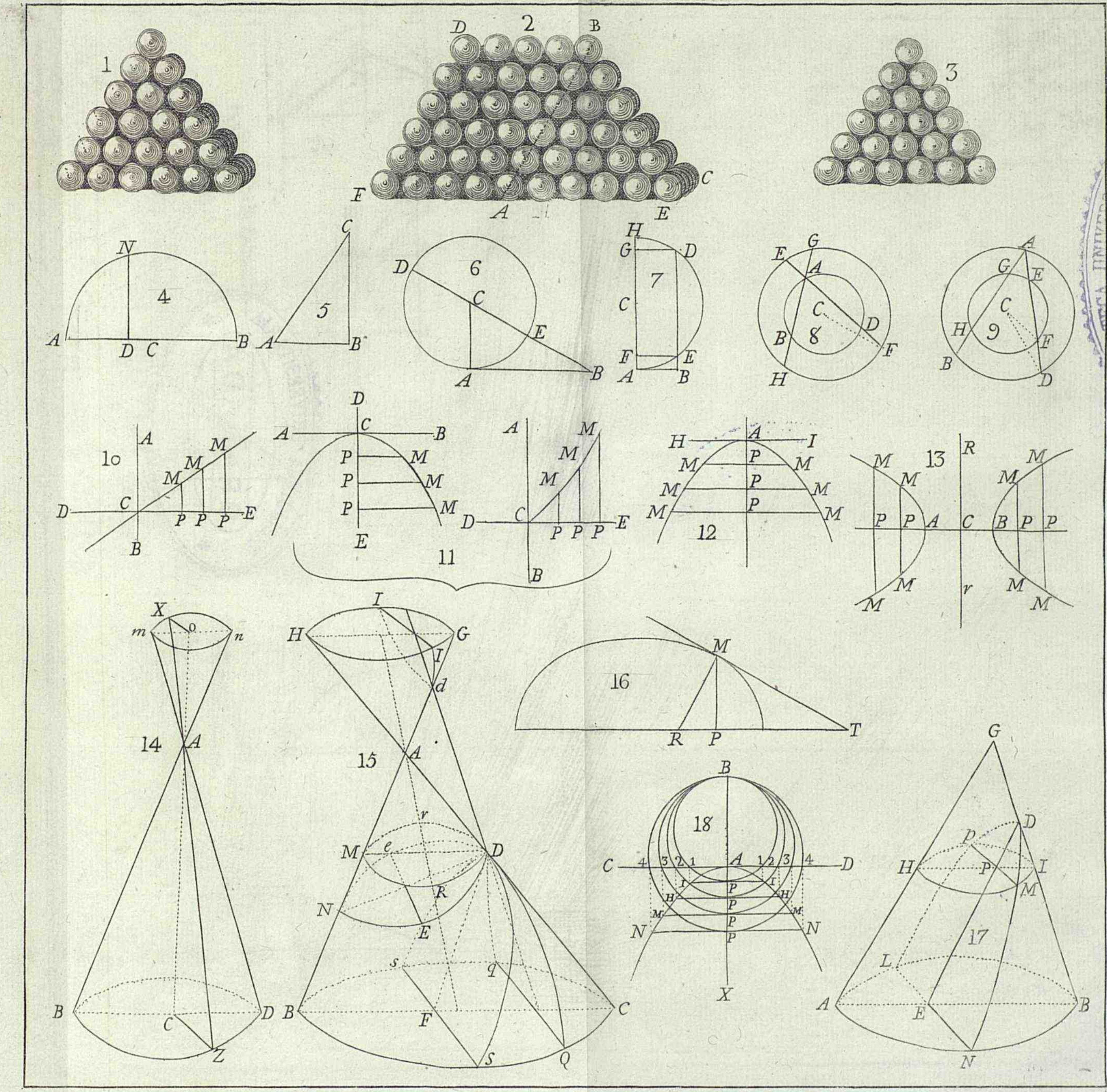
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA

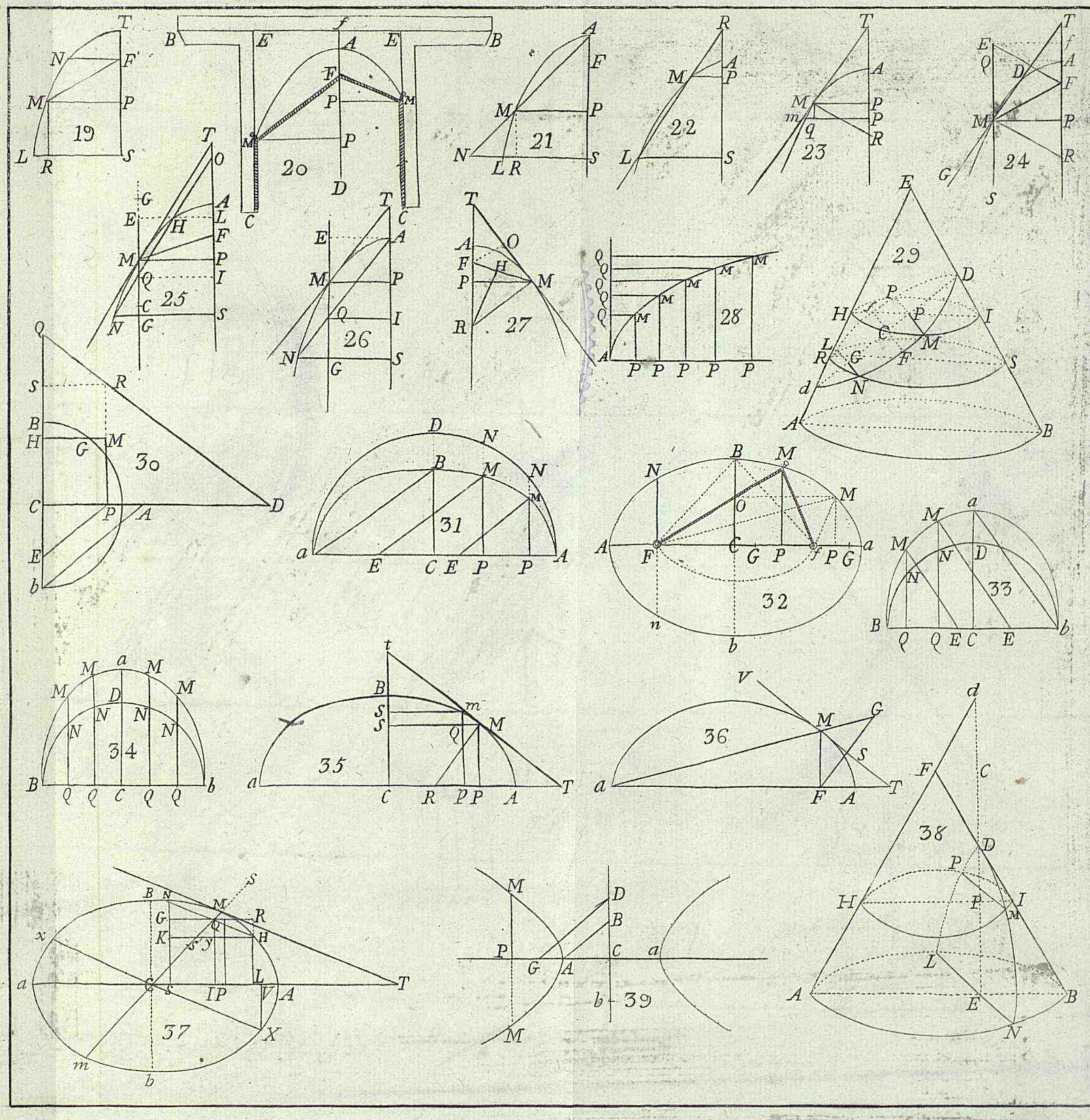
La I

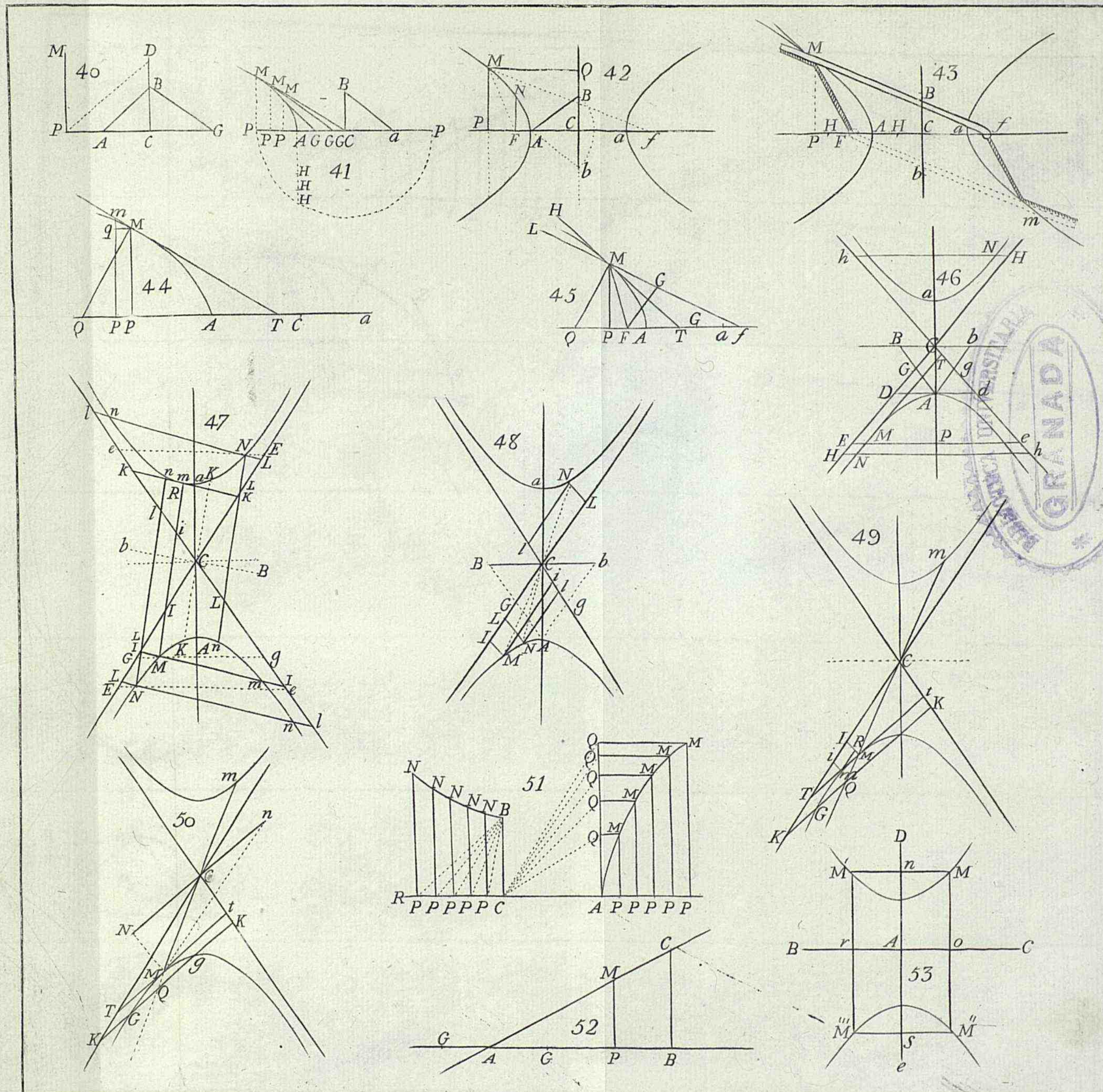


BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

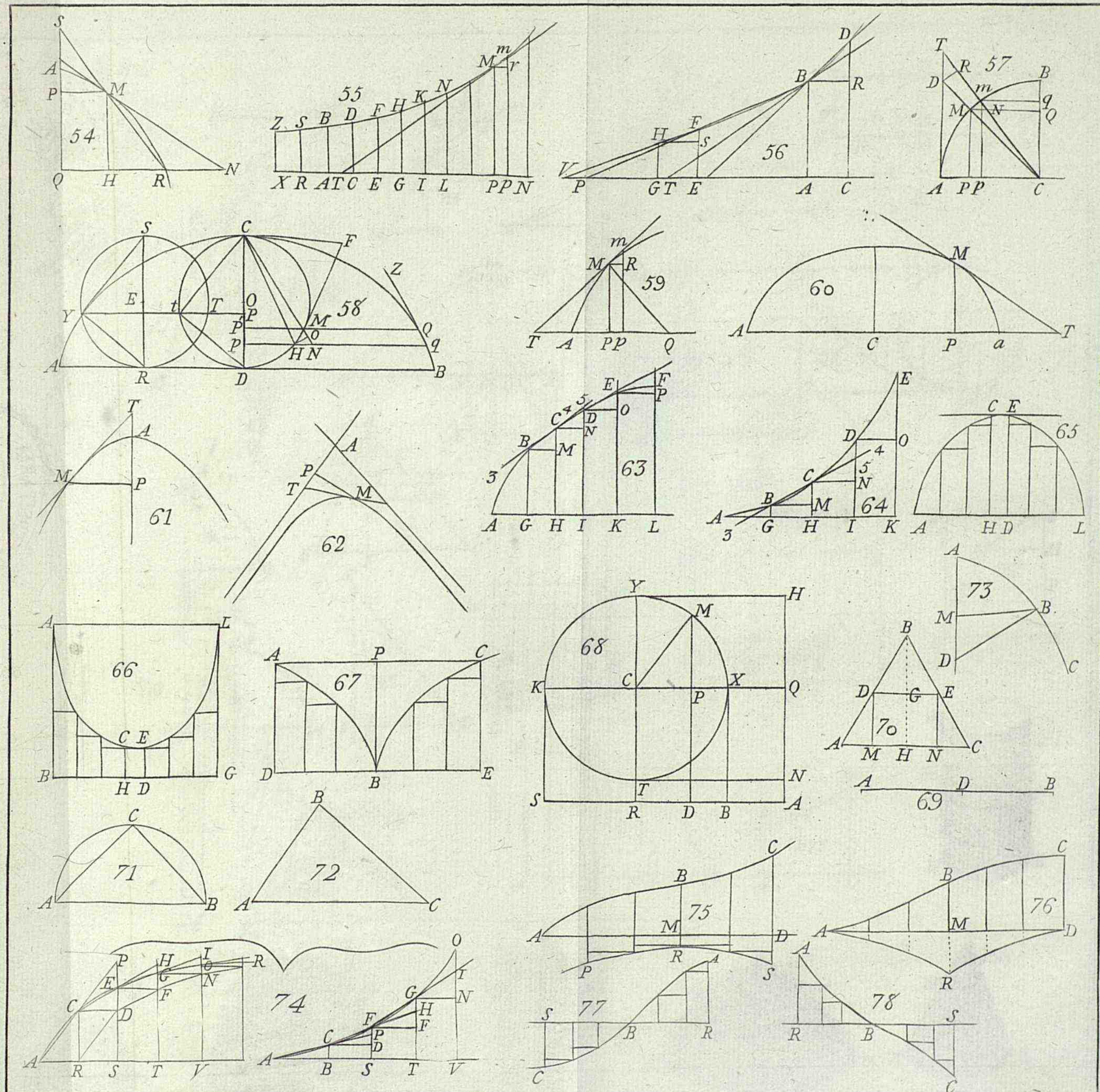


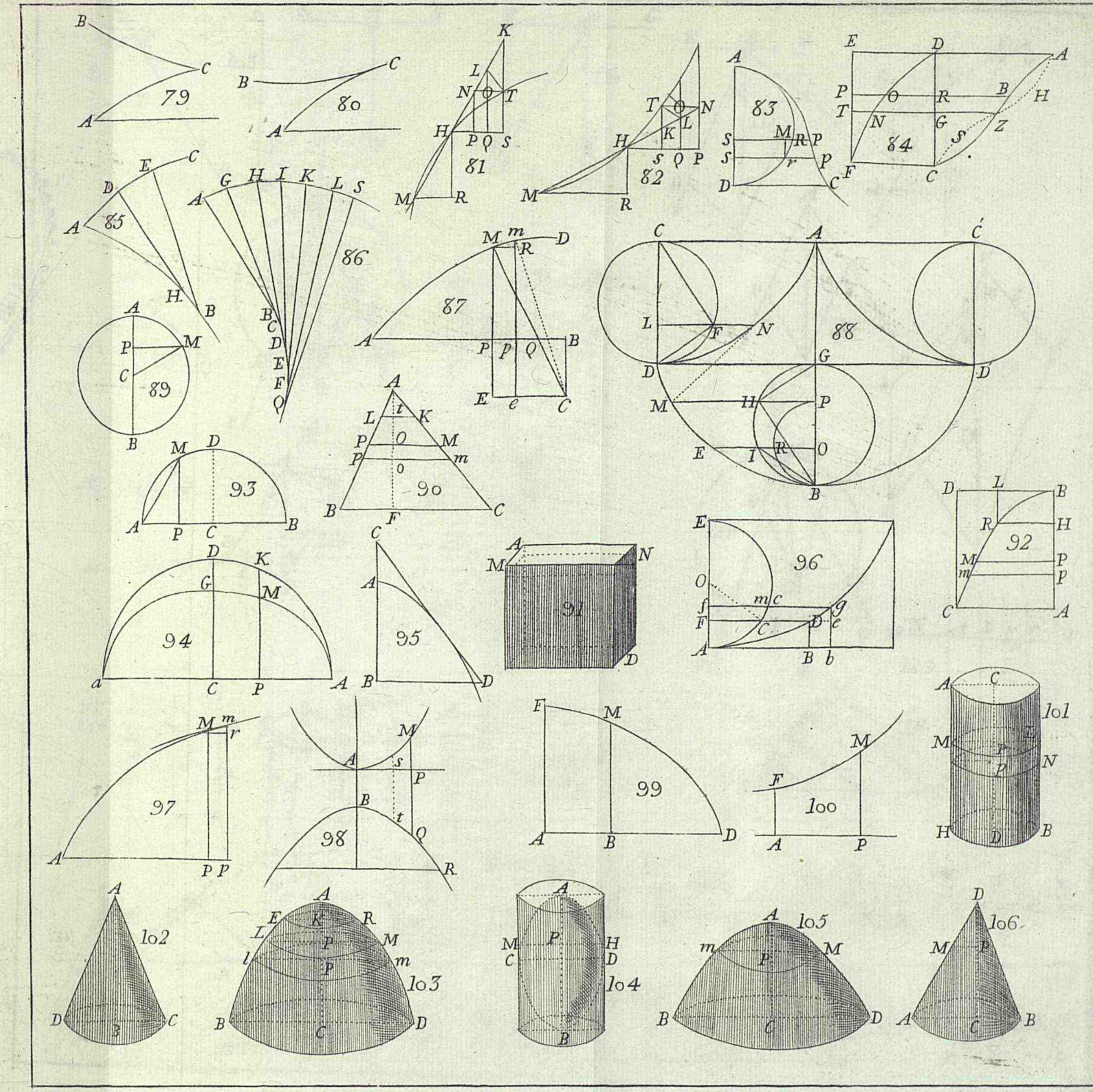
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA


19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39

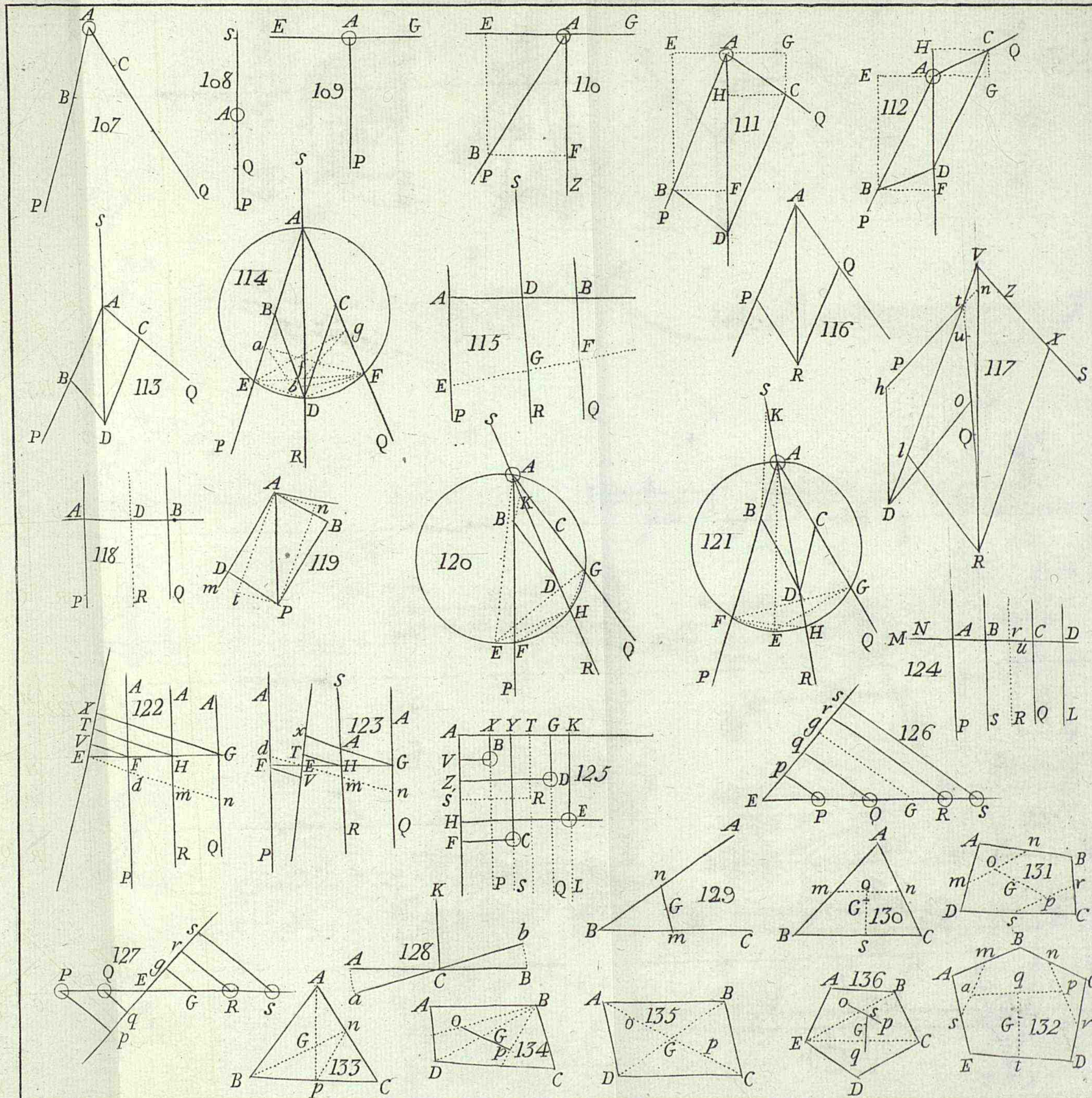


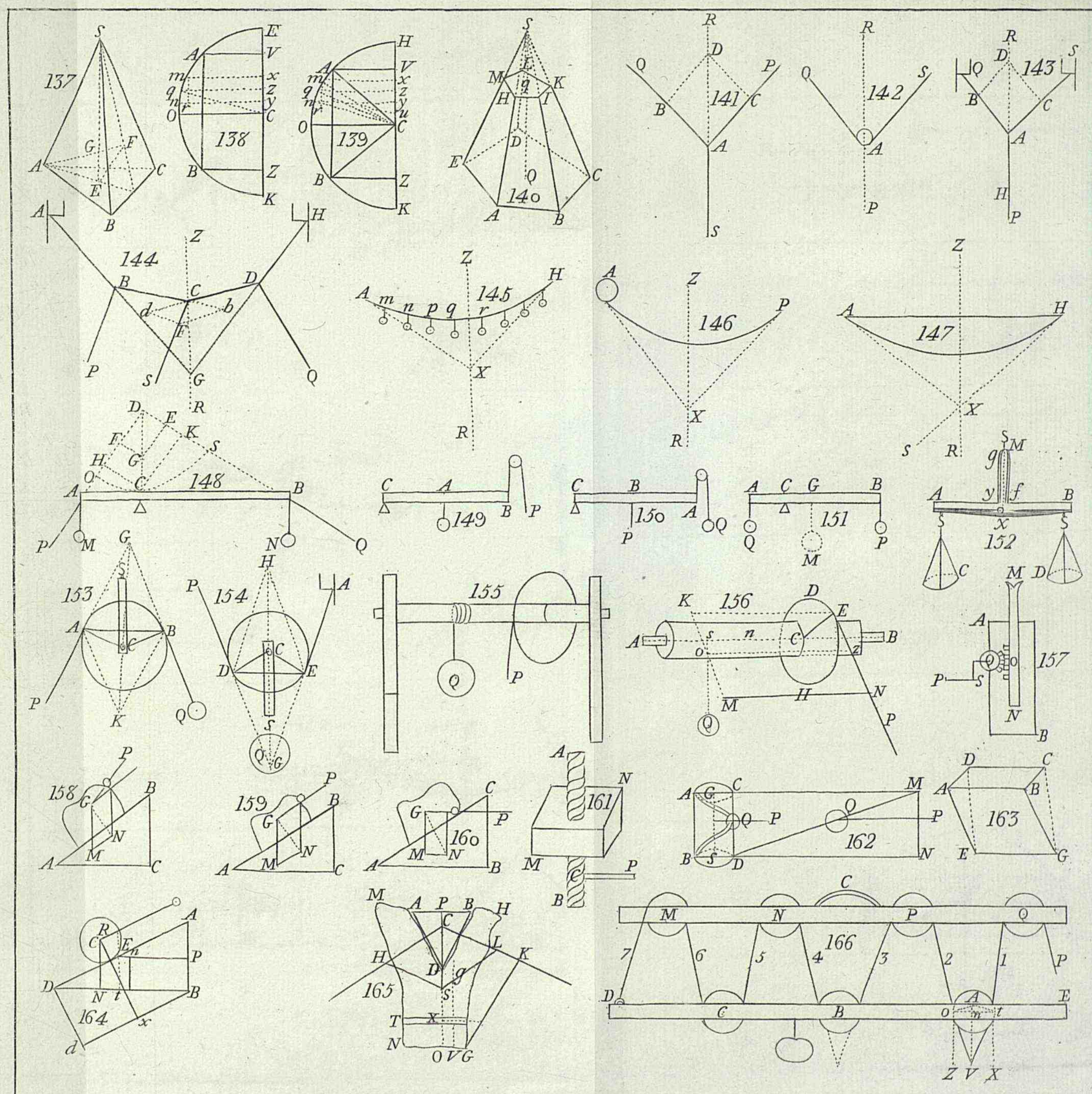
GRANADA

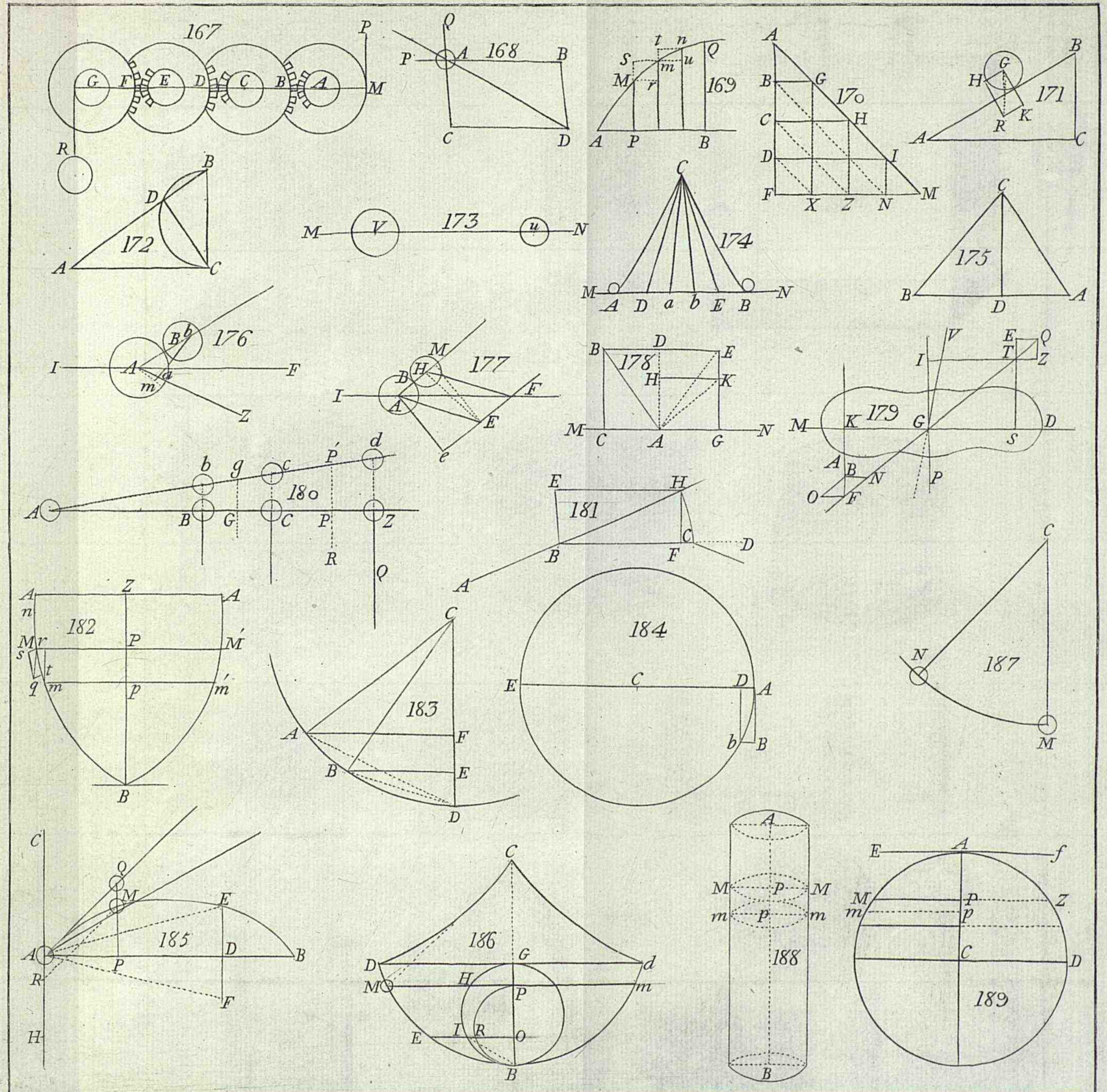

54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78


79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106

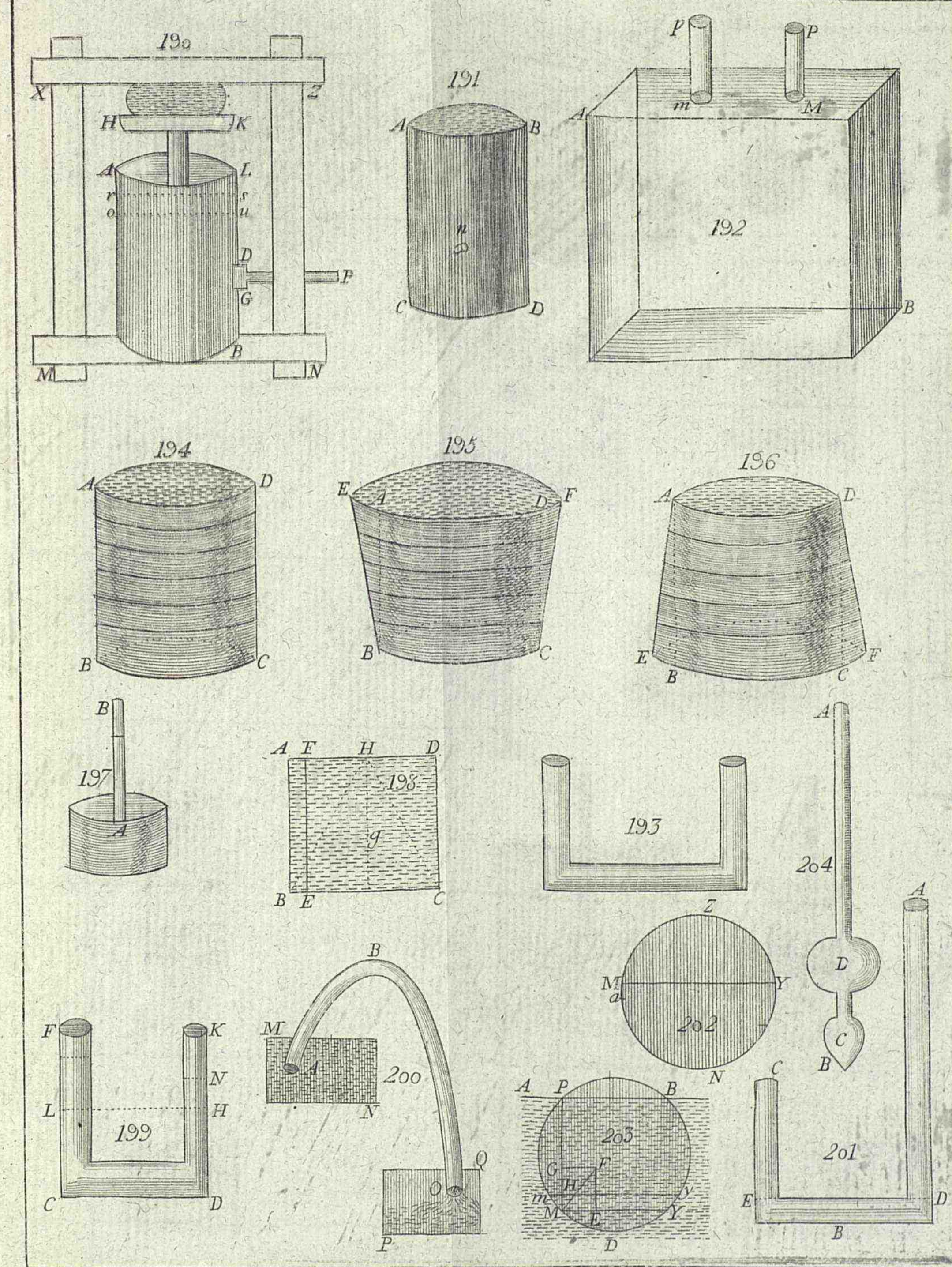
Lª VI

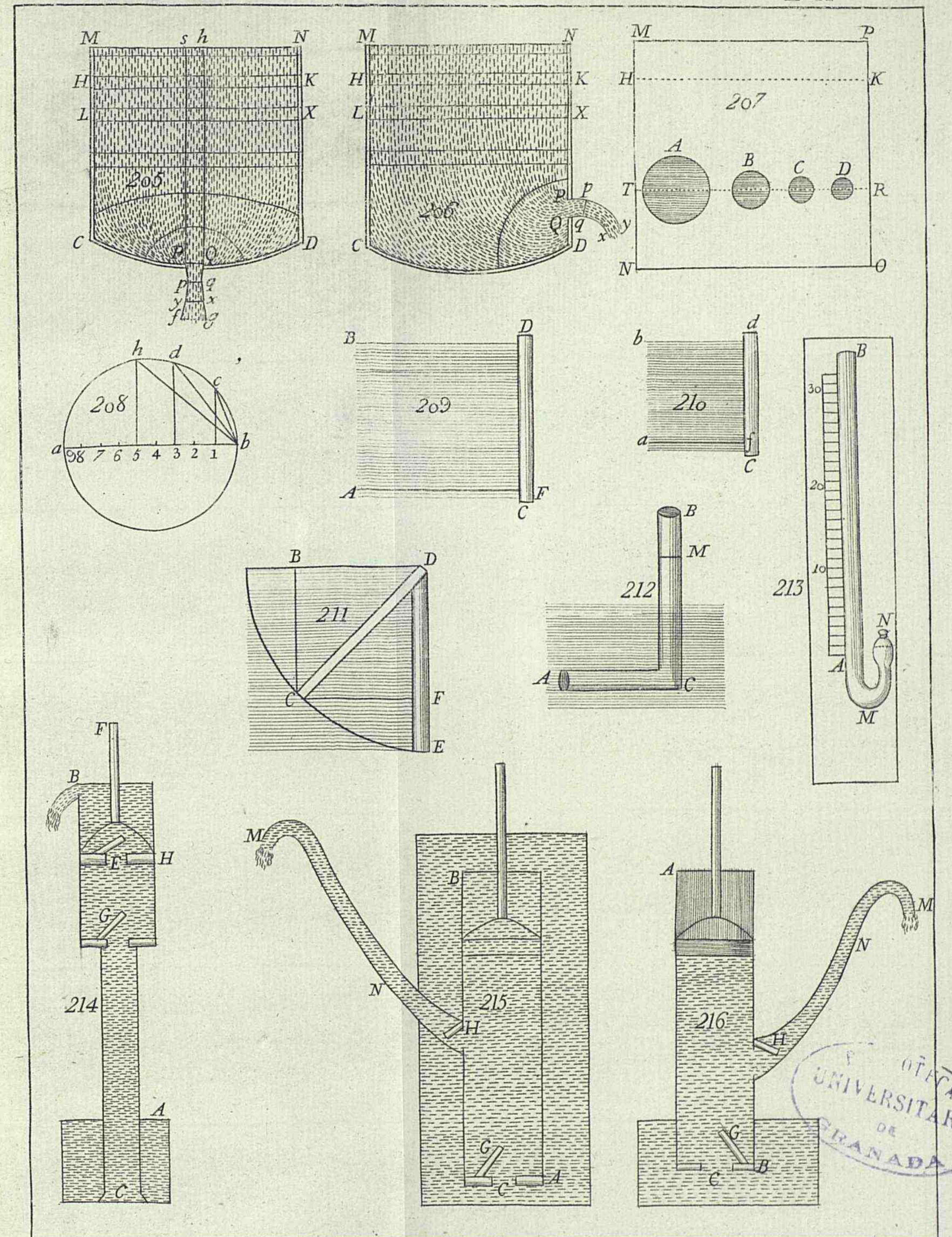

107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136


137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166


167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189

Lª IX





UNIVERSITARIA DE GRANADA