

Análisis del comportamiento dinámico de estructuras de mampostería y macizos rocosos por el Método de los Elementos Discretos

Trabajo fin de Master
MASTER DE ESTRUCTURAS

Universidad de Granada



Alumno: Carlos Molina Mesa
Tutor: Dr. Rafael Bravo Pareja



Abstract (english)

Discontinua simulations are becoming an important part of Computational Mechanics to the extent that Computational Mechanics of Discontinua is becoming a separate subdiscipline of computational mechanics. Among the most widely used methods of Computational Mechanics of Discontinua are Discrete Element Method (DEM), Molecular Dynamics Methods, DDA, Finite-Discrete Element Methods, etc. In this master's thesis we will focus on masonry arcs and rock masses using the Discrete Element Method (DEM) and the Discontinuous Deformation Analysis (DDA, Shi 1985

First the basis of DDA and Block Systems Kinematics will be presented. Some masonry arcs are analyzed comparing numerical and experimental results obtained from experiments (Delbecq 1982). The same process is used for rock masses under dynamics loads.



Resumen

Las simulaciones discontinuas se están convirtiendo en una parte importante de la Mecánica Computacional, tanto que los Métodos Computacionales Discontinuos son ahora una sub disciplina de la Mecánica Computacional. Entre los métodos de Mecánica Computacional Discontinua más ampliamente utilizados están el Método de los Elementos Discretos, los Métodos Dinámicos Moleculares, Análisis de las Deformaciones Discontinuas y el Método de elementos Finitos-Discretos, entre otros. En este trabajo nos centraremos en el Método de los Elementos Discretos y más concretamente en el DDA, Análisis de las Deformaciones Discontinuas (Shi 1985) aplicado a macizos rocosos y arcos de mampostería.

Primero se expondrán las bases del DDA y la Mecánica de Contacto. Posteriormente se analizarán diversos arcos de mampostería comparando resultados experimentales con los obtenidos numéricamente mediante una técnica de refinamiento propia. Se termina aplicando el mismo razonamiento de cálculo a macizos rocosos cargados dinámicamente.



Contenido

1. INTRODUCCION	5
2. ESTADO DEL ARTE	9
3. ANALISIS DE LAS DEFORMACIONES DISCONTINUAS. DDA (DISCONTINUOS DEFORMATION ANALYSIS)	13
1. INTRODUCCIÓN	13
2. DDA VS MEF	14
3. FORMULACIÓN	16
4. ESTRUCTURA DE DDA	17
5. ESQUEMA PROCESO DDA	20
6. PROBLEMAS Y MEJORAS EN EL DDA	21
4. MECANICA DE CONTACTO	22
7. HISTORIA DE LA MECÁNICA DE CONTACTO	22
8. EL PROBLEMA DEL CONTACTO	23
9. FUNCIONAMIENTO Y CLASIFICACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE CONTACTO	28
<i>MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE</i>	29
<i>MÉTODO DEL PENALTI.</i>	34
5. EL FUNCIONAMIENTO DE LA MAMPOSTERÍA	36
6. LA ESTRUCTURA DE LOS BLOQUES	38
• ¿QUÉ TIPO DE CARGAS EXTERNAS E INTERNAS TENEMOS?	38
• ¿CÓMO SE DIVIDE LA ESTRUCTURA?	40
• VALIDACIÓN DEL MÉTODO	41
7. PROBLEMAS DE MAMPOSTERIA	45
• CASO 1: ARCO ENTERRADO BAJO CARGAS VERTICALES Y RELLENO	45
• CASO 2: INFLUENCIA QUE PRODUCE EL GROSOR DEL TERRAPLEN EN LA ESTABILIDAD DE UN ARCO OVALADO	50
• CASO 3: INFLUENCIA DE UNA CARGA CONCENTRADA EN LA ESTABILIDAD DE UN ARCO OVALADO	56



<u>8.</u>	<u>PROBLEMAS DE MACIZOS ROCOSOS</u>	<u>59</u>
•	CASO 1: MACIZO ROCOSO 330 BLOQUES	59
•	CASO 2: MACIZO ROCOSO 3500 BLOQUES	62
<u>9.</u>	<u>CONCLUSIONES Y FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN</u>	<u>65</u>
<u>10.</u>	<u>BIBLIOGRAFIA</u>	<u>66</u>



1. INTRODUCCION

En el ámbito de la ingeniería civil y la arquitectura existe en muchos países una gran herencia que debe ser evaluada, mantenida y preservada. En particular, los arcos de mampostería son una de las más antiguas soluciones estructurales conocidas. Probablemente esto se deba a que su geometría y construcción es simple, sumado a su capacidad intrínseca de hacer trabajar al material en compresión.

El arco de mampostería como solución arquitectónica ya era utilizado por los romanos tanto para edificaciones enterradas o sobre el terreno. Los primeros intentos de analizar el comportamiento de arcos de mampostería estaban basados en consideraciones heurísticas y en la experiencia, destacando a Vitrubio en el siglo I A.C. Leonardo da Vinci (sobre el 1500) hizo los primeros estudios basados en el análisis teórico de la estabilidad de arcos basados en trabajos experimentales. Pero no sería hasta principios del siglo XIX cuando los métodos basados en el análisis geométrico fueron usados para diseñar arcos de mampostería.

Durante la Segunda Guerra Mundial, fueron desarrollados métodos de desarrollo analítico, considerando el arco de mampostería como continuo, rígido y con resistencia alta a la compresión. Así se consiguió calcular la posibilidad de cruzar un tanque a través de un puente basado en arcos de mampostería.

Los primeros artículos que se escribieron centrados en el tema de estructuras de mampostería y macizos rocosos se basaban en el Método de los Elementos Finitos, no considerando la discontinuidad entre los elementos ya sean bloques o rocas. Sin embargo el Método de los Elementos Discretos permite estudiar el comportamiento mecánico de estas estructuras basado precisamente en rozamiento y fricción. Dicho contacto puede producirse directamente entre bloques secos o a través de una fina capa de material elastoplástico. Por lo tanto, como consecuencia del contacto, muestran un comportamiento complejo, no lineal y discontinuo. Tanto los métodos gráficos como las formulaciones analíticas no son capaces de modelar este comportamiento y es necesario usar métodos numéricos hasta para las geometrías y cargas más simples.



Este método posee un coste computacional menor que los anteriores. Al mismo tiempo es válido para el análisis geométrico y el comportamiento mecánico.

Las estructuras de mampostería son estructuras, a día de hoy, poco analizadas.

De acuerdo con los estudios de Fernández Casado en 2008, en España hay unos dieciséis acueductos de la época Romana. El 30% de ellos (Almuñécar, Tarragona, Segovia y Baelo) presentan unas condiciones de conservación relativamente buenas, habiendo transportado agua hasta fechas recientes.

Con el paso de los años han ido apareciendo una serie de patologías que han dado que pensar en los posibles fallos que podían llegar a ocurrir. En algunos casos, esas primeras patologías fueron solo un aviso de lo que serían posteriores fallos, como ocurriría en el terremoto de L'Aquila (2009), donde se cobraron 309 víctimas, siendo afectada la totalidad de las edificaciones basadas en mampostería. Una catástrofe de semejante magnitud implica un gran coste económico y lo que es más importante, un gran riesgo al que se expone la integridad física de las personas.

Dado que en las estructuras de mampostería abundan el número de discontinuidades entre elementos, el Análisis de las Deformaciones Discretas (Discontinuos Discrete Analysis, DDA) encaja perfectamente para este estudio. Así este método usa los desplazamientos como incógnitas y resuelve las ecuaciones de equilibrio de la misma manera que las matrices de análisis que se incluyen en el método de los elementos finitos [4]. Aunque está básicamente realizado para sistemas donde hay discontinuidad de bloques, esto no impide que se ajuste a las reglas básicas de la mecánica computacional.

En los últimos años ha habido un creciente interés en el análisis estructural de estos trabajos, ya que son una importante herencia que debe ser preservada debido a su carácter histórico y la importancia que han tenido en la agricultura española.

Otro de los argumentos por los que merece la pena estudiar este tipo de configuraciones está basado en los cambio de uso. Uno de los casos más frecuentes es el de los puentes. Así, un puente que soportaba en origen un tráfico de carruajes, ha pasado a soportar una carga mucho mayor como puede ser la de vehículos.



Por otro lado hay dos tipos de estructuras que coinciden en complejidad constructiva, económica y composición. Estas son las escolleras y las presas de material suelto.

Las presas de material suelto tienen múltiples usos, entre ellos: abastecimiento de agua, generación de energía hidroeléctrica y protección contra inundaciones. Por supuesto requieren de unas exigencias básicas de estabilidad e impermeabilidad. Aunque el número de presas de material suelto en el mundo es elevado, el porcentaje de fallos es pequeño, pero las consecuencias de un fallo en una presa son devastadoras (Presa de Tous, 1982).

Las escolleras son estructuras no lineales constituidas por bloques pétreos, obtenidos generalmente mediante voladura, con formas más o menos prismáticas y superficies rugosas. Son colocados dentro del agua para aumentar el flujo marítimo en una dirección determinada o reducirlo, evitando así efectos no deseados de decantación.

En ambos casos prima la composición granular, que entra dentro del estudio del método de los Elementos Discretos, aunque no profundizaremos en este campo.

Las simulaciones de la deformación de un gran número de bloques desde una aproximación discreta, como el Método de los Elementos Discretos (DEM, Cundall, 1971) o el Análisis de las Deformaciones Discontinuas (DDA, Shi, 1988, 1993), requiere una validación rigurosa usando soluciones analíticas y el estudio de distintos casos.

En este trabajo se propone el análisis del comportamiento de arcos de mampostería compuestos de bloques, que nos brindan la oportunidad de hacer un estudio por el Método de las Deformaciones Discontinuas (DDA).

La técnica permite captar con exactitud deformaciones y tensiones internas con un coste computacional razonable. Para ello se usarán los experimentos realizados por CEBTP Solen para la 'Societe National des Chemins de Fer' en 1980. En estos experimentos se comprueba la estabilidad de un arco en dos dimensiones con diferentes geometrías, número de bloques y cargas aplicadas.

Así tendremos los siguientes casos:

- ✚ Caso 1. Empuje del relleno más peso de un vehículo, para la predicción del fallo en función del número de bloques.



- ✚ Caso 2. Relleno más terraplén, para conocer la influencia del grosor del terraplén.

- ✚ Caso 3. Relleno más carga concentrada, para saber la influencia de la intensidad de carga.

El término de relleno se refiere al terreno en los laterales y encima del arco, el último compuesto de las capas horizontales denominado terraplén. El relleno estabiliza en un puente o constituye la carga del terreno en los túneles. La carga puntual representa el peso transmitido por un vehículo sobre dicho puente.

Los resultados de los experimentos son comparados con aquellos de la simulación numérica. A pesar de la falta de datos estadísticos (solo una o dos simulaciones son realizadas por caso) y de las incertidumbres de los datos (dimensiones, propiedades del material, etc.), los resultados numéricos y experimentales son muy cercanos. Estas comparaciones validan la aplicabilidad de los métodos numéricos discontinuos para estructuras de mampostería bajo diversos tipos de carga.



2. ESTADO DEL ARTE

Para llegar al actual estudio de estructuras por el método de los elementos discretos se ha realizado una enorme evolución en los últimos 50 años.

Todo empezó con el estudio de métodos continuos como los que se dieron en los años 57, 62 y 63 por Mindlin, Rowe y Hendron respectivamente. La formulación de los problemas continuos está basada en las leyes constitutivas. El modelo continuo en sí es solamente una aproximación del fenómeno físico real [1]. El supuesto más importante y necesario para la validación del modelo continuo es la suposición de que la escala del problema o la escala de parte del problema práctico es más grande que la longitud característica definida por la microestructura del material. Para el análisis elástico de sólidos la longitud característica es una orden de magnitud más importante que el tamaño de las moléculas que constituyen el material. Por lo tanto la mayoría de los problemas prácticos están correctamente representados por el modelo continuo. Sin embargo consideremos un problema simple como puede ser el rellenar un cuenco con aceitunas. La pregunta es: ¿Cuántas aceitunas pueden caber en un cuenco? Observamos que la escala del problema es similar a la longitud característica de la microestructura del problema. Así ejemplos como este se extienden en los campos de la ingeniería, industria y ciencia. El problema común de todos ellos es que el volumen de problema que representan es más grande o al menos similar al orden de magnitud del problema físico analizado. Por lo tanto las condiciones necesarias para aplicar un sistema de ecuaciones continuo no son satisfechas. Así los investigadores en años posteriores empezaban a plantearse la necesidad de un método diferente, donde las discontinuidades primaran a ciencia cierta.

La necesidad de desarrollar una formulación específica para los problemas basados en una gran cantidad de partículas, con la exigencia de no penetración y no tensión hizo que en 1968 Goodman, Taylor y Brekke compusieran para macizos rocosos una formulación de Elementos Finitos llamada 'Joint Element' o 'Zero-thickness Interface Element'. Es una derivación de la matriz de rigidez del elemento de unión, ellos usaron una ley constitutiva muy simple que consistía en dar unos valores fijos tanto para la rigidez a cortante como para la rigidez



normal [7]. Esta formulación presentaba dificultad en el modelado de discontinuidades y había restricciones en los grados de libertad permitidos.

Posteriormente en 1971 Cundall presentaría su Método de los Elementos Discontinuos, también llamado Método de los Elementos Distintos o Método de los Elementos Discretos, (Discontinuos Element Method; Distinct/Discrete Element Method. DEM).

La definición de la formulación del método de los elementos discretos (MED) está basada principalmente en dos leyes fundamentales de la mecánica clásica. Por una parte se basa en la ley fuerza desplazamiento, que relaciona dichas variables a través de una rigidez, y por otro lado encontramos la segunda ley de Newton que relaciona fuerzas con aceleración, es decir con variaciones dobles de desplazamientos.

En el Modelo de Cundall se tratan los problemas como si fueran dinámicos. De esta manera se asume que la fuerza de contacto es producida por la acción de los resortes que son aplicados en aquella esquina que penetra un lateral. Las rigideces normal y cortante son introducidas entre las respectivas fuerzas y desplazamientos en el modelo original. Además, para tener en cuenta el deslizamiento y separación de los bloques que están en contacto, introduce también la ley de la plasticidad. Para facilidad en los cálculos de las fuerzas de contacto debidas al deslizamiento de los bloques, asume que los bloques no cambian su configuración original. Así, para resolver las ecuaciones de todo el dominio, nunca ensambla las ecuaciones de equilibrio de los bloques en una ecuación mayor pero si las resuelve en un proceso paso a paso. Su técnica tiene dos grandes virtudes:

- 1) La memoria necesaria para almacenar los datos en un ordenador puede ser pequeña. Esto fue especialmente beneficioso en la época ya que aún no había ordenadores de gran potencia (principios de los 70).
- 2) La separación y deslizamiento que hay entre los elementos puede ser considerada fácilmente, ya que la matriz global nunca está ensamblada.

Por último comentar que la ecuación principal es de tipo hiperbólica, el sistema no puede convertirse en estabilizado incluso en los casos estáticos sino un amortiguador entraría en el sistema. Este modelo ha sido utilizado activamente hasta día de hoy, para proyectos de gran importancia.



Sería en 1974 cuando se diera por primera vez una reseña por parte de investigadores españoles, Serrano y Rodríguez, desarrollaron un modelo numérico para un tipo de discretización basada en conjuntos de discos y esferas.

Para hallar las fuerzas de contacto y desplazamientos producidas en este modelo, se calculan las condiciones de equilibrio asumiendo incrementos de las fuerzas de contacto, determinadas por un paulatino crecimiento de desplazamientos de los centros de las partículas.

Posteriormente, se continúa con el análisis de discos y esferas en dos dimensiones y tres dimensiones, siendo en 1979 cuando se introducen los modelos numéricos discretos para conjuntos granulares. A esto se le llama Método de los Elementos Discretos (Discrete Element Method, DEM, Cundall y Strack). La simulación numérica para este tipo de materiales es de gran interés práctico, y asimismo se trata de un problema de ingeniería que no es fácilmente abordable mediante otras técnicas de análisis numérico.

Este modelo se fundamenta en el uso de un código numérico explícito. Sus características principales son las mismas que el modelo original que él mismo formuló en 1971, la utilización de la ley fuerza desplazamiento y la segunda ley de Newton. Asimismo, el modelo establecido, tiene en cuenta el comportamiento viscoso del medio, pudiendo utilizarse por lo tanto para una amplia gama de problemas, tanto elásticos como visco elásticos. Luego por parte de Goodman, Taylor & Brekke en 1980 se desarrollarían métodos computacionales de desarrollo rápido para las uniones de elementos.

En 1985 se evoluciona desde dos vertientes diferentes a la vez, por un lado Williams, Análisis modal para deformaciones y por otro el método de las deformaciones discontinuas de Shi & Goodman.

Posteriormente Shi se terminaría de coronar como el padre del método de las deformaciones discontinuas (Discontinuous Deformation Analysis, DDA) entre los años 88 y 93. Mediante este método se analizaría la respuesta mecánica que tienen los bloques entre sí. El DDA es un método implícito que nos da la solución para desplazamientos no conocidos gracias a las interacciones que hay entre bloques usando el método del Penalti. Tiene múltiples características: Siempre hay equilibrio dinámico; no se permite la penetración entre bloques y no hay tensión dentro de cada espacio de tiempo; también se consigue la estabilidad computacional sin introducir amortiguación artificial.



Para problemas dinámicos, aunque el amortiguamiento no es introducido en el sistema, debido a que hay grandes espacios de tiempo usados en la integración numérica del dominio-tiempo, se da como resultado un amortiguamiento artificial.

De este modo debe ser considerado que este amortiguamiento es debido a las técnicas de integración para el dominio tiempo y no tiene nada que ver con las características mecánicas de los macizos rocosos.

Aunque el concepto fundamental no difiere mucho del mencionado anteriormente de Cundall, la principal semejanza está fundada en el proceso de solución adoptado en ambos métodos. Dicho de otro modo, el sistema de ecuaciones de los bloques y sus contactos están ensamblados en una ecuación global en el Método de Shi, cosa que no se cumple en el modelo de Cundall, como mencionamos anteriormente.

Tras el gran impacto ocasionado por el DDA, empiezan a desarrollarse derivaciones como las de Jing (1998), partiendo desde el método clásico, es decir, una unión entre el Método de los Elementos Distintos y el de las Deformaciones Discontinuas de Shi.

Solberg y Papadopoulos un año más tarde en la misma línea se encargarían de estudiar desde los elementos finitos la deformación de elementos discretos.

Entrando en el siglo XXI tenemos Hatzor & Feincurch con su validación DDA usando direct dynamic inputs (entradas dinámicas),

Doolin y Sitar en 2002 tratan la precisión del DDA para fuerzas impacto mientras que McLaughlin en 2003 establece los límites de aplicación de DDA para análisis dinámicos.

Como última reseña en este estado del arte, destacar el aumento en los últimos años de la potencia en los ordenadores que ha permitido grandes mejoras en las simulaciones relativas a la descarga de áridos (Pérez-Aparicio 2006) [14]. Así dicho incremento en la capacidad computacional nos ha dado la oportunidad de simulaciones sísmicas realistas de modelos bidimensionales tales como presas de material suelto (sin tener en cuenta el efecto hidrostático del agua).



3. ANALISIS DE LAS DEFORMACIONES DISCONTINUAS. DDA (DISCONTINUOS DEFORMATION ANALYSIS)

1. Introducción

La mecánica de contacto comienza con la necesidad de modelar estructuras discontinuas teniendo en cuenta su estructura real. Ya que hasta el momento se habían tratado este tipo de problemas con el Método de los Elementos Finitos, que considera las estructuras como un medio continuo.

En nuestro caso al estudiar los arcos de mampostería, tenemos en cuenta las discontinuidades entre bloques. Los métodos numéricos convencionales están mayormente basados en continuidad entre elementos, por lo tanto no es correcto usarlos en estos casos. Algunos enfoques desde un punto de vista continuo han sido puestos en uso en cimentaciones de arcos de mampostería pero estas aproximaciones son válidas para casos de carga simple, siendo siempre uniformes los espacios entre carga.

La única herramienta práctica para este tipo de problemas la daría Cundall (1976) con su 'Método de los elementos distintos' (Distinct Element Method, DEM). [8] Este método basado en un enfoque de fuerza sufre de ciertas limitaciones. Así no sería hasta 1988 cuando surgiera una alternativa al DEM, la nueva técnica desarrollada por Shi cambia el concepto dando los desplazamientos como incógnitas. De este modo se trata de contacto entre sólidos rígidos.

El DDA se presenta como una formulación implícita del DEM. Fue creado gracias a un algoritmo inverso que determinaba la mejor configuración que se le podía dar a un sistema de bloques cuyo conjunto tuviera una anomalía. Se partió en principio de las medidas de desplazamientos y deformaciones (Shi & Goodman, 1985) y posteriormente fue desarrollado con profundidad para realizar el análisis completo de las deformaciones de un sistema de bloques. (Shi, 1988).

Las primeras fórmulas usaban una representación simple de las deformaciones de bloques, con seis variables básicas (tres del movimiento del cuerpo rígido y



tres tensiones de componentes). Solo eran válidas para bloques triangulares (Shi, 1988; Jing, 1993).

Los estudios posteriores de Shi y Chang en 1993/94 usaban una discretización completa de bloques triangulares o de elementos de cuatro nodos, y es válido para cualquier forma de bloque y por lo tanto puso el método al mismo nivel que en los principios del Método de los Elementos Finitos.

Otras formulaciones similares fueron desarrolladas por Ghaboussi y Barbosa en el 1989/90, pero solamente eran válidas para bloques deformables de 4 nodos, se le llamó el Método de los Elementos Discreto-finitos (Discrete Finite Element Method, DFEM).

El Software para realizar estudios por este tipo de método es escaso, ya que no existe una empresa que se encargue de comercializarlo y mejorarlo. De este modo podríamos destacar programas Freeware como el DDA for Windows N.Sitar de la Universidad de Berkeley. En la actualidad es software dedicado mayormente a la investigación. Aun así es de fácil implementación, siendo posible aprovechar las rutinas de programas de elementos finitos.

2. DDA vs MEF

El rápido desarrollo de la potencia del procesador de los ordenadores (CPU), nos permite cada día aumentar la complejidad de los métodos numéricos. Entre otros, el Método de los Elementos Finitos (MEF) ha sido usado para estudiar elementos individualmente con resultados satisfactorios. Al intentar aplicar este método al problema que nos concierne comprobamos que los resultados no encajan con la realidad del sistema. Esto está fundamentado en que en el MEF se considera la estructura como un método continuo, sin tener en cuenta la estructura interna real es discontinua, y la estabilidad está basada en contacto y fricción. A su vez el comportamiento mecánico de cada bloque es determinante en el comportamiento global, de ahí que se realce en este trabajo la discontinuidad del medio.

A continuación voy a hacer un análisis a modo de resumen de las principales ventajas del DDA, tras ello, indicaré las similitudes y diferencias entre DDA y MEF.



Así podemos destacar como ventajas:

1. Aproximación perfecta de primer orden de desplazamientos
2. Fiabilidad. El cálculo es muy cercano a la descripción numérica y mecánica del fenómeno asociado con movimientos de bloques
3. No es necesario el crear 'trucos' para simular interacciones mecánicas reales.

El Método de las Deformaciones Discontinuas (DDA) se asemeja el Método de Elementos Finitos en varios aspectos a considerar a continuación:

1. Las ecuaciones de equilibrio son establecidas minimizando el total de energía potencial.
2. Se escoge los desplazamientos como incógnitas en ecuaciones simultáneas.
3. Se añade las submatrices de rigidez, masa y carga a la matriz de coeficientes de ecuaciones simultáneas.

Por otro lado podemos destacar diferencias entre DDA y el MEF:

1. En el Análisis de los Elementos Discontinuos (DDA) no hay necesidad de crear una continuidad en la frontera de los bloques
2. Las matrices de rigidez son más sencillas en el DDA que en el MEF.
3. Los bloques no requieren contacto entre vértices (DDA)
4. El número de contactos es mayor (MEF), por lo tanto aumenta el tiempo necesario para realizar los cálculos.



3. Formulación

El DDA se basa en las leyes de la mecánica clásica, más concretamente en el principio de Hamilton (Cundall, 1979). Este principio está fundamentado en los métodos energéticos, siendo un método energético como tal, construido a través de la función lagrangiana.

$$L(D, \dot{D}) = T(\dot{D}) - V(D)$$

Siendo $T(\dot{D})$ la energía cinética y $V(D)$ la energía potencial total del sistema de bloques.

La funcional acción, que es mínimo y único, lo hallamos integrando respecto a t :

$$A = \int_{t_0}^t L(D, \dot{D}) dt$$

Aplicando el principio variacional de mínima acción llegamos al siguiente sistema de ecuaciones, que corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$A = \int_{t_0}^t L(D, \dot{D}) dt \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{D}} - \frac{\partial V}{\partial D} = 0$$

Shi (1988) expresa en función de la energía potencial el lagrangiano del principio de Hamilton de cada bloque:

$$\frac{\partial V_i(D_i)}{\partial D_i} = 0; \quad i = 1, K, n$$

Dicho esto, indicar que si solamente se expresa el lagrangiano en términos de energía potencial tendríamos:

$$-\frac{\partial V}{\partial D} = 0$$

Desarrollando la ecuación de equilibrio dinámico:



$$M\ddot{D} + C\dot{D} + KD = F(D_i, t) \quad i = 1, K, n$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se nos indican los desplazamientos de los grados de libertad del centro de gravedad de cada bloque.

Mediante la aplicación del algoritmo de integración de Newmark se transforma la ecuación anterior en un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & L & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & L & K_{2n} \\ M & M & O & M \\ K_{n1} & K_{n2} & L & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ M \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M \\ F_n \end{pmatrix}$$

4. Estructura de DDA

1) Datos geométricos

- a. Numerar los bloques y sus correspondientes límites
- b. Definir el número de vértices y coordenadas punto a punto de un bloque. Posteriormente clasificamos el tipo de bloque. Por último se almacenan en una matriz de dos dimensiones
- c. Definir el número de vértices límites y sus coordenadas

2) Datos mecánicos

- a. Hay que tener claro cuántos tipos de materiales estamos tratando en el problema. Luego se analizarán su Módulo de Young, radio de Poisson y densidad.
- b. Fuerzas a las que son sometidas los cuerpos
- c. Parámetros del Penalti. Ángulo de fricción.

3) Condiciones de contorno



- a. Definición de los movimientos de contorno
 - b. Cargas puntuales
 - c. Cargas lineales
 - d. Restricciones
 - e. Esfuerzo inicial
 - f. Velocidades iniciales
- 4) Cálculo de las propiedades geométricas
- a. Área, centro de gravedad, inercia.
- 5) Construcción de matrices y vectores debido a
- a. Cargas de inercia
 - b. Cargas del cuerpo
 - c. Restricciones iniciales
 - d. Cargas puntuales
 - e. Cargas lineales
- 6) Búsqueda de contactos
- a. Criterio de búsqueda de contactos
 - b. Definición inicial de contactos
- 7) Matrices de contacto
- 8) Matrices globales
- 9) Resolución del sistema



10) Actualización de posiciones

11) Comprobación de contactos

12) Si hay más penetraciones entre piezas de las necesarias, se debe repetir el espacio-tiempo anterior y reducir su tamaño

- a. Decrecer los espacios-tiempos hasta que los contactos converjan
- b. Después de la convergencia se debe incrementar el tiempo
- c. Actualizar posiciones para el primer espacio-tiempo

13) Convergencia

- a. Si hay un contacto cercano a otro. Se calculan el número de contactos y se repite de nuevo
- b. Si el número de contactos es suficiente hay convergencia

14) Problemas

- a. Si el número de cuerpos es muy alto, la convergencia es un problema y el espacio-tiempo se hace muy pequeño
- b. Dependiendo del tipo de problema se define la flexibilidad del criterio de contacto



5. Esquema proceso DDA

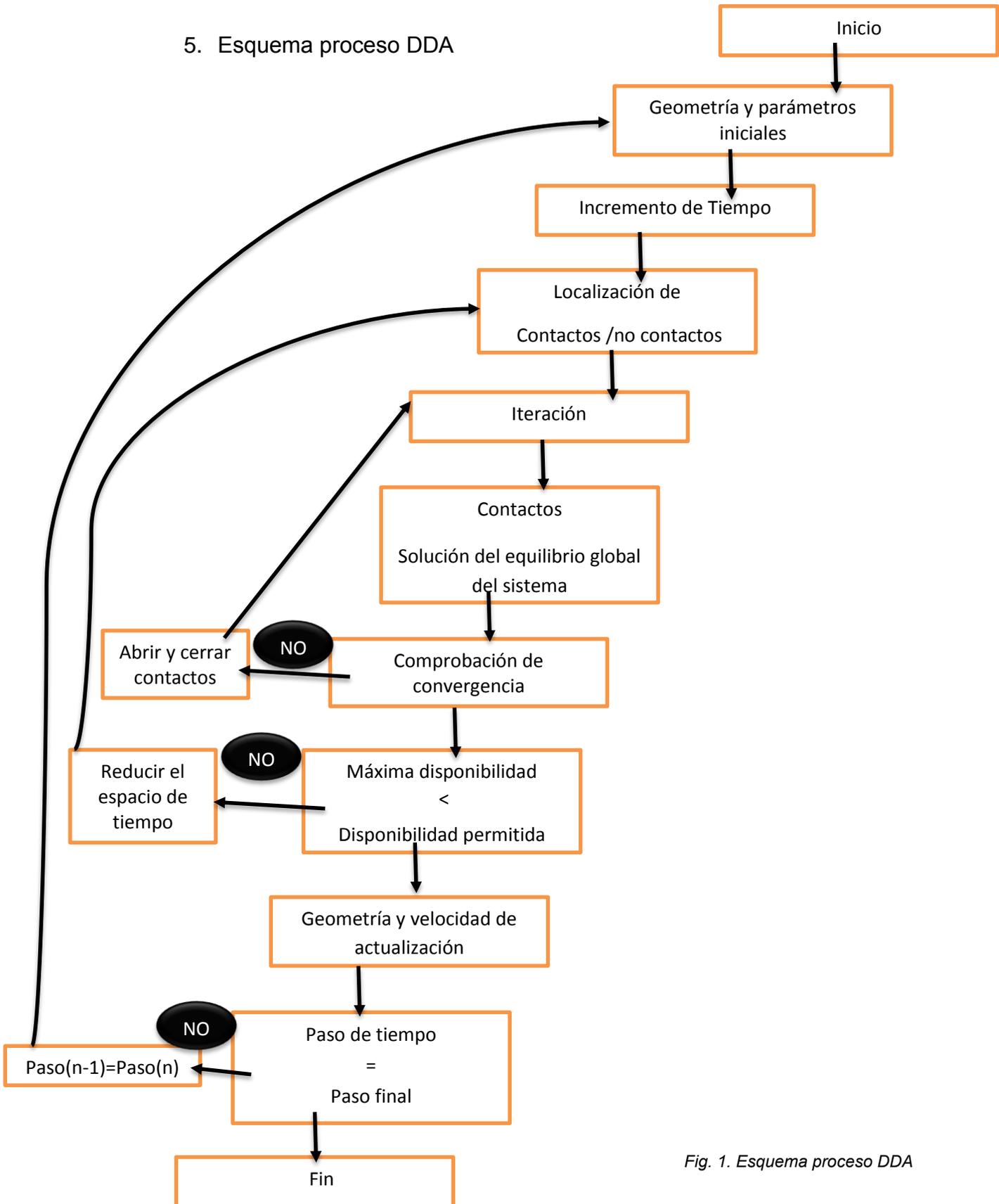


Fig. 1. Esquema proceso DDA



6. Problemas y mejoras en el DDA

El Método de las Deformaciones Discontinuas (DDA) es una alternativa a los métodos que se habían estado utilizando anteriormente basados en el Método de Elementos Continuos. Si bien su eficacia está demostrada, aún hay una serie de problemas y mejoras que considero importante mencionar.

El primer problema que observo reside en la solución por el método del penalti en la matriz $[K]$ (similar a la matriz de rigidez en el método de los elementos finitos). Originalmente Shi propone esta solución, pero posteriormente adopta un intervalo de tiempo y la matriz de masas. Es difícil estimar la cantidad de intervalos o contactos por el método del penalti antes del análisis. A su vez tampoco podemos aproximar para un problema general dicha relación. Sin embargo en las posteriores simulaciones comprobaremos que cuando hay una gran cantidad de bloques un intervalo de tiempo fuera de lugar puede afectar el desplazamiento.

Otro posible problema reside en la no penetración entre bloques, criterio que controla la convergencia. Shi usa un muelle que se alinea a lo largo del vector de desplazamiento para eliminar las penetraciones entre bloques. En la implementación en ordenador de este criterio de no penetración, se usa un pequeño control de pequeñas penetraciones. Si la penetración es más pequeña que su valor de control, se asume que el criterio de no penetración es satisfactorio. [13] Este enfoque es necesario porque consume bastante tiempo y a veces es imposible conseguir penetración cero. Particularmente he intentado buscar un pequeño valor de control que no implique grandes divergencias o errores en los resultados. Sin embargo es difícil determinar un control de dicho valor de manera aceptable, ya que se trata de un problema arbitrario.



4. MECANICA DE CONTACTO

7. Historia de la mecánica de contacto

Desde la antigüedad el hombre se ha cuestionado la naturaleza del contacto y la influencia en él en su vida diaria. Así los primeros grabados sobre piedra que ilustran este problema datan del Antiguo Egipto. En ellos se refleja el estudio de la necesidad de un paulatino aumento de hombres necesarios en el transporte de bloques para la construcción de las pirámides, dependiendo del peso de dicho bloque. De este modo se vencía a una fuerza de rozamiento originada en el contacto de bloque-suelo.

A lo largo de la historia se pueden destacar ingenieros y científicos famosos que tocaron el tema de la fricción, como pueden ser Leonardo da Vinci o Charles-Augustin de Coulomb. Sin embargo no sería hasta 1882 cuando Heinrich Hertz resolvió el problema del contacto entre dos cuerpos elásticos con superficies curvas.

Ya a mediados del siglo XX surgiría el Método de los Elementos Finitos y posteriormente aplicaciones al problema del contacto. Ya a finales de los 70 comienza a verse el problema del contacto desde otro punto de vista gracias a Cundall y su Método de los Elementos Discretos.

A día de hoy se están estudiando distintos tipos de problemas como el Contacto electromecánico y termomecánico, la Interacción fluido-estructura, los modelos micromecánicos, las Cimentaciones de estructuras de todo tipo y por último entre una larga lista de la que solamente hemos mencionado algunos, tendríamos el contacto entre partículas y flujos granulares siendo este el objetivo de nuestro trabajo.



8. El problema del contacto

A día de hoy podemos decir que el problema del contacto implica:

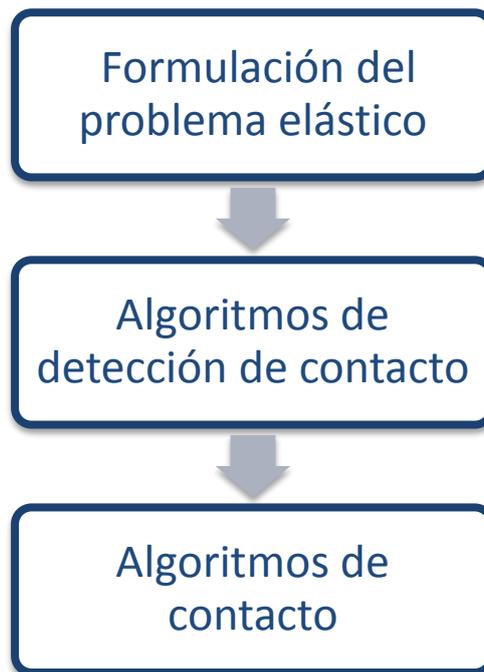


Fig. 2. Esquema problema del contacto

Primero es necesario la formulación del problema elástico, posteriormente se pasa a detectar los posibles cuerpos que pueden interactuar durante el proceso de deformación y se añaden al problema elástico las restricciones de contacto.

Antes de continuar con el problema del contacto en sí, debemos definir que es el contacto.

Cuando dos cuerpos interactúan a través de sus fronteras se produce el llamado contacto. Dicho contacto no puede permitir la penetración de un cuerpo en otro, así se produce siempre y cuando se cumplan las condiciones a continuación:

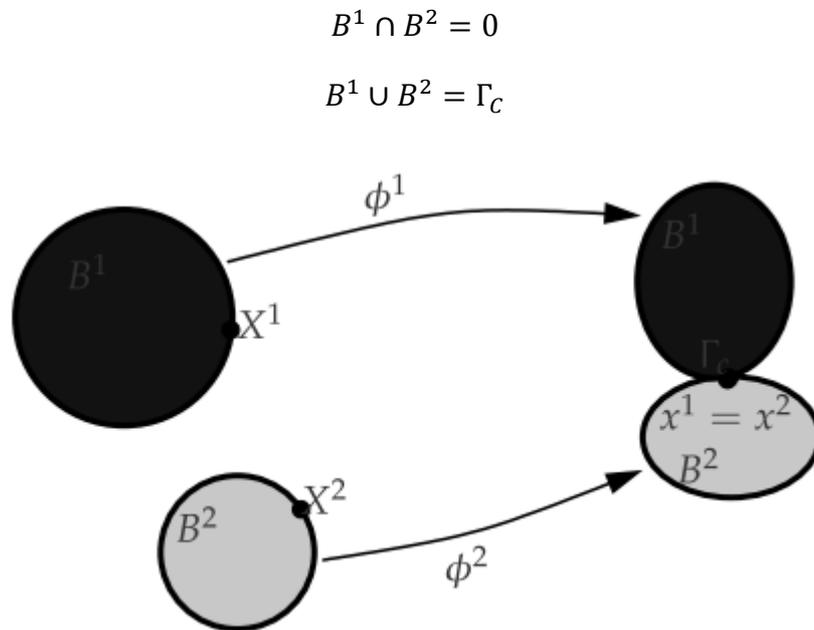


Fig. 3. Representación problema del contacto

Estas condiciones están basadas en no linealidad y su resolución no puede ser escrita de forma explícita, de este modo recurren a formulaciones equivalentes.

La distancia mínima entre los puntos del contorno de ambos cuerpos debe ser mayor o igual a cero.

$$g_N = (x^2 - \bar{x}^t) \cdot \bar{n}^1 \geq 0$$

Pondremos un ejemplo de la necesidad de recurrir a algoritmos de detección de contacto y a algoritmos de contacto.

Dado dos cuerpos elásticos B^α , $\alpha = 1, 2$, cada uno de ellos ocupa un dominio cerrado $B^\alpha \subset \mathbb{R}^2$:

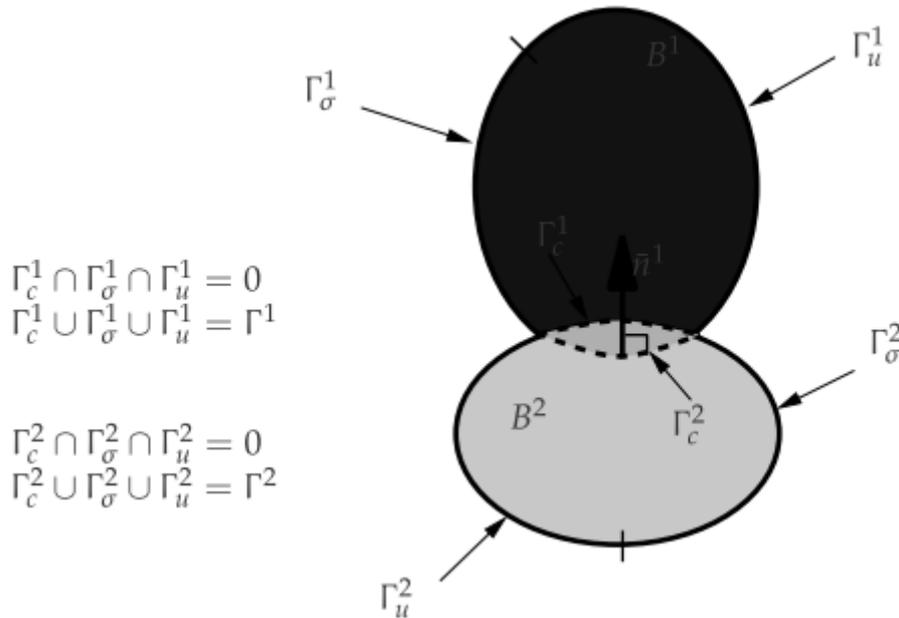


Fig. 4. Contacto entre dos cuerpos

Siendo:

Γ_σ^∞ Tensiones prescritas;

Γ_u^∞ Desplazamientos prescritos;

Γ_u^∞ Frontera donde los dos cuerpos entran en contacto

Γ_σ^∞ Se caracteriza por no ser conocida a priori. Por condición de contacto $\Gamma_c^1 \equiv \Gamma_c^2 \equiv \Gamma_c$. Tampoco son conocidos en esta frontera ni los desplazamientos ni las tensiones.

1. Contacto normal

La distancia entre los puntos de los contornos de los cuerpos es mayor o igual a cero, es decir no hay penetración entre cuerpos:

$$(x^2 - \bar{x}^1) \cdot \bar{n}^1 \geq 0$$

El vector normal \bar{n}^1 está asociado con el cuerpo B^1 . Sin embargo \bar{x}^1 es desconocido. Para relacionar cada punto se usa el problema de la mínima distancia, dado un punto $x^2 \in \Gamma^2$ se puede encontrar un punto $\bar{x}^1 \in \Gamma^1$ tal que la distancia sea mínima:



$$d(\psi) = \|x^2 - \bar{x}^1\| = \min_{x^1 \in \Gamma^1} \|x^2 - x^1(\psi)\|$$

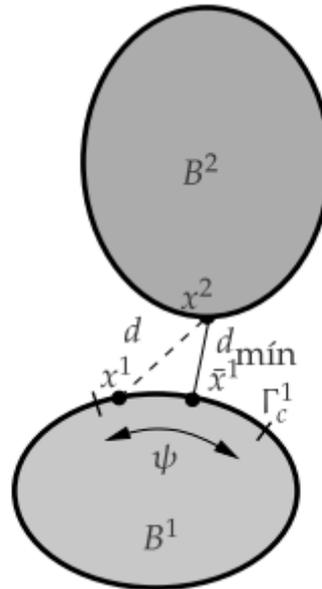


Fig. 5. Contacto normal entre dos cuerpos

El punto $x^1(\psi)$ es la proyección ortogonal del punto x^2 en la superficie Γ_c^1 .

Una vez definido el punto \bar{x}^1 se puede calcular \bar{n}^1 y definir la condición de no penetración como expusimos al principio del capítulo:

$$g_N = (x^2 - \bar{x}^1) \cdot \bar{n}^1 \geq 0$$

2. El contorno del contacto

En el problema del contorno del contacto se añaden restricciones cinemáticas debido al contacto.

En el problema de Signorini se trata la interacción de un cuerpo con una frontera rígida:

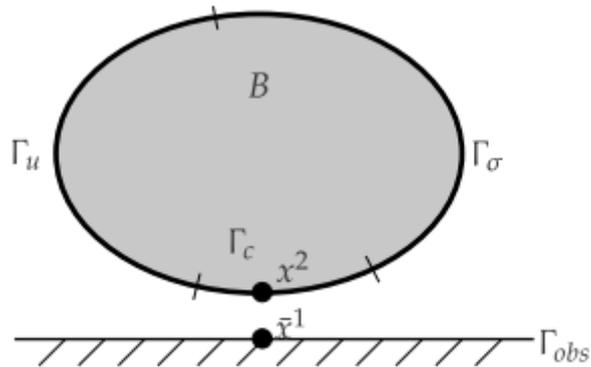


Fig. 6. Problema del contorno del contacto

Siendo las ecuaciones más relevantes:

- ✓ Ecuación de Elasticidad

$$-\Delta\sigma = \bar{f} \text{ en } B$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$$

$$\sigma(u) = \mathcal{C}[\varepsilon(u)]$$

- ✓ Condiciones en la frontera

- Desplazamientos (Dirichlet)

$$u = 0 \text{ en } \Gamma_u$$

- Tensión (Neumann)

$$\sigma \bar{n} = \bar{t} \text{ en } \Gamma_\sigma$$

- Condiciones de contacto (Kunh-Tucker)

$$u_N - g \leq 0$$

La distancia entre los cuerpos es siempre ≥ 0



$$\rho_N \leq 0$$

No existen tracciones entre cuerpos

$$(u_N - g)\rho_N = 0$$

Condición complementaria

La condición complementaria indica que en caso de contacto la distancia es cero y en caso de separación de cuerpos la tensión de contacto es nula. Gráficamente estas condiciones se expresan de la siguiente manera:

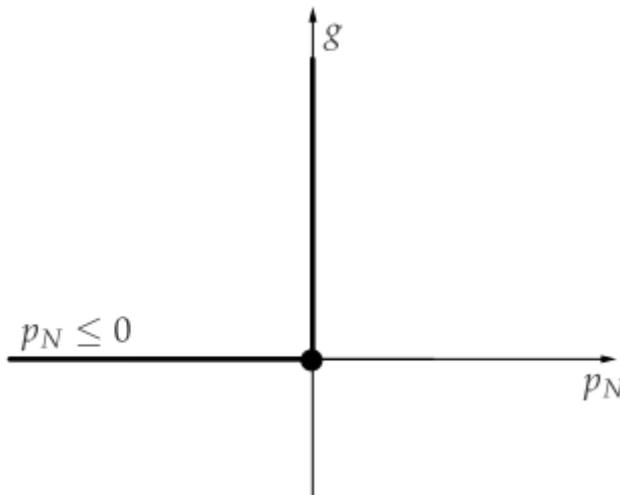


Fig. 7. Condiciones de Kunh-Tucker

9. Funcionamiento y clasificación de los algoritmos de contacto

El problema del contacto da lugar a un problema de minimización de la energía total, que hace que pueda ser tratado por una gran variedad de técnicas de optimización. Así hay diversos métodos de afrontar un problema de contacto, destacando algunos de ellos tendríamos:

- ✓ Método de los multiplicadores de Lagrange
- ✓ Método del penalti.
- ✓ Método de los Multiplicadores de Lagrange aumentados.



- ✓ Método de Nitsche.
- ✓ Método de barrera.
- ✓ Método de las restricciones cruzadas.

Nos centraremos en los 2 primeros.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Se considera el problema:

Minimizar Π

Sujeto a: $g_N \geq 0$ en Γ_c

Se formula el problema sin restricciones gracias a los multiplicadores de Lagrange:

Minimizar $\Pi + \lambda_{NgN}$

Para un sistema continuo la expresión de la energía potencial debida al contacto es:

$$\Pi^c = \oint_{\Gamma_c} \lambda_{NgN} d\Gamma$$

Dependiendo el funcional de desplazamientos y fuerzas:

$$\Pi^{lag}(u - v, \lambda_N) = \Pi(u - v) + \int_{\Gamma_c} \lambda_{NgN} d\Gamma$$

Como Π^{lag} es convexa existe solución única al problema, constituyendo un punto de silla, mínimo para la variable desplazamientos y máximo para λ_N

A continuación se muestra un ejemplo consistente en un cuerpo elástico, en contacto con una frontera rígida, representado por medio de un resorte de 1 grado de libertad.

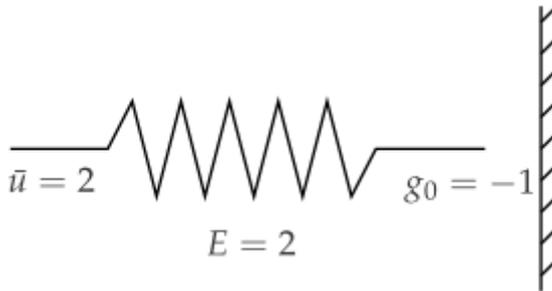


Fig. 8. Cuerpo elástico con frontera rígida

El resorte posee un módulo de Young $E = 2$ y está sujeto a un desplazamiento prescrito de valor $\bar{u} = 2$ en su extremo izquierdo con un desplazamiento incógnita en su extremo derecho. Este extremo derecho está inicialmente a una distancia $g_0 = -1$ del obstáculo. Por lo tanto, para este problema simplificado, la energía almacenada Π en el resorte viene dada por:

$$\Pi = \frac{E}{2} (u - \bar{u})^2 = (u - 2)^2$$

La función distancia es:

$$g_N(u) = u + g_0 = u - 1$$

Que da lugar al siguiente funcional Lagrangiano:

$$\Pi^{lag}(u, \lambda_N) = \Pi + \lambda_N g_N = (u - 2)^2 + \lambda_N (u - 1)$$

Donde $\lambda_N > 0$ es la fuerza de contacto desarrollada en el extremo derecho del muelle. En este caso se puede representar el valor del funcional con respecto a las variables u y λ_N y se aprecia un punto de silla para $\lambda_N = 2$ y $u = 1$.

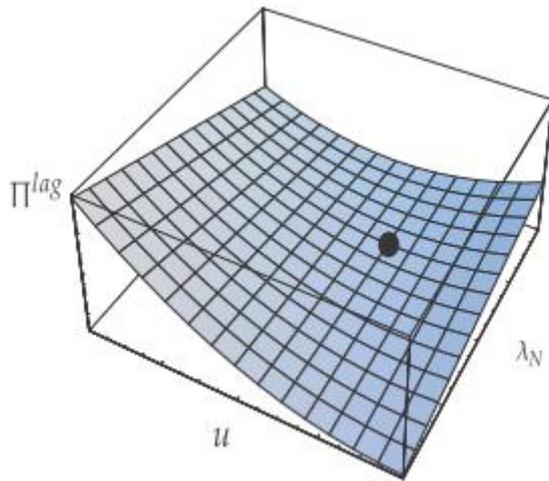


Fig. 9. Funcional de Energía. Multiplicadores de Lagrange.

Este punto se puede también obtener derivando el funcional Π^{lag} con respecto a u y a λ_N :

$$\frac{d\Pi}{du} = 2(u - 2) + \lambda_N = 0$$

$$\frac{d\Pi}{d\lambda_N} = (u - 1) = 0$$

La solución del sistema es: $u = 1$ y $\lambda_N = 2$

$$A(D, D) = \int_{t_0}^{t_1} L(D, D) dt$$

Restringido a:

$$g_N \geq 0 \text{ en } \Gamma_c$$



Aplicación a DDA

Partiendo de la formulación inicial de DDA, recordando el principio de Hamilton se trata de buscar el mínimo de la funcional acción:

$$A(D, D) = \int_{t_0}^{t_1} L(D, D) dt$$

Restringido a:

$$g_N \geq 0 \text{ en } \Gamma_c$$

Aplicando técnicas de cálculo de variaciones con extremos condicionados se obtiene la siguiente función de energía:

$$\Pi^{lag} = \Pi + \int_{r_c} \lambda_{NgN} = \Pi + \Pi^c$$

Para el caso de estudio de contacto entre discos rígidos, la superficie de contacto se reduce a un punto luego Π^c se transforma en λ_{Ng}

La solución del problema debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \Pi^{lag}}{\partial [D]^T} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^{lag}}{\partial \lambda_N} = 0$$

Así el funcional de energía potencial adquiere la siguiente expresión:



$$\Pi^c = \lambda_{Ng}(D)$$

El funcional depende tanto de λ_N como de los desplazamientos D. Derivando:

$$\frac{\partial \Pi^{lag}}{\partial [D]^T} = \frac{\partial \Pi}{\partial [D]^T} + \frac{\partial g(D)}{\partial [D]^T}$$

$$\frac{\partial \Pi^{lag}}{\partial \lambda_N} = g(D)$$

Matriz de rigidez:

$$\begin{pmatrix} K & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}$$

Se satisfacen las restricciones de manera exacta

Se producen problemas de mal condicionamiento debido a la existencia de ceros en la diagonal de la matriz. Para ello se recurre a la condensación de la matriz K en:

$$KD + G^T \lambda_N = F$$

$$GD = H$$

$$GD = GK^{-1}[F - G^T \lambda_N] = H$$

$$GK^{-1}G^T \lambda_N = GK^{-1}F - H$$

$$K_{\lambda_N} \lambda_N = F_{\lambda_N}$$



Método del penalti.

En este método se eliminan las restricciones de la formulación variacional, así nos quedaría un problema de optimización sin restricciones, donde la energía potencial debida al contacto queda definida como:

$$\Pi^c = \int_{r_c} \epsilon_N(g)^2 d\Gamma$$

$\epsilon_N > 0$ Es el parámetro de penalti y lo que hay entre el paréntesis debe ser positivo o de lo contrario es nulo.

$$\Pi^{pen}(u) = \Pi + \epsilon_N(g)^2 = (u - 2)^2 + \epsilon_N((U - 1))^2$$

El método del Penalti elimina la necesidad de derivar con respecto a dos variables, con la ventaja de que conserva su convexidad. Pero con la desventaja de que la relación penetración/fuerza de contacto no satisface las condiciones de Kuhn-Tucker.

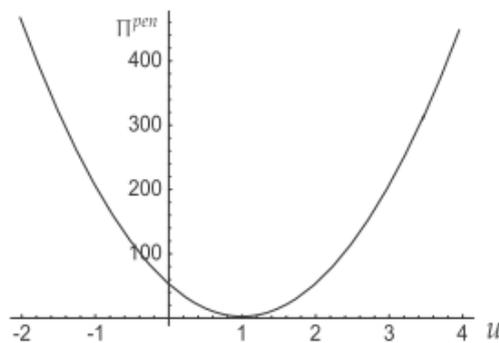


Fig. 10. Funcional de Energía. Método del Penalti

Aplicación a DDA

La condición de contacto ha sido sustituida por un resorte elástico de rigidez, siendo el funcional de energía:



$$\pi^{pen} = \pi + \int_{\Gamma_c} \epsilon_N \langle g \rangle^2 d\Gamma = \Pi + \Pi^c$$

Para el caso de estudio de contacto entre discos, la superficie de contacto se reduce a un punto por que Γ_c se transforma en:

$$\Pi^c = \epsilon_N \langle g \rangle^2$$

La solución del problema será aquella que satisfaga:

$$\frac{\partial \Pi^{pen}}{\partial [D_i]^T} = \frac{\partial \Pi}{\partial [D_i]^T} + 2\epsilon_N \langle g \rangle \frac{\partial g(D_i)}{\partial [D_i]^T} = 0$$

Siendo la matriz de Rigidez:

$$K \cdot D = F$$

Observaciones:

$K > 0$

Nº de condicionamiento $\gg 1$

Dificultad de elección del parámetro de penalti ϵ_N

Fuerzas de contacto dependientes de ϵ_N



5. EL FUNCIONAMIENTO DE LA MAMPOSTERÍA

Los arcos de mampostería son un conjunto de piezas 'pegadas' en las juntas por una capa de mortero con una pequeña resistencia a tracción. A su vez podemos decir que las piezas están en contacto directo entre ellas. El arco compensa la acción de las cargas internas y externas con las fuerzas de contacto en las juntas, creando una línea interna de aplicación en la resultante de las fuerzas. El equilibrio se alcanza cuando todas las secciones del arco trabajan en compresión. Sería como una línea imaginaria que pasa por el núcleo de todas las secciones. Por otro lado algunas secciones trabajan bajo tracción media o tensión tangencial. Los bloques se separan y/o deslizan debido al colapso del arco. Por lo tanto, al diseñar el arco se debe tomar en consideración un alto esfuerzo de compresión pero no esfuerzos de tracción o tensión: el propósito del arco es aguantar correctamente los esfuerzos de compresión.

El contacto es el principio básico de este comportamiento, basado en la falta de penetración entre bloques y el comportamiento friccional.

Entrando más a fondo en el concepto de la falta de penetración, podemos decir que está regido por la función 'gap' (hueco) y el algoritmo de penalti. La función hueco mide la distancia normal entre cada par de puntos opuestos de dos uniones de contacto. En caso de penetración, el algoritmo de contacto añade una fuerza de compresión normal a la unión modelada por una alta rigidez elástica que hace cumplir $g_n=0$. Para $g_n>0$, los bloques están separados y $f_{cn}=0$.

Por otro lado el comportamiento friccional podríamos decir que está controlado por 2 términos: Fricción y cohesión. La fricción está representada por una fuerza tangencial f_r relativa a la fuerza normal f_n con un coeficiente $\mu = \tan \phi$ (siendo ϕ el ángulo de fricción), o en términos físicos del comportamiento pegajoso entre dos piezas debido a que ambas superficies son ásperas. La cohesión C es la magnitud de la fuerza de fricción que rompe la unión cuando la fuerza normal es nula. Por lo tanto, la fuerza total de fricción es $f_r = \mu f_n + C$. En caso de que la componente tangencial de la fuerza resultante exceda f_r , el bloque desliza y el arco colapsa.

Ya que el esfuerzo de tensión de las estructuras de mampostería es casi nulo, métodos especiales de cálculo llamado 'cálculo límite' llevan un tiempo



existiendo. Están basado en el concepto de rotura de junta, de Coulomb (1773), bajo dos hipótesis:

1. Cese de tracciones en la estructura, todas las secciones bajo compresión
2. Fuerzas tangenciales en la sección más baja del arco más bajas que la resistencia a fricción.

Estas hipótesis son análogas a dos de las condiciones standard de contacto: Kuhn-Tucker y Coulomb respectivamente. Las formulaciones de DDA naturalmente incorporan las hipótesis para cualquier geometría o carga, y nos dan resultados cercanos a los experimentales para casos representativos mostrados en las siguientes secciones [14].

De acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, un sistema de bloques bajo una carga interna o externa deforma o se mueve de manera que el total de energía es un mínimo. DDA, es un método numérico que nos da una respuesta mecánica a un sistema compuesto por N cuerpos que interactúan a través de la minimización de la energía, que es definida como una suma de la potencia H y la energía cinética. Para nuestros arcos de mampostería, en nuestro caso no contaremos con cargas dinámicas. La minimización de Π respecto a la discretización de los grados de libertad de cada bloque nos da equilibrio simultáneo, para un sistema N de bloques:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \sum_{i=1}^N H_i}{\partial \mathbf{D}} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ \dots \\ D_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_N \end{bmatrix}$$



6. LA ESTRUCTURA DE LOS BLOQUES

La formulación más típica usa discretizaciones de primer orden para la descripción cinemática, el movimiento se realiza mediante la expresión $x=X+U$, donde X representa las coordenadas materiales y x las espaciales. Los desplazamientos verticales y horizontales en cualquier punto del bloque están discretizados como $U=TD$. El operador lineal T modifica el vector D que contiene 6 grados de libertad, todos ellos aplicados en el centro de masas del bloque. Las tensiones y esfuerzos son constantes a lo largo del bloque; aunque es necesario un número de bloques muy pequeño para captar propiamente el movimiento de los bloques, un alto número será en general requerido para simular el campo elástico.

- ¿Qué tipo de cargas externas e internas tenemos?

En la siguiente figura se muestra una representación esquemática de tres bloques subdivididos a su vez en 9 sub bloques cada uno.

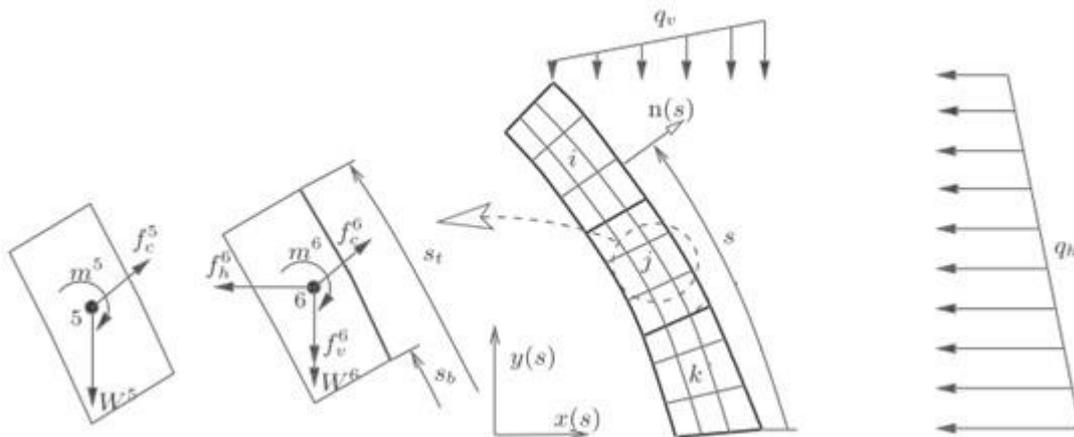


Fig. 11. Contacto aplicado al centro de masas. 3 Macrobloques, subdivididos en 9 subbloques

Son cargados por diferentes fuerzas distribuidas horizontales y verticales. Para los sub bloques que están en contacto directo con las cargas distribuidas, en el



extradós del arco, las fuerzas estáticamente equivalente de forma puntual y sus correspondientes momentos aplicados en el centro de masas son calculados con:

$$f_e^h = \int_{s_b}^{s_t} q_h(s) dy(s); f_e^v = \int_{s_b}^{s_t} q_v(s) dx(s);$$

Donde s es una coordenada curvilínea que empieza en la base del arco, s_b, s_t sus valores en la base y los nodos de las esquinas del extradós, $dx(s), dy(s)$ las componentes horizontales y verticales proyectadas. La tercera expresión r_c^n se refiere a la distancia entre cada nodo $n=1 \dots, 4$ de cada su sub bloque, donde las fuerzas de contacto f_c^n son calculadas.

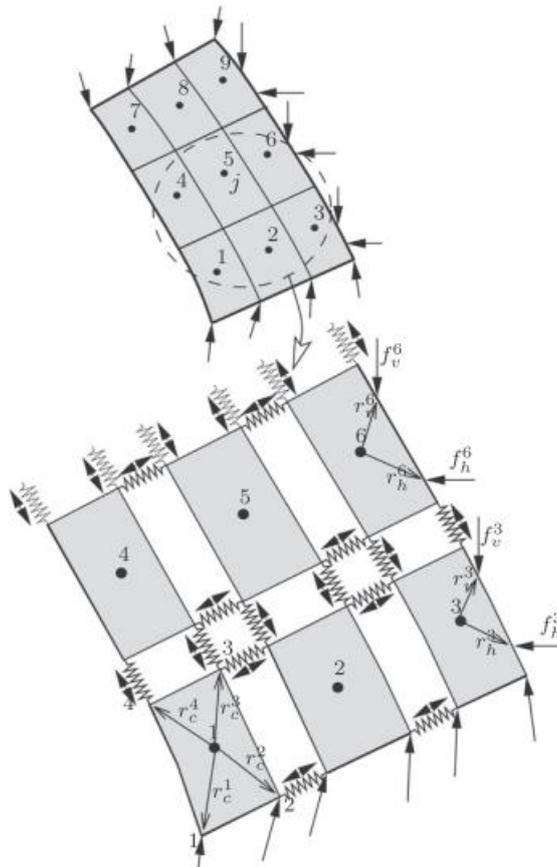


Fig. 12. Detalle macrobloque, subdividido en 9 subbloques y tipo de unión.



Es importante realzar que las fuerzas f_h^e f_v^e son estáticamente transferidas al centro de masas de cada sub bloque del exterior desde los estrados añadiendo el momento m^e .

Además, para todos los sub bloques el peso propio W^e y la resultante de la aplicación de las fuerzas de contacto f_c^n son también equivalentes y directamente trasladadas al centro de masas. Hay que tener en cuenta que las fuerzas de contacto no son en general perpendiculares debido la componente de fricción tangencial.

- ¿Cómo se divide la estructura?

Para imitar la física del contacto (seco o mortero) entre rocas o ladrillos, parece sensato simular cada pieza con un bloque, de este modo evaluar el comportamiento con la misma geometría y carga pero compuesto de un incremento del número de piedras. Teniendo en cuenta la necesidad de un número alto de puntos de información para simular el campo del esfuerzo tensional, una técnica de subestructura ha sido desarrollada en este papel. La técnica está resumida en la siguiente figura anterior. Un bloque internamente dividido en un número de sub bloques, 9 en este caso; cada sub bloque tiene el mismo número de grados de libertad que el original. A su vez está conectado a los otros bloques colindantes a través de algoritmos de contacto modificados.

La modificación está definida debido a muelles entre cada uno de los límites de contacto en las direcciones normales y tangenciales. En este tipo de conexiones, y en detrimento de los algoritmos de contacto más frecuentes, las interacciones permiten fuerzas de compresión y tensión que realzan la impenetrabilidad y la relación entre sub bloques, artificialmente con altos valores de ϕ y C . Para el contacto entre los límites, el estándar método del penalti es aplicado, permitiendo separación pero no penetración entre bloques. El desplazamiento relativo está basado en los valores físicos del material.

Las fuerzas de acción-reacción aparecerán en cada nodo interno, mientras que el perímetro del bloque mayor estará sujeto al contacto con otros y posiblemente a fuerzas externas. Con esta técnica son evitadas las complicaciones de una



fórmula de DDA de un orden alto, y la simulación del stress puede ser obtenida debido a la multiplicidad de información en el centro de masas de cada sub bloque. La división entre sub bloques no tiene un coste computacional alto, ya que la búsqueda de contactos es evitada por un vector de situación que no cambia. En resumen, los sub bloques actúan como elementos finitos constantes que se mantienen juntos debido a el algoritmo de contacto y las conexiones se mantienen juntas para simular continuidad.

El proceso para llevar a cabo el estudio por DDA de un bloque podrían resumirse en:

Dividir cada bloque en un número específico de sub bloques

Definir los contactos entre cada sub bloque.

Aplicar el algoritmo del penalti modificado a los límites entre bloques con un alto \emptyset y C

Aplicar el standard método del penalti para los contactos entre límites con \emptyset y C físico.

- Validación del método

Para darle validez a esta técnica basada en subestructuras, se desarrolla en este apartado una comparación entre DDA y la tensión a la que se somete una viga curva. Los resultado numéricos son obtenidos de un único bloque discretizado en un número variable de sub bloques, mientras que la teoría de la elasticidad es tomada de las referencias clásicas [12]. El radio interno es de $a=0.5$ y $b=0.7$ respectivamente. La superficie libre está sujeta a la distribución flexible con una resultante hacia arriba de $P=2.5\text{KN}$ y una superficie vertical libre distribuida parabólicamente, también con resultante P pero hacia abajo, ambos de acuerdo con la solución elástica.

$$\sigma_{\theta} \left(r, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{P}{\Delta} \left[3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right]$$



$$\tau_{r\theta}(r, 0) = \frac{P}{\Delta} \left[-r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right]$$

$$\Delta = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a}$$

Ambas distribuciones están en equilibrio vertical, por lo tanto no son necesarias condiciones de límite.

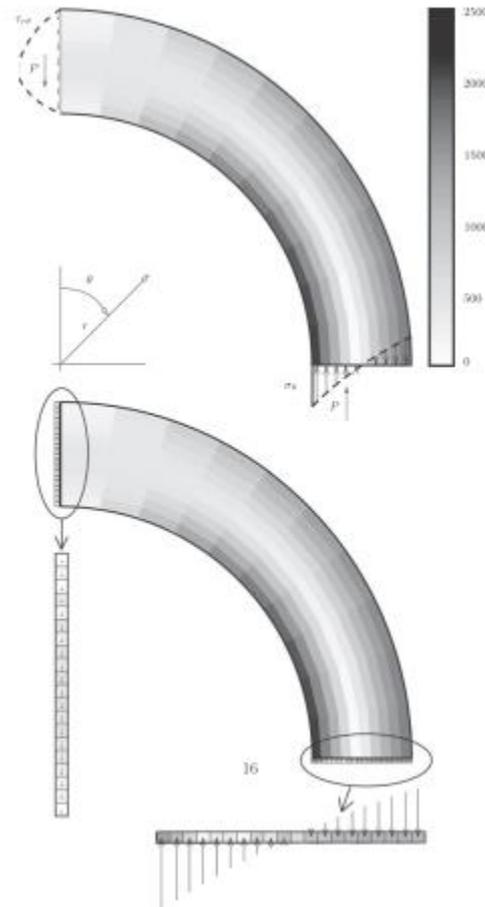


Fig. 13. Tensión equivalente de Tresca para una viga curva. Modelo elástico arriba y numérico (DDA) abajo.

Para facilitar la aplicación de las fuerzas externas, dos líneas cerradas compuestas de 20 sub bloques, que son discretizadas en cada superficie libre. Tener en cuenta que gracias a las superficies de contacto, no hay necesidad de



continuidad entre bloques de carga. Las fuerzas de cada sub bloque de carga son proporcionales a la correspondiente longitud de distribución, y asumen la aplicación del punto definido por el centro de gravedad de la sub área; cada fuerza es por lo tanto transferida al centro de masas con su correspondiente momento. Los parámetros de contacto para los sub bloques internos son elegidos de manera que no hay interpenetración: el ángulo de fricción es 35° , el valor de los penaltis, la rigidez de los muelles normal y tangencial es de 1×10^{10} N/m.

La tensión equivalente es definida de acuerdo con el criterio de Tresca como:

$$\sigma_{eq} = \max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I|, |\sigma_{II}|\}$$

Donde σ_I son las principales tensiones del modelo bidimensional de estrés. En un orden de magnitud está funcionando los primeros componentes de un mayor tamaño que los otros dos, por lo tanto $\sigma_{eq} \approx \sigma_I \approx \sigma_\theta$ en la mayoría de los puntos. También $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ son cero en $r=a, b$ y desde que el ratio $b/a=1.4$ es pequeño, el máximo de ambos aparece en el centro de la dirección r . Las tensiones σ_r, σ_θ están en función del seno en la dirección de la circunferencia, con un máximo en la parte inferior y cero en la parte superior.

La tensión equivalente calculada gracias a los DDA están computadas en el centro de masas de todos los sub bloques. Están organizados en vectores con dimensión N , donde \sqrt{N} nos da el número de sub bloques a lo largo de la dirección radial. Mencionar que la distribución tensiones equivalentes es similar a la tensión inicial excepto cerca a $r=a, b$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, donde σ_r, σ_θ los valores son añadidos y sustraídos, respectivamente.

El error de porcentaje e_N , para una malla dada N es definida como la norma euclidea de la diferencia entre los dos vectores tensionales.

$$e_N = 100 \frac{\|\{\sigma_{eq}^{ely}\} - \{\sigma_{eq}^{dda}\}\|_2}{\|\{\sigma_{eq}^{ely}\}\|_2} = 100 \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N (\sigma_{eq}^{ely} - \sigma_{eq}^{dda})^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (\sigma_{eq}^{ely})^2}}$$



Una medida de convergencia, es calculada como límite del ratio entre ambas normas consecutivas. Teniendo doble de malla e_{2n} y e_n : $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e_{2N}}{e_N} = 1$

En la siguiente figura se muestra la convergencia originada por el DDA frente al número de sub bloques.

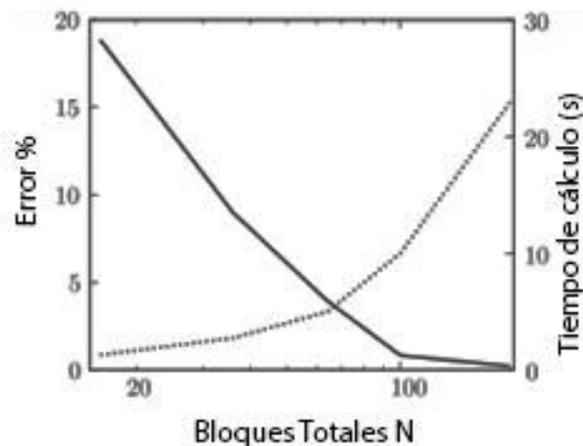


Fig. 14. Gráfica porcentaje error según número de bloques

Es obtenida una media aproximada de $N < 100$. Incrementar el número de sub bloques detrás de ese número produce solo una pequeña disminución del error, implicando una convergencia sublineal. Solo hay el 5% del error para una malla de $N=49$ sub bloques y es casi nulo para $N=100$. El tiempo que la CPU de un ordenador portátil standard (i3-380M, 4GB RAM) necesita para trazarlo es de unos 4 segundos, con un error de un 5%. La curva es parabólica, siendo la matriz global de inversión proporcional al cubo del tamaño de la malla y la administración de los datos y filas es cuadrática. Obviamente un pequeño error para este problema continuo podría ser obtenido usando FEM con menos elementos y un poder computacional menor, pero la clave está en validar un método único que estudie la inestabilidad a través del contacto entre bloques y los campos de tensión al mismo tiempo.



7. PROBLEMAS DE MAMPOSTERIA

- CASO 1: ARCO ENTERRADO BAJO CARGAS VERTICALES Y RELLENO

En esta parte del trabajo se expondrán los ensayos numéricos y experimentales que se han realizado para un arco bajo la acción del relleno del terreno y las cargas verticales. La geometría está dibujada a continuación:

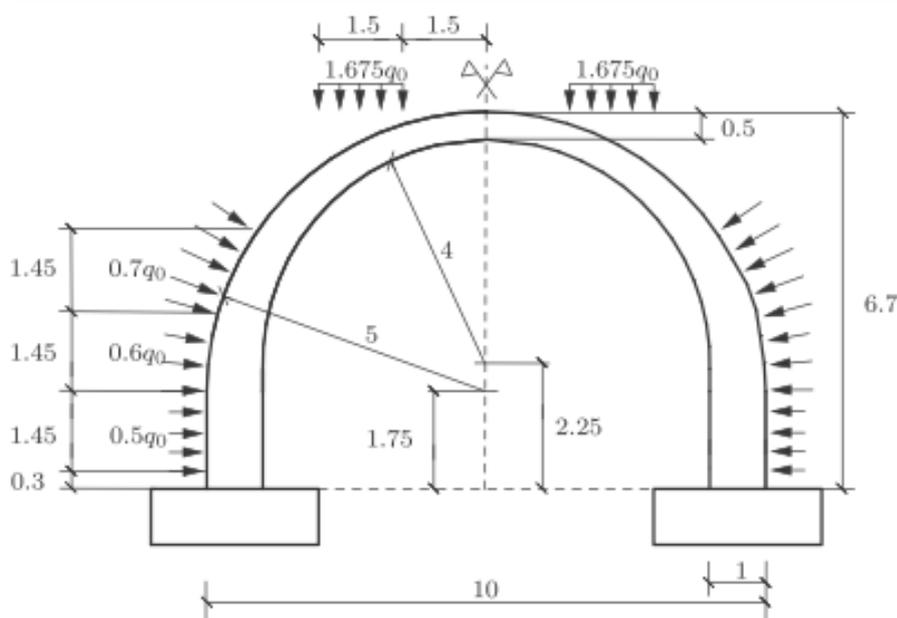


Fig. 15. Arco simétrico con cargas horizontales y verticales

Como podemos observar la figura corresponde a un arco enterrado cuyo grosor incrementa desde la parte superior a la base y su cimentación es rígida. El arco está basado en el contacto directo de bloques de piedra; la estabilidad se consigue gracias a la curvatura de la estructura y el contacto y fricción es generada por las irregularidades de los bloques. Para facilitar el colapso, el arco no lleva una pieza clave como resultado de un constante número de bloques.

Las pruebas experimentales consisten en el desmoronamiento de arcos de iguales dimensiones pero diferente número de bloques 9, 17, 27 y 61. Los arcos



están cubiertos por el terreno en el trasdós hasta una altura de 4.65m. Además habrá dos cargas verticales quasi-concentradas. Están situadas simétricamente a una distancia de 1.5m y aplicando una fuerza total en dos áreas $1.5 \times 1.0 \text{ m}^2$ que son directamente transmitidas a los bloques colindantes e incrementan el empuje. Todas las cargas externas están parametrizadas por una intensidad q (fuerza por unidad): cada fuerza tiene una resultante de $1.675q_0$ y el relleno que empuja es representado por 3 pasos de carga con una disminución de la intensidad de 0.7, 0.6 y 0.5 q .

- Los datos del modelo numérico de DDA

La forma y dimensiones del arco son los de la figura anterior. El perímetro se dividió en J uniones activas y cada unión y bloque está simulada por un bloque rectangular de mayor tamaño, puesto que en este caso vemos que el problema de colapso será la inestabilidad y no la compresión. La cimentación está representada por un bloque rectangular que evita el movimiento, estas restricciones son las únicas que hay. Las dos uniones entre los contrafuertes y la cimentación son consideradas empotrados. El movimiento de un cuerpo rígido del arco se prevé por contacto y fricción entre bloques, de acuerdo a las condiciones de Kuhn-Tucker.

Los bloques son considerados de una alta rigidez: El módulo de Young $E=1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ fue escogido para ser lo suficientemente alto para que haya rigidez pero que no interfiera con la precisión computacional. El coeficiente de Poisson es el estándar $\mu=0.25$. Del mismo modo que para los parámetros de contacto, el ángulo de fricción para mampostería es de 30° y no hay cohesión.

El parámetro del penalti es la rigidez de contacto de los muelles; lo normal es $E_n=1 \times 10^{10} \text{ N/m}$, que fue usado en lugar de E para reforzar que las penetraciones entre bloques fueran menores que los desplazamientos con relación a las tensiones. El peso propio del arco es calculado partiendo de la densidad de 2300 kg/m^3 . El relleno es considerado como grava de densidad 1600 kg/m^3 , no habiendo cohesión. A continuación se resumen las propiedades más importantes en un cuadro indicativo:



<i>Propiedades del Material</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
<i>Piedra</i>		
<i>Módulo de Young, E</i>	1x10 ⁹	N/m ²
<i>Coefficiente de Poisson, μ</i>	0.25	(-)
<i>Densidad, γ_s</i>	2300	kg/m ³
<i>Fuerza a Compresión, σ_u</i>	1x10 ⁷	N/m ²
<i>Fricción, ϕ_s</i>	30°	
<i>Relleno</i>		
<i>Densidad, γ_r</i>	1600	kg/m ³
<i>Fricción, ϕ_f</i>	30°	
<i>Rigidez muelles</i>	1x10 ¹⁰	N/m ²

- Resultados numéricos

Debido a la parametrización de las cargas externas, q_0 es la principal incógnita para alcanzar el colapso. Esta intensidad está basada en la iteración de código numérico en el ordenador. Empezando desde cero, la carga es incrementada en escalones de 5 kN hasta el colapso. El arco empieza a tener un desplazamiento de su parte superior por inestabilidad cuando las cargas en los distintos puntos provocan una falta de contacto en uno o más bloques. El criterio de fallo por formación de bisagras es considerado cuando la separación entre dos nodos continuos es más grande que la distancia crítica calculada (0.01m en los cálculos). Las posiciones de las bisagras son otro resultado importante de los cálculos.

Una vez que se alcanza el fallo inicial, la correspondiente q_0 se mantiene constante y las sucesivas iteraciones DDA simulan el proceso del concepto



inicial. En la imagen a continuación se muestra la secuencia correspondiente a un arco de 9 juntas.

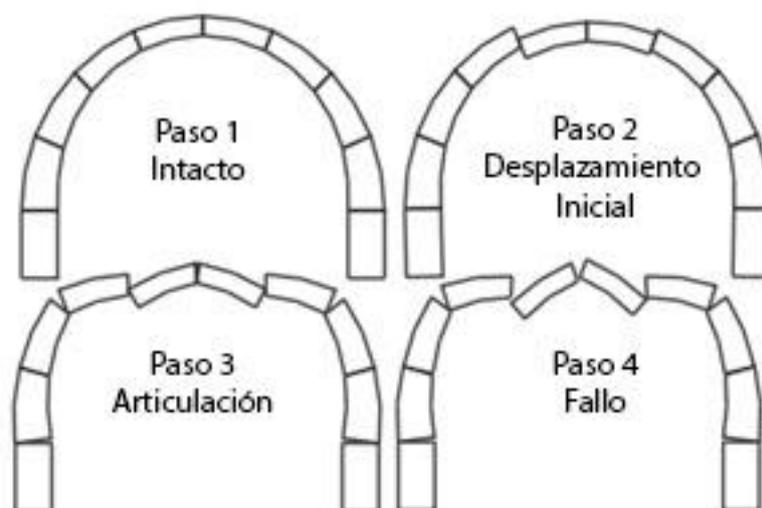


Fig. 16. Fallo arco 9 juntas

El primer paso representa la configuración justo cuando el fallo comienza. La segunda muestra los desplazamientos iniciales, dando una fuerza relativamente alta a las fuerzas verticales, aparecen principalmente en los 2 bloques superiores con un significativo deslizamiento. En el tercer paso, el deslizamiento es remplazado por rotaciones, y un movimiento similar al de las bisagras aparece cercano a los laterales de la estructura. Está claro que el arco se abre a los lados mayormente debido a la rotación de las articulaciones inferiores. Finalmente, en el cuarto paso los dos bloques superiores se separan y debido a la falta de fricción. Debido a que las cargas son aplicadas lentamente, la computación necesaria es estática (no se consideran fuerzas de inercia) y por lo tanto son solo válidas para los cuatro pasos iniciales de colapso. Es conocido por los arquitectos e ingenieros que las articulaciones cambian a lo largo del arco.

En el caso de los arcos con 17 y 27 juntas podemos observar. En primer lugar un desplazamiento similar al de la figura anterior donde se descienden las posiciones superiores y las posiciones de las articulaciones.

Algunas asimetrías pueden ser consideradas en ambos casos, ya que los algoritmos de contacto producen pequeñas bifurcaciones durante la simulación. Este efecto es importante para el contacto esquina-esquina.

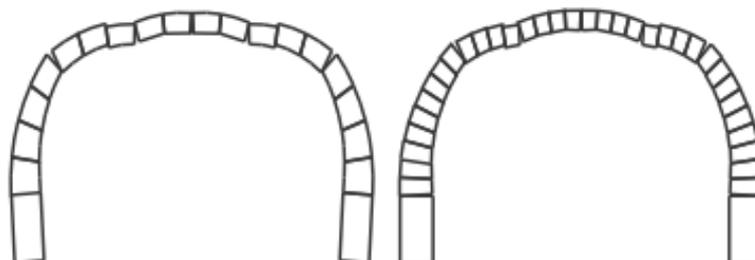


Fig. 17. Fallos iniciales arco 17 y 27 juntas

Del mismo modo que en el anterior caso ahora se aumenta el número de juntas a 61. Aquí se analiza por simetría solo la mitad del arco y se preestablece que no hay fricción en la parte alta, en contacto con una superficie vertical. En esta configuración el efecto de las cargas verticales y horizontales se hace notar en ambos lados junto al pico. Justamente se observa que donde aplicamos la fuerza se deslizan más que en casos anteriores. Las articulaciones o puntos bisagra no son fácilmente reconocibles en este caso ya que hay un gran número de términos. El arco se abre por el medio mientras que las cargas laterales hacen que en cierto modo se compense creando un arco ojival. La estructura se comporta en cierto modo más como una cadena que como un arco, por lo tanto los efectos son mayormente locales. Los bloques laterales descienden antes de rotar, luego no se puede decir que haya una expansión, como en casos anteriores.

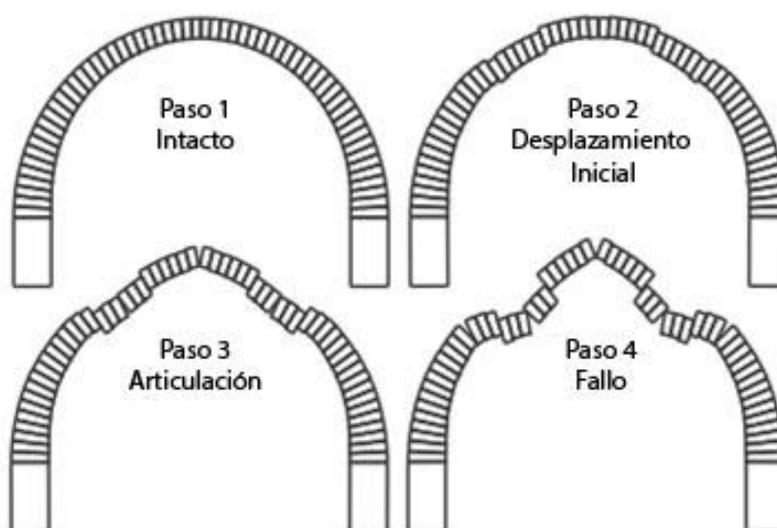


Fig. 18. Fallo arco 61 juntas



A continuación se expone una tabla con los datos correspondientes a la carga crítica para las diferentes configuraciones.

Tener en cuenta que cuando el número de bloques incrementa la carga crítica tiende a tener un valor asintótico. El resultado conocido en la arquitectura representa el hecho de que cuando el arco tiene muchos bloques incrementan los puntos débiles que permiten girar y deslizar los bloques. A la vez se observa que el error es reducido considerablemente cuando el problema envuelve un gran número de bloques. Esto se debe a que la solución es menos sensible a incertidumbres en los datos cuando se multiplican las posibilidades de modos de fallo capturables por DDA. Como cualquier método numérico convergente, la solución es mejor cuando el número de elementos es mayor.

<i>Juntas</i>	<i>Carga crítica en Experimento</i>	<i>Carga crítica en DDA</i>	<i>Error</i>
9	250	280	12.2%
17	206	210	1.6%
27	206	205	-0.8%
61	205	205	0.1%

- **CASO 2: INFLUENCIA QUE PRODUCE EL GROSOR DEL TERRAPLEN EN LA ESTABILIDAD DE UN ARCO OVALADO**

En este caso se cambia el tipo de arco, teniendo un arco ovalado. La geometría se muestra en la imagen posterior. Cada bloque está discretizado en 4 sub bloques en la dirección del radio r y en la circunferencia s , todos ellos con aproximadamente la misma dimensión. El empuje lateral del relleno sigue estando presente, pero en lugar de las fuerzas verticales hay una carga distribuida procedente de un terraplén de un grosor variable.

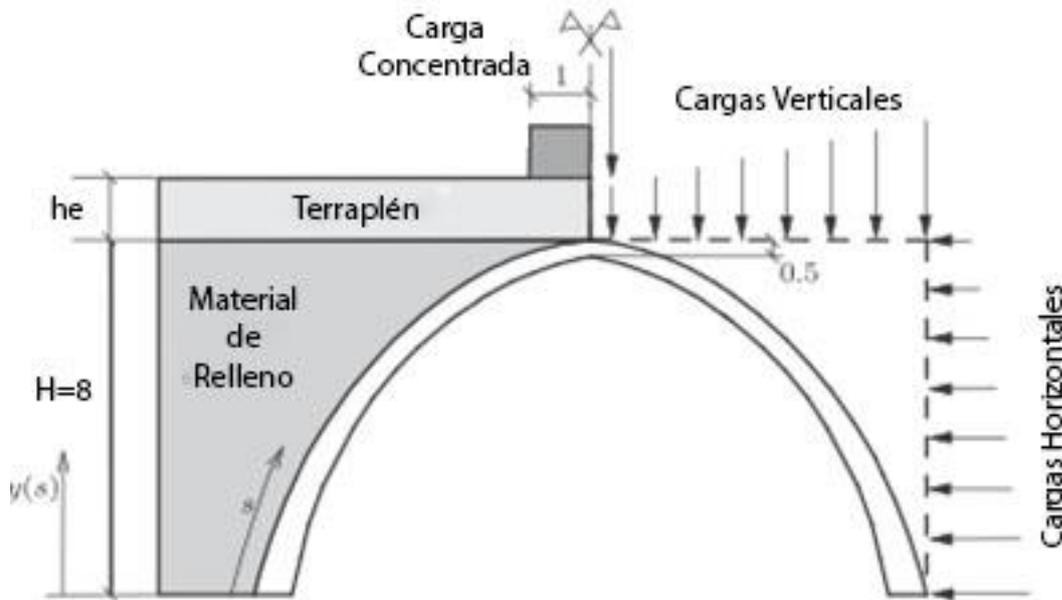


Fig. 19. Arco ovalado con cargas horizontales y verticales de terraplén o concentrada.

El arco puede ser inestable por dos razones:

El empuje del relleno dominante sobre la carga vertical cuando he es bajo; el colapso ocurre por la elevación del pico y la formación de articulaciones

Las fuerzas verticales prevalecen cuando el grosor del terraplén es grande. El colapso ocurre cuando se baja el pico y se forma articulación.

Por lo tanto hay un grosor que se puede considerar óptimo, que estabiliza el arco.

El arco es simulado mediante 16 bloques, los dos más bajos están simplemente soportados en la cimentación luego pueden rotar.

La situación es similar al caso anterior excepto para la geometría y las cargas verticales externas, aspectos que producen diferentes medios de fallo.

Dos ensayos son realizados en este caso. Unos corresponde a la ausencia de suficiente carga vertical y fallo debido al empuje lateral, definido como límite bajo. El mismo por el otro lado es definido como límite alto (máxima carga). Para ambos las articulaciones se abren alternativamente (hacia el intradós o el estrados). Para el límite superior las rotaciones en la base causan que los



bloques inferiores parcialmente causen pérdida de contacto con la base. Un fallo intermedio es también definido como un test estándar de compresión.

Se muestra también la diferenciación entre 2 modos instantáneos y el fallo a compresión. Empezando desde el límite inferior, $h_e=0.32\text{m}$ y por lo tanto el factor de seguridad es $sf=1$, los tiempos de cálculo son correspondientes a la altura del terraplén e incrementan en pasos proporcionales a las cargas.

El factor de seguridad está definido de 1 a infinito y la abscisa es función representativa de g_e . Después del límite inferior, una distribución de hasta $h_e=0.9\text{m}$ con una gran pendiente es observada, implicando que un pequeño incremento en la carga incrementa altamente la seguridad de la estructura. Después una pequeña zona de incremento/disminución correspondiente al fallo de un bloque a compresión; este fallo se ve con desde dentro del arco. Cuando las cargas incrementa más aún, hay un incremento progresivo de la zona de seguridad debido al exceso de peso hasta el fallo de nuevo, en $h=11.9\text{m}$.

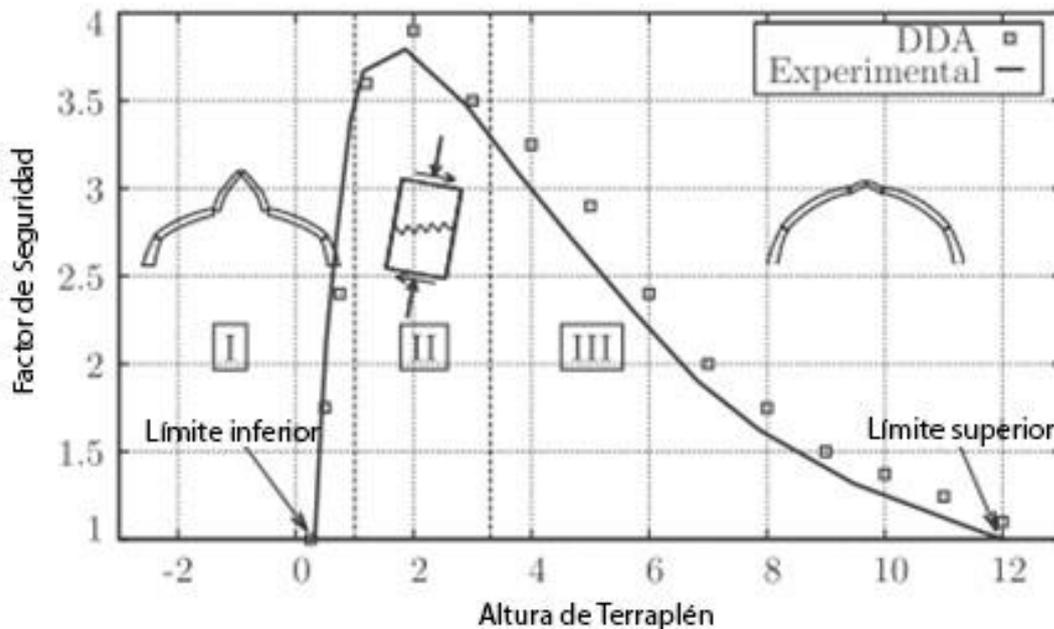


Fig. 20. Gráfica factor de seguridad dependiendo de la altura del terraplén.



- Computación numérica con DDA

Los factores de seguridad de un arco ovalado son calculados con DDA. Las cargas que son producidas por el peso propio son computadas directamente del volumen y material de cada bloque definido en la sección anterior. Lo mismo ocurre con el relleno, tiene los mismos valores, pero se tiene en cuenta la compactación, para grosores de terraplén pequeños se tiene en cuenta un incremento de un 10% mientras que para grosores mayores a 1.9m se usa el valor de referencia ya que la compactación es mucho menos efectiva.

Las cargas verticales y horizontales que actúan en el arco son calculadas usando la siguiente ecuación:

$$q_v(s) = [H - y(s)]g\gamma_f + h_e g\gamma_e$$

$$q_h(s) = (1 - \sin \phi_f)q_v(s)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad y la altura total de relleno H . Las acciones son transformadas en fuerzas puntuales simplemente multiplicándolas por sus proyecciones horizontal y vertical en la cara externa del bloque, y las cargas resultantes puntuales y sus correspondientes momentos son luego aplicados en el centro de gravedad.

Gracias al modelado con DDA y tras varios ensayos, llegamos a la conclusión de que los límites que hemos computado son muy similares a los experimentales, encontrando $h=0,5m$ y $12m$. Para ciertos valores de h el programa incrementa los valores de ambas cargas hasta que hay colapso cuando son creadas 5 articulaciones. Al mismo tiempo la tensión equivalente es comparada calculando la inestabilidad o rotura. En la transición entre las dos inestabilidades la línea de aplicación de fuerzas resultantes atraviesa el núcleo de todas las secciones, cercanas al centro de gravedad. Por lo tanto el bloque está sujeto para que casi no tenga momento ni articulaciones. Solo compresiones. En esta situación la única posibilidad de fallo es por compresión elástica cuando el máximo equivalente de la tensión de Tresca iguala al fallo de tensión de compresión de la piedra.



Para tener una visión más clara de la distribución de tensiones, mostraremos la siguiente imagen:

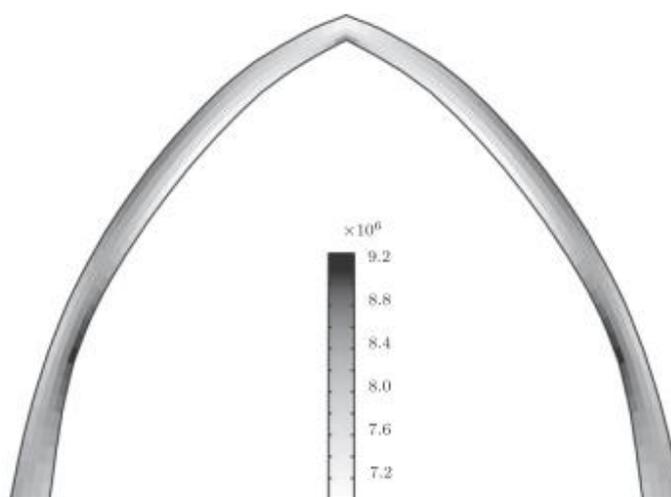


Fig. 21. Distribución tensión equivalente de Tresca en arco ovalado

Nos muestra la tensión equivalente de Tresca cuando $h=2\text{m}$, está en el centro de la zona II donde el fallo ocurre debido a la compresión. El rango entre 7.2 a 9.2 Mpa indica los niveles tensionales que sufre. Quedando en evidencia que las concentraciones ocurren en la clave del arco, en el medio y en los costados, alternando estrados-intradós. Las concentraciones son debidas a la suma de momento y compresiones que coincide aproximadamente con las juntas en las que las articulaciones son formadas. Pero es importante realzar que el DDA no predice directamente la formación por el nivel de tensión, sino los desplazamientos y rotaciones. El punto en el que hay un fallo por compresión se da con una carga vertical de 160.1-0.15y kN/m y otra horizontal de 0.5 kN/m aumentada por un factor de seguridad de 3.8.

Centrándonos en los modos de fallo del arco ovalado, podemos ver en la siguiente imagen cómo hemos predicho el fallo mediante los DDA.

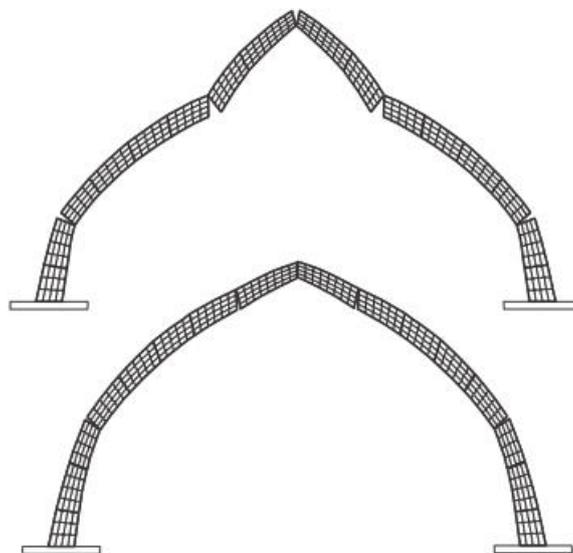


Fig. 22. Distintos fallos. Elevación de clave y bajada de esta

Para un terraplén de no mucho grosor es evidente que las fuerzas laterales prevalecen y la clave sube, debido a la simetría las articulaciones suelen inclinarse hacia el extradós. Las otras dos articulaciones se abren alternativamente la superior hacia el intradós y la más baja hacia el intradós. En el caso contrario, cuando el terraplén prevalece hay una mayor carga vertical, luego el pico desciende y se abren articulaciones alternativas. (Imagen inferior)

Por último se exponen en una tabla la comparación entre los resultados del experimento con los realizados numéricamente con DDA.

Límites	Numérico			Experimental		
Inferior	18°	60°	90°	18°	60°	90°
Superior	0°	26°	78°	0°	37°	78°

Se puede observar que los resultados son muy parecidos estando la diferencia en el límite para carga superior distando entre 26 y 37 grados.



- **CASO 3: INFLUENCIA DE UNA CARGA CONCENTRADA EN LA ESTABILIDAD DE UN ARCO OVALADO**

En este caso añadiremos al arco una carga concentrada en la clave del arco, que distribuye su carga a través de un rectángulo de dimensiones 2x1m. El ancho de la carga distribuida cubre aproximadamente un bloque a cada lado de la clave, y su efecto está directamente transmitido al correspondiente centro de masas. El terraplén tiene ahora un pequeño grosor constante $h=0.2\text{m}$ (correspondiendo al límite inferior del caso anterior). Las propiedades de los materiales están en la primera de las tablas que ofrecimos al iniciar la exposición de los problemas.

El objetivo de nuevo es estudiar el Factor de Seguridad, pero ahora en favor a la carga concentrada; el proceso es el mismo que antes, pero las cargas son aumentadas al mismo tiempo que se calcula el Factor de Seguridad.

Como hicimos con el caso anterior, vamos a mostrar una comparación entre los resultados del experimento y nuestros resultados numéricos con DDA.

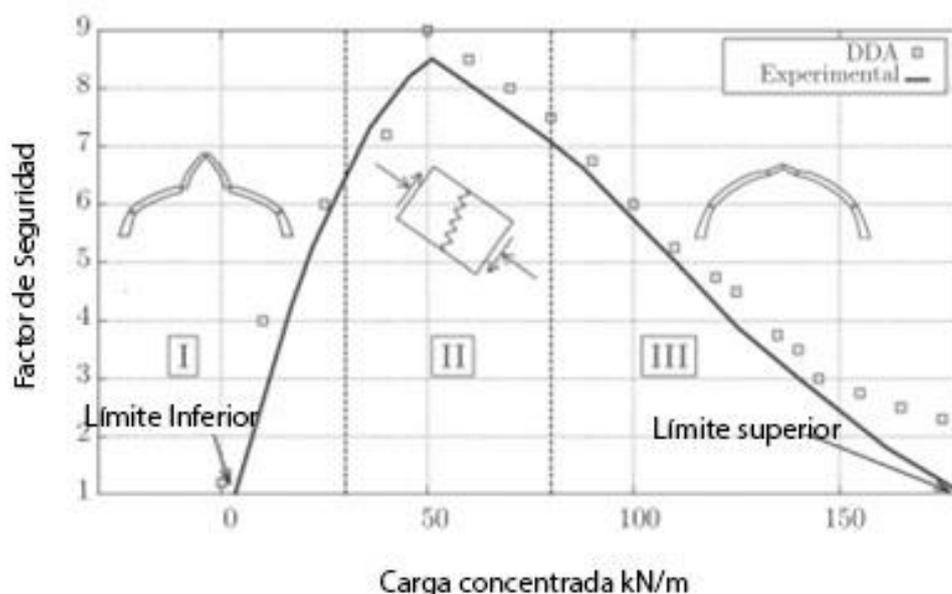


Fig. 23. Factor de seguridad dependiendo de la carga concentrada.



La carga de terraplén por sí mismo ya produce inestabilidad así que el límite inferior está en $q=0$; con el incremento de carga se consigue estabilidad. Vemos que en la gráfica que DDA nos da los límites de carga entre 2.5 y 225kN. La coincidencia entre los resultados experimentales y numéricos es buena, excepto para cargas superiores a 150kN donde DDA diverge y predice mayores cargas. Esta divergencia podría ser debida a la concentración de cargas verticales con unos pocos de sub bloques, produciendo un posible error en su traslación y rotación. Una malla en esta área más refinada podría resolver el problema pero no se considera que esta desviación sea un tema importante para la simulación que hemos hecho.

A continuación mostramos gráficamente los modos de fallo correspondientes a los límites inferior y superior.

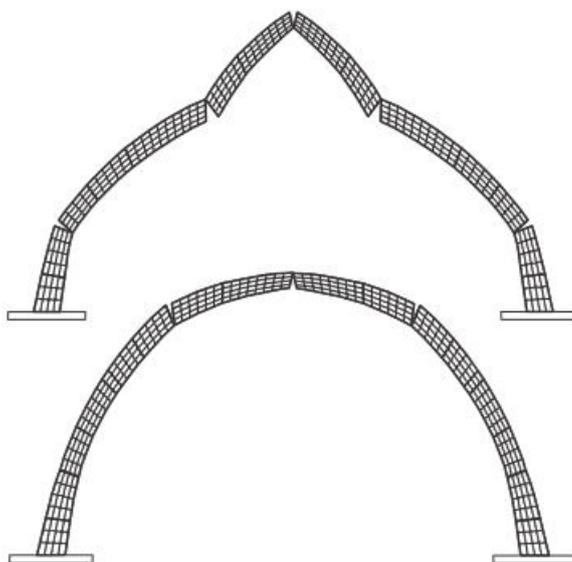


Fig. 24. Distintos fallos. Elevación de clave y bajada de esta

Podemos ver que en el caso del límite inferior, en la imagen superior, la imagen coincide con la anterior, donde la igualdad de cargas laterales hace que las cargas verticales se queden en un segundo plano.

Sin embargo el fallo en el límite superior si es diferente al anterior, hay 4 bloques a cada lado del pico que descienden a la vez y solo una articulación se abre al estrados. En esta articulación hay una combinación de fricción y rotación, pero



el resto del arco no se ve afectado por las cargas verticales, moviendo solo ligeramente hacia dentro debido a las cargas laterales del relleno.

Las posiciones de las articulaciones se compararan posteriormente en una tabla. No hay diferencias significativas entre experimento y DDA numérico.

<i>Límites</i>	<i>Numérico</i>			<i>Experimental</i>		
<i>Inferior</i>	18°	60°	90°	18°	60°	90°
<i>Superior</i>	0°	63°	90°	0°	63°	90°

Resumiendo decir que para los casos 2 y 3 es evidente que la fricción de rotura juega un papel secundario mientras que la mayoría del movimiento es inducido por rotación de una serie de bloques. Dada la inclinación de los laterales del arco no hay mucho movimiento lateral excepto un ligero movimiento para el límite superior, que crea una articulación en la base. Los movimientos relativos a la clave y en la dirección de las rotaciones son los mismos que en los experimentos.



8. PROBLEMAS DE MACIZOS ROCOSOS

El estudio de respuesta de estructuras compuestas por bloques rocosos ha estado basado tradicionalmente en la Mecánica de Medios Continuos.

Esta hipótesis no es correcta para sistemas de estructura interna muy fracturada y que por tanto pueda ser asimilada a un medio continuo.

Ya que el funcionamiento de macizos rocosos como los que presentaremos a continuación están basados en contacto y fricción, el Método de los Elementos Discretos es adecuado para simular tal realidad física. Así se trata de un comportamiento global basado en la contribución del comportamiento individual de cada bloque.

Se estudian 2 casos en los que aplicaremos una carga dinámica a un macizo rocoso y veremos cómo actúa ante semejante alteración del medio inicial.

- **CASO 1: MACIZO ROCOSO 330 BLOQUES**

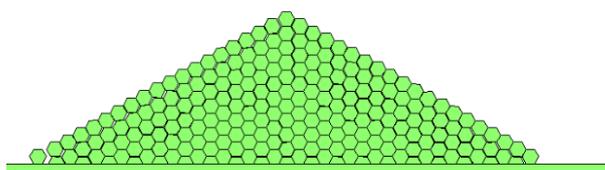


Fig. 25. Macizo rocoso 330 bloques



. A continuación se exponen los datos característicos del problema:

Datos	Valor	Unidades
Nº de bloques	330	
Dimensión	50 x 16	m
Densidad, γ_s	2500	kg/m ³
Talud	1/3	
Angulo de Rozamiento	25°	
Terremoto escalado a	1/5	
Tamaño bloque	Hexágonos 1 m largo	

Se usa el acelerograma del terremoto de El Centro (1940), escalado a 1/5.

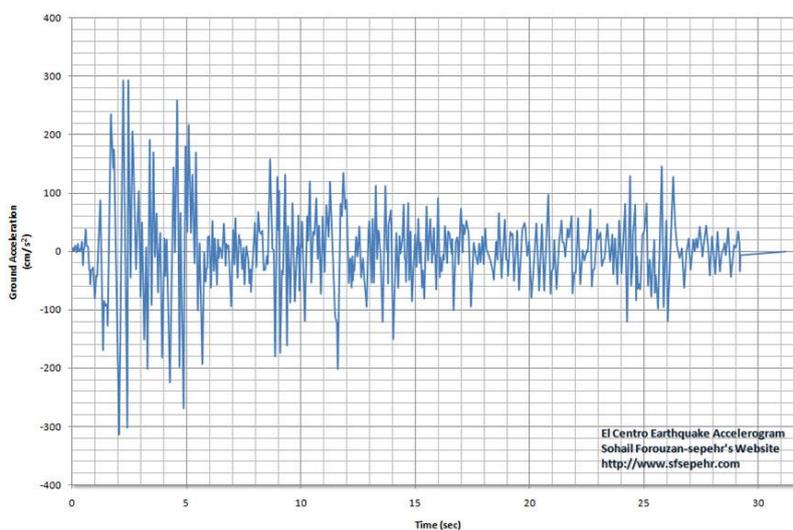


Fig. 26. Acelerograma de El Centro, California 1940



Para conseguir máxima disipación, se aplican métodos discretos en el tiempo como son los algoritmos de Newmark-Beta.

Así nos encontramos primero con fallo de las capas superficiales por deslizamiento. El inicio del fallo está en la coronación de la presa, puesto que los bloques están menos coartados al movimiento.

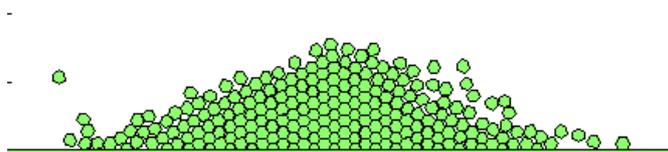


Fig. 27. Deslizamiento capas superiores macizo rocoso 330 bloques

En la simulación, la acción sísmica muy elevada produce que algunos bloques salgan despedidos, esto no es realista ya que se produciría ese deslizamiento de capas superficiales, pero no al punto de 'volar'.

Por otra parte tenemos un escaso desplazamiento de los bloques internos. Con una elevada coacción debido al alto valor de las fuerzas de contacto.

Llegando finalmente a un estado de reposo tras la aplicación de fuerzas como vemos en la imagen siguiente.

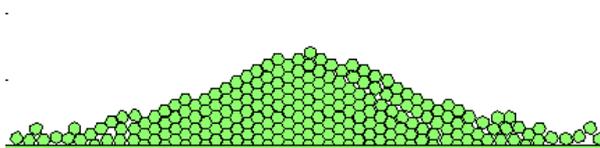


Fig. 28. Estado del macizo tras deslizamiento



- CASO 2: MACIZO ROCOSO 3500 BLOQUES

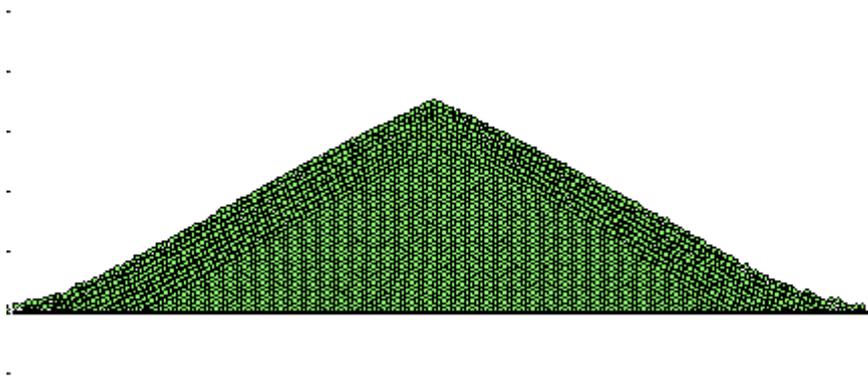


Fig. 29. Macizo rocoso 3500 bloques

<i>Datos</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
<i>Nº de bloques</i>	3500	
<i>Dimensión</i>	230 x 70	m
<i>Densidad, γ_s</i>	2500	kg/m ³
<i>Talud</i>	1/3	
<i>Angulo de Rozamiento</i>	25°	
<i>Terremoto escalado a</i>	1/2	
<i>Tamaño bloque</i>	Hexágonos 1 m largo	

Se usa el acelerograma del terremoto de El Centro (1940), escalado a 1/2.

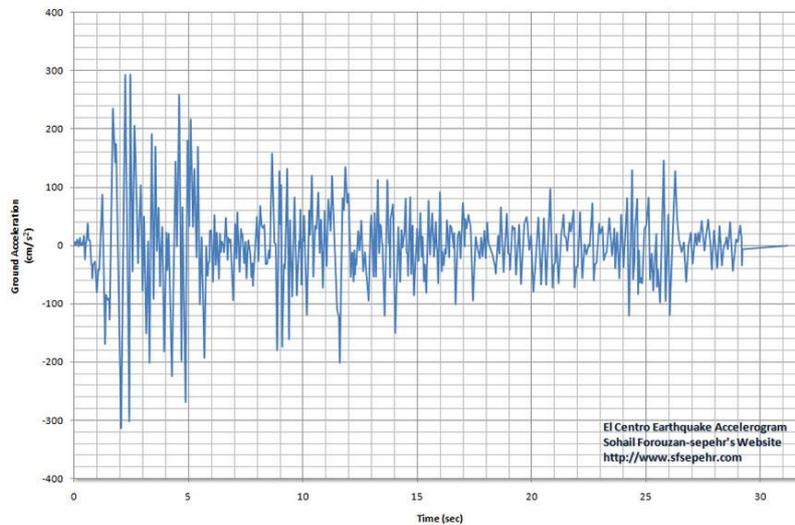


Fig. 30. Acelerograma de El Centro, California 1940

Para conseguir máxima disipación, se aplican métodos discretos en el tiempo como son los algoritmos de Newmark-Beta.

Este es un caso más realista que el anterior ya que las dimensiones 230 x 70 m son superiores a las anteriores, siendo el número de bloques mucho mayor.

De este modo se puede observar lo mismo que en el caso anterior, el fallo es por deslizamiento de las capas superiores, quedándose la parte más interior sin apenas alterarse tras el sismo.

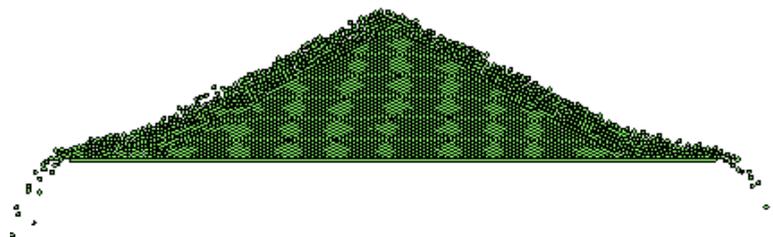


Fig. 31. Deslizamiento ocuriente en Macizo rocoso 3500 bloques

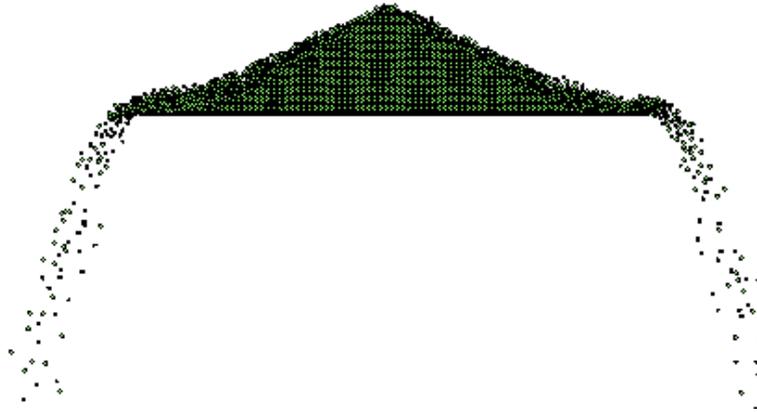


Fig. 32. Estado del macizo tras deslizamiento



9. CONCLUSIONES Y FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN

El método de los elementos discretos es una herramienta de gran potencia para el estudio del comportamiento dinámico de sistemas cuya estructura interna no pueda considerarse plenamente continua, como es el caso de las estructuras de mampostería y macizos rocosos.

Mediante este trabajo se ha simulado numéricamente el comportamiento de diversas estructuras con estas características. Así, mediante el estudio de las interacciones de contacto, se ha verificado que su fallo ante sismo corresponde con la realidad experimental. El aumento en los últimos años de la capacidad de cálculo de los ordenadores ha permitido realizar la simulación obteniendo resultados más realistas que los que se hubieran obtenido en los inicios del método.

En la actualidad, gracias a los Métodos de Elementos Discretos, se están tratando diversos problemas de Mecánica de rocas y flujos granulares, fractura del hormigón e incluso cimentaciones.

Las nuevas líneas de estudio apuntan a fragmentación de macizos rocosos, aplicación de problemas dinámicos y fenómenos moleculares, entre otros. En otra línea más avanzada están las combinaciones con otros métodos numéricos y las estrategias para construcción.



10. BIBLIOGRAFIA

- [1] D.M. Doolin, Nicolas Sitar, *Displacement accuracy of Discontinuous Deformation Analysis Method Applied to Sliding Block* Journal of engineering mechanics Noviembre 2002
- [2] M. Tsesarky, Y.H. Hatzor, N.Sitar, *Dynamic Displacement of a Block on an inclined plane: Analytical, Experimental and DDA Results*, Rock Mechanics and Rock Engineering 2005 38, pp. 153-167
- [3] K. Te-Chih, J. Bray, *Modelling of particulate media using discontinuous deformation analysis*, J. of engineering mechanics, Vol 11 , No 11, Nov 1995.
- [4] D.M. Doolin, *Preliminary results unifying discontinuous deformation analysis DDA and distinct element method* Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California, USA
- [5] D.M. Doolin, Nicolas Sitar, *Time integration in discontinuous Deformation Analysis*, J. of engineering mechanics Marzo 2004
- [6] G.H. Shi, *Discontinuous deformation analysis- A new model for the statics and dynamics of block systems*, Thesis (Ph. D.), U. California, Berkeley, 1988
- [7] D.M. Doolin, *Preliminary results unifying discontinuous deformation analysis element method (DEM)*, Proceedings of the 6th International Conference Deformation, Orkanger, Norway. 6-8 October.
- [8] R. E. Goodman y C. St. John, *Finite element analysis for discontinuous rocks*, Numerical Methods in Geotechnical Engineering. MacGraw-Hill, Nueva York 1976.
- [9] Crisfield M. *A finite element method for a class of contact-impact problems finite element computer program for the analysis of masonry arches*. Tech. rep.; TRRL Laboratory Report 1115, Department of Transport, Crowthorne, 1984.
- [10] P. Wriggers *Computational Contact Mechanics*. J. Wiley & Sons, New York, (2002).
- [11] P. A. Cundall y O.D.L. Strack, *A discrete numerical model for granular assemblies*, Géotechnique, 1979 Londres 29(1), pp. 47-65
- [12] Timoshenko S, Goodier J. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill; 1951.



- [13] Y.M. Cheng *Advancements and Improvement in Discontinuous Deformation Analysis* Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong. Computers and Geotechnics, Vol 22, no 2, pp. 153-163
- [14] Bravo R, Perez-Aparicio JL. *Discontinuous numerical analysis of masonry vaults*, vol. 3. Berlin: Springer-Verlag Berlin; 2007. p. 365–80
- [15] CA solo S, Peña F. *Modelo de elementos rígidos para el análisis de estructuras de mampostería*. Revista Internacional Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería 2005; 121(2):1–18
- [16] Dimitri R, Lorenzis LD, Zavarise G. Numerical study on the dynamic behavior of masonry columns and arches on buttresses with the discrete element method. Eng Struct 2011; 33(12):3172–88.
- [17] Delbecq J. *Casos de Puentes de Fábrica* (Examples of masonry bridges), SETRA; 1981
- [18] Heyman J. *The masonry arch*. Chichester: Ellis Horwood; 1982.