[illegible] PHAS

[illegible]

EXAMEN MARITIMO
Theórico Práctico,
ó
TRATADO DE MECHANICA
aplicado á la
CONSTRUCCION,
CONOCIMIENTO Y MANEJO DE LOS NAVIOS
y demas Embarcaciones.

Por D. JORGE JUAN,

Comendador de Aliaga en la Orden de San Juan, Xefe de Esquadra de la Real Armada, Capitan de la Compañía de Guardias Marinas, de la Real Sociedad de Londres, y de la Academia Real de Berlin.

TOMO PRIMERO.

EN MADRID:
En la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena, Calle de las Carretas.

M.DCC.LXXI.
Con permiso Superior.

AL REY N. SEÑOR.

SEÑOR.

LA obligacion con que nace un Vasallo es de producir quantas utilidades dependan de él en beneficio de su Rey y de su Patria. Las que se comprehenden en estos dos Tomos son las que puedo ofrecer á los pies de V. M.: y será mi mayor gloria saber, si, como las juzgo tales, logran la dicha de serlo.

N. Señor guarde la importante vida de V. M. los muchos años que necesita la Monarquía.

SEÑOR.
A los Pies de V.M.
su mas humilde y fiel Vasallo

Jorge Juan.

Qui descendunt mare in navibus: facientes operationem in aquis multis.
Ipsi viderunt opera Domini, & mirabilia ejus in profundo. Ps. 106.

PROLOGO.

LA instruccion del Marinero, si exceptuamos los cortos principios en que se funda el Pilotage, se ha considerado, hasta muy poco tiempo ha, de pura práctica. La fábrica del Navío, y otras Embarcaciones, y sus maniobras, que es el modo de manejarlas, ha estado siempre en manos de unos casi meros Carpinteros, y de otros puramente Trabajadores ú Operarios: ninguna dependencia se creyó que tubiesen de la Mathemática, sin embargo de no ser el todo sino pura Mechânica: Ciencia, quizas, la mas dificil y mas intrincada del mundo; pero qué mucho? En el Marinero, todo ocupado al riesgo, al trabajo y á la fatiga, no cabe quietud para estudio tan dilatado y prolixo; y el estudioso, que requiere suma tranquilidad para la contemplacion, no se acomoda al afan y fatiga extrema del otro, únicas maestras que enseñan con facilidad las resultas que por solo theórica fuera casi imposible descubrir. La dificultad de unir estas dos partes, en que consiste perfeccionar estudio tan manifiestamente útil, le tubo por consiguiente en tinieblas tantos siglos hace; pero como en el presente han florecido con admiracion las Mathemáticas, y se han introducido con beneficio singular en casi todas las Ciencias y Artes, era irregular que no hubiera logrado del mismo la Marinería, ó á lo menos, que no se diese principio á la necesaria perfeccion para que con él se cultivase progresivamente. En el año de 1673 ya nos habia dado el *P. Pardies*

su

su Tratado de Stática, ó Ciencia de las fuerzas movientes, y en él, por via de exemplo, una instancia ú demonstracion del camino que debe seguir la Nave, impelida por un viento lateral. Era ya un índice que pudo haber servido de guía para dilatarse mas en materia tan abundante; pero sin embargo, no vimos estenderla, hasta que el año 1689 nos dió el *Cavallero Renau* un tomo en octavo intitulado, *De la Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux.* Seguia este el primer paso del *P. Pardies*: ambos convenian en que el camino directo que hace la Nave, disminuye de aquel que hiciera si por todas partes rompiera el agua con la misma facilidad, en la razon del radio al seno del ángulo que forma la Vela con la Quilla: y el lateral en la compuesta del radio al coseno, y de la resistencia del Costado á la de la Proa; pero por desgracia el *Cavallero* convenia en que las resistencias eran como los quadrados de las velocidades de los fluidos, y como los quadrados de los senos con que inciden sobre las superficies: principio que entonces, y hasta ahora, ha sido admitido casi sin la menor repugnancia de los mas célebres Geómetras. Esto bastó para que el célebre Holandes *Christiano Hugenio* manifestase en la Bibliotheca universal é historica (año 1693) las contradicciones en que habia incurrido el *Cavallero*: hizole ver, que segun sus principios, las velocidades directas del Navío debian ser mucho mayores, y que el ángulo ventajoso que asignaba á las Velas para ganar á barlovento, no era el que legitimamente se deducia. El *Cavallero* defendia su opinion (*Diario de los Sabios* 1695) fundado en la innegable regla de la descomposicion de fuerzas; á cuyos argumentos no satisfacia *Hugenio*: lo que produxo alternativamente varias réplicas de una y otra parte, sin que jamas se llegase á la conclusion, ni al desengaño de alguna de ellas. Cesó, sin embargo, la controversia, y quando, por este motivo, se creyó mas seguro el *Cavallero*, se vió un escrito en las *Actas de los Eruditos de Leipsic* del mes de Julio de 1696, dado por *Jacobo Bernoulli*, Profesor de Mathemáticas en *Groningue*, en que, sin embargo de alguna modificacion, admitia la opinion de *Hugenio*; pero apartandose de este en no considerar la velocidad del viento como infinita, respecto á la del Navío: error en que habian incurrido los otros dos; y por tanto las resultas se hacian en parte distintas. El *Cavallero* se conmovió á este segundo ataque, y le obligó á dar á luz un Libro intitulado *Memoire ou est demonstré un principe de la Mechanique des liqueurs, dont on s'est servi dans la Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux, & que à esté contesté par M. Hughens*; pero se reduxo á sostener su proposicion sobre la descomposicion del movimiento, sin satisfacer al cargo que le hacia *Hugenio*. *Juan Bernoulli*, hermano de *Jacobo*, y tambien Profesor de Mathemáticas en *Basiléa*, se arrimó primero á la opinion del *Cavallero*; pero estando despues mejor informado, dió la razon á *Hugenio*, y al Público, en 1714, un Libro intitulado, *Essai d'une novelle theorie de la manœuvre des Vaisseaux*, que remitió primero á la censura de la Academia Real de las Ciencias de *Paris*. La mucha y sublime Geometría del Autor hizo que estendiese sus-

sus cálculos á mucho mas de lo que hasta entonces se habia visto: la disputa entre el *Cavallero* y *Hugenio* quedó decidida al dictamen general de los inteligentes; porque no solo se declaró á favor de las velocidades que este habia hallado, sino que añadida por el Autor una curva que las terminaba, le hizo decir, que *elle decide par consequent la controverse en sa faveur, contre la pretension de M. Renau. Juan Bernoulli* no quiso, sin embargo, limitar las velocidades del viento, como con muy fundada reflexîon lo habia hecho su hermano: y por tanto, aun con toda la decision no pudo determinar las de las Naves con la misma justificacion; atendió, no obstante, á la obliquidad con que el viento hiere la Vela, lo que su hermano omitió: y exâminando la equacion dada por *Hugenio*, para hallar el ángulo que debe formar el viento con aquella, dado el que forma la Vela con la Quilla, para ganar lo mas que fuere posible á barlovento, no solo concluye la misma fórmula, sino que trata como de misterio el haber omitido *Hugenio* sus cálculos. Prosiguió despues buscando para lo mismo el ángulo que debe formar la Vela con la Quilla, dado el que forma la Vela con el viento: y hallado, trata de deducir el mas ventajoso de aquellos, con el mas ventajoso de estos; pues como para cada ángulo de Quilla y Vela que se tome, hay uno de Vela y viento ventajoso, se puede buscar el caso en que ambos sean ventajosos, y que darán el máxîmo andar. Resuelve con la misma destreza esta qüestion; pero asi esta, como todas las demas, baxo el supuesto de que sea la velocidad del viento infinita y nula la deriva: ambas suposiciones bien apartadas de lo que realmente sucede en la práctica. Los tres deduxeron sus cálculos supuesta la Nave un rectángulo, cuyos lados menores se consideren como la Proa y la Popa; pero *Juan Bernoulli* se estendió á suponerla formada de un rombo, romboyde, y de segmentos circulares: porque habiendo notado que todo el cálculo dependia de las resistencias supuestas, y estas de la figura ó cuerpo de la Nave, le pareció necesaria esta atencion, é hizo cargo á *Huguenio* de haber consentido en que sería cierta la deriva que asignó el *Cavallero*, quando las resistencias de los fluidos fueran como las simples velocidades, y no como los quadrados. Se ocupó con esto á exâminar las varias resistencias, particularmente de los segmentos circulares; y llamó exe de ellas á la línea que divide en dos partes iguales los exfuerzos de las aguas en toda la longitud de la Embarcacion desde Proa á Popa: lo que dió motivo para discurrir, que puesto el palo de la Embarcacion en dicha línea, la fuerza de la Vela se opondría directamente á la de las aguas, y se lograría un perfecto govierno: idea que pareció al Autor tan meritoria, como que por ella dixo, *Je m' etonne que ni M. Renau, ni M. Huguens, n' ayent point songe à cette question, qui paroit pourtant assez essentielle à la theorie de la manœuvre des Vaisseaux.* En efecto, esta y todas las demas determinaciones que produxo, hubieran sido de la mayor utilidad, á haber acompañado alguna práctica á la mucha Geometría que poseía.

Con Obra tan prolixa como perfectamente calculada,

lada, pues, á mas de lo dicho, se estendia á exâminar la curvidad de las Velas, sus fuerzas, y el exe donde estas pueden suponerse reunidas, que llamó *Línea de la fuerza motriz*, parecia que ya debian haberse concluido las controversias; pero con todo, el *Cavallero Renau* no quiso darse por vencido: replicó de nuevo, fundado en su descomposicion de fuerzas, y arguyó de modo, que, sin embargo de la sublime Geometría de *Bernoulli*, no pudo satisfacer este sino con decir, que no era lo propio la descomposicion de movimientos, quando se hacian en los fluidos, que quando se hacian en el vacuo. Estos absurdos se siguen de principios ciegamente concevidos; pero en fin el *Cavallero* calló, mas por prudencia, ó por el respeto debido á la autoridad de *Bernoulli*, que por quedar convencido.

Mientras duraron estos debates, *Mr. Parent*, de la Real Academia de las Ciencias de *París*, dió al Público (año 1713) su Obra intitulada, *Essais & recherches de Mathematiques & de Physique*, donde (Tom.2. pag.741.) se encuentra esta proposicion, *De la situacion, route & vitesse de une figure plane quelconque tiree dans un fluide*. Los principios sobre que fundó su cálculo fueron los mismos que los que usó *Jacobo Bernoulli*; pero con todo, por falta de atender á otros de Mechânica muy precisos, no logró las mismas resultas que este célebre Autor.

Salió asimismo en el propio tiempo (año 1697) otra Obra en folio mas difusa, que dió el *P. Pablo Hoste*, Profesor de Mathemáticas en el Seminario Real

Real de *Tolon*, intitulada *Theorie de la construccion des Vaisseaux*, que por seguir á otra que la precede y acompaña, intitulada *L'art des armées navales*, célebremente admitida de la Marinería, es muy conocida de esta: y por tanto no podiamos dexar al silencio su mérito. El *Padre* se esfuerza en ella á persuadir que las resistencias de los fluidos sobre las superficies que chocan, no son sino como las simples velocidades, y como los simples senos de los ángulos de incidencia: y aunque este es el primer error que algunos Geómetras le reprehenden, ya se verá en el discurso de esta Obra, que no es tanto el perjuicio que de él se origina, como la falta de principios sólidos de Mechânica en que tropieza, ya en las resistencias, como en la theórica del aguante de Vela del Navio, cabezadas y demas acciones de este: pudieramos citar vários pasages, pero fuera dilatarnos sin fruto, bastando lo dicho para que el Lector sepa el mérito que debe darle.

Despues de las citadas Obras no se vieron por algun tiempo sino algunas de mera práctica: ninguna razon fundamental precedia sus reglas, y solo un prudente juicio, pero sin cultivo, era el que enmendaba ó corregia, cayendo muchas veces en errores mas perjudiciales. La sublime theórica de los *Bernoullis*, poco ó nada adaptable á la práctica, no produxo sino la Obra que el año 1731 dió á luz *M.Pitot*, de la Academia Real de las Ciencias de *Paris*, con el título *La theorie de la manœuvre des Vaisseaux reduite en practique*: en efecto, sujeto á las reglas dadas en aquella theórica, las repite, y da da tablas de los ángulos que deben formar las Velas; pero, á mas de los tropiezos theóricos que en esta Obra se reconocerán, *M. Pitot* carecia enteramente de práctica, lo que le hizo juzgar á arbitrio de las operaciones del Mar y de los Marineros, atribuyendoles hechos que jamas se han visto.

Quatro años antes ya *M. Bouguer*, entonces Hydrógrapho en *Havre de Gracia*, nos habia dado un Escrito que mereció el premio de la Academia Real de *París*, año 1727, intitulado, *De la mature des Vaisseaux*. Esta Obra, en que florece muy particularmente la Geometría, concluye con reglas nada conformes con los deseos del Autor, é imposibles de practicarse. Sus ideas fueron poder aplicar á los Navios Velas sumamente mayores de las que llevan, á fin de aumentar su marcha, sin riesgo de que padezcan grandes inclinaciones; pero, por desgracia, este beneficio no se consigue sino en el único caso de ir á Popa: en lo demas, aun el mismo Autor reconoce la imposibilidad, y por tanto quiere que se baxen y ensanchen las Velas de dos á dos y media veces la medida que hoy tienen. Por esta práctica, las Velas y las Vergas estubieran continuamente anegadas debaxo del agua, puesto que aun en el estado que hoy se hallan, se ve alguna vez: y á mas de otros inconvenientes que se tocarían en el modo de sujetarlas y orientarlas, se verá en el discurso de esta Obra, que fuera casi, sino enteramente, imposible el que governase el Navío con semejante aparejo: consideracion que no previno el Autor, sin embargo de su mucha ciencia y perspicacia: estos son unos hechos que se descubren con alguna práctica, y que se dificultan sin ella.

En la célebre Obra intitulada, *A Treatise of fluxions*, que el año 1742 dió á luz el gran Geómetra *Colin Mac Laurin*, Profesor de Mathemáticas en la Universidad de *Edimburgo*, y Miembro de la *Real Sociedad de Londres*, se halla (Tom. 2. §.922.) resuelto tambien el problema sobre los ángulos que deben formar las Velas con la Quilla y con el viento: la solucion es como del gran Maestro que la produxo: conviene con la dada por *Juan Bernoulli*; pero los principios en que se funda son, que la velocidad del viento es infinita, respecto á la del Navío, y la deriva nula, asi como lo supuso este: sin ello, y sin los falsos supuestos de las resistencias, como se verá despues, hubieramos tenido la perfecta solucion que sobre el asunto se deseaba.

Todas estas Obras se reducen, sin embargo, á un limitado número de proposiciones sueltas: faltaba la recopilacion de todas ellas, la correccion de las erradas, y la adiccion de muchas que aun no se habian ofrecido. Esta Obra quedó para *M. Bouguer*, el mismo que en el año 1727 nos dió la *Mature des Vaisseaux*, pues en 1746 publicó su segunda Obra de Marina intitulada, *Traitè du Navire, de sa construccion & de ses mouvemens*: su extension, el particular como prolixo exâmen de la diversidad de asuntos que en ella se tratan, y el acierto de las soluciones geómetricas, casi reducidas al alcance de los principiantes, le dieron el honor que merecia en toda la Europa: lo cierto es, que á haber concurrido en tan digno Autor la práctica

tica necesaria para descubrir los errores que resultan de los falsos supuestos theóricos, nada nos hubiera quedado que apetecer: su eficacia é incesante tarea era preciso que hubieran producido una Obra completa. No nos detendremos en citar lo que en ella será siempre especial, ni lo que evidentemente se demuestra defectuoso, porque en el discurso de esta Obra se citan los pasages mas notables, omitiendo, por no dilatarnos, los de menor momento.

Ultimamente (año 1749) *Leonardo Eulero*, Director de la Real Academia de *Berlín*, nos dió dos Tomos en quarto con el título de *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*. El especial orden y sublime Geometria con que trata todos los asuntos tan gran Maestro, es digno de admiracion: hubiera sido un tesoro de la Ciencia, y particularmente de la Marina, si á semejante destreza hubiera acompañado la práctica que igualmente deseabamos en *M. Bouguer*; pero en fin sus soluciones sirven de guia para todo lo nuevo que se pueda proponer y ofrecer, que no es poco beneficio. Despues de estas, se han visto algunas pequeñas Obras mas, ya de práctica, ya de theórica; pero podemos asegurar, que lo que no se encuentra en estos dos célebres Autores, no es lo principal de lo que se ofrece en la theórica de la Marina.

Estos han sido los documentos que nos han servido de Norte en lo científico de la Marinería: la práctica por otro lado no es menos maestra, particularmente si, despues de bien exâminada y despejada de los accidentes que puedan hacerla variar,

no

no se conforma con la theórica. En este caso, no hay Científico que no crea, que algun supuesto falso precedió á esta: es preciso buscarle y corregirle, porque la práctica no es distinta de theórica: si no concuerdan, alguna de las dos está viciada. De este tenor se encuentran algunos casos de los mas principales del estudio del Marinero, sin embargo del cuidado de los Maestros que lo cultivaron; no por falta de la ciencia, sino de la confrontacion con la práctica. Una de las primeras, y aun mas importantes dudas que se me presentaron en mis combinaciones fue sobre el andar del Navío. Segun la theórica (*a*) no puede tomar, aun suponiendole de los mas veleros, mas velocidad que la $\frac{100}{336}$ de la que tubiere el viento, y esto navegando con todo el velamen, y á Popa, ó viento largo, cuyos dos casos parecen indiferentes para el Autor (*b*). La velocidad del viento es quando mas, segun *M. Mariote*, (*Traite du mouvement des eaux*, part. 1. disc. 3.) de 24 pies por segundo, porque dice, *c'est la vitesse ordinaire des vents incommodes, & contre les quels on a paine d'aller*, repitiendo lo mismo *M. Clare*, de la Sociedad Real de *Londres*, en su *Movimiento de los fluidos*, pag. 261: y será precisamente el viento que pueda suportar con mucha dificultad todo el Velamen, segun las experiencias que yo mismo he practicado, por las quales he quedado convencido de que, corriendo el viento de 18 á 20 pies, ya se ven los Navíos, yendo

á

(*a*) *M. Bouguer*, *Tratado del Navío*, Lib. 3. sec. 2. cap. 1.

(*b*) Se verá que el Navío anda mucho mas á viento largo, que á Popa; y esto sirviendo el mismo velamen en ambos casos.

á viento largo, precisados á ir recogiendo Velas por temor de no romper las Vergas ó los Masteleros. El mismo *M. Mariotte* repite en el propio Tratado (Prop. 2. disc. 3.) *supposant que le vent fasse 24 pieds en une seconde, comme il fait quand il est assez violent à l'ordinaire, mais pourtant bien moins que dans les grandes tempétes & ouragans.* En los mas violentos de estos, dice *M. Guillermo Derham*, de la Sociedad Real de *Londres*, quien hizo repetidas experiencias (Trans. Phylos. n. 313.), que no corre el viento sino 66 pies Ingleses por segundo, y quando mas de 70 á 90: añadiendo, que algunos corren 22, otros 44, otros mas, y que hay viento que no corre una milla por hora: lo que equivale á $1\frac{1}{2}$ pies por segundo. Por mis propias experiencias, ya citadas, hallé, que las Brisas de Verano, que reynan casi diariamente en Cadiz, corren por lo general 12 pies por segundo, poco mas ó menos: lo que conviene muy bien con lo que dicen los citados Autores: y así, suponer que un Navío aguante todo su Velamen, corriendo el viento 24 pies por segundo, es quanto se puede suponer; antes debe caber mucha duda en que pueda aguantar tanto. Esto supuesto, no pudiendo andar, segun la theórica hasta ahora calculada, mas que los $\frac{100}{336}$ del viento, corresponderá en el caso propuesto, que ande $\frac{100}{336}$ de 24, ó $7\frac{68}{356}$ pies por segundo, que equivalen á $4\frac{3}{5}$ millas por hora: quan apartado esté esto de 9, 10 y 11 millas que suele andar un Navío en semejantes casos, considérelo qualquiera Marinero que tenga práctica de ello. Tomemos al contrario el

el cálculo: supongamos que el Navío ande las 11 millas, como efectivamente las anda, que corresponden á la velocidad de $17\frac{1}{4}$ pies, y tendremos, que para esto el viento debiera correr $\frac{336}{100}$ de $17\frac{1}{4}$ pies, ó próxîmamente 58 pies Franceses, que equivalen á 62 Ingleses: de suerte que, para andar el Navío las 11 millas que sabemos que anda con todo Aparejo, casi necesita el uracan observado por *Derham*. Estas conseqüencias es suponiendo *M. Bouguer* la densidad del ayre $\frac{1}{576}$ de la del viento: tomandola de $\frac{1}{1100}$, añade que la velocidad del Navío ya no será sino el $\frac{100}{419}$ de la del viento: de suerte, que las $4\frac{3}{5}$ millas de su andar, ya no deben ser sino $3\frac{2}{3}$; ó la velocidad del viento, para que le haga andar las 11, de $77\frac{1}{3}$ pies Ingleses, uracan bastante completo.

Esta falta de correspondencia me pareció, á primera vista, que podria depender de algun error en el cálculo; pero formadas nuevas fórmulas, como se verán en el Cap. 1. del Libr. 4. Tom. 2 de esta Obra, solo sirvieron para confirmarle: deduciendose asimismo que á bolina solo puede andar el Navío, con todo su aparejo, $\frac{131}{1000}$ del viento, y que debiera correr este $77\frac{1}{3}$ pies Ingleses por segundo para hacerle andar solo seis millas por hora, como andan muchos Navíos: lo que con mas razon es imposible, á causa de no poder, con mas motivo, suportar todo su aparejo con tan violento viento.

Sin embargo de esto, aun nos faltaba otro exâmen que hacer, pues todas estas determinaciones pen-

pendian de suponer que el Navío, andando 11 millas por hora con todo el aparejo, no fuese sino solo de la accion del viento, que corriese 24 pies por segundo: cantidad asignada solo por la fe que dabamos á las observaciones de *Mariotte* y *Derham*. Era preciso ver si esta velocidad no sería quizas mayor, en cuyo caso nos acercariamos mas á las determinaciones del cálculo. La experiencia era solamente la que nos habia de sacar de esta duda: para que el Navío ande las 11 millas, es preciso que tenga $17\frac{1}{4}$ pies de velocidad por segundo; y si el viento que producía este efecto no fuese mas que de 24 pies de velocidad por segundo, la velocidad de aquel debia ser próxîmamente los $\frac{2}{3}$ de la de este, y no $\frac{1}{4}$, como del cálculo se habia deducido. Para esto escogí un Bote, y mientras que navegando en él á viento largo se media su velocidad, se estaba midiendo en tierra la del viento, por medio de soltar pequeñas plumas ligerísimas, y observando con una muestra de segundos el camino que andaban en un tiempo dado. Despues de repetir esta experiencia algunas veces, diré: que con admiracion mia, no solo reconocí que no podian aumentarse los 24 pies, sino que debian disminuirse de mucho: el Bote, en substancia, se encontró que andaba muy poco menos que el viento: de suerte, que corriendo este de 10 á 11 pies, sacó el Bote cerca de 10: phenómeno bien extraño, para los que creyeron, que la velocidad del viento era casi infinita, respecto á la del Navío; pero no por ello es menos verdadero. Esta experiencia se puede repetir diariamente en qualquiera Puerto donde se dé la comodidad de pa-

pasar los Barcos á la Vela de un lado á otro, como sucede en la Bahía de Cadiz. De esta Ciudad á la del Puerto de Santa Maria hay cinco millas, ó 30400 pies Ingleses: los Barcos hacen este tránsito corriendo el viento largo ó fresco, ú de 12 pies por segundo, en $\frac{3}{4}$ de hora, ó 2700 segundos: lo que, partiendo por ellos los 30400 pies, da $11\frac{7}{27}$ de velocidad al Barco. De aqui se ve claramente, que ya no corresponde conceder mas de 24 pies de velocidad al viento para que ande el Navío $17\frac{1}{4}$, particularmente suponiendo á este muy velero.

Ya tampoco hay con esto mas asilo: es preciso y evidente, que la theórica enseñada sea falsa, ó por mejor decir, que lo sean los principios ó suposiciones sobre que se fundó. Estos se reducian á sentar, que la fuerza del viento en las Velas, asi como la de las aguas en el costado del Navío, son como las areas chocadas, como los quadrados de las velocidades y senos de incidencia con que las chocan los fluidos, y como las densidades de estos: á que podia añadirse haber supuesto las Velas planas no siendolo, particularmente en caso de viento fresco. Esta ultima suposicion, muy lexos de perjudicar era favorable, puesto que con ella se daba mas fuerza á la Vela que la que efectivamente tiene; y por tanto debia resultar mas velocidad al Navío, como se deseaba. Que la fuerza sea como las densidades de los fluidos, es principio tan evidente, que no creo se le haya ofrecido á nadie ponerlo en duda: y lo mismo parece que debiera suceder en quanto á seguir la razon de las areas chocadas, como hasta ahora se ha creido. Todo el

error

error debia recaer, por consiguiente, sobre suponer que las fuerzas, ó lo que es lo mismo, las resistencias de los fluidos fuesen como los quadrados de sus velocidades, y senos de incidencia. Este principio estaba sin embargo recibido de los primeros Geómetras y Physicos de la Europa, ó generalmente de todas las Academias creadas en ella, y con tanta razon y aplauso celebradas: esta consideracion debia causar el mayor respeto, y quizas una entera separacion de mayores exâmenes, á no vernos autorizados de los mismos Geómetras para dudar. El Cavallero *Newton* es de los que mas esfuerzos hicieron para asegurarse de principio tan esencial, y para proceder con acierto en la theórica de los proyectiles, despues de muchos exâmenes theóricos (*Philosophia naturalis* lib. 2.) aunque solo de pura meditacion, y no de sólidas demonstraciones Geométricas, y de atenerse por ellas á que las resistencias habian de ser como los quadrados de las velocidades, quiso confirmarlo por experiencias, haciendo oscilar Péndulos de varias materias y magnitudes en los fluidos. (*a*) La resulta de estas es tan apartada de lo que habia imaginado, que mas próximamente concluyen, que las resistencias son como las simples velocidades: lo que le hizo confesar que no estaba muy confiado de sus experiencias, y que deseaba se repitiesen. *Leonardo Eulero* en su *Ciencia Naval* ya citada (Cap. 5 Prop. 49) trahe una resolucion Geométrica sobre lo mismo, en que no respira sino su suma habilidad y des-

(*a*) Vease el Escolio de la Prop. 17. Libr. 2. Tom. 1. de esta Obra.

destreza: la conclusion es, (*a*) que la fuerza ó resistencia de los fluidos es igual al duplo peso de una coluna de agua, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo, para obtener la velocidad con que se mueve: altura que es como los quadrados de las velocidades; pero qué disonancia no causó esta solucion al mismo Autor? quando confiesa que la fuerza no puede ser sino igual al peso de una sola coluna, y no de dos. En efecto, toda su demonstracion se funda en suponer, que al moverse el cuerpo en el fluido, solo impele de este aquel único que desocupa; sin hacerse cargo de que este impele al que tiene delante, este otro al que se le sigue: y asi sin término, ó sin que sepamos quanta es la cantidad de fluido que realmente se mueve, como lo confiesa el mismo Cavallero *Newton* (Escolio de la Prop. 35. Lib. 2. *Philosophia natural*). *Daniel Bernoulli*, bien conocido en la República literaria, estiende aun mas sus cálculos, (*b*) manifestando la diferencia que resulta de ser ó no ser los cuerpos elásticos; pero como quiera la solucion es la misma, y solo resulta en el primer caso dupla fuerza: de suerte, que nos quedan igualmente las propias dudas. Menos estraño debe aun hacerse todo esto si se considera que en las theóricas expuestas no se supone el fluido sino destituido de toda gravedad, y por consiguiente de toda presion de unas partículas respecto á las otras; lo que

(*a*) Vease el mismo Escolio.

(*b*) Comentarios de la Academia de Petersbourgo, M. M. de Junio y Octubre de 1727.

que no cabe, ni en nuestro ayre, ni en nuestras aguas: estos fluidos, quando la velocidad de los cuerpos no es muy grande, impelen estos por detras con la fuerza que de su gravitacion les queda, lo que tambien reconoció el mismo *Newton*, y por consiguiente se disminuye la resistencia; al contrario, si la velocidad es grande, no tiene tanto lugar la gravitacion para actuar detras, y la resistencia debe ser á proporcion mayor. Bien han reconocido algunos despues este efecto, (*a*) y han confesado, que las resistencias de nuestros fluidos no pueden ser como las theóricas las describen regularmente.

Ya no debemos, pues, extrañar que la velocidad calculada, y que deben tomar los Navíos, esté tan apartada de la que realmente toman: los supuestos sobre que se fundó son falsos; pero no es esto aun la peor conseqüencia: si la resulta en la velocidad es tan sumamente errónea, cómo podemos asegurar tampoco ninguna de las demas deducciones, ya sean de los ángulos que deben formar las Velas, con el viento, el del Timon, ni tampoco la deriva, ni los aguantes de Vela, y demas acciones del Navío? Todo debe estar viciado, ó á lo menos debe discurrirse asi. El asunto pedia un sério exâmen, y este es el mismo que me propuse, sin escusar trabajo ó fatiga.

Era menester empezar por seguras experiencias, que acreditasen la duda de las resistencias: buscar despues, por vias diversas, ó por las mismas con que actua la Naturaleza, otra theórica de ellas; y ultimamente exâminar si esta convenia, no solamente con la marcha de los Navíos, sino con todas sus acciones, y asimismo con todos los efectos ó movimientos que en la Naturaleza se observan. El empeño, aunque arduo, produxo aun mucho mas de lo que yo mismo esperaba. La fuerza del agua corriente sobre una tabla que á ella expuse, no solo la hallé en ocasiones quatro veces mayor de lo que la asigna *Mr. Mariotte* (*Tratado del movimiento de las aguas*, Disc. 3. Part. 2.) sino que en otras lo era hasta ocho veces mayor: porque no solo dependia la fuerza de la magnitud del area, ó superficie de la tabla chocada, como hasta ahora se ha creido, sino tambien de su mayor profundidad en el fluido: de suerte que, puesta la misma area ó tabla cortada en paralelogramo rectangulo, con su lado mayor horizontal, padecia mucha menos resistencia, que puesto el propio lado vertical: es observacion utilisima para la Marina, y que hasta ahora á nadie se le ha ofrecido, no obstante ser conseqüencia clara de la gravitacion; pues si esta actua en las resistencias como acabamos de decir, siendo aquellas mayores á mayores profundidades, porque mayores colunas de peso cargan, mayores deben ser tambien las resistencias á mayores profundidades. Las diferencias que de solo este hecho resultan son tan excesivas, que no podia menos de variar con extremo todo lo hasta ahora calculado: si la tabla tenia de largo quatro veces su ancho, la resistencia, con su lado mayor vertical, era proxima-

(*a*) Benjamin Robins, de la Sociedad Real de Londres, *New principles of Gunnery*. Cap. 2. Prop. 1.

mamente dos veces mayor que puesto el mismo lado horizontal: esto es, próxîmamente como las raices quadradas de las alturas, ó profundidades de la tabla en el fluido: y asi, si un Navío tiene sus dimensiones lineares duplas que otro, que le es semejante, las areas chocadas de aquel serán quadruplas de las de este, y segun lo hasta ahora enseñado, sus resistencias fueran como 4 con 1; pero, segun estas observaciones, ya no deben ser sino próxîmamente como 5 ⅗ con 1: diferencia, como se ve, bastantemente excesiva.

A mas de esto manifestaron las experiencias claramente, que no seguian las resistencias la ley de los quadrados de las velocidades, y senos de ángulos de incidencia, sino próxîmamente la de las simples velocidades y senos de incidencia, segun lo manifestaron tambien las experiencias del *Cavallero Newton*.

Ya se tenia con esto seguridad del error que se padecia en las resistencias theóricas establecidas, y recibidas en general, aunque con las dudas, tropiezos é imperfectas ilaciones que se han visto. No bastaba aun esto, era precisa la nueva theórica que diese iguales conseqüencias, sin ello no se podia introducir en el cálculo; pero parecia á primera vista que debiamos tener peores deduciones: si las resistencias eran efectivamente mayores, cómo podian resultar mayores velocidades en los Navíos, segun pedia la práctica? No obstante, considerando que si las resistencias de las aguas en la Proa aumentaban, tambien debian aumentar, por iguales razones, las fuerzas del viento en las Velas, no hubo para qué detenerse. Solicitada la theórica por medio de la relacion entre la velocidad con que sale el fluido por un agujero, y el peso que suportara la superficie que lo tapara, ya sea en el caso del reposo, como en el del movimiento, segun se verá por extenso en el Libro 2 de este Tomo, se halló la mas particular conformidad entre sus fórmulas y las experiencias; á lo menos en las relaciones con que se hacen las fuerzas, ya que no en sus medidas absolutas. Por esta nueva theórica las resistencias son como las densidades de los fluidos, como las areas chocadas, como las raices quadradas de sus profundidades en los mismos, y como las simples velocidades, y senos de incidencia con que se chocan. Pero no es esto aun el todo, porque este es solo el caso en que la superficie esté enteramente sumergida en el fluido, y que la parte anterior del cuerpo sea semejante á la posterior: quando hubiere parte de aquella fuera, resulta una nueva cantidad en la resistencia, que no tiene dependencia alguna con el area chocada, y que solo resulta de la velocidad; pero no es como las simples velocidades, ni como sus quadrados, sino como sus quadrados-quadrados. En ocasiones resulta tambien otra tercera cantidad, que es como los quadrados de las velocidades, y como las superficies chocadas, que corresponde precisamente al caso que hasta ahora se ha dado: y aun en otras otra quarta, que ninguna dependencia tiene de las velocidades, sino solo de las areas chocadas. En general las resistencias, segun esta theórica, dependen de quatro cantidades distintas, de las quales, segun las oca-

ocasiones, se desvanecen algunas; y por dicha, para el asunto de la Marina que nos proponemos, quedan de ordinario en solo una, que es la primera de las referidas; aunque en las ocasiones de muchisima velocidad no podemos escusar el hacer atencion á la segunda: por lo que toca á la tercera, única de que se ha hecho caso hasta el presente, es por lo ordinario inutil.

Ya se tenia con esta confrontacion un cimiento del edificio; pero muchas experiencias en pequeño, no tienen iguales resultas en lo grande ó extenso, porque en este caso se hacen mas sensibles los efectos de los accidentes, y es lo que precisamente sucedia en las acciones del Navío, comparadas con las experiencias que hasta ahora se han practicado. Pero no tubo iguales resultas nuestra theórica, pues quando podiamos esperar mayores diferencias, por el aumento hallado de las resistencias, se encontró la mas perfecta resulta que se podia aguardar. Con ella se halla, que las Embarcaciones deben andar precisamente lo que andan, sease á Popa, como á viento largo y de bolina; pero lo que es mas, que no solo andan algunas á viento largo casi tanto como el mismo viento, sino que algunas de ellas andan mas que el propio viento: paradoxa que estrañarán muchísimos; pero que sin embargo se verá demostrada, no en los terminos que lo creyó *Juan Bernoulli*: (*a*) esto es, de que se pudiera largar casi infinita Vela, supuesto imposible para la práctica, sino en terminos de hecho, ú de lo que actualmente su-

(*a*) Obras de *Juan Bernoulli*, Tom. 2. N. XCIII.

sucede con muchas Embarcaciones, como Galeras, Xabeques, &c.

Hallada esta exácta conformidad de nuestra theórica de resistencias con la práctica, asi en pequeñas superficies, como en las muy ámplias de los Navíos, se trató tambien de aplicarla, para mayor verificacion, á otros dos casos diversos. El primero, produciendo una nueva theórica de los *Voladores*, ó por otro nombre *Cometas*, que vuelan los Niños; pues aunque solo sean instrumentos propios para la comun diversion de ellos, han sido en este caso muy adequados para verificar asunto tan importante: y asi, al fin de este Tomo, se da en Apéndice todo el cálculo, comparandolo con el que resulta del systhema antiguo, para que se conozca con evidencia el verdadero.

El segundo caso á que se aplicó tambien la theórica, es á las experiencias que *Mr. J. Smeaton* hizo con una Máchina propia de su invencion, para averiguar la fuerza con que el agua actua en las ruedas que mueven, á imitacion de los Molinos: se comparan veinte y siete experiencias con las dos theóricas, la que hasta ahora se ha seguido, y la nueva que damos, y se halla que corresponden exâctamente con esta, quando se apartan enteramente de la otra; cuya resulta no es tanto mas favorable quanto no se puede dudar de experiencias agenas, hechas con tanta anticipacion.

Ya teniamos con esto corregido el error de principio: faltaba entrar despues en el exámen de una materia dilatadísima, y se puede decir mas que nueva, porque de ordinario cuesta mas trabajo cor-

corregir un vicio, que plantear de nuevo la obra. No se limitaba el error à solo las velocidades, como hemos visto, era conseqüente que lo hubiese en la deriva, en los ángulos que deben formar las Velas con la Quilla, y con el viento, y en los aguantes de Vela, porque todo esto depende de la relacion de las resistencias, y esta variaba tanto; particularmente en lo ultimo, porque se habian de equilibrar mayores esfuerzos del viento en las Velas, con los mismos que sufre el costado. Asimismo el modo de calcular las resistencias debia ser muy diverso, y los cuerpos que debian padecer las mínimas muy distintos, pues una porcion de costado próxîmo á la superficie del agua, ya no padecia lo mismo que otros iguales y semejantemente chocados, colocados á mayor profundidad.

Extra de esto, no eran solo las velocidades del Navío en lo que se tropezaba: el govierno era otro asunto en que se veian igualmente algunos errores. El exe de las resistencias, y el de la fuerza motriz debian concurrir, segun la theórica hasta ahora dada, para equilibrar el Navío, y lograr un perfecto govierno; sin embargo, en la práctica el exe de las resistencias está próxîmamente mas á Popa que el de la fuerza motriz, yendo con todo el Velamen, de $\frac{1}{7}$ de toda la longitud del Navío, y por consiguiente, debia arrivar este de continuo, y con gran fuerza, segun lo enseñado; pero al contrario, el Navío es mas propenso á orzar, particularmente con viento fresco: es, pues, preciso que haya algun vicio en esta theórica, ó que se hayan omitido en ella algunas consideraciones esencialísimas: en efecto se

encuentran dos, una la curvidad de la Vela, que conduce el exe de la fuerza motriz mucho mas á Popa: y otra la inclinacion del Navío, que lo conduce mucho mas. Si estas alteraciones fueran constantes, no hubiera sin embargo mucho que corregir en lo enseñado; pero son variables, segun la fuerza del viento, la figura de las Velas, y el aguante del Navío: si hubieramos colocado la arboladura conforme se nos advertia, hubiera sido imposible el govierno, y muchísimo peor si se le hubieran dado las medidas que *Mr. Bouguer* ha pretendido.

El balance y cabezada no es asunto donde haya tropezado menos la theórica hasta ahora dada: en ella no se considera mas accion que la que resulta de un movimiento oscilatorio, supuesto el Navío un péndulo, y en esta inteligencia, todos sus balances y cabezadas deben executarse en el mismo tiempo: ninguna relacion se ve que tenga, en este supuesto, el balance con la ola, sin embargo que es su verdadera causa: y aunque puede creerse que se refiere la theórica á los segundos ó terceros balances, que se suponen libres de la misma ola, quien puede dudar que sean los primeros de mayor eficacia? Que para estos no corresponda la theórica se hace evidente, porque ningun balance se puede cumplir que no haya hecho su transito la ola, y estas no pasan en el mismo tiempo, sino en muy diversos, segun sus magnitudes: de suerte, que se hace de admirar como se ha podido creer y admitir tan generalmente iguales errores. En estas acciones no se han considerado tampoco los efectos de de las olas ó golpes de Mar, y parece que los cálculos no se han propuesto sino para Mares de delicias, no para las que pasan por encima de los Navíos, que los inundan, y que los hacen perecer. Una Embarcacion se eleva con mas facilidad sobre la ola que otra, quien duda que esta estará mas expuesta á que la sobrepuge ó inunde, y aquella á romper sus arboladuras? Es menester considerar, por consiguiente, no solo el tiempo en que se dá el balance, sino su magnitud, y la elevacion de las aguas en el costado. A estos accidentes estaban expuestas las Proas agudas, ú de menor resistencia, que los Geómetras han deseado tanto: precisamente habian de estar de continuo sumergidas debaxo de las aguas, y no solo corrieran los riesgos de un naufragio, sino que aun nada ganarian en la marcha, unico objeto que de ordinario se ha tenido presente, pues las resistencias crecieran á medida que mas se sumergieran é inundaran las Proas con las olas que las chocaran.

De todos estos errores, y algunos mas que, por no dilatarnos, escusamos referir, hemos procurado libertar nuestra theórica; pero para exponerla nos faltaban muchos documentos de mechánica, particularmente sobre la accion y movimiento de los fluidos. Pensamos, pues, por esto en exponerlos desde los principios, incluyendo todo lo que igualmente conduce à la theórica de las Máchînas simples y compuestas, sus fricciones, choques de cuerpos, y sus acciones, pues todo es propio de la Marinería, y conducente á la resolucion de tan intrincadas soluciones como las que se verán. La idea que nos hemos propuesto es como se sigue.

El primer Tomo se divide en dos Libros: el primero de estos contiene 9 Capítulos. El primero trata de las Definiciones y Axîomas, ó leyes del movimiento, con los principios deducidos de la experiencia de como actua en él la gravedad: y el segundo de la composicion y descomposicion del mismo movimiento, y de las fuerzas que actuan. El tercer Capítulo contiene todo lo que corresponde al centro de gravedad ú de las masas, asi como del de las potencias ó fuerzas: con las fórmulas de sus velocidades, longitudes que corren, y tiempos en que las corren. El quarto trata de la rotacion de un systhema qualquiera de cuerpos libres, ó ligados entre sí: del ángulo giratorio ú de rotacion que prescriben en virtud de qualesquiera potencias que actuen en él: con la demostracion de que girará del mismo modo estando su centro de gravedad fixo, que estando libre: y de que este ha de baxar en qualquiera Máchîna ó cuerpo lo mas que fuere posible: agregandose, como conseqüencia de aquella theórica, la de los Péndulos, y la de las Palancas de los tres generos, no considerandolas solamente como hasta aqui en el reposo, sino en el de movimiento, y especulando sus fuerzas, resistencias que deben tener en sus fibras, y en el todo de sus partes.

El Capítulo quinto trata del exe y radio de rotacion, ú del punto sobre que gira un systhema ó cuerpo, en que se manifiesta que este punto jamas está fixo, á menos que no sea el centro de gravedad. El sexto encierra toda la theórica de la percucusion de los cuerpos, en que nos hemos dilatado algo, por motivo que es el principio de los Capítulos siguientes, y por aclarar una materia que hasta ahora ha sido el objeto de muchas controversias entre los mas respetables Autores, como es la qüestion de las fuerzas vivas y muertas: se dan fórmulas en que se hallan los tiempos, las velocidades, las acciones, y las longitudes corridas por los cuerpos en el acto del choque, como tambien de las fuerzas con que actuan á qualquier tiempo: aplicando las soluciones á la práctica, y experiencias de los Autores de Phisica experimental, á fin de que se vea la exâcta correspondencia de mi theórica con la práctica, y los efectos admirables del choque: concluyendo con aclarar el error en que han estado varios Autores célebres quando confundian los centros de oscilacion y percusion, pues aunque en ocasiones se unan, no siempre son el mismo.

El Capitulo septimo contiene el movimiento de los cuerpos que insisten sobre planos inclinados, asi como por curvas: se da el tiempo de su caida por la cycloide, y se aplica á los Péndulos, hallando aquel en que estos oscilan, y la longitud que corren los cuerpos cayendo verticalmente en igual tiempo que aquellos terminan una oscilacion: concluyendo con los casos en que giran los cuerpos cayendo por el plano inclinado, ó curva.

El octavo se reduce á una nueva theórica sobre la friccion ó rozamento: asunto que hasta ahora no se ha visto que corresponda á las experiencias, sin embargo de haberse tratado por los Geómetras de la mayor graduacion: se demuestra que su fuerza

no

no es solo proporcional al peso que la causa, como creyeron *Mr. Amontons*, y *Mr. Bilfinger*: y se concluye manifestando los tropiezos que se ofrecen en la theórica dada sobre el asunto por el muy célebre *Leonardo Eulero*, y el como se concilian todos los hechos con la nuestra.

Ultimamente concluye el primer Libro con el nono Capítulo, que trata de las Máchînas simples, Plano inclinado, Cuña, Hacha, Tornillo, Exe en peritrochîo, Carrucho ó Moton, y Aparejos: se dan sus theóricas por extenso, atendiendo á la friccion que padecen, lo que es preciso para deducir sus verdaderas fuerzas, hallando las máxîmas y mínimas de estas, y se aplica el todo á algunos hechos de práctica.

El Libro segundo encierra el tratado de los fluidos. En el Capit. 1. se determina la accion y fuerza con que actuan estos sobre los cuerpos en el caso del reposo, y las condiciones que deben concurrir para que se efectue este. El Cap. 2. trata de la fuerza con que en el movimiento actuan los fluidos contra una diferencial de superficie ó area muy pequeña: se determina esta fuerza en todos los casos de movimiento horizontal, vertical, ú obliquo, asi como de distintas direcciones y ángulos de incidencia, y se concluye manifestando las varias theóricas que sobre el asunto se han dado por los mas célebres Geómetras, y los errores á que han conducido, aplicadas á los fluidos graves. El 3. Cap. concluye las mismas fuerzas en las superficies planas: manifiesta los diversos casos que ocurren de hallarse ó nò las mismas enteramente sumergidas en

los

los fluidos, por causa de la desnivelacion que resulta en estos: y finaliza explicando una diferencia que occurre de lo expuesto en una proposicion de la Philosophia natural del *Cavallero Newton*; siguiendo despues el Cap. 4. en que se hallan las mismas fuerzas en la accion contra qualesquiera superficies.

El Cap. 5. trata de las resistencias horizontales que padecen los cuerpos movidos en los fluidos, y de la que padecen quando estos se mueven contra los cuerpos, pues no es el mismo caso, como hasta ahora se ha creido: se combinan las experiencias para ver como conviene con estas la relacion que determina la theórica. En el Cap. 6. se hallan las resistencias verticales que igualmente padecen los cuerpos, sease movidos estos ó los fluidos: y se hace ver la gran diferencia que resulta de un caso al otro. En el 7. Cap. se demuestra la alteracion en las resistencias que causan las desnivelaciones en los fluidos que proceden del movimiento de los mismos cuerpos: y lo que dependen aquellas de la longitud de estos. El 8. trata de las líneas y superficies que padecen la máxîma y mínima resistencia, asi como de las que deben cubrir las bases, ó que hayan de encerrar un determinado cuerpo, logrando la misma propiedad: y se concluye con una Tabla de las abcisas y ordenadas de la curva que padecerá la menor resistencia, comprehendiendo el mayor espacio.

El Cap. 9. expone las fórmulas de la relacion que hay entre los tiempos, espacios corridos, y velocidades que toman los cuerpos en su movimiento progresivo por los fluidos: demuestra que no llegan á obtener sus máxîmas velocidades sino despues de tiempos y espacios corridos infinitos; pero que sin embargo á corto tiempo las adquieren muy poco menores que las máxîmas: y concluyen con la theórica de las olas, en que se dan sus velocidades y magnitudes. El 10. trata de los momentos que padecen los cuerpos en su movimiento progresivo horizontal, y de la estabilidad que de ellos se origina, tanto en el caso del reposo, como en el de movimiento. El 11. de la inclinacion que en aquellos resulta, impelidos por qualesquiera potencias: con las varias soluciones que en el mismo caso se ofrecen, segun las figuras de los mismos cuerpos; á que se añaden algunas prevenciones para evitar los errores á que pueden conducir las fórmulas hasta ahora dadas, sino se consideran con las suposiciones precisas, manifestando el todo con exemplos.

El Cap. 12. contiene las fórmulas que expresan los momentos que padecen los cuerpos quando giran en los fluidos, sobre un exe que pasa por su centro de gravedad: y el 13 las de las velocidades angulares de los mismos, y longitudes de los péndulos que oscilan isochronamente con ellos, como asimismo las máxîmas y mínimas velocidades que adquieren en sus vibraciones: concluyendo despues de esto el Tomo con los dos Apéndices, sobre la theórica de los Cometas que vuelan los Niños, y el de la resistencia de los fluidos en las Máchinas, para confirmacion de nuestra theórica de las resistencias, segun ya diximos.

El Tomo segundo trata todo de Marina, y se divide en cinco Libros. El primero contiene lo per-

perteneciente al conocimiento y fabrica de la Nave. El Cap. 1. de este da una idea general de las Embarcaciones, de las propiedades que las convienen, de su figura, del modo de governarlas, y de la disposicion y pluralidad de sus Mástiles y Velas. El 2. trata del infinito número de distintas Embarcaciones que pueden resultar, y de su fábrica, segun el uso práctico mas antiguo: el 3. prescribe la theórica y modo de delinear los planos de aquellas fábricas, segun el uso de varias Naciones. El 4. enseña el modo de delinear los planos, segun lo que hoy practican los Constructores mas especulativos y prácticos de las dos Naciones Francesa é Inglesa: y el 5. un nuevo méthodo geométrico de describirlos, formando el todo de las Quadernas desde un extremo al otro de la Embarcacion por arcos de círculo, y evitando el mucho número de tentativas que en los otros méthodos no son evitables. El 6. describe en los planos, por los diversos modos, las obras muertas: y el 7. concluye el Libro con igual descripcion de las cubiertas.

El Libro segundo exâmina el cuerpo del Navío y sus centros: sus fuerzas, resistencias y momentos. El Cap. 1. trata de la flotacion y línea de agua del Navío, de su peso total y del de su casco: se da un exemplo de la práctica en el cálculo: se enseña el modo de variar la línea de agua alterando el Navío: se dan los volúmenes que ocupan los de diversas clases, con la relacion que tienen dichos volúmenes con las dimensiones lineares de los Buques, y el error de no reglar los Constructores el grueso de maderas, segun la debida proporcion

cion que se necesita. Se dan asimismo reglas fáciles para determinar la magnitud de los Navíos, segun la Artillería y variedad de pesos que deben suportar, en atencion á que el todo, y aun las Tripulaciones, siguen próxîmamente la razon de los cubos de sus dimensiones lineares: y se concluye con la relacion en que estan, y deben estar los Buques con el peso total de los mismos, de sus pertrechos, y demas necesarios que componen el todo del armamento. El Cap. 2. trata del modo de hallar el centro del volúmen que el Navío ocupa en el fluido, aclarando la regla con un exemplo: se explica la variacion que puede tener dicho centro, no solo por variar la línea de agua ú de flotacion, sino tambien por variar el volúmen del Buque en qualquiera de sus partes; y se termina con inquirir facilmente el mismo centro en otros Navíos semejantes, hallado ya el de uno, aunque entre ellos haya algunas cortas variaciones.

El Cap. 3. enseña el modo de hallar la altura del metacentro sobre el centro de volúmen, y se da un exemplo para su facil inteligencia: añadiendo la regla y modo facil de hallar lo mismo en los Navíos semejantes, ú de muy poca diferencia; concluyendo con hacer iguales exâmenes y averiguaciones por lo que toca de Popa á Proa, asi como en lo primero se hizo para de un lado á otro.

En el Cap. 4. se enseña el modo de hallar el centro de gravedad del casco, y del todo del Navío, por medio de la colocacion y peso de todas sus partes, haciendo manifiesta la regla con un exemplo. Se da igualmente el modo de hallar dicho cen-

centro por medio de una experiencia facil, practicada en otro Navío, atendiendo despues á la diferencia entre ambos, que expone una pequeña fórmula, de la qual se infieren varios Corolarios, no solo sobre la variacion en altura del centro de gravedad, sino sobre la distinta inclinacion ó aguante que tendrá el Navío, siempre que se varie en qualquiera parte de él su volúmen y peso. Se aplica todo esto á varios exemplos de otros Navíos, y se demuestra ultimamente la equivocacion en que cayó *Mr. Bouguer*, asegurando, que en el Navío de tres puentes se eleva el metacentro sobre el centro de gravedad de solo uno ú dos pies.

El Cap. 5. enseña el modo de calcular las resistencias horizontales que padece un Navío, tanto directas, ó por la Proa, como laterales, ò por el costado, con el orden en que se deba seguir el cálculo para evitar confusion. Dos solas cantidades resultan de este, una que es como las simples velocidades, y otra que es como los quadrados-quadrados de las mismas, y que depende del efecto de la desnivelacion de las aguas en Proa y Popa: las otras dos cantidades que ocurren en las resistencias, son despreciables en la accion del Navío. Se dá despues el modo de calcular la alteracion de aquellas resistencias en caso de sumergirse el propio Buque algo mas ó menos, ú de sacarlo de aquella estiva primera: y se concluye dando fórmulas faciles para deducir las mismas resistencias en otros Navíos de fondos semejantes, por las ya dadas del primer Navío, advirtiendo, que la cantidad, que es como los quadrados-quadrados, se hace despreciable en Buques grandes, lo que no en pequeños.

El Cap. 6. enseña el modo de calcular los momentos que padece un Navío en sus inclinaciones, que llaman los Marineros aguante de Vela, tanto en el caso de hallarse en reposo, como en el de hallarse en movimiento, porque pueden ser distintos: se enseña igualmente á calcular la variacion que en ellos resulta quando el Navío se cala mas ó menos en el fluido: y se dan fórmulas para hallar facilmente los que corresponden à qualquier Navío semejante en sus fondos, por los ya hallados para el primero; y se concluye manifestando quanto conduce para el buen aguante de Vela, el que el centro de las resistencias horizontales esté lo mas alto que fuere dable, y que los costados de los fondos en las inmediaciones de la superficie del agua estén en quanto sea posible verticales, pues no dependen dichos aguantes de solo la seccion horizontal del Navìo, hecha por la superficie del agua, segun se ha creido y enseñado hasta ahora.

En el Cap. 7. se trata de los momentos que padece la Nave en su movimiento de rotacion, que los Marineros llaman *virar*: se ve por ellos lo propenso que debiera ser á arribar, sino fuera por otras fuerzas que se lo impiden: se explica la variacion que resulta en los mismos momentos, quando el Navío esté mas ó menos calado en el fluido; y se dan fórmulas para hallar los que corresponden á qualquiera Navío semejante en los fondos al primero.

El Cap. 8. trata de los momentos que padece la Nave

Nave en su rotacion, que los Marineros llaman *cabezada*: con la misma extension y circunstancias que se especularon los que resultan en el balance; y se dá fin al Libro 2. con el Cap. 9. que trata de los momentos que padece la Nave, y que ocasionan lo que los Marineros llaman quebranto: se demuestra la causa de donde procede, y que la fuerza de un solo costado fuera capaz de precaverle casi enteramente, á no ser por el juego que ordinariamente resulta en las maderas y herrages, por cuyo motivo es preciso precaverle; aunque la principal atencion para evitarle, consiste en la figura de los fondos del Navío, y en recoger lo mas que sea posible sus diversos pesos hacia el centro de gravedad de aquel. Se exâminan los mismos momentos en caso de que el Navío esté vacío, y se evidencia lo mas que está expuesto en este caso al quebranto: despues de lo qual se trata del que resulta tambien de un lado al otro, que hasta ahora no se ha considerado, sin embargo de ser bien eficaz y perjudicial, mayormente en los Navíos de Guerra, quando sus baterias se elevan mucho sobre el centro de gravedad: advirtiendo el mal orden con que se reparten, y las reglas que deben seguirse para evitar las desgracias que por ello suceden con mucha freqüencia.

El Libro tercero trata de las Máchînas que mueven y goviernan el Navío. El Cap. I. se estiende sobre las Velas, sobre la figura que toman, y sobre la fuerza y direccion con que actua el viento en ellas. Se halla la curva que forman muy distinta de la cadenaria que hasta ahora se ha creido to-

tomaban, y se dan las abcisas y ordenadas que la describen. Se determina la absoluta fuerza con que actuan, y se hace ver que esta no depende de solo el ángulo que forma el viento con las Vergas, sino tambien de la mayor ó menor curvidad que en sus extremos tenga la Vela, la qual se altera segun la velocidad del viento, y segun la magnitud y calidad de la misma Vela. Se determina asimismo la direccion en que actuan estas, y el centro de sus fuerzas, que cae siempre mas á Popa que el centro de las mismas Velas, segun la curvidad y anchura que estas tubieren, lo que es uno de los motivos que obligan al Navío á orzar. Se aplica despues la theórica á varios exemplos prácticos, y se concluye por ellos la mucha deriva que deben padecer los Navíos, solo por aumentar el viento, y sin atender á las olas ó golpes de Mar, que ha sido, segun los Marineros, la sola causa de ella. Se dan Tablas de los pies quadrados que contiene cada Vela: del centro de gravedad de cada una de ellas; y asimismo de sus momentos, tanto verticales como horizontales, con extension à todos los casos que mas generalmente se ofrecen en la práctica.

El Cap. 2. trata del Timon, de sus fuerzas respective á los diversos ángulos que forme con la Quilla, tanto por barlovento como por sotavento, y á su figura, que contribuye muchísimo, sin embargo que hasta ahora no se ha reconocido esta circunstancia. Se halla el ángulo en que debe hacer el máxîmo efecto; pero se reconoce la poca ventaja que con él se consigue, respecto al que los Marineros disponen, y las razones por que deben pri-

privilegiarse estos á los que la Geometria determina.

El Cap. 3. se extiende sobre el Remo, máchina bien simple en la práctica; pero tan complicada para la theórica, que solo el gran Geómetra *Leonardo Eulero* nos ha podido dar el legítimo cálculo de ella: y hubiera igualmente sido el de sus verdaderas fuerzas y efectos, á no ser por la falsa suposicion sobre la ley con que actuan las resistencias. Se da por extenso todo el cálculo, atendiendo al mas mínimo momento, y se concluye la velocidad que debe tomar la Embarcacion; y que se verifica con la conformidad de los exemplos á la práctica: lo que de nuevo autoriza nuestra theórica de resistencias. Se advierte lo que importa que la parte exterior del Remo se aligere: y se halla la fuerza y velocidad ventajosa con que debe actuar el Remero para que la Embarcacion tome la mayor velocidad posible. Ultimamente se inquiere tambien la mas ventajosa relacion que debe haber entre las longitudes de la parte exterior é interior del Remo: se hace ver que esta relacion no es constante aun en el mismo Barco, y con los mismos Remeros, porque depende de la fuerza que estos empleen, y de la que hubiere entre los tiempos que pasan entre una palada y otra, y el que se mantiene el Remo en el agua: de suerte, que quanto mayores fueren dichas cantidades, mayor debe ser la longitud de la parte exterior del Remo, respecto á la interior. Lo mismo se sigue quando mayor fuere el número de Remeros; y al contrario quando mayor fuere la resistencia de Proa: de suerte, que la mayor Embarcacion necesita menos longitud en la parte exterior del Remo. Se atiende tambien en esto á la fuerza de los Remeros; pero se concluye por las atenciones que despues se hacen, con que la mejor disposicion del Remo es, con corta diferencia, la que estilan los Marineros, aunque tomando algunas precauciones, segun las distintas Embarcaciones: y se concluye el Libro con un exemplo, aplicado á una Galera, y con manifestar el poco efecto que producen algunos momentos.

El Libro quarto trata de las acciones y movimientos del Navío. El Cap. 1. se extiende sobre el andar ó movimiento progresivo que da al Navío el impulso del viento en las Velas, y del rumbo que le obliga á seguir. Se dan quatro fórmulas que expresan las quatro velocidades que distinguimos en el Navío, esto es, la directa ò por la Proa: la lateral ó perpendicular al costado: la obliqua, que legitimamente toma la Embarcacion; y ultimamente aquella con que sale á barlovento, ó con que directamente gana en oposicion, segun la misma línea del viento: á que se agrega la expresion ó valor del ángulo de la deriva. Se exâminan despues las ventajas y conocimientos que ofrecen dichas fórmulas: manifiestan á primera vista, que las quatro velocidades fueran exâctamente porporcionales à las del viento, á no ser por la curvidad de la Vela, que altera algo esta proporcion. Manifiestan igualmente, que quanto mayor fuere la relacion entre la resistencia del costado, y la de la Proa, mayor será la velocidad directa ò por la Proa, y menor la lateral: y que para que el Navío gane

gane barlovento, es preciso que aquella relacion sea mayor que la que tiene la tangente del ángulo que forma el viento con la Quilla, con la tangente del ángulo que forma la perpendicular á la Quilla con la direccion en que actuan las Velas. Del mismo modo manifiestan, que las quatro velocidades aumentan, á medida que se largue mas Vela; y que la directa y obliqua, quando se navega con todo el aparejo á viento largo, llegan al extremo de ser mayores que la del mismo viento: se explican los casos en que esto sucede, y aunque no corresponden en los Navíos, se verifican en las Galeras y Xabeques. Se aplican despues las fórmulas á varios exemplos prácticos, ú de la disposicion de aparejos que usan los Marineros, ya en Popa como á viento largo y de volina, y se reconoce la perfecta conformidad de la práctica, con las soluciones que de las fórmulas resultan. No sucede lo propio con las que se dan segun el otro systhema de las resistencias, porque producen en los Navíos velocidades bien apartadas de las que la práctica manifiesta. El aumento de la velocidad directa que procede de la mayor razon en que pueden estar las resistencias lateral y por la Proa, se hace ver que no se extiende á la que resulta de aliviar ò calar mas el Navío; pues aunque efectivamente se halla en esto alguna diferencia, es tan corta, que no merece la menor atencion. La total expresion de la misma velocidad, reducida á serie, facilita el modo de especular las medidas principales que deben darseles á las Embarcaciones para que tomen el mayor andar posible: alargar su longitud, y disminuir á proporcion su profundidad, aumenta la velocidad; pero esto se verá que tiene sus perjuicios: sucede lo propio aumentando la longitud, y disminuyendo á proporcion el ancho; pero en caso de darse la longitud constante, y de variar solamente el ancho y la profundidad, es ventajoso para ir á Popa, ó viento muy largo aumentar aquel, y disminuir esta; pero al contrario yendo á volina, ó vientos escasos: particularidad que en la práctica se observa, y que no produce el antiguo systhema de las resistencias. Despues de esto se concluye el Capítulo demostrando por las mismas fórmulas, que con vientos suaves deben andar las Embarcaciones chicas, siendo semejantes, mas que las grandes; y al contrario, que estas andan mas con vientos fuertes.

El Cap. 2. trata de los ángulos que deben formar las Velas y el viento con la Quilla, para conseguir el máxîmo andar: asunto que se ha separado del Capítulo precedente á que pertenecia, por su extension, y particulares circunstancias, y atenciones que encierra. Se da primeramente una fórmula que expresa el valor del ángulo que debe formar la Vela con la Quilla, para que el Navío ande lo mas que sea posible, supuesto constante el ángulo que forme el viento con la misma Quilla. Esta fórmula manifiesta, que aquel ángulo de la Vela no es constante, ni aun en el propio Navío, como hasta ahora lo han creido los Geómetras generalmente, porque no solo depende de la relacion entre las resistencias del costado y de la Proa, sino tambien de la cantidad de Velámen que se largue, y de la curvidad de las Velas: de suerte, que quanto mayor sea

sea aquella razon, y la cantidad de velámen, menor debe ser el ángulo, y asimismo quanto menor sea la curvidad de las Velas. Se dan de ello algunos exemplos, y en el de ir á bolina un Navío de 60 Cañones con todo su aparejo, se halla el ángulo de $28^\circ\ 47'$, y si solo fuese con las dos Mayores, resulta de $40^\circ\ 42'$, próxîmamente el que en todos casos usan los Marineros. Se busca despues, qué viento es el que hará andar á un Navío lo mas que sea posible, y se demuestra que no es siempre el mismo, ni aquel en que vaya en Popa, no obstante que hasta ahora se ha creido generalmente que lo era, siempre que sirviesen las mismas Velas; no habiendose persuadido nadie á que el viento largo podia ser mas ventajoso, sino solo porque á Popa se tapan el viento unas Velas á las otras: se halla la fórmula que expresa el valor de dicho ángulo ventajoso que debe formar el viento, y por ella se manifiesta que es variable, porque depende de la razon en que estubieren las resistencias del costado y de la Proa del Navío; como tambien de la cantidad de Velámen que llevare, y de la curvidad de las Velas: de suerte, que quanto mayor sea aquella razon, y la cantidad de Velámen, mas avierto es el ángulo de viento que se necesita para hacer andar el Navío lo mas que es posible; y al contrario, quanto menor sea la curvidad de las Velas ó violencia del viento. En un Navío de 60 Cañones se halla que no llevando mas que 8065 pies quadrados de Velámen, es el viento en Popa el que mas le hará andar: que luego que largue mas, ya no será sino otro viento mas avierto; y que llevando 17680 pies, es el viento avierto de $41^\circ\ 56'$ el que mas velocidad le dará. Se substituyen despues estos ángulos ventajosos en la fórmula que dá la velocidad, y se halla la máxîma de máxîmas, ó la mayor que de innumerables casos puede resultar: en un Navío de 60 Cañones se halla esta de $\frac{74}{100}$ de la velocidad del viento: y en un Xabeque, de $\frac{163}{100}$ de la misma: de suerte, que la velocidad de este es $\frac{63}{100}$ mayor que la del viento. Para hallar la máxima velocidad con que se puede salir á barlovento, y la relacion entre los ángulos que la deben producir, resulta una fórmula muy complicada: esta manifiesta, que los ángulos no deben ser los mismos que los que hacen andar al Navío lo mas que es posible, sino distintos, y que dependen, como en los demas casos, no solo de la relacion entre las resistencias del costado y Proa, sino tambien de la cantidad de Velámen que se largue, y de la curvidad de las Velas ó impetu del viento: de suerte, que quanto mas Velámen se lleve, y menos fuerza tenga el viento, mas agudos deben ser los ángulos, que han de formar el viento y las Velas con la Quilla, para ganar lo mas que sea posible barlovento. Hallados, ultimamente, los valores de estos ángulos, y substituidos en la fórmula que da la velocidad con que sale á barlovento, se halla la máxîma de estas: en el Navío de 60 Cañones se encuentra de $\frac{164}{1000}$ de la velocidad del viento, quando en el méthodo que usan los Marineros solo es de $\frac{125}{1000}$: de suerte, que se puede ganar una tercera parte de mas barlovento de lo que hoy se consigue.

El Cap. 3. se estiende sobre la inclinacion que deben tomar las Embarcaciones obligadas por el impulso del viento en las Velas: pues teniendo ya exâminado en el Cap. 6. del Libr. 2. lo momentos con que resisten sus costados la inclinacion, y en el primero del Libr. 3. los que el viento causa en las Velas, la igualacion de estos, produce la inclinacion que debe resultar. Se da, por este medio, la fórmula que expresa su valor, y aunque se advierten en ella varias cantidades en el caso de algunas Embarcaciones, se reducen á solo una, por ser despreciables las demas. Se aplica despues esta fórmula á varios exemplos, y se concluyen las mismas inclinaciones que en la práctica se observan diariamente. Al contrario en el antiguo systhema de las resistencias resultan las inclinaciones muy apartadas de la realidad, y manifiestan los absurdos que resultan de sus falsas suposiciones, y aun de experiencias autorizadas. Se explica tambien lo que se ha entendido por *punto vélico*, y la colocacion que se ha deseado de este para conseguir que el Navío no se incline, manifestando la imposibilidad de este proyecto. Se da tambien el cálculo y exemplo del caso, no bien temido aun, que los Marineros llaman *tomar por alúa*, y se demuestra el gran riesgo que en él se tiene de perecer. Las fórmulas que expresan la inclinacion que un Navío debe tomar, se extienden despues á los casos en que se le dé alguna variacion al Buque, ya sea en su peso, ó en su volúmen sumergido en el fluido: y de ellas se deduce, que el Navío aguantará mas la Vela si el peso añadido se colocare mas baxo que la superficie del agua, y al contrario si se colocare mas alto; sien-

siendo el mayor ó menor aguante proporcional á la distancia que se colocare de dicha superficie: y asimismo que aguantará mas la Vela, si el volúmen que se le añadiere estubiese mas alto que el que se le quitare; y al contrario: y si fuesen peso y volúmen los que se añadiesen, aguantará mas la Vela, si el volúmen estubiere mas alto que el peso. Ultimamente se demuestra, que en Navíos enteramente semejantes, los aguantes de Vela son en razon inversa de sus dimensiones lineares: y que en las inclinaciones de Popa á Proa, muy lexos de sumergirse estas, por la accion ó fuerza de las Velas, se levantan mas sobre el fluido, en el caso de los Buques que hoy se estilan.

El Cap. 4. trata del govierno del Navío: esto es, de la combinacion de las fuerzas que actuan continuamente á hacer girar el Navío, de las quales el Timon es solo una de ellas, y en ocasiones no la mas eficáz. Se demuestra que el exe de la fuerza motriz, supuestas las Velas planas, y el Navío sin inclinacion, no concurre con el exe de las resistencias, y que solo se unen á causa de la curvidad que toman aquellas, y la inclinacion que en este resulta: y como uno y otro depende de la mayor ó menor violencia del viento, y de la mas ó menos cantidad y altura de las Velas: se sigue, que variando qualquiera de estas cantidades, varia el exe de la fuerza motriz, y se perderá el equilibrio en el govierno, que por consiguiente será muy inconstante, sin embargo de lo que hasta ahora se nos ha enseñado. Se evidencian todos los casos en que el Navío debe orzar y arribar, ya porque se altere el el viento, ó porque aumente ú disminuya la altura ó amplitud de las Velas, asi como por qualquiera variacion que se haga en la estiva del Buque, ó en las dimensiones de este, particularmente en sus lanzamentos, que son una de las principales causas de que depende el buen govierno, no obstante que algunos celebrados Construćtores no lo han creido hasta ahora: y por ultimo se trata de la colocacion de los Palos, en que tambien consiste el perfećto govierno en todos los casos que pueden darse de variaciones de Velas, y esfuerzos del viento, verificados con exemplos prácticos; concluyendo con la fórmula general que encierra el todo de ellos.

El Cap. 5. trata del balance y cabezada, asuntos en que, aun mas que en otros, se han padecido hasta ahora grandes equivocaciones; pues solo se han considerado dependientes del estado y disposicion del Buque, y en ninguna manera del volúmen y velocidad de la ola, que es la principal causa. Se dan primero las fórmulas, ó valor, no solo del tiempo en que da el Navío el balance, considerado como un simple péndulo, segun se ha hecho hasta aquí por todos los Autores, sino tambien de la velocidad, y de la accion que en él padecen los Palos y Buque. Se manifiesta que esta accion, que es la única á que se debe atender, no es precisamente en razon inversa de los tiempos, pues depende tambien de la magnitud del balance, y esta, considerado el Navío como péndulo, no resulta en modo alguno del tiempo; pero, lo que es mas, se hace evidente que la accion de los Palos y el Buque está tan apartada de depender del tiempo en que se da el balance, que al contrario la mâxîma que padecen es precisamente quando ya no se mueve el Navío, y está al punto de reponerse, ó de volverse á drisar. Se exâmina despues el balance que ocasiona la ola, y el tiempo en que esta debe pasar por debaxo del Navío: se manifiesta lo que contribuye la velocidad de aquella, y lo poco que alteran sus efećtos las Velas. Se hace ver que aquel tiempo es grande con las olas chicas, que disminuye hasta un mínimo, y que despues vuelve á aumentar en olas mayores: de suerte, que en un Navío de 60 Cañones la ola que pasa mas prontamente por debaxo de él, es la de poco mas de 3 pies de alto; todas las demas, sean mayores ó menores, emplean mas tiempo. Se hace ver tambien la diferencia que hay entre las olas agitadas por un viento constante, y las que llaman los Marineros de *Leba*, que son las que subsisten despues de calmado el viento que las causó; y se evidencia el error á que indugeron estas, haciendo creer á *Mr. Bouguer* que los balances que daba la Fragata el *Triton* duraban siempre $4\frac{1}{2}$ segundos. Se demuestran despues los perjuicios que se siguieran de separar mucho del centro de gravedad los varios pesos de que se compone la carga del Navío, para dilatar el tiempo del balance, por motivo de que con ello se aumenta su velocidad y magnitud: y tambien, aunque resulta que fuera conveniente para lo mismo disminuir la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, se concluye lo muy perjudicial que esto seria para que las olas pasaran por

por encima de la Embarcacion y la anegasen; punto que hasta ahora no se ha tenido presente, siendo sin embargo de los mas importantes, y que merecen el mayor cuidado. Con esto se exâmina despues la verdadera theórica del balance: se deduce el tiempo legítimo en que debe darle el Navio, combinando entre sí el que diera como tal péndulo, y como si sola la ola actuase; y se halla que el verdadero tiempo toma un medio entre aquellos dos: el Navío de 60 Cañones, por exemplo, se halla que diera su balance como péndulo en $2\frac{3}{4}$ segundos: y que por sola la causa de una ola de 9 pies de alto, fuera en 3, de lo que resulta el verdadero tiempo en que le dará con la misma ola de $2\frac{6}{7}$. Suponiendo que en el mismo Navío se separaran los pesos del centro, ó exe sobre que gira el Navío, de $\frac{2}{5}$ mas de lo que se suponen, solo aumentará el tiempo de medio segundo; y disminuyendo la distancia desde el metacentro al centro de gravedad á los $\frac{2}{3}$, solo aumentará el mismo tiempo de $\frac{1}{3}$ de segundo. Se determina despues la magnitud del balance, y se halla, que en el segundo caso en que se separasen los pesos, aumentara el balance de $\frac{2}{5}$ partes mas de lo que fuera en el primer caso: y en el tercero, en que se disminuyera la distancia desde el metacentro al centro de gravedad, aumentará asimismo la magnitud del balance de $\frac{1}{5}$ mas de lo que fue antes: ambas cantidades, que producen mas perjuicio que el beneficio que se logra por aumentar tan poco el tiempo. En efecto, hallada despues la fórmula que expresa la accion que padecen los Palos en el balance, y por ella la

mí-

mínima que deben padecer, variando el tiempo en que como péndulo puede el Navío oscilar, se halla, que este tiempo debe ser igual al que emplea la ola en pasar por debaxó del Navío, ó en que diera este el balance por la sola causa de la ola. De esto se infiere, que para ganar esta ventaja fuera necesario variar la estiva para cada ola; lo que seria muy expuesto, sino imposible, en la práctica: por tanto se juzga que conviene disponer la estiva para un caso medio de olas que, por su magnitud, amenacen las arboladuras. Asi como se buscó la accion mínima que deben padecer estas por medio de variar el tiempo en que oscile el Navio como péndulo, se solicita tambien por medio de variar la distancia desde el centro de gravedad al metacentro, y se halla, que en esto no hay límite, y que quanto mayor sea aquella distancia, mas padecerán las arboladuras. Esto nos habia de inducir á disminuirla lo mas que fuera posible; pero á mas de que seria perjudicial para el aguante de Vela, hay tambien otro inconveniente no menos esencial á que atender, y es, que las mares pasaran por encima del Buque con mas facilidad. En efecto, buscando despues la altura á que llegarian las aguas en los costados, se da la fórmula que expresa esta elevacion, y se halla que será mayor, quanto menor sea la distancia entre el centro de gravedad y el metacentro; ó en una palabra, que dichas alturas serán como los quadrados de los tiempos en que los Navíos dieren sus balances: nuevo motivo porque no se deben aumentar estos con demasia. Para el Navìo de 60 Cañones, estivado en su regular, se

halla

halla que la ola de 36 pies de alto se elevará sobre el costado $15\frac{1}{2}$ pies : apartando los pesos $\frac{2}{5}$ mas del exe de rotacion, se elevará de $21\frac{1}{5}$ pies; y disminuyendo la distancia desde el centro de gravedad al metacentro á los $\frac{2}{3}$, se elevarán de 19 pies : con que no teniendo la borda ó costado del Navío sino solos 16 á 17 pies de alto, bien se ve, que en estos dos últimos casos las aguas pasaran por encima del Buque, anegandole de agua cada ola; inconveniente grandísimo, que se hace forzoso precaver, renunciando un poco á la mayor seguridad de las arboladuras, pues si estas piden que el balance dure 4 ú 5 segundos, la elevacion de las olas no lo requieren, quando mas, sino de 3. Se halla que las Fragatas padecen aun mucho mas estas inundaciones, y por ello requieren que á proporcion tengan mayor la distancia entre el centro de gravedad y el metacentro : se dan exemplos de la ninguna atencion que á esto se tiene; y se concluye dando reglas para asegurarse en punto tan principal, y con especificar casos en que pueden ser aun mucho mas extraordinarios y temibles los mismos balances. Sigue despues el Capítulo tratando de la cabezada. Con los mismos principios se halla el tiempo en que debe darla el Navío, considerado como péndulo, y se encuentra que es casi el mismo que aquel en que da el balance; resulta por la qual parece que debieran inferirse en aquella las mismas conseqüencias que en este; pero en la primera no fue necesario hacer atencion á la velocidad del Navío, como se hace preciso ahora. Se exâmina con ello el verdadero tiempo en que dará la cabezada, y

y se halla que esta será menor, quanto mayor sea la velocidad del Navío : de suerte, que el de 60, navegando de bolina con 10 pies de velocidad, y siendo la ola de 9 pies de alto, dará su cabezada en una tercera parte de tiempo menos que la daria considerado como péndulo, y que fuera de $2\frac{3}{4}$ segundos. Se exâmina tambien despues la magnitud de la cabezada, su máxîma velocidad, y por fin, la accion que en ella padecen los Palos. La mínima que pueden padecer es en el caso de que el tiempo en que el Navío dé su cabezada, considerado como péndulo, sea igual al tiempo en que la diera por solo la causa de la ola: lo mismo que resultó en el balance; pero en este, el primer tiempo se halla menor que el segundo, y en la cabezada al contrario, el segundo es menor que el primero; por cuyo motivo, si en aquel se necesita separar los pesos del exe de rotacion para aliviar las arboladuras, en esta se necesita que se aproxímen, aliviando quanto fuere posible el peso de las cabezas. Igualmente se demuestra, que la accion de los Palos en las cabezadas es como los quadrados de las longitudes de los Navíos, y por tanto se evidencia la necesidad de no alargarlos mucho, por solo el fin de que anden algo mas. El disminuir la distancia desde el centro de gravedad al metacentro tambien conduce para lo propio; pero del mismo modo que en el balance, las elevaciones de las aguas en la Proa fueran en tal caso mayores: y tanto mas, quanto en estas acciones la velocidad del Navío contribuye mucho á producir mayor efecto. En el de 60 Cañones, navegando de bolina con 10 pies de de velocidad, se halla, que una ola de 9 pies de alto se eleva en la Proa mas de 9 pies, quando si no andara, no llegaria ni á 6. En el mismo caso, y con ola de 36 pies de alto, se elevaria el agua de 16 $\frac{3}{4}$ pies, supuesto el Navío parado; y con el andar de 15 pies por segundo se elevara hasta 20 $\frac{4}{25}$: esto es, 3 pies mas que toda la altura del Buque. Esto concluye la necesidad de acortar Vela con vientos forzados, segun lo practican los Marineros, y la imposibilidad de llevar todo el Velámen, como lo pretende *Mr. Bouguer*. Quando las olas chocan por la Popa, la velocidad del Navío actua todo al contrario, y conduce á disminuir la elevacion de las aguas: en el mismo caso de la ola de 36 pies, y velocidad del Buque de 15 por segundo, se halla, que solo deben elevarse las aguas de 10 $\frac{1}{2}$ pies; quando allá se hallaron 20 $\frac{4}{5}$: cinco pies de mas velocidad en el Navío, solo disminuyeran lo altura de las aguas de $\frac{1}{2}$ pie; lo que concluye la poca necesidad que hay yendo á Popa, de largar mucha Vela, por solo huir de las olas: basta haber largado la suficiente para llegar á lograr la velocidad de 15, ó pocos mas pies. De la precisa mayor elevacion de las aguas que por estos motivos han de resultar en la Proa, se deduce claramente, que la altura del metacentro sobre el centro de gravedad, correspondiente á la parte de Proa, debe ser mayor que la correspondiente á la de Popa: ó porque dichas alturas dependen de las anchuras de los extremos, se hace conseqüente la precisa necesidad de que la Proa sea mas amplia ó voluminosa que la Popa: lo que siempre han practicado los Marineros, contra el general dictamen de los Geómetras, que siempre han querido Proas agudas para andar, sin reflexîonar que pueden ser la ruina de los Buques, y aun quizás pérdida de la misma perfeccion que solicitan. Despues de esto se concluye el Libro, tratando sobre la colocacion de la mayor anchura del Navío, y sobre la figura que deben tener sus Quadernas, para lograr igualmente la mayor perfeccion en los movimientos de las cabezadas.

El Libro 5, y último de la Obra, contiene una recopilacion de todos los antecedentes, abstraccion hecha de cálculos analíticos, á fin de poner el todo, en quanto sea posible, al alcance de los Marineros. El Cap. 1. trata de la fortaleza de los Navíos, del grueso de sus maderas, y de las medidas principales con que se deben construir: se demuestra la debilidad con que se construyen los Navíos, y la demasiada fortaleza que se da á las Fragatas, sin embargo de que á proporcion estan aquellos mucho mas sobrecargados de Artillería: y se dan reglas para construir con la debida proporcion; concluyendo con el méthodo de reglar los gruesos, pesos y fuerzas de las maderas quando se hicieren de distintos materiales.

El Cap. 2. trata de la magnitud de los Navíos: se hace patente lo que se ha aumentado modernamente sin gran necesidad, y las ventajas que de unas y otras medidas resultan; dando reglas para proporcionarlas, segun la Artillería que deban montar los Buques: de que se infiere lo mucho que conviene el que esta sea corta y ligera, no solo para su mejor manejo, y desahogo del Navío, sino para su mayor fortaleza y duracion.

El Cap.3. se estiende sobre el aguante de Vela, explicando lo ya dicho antecedentemente: se evidencia el error en que se cayera aumentando los aparejos de los Navíos grandes, como lo han pretendido algunos Marineros theóricos, por sola la razon de que es mayor su aguante de Vela. Se inquiere tambien la variacion del mismo aguante que debe resultar, variando qualesquiera medidas, peso, ó Buque del Navío: y el todo se ilustra con los exemplos necesarios.

El Cap.4. trata del andar y rumbo que siguen las Naves: y como las fórmulas por donde se dedugeron las demostraciones, resultaron tan complicadas, se procura explicar el todo por construcciones geometricas, que se hacen muy facilmente inteligibles. El Cap.5. se estiende sobre el govierno, explicando todas sus fuerzas, como ventajas en la colocacion de los Palos con igual méthodo: y ultimamente el 6 trata del balance y cabezada, con el aumento de varios exemplos, y atenciones para suavizarlos. Si sobre el todo se cuidare de consultar la práctica, se verá patentemente su legítima correspondencia con nuestra theórica: unico medio para acreditar la certeza de los principios sobre que se funda.

TA-

T A B L A

De los Capítulos y asuntos.

LIBRO I.

CAPITULO I.

Pag.

Del

CAPITULO 2.

CAPITULO 3.

CAPITULO 4.

De los Péndulos.

Error

De las Palancas.

CAPITULO 5.

CAPITULO 6.

De

Ha-

CAPITULO 7.

CAPITULO 8.

CAPITULO 9.

De la Cuña.

De la Hacha.

Del Tornillo.

Del exe en peritrochîo.

Del Carrucho ó Moton.

La

De

CAPITULO 4.

CAPITULO 5.

CAPITULO 6.

CAPITULO 7.

Ha- á

CAPITULO 8.

CAPITULO 9.

CAPITULO 10.

Re- ER-

ERRATAS.

Pag.	*linea.*	*dice.*	*diga.*
10	6	corrieren	corriere
23	1	$(\int \alpha dt)^2 (\int \beta dt)^2$	$(\int \alpha dt)^2 + (\int \beta dt)^2$
36	19	$W^2 \int (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&) dg$	$W^2 = \frac{2\int (\alpha + \beta + \delta + \&) dg}{M}$
40	5	B*a*	B*v*
48	15	la suma los	la suma de los
50	8	$\frac{B^2}{A^2}$	$\frac{B^2}{A} B$
64	22	GA	CA
71	13	*Cor.*2.*Prop.*18.	*Cor.*2. *Lema* 1.
75	15	ds	de
101	16	$m - v$	$u - v$
143	26	*Prop.*48.	*Cor.*2.
167	8	*Cor.*6.	*Cor.*5.
267	13	*Cor.*10.	*Cor.*5.
173	2	$\sqrt{1 - S^2}$	$\sqrt{1 - cos.\Sigma^2}$
192	20	*Cor.*6.	*Cor.*5.
241	18	EHIG	FHIG
245	28	*Propos.*14.	*Propos.*18.
341	10	*Prop.*48.	*Prop.*48. *Lib.*1.
402	2	G el centro	C el centro
307	20	conforme	uniforme

Apendice 1. pag.409. lin.5.

dice.

$$\left(\frac{P(Rue - Pg)(Rub + Pg) - P^3 (b+e)^2}{(Rue - Pg)^2 + P^2 (b+e)^2} - kh\right)^1$$

diga.

$$\left(\frac{P(Rue - Pg)(Rub + Pg) - P^3 (b+e)^2}{(Rue - Pg)^2 + P^2 (b+e)^2} - kh\right)^2$$

NOTA. En la Fig. 9. falta la K en la interseccion de la perpendicular baxada desde *g* sobre FI.

EXAMEN MARITIMO
THEORICO PRACTICO,
ó
TRATADO DE MECHANICA,
aplicado á la
CONSTRUCCION, CONOCIMIENTO, y manejo de los Navíos, y demas Embarcaciones.

LIBRO PRIMERO.
DE MECHANICA.
CAPITULO PRIMERO.
De las Definiciones, Axîomas, y principios del movimiento.

DEFINICION 1.

L*Ugar de un cuerpo* es el sitio, ó espacio que ocupa. Todos tenemos una idea clara, distinta y simple de él, y no puede explicarse mejor por voces: qualesquiera que se empleen en definirle, parece que confunden mas su inteligencia. Se divide el lugar en *absoluto*, y *relativo*.

DEFINICION 2.

Lugar absoluto es el que ocupa un cuerpo, respecto de todo el Universo, y sin relacion á los lugares que ocupan los demas. *Lugar relativo* es el que ocupa un cuerpo, respecto de los lugares que los otros cuerpos ocupan. En una Embarcacion que se mueve, sus cámaras y sus palos ocupan el propio lugar relativamente al todo de la Embarcacion; pero no relativamente á la costa, ó tierra: y asi se dice, que el lugar relativo de las cámaras y palos es el mismo; pero no el absoluto, porque varía respecto del Universo.

DEFINICION 3.

Movimiento es la translacion de un cuerpo de un lugar á otro, ó la continua mutacion del lugar que tubiere. De esta suerte se dice, que un cuerpo se mueve, ó que está en movimiento, quando pasa de un lugar á otro, ó que continúa en mudar de lugar. Si permanece siempre en el mismo lugar, se dice, que está en reposo.

DEFINICION 4.

Como el lugar puede ser absoluto, ó relativo, tambien el movimiento puede ser absoluto, ó relativo. Quando el lugar, respecto del qual se hace el movimiento, es absoluto, el movimiento es tambien absoluto: y si el lugar fuere relativo, tambien lo será el movimiento. De esta suerte, un movimiento absoluto puede ser un reposo relativo. Las cámaras y palos de la Embarcacion tienen un movimiento absoluto, si esta se mueve; pero están en reposo relativamente á la misma Embarcacion.

DE-

DEFINICION 5.

Si el cuerpo se moviere conservandose siempre en una misma línea recta, se llama á esta línea, *direccion del movimiento*.

DEFINICION 6.

A la prontitud, ó acceleracion, con que executa su movimiento, se llama *velocidad*: y un cuerpo se dice, que tiene mas, ó menos velocidad, según se moviere con mas, ó menos prontitud, ó acceleracion.

DEFINICION 7.

Como la velocidad depende del movimiento, y este es absoluto, ó relativo, tambien la velocidad es absoluta, ó relativa. Si el movimiento fuere absoluto, ó se hiciere respecto de un lugar absoluto, la velocidad será absoluta: y si relativo, relativa. De suerte, que una velocidad absoluta, puede ser un reposo relativo, ó ninguna velocidad relativa. Si la velocidad absoluta del cuerpo A, fuere V, y la del cuerpo B, en la misma direccion, fuere u, será la velocidad relativa de estos dos cuerpos $V \mp u$: el signo negativo quando se mueven ambos cuerpos hacia la misma parte, y el positivo quando se mueven hacia partes opuestas.

DEFINICION 8.

El movimiento se llama *uniforme*, quando la velocidad con que se mueve el cuerpo es siempre la misma. Se llama *accelerado*, quando la velocidad va en aumento, y *retardado*, quando disminuye, ó va á menos.

 DE-

DEFINICION 9.

A la distancia que anduviere ó corriere el cuerpo con su movimiento, se llama *espacio corrido*. Puede ser en línea recta ó curva, segun las fuerzas que actuaren sobre él, y le obligaren á ponerse en movimiento, como se dirá mas adelante.

DEFINICION 10.

Si el movimiento fuere absoluto, tambien lo será el espacio corrido, y si relativo, relativo. Que sea E el espacio corrido por el cuerpo A, y e el corrido por el cuerpo B en una misma direccion ó línea, y tendremos $E \mp e$ por el espacio relativo: el signo menos quando se mueven ambos cuerpos hacia la misma parte, y el positivo quando se mueven hacia partes opuestas.

DEFINICION 11.

A la materia de que consta un cuerpo se dice *masa*: y el cuerpo se compone de mas, ó menos masa, segun tuviere mas, ó menos materia.

DEFINICION 12.

El cuerpo que, en iguales volúmenes, encierra iguales cantidades de masa, se llama igualmente denso: y si dos, ó mas cuerpos, encierran la misma masa en iguales volúmenes, se llaman de una misma densidad. Mas denso se llama el cuerpo que encierra mas masa en igual volúmen, ó que necesita menos volúmen para encerrar la misma cantidad de masa: y así, las densidades de los cuerpos, serán como sus masas, en

en iguales volúmenes: ó en razon inversa de los volúmenes, en iguales cantidades de masa.

DEFINICION 13.

La fuerza que se imprime en qualquiera cuerpo, es la accion que se exerce en el mismo cuerpo para sacarle del estado en que se halla: ya sea de el de reposo al de movimiento, segun qualquiera direccion, ú de un movimiento á otro mayor ó menor, segun la direccion en que se mueve el cuerpo. A esta fuerza, qualquiera que sea, se llama *potencia*. Puede ser constante, ó variable: positiva, ó negativa.

DEFINICION 14.

Fuerza innata de la materia es la propiedad que tienen los cuerpos de resistir á mudar el estado de reposo, ú de movimiento en que se hallan.

Un cuerpo, que está en reposo, no puede ponerse en movimiento por una fuerza, qualquiera que sea, sin que se experimente otra opuesta procedente, como quiera, del cuerpo. No pudiera actuar la impelente sin resistencia, pues sin esta, sobre qué habia de exercerse? El cuerpo se pusiera en movimiento sin fuerza alguna, ó por sí mismo; lo que es imposible. Del mismo modo, no puede aumentarse, ó disminuirse el movimiento de un cuerpo, sin que la fuerza causal experimente su opuesta, por las propias razones. La experiencia manifiesta esta fuerza aun mas claramente: no hay mas que impeler, ó tirar un cuerpo, para sentir una accion semejante á la que exerciera una fuerza, qualquiera, opuesta. De qualquiera causa que dependa, ú de qualquiera suerte que actúe, nos consta que existe, y esto basta para que la tomemos por principio. El Cavallero *Newton* le aplicó, asimismo, el el nombre de *inercia*, ú de *inaccion*; pero advirtiendo, que no le conviene propiamente este nombre, sino en el caso de pasar el cuerpo del reposo al movimiento, en que resiste tomar este, ó en el de aumentar qualquiera que tuviere; no en aquel en que, moviendose el cuerpo, una fuerza qualquiera actua para detenerle: la materia, en este caso, resiste á disminuir su movimiento, y por consiguiente, no le corresponde la inaccion. En general, esta fuerza innata es de resistir el mudar el estado en que se halla el cuerpo, y es una efectiva resistencia en caso de que al cuerpo se le impela para darle mayor movimiento; pero, al contrario, será impulso, quando qualquiera fuerza actue á disminuir el mismo movimiento.

DEFINICION 15.

La *cantidad de movimiento* es la medida que resulta del producto de la masa movida, por su velocidad.

Consistiendo el movimiento de un cuerpo, en la translacion de su masa, quando mayor fuere esta, mayor será su movimiento. Al mismo tiempo, tambien ha de ser mayor este, quanto mayor sea la velocidad con que se moviere: luego será la cantidad de movimiento en razon directa de su masa, y de su velocidad, ó como el producto Au, denotando A la masa, y u la velocidad.

Axîoma I.

Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo, ú de movimiento uniforme, en la direccion, ó línea por donde se dirigen desde el principio, á menos que alguna fuerza ó potencia no los obligue á mudar de estado. El cuerpo no puede por sí mismo determinarse al movimiento, ó producir fuerza alguna para moverse si estuviere en reposo; al contrario, (*Def.* 14.) resiste al movimiento con su fuerza innata ú de inercia. Del mismo modo, no puede producirla, aun estando en movimiento, en qualquiera direccion, y la inercia le conserva en el propio estado, sin aumentar, ni disminuir su velocidad, ni sin desviarse por la propia razon de la primera direccion: luego debe perseverar en su estado de reposo, ú de movimiento uniforme en la direccion ó línea por donde se dirige el cuerpo desde el principio.

Corolario.

El cuerpo que se moviere con movimiento accelerado, ó retardado, será, pues, porque una potencia qualquiera actua sobre él: positivamente, ó segun la direccion del mismo movimiento, en caso de ser este accelerado; y negativamente, ó en direccion opuesta, en caso de ser el movimiento retardado: de suerte, que del movimiento accelerado, al retardado, no hay mas diferencia, que actuar la potencia en el primero positivamente, y negativamente en el segundo: ó ser la misma potencia positiva, ó negativa.

Axîoma 2.

La alteracion, ú diferencial del movimiento, es siempre proporcional al producto de la potencia que la produce, por el tiempo que durare la accion: y se executa en la direccion que la potencia actua. Si la potencia α, actuando la diferencial de tiempo dt, altera la velocidad que tubiere el cuerpo A de la diferencial du, de suerte que la alteracion, ú diferencial de movimiento sea Adu, otra potencia 2α, producirá la alteracion ú diferencial de movimiento $2Adu$: porque, por la suposicion, la sola α produce la diferenrencial *du*, y la otra *a*, nueva *du* relativa á la primera, cuya suma es $2du$, y por consiguiente, la alteracion ú diferencial de movimiento será $2Adu$. Por igual razon, $3a$ producirá la alteracion, ú diferencial $3Adu$; y asi en adelante. Del mismo modo, $\frac{1}{2}a$ producirá $\frac{1}{2}Adu$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}Adu$, y como antes asi en adelante: luego las alteraciones, ú diferenciales del movimiento, son siempre proporcionales á la potencia que las produce. Por otro lado, la diferencial de velocidad *du* es mayor, ó menor, segun el tiempo *dt* que la potencia actua, y lo mismo la alteracion de movimiento *Adu*: luego será esta alteracion ú diferencial en razon compuesta de la potencia *a*, y del tiempo *dt*, ó como el producto adt. Que se execute en la direccion por donde se dirige la potencia consta del primer Axîoma del movimiento.

Corolario.

Puesto que es *Adu* proporcional á adt, tendremos $adt = Adu$.

Escolio I.

Aunque hasta ahora no hayamos deducido sino la proporcionalidad entre *Adu* y adt, se puede formar perfecta igualacion entre las dos cantidades, respecto que, aunque sea mayor ó menor la potencia, se puede disminuir, ó aumentar, en razon inversa la diferencial *dt*. Por la experiencia resulta despues la verdadera relacion entre estas cantidades.

Escolio 2.

Hay Autores que ponen en duda la proporcionalidad entre la fuerza, ó potencia actuante, y la diferencial de la velocidad, sin embargo que no es necesario para la evidencia si no considerar, como se ha dicho, que una potencia dupla es preciso que actue como dos simples, la segunda relativa á la primera. Todo su fundamento consiste en que se ignora la naturaleza de la causa, y el modo con que se actua. Pero escusaremos entrar en el exámen de esta diferencia, pues los mismos, aunque por distinta via, vienen á concluir con las propias equaciones que hemos dado, y son el principio de toda la Mechánica. Pretenden que el conocimiento de la potencia debe resultar de los efectos de ella; pero que no pueden concluirse los efectos por la potencia impulsiva determinada. Se hará, sin embargo, ver de donde puede depender el tropiezo.

Axîoma 3.

La accion, y la reaccion, son iguales, ó las mutuas acciones de dos cuerpos, uno sobre otro, son iguales, y se dirigen á partes opuestas. Un cuerpo no puede impeler á otro, sin que este no impela á aquel con igual fuerza ó accion hacia la parte opuesta. Si se impele con cierta fuerza un obstáculo, este con contraria accion impele al agente: y si se tira otro con igual fuerza, el agente es igualmente tirado por el obstáculo en direccion contraria: es un Axîoma que todos los dias se prueba con la experiencia.

PROPOSICION I.

Si un cuerpo se mueve uniformemente, ó con velocidad uniforme, los espacios corridos tienen entre sí la razon directa de los tiempos en que se corrieron.

No aumentando, ni disminuyendo el cuerpo su velocidad, correrá siempre el mismo espacio en el propio tiempo, duplo en duplo tiempo, triplo en triplo;

y

y asi en adelante: luego los espacios corridos tendrán la razon directa de los tiempos en que se corrieron.

PROPOSICION 2.

Si las velocidades con que se moviere un cuerpo uniformemente, fueren distintas, estarán los espacios que en iguales tiempos corrieren, en razon directa de las velocidades.

Porque si un cuerpo corre cierto espacio con cierta velocidad, ha de correr duplo con dupla velocidad, por consistir esta en el mayor espacio corrido en igual tiempo: correrá triplo espacio con tripla velocidad; y asi en adelante: luego los espacios corridos estarán en razon directa de las velocidades.

PROPOSICION 3.

Los espacios corridos por cuerpos que se mueven uniformemente, están en razon compuesta directa de los tiempos que corrieren, y de sus velocidades.

Sean dos cuerpos A y B, que se mueven uniformemente, aquel con la velocidad u, el tiempo t, y el espacio a: y este con la velocidad v, el tiempo T, y el espacio b: y respecto de que los espacios corridos en iguales tiempos, son como las velocidades, tendremos $u : v = a : \frac{av}{u}$, espacio que corriera el cuerpo B, en el tiempo t, que corrió el cuerpo A: y porque tambien están los espacios que se corren con iguales velocidades, en razon directa de los tiempos, será $t : T = \frac{av}{u} : b$: luego $aTv = btu$, ó $a : b = tu : Tv$: esto es, los espacios están en razon compuesta directa de los tiempos, y de las velocidades.

CO-

Corolario 1.

Será, asimismo, $\frac{b}{Tv} = \frac{a}{tu}$: con que si hacemos $\frac{b}{Tv} = 1$, suponiendo que sean cantidades constantes b, T, y v, tendremos $1 = \frac{a}{tu}$: lo que dá $u = \frac{a}{t}$: esto es, la velocidad de un cuerpo estará en razon directa del espacio corrido, y en inversa del tiempo.

Corolario 2.

Del mismo modo $t = \frac{a}{u}$: esto es, estará el tiempo en que corre un cuerpo el espacio a, en razon directa de este espacio, y en inversa de la velocidad.

Corolario 3.

Si se expresa el tiempo t por segundos, y se toma uno de ellos por la unidad, será, en el caso de $t = 1$, $u = a$: esto es, la velocidad igual al espacio corrido en un segundo de tiempo: por lo que, expresando el tiempo por segundos, la medida de la velocidad será el espacio corrido en un segundo de tiempo.

Corolario 4.

El movimiento accelerado, ó retardado, se puede suponer uniforme por un instante ó diferencial de tiempo dt: pues en este instante, la acceleracion de velocidad, siendo una diferencial, es cero, respecto de la velocidad adquirida u. Si fuere, pues, da la diferen-

 cial

cial del espacio corrido en este instante de tiempo dt, tendremos (*Prop.* 3. *Cor.* 1.) $u = \frac{da}{dt}$: y $da = udt$.

PROPOSICION 4.

El exceso, ú defecto de velocidad, con que se mueve un cuerpo á qualquiera instante de su carrera es $= \frac{1}{A}\int \alpha dt$.

Que sea V la velocidad primitiva con que se mueve el cuerpo al primer instante de la accion ú del tiempo t: é integrando la igualacion $\frac{\alpha dt}{A} = du$, (*Cor. Ax.* 2.) tendremos $\frac{1}{A}\int \alpha dt = u - V$: esto es, el exceso, ú defecto de velocidad, será siempre $= \frac{1}{A}\int \alpha dt$.

Corolario 1.

Si fuere la potencia α constante, será $\frac{\alpha t}{A} = u - V$: esto es, el exceso, ú defecto de velocidad, será en razon compuesta directa de la potencia y el tiempo, y en inversa de la masa.

Corolario 2.

Si fuere $V = o$: esto es, si el cuerpo estuviere en reposo al primer instante de tiempo, ó empezare su carrera desde el reposo, será $\frac{1}{A}\int \alpha dt = u$: y si fuere α constante $\frac{\alpha t}{A} = u$.

CO-

Corolario 3.

Si al contrario, el cuerpo, despues de puesto en movimiento, llegare al estado del reposo, como puede suceder en el movimiento retardado, será $u = o$: luego $\frac{\alpha t}{A} = -V$: ó mudando el signo á la potencia, por ser el movimiento retardado, será $\frac{\alpha t}{A} = V$.

Corolario 4.

La velocidad adquirida en el movimiento accelerado que empieza desde el reposo es $u = \frac{\alpha t}{A}$, y la perdida enteramente en el retardado $V = \frac{\alpha t}{A}$: luego serán estas iguales, si iguales potencias α actuan el propio tiempo t, sobre iguales masas A.

PROPOSICION 5.

El espacio corrido por un cuerpo desde el primer instante de su carrera, será $= Vt + \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$.

Siendo (*Prop.* 3. *Cor.* 4.) $u = \frac{da}{dt}$, será tambien (*Prop.* 4.) $\frac{1}{A}\int \alpha dt = \frac{da}{dt} - V$, que dá $\frac{da}{dt} = V + \frac{1}{A}\int \alpha dt$, ó $da = Vdt + \frac{dt}{A}\int \alpha dt$: é integrando $a = Vt + \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$: esto es, el espacio corrido desde el primer instante de tiempo, será $= Vt + \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$.

CO-

Corolario 1.

Si la potencia α fuere constante, será $a = Vt + \frac{\alpha t^2}{2A}$.

Corolario 2.

Si el cuerpo empezare su carrera desde el reposo, será $V = o$, y $a = \frac{1}{A}\int dt \int \alpha dt$; ó si fuere α constante $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$: esto es, los espacios corridos serán como los quadrados de los tiempos; y al contrario, si los espacios fueren como los quadrados de los tiempos, las potencias serán constantes.

Corolario 3.

Substituyendo en este caso $u = \frac{\alpha t}{A}$, que hallamos, (*Prop.* 4. *Cor.*2.) será tambien $a = \frac{1}{2}tu$: esto es, los espacios corridos desde el reposo, son en razon directa de los tiempos, y de las velocidades adquiridas.

Corolario 4.

El espacio corrido por una velocidad uniforme u, en el tiempo t, es (*Prop.* 3. *Cor.* 1.) $a = tu$: luego el espacio corrido en el mismo tiempo por una velocidad uniforme, es duplo del espacio corrido por un movimiento accelerado que empieza desde el reposo, quando la velocidad adquirida en este es la misma.

CO-

Corolario 5.

En el movimiento accelerado, que empieza desde el reposo, siendo la potencia α constante, es $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$: y en el retardado $a = Vt - \frac{\alpha t^2}{2A}$, ó si llega este hasta el reposo, á causa de ser en este caso (*Cor.* 4. *Prop.* 4.) $V = \frac{\alpha t}{A}$, es $a = \frac{\alpha t^2}{A} - \frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\alpha t^2}{2A}$: luego el espacio corrido con el movimiento accelerado, que empieza desde el reposo, y el corrido en el retardado, que llega al mismo reposo, serán iguales si iguales y constantes potencias α actuan el mismo tiempo t, sobre iguales cuerpos A.

PROPOSICION 6.

El espacio corrido por un cuerpo desde el primer instante de su carrera es $A\int \frac{udu}{\alpha}$.

Siendo (*Cor.* 4. *Prop.* 3.) $\frac{da}{dt} = u$, y (*Cor. Ax.*2.) $\frac{\alpha dt}{A} = du$, será, multiplicando estas dos igualaciones, $\frac{\alpha da}{A} = udu$: que dá $da = \frac{A}{\alpha}udu$: y $a = A\int \frac{udu}{\alpha}$.

Corolario 1.

Si la potencia α fuere constante, será $a = \frac{A}{2\alpha}(u^2 - V^2)$.

CO-

Corolario 2.

Si el movimiento hubiere empezado á contarse desde el reposo, ó fuere $V = o$, será $a = \frac{Au^2}{2\alpha}$: esto es, quando la potencia α es constante, los espacios corridos desde el reposo, son como los quadrados de las velocidades.

1. Principio de experiencia.

Han manifestado estas, que los cuerpos graves en distancias cortas, próximas á la superficie de la tierra, corren, cayendo desde el reposo, espacios, que son como los quadrados de los tiempos en que los corren.

Corolario 1.

La potencia ó fuerza que anima á los cuerpos graves, en las proximidades á la superficie de la tierra, y que llamamos gravedad, es por consiguiente (*Cor.* 2. *Prop.* 5.) constante.

Corolario 2.

Tendremos, pues, en el caso de los cuerpos graves, que caen desde el reposo, $u = \frac{\alpha t}{A}$, $a = \frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{Au^2}{2\alpha}$.

2. Principio de experiencia.

Ha manifestado tambien esta, que todos los cuerpos graves, grandes, ó chicos, en las proximidades á la superficie de la tierra, corren iguales espacios en iguales tiempos.

CO-

Corolario 1.

Si fueren, pues, α y β las potencias constantes que animan los cuerpos A, y B, será, segun esta experiencia $\frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\beta t^2}{2B}$, ó por suponerse los tiempos iguales $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$: que dá $\alpha : \beta = A : B$: esto es, en los cuerpos graves las potencias ó gravedades son como las masas.

Corolario 2.

Siendo, asimismo, (*Def.* 12.) las densidades, en iguales volúmenes, como las masas, serán tambien las densidades, en iguales volúmenes, como las gravedades: con que se puede expresar la densidad de los cuerpos graves por el peso de un pie cúbico de ellos.

Corolario 3.

Será siempre constante la cantidad $\frac{\alpha}{A}$; y podemos poner en su lugar la constante ξ: con lo que serán en los cuerpos graves $u = \xi t$, $a = \frac{1}{2}\xi t^2 = \frac{u^2}{2\xi}$.

3. Principio de experiencia.

Ha enseñado, asimismo esta, que el espacio que corren los cuerpos graves, cayendo verticalmente desde el reposo en las proximidades á la superficie de la tierra; es, con muy corta diferencia, de 16 pies Ingleses en un segundo.

 CO-

Corolario 1.

Midiendo el tiempo de las caidas por segundos, y los espacios corridos por pies, tendremos para el caso de $t = 1$, $a = 16$: lo que produce (*Cor.* 3. *Prin.* 2.) $16 = \frac{1}{2}\xi$, ó $\xi = 32 = \frac{a}{A}$. Este valor substituido en las equaciones (*Cor.* 3. *Prin.* 2.) las reduce á $u = 32t$, $a = 16t^2 = \frac{u^2}{64}$: de que resultan $\sqrt{a} = 4t = \frac{1}{8}u$, y $8\sqrt{a} = u = 32t$.

Corolario 2.

Si, mas exácta y generalmente, se supone K igual al espacio corrido por un cuerpo grave desde el reposo, cayendo verticalmente en el tiempo de un segundo, será $K = \frac{1}{2}\xi$, ó $\xi = 2K$. Este valor substituido en las equaciones (*Cor.* 3. *Prin.* 2.) las reduce á $u = 2Kt$, $a = Kt^2 = \frac{u^2}{4K}$: de que resulta $\sqrt{a} = \frac{u}{2\sqrt{K}} = t\sqrt{K}$, y $2\sqrt{aK} = u = 2Kt$.

Escolio.

Ya se deducirá á su tiempo el verdadero espacio que corren los cuerpos graves cayendo libremente, y se verá, que es algo mayor que el asignado de los 16 pies Ingleses por segundo; no obstante, como la diferencia es corta, y no produce error considerable en los cálculos que necesitamos, se puede hacer uso de este número quadrado, que facilita mucho las operaciones.

CAPITULO 2.

Del movimiento compuesto.

DEFINICION 16.

Movimiento compuesto es el que resulta en un cuerpo, por la accion de dos, ó mas potencias, que actuan sobre él en distintas direcciones.

PROPOSICION 7.

El movimiento por una direccion, no se altera por las acciones que se le impriman á un cuerpo, segun qualesquiera otras direcciones: y á cada instante de tiempo describe el cuerpo pequeños espacios, paralelos á cada una de las direcciones.

Si el cuerpo A está sobre un plano EF, puede moverse sobre él en la direccion AG, y al mismo tiempo moverse el plano segun el EH, GI, sin perturbarse una accion á la otra; porque no suponiendose potencia alguna que perturbe el movimiento segun AG, debe, en virtud de la inercia, continuar sin alteracion. Lo mismo que se dice de dos acciones, se puede decir de muchas mas: luego el movimiento por una direccion no se altera por las acciones que se le impriman á un cuerpo, segun qualesquiera otras direcciones: y á cada instante de tiempo describe el cuerpo espacios, segun AG y EH, paralelos á cada una de estas direcciones. Fig. 1.

PROPOSICION 8.

Si dos potencias actuan á un tiempo en el cuerpo A, la primera segun la direccion AE, y la segunda Fig. 2.

segun la AF, el cuerpo correrá por una línea media AGH: cuya equacion se deducirá de la igualacion de los valores del mismo tiempo en que corriera el cuerpo libremente por cada una de las dos direcciones.

En qualquiera tiempo de su carrera debe moverse el cuerpo paralelamente á AE en virtud de la primera accion, y asimismo paralelamente á AF en virtud de la segunda, por espacios GI, IH iguales á KE, LF, que son las diferenciales de los que corriera libremente con cada accion separada; pero la suma de los KE, es la abcisa AK, y la suma de los LF $=$ IH, es la ordenada EH: luego si igualamos los dos valores del tiempo, por ser el mismo, en que el cuerpo corriera cada espacio AK, EH libremente, esta igualacion nos dará la equacion á la línea AGH que el cuerpo correrá.

Exemplo 1.

Supongamos que el movimiento del cuerpo A se componga de dos que, separados, hubieran resultado uniformes: uno cuya direccion fuera AE, expresandose los espacios corridos por a, y la velocidad por u: y otro cuya direccion fuera AF, expresandose los espacios corridos por b, y la velocidad por v. Con esto tendremos (*Cor. 2. Prop. 3.*) $t = \frac{a}{u} = \frac{b}{v}$, que da $av = bu$, cuya equacion, siendo las velocidades constantes, por ser en movimientos uniformes, es á la línea recta: y así el movimiento compuesto que en este caso tomará el cuerpo será por una línea recta.

Exemplo 2.

Supongamos que el movimiento AF, no fuera uniforme, sino procedido de una potencia constante. En

este

este caso tenemos (*Cor. 1. Pro. 5.*) $a = Vt + \frac{\alpha t^2}{2A}$, ó substituyendo $t = \frac{b}{v}$, y ordenando $\frac{2Av^2}{\alpha} \cdot \left(a - \frac{Vb}{v}\right) = b^2$: equacion á la parábola, cuyo parámetro es $\frac{2Av^2}{\alpha}$: y así esta será la curva que describirá el cuerpo con el movimiento compuesto.

Corolario 1.

De lo dicho se sigue, que el cuerpo con el movimiento compuesto correrá en el mismo tiempo la AG, que corriera la AK, ó AL, en virtud de la accion de una sola potencia.

Corolario 2.

La direccion compuesta AGH debe hallarse en el mismo plano en que están las dos direcciones AK, AL: porque si de qualquiera punto de esta direccion se tira una paralela á la AK, todas estas compondrán el plano en que se hallan las dos direcciones: y como el cuerpo debe hallarse siempre en estas paralelas, sin poderse desviar de ellas, (*Axio. 1.*) se sigue, que debe conservarse en el plano en que están las dos direcciones.

Corolario 3.

Si fueren tres las acciones y potencias que á un mismo tiempo concurran en distintas direcciones, la compuesta será una línea media entre las tres: cuya equacion se deducirá por la igualacion de los valores del mismo tiempo en que correrá el cuerpo libremente por cada direccion.

Es

Es evidente, pues, (*Cor.* 2.) que con dos direcciones se halla otra media que debe resultar, y con esta y la tercera, la que efectivamente seguirá el cuerpo.

Corolario 4.

Si las tres direcciones se hallasen en un mismo plano, tambien la resultante se hallará en el mismo plano: es evidente de lo dicho.

Corolario 5.

Lo mismo que se dice de tres, se debe entender de quatro, cinco, ó mas potencias que concurran en actuar sobre un cuerpo con distintas direcciones.

PROPOSICION 9.

La diferencial GH del espacio, que el cuerpo A describiera en virtud de la accion de dos potencias α y β, que lo animaran, segun las dos direcciones AE, AF, es $= \frac{dt}{A}\left((\int \alpha dt)^2 + (\int \beta dt)^2 \pm 2(\int \alpha dt)(\int \beta dt) Cos\,\Sigma\right)^{\frac{1}{2}}$ expresando Σ el ángulo EAF que forman entre sí las dos direcciones, siendo el radio la unidad.

Baxese del punto G, sobre la EH, la perpendicular GN, y será, por los elementos de Geometría, $NI = GI\ Cos\,\Sigma$, y $GH^2 = GI^2 + IH^2 \pm 2NI.\ IH = GI^2 + IH^2 \pm 2IH.\ GI\ Cos\,\Sigma$: el signo mas para quando fuese el ángulo EAF obtuso, y el signo menos para quando fuese agudo.

Substitúyanse en la equacion los valores de $GI = da =$ (*Prop.* 5.) $\frac{dt}{A}\int \beta dt$, y será $GH^2 = \frac{dt^2}{A^2}(\int \alpha dt)^2 + \frac{dt^2}{A^2}(\int \beta dt)^2 \pm \frac{2dt^2}{A^2}(\int \alpha dt).(\int \beta dt)\ Cos\,\Sigma$: y GH = ——

$\frac{2d}{A}$

$\frac{dt}{A}\left((\int \alpha dt)^2 (\int \beta dt)^2 \pm 2(\int \alpha dt)(\int \beta dt)\ Cos\,\Sigma\right)^{\frac{1}{2}}$.

Escolio 1.

En todo el discurso de la Obra, expondremos siempre el radio por la unidad, á fin de facilitar el cálculo.

Corolario 1.

Si el ángulo EAF fuere $= o$: esto es, si las dos direcciones AE, AF concurriesen y formasen una misma direccion, quedará GH = ------

$$\frac{dt}{A}\left((\int \alpha dt)^2 + (\int \alpha dt)^2 \pm 2(\int \alpha dt)(\int \beta dt)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{A}\int dt\,(\alpha \pm \beta).$$

Corolario 2.

Si á mas de esta condicion fuere $\beta = \alpha$, será $GH = \frac{2dt}{A}\int \alpha dt$, en caso de ser el ángulo GIH obtuso, ú dirigirse las dos potencias hacia la misma parte; y $GH = \frac{dt}{A}\int dt.\ o = o$, en caso de ser el ángulo GIH agudo, ú dirigirse las dos potencias hacia partes opuestas, ó contrarias direcciones.

Corolario 3.

El cuerpo quedará, pues, en este ultimo caso, sin movimiento.

Corolario 4.

Si el cuerpo queda sin movimiento, será porque potencias iguales actuan en opuestas direcciones.

Es-

Escolio 2.

Del mismo modo que se halla el valor de *GH* quando actuan dos potencias, se halla quando actuan tres, ó mas.

DEFINICION 17.

Descomposicion del movimiento es la division que se hace de un movimiento, por suponer que proceda de varias acciones, quando en realidad no procede sino de una, ú de mayor número que el que se supone.

PROPOSICION 10.

Fig. 3. Si la accion de una potencia α sobre el cuerpo A, en la direccion AH, se supone que proceda de dos $m\alpha$, $n\alpha$ que actuen en las direcciones AE, AF, y que hagan igual efecto que la sola α, serán α, $m\alpha$ y $n\alpha$, como AH, AE y AF, líneas terminadas por las paralelas á las direcciones HE, HF, expresando m y n dos cantidades constantes.

Porque si dos potencias $m\alpha$ y $n\alpha$ actuan sobre el cuerpo A, segun las direcciones AE, AF, y son tales, que en igual tiempo conducen al cuerpo, la una de A á E, y la otra de A á F, las dos juntas le conducirán en igual tiempo de A á H, (*Prop.* 8.) que es el efecto que produce la sola potencia α, actuando en la direccion AH. Pero (*Propos.* 5.) es $AH = \frac{dt}{A}\int \alpha\, dt$, $AE = \frac{dt}{A}\int m\alpha dt$, y $AF = \frac{dt}{A}\int n\alpha dt$: luego serán AH, AE, y AF, como $\frac{dt}{A}\int \alpha dt$, $\frac{mdt}{A}\int \alpha dt$, y $\frac{ndt}{A}\int \alpha dt$, ó como 1, m y n: esto es, como α, $m\alpha$ y $n\alpha$.

CO-

Corolario 1.

La potencia que actua segun AE, será pues $\frac{\alpha . AE}{AH}$: y la que actua segun AF, $\frac{\alpha . AF}{AH}$.

Corolario 2.

Como en el triángulo AEH, los lados AH, AE, y EH = AF son entre sí, como los senos de los ángulos opuestos, serán tambien las potencias α, $m\alpha$, $n\alpha$, como estos senos.

Corolario 3.

Como es arbitraria la descomposicion del movimiento, se pueden tomar como quiera las direcciones AE, AF, y tirando de un punto qualquiera H las paralelas HE, HF, si AH expresa la potencia que actua efectivamente, las AE, AF expresarán las dos en que se descompone aquella, y que producirán igual efecto.

PROPOSICION 11.

Si la accion de una potencia que actua sobre un cuerpo A en la direccion AH, se supone que proceda de tres, que haciendo el mismo efecto actuen en las direcciones AF, AG, AE, serán las quatro potencias entre sí, como AH, AF, AG, y AE. Fig. 4.

Porque si la potencia que actua segun AH, se representa por la misma AH, esta se puede descomponer (*Cor.* 3. *Prop.* 10.) en dos que hagan el mismo efecto AF, AI: y la que actua segun AI en otras dos que hagan el mismo efecto AG, AE, con lo que se habrá descompuesto la potencia AH en tres que hacen el mis-

mo

mo efecto AF, AG, AE: por lo que las quatro potencias serán entre sí, como AH, AF, AG, y AE.

Corolario I.

Las tres direcciones AF, AG, AE quedan arbitrarias (*Cor.*3. *Prop.*10.): pueden tomarse como quiera, y tirando de un punto qualquiera H, las paralelas HF, AI, HI, IG, IE, se tendrán las AF, AG y AE, que expresarán las potencias en que se descompone la primera AH.

Corolario 2.

De la misma manera se puede descomponer una potencia en quatro, cinco, ó las que se quieran, que hagan igual efecto.

CAPITULO 3.

Del centro de gravedad de un Systhema de cuerpos: y de su movimiento.

DEFINICION 18.

A Una coleccion de cuerpos, como *A, B, C* &c. se la ha dado el nombre de *Systhema de cuerpos*, por la semejanza que tiene con el Systhema del Mundo, compuesto de varios cuerpos, como el Sol, y Planetas, cuyos movimientos ha explicado con tanta propiedad el Cavallero *Newton* con solos los principios de Mechánica, y la ley de la atraccion general, que cada dia verifica mas y mas la experiencia.

PROPOSICION 12.

Si dos cuerpos ó masas A y B se mueven desde el reposo por dos potencias α y β, cuyas direcciones AE, BF sean paralelas, la diferencial del espacio corrido por el punto G en la línea Gg, paralela tambien á las direcciones AE, BF de las potencias, será $= \frac{\mathrm{A}Adt\int\beta dt + \mathrm{B}Bdt\int\alpha dt}{\mathrm{AB}.(A+B)}$: expresando A y B las distancias AG, GB, y t el tiempo. Fig. 5.

Tirada la FH, paralela á la BA, llamando a y b á los espacios corridos por los cuerpos A y B, y siendo AE y BF dos diferenciales de dichos espacios: será HE $= da - db$: y FH $(A+B)$: HE $(da-db) =$ Fh (B) : hg $= \frac{B}{A+B}(da-db)$: de que se deduce Gg, diferencial del espacio corrido por el punto G, $= db + \frac{B}{A+B}(da-db) = \frac{Adb+Bda}{A+B}$: en cuya expresion, substituyendo (*Prop.* 5.) $db = \frac{dt}{\mathrm{B}}\int\beta dt$, y $da = \frac{dt}{\mathrm{A}}\int\alpha dt$, resulta $\mathrm{Gg} = \frac{\frac{Adt}{\mathrm{B}}\int\beta dt + \frac{Bdt}{\mathrm{A}}\int\alpha dt}{A+B} = \frac{\mathrm{A}Adt\int\beta dt + \mathrm{B}Bdt\int\alpha dt}{\mathrm{AB}.(A+B)}$.

Escolio.

Se supone, por ahora, que la masa de cada cuerpo sea infinitamente pequeña, ó que esté toda congregada en un punto: y que sobre este se exercite la potencia.

Corolario 1.

Si fuere $AA = BB$, será Gg, diferencial del espacio corrido por el punto $G = \frac{dt\int(\alpha + \beta)\,dt}{A + B}$: pues substituyendo $BB = AA$, es $Gg = \frac{AAdt\int\beta dt + BBdt\int\alpha dt}{AB.(A+B)} = \frac{AAdt\int\beta dt + AAdt\int\alpha dt}{A.(AB + AA)} = \frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$.

Corolario 2.

Como en esta expresion se hallan excluidas las distancias A y B, no alteran estas el valor de la expresion, que siempre será la misma, disten los cuerpos A y B lo que se quisiere del punto G, con tal que se mantengan las distancias A y B en razon inversa de las masas A y B.

Corolario 3.

Puédense suponer disminuidas al infinito las cantidades GA, GB; esto es, suponerse iguales á cero, y quedará la expresion la misma. En este caso los dos cuerpos estarán unidos en el punto G, y correrán por la Gg: y lo mismo las dos potencias que actuan como una $= \alpha + \beta$, sobre el cuerpo $A + B$: luego el mismo espacio correrá el punto G en la Gg paralela á las direcciones AE, BF, quando los cuerpos A y B fueren animados por las potencias α y β, que quando los cuerpos unidos en G fueren animados por la Gg con la potencia $\alpha + \beta$.

PROPOSICION 13.

Fig. 6. Si fueren tres los cuerpos ó masas, como A, B, C, impelidos por las potencias α, β y γ, segun las paralelas AE, BF, CH: la diferencial corrida por el punto G, tomado de suerte que sean $A.Ag = B.gB$ y $(A + B).gG = C.GC$, será $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$.

Tomado el punto g de suerte que sea $A.Ag = B.gB$, la diferencial corrida por el punto g es la misma que resultara si estando en g el cuerpo $A + B$, fuera animado por la potencia $\alpha + \beta$, segun la direccion gh, paralela á las AE, BF y CH: con que para el efecto se reduce el caso al mismo que si los dos cuerpos C y $A + B$, el uno en C, y el otro en g, fueran animados por las potencias γ, y $\alpha + \beta$, segun las direcciones paralelas CH, gh: y asi la diferencial corrida por el punto G en la paralela GI á las otras direcciones, tomado de suerte que sea $(A + B).gG = C.GC$, ó las distancias gG, GC en razon inversa de las masas $A + B$ y C, será la que expresa la fórmula $\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, substituyendo en ella $\alpha + \beta$ por α, $A + B$ por A, γ por β, y C por B: será, pues, la diferencial corrida por el punto G en la paralela GI á las direcciones AE, BF, CH, $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$.

Corolario 1.

No hallandose tampoco en la expresion $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$ las distancias Ag, gB, gG, GC: se sigue, que tampoco alterarán estas distancias la expresion; y que quedará siempre la misma, con tal que sean Ag, gB en razon inversa de las masas A y B: y lo mismo gG, GC en razon inversa de las masas $A + B$ y C.

CO-

Corolario 2.

Puédense disminuir las distancias Ag, gB, gG, GC al infinito, ó quedar cero, sin que se haya alterado el valor de la expresion $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$: y como en este caso los tres cuerpos A, B, C quedarian unidos en G, y lo mismo las tres potencias α, β y γ: se sigue, que el mismo espacio correrá el punto G, en la GI paralela á las direcciones AE, BF, CH, quando los cuerpos A, B y C fueren animados por las potencias α, β, y γ, que si los tres cuerpos unidos en K fueran animados por la KI con la potencia $\alpha+\beta+\gamma$.

PROPOSICION 14.

Fig. 7. Si fueran los cuerpos ó masas quatro, como A, B, C, D, impelidos por las quatro potencias α, β, γ, δ, cada una á su correspondiente, segun las paralelas AE, BF, CH, DL: la diferencial corrida por el punto G, tomado de suerte que sean $A.Ag = B.Bg$, $(A+B)gK = C.KC$, y $(A+B+C).KG = D.DG$, será $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta)dt}{A+B+C+D}$.

La diferencial corrida por el punto K, en virtud de las tres potencias $\alpha+\beta+\gamma$ que animan los cuerpos A, B y C, es, por lo dicho en el número antecedente, la misma que corriera si los tres cuerpos unidos en K fueran animados por la potencia $\alpha+\beta+\gamma$ segun la direccion KI paralela á las otras: luego para el efecto se reduce el caso al mismo que si solos dos cuerpos D y $A+B+C$, el uno en D, y el otro en K, fueran animados por las potencias δ y $\alpha+\beta+\gamma$, segun las direcciones paralelas á las otras: y asi, la diferencial corrida por el punto G, tomado de suerte que sea $(B+A+C).KG = D.DG$, ó las distancias KG, KD

GD en razon inversa de las masas $(A+B+C)$ y D, será la que expresa la fórmula $\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, substituyendo en ella $\alpha+\beta+\gamma$ por α, $A+B+C$ por A, δ por β, y D por B: será, pues, la diferencial corrida por el punto G en la paralela GH á las otras direcciones $\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta)dt}{A+B+C+D}$.

Corolario 1.

Lo mismo se concluirá, aunque sean cinco, seis, ó infinitos los cuerpos ó masas: de suerte que, en general, la diferencial corrida por el punto G, tomado en la conformidad expresada, será $= \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dt}{A+B+C+D+\&}$: la misma que resultará si, unidos todos los cuerpos ó masas en el punto G, fueran animados por la potencia $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&$; pues en la expresion no se hallan las distancias de unos cuerpos respecto de otros, y estas se pueden disminuir al infinito, ó hacerlas cero, sin que por ello se altere la expresion.

Corolario 2.

Si hacemos la suma de las potencias $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\& = \pi$: y la suma de las masas $A+B+C+D+\& = M$: tendrémos tambien la diferencial corrida por el punto G, tomando en la conformidad expresada, (*Prop.* 12. 13. 14.) $= \frac{dt\int\pi dt}{M}$.

PROPOSICION 15.

Si el punto G está tomado de suerte que sea A. Fig. 8.

$A.AG = B.BG$: y á un plano qualquiera FE se baxan las perpendiculares AE, Gg, BF, será $gG = \frac{A.AE + B.BF}{A + B}$.

Tirado por G, el plano HI paralelo al EF, será el producto $A.AE = A.(Gg + HA)$, y el producto $B.BF = B.(Gg - IB)$: con que los dos productos $A.AE + B.BF$ serán iguales á $(A+B).Gg + A.HA - B.IB$; pero la semejanza de los triángulos AHG, BIG, dá $AG : AH = GB : IB$: luego $IB = \frac{AH.GB}{AG}$, cuyo valor substituido en la equacion antecedente, dá $A.AE + B.BF = (A+B).Gg + A.HA - \frac{B.AH.GB}{AG}$; que se reduce, poniendo en lugar de B.BG su igual A.AG, á $A.AE + B.BF = (A+E).Gg + A.HA - A.AH = (A+B).Gg$: luego $gG = \frac{A.AE + B.BF}{A+B}$.

Corolario 1.

Si en lugar de las masas A y B, se toman las potencias α y β de suerte que sea $\alpha.AG = \beta.BG$, tambien será $Gg = \frac{\alpha.AE + \beta.BF}{\alpha + \beta}$.

PROPOSICION 16.

Fig. 9. Si fueren tres los cuerpos ó masas como A, B, C, tirado el plano qualquiera FI, y baxadas á él las perpendiculares BF, AE, CI, &, si se tomare el punto G de suerte, que sean $A.Ag = B.Bg$, y $(A+B).gG = C.CG$, será $GH = \frac{A.AE + B.BF + C.CI}{A + B + C}$.

Siendo $(A+B).gG = C.CG$, es (*Prop.* 15.) $(A+B)\,gK + C.CI = (A+B+C).GH$: y siendo $A.Ag = B.Bg$, es $A.AE + B.BF = (A+B).gK$: conque, substituyendo en la equacion antecedente este valor, será $A.AE + B.BF + C.CI = (A+B+C).GH$, y $GH = \frac{A.AE + B.BF + C.CI}{A+B+C}$.

Corolario 1.

Si en lugar de las masas A,B,C, se colocan las potencias α, β y γ, siendo $\alpha.Ag = \beta.Bg$, y $(\alpha+\beta).gK = \gamma.CG$, tambien será $GH = \frac{\alpha.AE + \beta.BF + \gamma.CI}{\alpha + \beta + \gamma}$.

Corolario 2.

Lo mismo se demonstrará de quatro, cinco, ó infinitos cuerpos y potencias: de suerte, que la distancia perpendicular desde el punto G, tomado como se previno (*Prop.* 15. 16.), á un plano qualquiera, será siempre igual á la suma de los productos de cada cuerpo ó potencia, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de los cuerpos ó potencias.

Corolario 3.

Si la distancia perpendicular de un punto G, á un plano qualquiera, es igual á la suma de los productos de cada cuerpo, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de los cuerpos: el punto tomado G será el que se previno (*Prop.* 12, *hasta* 16) y por consiguiente tendrá las propiedades asignadas en las mismas Proposiciones y sus Corolarios.

DEFINICION 19.

Al punto G, tomado de la forma que se ha dicho (*Prop.* 12, *hasta* 16) se le dá comunmente el nombre de *centro de gravedad*, ú *de la gravedad*.

Escolio.

Este nombre no le es propio, sino en tanto que las potencias que actuan son las gravedades de los cuerpos ó masas; pero como suelen actuar tambien sobre el cuerpo potencias que no son las gravedades, y que los centros de estas no son los de las masas, como se verá despues, distinguió con acierto *Daniel Bernoulli* un centro del otro: llamó al uno *centro de las potencias*, y al otro *centro de las masas*. Como en los cuerpos graves concurren los dos centros, por ser las potencias ó gravedades como las masas (*Cor.* 1. *Prin.* 2.), es propio llamar, indistintamente á uno ú otro, centro de gravedad: y asi, tratandose de esta, lo mismo será decir, centro de las masas, que el de gravedad.

PROPOSICION 17.

Con qualesquiera y distinta velocidad que se muevan los cuerpos que componen un systhema, como todos corran por direcciones paralelas, tambien se mantendrá el centro de las masas moviendose por la misma y paralela direccion.

Fig. 10. Que sean A, B, C, &c. los cuerpos que se mueven en las direcciones AE, BF, CI, paralelas entre sí. Tómese un plano qualquiera LK paralelo á dichas direcciones, y siendo G el centro de las masas, será $GH = \frac{A.Ae + B.Bf + C.Ci + \&c.}{A + B + C + \&c.}$. En esta expresion todas las masas quedan constantes, de la misma suerte que las perpendiculares Ae, Bf, Ci, &c, y esto con qualquiera ó distinta velocidad que se muevan, puesto que se suponen dirigirse por paralelas á la LK: luego queda constante toda la expresion, y por consiguiente, la GH, y el centro de las masas G, se moverá paralelamente á las demas direcciones.

Corolario 1.

Lo mismo sucederá al centro de las potencias, si estas fueren constantes, como sucede con la gravedad.

Corolario 2.

Segun lo dicho, el centro de las masas de un systhema de cuerpos se dirigirá siempre paralelamente á las direcciones de las potencias, si estas fueren paralelas entre sí: y la diferencial corrida por aquel (*Cor.* 2. *Prop.* 14), será siempre $= \frac{dt\int(\alpha + \beta + \nu + \delta + \&)dt}{A + B + C + D + \&} = \frac{dt\int\pi dt}{A}$: la misma que corriera si, unidos los cuerpos ó masas en su centro, fueran animados por la suma de las potencias π en la direccion de estas.

Corolario 3.

La distancia perpendicular desde el centro de las masas á un plano qualquiera, será (*Cor.* 2. *Prop.* 16.) igual á la suma de los productos de cada masa, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las masas.

Corolario 4.

Asimismo la distancia perpendicular desde el centro de las potencias que actuan en un systhema á un plano qual-

qualquiera, será (*Cor.* 2. *Prop.* 16) igual á la suma de los productos de cada potencia, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las potencias.

Corolario 5.

Si suponemos el espacio corrido por el centro de las masas $= g$, y su velocidad $= W$, será (*Cor.* 4. *Prop.* 3, *y Cor.* 1. 2. *Prop.* 14.) $dg = Wdt = \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dt}{A+B+C+D+\&} = \frac{dt\int\pi dt}{M}$: luego

$$W = \frac{\int\alpha dt+\int\beta dt+\int\gamma dt+\&}{A+B+C+\&} = \frac{\int\pi dt}{M}$$

$$dW = \frac{\alpha dt+\beta dt+\gamma dt+\&}{M} = \frac{\pi dt}{M}$$

$$dt = \frac{MdW}{\alpha+\beta+\gamma+\&} = \frac{MdW}{\pi}.$$

Corolario 6.

Siendo (*Cor.*4.*Prop.*3.) $dg = Wdt$, ó $W = \frac{dg}{dt}$, y asimismo (*Cor.*5.), $dW = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dt}{M} = \frac{\pi dt}{M}$; multiplicando estas igualaciones, tendremos tambien $WdW = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dg}{M} = \frac{\pi dg}{M}$: é integrando $\frac{1}{2}W^2 = \frac{\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dg}{M} = \frac{1}{M}\int\pi dg$: ó $W^2\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&)dg = \frac{2}{M}\int\pi dg$.

Co-

Corolario 7.

Del mismo modo, si substituimos en la equacion $W = \frac{\int\alpha dt+\int\beta dt+\int\gamma dt+\&}{A+B+C+\&}$, $\alpha dt = Adu$, (*Cor.Ax.*2) $\beta dt = Bdv$, &, tendremos $W = \frac{\int Adu+\int Bdv+\&}{A+B+\&} = \frac{Au+Bv+\&}{A+B+\&}$: esto es, la velocidad del centro de las masas, igual á la suma de los productos de cada masa, por su velocidad, dividida por la suma de las masas.

Corolario 8.

Si las potencias que animan los cuerpos no se dirigiesen segun líneas paralelas, se puede descomponer cada una de aquellas en dos ó en tres, que se dirijan por líneas perpendiculares entre sí, siendo paralelas cada una de estas respectivas perpendiculares. La suma de todas aquellas que se dirigen segun líneas paralelas darán el movimiento del centro de las masas, segun aquella direccion: y lo mismo se hallará segun las otras direcciones: con que se tendrá el movimiento compuesto del centro de las masas.

Corolario 9.

Respecto de que con esta descomposicion de potencias se tiene el movimiento compuesto del centro de gravedad, bastará para qualquiera caso resolver solo aquel en que se dirigen las potencias por líneas paralelas: y es lo que haremos por ahora.

Corolario 10.

Si desde el principio de la accion, la suma de las po-

potencias positivas que actuan en un systhema, fuere igual á la suma de las negativas, el centro de las masas quedará inmovil: porque es $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \& = 0$.

Corolario 11.

Como las direcciones de las potencias que no son paralelas se descomponen en otras que lo son, puede ser el espacio corrido por el centro de las masas, segun una, ó dos direcciones, cero; sin embargo que, segun las otras, no lo sea: basta para ello que la suma de las potencias positivas, que actuan segun aquella direccion, sea igual á la suma de las negativas al principio de la accion.

Corolario 12.

Si los cuerpos que componen un systhema, en lugar de hallarse libres, estubieren ligados ó unidos entre sí por líneas inflexíbles, de suerte que esto les impida correr por la direccion que actuan las potencias, pueden considerarse como animados cada uno por dos potencias, una la que realmente los mueve, y otra la que procede de la tension ó fuerza con que se tiran mutuamente los cuerpos; pero qualquiera de estas positiva tiene su igual negativa, porque la accion y reaccion son iguales: luego, desde el principio de la accion, será $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \& = 0$, y el centro de las masas del systema quedará inmovil, por lo que toca á las fuerzas con que mutuamente se tiran los cuerpos.

Corolario 13.

Quedará, pues, el movimiento del centro de las masas de un systhema como si no actuasen sobre él si no las solas potencias que ponen en movimiento los cuer-

cuerpos, y asi, el centro de las masas del systhema se moverá del mismo modo, estando los cuerpos libres, que estando ligados entre sí por líneas inflexíbles.

Corolario 14.

Un cuerpo qualquiera es lo propio que un systhema de cuerpos infinitamente pequeños ligados entre sí: con que el centro de la masa total de un cuerpo qualquiera se moverá del mismo modo animado de qualesquiera potencias, que si cada partícula de materia de las que lo componen estubiera separada y libre: ó como si fuera un systhema de cuerpos libres.

Corolario 15.

Lo mismo se debe entender de un systhema de cuerpos ligados entre sí, aunque su masa no se considere reunida en su centro.

Corolario 16.

Con que tendremos, generalmente, para qualquiera cuerpo, ó número de cuerpos libres ó ligados entre sí, $dg = \frac{dt(\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&)}{M} = \frac{dt}{M}\int \pi dt$

$$W = \frac{\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&}{M} = \frac{1}{M}\int \pi dt$$

$$dW = \frac{\alpha dt + \beta dt + \gamma dt + \&}{M} = \frac{\pi dt}{M}$$

$$dt = \frac{M dW}{\alpha + \beta + \gamma + \&} = \frac{M dW}{\pi}$$

$$W^2 = \frac{2}{M}\int(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&)dg = \int \pi dg$$

$$W = \frac{Au + Bv + \&}{M}.$$

CO-

Corolario 17.

Si fuere $W=o$, será tambien $Au+Bv+\&=o$: y si el systhema se compusiere de los dos cuerpos solos A y B, actuará el uno positivamente, y el otro negativamente: de suerte que será $Au=Bu$; ó $u:v=\frac{1}{A}:\frac{1}{B}$: esto es, en qualquiera systhema, ó máchîna compuesta de dos cuerpos, las velocidades que estos tienen, quando el centro de las masas está fixo, son en razon inversa de las masas.

Corolario 18.

En los cuerpos graves, las potencias son como las masas: luego en toda máchîna donde la gravedad actua, las velocidades que toman los dos cuerpos de que se compone la máchîna, serán en razon inversa de las potencias ú de las gravedades, si el centro de gravedad estubiere fixo. Si al contrario, este centro se moviere, la razon en que estubieren las potencias no será igual á la que tubieren las velocidades.

Corolario 19.

Si fuere la suma $\alpha+\beta+\gamma+\&=o$, será $dW=o$, ó al contrario, para que sea $dW=o$, ha de ser la suma de las potencias $\alpha+\beta+\gamma+\&$ que animan el cuerpo, ó el systhema, igual cero: y asi el centro de las masas de un cuerpo, ú de un systhema, no puede moverse con velocidad ó movimiento uniforme, á menos que todas las potencias que lo animan no se destruyan, ó que ninguna actue.

Co-

Corolario 20.

Como el estar ligados entre sí los cuerpos de un systhema nada altera la demonstracion dada (*Cor.* 2. 3. *Prop.* 16.) sobre la distancia perpendicular de su centro de las masas á un plano qualquiera: se sigue, que tambien la distancia perpendicular del centro de las masas de un cuerpo qualquiera á un plano, será igual á la suma de todos los productos de cada partícula de la masa que lo compone, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las masas, ú de todo el cuerpo: y del mismo modo, la distancia perpendicular del centro de las potencias que actuan sobre un cuerpo á un plano qualquiera, será igual á la suma de todos los productos de cada potencia, por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por la suma de las potencias.

Corolario 21.

Como en los cuerpos igualmente densos es (*Def.* 12.) la masa proporcional al espacio que ocupan, se sigue, que puede tomarse en ellos para el cálculo el espacio por la masa: y la distancia perpendicular de su centro de masas á un plano qualquiera, será igual á la suma de los productos de cada espacio diferencial por su distancia perpendicular al mismo plano, dividida por todo el espacio que ocupa el cuerpo.

Corolario 22.

Si un cuerpo de estos se puede dividir en dos partes iguales y semejantes por qualquiera tres planos que se corten entre sí perpendicularmente, el centro de las masas estará en el punto comun donde se cruzan

los

los planos: porque los productos de los espacios diferenciales de un lado de qualquiera de los tres planos, por sus distancias perpendiculares al mismo plano, serán iguales á los productos correspondientes del otro lado: y siendo los unos negativos, y los otros positivos, la suma se destruirá, y la distancia perpendicular desde el centro de las masas al plano, será cero: ó lo que es lo mismo, el centro de las masas se hallará en el mismo plano. Hallándose tambien en los otros dos, por la propia razon, se hallará en el concurso de ellos.

Corolario 23.

El centro de la masa de una esphera igualmente densa, será pues su centro de magnitud ú de figura: y de la misma manera, el centro de la masa de una elipsóide, de un paralelepípedo, de un cylindro, y de qualesquiera otros cuerpos que pueden dividirse en dos partes iguales por tres planos que se crucen perpendicularmente.

Escolio.

Para hallar el centro de las masas de otro qualquiera cuerpo igualmente denso, no habrá sino suponer que pase un plano por qualquiera punto, que llamamos *plano primitivo*, dividir el cuerpo por dos planos paralelos á aquel, é infinitamente cercanos entre sí, para que estos encierren un espacio diferencial que diste igualmente por todas partes del plano primitivo: multiplicada la distancia perpendicular desde este espacio diferencial al plano, integrando el producto, y dividido por todo el espacio que ocupa el cuerpo, el quociente será la distancia perpendicular desde el plano al centro de la masa total: repetido esto en tres planos que se crucen perpendicularmente, la comun seccion será el centro de la masa total.

Pe-

Pero muchos cuerpos se pueden dividir en dos partes iguales y semejantes por dos planos perpendiculares entre sí, ya que no en tres, como son las parabolóides, las hyperbolóides, y todos los demas formados por la revolucion de una curva qualquiera: en este caso es cierto, por lo dicho (*Cor.* 22.), que el centro de las masas, siendo igualmente densos los cuerpos, está en la comun seccion de los dos planos, ó en el exe de la revolucion: no habrá, pues, mas para hallar el preciso punto ó centro de la masa total, que suponer un plano perpendicular al exe, y obrar como antes. Puede, para mayor facilidad, suponerse, que el plano primitivo pasa por el origen de las abcisas ó extremo del exe: y llamando estas x, las ordenadas á la curva y, y la circunferencia de un círculo c, siendo el radio la unidad, tendremos cy por la circunferencia que describirá la ordenada en su revolucion, y $\frac{1}{2}cy^2$ por el area del círculo ó plano paralelo al que se supone pasar por el extremo del exe: por lo que $\frac{1}{2}cy^2dx$ será el espacio diferencial que dista igualmente de dicho plano primitivo, y $\frac{1}{2}cy^2xdx$ el producto del mismo espacio por su distancia perpendicular al plano. La suma de los productos será $\frac{1}{2}c\int y^2xdx$: y siendo $\frac{1}{2}c\int y^2dx$ la suma de los espacios ó el cuerpo total, tendremos la distancia desde el plano, ú desde el extremo del exe al centro de la masa total $= \dfrac{\frac{1}{2}\int y^2xdx}{\frac{1}{2}\int y^2dx} = \dfrac{\int y^2xdx}{\int y^2dx}$: fórmula general para hallar el centro de las masas de todos los cuerpos de igual densidad, que se forman por la revolucion de una curva qualquiera al rededor de un exe.

Exemplo 1.

Que se haya de hallar el centro de la masa de una semiesphera. Su equacion, tomando su centro por origen, es $y^2 = r^2 - x^2$, siendo r su radio. Substitu-

yen-

yendo este valor de y^2 en la fórmula, será la distancia desde el centro de la esphera, ú del origen, al centro de la masa $= \frac{\int (r^2 - x^2) x dx}{\int (r^2 - x^2) dx} = \frac{(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} x^2) x}{r^2 - \frac{1}{3} x^2}$: ó, poniendo $x = r$, para comprehender toda la semiesphera, será esta distancia $= \frac{\frac{1}{4} r}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8} r$.

Exemplo 2.

Que se haya de hallar tambien el centro de la masa de una parabolóide. Su equacion es $y^2 = px$. Substituyendo este valor de y^2 en la fórmula, será la distancia desde el origen de las abcisas al centro de la masa $= \frac{\int p x^2 dx}{\int p x dx} = \frac{\frac{1}{3} x^3}{\frac{1}{2} x^2} = \frac{2}{3} x$: y asi de los demas cuerpos.

Corolario 24.

De la misma manera se hallará el centro de gravedad de las potencias.

CAPITULO 4.

De la rotacion de un Systhema.

DEFINICION 20.

Rotacion de un Systhema se llama al acto de girar este sobre un punto ó exe qualquiera movible, ó inmovible: y al ángulo que con este movimiento de rotacion describe el systhema se llama *ángulo giratorio*, ó de *rotacion*.

PRO-

PROPOSICION 18.

Si dos cuerpos A y B, ligados por una linea inflexíble AB, se mueven impelidos por las potencias α y β, en las direcciones paralelas AF, BG, de suerte que en un instante de tiempo dt tomen las situaciones E y I, el ángulo giratorio que describirán en este instante de tiempo será $= \frac{A dt \int \alpha dt\, sen. \Sigma - B dt \int \beta dt\, sen. \Sigma}{A^2 \mathrm{A} + B^2 \mathrm{B}}$: denotando A y B las distancias desde los cuerpos A y B al centro de las masas N, y Σ el ángulo KAB, que forman las direcciones con la AB. Fig. 11.

Puesto que el centro de gravedad N ha de seguir la linea NHM paralela á las direcciones (*Prop.* 17.), las dos distancias HE, HI han de ser iguales á NA, NB: y FE, GI serán los espacios que correrán los cuerpos en virtud de las fuerzas con que se tiran mutuamente; pero estas fuerzas exerciendose siempre segun las líneas AB, EI que unen los cuerpos, no alteran (*Cor.* 12, *Prop.* 17.) las fuerzas ó potencias que animan estos cuerpos perpendicularmente á las mismas líneas AB, EI. Las fuerzas ó potencias segun AF, BG son (*Cor.* 2. *Prop.* 10.) á las perpendiculares, como el radio, á $sen. \Sigma$: luego la potencia que anima el cuerpo A, perpendicularmente á AB, será $\alpha\, sen. \Sigma$, y la que anima el cuerpo B, $\beta\, sen. \Sigma$: la diferencial del espacio corrido por el cuerpo A, perpendicularmente á AB, será pues (*Prop.* 5.) $\frac{dt}{\mathrm{A}} \int \alpha dt\, sen. \Sigma$, y el corrido por el cuerpo B será $\frac{dt}{\mathrm{B}} \int \beta dt\, sen. \Sigma$, y el exceso LE de uno á otro espacio será $\frac{dt}{\mathrm{A}} \int \alpha dt\, sen. \Sigma - \frac{dt}{\mathrm{B}} \int \beta dt\, sen. \Sigma$.

El ángulo giratorio LIE es, segun la Geometría,

tría, $=\frac{\text{LE}}{\text{LI}}=\frac{\text{LE}}{\text{AB}}$: con que será este ángulo $=$

$$\frac{\frac{dt}{\text{A}}\int \alpha dt\, sen.\Sigma - \frac{dt}{\text{B}}\int \beta dt\, sen.\Sigma}{\text{AB}}$$: ó poniendo AB $=$

$$A+B, = \frac{\frac{dt}{\text{A}}\int \alpha dt\, sen.\Sigma - \frac{dt}{\text{B}}\int \beta dt\, sen.\Sigma}{A+B}$$; pero

(*Corol.* 1. *Propos.* 12.) es $A\text{A}=B\text{B}$: luego será este

ángulo $= \frac{\frac{dt}{\text{A}}\int \alpha dt\, sen.\Sigma - \frac{Bdt}{A\text{A}}\int \beta dt\, sen.\Sigma}{A+B} = \ldots\ldots$

$$\frac{Adt\int \alpha dt\, sen.\Sigma - Bdt\int \beta dt\, sen.\Sigma}{A\text{A}.(B+A)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{Adt\int \alpha dt\, sen.\Sigma - Bdt\int \beta dt\, sen.\Sigma}{A^2\text{A}+B^2\text{B}}.$$

DEFINICION 21.

A este ángulo giratorio descrito en el instante de tiempo dt, se suele llamar tambien *velocidad angular*.

Corolario I.

Siendo la diferencial corrida por el cuerpo A (*Cor.* 4. *Prop.* 3.) $udt=$ LE: y el ángulo giratorio, ó velocidad angular $=\frac{\text{LE}}{\text{LI}}$: será tambien esta velocidad angular $=\frac{udt}{\text{LI}}$: y la del cuerpo A, $u=\frac{\text{LE}}{dt}=\frac{\text{LE}}{\text{LI}}.\frac{\text{LI}}{dt}$; esto es, será la velocidad $u=$ á la velocidad angular multiplicada por $\frac{\text{LI}}{dt}$.

DE-

DEFINICION 22.

A los productos $A\alpha$, $B\beta$, aα, bβ de las potencias α y β por sus distancias $A=$ AN, $B=$ BN, ó a $=$ AO, y b $=$ BQ á un plano QM que pasa por el centro de las masas N, se llaman *momentos de las mismas potencias*.

DEFINICION 23.

Del mismo modo á los productos AA, BB se llaman momentos de las masas, ú de la gravedad.

DEFINICION 24.

A los productos $A^2\text{A}+B^2\text{B}$ de las masas por el quadrado de su distancia al centro de ellas, llama *Leonardo Eulero* (§. 165 de su *Ciencia naval*) *momentos de inercia*, y nos conformarémos con esta voz en la succesivo.

Lema I.

Las cantidades $A sen.\Sigma$, y $B sen.\Sigma$ son iguales á las perpendiculares AO, BQ tiradas desde los cuerpos á la NM que, pasando por el centro de las masas N, es paralela á las direcciones AF, BG.

Los ángulos ANO, QNB son iguales á KAB, luego su seno será tambien $sen.\Sigma$: y siendo los triángulos ANO, BNQ rectángulos, será 1 : $sen.\Sigma=$ AN (A) : AO $=A sen.\Sigma$, y tambien 1. $sen.\Sigma=$ BN (B); BQ $=$ $B sen.\Sigma$: por lo que &c.

Corolario I.

Llamando, pues, las perpendiculares AO, BQ, a y b, será igualmente el ángulo giratorio producido en en el instante de tiempo $dt = \frac{dt\int \alpha a dt - dt\int \beta b dt}{A^2 A + B^2 B}$.

O porque la línea BQ es negativa, respecto de la AO, por estar al lado opuesto del centro de las masas, quedando en variar los signos á las cantidades que no fueren positivas, será la expresion del ángulo giratorio ó velocidad angular, producida en el instante de tiempo $dt = \frac{dt\int dt.(a\alpha + b\beta)}{A^2 A + B^2 B} = \frac{dt\int dt\, sen.\Sigma\, (A\alpha + B\beta)}{A^2 A + B^2 B}$

Escolio.

Se supone, por ahora, que los cuerpos A y B son infinitamente pequeños, ó que sus masas estén reunidas enteramente en dichos puntos.

Corolario 2.

Puesto que el ángulo giratorio es = ------- $\frac{dt\int dt\, sen.\Sigma\, (A\alpha - B\beta)}{A^2 A + B^2 B} = \frac{dt\int dt\,(a\alpha - b\beta)}{A^2 A + B^2 B}$, si desde el principio de la accion fuese la suma los momentos $A\alpha - B\beta = o$, ó $a\alpha - b\beta = o$, el systhema no girará.

Corolario 3.

Respecto que los dos cuerpos A y B se suponen impelidos constantemente segun las direcciones AF, BG, la rotacion se hará (*Cor.* 2. *Prop.* 8.) por el plano que coincida con ellas, y con la AB, que pasa por el centro de las masas.

DEFINICION 25.

A este plano, para mas inteligencia, llamaremos *plano giratorio*, ú *de la rotacion.*

Le-

Lema 2.

Si uno de los cuerpos se supone infinito, quedará sin movimiento, y coincidirá con él el centro de las masas: quedando asimismo este sin movimiento, ó fixo.

Siendo B el cuerpo infinito, la equacion $\frac{dt}{B}\int \beta dt = db$ manifiesta que su movimiento es cero: y la $B = \frac{AA}{B}$, que su distancia B al centro de las masas es tambien cero: luego si uno de los cuerpos, &c.

Corolario 4.

En este caso, tanto la cantidad $Bdt\int \beta dt\, sen.\Sigma$, como $B^2 B$ de la expresion del ángulo giratorio son cero: con que quedará en $\frac{Adt\int \alpha dt\, sen.\Sigma}{A^2 A} = \frac{dt\int \alpha dt\, sen.\Sigma}{AA}$, ó en $\frac{dt\int \alpha a dt}{A^2 A}$: esto es, quando un solo cuerpo A está obligado á girar sobre un punto fixo, distante de él la cantidad A, el ángulo giratorio, producido en el instante de tiempo dt, será $= \frac{dt\int \alpha dt\, sen.\Sigma}{AA} = \frac{dt\int \alpha a dt}{A^2 A}$.

Corolario 5.

Si fuere una sola la potencia que actuare, y dos los cuerpos: esto es, si fuere $\beta = o$, quedará el ángulo giratorio $= \frac{Adt\int \alpha dt\, sen.\Sigma}{A^2 A + B^2 B} = \frac{dt\int \alpha a dt}{A^2 A + B^2 B}$.

Corolario 6.

Esta expresion se reduce á $\frac{Adt\int\alpha dt\ sen.\ \Sigma}{A^2\left(A+\frac{B}{A^2}B\right)}=\frac{dt\int\alpha adt}{A^2\left(A+\frac{B^2}{A^2}B\right)}$: y es la misma que resultara (*Cor.* 4.) si supusieramos que el cuerpo $A+\frac{B^2}{A^2}B$ girara, obligado de la potencia α, sobre un punto fixo distante de él la cantidad A: luego el mismo ángulo giratorio produce la potencia α, moviendo un solo cuerpo $A+\frac{B^2}{A^2}$, distante de un punto fixo la cantidad A, que moviendo dos cuerpos A y B, distantes del mismo punto fixo las contidades A y B.

Corolario 7.

Como se ha desvanecido la cantidad $B\,sen.\Sigma$, ó perpendicular b en la expresion $\frac{dt\int\alpha adt}{A^2A+B^2B}$: se sigue, que es indiferente, para el efecto del ángulo giratorio, el lugar del cuerpo B, como diste siempre del punto fixo la cantidad B.

Corolario 8.

Podemos suponer que en lugar de dos cuerpos A y C que agita la potencia α á las distancias A y C del centro de gravedad, es solo el cuerpo $A+\frac{C^2}{A^2}C$ el que agita á la distancia A: y puesto su valor en la expresion $\frac{dt\int\alpha adt+dt\int\beta bdt}{A^2A+B^2B}$, en lugar de A solo, resultará el ángulo giratorio que producen, en el mismo instante de tiempo dt, dos potencias α y β, que actuan sobre tres cuerpos A, B y C, que están en el mismo plano de la rotacion $=\frac{dt\int\alpha Adt+dt\int\beta bdt}{A^2\left(A+\frac{C^2}{A^2}C\right)+B^2B}=\frac{dt\int\alpha adt+dt\int\beta bdt}{A^2A+B^2B+C^2C}$.

Corolario 9.

Del mismo modo, el ángulo giratorio que producirá la sola potencia α que actúe sobre los tres cuerpos A, C y D, será $\frac{dt\int\alpha adt}{A^2A+C^2C+D^2D}=\frac{dt\int\alpha adt}{A^2\left(A+\frac{C^2}{A^2}C+\frac{D^2}{A^2}D\right)}$: el mismo que produgera la propia potencia si actuara sobre el solo cuerpo $A+\frac{C^2}{A^2}C+\frac{D^2}{A^2}D$: cuyo valor puesto en lugar de A en la expresion ------ $\frac{dt\int\alpha adt+dt\int\beta bdt}{A^2A+B^2B}$: se tendrá el ángulo giratorio que producirán las dos potencias α y β que actuaren sobre los quatro cuerpos A, B, C y D, que están en el mismo plano de la rotacion $=\frac{dt\int\alpha adt+dt\int\beta bdt}{A^2\left(A+\frac{C^2}{A^2}C+\frac{D^2}{A^2}D\right)+B^2B}=\frac{dt\int\alpha adt+dt\int\beta bdt}{A^2A+B^2B+C^2C+D^2D}$.

Corolario 10.

Lo mismo se dirá de 5, 6, ó mas cuerpos: de suerte, que el ángulo giratorio que producen, en el instante de tiempo dt, las dos potencias α y β, que ac-

actuan sobre qualquiera número de cuerpos que están en el mismo plano de la rotacion, es $=$

$$\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2B + B^2B + C^2C + D^2D + \&}.$$

Corolario 11.

Si fuere solo un cuerpo, y dos las potencias: esto es, si fue $B = o$, se reducirá la expresion á

$$\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2A} = \frac{dt\int a dt.\left(\alpha + \frac{b}{a}\beta\right)}{A^2A}.$$

Corolario 12.

Està misma expresion resultara si la potencia $\alpha + \frac{a}{b}\beta$ actuara sobre el cuerpo A á la distancia perpendicular a de la direccion que pasa por el centro de las masas: luego el mismo ángulo giratorio producen dos potencias con direcciones paralelas que actuen á las distancias perpendiculares a y b de la direccion que pasa por el centro de las masas, que una sola potencia $\alpha + \frac{b}{a}\beta$ á la distancia a.

Corolario 13.

Podemos poner en la expresion $\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&}$, en lugar de dos potencias α y γ que actuen á las distancias a y c, una sola potencia $\alpha + \frac{c}{a}\gamma$ que actue á la distancia a: y se reducirá el ángulo giratorio producido de tres potencias que actuan paralelamente sobre qualesquiera cuerpos

pos que están en el mismo plano que las tres direcciones de las potencias, á $\frac{dt\,(\int\alpha a dt + \int\gamma c dt) + dt\int\beta b dt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&} =$

$$\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&}.$$

Corolario 14.

Del mismo modo, si colocamos en esta ultima expresion $\int a dt.\left(\alpha + \frac{d}{a}\delta\right)$, en lugar de $\int\alpha a dt$ solo, tendremos el ángulo giratorio que producen quatro potencias que actuan paralelamente sobre qualesquiera cuerpos que están en el mismo plano de la rotacion $=$

$$\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt + dt\int\delta d dt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&}.$$

Corolario 15.

Lo mismo se dirá de qualquiera número de potencias que actuen paralelamente sobre qualesquiera número de cuerpos que están en el mismo plano de la rotacion: luego, en general, el ángulo giratorio que producen en el instante de tiempo dt, qualesquiera número de potencias que actuan paralelamente sobre qualesquiera número de cuerpos ligados entre sí por líneas inflexibles que están en el mismo plano de la rotacion, será $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt + dt\int\gamma c dt + dt\int\delta d dt + \&}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&}$: en cuya expresion se pondrán negativas las perpendiculares a, b, c, d, &, y las potencias α, β, γ, & que lo fueren.

Corolario 16.

Si llamamos p la distancia perpendicular desde el cen-

centro de las potencias á la direccion que pasa por el centro de las masas, y π la suma de las potencias, tendremos (*Co.* 4. *Pro.* 17.) $p\pi = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \&$ suma de los momentos : y $dt\int p\pi dt = \text{- - - - - - -}\ dt\int dt\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \&)$: lo que dá el ángulo giratorio, que producen, en el instante de tiempo dt, qualesquiera número de potencias que actuan paralelamente sobre qualquiera número de cuerpos ligados entre sí por líneas inflexibles que están en el mismo plano de rotacion $= \dfrac{dt\int p\pi dt}{A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&}$.

Corolario 17.

La expresion $p\pi$ manifiesta que no se alterará la del ángulo giratorio, aunque se coloquen como quiera en el mismo plano de rotacion las potencias particulares, ni que se dividan, ni unan como quiera, con tal que la suma de las que se substituyeren en su lugar sea la misma π, y la distancia perpendicular desde el centro de ellas, á la direccion que pasa por el centro de las masas, sea igualmente la misma p.

Corolario 18.

La expresion del denominador - - - - - - - - - - $A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&$ manifiesta tambien, que no se alterará el valor del ángulo giratorio, porque se coloquen los cuerpos en otros sitios del plano de rotacion, con tal que se conserven á la misma distancia del centro de las masas; ó aunque se varien tambien estas del mismo modo que los cuerpos, con tal que la suma $A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \&$ se conserve siempre la misma.

Co-

Corolario 19.

Si suponemos que sean los momentos de inercia $A^2A + B^2B + C^2C + D^2D + \& = S$, será tambien el ángulo giratorio, que producen, en el instante de tiempo dt, qualesquiera número de potencias, que actuan paralelamente sobre qualesquiera número de cuerpos, ligados entre sí por líneas inflexibles, que están en un mismo plano de rotacion $= \dfrac{dt\int p\pi dt}{S}$.

Corolario 20.

Si llamamos, asimismo, P la distancia desde el centro de las masas al de las potencias, y Σ el ángulo que formare la línea tirada por estos dos centros con las direcciones, tendremos $1 : sen.\Sigma = P : p = P\,sen.\Sigma$: luego tambien podremos expresar el mismo ángulo giratorio por $\dfrac{\int dt\int \pi dt P\, sen\Sigma}{S}$: ó si fuere P constante, por $\dfrac{P\int dt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$.

PROPOSICION 19.

El systhema girará del mismo modo estando libre, que si su centro de masas estubiere fixo.

Supóngase, que en el mismo centro de las masas actue una nueva potencia, igual á la suma de todas las demas, y en direccion contraria : con esto el centro de las masas (*Cor.* 10. *Prop.* 17.) quedará en reposo ó fixo; pero esta nueva potencia, por estár aplicada en el centro de las masas, no altera el numerador del ángulo giratorio : luego el systhema girará del mismo modo estando su centro de masas fixo, que quando esté libre.

PRO-

PROPOSICION 20.

Las expresiones y fórmulas dadas del ángulo giratorio se extienden aun al caso en que no están todos los cuerpos y potencias en el mismo plano de rotacion.

Fig. 12. Sea el systhema de los tres cuerpos unidos por líneas inflexibles B, C, D, agitados por las tres potencias β, γ, δ, con direcciones paralelas entre sí, y perpendiculares á la recta DC, que junta los dos cuerpos D y C. Sea BA perpendicular á DC: A el centro de las masas de los cuerpos C y D, y G el de los tres cuerpos, ó el de los dos B y A, si se hallasen en este punto A unidos, y como uno solo, los dos cuerpos C y D, de tal suerte que el cuerpo supuesto en A, sea $A = C + D$. Que el centro de las dos potencias γ y δ se halle asimismo en A, á fin de que el systhema de los dos cuerpos solos C y D no gire, y la DC se conserve siempre en su movimiento perpendicular á las direcciones de las potencias. Tírese, por el centro de las masas G, la IH, paralela á la DC, y las perpendiculares DH, CI, que llamaremos *D* y *C*: así como AG, *A*: con lo que son $A = C = D$: y ultimamente supongase $\gamma + \delta = \alpha$.

Colóquense ahora todos estos valores en el ángulo giratorio que produce el systhema de los dos cuerpos B y A, $\frac{dt\int dt\,sen.\Sigma\,(A\alpha + B\beta)}{A^2A + B^2B}$, y quedará en $\frac{dt\int dt\,sen.\Sigma\,(C\gamma + D\delta + B\beta)}{C^2C + D^2D + B^2B}$, que es el ángulo giratorio que produce el systhema de los tres cuerpos B, C y D, y el mismo que produgeran, si los tres estubieran en un mismo plano de rotacion AB colocados á las distancias *B*, *C* y *D* del punto G: puesto que esta expresion del ángulo es idéntica con las que antes se dieron.

Co-

Corolario 1.

De la misma suerte, el cuerpo B se puede dividir en otros dos cuerpos, colocarse estos en los extremos de una línea paralela á la DC, y agitarse por dos potencias iguales á la β: y así de quantos cuerpos contuviere un systhema, que se hallasen en el mismo plano de rotacion AB.

Corolario 2.

Así como dos cuerpos A y B, colocados en el plano de rotacion AB, se pueden dividir, ó considerar divididos en varios, segun el método dicho; tambien los divididos se pueden reunir, ó considerar reunidos en el propio plano AB: en uno y otro caso el centro de las potencias se halla en este plano, y en él se expresa la medida del ángulo giratorio, ú de rotacion.

Corolario 3.

El plano giratorio ú de rotacion será, pues, en ambos casos aquel que, pasando por el centro de las masas, pasa tambien por el de las potencias, y es paralelo á la direccion de estas.

Corolario 4.

Puesto que el systhema girará del mismo modo que si estubiera fixo el centro de las masas G, girará ahora del mismo modo que si la línea HI estubiera fixa: pues por lo supuesto debe mantenerse constantemente paralela á DC, y esta perpendicular á las direcciones de las potencias.

 DE-

DEFINICION 26.

A esta línea HI, sobre que, como fixa, gira el systhema, se llama *exe de la rotacion.*

Corolario 5.

Si se tira un plano paralelo á las direcciones de las potencias, que coincida con el exe de la rotacion HI: y á este se baxan perpendiculares de los puntos D, A y C, serán estas d, a y c, y todas tres iguales entre sí, y á $D sen.\Sigma$, $A sen.\Sigma$, y $C sen.\Sigma$: con que substituyendo en el numerador de la fórmula, ú expresion del ángulo, aquellos valores, en lugar de estos, se reducirá á $\frac{dt\int dt\,(c\gamma + d\delta + b\beta)}{C^2C + D^2D + B^2B}$, que es la misma dada para los systhemas de cuerpos que están todos en el mismo plano giratorio AB.

DEFINICION 27.

A este plano tirado paralelo á la direccion de las potencias, y que coincide con el exe, llamaremos *plano directorio.*

Corolario 6.

Puesto que d, c y b, denotan las distancias perpendiculares desde los puntos D, C, y B al plano directorio, si llamamos p la distancia perpendicular desde el centro de todas las potencias al mismo plano, y π la suma de las mismas potencias, será la suma de los momentos $c\gamma + d\delta + b\beta + \&= p\pi$: con que tambien tendremos la expresion del ángulo giratorio $= \frac{dt\int p\pi dt}{C^2C + D^2D + B^2B}$: ó por último, haciendo

$C^2C + D^2D + B^2B + \& = S$, será tambien $= \frac{dt\int p\pi dt}{S}$: denotando S los momentos de inercia.

Corolario 7.

Por las fórmulas se puede ver que estas no exîgen, que precisamente hayan de estar los centros de las masas de cada dos cuerpos, como D y C, en la línea AB, así como lo supusimos (*Propos.* 20.): pueden suponerse colocados mas arriba, ó mas abaxo, en la misma línea CD, pues esto no alterará las distancias DH, AG y CI, y por consiguiente tampoco el denominador $C^2C + D^2D + B^2B + \&$, ni el ángulo giratorio. Lo único que se alterará será el centro de las masas G; pero siempre se mantendrá en la propia línea ó exe HI.

Corolario 8.

Tampoco exígen las fórmulas que precísamente hayan de estár los centros de las potencias de cada dos cuerpos como D y C en la línea AB, ni en el centro de las masas de estos, como supusimos (*Prop.* 20.): piden solo que la distancia p desde el centro de ellas al plano directorio sea, como antes, la misma: que esté colocado dicho centro en K, ó en qualquiera punto de la LKN paralela al exe, siempre resultará el mismo ángulo giratorio; puesto que se conserva y dá el mismo valor á la p.

PROPOSICION 21.

Quando el centro de las potencias se hubiese variado de suerte, que haya salido de la línea ó plano GA, que, pasando por el centro de las masas, es perpendicular al plano directorio HI, el systhema ya no girará sobre el exe fixo HI, sino sobre otro que, pasando por el centro de gravedad, sea perpendicular al plano paralelo á la direccion de las potencias, que pase por el centro de las masas, y el de las potencias.

Que las direcciones de las potencias sean perpendiculares al plano de la estampa ó papel, y que el centro de ellas se halle en O. Tirese el plano GO, paralelo á las direcciones, y del centro G levántese sobre este plano la perpendicular GQ, que será el exe fixo sobre que girará el systhema. Supóngase que tambien pudiera girar sobre la GQ. En este caso los productos de las potencias de una parte y otra del plano GO, por su distancia perpendicular al mismo plano, habian de formar el numerador de la expresion del ángulo giratorio; pero estos productos son todos cero: luego no puede girar el systhema sobre la GO, ni tampoco la QT: y por consiguiente será esta el exe fixo sobre que debe girar el systhema.

Corolario 1.

Tirando un plano que, pasando por QGT, sea paralelo á las direcciones de las potencias, este será el directorio: p será igual á la perpendicular baxada desde el centro de las potencias O sobre el plano directorio QGT: y GO será el plano de rotacion que, pasando por el centro de las masas G, y el de las potencias O, es paralelo á las direcciones de estas.

Corolario 2.

Como un cuerpo qualquiera se puede dividir en otros muchos infinitamente pequeños, que por naturaleza están ligados entre sí: se sigue, que el ángulo giratorio que, en la diferencial de tiempo dt, producirán, sobre un exe, qualesquiera número de potencias,

que actuen paralelamente sobre un cuerpo, será $= \frac{dt\int p\pi dt}{S} = \frac{P dt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$: denotando P la distancia desde el centro de las potencias al exe de rotacion, y Σ el ángulo que forma esta distancia ó línea con el plano directorio.

Corolario 3.

Si uno de los cuerpos fuere infinito, quedará (*Lema* 2.) fixo, concurrirá con él el centro de gravedad, y sobre él girará el systhema: ó sobre un exe fixo que, pasando por él, sea perpendicular al plano paralelo á las direcciones, que pase por el punto fixo, y por el centro de las potencias.

Corolario 4.

La expresion del ángulo giratorio será en este caso, como antes, $= \frac{dt\int a\alpha dt + dt\int b\beta dt + \&c + dt\int e\epsilon dt}{A^2 A + B^2 B + \& + E^2 E}$: que se reduce, siendo el cuerpo E el infinito, á $\frac{dt\int a\alpha dt + dt\int b\beta dt + \&}{A^2 A + B^2 B + \&} = \frac{dt\int p\pi dt}{S} = \frac{P dt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$:

Escolio.

En este caso el centro de gravedad del systhema está en el exe fixo: las distancias $A, B, C,$ & son las de los cuerpos al mismo exe fixo: p, a, b, & las perpendiculares tiradas desde las potencias al plano directorio, que coincide con el mismo exe fixo: P la distancia perpendicular desde el centro de las potencias π al exe; y S la suma de los productos de los cuerpos ó masas, por el quadrado de sus distancias perpendiculares al propio exe fixo.

Le-

Lema 3.

Si llamamos Z á la suma de los productos de los cuerpos ó masas, por el quadrado de su distancia á un exe que pase por el centro de ellas, paralelo al que pase por el punto fixo, y G la distancia desde el mismo centro de las masas al exe fixo, tendremos $S = G^2M + Z$.

Fig. 13. Porque, sea IKLN un cuerpo, que es lo mismo que un systhema de ellos ligados entre sí: H su centro de gravedad: O el exe fixo perpendicular al plano directorio, que supondremos sea el del papel; y Q un pesito, partícula, ó línea perpendicular al plano directorio, ó paralela á los exes. El quadrado de OQ, distancia perpendicular desde el exe fixo O al pesito Q, es igual á los quadrados de OH = G, y HQ juntos, mas dos rectángulos de OH por HT: y lo mismo se tiene de qualquiera otro pesito de los infinitos en que se divida el cuerpo: luego la suma S de los productos de todos los pesos ó masas, por el quadrado de su distancia perpendicular al exe fixo O, será $= G^2M + \int HQ^2 . Q + 2G \int HT . Q$: esto es, ------ $S = G^2M + Z + 2G \int HT.Q$; pero $\int HT.Q$ es la suma de los productos de los pesos ó masas, por su distancia al plano directorio YX, y esta suma es igual (*Cor.* 20. *Prop.* 17.) al producto de la masa total M, por la distancia desde el centro de las masas H al plano YX, que es cero: luego $\int HT.Q = 0$: lo que dá $S = G^2M + Z$.

Corolario 1.

Substituyendo este valor de S en las expresiones del ángulo giratorio, será esta en el caso del exe fixo $= \frac{\int dt \int p \pi dt.}{G^2M + Z} = \frac{P \int dt \int \pi dt \, sen. \Sigma}{G^2M + Z}$.

Corolario 2.

Quando es $G = 0$: esto es, quando el exe fixo está sobre el centro de las masas, ó que gira el systhema sobre su centro de masas, es $S = Z$: y en este caso se reducen las expresiones (*Cor.* 19. 20. *Prop.* 18.) á las mismas que se dieron: luego el systhema ó cuerpo libre gira del mismo modo que si girara sobre su centro de las masas fixo: lo mismo que ya se demostró (*Prop.* 19.).

Corolario 3.

Quando el centro de las potencias concurre con el de las masas, como sucede en los cuerpos graves que descienden por sola la accion de su gravedad, es $G = P$: luego en este caso será el ángulo giratorio sobre un exe fixo $= \frac{\int dt \int p \pi dt}{P^2M + Z} = \frac{P \int dt \int \pi dt \, sen. \Sigma}{P^2M + Z}$.

PROPOSICION 22.

El centro de gravedad en los cuerpos graves, que descienden por sola la accion de su gravedad, girando sobre un punto ó exe fixo, no puede reducirse al reposo, sino baxando lo mas que le es posible.

Sea ABCD un cuerpo grave que, sobre el exe fixo E, haya de girar libremente por sola la accion de su gravedad. Sea G el centro de gravedad del cuerpo: HO un plano horizontal, y FI otro vertical, que pasa por el exe fixo E. Tirada la EG, perpendicular al exe, será esta $= P$, y Σ el ángulo GEI. El caso único en que este cuerpo puede quedar sin movimiento es Fig. 14.

so-

solo aquel en que, al principio de la accion, sea la diferencial del ángulo giratorio $\frac{Pdt \int \pi dt \, sen. \Sigma}{P^2 M + Z}$ igual á cero; pero en qualquiera situacion que se coloque el cuerpo, nunca es esta cantidad igual á cero, sino quando es $Psen.\Sigma = GK = o$, ó $\Sigma = o$: luego á este estado ha de venir á reducirse para pararse. Este estado no resulta precisamente, sino consiguiendo el cuerpo el máximo $PCos.\Sigma =$ á la perpendicular GN, pues, diferenciando, tenemos $Pd\Sigma sen.\Sigma = o$, que dá $Psen.\Sigma = o$: luego el cuerpo es preciso que no pueda mantenerse en quietud, sino consiguiendo el centro G su máxima distancia de la horizontal HO, ó baxando lo mas que le es posible.

De los Péndulos.

DEFINICION 28.

Péndulo simple se llama á un cuerpo infinitamente
Fig. 15. pequeño, ó enteramente reunido en el punto A, sostenido de un hilo infinitamente delgado, ó línea inflexíble AC.

DEFINICION 29.

Si estando fixo el punto C, se aparta el cuerpo A de la vertical CB, como á GA, y se suelta, se mueve el péndulo en virtud de la gravedad, que es la potencia que lo anima, yendo á C*a*; despues de nuevo á CA, y asi continuamente. A cada una de estas idas y venidas se llama *una oscilacion.*

Corolario 1.

No hallandose en este systhema ó péndulo simple sino un solo cuerpo, y una sola potencia que lo anime, todas las cantidades de la expresion del ángulo giratorio deben ser iguales á cero para este caso, excepto una: con que será el ángulo giratorio del péndulo simple $= \frac{dt \int \alpha dt}{A^2 A} = \frac{Pdt \int \alpha dt \, sen.\Sigma}{A^2 A}$, ó por ser $P = CA$, $= \frac{dt \int \alpha dt \, sen.\Sigma}{CA.A}$.

Corolario 2.

Siendo, en los cuerpos que caen por la accion de la gravedad, la potencia α constante, y (*Cor. 3. Princ.* 2.) $\frac{\alpha}{A} = \xi$, será el ángulo giratorio del péndulo simple $= \frac{\xi dt \int dt \, sen.\Sigma}{CA}$: denotando Σ el ángulo BCA que forma el péndulo con la vertical CB á qualquiera instanre ó tiempo de su oscilacion: de suerte, que todo el ángulo, ú oscilacion entera, será $2\Sigma = \frac{\xi}{CA} \int dt \int dt \, sen\Sigma$.

DEFINICION 30.

A qualquiera otro péndulo, en quien el cuerpo ó hilo tenga alguna amplitud, ó que se componga de varios cuerpos unidos entre sí, como A, B, se llama *péndulo compuesto.* Fig. 16. 17.

Corolario 1.

Su ángulo giratorio será (*Corolario 3. Lema 3.*) $= \frac{P \int dt \int \pi dt \int \Sigma}{P^2 M + Z}$: ó por ser π constante, y $\frac{\pi}{M} = \xi$, $= \frac{P \xi M \int dt \int dt \int \Sigma}{P^2 M + Z}$.

Corolario 2.

Si un péndulo simple, y otro compuesto, cumplen sus oscilaciones al mismo tiempo, y estas fueren iguales: esto es, si fuere siempre Σ del uno, igual á Σ del otro, tendremos $\frac{\xi\int di\int dt\ sen.\Sigma}{CA} = \frac{P\xi M\int dt\int dt\ sen.\Sigma}{P^2M+Z}$, ó por ser iguales las cantidades $\xi\int dt\int dt\ sen.\Sigma$ en uno y en otro miembro, por la condicion del problema,

Fig. 15. será $\frac{1}{CA} = \frac{PM}{P^2M+Z}$: lo que dá la longitud del péndulo simple isochrono con el compuesto $CA = \frac{P^2M+Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM}$.

Corolario 3.

Substituyendo en lugar de P^2M+Z su igual S, será tambien la longitud del péndulo simple isochrono con el compuesto $CA = \frac{S}{PM}$.

DEFINICION 31.

Si en un péndulo compuesto, se toma un punto en la línea que junta el centro de gravedad y el exe fixo, distante de este de toda la longitud del péndulo simple, que hace las oscilaciones de igual magnitud, y de igual duracion que el compuesto, se llama á este punto, *centro de oscilacion.*

Corolario 1.

El centro de oscilacion distará de el de gravedad la cantidad $\frac{Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM} - P$, diferencia entre las dis-

distancias desde el centro de oscilacion y el de gravedad, hasta el exe fixo.

Corolario 2.

El centro de oscilacion distará siempre mas que el de gravedad del exe fixo: puesto que es $P + \frac{Z}{PM} > P$.

PROPOSICION 23.

La longitud del péndulo simple es, asimismo, $= \frac{(A^2A+B^2B+C^2C+\&)\,sen.\Sigma}{AA\,sen.\alpha+BB\,sen.\beta+CC\,sen.\gamma+\&}$: denotando Σ el Fig. 16
ángulo DCG que forma la vertical CD, ó plano vertical perpendicular á las direcciones, con la CG que pasa por el centro de gravedad G: y $\alpha, \beta, \gamma,$ & los ángulos DCA, DCB, & que forma la misma vertical ó plano con las líneas tiradas desde el punto fixo C, á qualquiera de los cuerpos, cada una á su correspondiente.

Siendo (*Cor.* 20. *Prop.* 18.) $P\,sen\Sigma = p$, ó $P = \frac{p}{sen\Sigma}$, substituyendo este valor en la fórmula (*Cor.* 3. *Def.* 30.) será la longitud del péndulo simple $= \frac{S\,sen.\Sigma}{pM}$: ó poniendo $S = A^2A+B^2B+C^2C+\&$, y $pM = aA+bB+cC+\& = AA\,sen.\alpha+BB\,sen.\beta+CC\,sen.\gamma+\&$, será la longitud del péndulo simple $= \frac{(A^2A+B^2B+C^2C+\&)\,sen.\Sigma}{AA\,sen.\alpha+BB\,sen.\beta+CC\,sen.\gamma+\&}$.

Corolario.

Si todos los ángulos $\alpha, \beta, \gamma,$ & fueren iguales: Fig. 17
esto es, si todos los cuerpos A, B, & estubieren en una mis-

misma línea ó plano BAC que pase por el punto ó exe fixo C: y cada uno de por sí estubiere como reunido en un punto de la misma línea ó plano, se podrá partir numerador y denominador por el mismo seno, y quedará para este caso la longitud del péndulo simple $= \frac{A^2A + B^2B + C^2C + \&}{AA + BB + CC + \&}$.

Escolio.

Esta fórmula, que muchos dieron por general, es solo cierta en este caso; en los demas, en que los cuerpos no estén reunidos en una línea que pase por el punto fixo, no tiene cabimento.

De las Palancas.

DEFINICION 32.

Fig. 18. 19. 20. Quando dos potencias α y β impelen, en las direcciones AD, BE, un cuerpo rígido AB, apoyado ó fixo en C, llaman á esta especie de instrumento, ó cuerpo rígido, *palanca*: y al apoyo ú punto fixo C, *hypomochlion*.

DEFINICION 33.

Fig. 18. Quando el hypomochlion está entre las dos potencias aplicadas en A y B, se llama *palanca del primer género*. Si está en un extremo, siendo la potencia β Fig. 19. aplicada en B, ó la mas remota del hypomochlion, la que ha de vencer la otra α aplicada en A, y mas próxima al hypomochlion, se llama *palanca del segundo género*. Si está, asimismo, en un extremo, siendo la potencia mas próxîma β la que ha de vencer la mas re- Fig. 20. mota α, se llama *palanca del tercer género*.

Sien-

Corolario 1.

Siendo el ángulo CAD $= \Sigma$, y el CBE $= \sigma$, el ángulo giratorio, producido en la diferencial de tiempo dt, será, generalmente en las palancas, $= \frac{dt \int dt (CB.\beta sen.\sigma - CA.\alpha sen.\Sigma)}{S}$: denotando S la suma de todos los momentos de inercia, ú de todos los productos de cada partícula de masa de las que se pusieren en movimiento, por el quadrado de su distancia al punto fixo C.

Corolario 2.

Por ser CB. $sen.\sigma =$ á la perpendicular CF: y CA. $sen.\Sigma =$ á la perpendicular CG, será tambien el ángulo giratorio producido en la diferencial de tiempo $dt = \frac{dt \int dt (CF.\beta - CG.\alpha)}{S}$.

Corolario 3.

Quanto mayor fuere GF, tanto menor necesita ser la potencia β con que se hubiere de vencer la α: y lo mismo quanto menor fuere CG.

Corolario 4.

Conviene, pues, en la palanca, que la direccion BE sea perpendicular á la misma palanca, á fin de conseguir la máxîma CF.

Corolario 5.

Conviene tambien que la masa de que se componga esta, sea la menos posible, ó que permita la fortaleza que requiere, á fin de disminuir las cantidades del denominador.

Co-

Corolario 6.

Si desde el principio de la accion fuere $CB.\beta sen.\sigma = CA.\alpha sen.\Sigma$, ó $CF.\beta = BG.\alpha$, será el ángulo giratorio igual á cero, y la palanca quedará sin movimiento, ó en equilibrio.

Corolario 7.

Lo mismo que se ha dicho de dos potencias debe entenderse de varias que se apliquen á la palanca: pues por el (*Co.*4.*Pr.*17.) es $p\pi = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \&$, y por consiguiente el momento de todas estas produce el mismo efecto que una sola π, colocada á la distancia del hypomochlion p.

Corolario 8.

Pudiendose expresar generalmente en la palanca su ángulo giratorio por $\frac{dt\int p\pi dt}{S}$, siendo π la potencia qualquiera que actue á la distancia del hypomochlion p, y S los momentos de inercia que padezca: y asimismo (*Cor.*1. *Prop.*18.) por $\frac{udt}{p}$, suponiendo u la velocidad del punto donde se coloque la potencia: será $\frac{dt\int p\pi dt}{S} = \frac{udt}{p}$, ó partiendo por dt, y diferenciando $p^2\pi dt = Sdu$; lo que dá la potencia $\pi = \frac{Sdu}{p^2 dt}$.

Corolario 9.

Quando una palanca gira sobre un punto qualquiera, la accion que padece es proporcional á Sdu: será, pues, en razon compuesta de los momentos de inercia S, y de la diferencial du.

Co-

Corolario 10.

Puesto que el ángulo giratorio, ó velocidad anguler es $= \frac{udt}{p}$: será du proporcional á la diferencial de la velocidad angular; por consiguiente tambien será la accion que padezca la palanca en razon compuesta de los momentos de inercia S, y de la diferencial de la velocidad angular.

Escolio 1.

Quando una palanca está firme en uno de sus puntos qualesquiera, sin poder girar sobre él, este punto se debe considerar como el hypomochlion sobre el qual tiende á girar la palanca. No girando, por suposicion, hay equilibrio de momentos (*Cor.*2. *Prop.* 18.): con que si todos los que se emplearen resultaren positivos, es preciso que los haya negativos. Estos existirán en la misma masa de la palanca, ó en sus fibras, ó puntos, que actuan con direccion contraria, en virtud de sus fuerzas de atraccion, cohesion, ó qualesquiera que sean, como la experiencia las manifiesta. De esta suerte, si qualesquiera potencias actuaren sobre la palanca CA, fixa sobre la base KEDG, de conformidad que tienda á girar sobre el exe GE: todas las fibras ó puntos de la misma base resistirán, y el momento de cada una de ellas, será la fuerza efectiva que cada una exerciere, multiplicada por su distancia perpendicular al exe EG. Si llamamos, pues, f esta fuerza efectiva, y a, c, d, & las varias distancias perpendiculares de las fibras al exe EG, será el momento $f.(a+b+c+d+\&)$: luego, por la suposicion de no girar la palanca, será $p\pi = f(a+b+c+d+\&$: ó $f = \frac{p\pi}{a+b+c+d+\&}$, denotando π la potencia Fig. 21.

que

que actuare sobre la palanca, y p la distancia perpendicular desde el exe EG á la direccion de la misma potencia. Pero f, en este caso, no solo denota la intensidad de la fuerza, sino el producto de esta, por la amplitud de la fibra: si suponemos esta $dydx$, y la intensidad que resultare f, será la fuerza de cada fibra $fdydx$, suponiendo $CB = x$, y FH, paralela al exe $= y$: será, pues, toda la fuerza de la diferencial $HI = fydx$, y su momento $= fyxdx$: luego, por lo dicho, será, en el caso de no girar la palanca, $f\int yxdx = p\pi$: ó $f = \frac{p\pi}{\int yxdx}$; bien entendido, que en $\int yxdx$ no solo se encierran positivos los momentos de las fibras del segmento GDE, sino tambien los del segmento GKE, pues aunque en este sean negativas las x, tambien lo son las fuerzas $fydx$ de las fibras, porque se comprimen estas, y no tiran á dilatarse como en el otro segmento. Los momentos que exercen cada uno de estos son iguales (*Cor.* 3. *Prop.* 17.) al producto de su area, por la intensidad f, y por la distancia de su centro de gravedad al exe GE: luego, si suponemos el area $GDE = A^2$, la $GKE = a^2$, la distancia del centro de gravedad de la primera al exe $= K$, y la de la segunda $= k$, será $\int yxdx = KA^2 + ka^2$: luego $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$.

Corolario 11.

Lo mismo se debe entender, aunque la palanca gire sobre un punto qualquiera, pues la accion que sobre ella actuare siempre ha de resultar sobre ella misma en qualquiera seccion como KD.

Corolario 12.

Siendo, en la rotacion de la palanca, (*Cor.* 8.) $\pi =$

$\pi = \frac{Sdu}{p^2dt}$, será tambien en este caso $f = \frac{Sdu}{pdt(KA^2 + ka^2)}$: esto es, la accion que sobre las fibras resulte será como Sdu: ó como el producto de los momentos de inercia S, por la diferencial de la velocidad angular.

Corolario 13.

Si la total intensidad, ó fuerza efectiva de las fibras que componen la palanca, fuere pues mayor que $\frac{p\pi}{KA^2 + ka^2}$, ó que $\frac{Sdu}{pdt(KA^2 + ka^2)}$, la palanca resistirá; pero si fuere menor se romperá.

Corolario 14.

Suponiendo que la base KGDEK aumente en todas sus dimensiones lineares proporcionalmente, será $KA^2 + ka^2$, como L^2l, expresando L el diámetro KD, y l el otro diámetro perpendicular á este: podemos hacer, pues, $KA^2 + ka^2 = nL^2l$, denotando n un número qualquiera: luego tambien será $f = \frac{p\pi}{nL^2l}$; ó $f = \frac{Sdu}{pdt\,(nL^2l)}$.

Corolario 15.

Si suponemos en una palanca $f = \frac{p\pi}{nL^2l}$, y en otra $F = \frac{P\phi}{nL^2l}$, será $f : F = \frac{p\pi}{L^2l} : \frac{P\phi}{L^2l}$.

Corolario 16.

Si las palancas fueren de un mismo material, será

será $f = F$ y $\frac{p\pi}{L^2l} = \frac{P\phi}{L^2 l}$: luego las fuerzas π y φ, que podrán aguantar estas palancas, serán como $\frac{P}{L^2 l}$ á $\frac{p}{L^2 l}$, ó como $\frac{L^2 l}{p}$ á $\frac{L^2 l}{P}$: esto es, en razon directa de $L^2 l$, y en inversa de p; ó en directa de $KA^2 + ka^2$, y en inversa de p.

Corolario 17.

Lo mismo que se ha dicho de la seccion KD, se debe entender de otra qualquiera, como LM. La intensidad de las fibras en esta será, asimismo, $f = \frac{p\pi}{KA^2 + ka^2} = \frac{p\pi}{nL^2 l}$: con sola la diferencia, que en este caso es p = á la distancia desde el exe, en la seccion LM, á la direccion de la potencia. Luego si suponemos la intensidad de las fibras en $KD = F = \frac{P\varphi}{fL^2 l}$, y la intensidad en $LM = f = \frac{p\pi}{fL^2 l}$: siendo $F = f$, como sucederá en una palanca homogenea, tendremos $\frac{P\varphi}{L^2 l} = \frac{p\pi}{L^2 l}$, ó $\varphi : \pi = PL^2 l : pL^2 l$: y asi, para que la palanca sea igualmente fuerte en todos sus puntos ó distancias de la base, ó que pueda suportar con igual fortaleza la misma potencia $\varphi = \pi$, ha de ser $PL^2 l = pL^2 l$, ó $L^2 l : L^2 l = p : P$: esto es, las dimensiones lineares de la palanca, en los varios puntos, como KD, LM, han de ser como las raices cúbicas de sus distancias á la direccion de la potencia.

Corolario 18.

Para que la palanca sea igualmente fuerte en todos sus puntos, ha de ser una conoide, cuyos lados KL, ó DM serán parábolas del segundo grado: porque

que puesta y por una de las dimensiones lineares de las secciones KD, LM, x por la distancia de estas á la direccion de la potencia, y Q por el parámetro de la parábola, ha de ser constantemente $y^3 = Q^2 x$ para que la palanca sea en todos sus puntos igualmente fuerte.

Corolario 19.

Si en lugar de actuar sobre la palanca una sola potencia π, actuaren varias iguales, é igualmente distribuidas en toda la palanca, serán los momentos que estas exercerán, respecto de qualquiera de las secciones, como KD, LM, $= \frac{1}{2}x^2\alpha$, expresando α qualquiera de las dichas potencias iguales: luego en palancas homogeneas ha de ser constante la cantidad $\frac{x^2\alpha}{y^3}$ para que sea la palanca igualmente fuerte en todos sus puntos: esto es, ha ds ser $y^3 = Qx^2$: equacion á la parábola del segundo grado, aunque de distinta especie que la primera.

Escolio 2.

La situacion del exe GE puede variar, ó distar mas ó menos del centro de la base KGDEK, segun la figura de esta, la calidad del material de que sea la palanca, disposicion en que se asegure esta, y de la direccion que tubiere la potencia. Esta situacion puede ser mas, ó menos ventajosa, ó dar mas, ó menos resistencia á la palanca. Supongamos que el exe GE se pueda colocar mas inmediato al extremo K de la cantidad z: en este caso serán los momentos del segmento $GDE = f\int ydx(x+z)$: esto es, los primeros $f\int yxdx + f\int yzdx$, y los segundos $f\int yxdx - f\int yzdx$. La suma de estos momentos es mayor que la del primer caso, en que es $z = 0$, de la cantidad $fz\int ydx - fz\int ydx$:

 es-

esto es, de fz Area GDE—fz Area GKE, y será mayor y menor quanto mayor sea z: luego quanto mayor sea z, mayor será KA^2+ka^2, ó su igual nL^2l, y por consiguiente menor la expresion $f=\frac{p\pi}{KA^2+ka^2}=\frac{n.L^2l}{p\pi}$: esto es, menos fuerza necesitan las fibras para resistir, ó mas resistirán en igual grado de fuerza: luego quanto mayor sea z, ó quanto mas diste el exe del punto que divide la base KGDEK en dos partes iguales, tanta mas resistencia tendrá la palanca.

Escolio 3.

En todo lo dicho se ha supuesto que la fuerza de las fibras en la seccion GKE, es igual á la que exercen las de la otra seccion GDE; pero actuando en aquellas por la compresion, y en estas por la dilatacion de las mismas fibras, no hay seguridad en que obre así la naturaleza de ellas; sin embargo puede suponerse, hasta que las experiencias manifiesten la verdadera ley con que exercitan sus fuerzas.

CAPITULO 5.

Del Exe y Radio de rotacion.

DEFINICION 34.

A La línea fixa en el systhema sobre la qual giran todos los cuerpos que la componen, describiendo pequeños arcos de círculo, aunque no sea sino por un instante ú diferencial de tiempo, llamamos *exe de rotacion*: y á la distancia perpendicular desde el centro de gravedad al exe, *radio de rotacion.*

PRO-

PROPOSICION 24.

Hallar el exe de rotacion, ó punto sobre que gira el systhema.

Sea un systhema libre compuesto de qualesquiera número de cuerpos ligados entre sí por líneas inflexíbles que gire sobre el mismo plano del papel: C su centro de gravedad que, por la direccion CI, corrió el espacio CD en un instante ú diferencial de tiempo. Que un cuerpo qualquiera A pase en el mismo instante de A á B, y tiradas las líneas ACE, BDE, hasta que concurran en E, el ángulo AEB será el giratorio descrito por el systhema en el mismo instante ú diferencial de tiempo. Tómese EH=ED: tírese la DH: del punto F, que divide la CD en dos partes iguales, levántese la perpendicular FG, y haciendo el ángulo CDG=EDH, el punto G será donde se halle el exe, sobre el qual gira todo el systhema en el instante ú diferencial de tiempo que corrió el centro de gravedad de C á D. Fig. 22.

Los triángulos HED, CGD son semejantes, por construccion, y el ángulo HED=CGD. El ángulo ACI=BDI+HED=BDI+CGD, y el ángulo IDG=DCG+CGD. Sumando estas dos igualaciones, se tiene ACI+DCG+CGD=BDI+CGD+IDG: esto es, ACI+DCG=BDI+IDG, ó ACG=BDG: de suerte, que si con el movimiento se ajusta C sobre D, A sobre B, y toda la AC sobre la BD, por ser los ángulos ACG y BDG iguales, tambien se ajustará la CG sobre la DG, y el punto G habrá quedado inmóvil. A mas de esto, los triángulos ACG, BDG siendo iguales y semejantes, será AG=BG, y por consiguiente el cuerpo A, en la diferencial de tiempo, habrá descrito con el radio AG el pequeño arco AB.

Lo

Lo mismo se demostrará de qualquiera otro cuerpo de los que compongan el systhema: luego el punto G en el plano directorio, y en la perpendicular FG á la direccion CI, levantada desde el centro de gravedad, será donde se halle el exe de rotacion.

Corolario 1.

A cada instante que muda el centro de gravedad de lugar, lo muda tambien el exe de rotacion: y no puede este quedar fixo, á menos que no quede tambien el centro de gravedad, y en tal caso gira sobre este el systhema.

Corolario 2.

Luego no hay exe fixo en el systhema, no siendo el que pasa por el centro de gravedad, sino por un instante ú diferencial de tiempo.

PROPOSICION 25.

Qualquiera de las líneas DG, CG, que es el radío de rotacion, es $= \frac{S\int \pi dt}{PM\int \pi dt\, sen.\Sigma}$.

El ángulo CGD $= \frac{CD}{CG}$ es (*Prop.* 24.) igual á AED, que es el de rotacion: luego será $\frac{CD}{CG} = \frac{Pdt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$: ó substituyendo CD $= \frac{dt\int \pi dt}{M}$ (*Pro.* 5.) será $\frac{dt\int \pi dt}{M.CG} = \frac{Pdt\int \pi dt\, sen.\Sigma}{S}$: lo que dá CG $= \frac{S\int \pi dt}{PM\int \pi dt\, sen.\Sigma}$.

Corolario 1.

Como es $P sen.\Sigma = p$ (*Cor.* 20. *Lem.* 1.) tambien será el radio de rotacion $= \frac{S\int \pi dt}{M\int p\pi dt}$.

Co-

Corolario 2.

En los cuerpos que caen libremente por sola la accion de su gravedad, concurre el centro de las potencias con el de gravedad, ó es p $=$ o: luego el radio de rotacion será infinito, y por consiguiente los cuerpos que caen libremente por la sola accion de su gravedad, no pueden girar jamas: ni tampoco ninguno que estubiere animado con las potencias, cuyo centro concurra con el de gravedad.

Corolario 3.

Si la suma de las potencias π fuere igual á cero, ó quedare destruida por ser unas positivas y otras negativas, sin dexar de tener algun valor el integral $\int \pi dt\, sen.\Sigma$, ó $\int p\pi dt$, será tambien cero el radio de rotacion, y por consiguiente girará el systhema sobre su centro de gravedad.

Escolio 1.

Mr. Bouguer en su *Tratado del Navio* cap. 1. de la tercera seccion, dice: que si una línea recta es impelida perpendicularmente por dos potencias iguales de direcciones contrarias, aplicadas á los extremos de la línea, girará esta sobre su centro de gravedad. La proposicion no solo es cierta en este caso, sino en todos aquellos en que las potencias sean iguales, y de contraria direccion, aunque no impelan la línea perpendicularmente, ni estén aplicadas á los dos extremos, porque basta, como se ha dicho, que sea la suma de las potencias $\pi = o$, como lo es, siendo las dos potencias iguales, y de contraria direccion, no haciendo al caso que estén colocadas donde se quiera,

ni

ni que impelan con qualquiera ángulo, como no sea $\int \pi dt\, sen.\Sigma$, ó $\int p\pi dt = o$. Bien es verdad que, exâminado mejor el caso, se hace imposible, ó no resuelve en él nada la fórmula, porque una línea tomada en rigor es inmaterial, y por consiguiente son en el caso tanto M, como $S = o$; pero si se admite que ya no sea una línea, sino un paralelepípedo material, queda en su fuerza el reparo.

Escolio 2.

Juan Bernoulli en el tom. 4. de sus Obras *N. CLXXVII.* no determina el centro, ó exe de rotacion sino en el caso de ser $sen.\pi = 1$: esto es, de ser la línea tirada desde el centro de las potencias al de gravedad, perpendicular á la direccion: en él se reduce el radio de rotacion á $\frac{S}{PM}$, que es la expresion que hallamos (*Cor.* 3. *Def.* 30.) por la longitud del péndulo simple que hace las oscilaciones de igual magnitud y duracion que el péndulo compuesto, ó por la distancia desde el exe de rotacion al centro de oscilacion del péndulo ó systhema; lo que le hizo creer que el systhema giraba sobre su centro de oscilacion. En efecto si se considera que gire el systhema sobre su centro de gravedad fixo, y como si fuese un péndulo, su centro de oscilacion distaria, en este caso, del de gravedad de la cantidad $\frac{S}{PM}$, aunque del lado opuesto al que asignamos al exe de rotacion. *Mr. Bouguer*, en su *Maniobra de Navios* lib. 1. sec. 2. cap. 14, distingue bien que este punto está al lado opuesto de donde se coloca la potencia respecto del centro de gravedad; pero asigna, por regla general, que la distancia desde el centro de gravedad al exe de rotacion es en razon inversa de la que hubiere desde el mismo centro á la potencia, ó

ó como $\frac{S}{PM}$: quando no es sino como $\frac{S\int \pi dt}{PM \int \pi dt\, sen.\Sigma}$, que solo conviene con su regla, quando es $sen.\Sigma = 1$ y constante: en todos los demas casos será, en razon inversa de la distancia P, y en la directa de $\frac{\int \pi dt}{\int \pi dt\, sen.\Sigma}$. Esta diferencia procede de que, tanto *Mr. Bouguer*, como *Juan Bernoulli*, no indagaron el lugar del centro, ó exe de rotacion, sino en el primer instante que se pone en movimiento el systhema. En este instante es cierto que se puede suponer $sen.\Sigma$ constante, aunque no lo sea en lo succesivo, lo que reduce $\frac{\int \pi dt}{\int \pi dt\, sen.\Sigma}$ á $\frac{1}{sen.\Sigma.}$ constante, por lo que queda la distancia desde el centro de gravedad al exe de rotacion, solo en razon inversa de la distancia P.

CAPITULO 6.

De la Percusion.

DEFINICION 35.

Percusion es el choque, ó golpe, que se dan los cuerpos, quando, movidos con distintas velocidades, ó direcciones, se encuentran.

DEFINICION 36.

Si despues de cumplido el choque, prosiguen los cuerpos unidos impeliendose, no se llama esta accion, sino *presion*.

DEFINICION 37.

Si alguno de los cuerpos en el acto del choque no se determina á la rotacion, se dice *centro de percusion* á aquel punto en donde se executa el choque.

Del mismo modo que en los cuerpos graves se llama centro de gravedad á aquel punto sobre que, apoyado el cuerpo, queda en equilibrio, sin determinarse á girar, ni por un lado, ni por otro: así tambien en la percusion se llama centro de ella al punto en que, chocado el cuerpo, queda en equilibrio, sin determinarse á la rotacion, ni por un lado, ni por otro.

Axîoma 4.

Los cuerpos son impenetrables, ó no pueden penetrarse ocupando al mismo tiempo el propio lugar.

Aunque veamos que un cuerpo se introduce en otro, no por ello las partículas de materia del primero ocupan el propio lugar que las del segundo: las de este ceden el suyo á las de aquel, y cada partícula ocupa su lugar separado, tanto antes, como despues, y aun en el mismo tiempo que se executa el choque; de suerte, que nunca pueden dos partículas ocupar el propio lugar.

Axîoma 5.

La Naturaleza obra por instantes, y por movimientos succesivos.

Esto es lo que algunos han llamado *ley de la continuidad*. Un cuerpo que corre por una direccion no puede pasar de un punto á otro, sin pasar antes por todos los intermedios: no puede pasar de una velocidad á otra mayor ó menor, sin haber tenido antes y succesivamente las intermedias: y asi de otros infinitos casos.

DE-

DEFINICION 38.

Si un cuerpo encuentra ó choca á otro, como (*Axio.* 4.) no se pueden penetrar, y el primero tira, con su inercia, á mantener su grado de velocidad, ha de impeler, poco á poco, y por grados succesivos, al segundo, que no tiene tanta, y la inercia de este ha de exercitarse, con direccion contraria, á cada instante de la accion de aquel: debe por consiguiente experimentar cada uno de los cuerpos en el punto ó parage del contacto una fuerza ó potencia: de reaccion en el impelente, y de accion en el impelido, igual (*Axio.* 1.) á la inercia de los cuerpos. A esta fuerza, qualquiera que sea, se llama *fuerza de percusion.*

Escolio 1.

No pudiera el primer cuerpo impeler al segundo, poco á poco y por grados succesivos, si ambos fueran perfectamente sólidos ú densos; esto es, si no tubieran poros ó intersticios entre las partículas de materia: era preciso entonces que todo el segundo cuerpo tomara repentinamente toda la velocidad del primero, lo que seria contra lo dicho (*Ax.* 5.).

Esta dificultad ha obligado á algunos á no admitir en la Naturaleza cuerpo perfectamente sólido; pero la consideracion de que en la division contínua de los cuerpos es preciso que se llegue á los primeros átomos de que se componen, y que en estos ya no haya poros, hace que no puedan excluirse de la Naturaleza los cuerpos sólidos. Otras dificultades se ofrecen tambien siempre que se vayan á exâminar las propiedades de las primeras partículas de la materia; pero no es esto de nuestro asunto, porque nos reducimos á tratar de los cuerpos ya compuestos de aquellas partículas,

 y,

y de estos no se conoce en la Naturaleza alguno que no tenga poros ó intersticios.

DEFINICION 39.

Con motivo de los poros ó intersticios, ceden las primeras partículas de los cuerpos su lugar al impulso del golpe ó percusion, y pasan á ocupar los intersticios mas remotos: en unos ceden menos, y en otros mas, y es lo que hace que los cuerpos se denominen mas ó menos duros, ó blandos; de suerte que el cuerpo será mas duro quanto menos cedieren las partículas su lugar al impulso del golpe ó percusion.

Escolio 2.

De esto proceden los huecos, cabidades, ó impresiones que se forman en los cuerpos por medio de los choques, y aun las introducciones, ó por decirlo asi, penetraciones de unos cuerpos en otros, y decimos, aunque con impropiedad, que una bala penetró en una pared, un clavo en una tabla, y así de otros cuerpos.

Escolio 3.

Es menester no confundir la dureza de los cuerpos con la densidad: el oro es mas denso que el acero; pero este es mas duro que el oro: el azogue es mas denso que la plata, y aquel no es duro: y asi de otros muchos cuerpos. No por esto se pretende persuadir á que la dureza esté enteramente independiente de la densidad: el mismo oro batido con el martillo, y reducido á menor volúmen, y por consiguiente á mayor densidad, admite mayor dureza. Si un cuerpo no tubiera poros, ó fuera infinitamente denso, ninguna de sus partes pudiera ceder al golpe, con que seria asimismo infinitamente duro. Puede, por consiguiente, depender la dureza de la densidad; pero puede asimismo depender de la cohesion de las mismas partes: la experiencia es la que por ahora nos puede manifestar el grado de dureza de cada uno de ellos.

DEFINICION 40.

A los cuerpos que, al ceder las partes su lugar, no se separan unas de otras, ó no se rompen, llaman *tenaces*: y la tenacidad es mayor, quanto mas resistieren las partes la separacion.

DEFINICION 41.

A los cuerpos que no pueden ceder las partes su lugar sin romperse, llaman *frágiles*: y la fragilidad es mayor, quanto mas facilmente se separaren ó rompieren las partes que reciban el choque.

DEFINICION 42.

Elasticidad es la fuerza que la experiencia ha manifestado residir en los cuerpos, con la qual las partes forzadas, ó que cedieron al impulso de un golpe, ó presion, tienden á restituirse á su lugar respectivo que antes del golpe ó presion ocupaban. Esta es la fuerza, con la qual una pelota vuelve á elevarse quando cae en el suelo: la misma con que un muelle, despues de forzado, tiende á restituirse á su primera situacion: con que el arco dispara la flecha; y asi de otros muchos casos. Esta fuerza permanece en qualquiera de las partículas de materia que ceden al impulso del golpe, á menos que en la accion no se rompan ó separen totalmente ó en parte algunas de ellas; pues por este medio pierden asimismo totalmente ó en parte su elas-

elasticidad. Actua esta fuerza á qualquiera instante del choque, concurriendo con la de percusion de quien hace la parte ó el todo, y tiende á separar los cuerpos con direcciones opuestas.

Corolario 1.

La elasticidad aumenta, segun aumentan las partes forzadas, ó que cedieron al impulso del golpe; ó lo que es lo mismo, segun aumente la impresion: y se tendrá la mayor fuerza de elasticidad quando se tenga la mayor impresion, ó impresion total.

Corolario 2.

En este estado de la mayor impresion, la fuerza de elasticidad existe, puesto que habiendo ido en aumento, no puede (*Ax.*5.) llegar á desvanecerse sin pasar por todos los grados de disminucion: con que el cuerpo impelente debe continuar en disminuir su velocidad, y en aumentarla el impelido hasta que las partes forzadas regresen enteramente ó en parte al lugar que antes ocuparon.

DEFINICION 43.

Si el regreso de las partes forzadas es total, se dice que la elasticidad es perfecta, ó que el cuerpo es perfectamente elástico; sino es mas que en parte, el cuerpo no será de perfecta elasticidad; y si no hubiere regreso en todo el discurso del choque, el cuerpo no será elástico.

Escolio 4.

La experiencia manifiesta, que el efecto que procede de la percusion ó choque, excede mucho al que produce la presion. Es muy trivial y manifiesta esta experiencia para que no se hiciese en todo tiempo digna de reparo. *Aristóteles*, en la qüestion 20. de su Mechánica pregunta, por qué una hacha con el golpe divide, y no lo executa quando solo se comprime, ó empuja? No fue mucho que este Philosopho se contentase con hacer la interrogacion, quando hasta nuestros tiempos ha durado la dificultad, y ha sido motivo de varias disputas. *Leibnitz*, atendiendo á esta disparidad de efectos, distinguió la fuerza que produce la percusion, de la que actua en la presion: llamó *fuerza viva* á la primera, y *fuerza muerta* á la segunda. Esta distincion ha tenido, y quizas tiene hoy, grandes partidos. *Juan Bernoulli*, en la Definicion 2. del cap. 3. de su discurso sobre las leyes de la comunicacion del movimiento, define las dos fuerzas en estos términos. La fuerza viva *es aquella que reside en un cuerpo quando está en un movimiento uniforme: y la fuerza muerta, aquella que recibe un cuerpo sin movimiento, quando está solicitado ó impelido para moverle, ó para moverle con mas ó menos velocidad quando el cuerpo está ya en movimiento.* Esta definicion no constituye la fuerza viva dependiente del choque, puesto *que reside en un cuerpo quando está en un movimiento uniforme*, y sin expresar que sea, ó no, en la accion del choque. El propio Autor aclara aun mas esto en su Disertacion sobre la verdadera nocion de las fuerzas vivas N.CXLV. parrafo 1, donde dice: *Vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in facultate agendi: subsistit enim, etiamsi non agat, neque habeat in quod agat.* La facultad de actuar que conocemos en los cuerpos es la fuerza de inercia, ó por mejor decir, fuerza innata de la materia: y por esto, todos quantos se han inclinado y adherido á esta distincion de las fuerzas vivas, no han distinguido estas de las de inercia que obran en el choque, como ya diximos, ó á lo me-

menos han convenido que son las que las producen. En esto conviene el mismo *Bernoulli*, pues, en el cap. 3. parr. 3. del discurso ya citado, dice, hablando de la fuerza viva, *su naturaleza es enteramente diferente, no puede ni nacer ni perecer en un instante como la muerta; es menester mas ó menos tiempo para producir una fuerza viva en un cuerpo que no la tenia; es menester tambien tiempo para destruirla en un cuerpo que la tenia. La fuerza viva se produce en un cuerpo succesivamente quando, estando en reposo, una presion qualquiera aplicada al mismo cuerpo le imprime poco á poco y por grados un movimiento local. Este movimiento se adquiere por grados infinitamente pequeños, y monta á una velocidad determinada que permanece uniforme al instante que la causa que puso al cuerpo en movimiento cesa de actuar sobre él: y asi la fuerza viva producida en un cuerpo en un tiempo determinado -------- es equivalente á la parte de la causa que se consumió en producirla.* En un cuerpo que choca otro que está en reposo, la inercia de aquel es, como diximos antes, la que poco á poco y por grados imprime á este segundo cuerpo un movimiento local, que monta á una velocidad determinada: y por consiguiente la inercia es la presion que, aplicada al primer cuerpo, ó residiendo en él, produce la fuerza viva en el segundo. No es preciso, sin embargo, segun esta definicion, que sea el choque el que produzca la fuerza viva: puede resultar de una potencia qualquiera. La gravedad, por exemplo, en un cuerpo libre, actua sobre él, y poco á poco le imprime un movimiento local, ó una fuerza viva, que reside despues en el cuerpo. En fin, la fuerza viva reside en los cuerpos, segun estos Autores, y procede de una presion ó potencia qualquiera; pero no es la misma presion ó potencia que la produce, sino otra cosa, que no han acabado aún de definirnos ni explicarnos qual sea. Por esta duda se persuadió natural-

ralmente *Eulero*, tom. 1. de las *Memorias de la Academia Real de Berlin*, á que la fuerza viva era la fuerza de percusion; pero esta, segun la definicion que de ella dimos, es una potencia que actua; y no puede ser, segun los Autores citados, quando mas, sino la que produce la fuerza viva. Tan lexos están los parciales de esta de suponerla la de percusion, ú de qualquiera otra presion, que repiten, no ser comparable esta con la otra, de la misma suerte que no lo es lo finito con lo infinito, ó una línea con una superficie, como dice el mismo *Bernoulli*. Mas si no nos dan una perfecta definicion ó conocimiento de las fuerzas vivas, á lo menos nos aseguran en general, que son proporcionales á los efectos que producen: esto es, á la impresion que resulta en el choque; esta nocion tan clara, como parece, no hace sino arrojarnos en mayores dificultades. Una presion qualquiera produce asimismo una impresion que se hace bien sensible en los cuerpos blandos: y siendo así, cómo se puede afirmar, que la fuerza de la presion, y la viva son incomparables, de la misma manera que lo finito con lo infinito? Es verdad que la presion produce su impresion con relacion al tiempo: ésto es, á cada instante aumenta su impresion de una pequeña diferencial; lo que en las fuerzas vivas parece que sus parciales no quieren que suceda. Para esto era preciso que la impresion se hiciera simultanea, lo que fuera contra lo dicho (*Ax.* 5.): de haber de ser en un tiempo determinado, por corto que sea, ya es preciso que la fuerza viva actue como la presion, y no puede diferenciarse de ella. Pero de qualquiera suerte que sea, la fuerza viva mas es qüestion de nombre que otra cosa, y nombre aplicado á objeto que aun no sabemos qual sea; pero en ninguna manera conduce á variar la theórica ni cálculo del movimiento: pues que se admita ó no esta fuerza viva, el movimiento procede de la potencia que actua, sea la que fuere, y las velocidades que resultaren, los espacios que se corrieren, y el tiempo que durare la accion serán, tanto de un modo como de otro, siempre los mismos. Toda la diferencia consiste en saber, á qué se debe dar el nombre de fuerza viva, cuya dificultad parece que aun existe entre los que fueron Autores de ella. Aqui no entenderemos, segun se dixo (*Def.* 13.), por fuerza sino á una accion ó potencia qualquiera, á fin de evitar dudas: y mas adelante se verá, que si solo por la gran diferencia de efectos se introduxo la fuerza viva, bien podemos desde ahora desprendernos de ella, porque basta la fuerza de percusion para satisfacer, como se demonstrará, á quantos phenómenos de esta naturaleza manifieste la experiencia.

DEFINICION 44.

Llamaremos *profundidad de la impresion* á lo mas profundo de esta, tomada la medida segun la direccion del movimiento: y *amplitud de la misma impresion* á la mayor seccion de esta, hecha perpendicularmente á la direccion del movimiento.

PROPOSICION 26.

La fuerza de percusion es en razon compuesta directa de la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones.

El cuerpo es mas duro (*Def.* 39.), quanto menos cedieren sus partículas al impulso del golpe: esto es, quanto mayor fuere la diferencial de la velocidad corrida en un instante dt del choque. Al mismo tiempo quando mayor fuere el número de partículas chocadas, ó mayor fuere la amplitud de la impresion, tambien será mayor la misma diferencial: luego será esta en

en razon compuesta directa de la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones; pero la fuerza, que actua, es (*Ax.* 2.) como dicha diferencial: luego tambien será la fuerza de percusion, en razon compuesta de la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones.

Corolario 1.

Luego no cabe en la Naturaleza cuerpo absolutamente blando: porque no habiendo alteracion en el movimiento, no hay fuerza que resista; y donde no hay resistencia no hay cuerpo.

Corolario 2.

No cabe tampoco cuerpo que no sea elástico: porque consistiendo esta fuerza en la reaccion de una potencia que puede comprimir el cuerpo, no puede llegar esta compresion á desvanecerse sin pasar por todos los grados de disminucion, y por consiguiente sin dar lugar á las partes forzadas á que se rehagan, segun la direccion con que impelen en su reaccion. Solo pudiera dificultarse el caso de los cuerpos perfectamente duros; pero ya se ha dicho que estos no caben en caso de duda sino en los primeros átomos, de que no pretendemos tratar.

Escolio 1.

No impide para lo demonstrado que las bases de las impresiones no sean planas y paralelas á las amplitudes de estas: de qualquiera manera no caben en la accion mas puntos que resistan, segun el movimiento, que los comprehendidos en la amplitud: y para resistir, lo mismo es que todos estén igualmente profundos, que si no lo estubieran, con tal que la dureza por este motivo no varíe. M 2 Es-

Escolio 2.

No obstante la facilidad con que se ha demonstrado la razon en que actua la fuerza de percusion, se hace bien dificil la averiguacion de su precisa medida: porque aunque algunos han supuesto generalmente que la impresion se hace de la misma figura del cuerpo chocante, no puede mantenerse esta opinion en los cuerpos duros y tenaces. En mucho número de estos la amplitud ha de ser siempre mucho mayor. Como si
Fig. 23. el cylindro AB muy duro é incapaz de impresion sensible, la hace por medio del choque sobre otro cuerpo CD, esta, en los cuerpos tenaces, no será de la misma figura EFBG del cylindro, sino como HFBI: porque no rompiendose con facilidad las partes contiguas á los puntos F, y B, sin embargo que estos cedan, es preciso que aquellas tambien cedan, las inmediatas á estas tambien, y asi succesivamente: de suerte, que se forma el hueco HFE todo al rededor del cylindro, haciendose la amplitud de la impresion del diámetro HI, en lugar de FB: lo que dificulta la medida de la precisa impresion. Pero no se puede tampoco admitir esto sin alguna variacion, pues si en lugar de cylindro, fuera el cuerpo AB una esphera, un cono, ú otro cuerpo, cuya base FB no fuese paralela á HI, puede, en tal caso, disminuir mucho el hueco, y aun quizas desvanecerse enteramente, si el cuerpo CD no fuere de mucha tenacidad y dureza. A mas de esto, aunque el cuerpo chocado sea todo de una misma densidad ó dureza, esta puede variar con motivo de aproxîmarse mas las particulas superiores á las inferiores, y contener ya mas número de ellas la base FB al fin de la impresion que al principio, particularmente en los cuerpos tenaces y elásticos: de suerte que, por qualquiera de estos motivos, aunque la base FB es cons-

constante, y por consiguiente se hubiera creido, sin ellos, que la fuerza de percusion habia de serlo tambien, ya dexa de ser asi.

PROPOSICION 27.

Hallar la relacion entre la fuerza de percusion, la dureza de los cuerpos, y amplitud de las impresiones.

Si expresamos la amplitud de la impresion HI por H, y la dureza del cuerpo CD, á qualquiera instante dal choque, por D, será la fuerza de percusion, como DH; pero esto no cabe, sino en quanto sea el cylindro AB muy duro, ó incapaz de impresion. Si la relacion de la dureza de este, á la del cuerpo CD, no es infinita, las partículas del cylindro, en la base FB, deben ceder tambien, y la diferencial de la velocidad dependerá asimismo de la base FB, y de la dureza del cylindro. Llamando aquella *H*, y esta *D*, dependerá dicha diferencial de los productos DH y *DH*: ó será en razon compuesta DH*DH* de los dos; pero quando sea *DH* infinito, respecto de DH, ó este cero, respecto de aquel, ha de quedar la impresion en DH: luego será dicha diferencial de la velocidad, y por consiguiente la fuerza de percusion, como $\frac{\mathrm{DH}\mathit{DH}}{\mathrm{DH}+\mathit{DH}}$.

Escolio 1.

Quando las primeras partículas del cuerpo CD lle- Fig. 24.
gan por su fragilidad á romperse, suelen por su fuerza elástica, comprimir los lados AG, FB del otro cuerpo AB, y las escabrosidades de aquel forman en ellos otras tantas pequeñas impresiones laterales. Estas se deben considerar, por lo dicho, como otras tantas pequeñas amplitudes de impresiones, que, unidas con la de la base GB, harán el todo de la amplitud H. Despues de cumplida la impresion total, la elasticidad que actua en la base GB, tiende á hacer regresar al cuer-

cuerpo AB; pero las pequeñas impresiones laterales resisten al regreso. Esta accion dependerá, pues, del exceso de la fuerza elástica en GB, sobre la que fuera necesaria para vencer las pequeñas impresiones laterales: si aquella fuere mayor que esta, el cuerpo AB regresará; y si menor, quedará en reposo desde el instante que hubiere perdido toda su velocidad positiva. Pero es preciso que la elasticidad en GB, al instante que el cuerpo AB queda parado, sea mayor que la fuerza necesaria para vencer las pequeñas impresiones laterales: porque aquella es igual á la de inercia del cuerpo AB, y esta vence, no solo la resistencia de las partes en GB, sino tambien la de las pequeñas impresiones: y asi es preciso que el cuerpo AB vuelva siempre hacia atras despues de quedar parado. Puede, no obstante, ser de muy corta cantidad, porque la elasticidad de GB irá disminuyendo al paso que el cuerpo regrese, y puede llegar el caso en que no sea suficiente para vencer las pequeñas impresiones laterales. Lo mismo se debe entender en los cuerpos conglutinosos, ya sea porque estos formen tambien algunas escabrosidades laterales, ya sea porque la misma conglutinacion, ó cohecion de las partes, los detenga. Si el cuerpo AB llegase á penetrar enteramente el CD, el número de las pequeñas impresiones laterales quedará constante. En este caso, no variando la dureza, ni la amplitud de la impresion principal, ya no puede dexar de ser constante la fuerza de percusion.

Escolio 2.

Supondremos generalmente en el cálculo, que los dos cuerpos que se han de chocar se mueven en la misma direccion, ó en direcciones opuestas; pues si se movieren en distintas direcciones, facil es descomponer sus movimientos, y hacer el cálculo para cada fuerza separadamente. Supondremos tambien, para ma-

mayor facilidad, que los cuerpos son igualmente densos y regulares, como dos cylindros, dos espheras, dos paralelepípedos, &c. á fin que, movidos segun la direccion de sus exes, la fuerza de la percusion ú del choque, impela en la misma direccion: pues teniendo los cuerpos igual y semejante figura por todas partes al rededor del punto donde se executa el golpe ó choque, y siendo igualmente densos, no hay motivo para que se incline mas á un lado que á otro la fuerza de percusion, porque por todas partes debe ser de igual longitud la impresion, y por consiguiente igual la fuerza, y asi no puede producir otra direccion que la que tienen los cuerpos.

Tambien supondremos, que si algunas potencias animaren los cuerpos, estén estas colocadas en sus centros de gravedad, á fin que no redunde rotacion, ó que el choque se haga en los centros de percusion para evitar lo mismo.

Por ultimo supondremos, que los cuerpos sean de suficiente magnitud para que las impresiones no penetren, ó alcancen hasta los centros de gravedad, á fin que el movimiento de estos no quede alterado, por alterarse su sitio respectivo á las demás partes del cuerpo.

Estableceremos en general, que sean ------

A y B los dos cuerpos que se hubieren de chocar.

z x las longitudes de las impresiones que en ellos se hicieren.

α β las potencias constantes que los animen.

U V las velocidades con que empiezen el choque.

u v las velocidades á qualquier tiempo del mismo choque.

a b los espacios corridos en el mismo tiempo.

D D las densidades.

H H las amplitudes de las impresiones.

t el tiempo.

π la fuerza de percusion $= \frac{\mathrm{DH}DH}{\mathrm{DH}+DH}$

Se

Se supone que el cuerpo A siga y choque al B, y que la velocidad U sea mayor que V; sin ello no se podría efectuar el golpe, á menos que V no fuese negativa; pero, para mayor facilidad en el cálculo, pondremos siempre, tanto las potencias α y β, como las velocidades U y V positivas, pues es facil colocar negativa la cantidad de estas que lo fuere.

PROPOSICION 28.

Hallar la relacion entre las impresiones, y los espacios corridos por los cuerpos.

Puesto que el cuerpo A sigue al B, y que en ellos se forman las impresiones de las longitudes z y x, el espacio a corrido por el cuerpo A, debe ser igual al espacio b corrido por el cuerpo B, con mas las longitudes z y x de las impresiones, que es el espacio que las partes de los mismos cuerpos ceden: será, pues, $a = b + z + x$, ó $a - b = x + z$.

Corolario I.

Al fin de la percusion, si con el motivo de casi una perfecta elasticidad se llegan á separar los cuerpos despues del choque, es $x + z = 0$: luego tambien será $a - b = 0$, ó $a = b$: esto es, al fin de la percusion de los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, el espacio corrido, durante el choque, por el cuerpo A, es siempre igual al espacio corrido por el cuerpo B.

PROPOSICION 29.

Hallar el valor de la diferencial de tiempo dt.

De la equacion $a - b = x + z$, tenemos tambien $da - db = dx + dz$; pero (*Corol.* 4. *Propos.* 3.) son $udt = da$, y $vdt = db$, que dan $(u - v)\,da = dt - db$: luego $(u - v)\,dt = dx + dz$: de que resulta $dt = \frac{dx + dz}{u - v}$.

Corolario.

Al tiempo de cumplirse las máxîmas impresiones x y z, si en efecto se cumplieren, es $dx + dz = 0$: con que será $u - v = 0$, ó $u = v$: esto es, al cumplirse las máxîmas impresiones, los cuerpos correrán con iguales velocidades.

PROPOSICION 30.

Hallar la relacion entre las velocidades de los cuerpos.

Las fuerzas ó potencias que animan al cuerpo A, son α y π, y esta negativa: con que (*Cor. Ax.* 2.) es $(\alpha - \pi)\,dt = Adu$.

Las dos potencias que animan al cuerpo B, son β y π, y ambas positivas, que dan $(\beta + \pi)\,dt = Bdv$.

Sumando estas dos equaciones, tenemos $(\alpha + \beta)dt = Adu + Bdv$, é integrando $(\alpha + \beta)t = A(u - U) + B(v - V)$: que dá $Au + Bv = (\alpha + \beta)t + AU + BV$: y $v = \frac{(\alpha + \beta)t + AU + BV - Au}{B}$.

Corolario I.

El tiempo t en que sucede el choque es muy corto, como enseña la experiencia, y despues se verá demonstrado: luego si las velocidades U y V, ó qualquiera de ellas, fuese de un valor infinito respecto de t, será la cantidad $(\alpha + \beta)t$ cero, respecto de las demas, á menos que no sea $\alpha + \beta$ infinito, y quedará $AU + BV = Au + Bv$.

Corolario 2.

AU+BV es la suma de los movimientos de los cuerpos antes ó al principio del choque, y $Au+Bv$ es la suma de los movimientos de los mismos cuerpos á qualquiera instante del choque: luego la suma de los movimientos á qualquiera tiempo del choque, es igual á la suma de los movimientos antes ó al principio del choque.

Escolio 1.

Esta proposicion se dá por general en todas las Mechánicas; pero yá se vé que no es cierta, sino quando $(\alpha+\beta)t=0$, ó quando esta cantidad es despreciable, respecto de U ó V. No habiendo esta condicion, será $AU+BV+(\alpha+\beta)t=Au+Bu$: donde se ve que, habiendo potencias que actuen, el movimiento, á qualquiera tiempo del choque, no es el mismo que antes, ó al principio del choque.

Escolio 2.

Se ofrece una qüestion, que ha sido muy controvertida entre los Philosophos, sobre si se conserva, ó no, la misma cantidad de movimiento. Por lo demonstrado parece que sí. El defenderse que no, consiste en que, siendo V negativa, será, suponiendo α y β cero, $AU-BV=Au+Bv$: donde se vé, que en este caso la diferencia de los dos movimientos AU y BV es la igual á la suma de Au y Bv: luego tomando BV como positivo, como lo toman los que siguen este dictamen, no hay duda que será $AU+BV>Au+Bv=AU-BV$; de suerte, que la perdida del movimiento será 2BV. Esto no obstante, no quita el rigor de nuestra demonstracion, pues quando hablamos de la suma de los movimientos es habiendose de tomar negativo el que lo fuere, sin suponerle positivo: y en tal caso la ley ó principio es cierto.

Corolario 3.

Al tiempo de suceder la máxîma impresion, se halló (*Corol. Propos.* 29.) $u-v=0$, ó $u=v$: luego substituyendo uno ú otro valor en la equacion $Au+Bu=(\alpha+\beta)t+AU+BV$, resulta $u=v=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV}{A+B}$, velocidad de los cuerpos al tiempo de suceder la máxîma impresion.

Corolario 4.

Si la cantidad $(\alpha+\beta)t$ fuere despreciable, respecto de las otras, quedará $u=v=\frac{AU+BV}{A+B}$.

Escolio 3.

Los cuerpos de poquísima, ò ninguna elasticidad, han de continuar corriendo con la velocidad adquirida en la máxîma impresion, por no haber fuerza alguna que pueda alterarla: con que esta será la velocidad con que los cuerpos de poca, ó casi ninguna elasticidad, corren despues del choque.

Escolio 4.

Ahora es tiempo que desatemos la dificultad que se ofreció (*Esc.* 2. *Ax.* 2.) sobre si es aplicable la equacion $\alpha=\frac{Adu}{dt}$ al caso de impeler la potencia α al cuerpo A. Un Autor, digno de los mayores elogios, y de los

N 2

los mas respetables de la Europa supone, para poderlo dudar, que dos cuerpos se choquen, estando el uno en reposo, y dice: que la mutacion ó alteracion del movimiento de este, será, por lo demonstrado $Bu = Bv = \frac{AUB}{A+B}$, supuesto $V = o$, en lo que no tenemos duda y convenimos; y añade: que para que el efecto sea proporcional á la potencia, como se supone en la equacion $\alpha = \frac{Adu}{dt}$, era preciso que en este caso fuese la causa que produxo la mutacion $\frac{AUB}{A+B}$ proporcional á esta misma mutacion, quando no se puede demonstrar que en efecto lo sea. A mi me parece que todo el efecto producido $\frac{AUB}{A+B}$ ha de ser proporcional á la suma de todas las acciones de la potencia durante todo el tiempo de la accion; pero no á una sola accion instantánea. El efecto que debe ser proporcional á esta, es la diferencial de movimiento, ó alteracion instantánea de este. Si es el cuerpo A el que choca al B, la potencia del primero es su inercia, que es proporcional á Adu: con que será en qualquiera instante $-Adu = Bdv$. Integrando será $A(U-u) = Bv$, suponiendo $V = o$: con que luego que se llegue en la accion hasta ser $u = v$, quedará $u = \frac{AU}{A+B}$, y $Bu = \frac{AUB}{A+B}$: esto es, todo el movimiento producido en el cuerpo B, durante la accion, hasta ser $u = v$, será proporcional á $\frac{AUB}{A+B}$; pero esto no prueba que la accion instantanea Adu no sea proporcional á Bdv; antes, al contrario, prueba que efectivamente lo es, pues de su suposicion redunda la verdad que se manifiesta.

PRO-

PROPOSICION 31.

Hallar la relacion entre las diferenciales de las velocidades, y las de las impresiones.

De la equacion $(\alpha-\pi)dt = Adu$, tenemos $\frac{(\alpha-\pi)dt}{A} = du$: y de la $(\beta+\pi)dt = Bdv$, $\frac{(\beta+\pi)dt}{B} = dv$: restando una equacion de otra $\left(\frac{\alpha-\pi}{A} - \frac{\beta+\pi}{B}\right)dt = du - dv$; ó $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))dt = AB(du - dv)$: y substituyendo (*Propos.* 29.) $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$, será $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))(dx+dz) = AB(u-v)(du-dv)$.

Corolario 1.

Si se integra la cantidad $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))(dx+dz)$, todas las cantidades resultantes se hallarán multiplicadas por x ó z; pero al fin del choque de los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, es $x = o$, y $z = o$: luego al fin del choque de estos cuerpos es $\int AB(m-v)(du-dv) = \frac{1}{2}AB(u-v)^2 - \frac{1}{2}AB(U-V)^2 = o$: que da $U-V = v-u$: esto es, en los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, la velocidad relativa de ellos, antes del choque, es igual á la velocidad relativa, despues del choque.

Corolario 2.

Substitúyase en la equacion $U-V = v-u$ el valor de v hallado (*Pr.* 30.) $v = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$;

y

y tendremos, para el fin del choque de los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, $U-V+u= \cdots\cdots \frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$: de que se deduce $u= \frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$.

Corolario 3.

Substitúyase asimismo este valor en la equacion $v-U+V=u$, y será $v-U+V= \cdots\cdots \frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$, que dá $v= \cdots\cdots \frac{(\alpha+\beta)t+V(B-A)+2AU}{A+B}$.

Corolario 4.

Si la cantidad $(\alpha+\beta)t$ fuere despreciable, respecto de las demas, quedará $u=\frac{U(A-B)+2BV}{A+B}$, y $v=\frac{V(B-A)+2AU}{A+B}$.

Corolario 5.

En el mismo caso de ser despreciable $(\alpha+\beta)t$, respecto de las otras cantidades, tendremos tambien $u^2=\frac{U^2(A-B)^2+4BUV(A-B)+4B^2V^2}{(A+B)^2}$

$$Au^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4ABUV(A-B)+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$$

$$v^2=\frac{V^2(B-A)^2+4AUV(B-A)+4A^2U^2}{(A+B)^2} \cdots\cdots$$

$Bv^2=\frac{BV^2(B-A)^2+4ABUV(B-A)+4A^2BU^2}{(A+B)^2}$: que da

$$Au^2+Bv^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4A^2BU^2+BV^2(B-A)^2+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$$

$=\frac{AU^2(A+B)^2+BV^2(A+B)^2}{(A+B)^2}=AU^2+BV^2$: luego en los cuerpos casi ó perfectamente elásticos, quando $(\alpha+\beta)$ es despreciable, respecto de las otras cantidades, la suma de los productos de cada masa, por el quadrado de su velocidad, es la misma al principio y al fin del choque, ó antes y despues de este.

PROPOSICION 32.

El producto $DHdx$ de la amplitud de la impresion y de la diferencial dx corrida por las partículas del cuerpo chocado, es siempre igual al producto $DHdz$ de semejantes cantidades del cuerpo chocante.

El producto DH de la dureza, por la amplitud, (*Prop.* 26.) es proporcional al número de partículas chocadas, y la diferencial dx (*Cor.* 4. *Prop.* 3.), como la velocidad con que se mueven dichas partículas: luego el producto $DHdx$; es como el movimiento de las mismas partículas. $DHdx-DHdz$, será, segun esto, como el movimiento de todas, que (*Esc.* 2. *Propos.* 30.) es constante; pero al principio del choque este movimiento es cero: luego tendremos siempre $DHdx-DHdz=0$; ó $DHdx=DHdz$, y $dz=\frac{DHdx}{DH}$.

PROPOSICION 33.

Hallar la relacion entre las velocidades, y las impresiones.

Substitúyanse en la equacion (*Proposic.* 31.) $\left(\alpha B-\beta A-\pi(A+B)\right)(dx+dz)=AB(u-v)(du-dv)$

los

los valores de (*Proposic.* 27.) $\pi = \frac{DH\,DH}{DH + DH}$, y de (*Proposicion* 32.) $dz = -\frac{DH}{DH}dx$: y quedará

$$\left(\alpha B - \beta A - (A+B)\left(\frac{DH\,DH}{DH + DH}\right)\right)\left(dx + \frac{DH}{DH}dx\right) = -$$

$AB(u-v)(du-dv)$: y reduciendo $(\alpha B - \beta A)\left(\frac{DH + DH}{DH}\right)dx - (A+B)\,DH\,dx = AB(u-v)(du-dv)$: é integrando $(\alpha B - \beta A)\int\left(\frac{DH + DH}{DH}\right)dx - (A+B)\int DH\,dx = \frac{1}{2}AB\left((u-v)^2 - (U-V)^2\right)$: ó porque es $\int\left(\frac{DH + DH}{DH}\right)dx = x + z$, substituyendo este valor

$$(\alpha B - \beta A)(x+z) - (A+B)\int DH\,dx = \frac{1}{2}AB\left((u-v)^2 - (U-V)^2\right)$$

PROPOSICION 34.

Hallar la velocidad u con que se mueve el cuerpo A á qualquiera tiempo del choque.

Despéjese en la equacion precedente el valor de $u-v$, y sería $u-v = \pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DH\,dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Substitúyase el valor de v hallado (*Prop.* 30.) $v = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV - Au}{B}$, y será $\frac{Au + Bu - AU - BV - (\alpha+\beta)t}{B} = \pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B + \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DH\,dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$;

que dá la velocidad $u = \frac{AU + BV + (\alpha+\beta)t}{A+B} \pm \frac{B}{A+B}\left(\frac{(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DH\,dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$.

El

El signo superior, en el caso de que no haya aun sucedido la máxima impresion; y el inferior despues de haber sucedido.

Corolario 1.

Si fuere $V = 0$, y $B = \infty$, quedará $u = \pm \left(U^2 + \frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int DH\,dx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 2.

Si los cuerpos A y B fuesen perfectamente elásticos, de suerte que, en el regreso de A, no varíe la cantidad DH, las dos velocidades de este cuerpo, positiva y negativa, á iguales distancias del origen de las x, ó á iguales distancias de donde se termina la máxima impresion, serán iguales.

Corolario 3.

Si los cuerpos no fueren perfectamente elásticos, como es regular suceda en la naturaleza, la cantidad DH será menor en el regreso á iguales distancias de las x: y por consiguiente, la velocidad negativa á las mismas iguales distancias, será menor que la positiva.

Corolario 4.

Ya no podrá ser, pues, $u = U$ en el origen de las x, sino menor. No podrán tampoco las primeras partículas de los cuerpos regresar enteramente á su primera situacion: quedará, por consiguiente, una pequeña impresion al tiempo que se separen, y la velocidad, en este instante, será menor que la que obtuviere el cuerpo A en el origen de las x: con que será mucho menor que la primitiva U.

Corolario 5.

Como la potencia α actua negativamente en el regreso, ó retarda el movimiento del cuerpo A, aun despues de separado del B, llegará á parar aquel, como se explicó en el movimiento retardado; y volviendo despues positivamente, executará segundo choque, adquiriendo (*Cor.* 4.), al tiempo de encontrar de nuevo al cuerpo B, la misma velocidad que tenia quando se separó de él: esto es, una velocidad menor que U, que será como la primitiva para el segundo choque.

Corolario 6.

El origen de las x estará tambien mas profundo para este segundo choque, puesto que las primeras partículas de los cuerpos no pudieron en el primero, regresar á su primera situacion.

Corolario 7.

Lo mismo sucede en tercero, quarto, ó mas choques continuados. En todos disminuye mas y mas la velocidad primitiva hasta pararse el cuerpo A, haciendo las ultimas impresiones de cada choque de cantidades infinitamente chicas: y quedando (*Def.* 36.) la fuerza de percusion $\pi = \alpha$.

PROPOSICION 35.

Hallar la velocidad v con que se mueve el cuerpo B á qualquiera ti empo del choque.

Substitúyase el valor de u ultimamente hallado en la equacion (*Pro.* 30.) $v = \frac{(\alpha+\beta)t + AU + BV + Au}{B}$;

y despues de despejar, se hallará $v = \frac{AU + BV + (\alpha+\beta)}{A+B}$

$$\mp \frac{A}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B - \beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DH dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

El signo superior, en el caso de no haber sucedido aun la máxima impresion; y el inferior despues que haya sucedido.

PROPOSICION 36.

Hallar el valor de la impresion en caso de ser la dureza D constante.

Puesto que se supone D constante, será $\int DH dx = D\int H dx$; pero $\int H dx$ es el valor de la impresion, á causa que H denota su amplitud, y dx la diferencial de su profundidad: luego substituyendo en la equacion (*Propos.* 33.) $D\int H dx$ en lugar de $\int DH dx$, y ordenando, en caso de ser constante la dureza D, será el valor de la impresion $\int H dx = $ - - -

$$\frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2 - (u-v)^2\right) + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{D(A+B)}.$$

PROPOSICION 37.

Hallar el valor de la máxima impresion, en caso de ser la dureza D constante.

Al suceder la máxima impresion (*Cor. Prop.* 29.) es $u - v = 0$: substituyendo, pues, este valor en el de la impresion precedente, y llamando I la máxima, será $I = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{D(A+B)}$.

Corolario 1.

Si el cuerpo B estubiere inmovil, tendremos que colocar $B = \infty$, $V = 0$, y quedará el valor de la máxi-

máxima impresion $I = \frac{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha(x+z)}{D}$.

Corolario 2.

En los cuerpos que caen libremente por la sola accion de la gravedad es (*Cor.* 1. *Princ.* 3.) $\alpha = 32A$, ó $A = \frac{1}{32}\alpha$. Substituyendo este valor en la equacion antecedente, se reduce á $I = \frac{\frac{1}{64}\alpha U^2 + \alpha(x+z)}{D}$. Pero si llamamos e la altura de donde cayere el cuerpo, es (*Cor.* 1. *Princ.* 3.) $e = \frac{1}{64}U^2$: luego substituyendo este valor, será, en los cuerpos que caen por sola la accion de la gravedad, $I = \frac{\alpha(e+x+z)}{D}$.

Corolario 3.

Si las cantidades x y z fueren despreciables, respecto de la e, quedará $I = \frac{\alpha e}{D} = \frac{\alpha U^2}{64D}$; ó, substituyendo el valor de $\alpha = 32A$, $I = \frac{32Ae}{D} = \frac{AU^2}{2D}$. Luego en los cuerpos que caen por la accion de la gravedad, las impresiones que hicieren son en razon compuesta directa de los cuerpos, y de las alturas de donde caen: ú de los cuerpos, y de los quadrados de las velocidades primitivas con que chocan; y en inversa de las durezas ú densidades.

Escolio 1.

No hay sino consultar los Autores de Phísica experimental para ver como convienen estas fórmulas con sus experiencias. El *Dr. Gravesande*, en su tom. 1. §.833, describe un instrumento para dexar caer con propiedad varias espheras de cobre sobre greda. En la tercera experiencia dexa caer tres del mismo diámetro; pero de distinto peso, por haber hecho las dos huecas: sus pesos eran como 1, 2 y 3. Las dexó caer todas de nueve pulgadas de alto, y halló que las impresiones que hicieron fueron asimismo como 1, 2 y 3. En la decima experiencia, á mas de esto, dexó caer las dos mas pesadas de 18 pulgadas de alto, y halló que sus impresiones fueron como 4 y 6, duplas de las primeras: con que en efecto, por estas experiencias, las impresiones eran en razon compuesta de los pesos ó masas, y de las alturas de donde cayeron; ú de los pesos ó masas, y de los quadrados de las velocidades primitivas.

Corolario 4.

Si los dos cuerpos que se chocan fueren iguales, y sin potencias que los animen en el choque, será $B = A$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$: lo que reduce el valor de la impresion (*Prop.* 37.) á $I = \frac{A(U-V)^2}{4D}$; ó si fuere $V = 0$; á $I = \frac{AU^2}{4D}$: luego, como antes, tambien serán las impresiones en razon compuesta directa de los pesos ó masas, y de los quadrados de las velocidades con que se chocan; y en inversa de las durezas.

Escolio 2.

Esto mismo confirman otras muchas experiencias que en el parage citado trae el *Dr. Gravesande*: de donde deduce, que siendo los efectos proporcionales á las causas, y aquellos á las impresiones, es preciso que estas que pretende con *Leibnitz*, sean las fuerzas vi-

vivas imaginarias, sean tambien en razon compuesta de las masas y de los quadrados de las velocidades.

Escolio 3.

Puesto que las experiencias, no solo en cuerpos blandos como la greda, sino en elásticos y duros convienen con nuestras fórmulas en el caso de ser la dureza D constante, es evidente que la dureza en estos casos ha sido á lo menos sensiblemente constante, y que la podemos suponer asi. Por la misma razon de convenir las experiencias con el cálculo, en que supusimos la impresion de la misma figura esphérica del cuerpo chocante A: es evidente, á lo menos en cuerpos blandos como la greda, que no tubo lugar en estos casos el hueco HFE. No obstante esto, no puede dexar de existir en cuerpos mas elásticos: aun en blandos como la greda, dice el mismo *Gravesande*, §.824, que quando la amplitud de la impresion es muy grande, respecto de su profundidad, las razones en que se fundó ya no tienen lugar, porque en este caso, de qualquiera naturaleza que sea la greda, sus partículas ceden lateralmente: lo que prueba que el hueco se forma, aun en cuerpos blandos, como el chocante no sea de figura que aumente por grados su amplitud.

PROPOSICION 38.

Determinar la profundidad de la impresion, en caso de ser $H = Qx$: denotando Q una constante.

Substitúyase en la equacion (*Proposicion 36.*)

$$\int H\,dx = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)},$$

Qx por H: intégrese, y quedará $\frac{1}{2}Qx^2 =$

$$\frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}.$$

En la suposicion de ser $H = Qx$, será tambien $H = Qz$, y $DHdx = DHdz$, cuya equacion se reducirá á $DQxdx = DQzdz$, que, partiendo por Q, é integrando, dá $Dx^2 = Dz^2$, y $z = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{D^{\frac{1}{2}}}x$. Substitúyase este valor en la equacion, y resultará $\frac{1}{2}Qx^2 =$

$$\frac{\frac{1}{2}ABD^{\frac{1}{2}}\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)+(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})x}{DD^{\frac{1}{2}}(A+B)}$$

y despejando

$$x = \frac{(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{DD^{\frac{1}{2}}Q(A+B)} \pm \left(\frac{\left((\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\right)^2}{\left(DD^{\frac{1}{2}}Q(A+B)\right)^2}+\frac{AB\left((U-V)^2-(u-v)^2\right)}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corolario 1.

En el caso de la máxima profundidad, ó impresion, es $u-v = 0$: luego quedará la máxima profundidad

$$x = \frac{(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{DD^{\frac{1}{2}}Q(A+B)} \pm \left(\frac{\left((\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\right)^2}{\left(DD^{\frac{1}{2}}Q(A+B)\right)^2}+\frac{AB(U-V)^2}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corolario 2.

Si fuere $V = 0$, y $B = \infty$, quedará la máxima

$$x = \frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{DD^{\frac{1}{2}}Q} \pm \left(\left(\frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})}{DD^{\frac{1}{2}}Q}\right)^2+\frac{AU^2}{DQ}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Co-

Corolario 3.

Si, á mas de esto, fuere tambien $U = o$, quedará la máxima $x = \frac{2\alpha(D^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})}{DD^{\frac{1}{2}}Q}$: esto es, en razon simple directa de la potencia α, que impele al cuerpo A.

PROPOSICION 39.

Determinar la profundidad de la impresion, en caso de ser π constante.

Supóngase $\pi(A+B) = \frac{DH\mathit{DH}}{DH+\mathit{DH}}(A+B) = n(\alpha B - \beta A)$, denotando n un número qualquiera: y respecto de ser constantes DH y DH, se reducirá la equacion (*Prop.* 32.) $DHdx = \mathit{DH}dz$, á $DHx = \mathit{DH}z$, y $\mathit{DH} = \frac{DHx}{z}$. Substitúyase este valor en la primera equacion, y quedará $\frac{DHx(A+B)}{x+z} = n(\alpha B - \beta A)$: que dá $Hx = \frac{n(\alpha B - \beta A)(x+z)}{D(A+B)}$ (*Proposicion* 36.) $= \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2 - (u-v)^2\right) + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{D(A+B)}$. De que se deduce $x+z = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2 - (u-v)^2\right)}{(n-1)(\alpha B - \beta A)}$; ó substituyendo $\frac{\pi(A+B)}{\alpha B - \beta A} = n$, $x+z = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2 - (u-v)^2\right)}{\pi(A+B) - (\alpha B - \beta A)}$.

Co-

Corolario 1.

Si fuere $V = o$, y $B = \infty$, quedará $x+z = \frac{\frac{1}{2}A(U^2 - u^2)}{\pi - \alpha}$.

Corolario 2.

En el caso de la máxima impresion es $u - v = o$: luego para este caso será $x+z = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{\pi(A+B) - (\alpha B - \beta A)}$.

Corolario 3.

No habrá, pues, máxima impresion, ó no tendrá límite, á menos que no sea $\pi(A+B) - (\alpha B - \beta A)$ positivo, ó que sea $\pi(A+B) > \alpha B - \beta A$.

Corolario 4.

Si fuere $V = o$, y $B = \infty$, quedará la máxima $x+z = \frac{\frac{1}{2}AU^2}{\pi - \alpha}$.

PROPOSICION 40.

Hallar el valor de la dureza D.

Puesto que se ha hallado esta constante, ó sensiblemente constante, se reducirá la equacion (*Prop.* 33.) á $(\alpha B - \beta A)(x+z) - D(A+B)\int Hdx = \frac{1}{2}AB\left((u-v)^2 - (U-V)^2\right)$: que da $D = \frac{\frac{1}{2}AB\left((U-V)^2 - (u-v)^2\right) + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{(A+B)\int Hdx}$, ó en el caso de la máxima impresion, en que es $u - v = o$, será $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{(A+B)I}$.

Corolario 1.

Si fuere $B = \infty$, y $V = 0$, como en las experiencias citadas, hechas sobre la greda por *Gravesande*; quedará $D = \frac{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x}{I} = \frac{\alpha(e+x)}{I}$.

Escolio.

Tomemos, por exemplo, la primera experiencia, que fué dexar caer la esphera de menor peso de 9 pulgadas de alto, y en que halló el diámetro de la impresion de $\frac{65}{800}$, siendo el de la esphera de $\frac{1}{8}$. De esto se deduce el valor de $x = \frac{100 - (10000 - 65.61)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$. El de $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)$; denotando c la circunferencia, cuyo diámetro es la unidad. El de A, que es la masa total de la esphera, $= \frac{4c}{9.16.16.16}$: lo que da $\alpha = \frac{4.32c}{9.16.16.16}$. Estos valores de α y de I substituidos en $D = \frac{\alpha(e+x)}{I}$, dan $D = \frac{e+x}{6x^2(3-16x)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{200}}{\frac{6.9}{40000}\left(3 - \frac{48}{200}\right)} = 200\frac{3800}{9936}$. Lo mismo se deduce, con corta diferencia, de las demas experiencias. Del mismo modo se deducirá el valor de D, en qualesquiera materias con que se hagan las experiencias.

Co-

Corolario 2.

Hallado el valor de D, por la equacion $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{(A+B)\,I}$, se halla asimismo el de D: porque siendo $D\int H dx = D\int H dx$, ó $DI = DI$, denotando I la profundidad de la máxima impresion en el cuerpo A; será $D = \frac{DI}{I}$. Midiendo en la experiencia el valor de I, se tendrá por consiguiente el de D.

PROPOSICION 41.

La máxima fuerza de percusion es la que actua al tiempo de concluirse la impresion total.

Al tiempo de actuar la máxima impresion es la diferencial de π, ú de su igual $\frac{DHDH}{DH+DH}$ cero: esto es $\frac{HdH}{DH+DH} + \frac{HdH}{DH+DH} - \frac{HH(DdH+DdH)}{(DH+HD)^2} = 0$: ó reduciendo $DH^2dH + DH^2dH = 0$; pero esta cantidad no puede ser cero, sin que las diferenciales dH y dH sean cero: esto es, sin que hayan aumentado las amplitudes H y H, ó las impresiones, todo lo que tengan que aumentar: luego la máxima fuerza de percusion es la que actua al tiempo de concluirse la impresion total.

PROPOSICION 42.

Hallar la fuerza de percusion π.

La fuerza de percusion á qualquiera instante del choque es (*Prop.* 27.) $\pi = \frac{DHDH}{DH+DH}$. Substituyase

en

en esta equacion el valor de $D = \frac{DI}{I}$ (*Cor.* 2. *Prop.* 40): y quedará $\pi = \frac{D^2 HIH}{I\left(DH + \frac{DIH}{I}\right)} = \frac{DHIH}{HI + HI}$. Substitúyase asimismo en esta equacion el valor de $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{(A+B)I}$ (*Prop.* 40.), y será $\pi = \frac{HH}{HI+HI}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2 + (\alpha B - \beta A)(x+z)}{A+B}\right)$.

Escolio.

Las cantidades I, *I*, ya se sabe que expresan las máxîmas impresiones; pero, á mas de esto, se debe advertir que las *x y z* son tambien las profundidades de las máxîmas impresiones, pues resultan del valor substituido de B: solo las H y *H* son las que se deben considerar variables en esta equacion para obtener los varios valores de la fuerza π.

Corolario 1.

Siendo la máxîma fuerza de percusion aquella en que suceden las máxîmas H y *H*, se sigue que, colocando en la equacion los valores de las máxîmas H y *H*, se tendrá la máxîma fuerza de percusion.

Corolario 2.

En el caso de ser $B = \infty$, $V = 0$, y $\frac{D}{D} = 0$, de que resulta $I = 0$, $z = 0$, quedará $\pi = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$: y en la caida de los cuerpos por su

su gravedad, en que es $\frac{1}{2}AU^2 = \alpha e$ (*Cor.* 2. *Princ.* 1.) $\pi = \frac{H\alpha}{I}(e+x)$.

Corolario 3.

La fuerza de gravedad será, pues, á la de percusion, como α á $\frac{H\alpha}{I}(e+x)$; ó como 1 á $\frac{H}{I}(e+x)$: y asimismo como I á $H(e+x)$.

Escolio 1.

En las experiencias de *Gravesande* sobre la greda es $H = cx\left(\frac{1}{8} - x\right)$; y $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}\right)$: luego será $\frac{H}{I} = cx\frac{\left(\frac{1}{8} - x\right)}{cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{5}x\right)} = \frac{\frac{1}{8} - x}{x\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)}$: que da la fuerza de gravedad á la de percusion, como 1 á $\frac{(e+x)\left(\frac{1}{8} - x\right)}{x\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)}$. En la primera experiencia fue $e = \frac{3}{4}$, y se halló $x = \frac{3}{200}$: luego fue la fuerza de gravedad á la de percusion, como 1 á $\frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{200}\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{200}\right)}{\frac{3}{200}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{200}\right)}$; ó como 1 á $109\frac{76}{363}$: de suerte, que la fuerza de percusion, aun en un cuerpo blando como la greda, y cayendo la esphera de solo 9 pulgadas de alto, fue 109 veces mayor que la de gravedad.

Co-

Corolario 4.

Si fuere $B = \infty$, $V = 0$, $D = D$, y con corta diferencia $H = H$, $I = I$, $z = x$, será - - - - - $\pi = \frac{H}{2I}(\frac{1}{2}AU^2 + 2\alpha x)$; y en la caida de los cuerpos por su gravedad $\pi = \frac{H\alpha}{2I}(e + 2x)$.

Corolario 5.

La fuerza de gravedad será, pues, en este caso á la de percusion, como 1 á $\frac{H}{2I}(e + 2x)$.

Escolio 2.

Quando dos cuerpos muy duros, como de hierro, se chocan, la impresion I, que en ellos se hace, es casi infinitamente chica, respecto de $H(e + 2x)$: luego en este caso la fuerza de percusion será casi infinita, respecto á la de gravedad. Tomemos, por exemplo, el golpe de un martillo sobre un yunque: y respecto que I expresa la magnitud de la impresion, que ha de ser como el producto de H, amplitud de la misma, por una cantidad proporcional á la profundidad de ella, que por experiencia sabemos ser cortísima; podemos poner $I = H.\frac{1}{k}$, expresando k un número qualquiera, tal que $\frac{1}{k}$ sea aun menor que la profundidad de la impresion, que quando mas será de $\frac{1}{15000}$, ó $\frac{1}{12000}$ de pie. Puesto, pues, este valor en la expresion, será la fuerza de gravedad á la de percusion, como 1 á $\frac{H}{2H.\frac{1}{k}}(e + 2x) = \frac{1}{2}k(e + 2x)$: ú despreciando la x por cortísima, como 1 á $\frac{1}{2}ke$. Si la velocidad del martillo equivaliese á la que tomara cayendo de 10 pies de altura, y pusiésemos solamente $k = 12000$; será la fuerza de gravedad á la de percusion del mismo martillo, como 1 á 60000: esto es, será esta fuerza 60000 veces mayor que la de gravedad: y el efecto del martillo equivaldrá al que pudiera causar sobre el mismo punto donde se dió el golpe un peso 60000 veces mayor que el del martillo. Esto basta para no maravillarse ya del prodigioso efecto de la fuerza de percusion.

Escolio 3.

Esta theórica se puede asimismo aplicar á las cuerdas: pues si estando firme un extremo de ellas en E, hay al otro extremo un peso A, que se dexa caer de una altura qualquiera, la accion en la caida total, quando se estiende enteramente la cuerda, como en EF, es una verdadera percusion. Para aplicar á este caso las mismas fórmulas, H denotará la seccion perpendicular á la cuerda; D la calidad del material, ó fortaleza de él; I el producto de H, por el máximo de lo que la cuerda se alarga en la accion; y x lo que se alargue en qualquier caso. Siendo, á mas de esto, el punto fixo ó firme E aquel sobre que se exercite la accion, hemos de suponer este un cuerpo infinito: esto es $B = \infty$, $V = 0$, $\frac{D}{D} = 0$, $I = 0$, y $z = 0$; por lo que la fórmula que conviene á este caso es (*Corolario 2.*) $\pi = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$: denotando U la velocidad que Fig. 25.

que tubiere el cuerpo A al instante que cumple la entera caida; ó suponiendo $I = HX$, denotando X todo lo que la cuerda se puede alargar hasta el caso de romper, $\pi = \frac{1}{X}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$: y en la caida de los cuerpos por la accion de su gravedad será tambien $\pi = \frac{\alpha}{X}(e+x)$. Quando el cuerpo A se aplica á la cuerda solo para que le sostenga, sin dar caida alguna, es $e=0$: luego en este caso será $\pi = \frac{\alpha x}{X}$: y si fuere tanto el peso, que llegue al punto preciso de romper la cuerda, será $x = X$, y $\pi = \alpha$: esto es, la fuerza de percusion, que en este caso es de presion, igual al peso del cuerpo, que podemos llamar P. Llámese p el que puede sostener la cuerda en caso de caida: y como su fuerza es constante, tendremos para el preciso punto de romperse en la caida $P = \frac{p}{X}(e+X)$: esto es, el peso con que precisamente se romperá la cuerda en la caida $p = \frac{PX}{e+X}$. La cantidad X es proporcional á la longitud de la cuerda, porque cada parte de ella se alarga proporcionalmente: luego si llamamos l la longitud de la cuerda, y $\frac{1}{n}$ la razon de lo que se alarga respecto de su longitud, será $X = \frac{l}{n}$, y $p = \frac{P.\frac{l}{n}}{e+\frac{l}{n}} = \frac{Pl}{ne+l}$. No debe entenderse aqui por lo que se alarga una cuerda, lo que efectivamente se alarga quando nueva, á los primeros esfuerzos que hace; sino á aquello que despues de estos esfuerzos se recoge, y queda para alargarse de nuevo en otras ocasiones: que en substancia no es sino lo que la cuerda se alarga y encoge por su elasticidad. Una cuerda de cañamo de tres pulgadas de circunferencia, siendo buena, aguanta hasta cargarla de 65 quintales, y se alarga de $\frac{1}{10}$: con esto será $P=65$, y $\frac{1}{n} = \frac{1}{10}$, ó $n=10$: lo que dá $p = \frac{65.l}{10.e+l}$. Si la cuerda tubiera, pues, 100 pies de largo, y dexaran caer el peso p colgado de ella de los mismos 100 pies, fuera $p = \frac{6500}{1000+100} = \frac{65}{11} = 5\frac{10}{11}$ quintales, que es el peso menor con que romperá la cuerda. De la fórmula, y de lo que acabamos de ver se deduce, que quanto mas larga sea la cuerda, mas aguantará en la percusion, ó, como dicen los Marineros, en el estrechon: pues si en lugar de los 100, solo tubiera 50 de largo, fuera $p = \frac{65.50}{1000+50} = \frac{65}{21} = 3\frac{2}{21}$ quintales: con los quales ya romperia la cuerda, cayendo el peso de los mismos 100 pies de alto.

PROPOSICION 43.

Hallar el tiempo en que se executa el choque.

Siendo (*Prop.* 29.) $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$, y (*Propos.* 34.)

$$u-v = \pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B-\beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)D\int Hdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}};$$

substituyendo este valor en la equacion antecedente, será

$$dt = \frac{dx+dz}{\pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B-\beta A)(x+z)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)D\int Hdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}}$$: ó multi-

plicando numerador y denominador por $\left(\frac{\frac{1}{2}AB}{(A+B)D}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$dt = \frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}(dx+dz)}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corolario 1.

En el caso de ser con corta diferencia $z=0$, y $dz=0$, será

$$dt = \frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corolario 2.

En el de $z=x$, y de $dz=dx$, $dt=$

$$\frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-\int Hdx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corolario 3.

Para deducir de este segundo caso el primero, no será, pues, necesario sino partir la expresion, en que se hallare $\alpha B-\beta A$, por dos; y despues el todo del tiempo asimismo por dos.

Escolio.

No queda que hacer sino integrar para hallar el valor de t. Esta operacion depende del que se le dé á H,

H, y este de la figura, disposicion, y dureza recíproca de los dos cuerpos chocados. Por lo mismo podemos suponer $\int Hdx$ igual á qualquiera funcion de x con constantes, pues si el caso no se adequare á todos los cuerpos, como no puede adequarse, siempre tendrá alguno ó algunos á que corresponda.

PROPOSICION 44.

Hallar el valor del tiempo en que se executa el choque quando fuere $\int Hdx = Qx^2$, $z=x$, y $dz=dx$: suponiendo Q una constante.

La equacion (*Prop.* 43.) se reduce en este caso á

$$dt = \frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}-\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-Qx^2\right)^{\frac{1}{2}}} : \text{ó}$$

partiendo numerador y denominador por $Q^{\frac{1}{2}}$, á $dt=$

$$\frac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{QD(A+B)}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$ Substitúyase

$$R^2 = \frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}-\frac{(\alpha B-\beta A)^2}{Q^2D^2(A+B)^2};$$ y quedará $dt=$

$$\frac{\left(\frac{2AB}{R^2QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}Rdx}{\left(R^2-\left(\frac{x-(\alpha B-\beta A)}{QD(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$: é integrando $t=$

$$\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Ar.sen.\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}+Ar.sen.\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-B\beta}{RDQ(A+B)}\right)\right),$$

por el tiempo en que se forma, ó aumenta la impresion: y $t=$

$$\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+Ar.se.\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}-Ar.se.\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right),$$

Q2 por

por el tiempo en que ya disminuye la impresion, contado asimismo desde el principio del choque, y denotando C la semicircunferencia de un círculo, cuyo radio es la unidad.

Corolario 1.

Estos dos tiempos deben ser iguales al concluirse la máxîma impresion, puesto que á ambos corresponde este caso: luego al suceder la máxîma impresion, será $Arco\ seno \left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right) = C - Arco\ seno \left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$; ó $Arco\ seno \left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right) = \frac{1}{2}C$. Substituyendo este valor en qualquiera de los dos que expresan el tiempo, se tendrá, por todo el que emplean los cuerpos en formar la máxîma impresion, $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + Arco\ seno \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$.

Corolario 2.

En los cuerpos perfectamente elásticos la impresion disminuye hasta ser $x = 0$: luego substituyendo este valor de x en la segunda equacion del tiempo, se tendrá aquel en que se hace todo el choque en los cuerpos perfectamente elásticos $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(C + 2 Arco.seno \frac{\alpha B - \beta B}{RDQ(A+B)}\right)$.

Corolario 3.

El tiempo que emplean los cuerpos perfectamente elásticos en todo el choque es, pues, duplo del que emplean en hacer la máxîma impresion; ó el tiempo que emplean desde el principio del choque hasta llegar á la máxîma impresion, es igual al que emplean desde que sucede esta máxîma impresion hasta concluirse el choque.

Corolario 4.

Como los cuerpos de muy poca ó ninguna elasticidad sensible, concluyen su choque al suceder la máxîma impresion, será el tiempo que estos cuerpos emplean en hacer su choque $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}C + Arc.seno \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)$.

Corolario 5.

Si fueren $\alpha = 0$, y $\beta = 0$, quedará el tiempo en que sucede la máxîma impresion, ó en que concluyen su choque los cuerpos de ninguna elasticidad sensible $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}C$; y aquel en que lo concluyen los cuerpos de perfecta, ó sensiblemente perfecta elasticidad $t = \left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C$.

Corolario 6.

En estas expresiones del tiempo, queda ya excluida la R, que es la única cantidad que contiene las velocidades primitivas U y V: luego en los cuerpos que se chocan sin ser animados por potencias, el tiempo que emplean en sus choques, no depende en ninguna manera de las velocidades con que se chocan; y será siempre el mismo, sean estas de la magnitud que se quisieren.

Co-

Corolario 7.

Si la impresion se formare por sola la presion ó accion de las potencias α y β, siendo las velocidades $U=0$ y $V=0$, como sucede en los cuerpos graves quando se pone alguno de ellos sobre otro, será $R=\frac{\alpha B-\beta A}{DQ(A+B)}$: cuyo valor substituido en la expresion del tiempo

$$t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}C+Arc.\,seno\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right),$$

$$t=\left(\frac{2AB}{DQ\,A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,Arc.\,sen.\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(+B)}\right),$$

que dará aquel en que sucede la máxîma impresion; y su duplo que emplean los cuerpos de casi una perfecta elasticidad en executar todo el choque, quando fueren $U=0$, y $V=0$, $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\,C$, y $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\,2C$.

Corolario 8.

Los tiempos que emplean los cuerpos en sus choques, quando solo actuen las potencias, sin concurrir ningunas velocidades primitivas, es pues duplo del que emplean los mismos cuerpos quando, sin actuar ningunas potencias, son las velocidades las que causan el choque.

Corolario 9.

Como en las expresiones del tiempo, en caso de actuar solo las potencias, quedan estas excluidas, el tiempo será el mismo, sean estas de la magnitud que se quisieren.

Co-

Corolario 10.

Si suponemos la profundidad de la máxîma impresion $=X$, será $QX^2=I$, que dá $Q=\frac{I}{X^2}$; y (*Propos.* 40.) $D=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)\,2X}{(A+B)\,I}$, de que resulta $DQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta B)2X}{X^2}$.

Pongamos $R^2=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{DQ(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)^2}{D^2Q^2(A+B)^2}$: que dá

$$R^2D^2Q^2(A+B)^2=\tfrac{1}{2}ABDQ(A+B)(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)^2$$

$$=\frac{\frac{1}{4}A^2B^2(U-V)^4+AB(U-V)^2(\alpha B-\beta A)X+(\alpha B-\beta A)^2X^2}{X^2}:$$

y será $RDQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}{X}$.

Substituyendo estos valores de $DQ(A+B)$, y de $RDQ(A+B)$ en los del tiempo $t=$ - - - - - - - - -

$$\left(\frac{2AB}{DQ(A+B}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}C+Arc.\,sen.\,\frac{\alpha B-\beta B}{RDQ(A+B)}\right),\ \text{y}$$

$$t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,Arc.\,sen.\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right),$$

se reducirán estos á $t=$ - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}C+Ar.\,se.\,\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right):$$

$$t=\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,Ar.\,se.\,\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right).$$

Corolario 11.

Si fueren $\alpha=0$ y $\beta=0$, quedará el tiempo en que se executa la máxîma impresion $t=\left(\frac{4X^2}{(U-V)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.\,\tfrac{1}{2}C=\frac{CX}{U-V}$.

Es-

Escolio.

Que sea, v.g., la velocidad respectiva U—V, con que se chocan dos espheras ó bolas de un pie por segundo: y respecto de ser $C = 3,14$, quedará $t = 3,14$: con que si la profundidad de la impresion que en ellas se hiciere fuere de 3,14 de pie, ú de poco menos de media línea, será $t = \frac{1}{100}$ de segundo $= 36''''$: tiempo verdaderamente muy corto para que pueda jamas percibirse. Si la dureza de los dos cuerpos fuere mayor, menor será la profundidad de la impresion, y por consiguiente mas corto el tiempo: de suerte, que si la dureza fuere casi infinita, casi infinitamente corto sería el tiempo.

Corolario 12.

Si los cuerpos actuaren solamente por la presion ó potencias, serán $U = 0$ y $V = 0$, ó $U - V = 0$; lo que reduce el tiempo en que se hace la máxima impresion á $t = \left(\frac{ABX}{\alpha B - \beta A}\right)^{\frac{1}{2}} C$. Si á mas de ello fuere $B = \infty$, será $t = \left(\frac{AX}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} C$: ó en los cuerpos graves en que es (*Cor.* 1. *Pri.* 3.) $A = \frac{1}{32}\alpha$, $t = \left(\frac{1}{32}X\right)^{\frac{1}{2}} C$. Si un cuerpo puesto sobre otro hiciere, pues, la profundidad de la impresion de $\frac{1}{19,7192}$, ó poco mas de $\frac{1}{20}$ de línea $= \frac{1}{144.2.3,14.3,14}$ de pie, será el tiempo en que executará su máxima impresion $=$ --- $\left(\frac{1}{32.2.144.3,14.3,14}\right)^{\frac{1}{2}} 3,14 = \left(\frac{1}{8.12}\right)$ de segundo, $= 37\frac{1}{2}''''$.

Corolario 13.

Si fuere $B = \infty$, y $V = 0$, quedará el tiempo en que se haga la máxima impresion -------
$$t = \left(\frac{2AX^2}{\frac{1}{2}AU^2 + 2\alpha X}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2}C + \mathit{Arc.sen.}\frac{\alpha X}{\frac{1}{2}AU^2 + \alpha X}\right):$$
ó en los cuerpos graves en que es $A = \frac{1}{32}\alpha$, y $\frac{1}{2}AU^2 = \alpha e$, expresando e la altura de donde cayere el cuerpo,
$$t = \left(\frac{X^2}{16(e + 2X)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2}C + \mathit{Arc.sen.}\frac{X}{e + X}\right).$$

Corolario 14.

Si fuere X despreciable, respecto de e, quedará $t = \frac{CX}{8\sqrt{e}}$. Si un cuerpo de hierro, cayendo sobre un yunque, hiciere, pues, la profundidad de la impresion de $\frac{1}{314}$ de pie, ú de poco menos de media línea, será el tiempo en que la haga $t = \frac{1}{800\sqrt{e}}$: de suerte, que si fuere su caida de 36 pies, quedará $t = \frac{1}{4800} = 45'''''$.

Corolario 15.

De la misma manera se pueden hallar los tiempos en que se executan las máximas impresiones, en el supuesto de ser $z = 0$, $dz = 0$, ó que un cuerpo sea como infinitamente duro, respecto del otro, pues por lo dicho (*Cor.* 3. *Prop.* 43.) la expresion del tiempo en que se hace la máxima impresion, dada (*Cor.* 10. *Propos.* 44.), se reduce para este caso á $t =$ ----
$$\left(\frac{ABX^2}{AB(U - V)^2 + (\alpha B - \beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{2}C + \mathit{Ar.se.}\frac{(\alpha B - \beta A)X}{AB(U - V)^2 + (\alpha B - \beta A)X}\right).$$

y del mismo modo para otro qualquiera caso, integrando la expresion general dada (*Prop.* 43.).

PROPOSICION 45.

Hallar el tiempo en que se executa el choque, en caso de ser la fuerza de percusion π constante.

Siendo (*Propos.* 31.) $\left(\alpha B - \beta A - \pi(A+B)\right)dt = (du - dv)$: integrando esta equacion, y partiendo por $\alpha B - \beta A - \pi(A+B)$ resultará $t = \frac{AB\left((u-v)-(U-V)\right)}{\alpha B - \beta B - \pi(A+B)}$.

Corolario 1.

En el caso de la máxîma impresion será $t = \frac{-AB(U-V)}{\alpha B - \beta A - \pi(A+B)} = \frac{AB(U-V)}{\pi(A+B)-(\alpha B - \beta A)}$.

Corolario 2.

Si fuere $V = o$ y $B = \infty$, quedará $t = \frac{A(u-U)}{\alpha - \pi}$: y en el caso de la máxîma impresion $t = \frac{AU}{\pi - \alpha}$.

PROPOSICION 46.

Hallar el centro de percusion.

Supóngase el cuerpo dividido en infinito número de pequeños cuerpos: ó supóngase un systhema com-
Fig. 26. puesto de infinito número A, B, C, & de cuerpos pequeños ligados entre sí: y que gire sobre un exe qualquiera dado y fixo E, con una velocidad angular determinada. Pongamos que en cada uno de los pequeños cuerpos A, B, C, &, haya una potencia α, β, γ, & que

que les retarde su movimiento, y que todas actuen paralelamente segun DA, FB, GC, &: que sea P la distancia desde el exe al plano paralelo al directorio, que pase por el centro de gravedad: u la velocidad que perdiere este centro: A, B, C, & las distancias EA, EB, EC, &, desde qualquiera cuerpo como A, B, C, & al exe: y δ, ε, ξ; & los ángulos EAD, EBF, ECG que aquellas forman con las direcciones en que actuan las potencias. Con esto tendremos $P : u = A : \frac{Au}{P}$, velocidad que perderá el cuerpo A segun la perpendicular á EA: y por igual razon $\frac{Bu}{P}$, $\frac{Cu}{P}$, &, las que perderán los otros cuerpos segun las perpendiculares EB, EC, &: y $\frac{Au}{P\,sen.\delta}$, $\frac{Bu}{P\,sen.\varepsilon}$, $\frac{Cu}{P\,sen.\xi}$, &, las que deben imprimir las potencias para que resulten las primeras. Tendremos pues (*Cor.* 2. *Prop.* 4.) $\alpha t = \frac{AAu}{P\,sen.\delta}$, $\beta t = \frac{BBu}{P\,sen.\varepsilon}$, $\gamma t = \frac{CCu}{P\,sen.\xi}$, &; de que se deduce ----
$\alpha = \frac{AAu}{Pt\,sen.\delta}$, $\beta = \frac{BBu}{Pt\,sen.\varepsilon}$, $\gamma = \frac{CCu}{Pt\,sen.\xi}$, &. Supongamos ahora que la distancia desde el plano paralelo al directorio, en que se halla el centro de percusion, al exe sea x: y serán $x - A\,sen.\delta$, $x - B\,sen.\varepsilon$, $x - C\,sen.\xi$, & las distancias desde cada una de las potencias al mismo plano: y por consiguiente, los momentos de estas, respecto al centro de percusion, serán $\frac{AAu(x - A\,sen.\delta)}{Pt\,sen.\delta}$, $\frac{BBu(x - B\,sen.\varepsilon)}{Pt\,sen.\varepsilon}$, $\frac{CCu(x - C\,sen.\xi)}{Pt\,sen.\xi}$, &: y para que no resulte rotacion sobre el propio centro, habrá de ser (*Corolar.* 2. *Lema* 1.) la suma de estos momentos igual á cero; ó partiendo por $\frac{u}{Pt}$

$\frac{u}{Pt}$, $\frac{AA(x - A\,sen.\delta)}{sen.\delta} + \frac{BB(x - B\,sen.\varepsilon)}{sen.\varepsilon} + \frac{CC(x - C\,sen.\xi)}{sen.\xi}$ $+ \& = 0$: esto es, $\frac{AAx}{sen.\delta} + \frac{BBx}{sen.\varepsilon} + \frac{CCx}{sen.\xi} + \& = AA^2 + BB^2 + CC^2 + \&$: que dá $x = \frac{AA^2 + BB^2 + CC^2 + \&}{\frac{AA}{sen.\delta} + \frac{BB}{sen.\varepsilon} + \frac{CC}{sen.\xi} + \&}$, distancia desde el centro de percusion al plano directorio coincidente con el exe.

Corolario 1.

El denominador $\frac{AA}{sen.\delta} + \frac{BB}{sen.\varepsilon} + \frac{CC}{sen.\xi} + \&$ es como la suma de las potencias $\alpha = \frac{AAu}{Pt\,sen.\delta}$, $\beta = \frac{BBu}{Pt\,sen.\xi}$, &: y el numerador la suma de sus momentos : luego será x la distancia desde el exe al centro de dichas potencias : y por consiguiente (*Cor.* 16. *Lem.* 1.) una igual á la suma de todas, colocada en el centro de percusion, hará el mismo efecto : de suerte, que si en dicho punto hubiera un óbice, se haría sobre él la percusion, con el equilibrio pedido.

Corolario 2.

Si el cuerpo que girare fuere un plano coincidente con el exe, será $sen.\delta = sen.\varepsilon = sen.\xi = \&$; y quedará $x = \frac{sen.\delta(AA^2 + BB^2 + CC^2 + \&)}{AA + BB + CC + \&}$: ó $\frac{x}{sen.\delta} = \frac{AA^2 + BB^2 + CC^2 + \&}{AA + BB + CC + \&} =$ (*Cor.* 19. *Lem.* 1.) $\frac{S}{PM}$, expresando P la distancia desde el exe al centro de las masas: luego en este caso (*Cor.* 3. *Defin.* 30.) el centro de

de percusion y el de oscilacion distan igualmente del exe.

Corolario 3.

Si el exe se considera á una infinita distancia, que es lo mismo que suponer que no gire el cuerpo, como sucede con los que caen por sola la accion de su gravedad, concurrirán en tal caso los dos centros, y serán ambos el mismo de gravedad; pues son iguales todos los ángulos δ, ε, ξ, &, y se reduce el caso al dado (*Cor.* 2.).

Corolario 4.

En todo otro caso en que no fueren iguales los ángulos δ, ε, ξ, & no es $PM = \frac{AA}{sen.\delta} + \frac{BB}{sen.\varepsilon} + \frac{CC}{sen.\xi}$: luego no distarán igualmente del exe los centros de oscilacion y percusion.

Corolario 5.

Si en lugar de chocar el cuerpo al óbice en su centro de percusion, le chocare en un punto mas próximo del exe : como si la palanca EB, en lugar de chocar al óbice en F, donde se supone esté el centro de percusion, le chocare en A, el óbice solo sufrirá la percusion resultante de los momentos de inercia de EA, y otro tanto de la parte AB : el exceso de los de esta los han de padecer las fibras de la palanca, en la misma conformidad que explicamos (*Esc.* 1. *Def.* 33.); con sola la diferencia que allí fue la accion de una sola presion; y aquí la de una percusion, que segun las circunstancias puede ser excesivamente mayor, como ya se ha visto. Fig. 27.

Es-

Escolio.

Hasta ahora se ha enseñado generalmente por los Autores (*a*) que han tratado el asunto, que los dos centros de oscilacion y percusion son siempre el mismo; exceptuando *Juan Bernoulli* que dió alguna idea de poder ser incierto. Para quedar convencidos en este particular no hay sino considerar que el centro de oscilacion de un triángulo isósceles, que gira lateralmente sobre su vértice, dista de este la cantidad de $\frac{3}{4}a + \frac{b^2}{4a}$, suponiendo a la altura del triángulo, y b su base; quando el centro de percusion solo dista $\frac{3}{4}a$: de suerte que, si b es mayor que a, el centro de oscilacion cae fuera del triángulo, y es imposible que sea el de percusion, pues no puede tocarle el óbice fuera de él mismo. Si reducimos el triángulo á menos altura, respecto de su base, al paso que aquella sea menor, dista mas y mas del exe el centro de oscilacion; y al contrario el de percusion: de suerte, que si la altura es infinitamente pequeña, el centro de oscilacion distará infinitamente del exe: quando el de percusion estará siempre á $\frac{3}{4}a$, y por consiguiente en igual disposicion para equilibrar el choque.

CA-

(*a*) *Christiani Wolfii elementa matheseos.* Tom. I. *de elementa Mechanicæ.* Cap. XII. Theo. LXXXI.
Analyse des infiniment petits. Par Mr. Stone. Section VII.
Elementos Mathemáticos de Philosophia natural por Gravesande. Tom. I. Lib. 2. Cap. 5. N. 1080.
Johannis Bernoulli Opera Omnia. Tom. 4. *Remarques sur l'Analyse des infiniments petits.*

CAPITULO 7.

Del movimiento de los cuerpos que insisten sobre superficies.

PRescindiremos en este Capítulo de las impresiones que deben formarse en los cuerpos que se comprimen por qualesquiera potencias, á fin que resulten, por ahora, mas faciles los cálculos. Supondremos, para lo propio, que los cuerpos sean igualmente densos, y que las potencias estén aplicadas á los centros de gravedad.

PROPOSICION 47.

Hallar los espacios que corren dos espheras impelidas por una potencia.

Si dos espheras A y B se tocan en D, y la una A Fig. 28.
está impelida en la direccion AC por la potencia α aplicada en su centro de gravedad A, no girará esta esphera (*Cor. 2. Lem. 1.*): y la potencia se puede descomponer en dos, una que actue segun la tangente DE, y otra segun la perpendicular AD que pasa por los centros de las dos espheras A y B. Llamando Σ al ángulo DAE, será la potencia segun DE $= \alpha sen. \Sigma$, y la que actue segun AD $= \alpha Cos. \Sigma$. Con esta potencia que pasa por los centros A y B, tiene pues que moverse precisamente la esphera A en la direccion AD, y no puede executarlo sin impeler la otra B en la misma direccion, que pasando por el centro B no causará rotacion en esta esphera, y solo habrá de moverla en la propia direccion: de suerte, que ambas espheras tienen que seguir precisamente la direccion AB, en

vir-

virtud de la potencia $\alpha Cos.\Sigma$, sin poderse desviar á parte alguna, y correr ambas el espacio diferencial $\frac{dt\int dt\alpha Cos.\Sigma}{A+B}$. La otra potencia $\alpha sen.\Sigma$ no tiene que impeler sino la esphera A, respecto de ser su direccion segun la tangente DE, en la qual no puede impeler la esphera B: por lo que el espacio diferencial que correrá su centro de gravedad en la misma direccion, será $=\frac{dt\int\alpha dt sen.\Sigma}{A}$.

Corolario 1.

Si la esphera B es de infinita magnitud, su superficie en el punto del contacto coincide con el plano tangente DE: y el espacio que correrán los centros de gravedad de las dos espheras, segun la perpendicular AD, será como antes $\frac{dt\int dt\alpha Cos.\Sigma}{A+B}$: y el que correrá la A, segun la tangente ó plano DE, será $=\frac{dt\int\alpha dt sen.\Sigma}{A}$. Fig. 29.

Corolario 2.

Si la esphera B se supone no solo de infinita magnitud, sino de infinita cantidad de materia ó masa, el movimiento de su centro de gravedad será ---- $\frac{dt\int dt\alpha Cos.\Sigma}{A+\infty}=o$: por lo que en este caso su superficie ó plano tangente DE quedará inmovil, y lo mismo la esphera A por lo que toca á la direccion AD: solo le quedará á esta el movimiento segun la tangente $=\frac{dt\int\alpha dt sen.\Sigma}{A}$.

Corolario 3.

Que la esphera A insista sobre una superficie inmovil qualquiera, plana ó curva BC, impelida por la potencia α, aplicada en su centro de gravedad, y segun la direccion EA: tirada la tangente ó plano tangente FG en el punto del contacto C, este plano puede suponerse la superficie de una esphera infinita en magnitud y en masa, sobre que insiste la otra A, con que no tendrá esta sino el movimiento segun la tangente CG, en virtud de la potencia $\alpha sen.\Sigma$, expresando Σ el ángulo AEH que forma la direccion EA con la perpendicular EH á la tangente. Fig. 30.

Corolario 4.

Lo mismo se demonstrará de qualquiera otro punto de la superficie curva en que se halle la esphera: con que tomando el punto B de la curva por origen, las abcisas x en la BL paralela á la direccion EA, y llamando a la longitud de la curva BC, será $CM=dx$, $CN=da$, y el seno de $AEH=CNM=sen.\Sigma=\frac{dx}{da}$: por lo que la potencia que animará la esphera A segun la tangente en todos los puntos de la superficie en que se hallare, ó segun los espacios diferenciales en que estubiere, será $=\frac{\alpha dx}{da}$.

Corolario 5.

Que sea u la velocidad que adquiere la esphera en qualquiera de dichos puntos, y tendremos (*Corol. Ax.* 2.) $\frac{\alpha dxdt}{Ada}=du$; pero (*Cor.* 4. *Pro.* 3.) es $u=\frac{da}{dt}$:

luego multiplicando estas dos equaciones, será $\frac{\alpha dx}{A} = udu$, y $u^2 - U^2 = \frac{2\int\alpha dx}{A}$: ó $u^2 = \frac{2\int\alpha dx}{A} + U^2$, denotando U la velocidad que tubo la esphera en el origen B.

Corolario 6.

Si fuere α constante, como lo es la gravedad en las inmediaciones á la superficie de la tierra, será $u^2 = \frac{2\alpha x}{A} + U^2$: ó substituyendo (*Cor.* 1. *Prin.* 3.) $\alpha = 32A$, $u^2 = 64x + U^2$: esto es, la velocidad con que cayeren los cuerpos graves por las superficies, no dependerá en ninguna manera de la curva, de su mayor ó menor curvidad, ni de su mayor ó menor inclinacion con el horizonte, sino de sola la altura x de donde cayeren, y de la velocidad primitiva U con que empezaren su caida.

Corolario 7.

Si esta velocidad primitiva U fuere cero, ó si empezare á caer la esphera desde el reposo, quedará $u^2 = 64x$; ú $u = 8\sqrt{x}$, como se vió (*Cor.* 1. *Prin.* 3.)

Corolario 8.

Fig. 31. Si siendo el origen B, la esphera ó cuerpo grave hubiere de descender por las varias superficies planas ó curvas BL, BC, BD, BE con la misma velocidad primitiva, la que tendrá al llegar á la horizontal LE será siempre la misma é $= \sqrt{64x + U^2}$: ó si fuere $U = 0$, $= 8\sqrt{x} = 8\sqrt{BL}$.

Co-

Corolario 9.

Si la esphera insistiere sobre el plano DE, siendo el ángulo DBE recto, será $\frac{dx}{da} = \frac{DB}{DE}$: y la equacion $\frac{\alpha dxdt}{Ada} = du$ se reducirá á $\frac{\alpha dt.DB}{A.DE} = du$; y en los cuerpos graves á $\frac{32t.DB}{DE} = u - U$: de suerte, que las diferencias de las velocidades que adquirirá la esphera en su caida por el plano DE, siendo BE la horizontal, serán en razon directa del tiempo, y de la cantidad $\frac{DB}{DE}$, ó seno del ángulo DEB que forma el plano con la horizontal. Fig. 32.

Corolario 10.

Si en la equacion $u = \frac{da}{dt}$, ó $udt = da$ substituimos el valor de u hallado (*Cor.* 5.) $u = \left(\frac{2\int\alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$ será $da = dt\left(\frac{2\int\alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$: ó si fuere $U = 0$, $da = dt\left(\frac{2\int\alpha dx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. Será, pues, en los cuerpos graves que caen desde el reposo, $da = 8dt\sqrt{x}$: y si cayeren por el plano DE, respecto de ser $\frac{DB}{DE} = \frac{x}{a}$, ó $x = \frac{a.DB}{DE}$, será $\frac{da}{\sqrt{a}} = 8dt\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$: é integrando $2\sqrt{a} = 8t\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$: que da $a = \frac{16t^2DB}{DE}$; esto es, los espacios corridos por un cuerpo grave que desciende desde el re-

reposo sobre un plano, son en razon compuesta de los quadrados de los tiempos, y de la cantidad $\frac{DB}{DE}$ ó seno del ángulo DEB que forma el plano con la horizontal.

Corolario 11.

De la equacion antecedente $da = dt\left(\frac{2\int \alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$ se deduce tambien $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int \alpha dx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}}$: ó si fuere $U = 0$, $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int \alpha dx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$: que en el caso de los cuerpos graves se reduce á $dt = \frac{da}{8\sqrt{x}}$; ó si fuere por el plano DE que la esphera cayere $dt = \frac{da}{8\sqrt{\frac{a.DB}{DE}}}$: é integrando $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a.DE}{DB}}$.

Corolario 12.

Si la esphera ó cuerpo cayere libre ó verticalmente, será $a = x$, y $dt = \frac{dx}{8\sqrt{x}}$: ó integrando $t = \frac{1}{4}\sqrt{x}$.

PROPOSICION 48.

Hallar el tiempo en que caen los cuerpos graves por la cyclóide.

Fig. 33. Sea por la cyclóide DABE, que la esphera ó cuerpo grave caiga, siendo FHIE el círculo generatriz de ella, y $FE = D$ el diámetro de este. Sea A el punto de donde empiece á caer el cuerpo desde el reposo;

FG

$FG = b$, y $GC = x$. Por la propiedad de la cyclóide es su arco $BE = 2IE$: esto es, igual á dos veces la cuerda IE de su círculo generatriz ; pero por la del círculo es $IE = \sqrt{D.(D-b-x)}$: luego el arco $BE = 2\sqrt{D.(D-b-x)}$: y su diferencial $da = -\frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$: que da la del arco $BA = da = \frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$. Será, pues, (*Cor.* 11. *Prop.* 47.) en la cyclóide, quando el cuerpo grave empieza á caer desde el reposo, $dt = \frac{dx\sqrt{D}}{8\sqrt{Dx-bx-x^2}}$: ó multiplicando numerador y denominador por $\frac{1}{2}(D-b)$, $dt = \frac{\sqrt{D}}{4(D-b)}.\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$ y $t = \frac{\sqrt{D}}{4(D-b)}\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; pero $\int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$ es el arco de círculo, cuyo diámetro es $D-b = GE$: luego si con el diámetro GE se describe el círculo GKE, será el arco $GK = \int\frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$: y en la cyclóide $t = \frac{\sqrt{D}.(Arc.GK)}{4(D-b)}$.

Corolario 1.

Si el cuerpo cayere por todo el arco ABE, degenerará el arco GK en todo el semicírculo GKE, y $\frac{GKE}{D-b} = \frac{GKE}{GE}$, será la razon de la semicircunferencia al diámetro, ó llamando C la circunferencia del círculo, cuyo radio es la unidad, será $\frac{GKE}{D-b} = \frac{\frac{1}{2}C}{2} = \frac{1}{4}C$: y

el

el tiempo t en que caerá el cuerpo por todo el arco ABE de la cyclóide $=\frac{C}{16}\surd D$.

Corolario 2.

Como en esta expresion no se halla el valor de b, que determina el punto A, se sigue que desde qualquiera punto de la cyclóide que empiece á caer el cuerpo, siempre empleará el mismo tiempo $t=\frac{C\surd D}{16}$ en llegar á E.

Corolario 3.

Si en el mismo tiempo cayeren dos cuerpos, uno por la cyclóide, y otro libre ó verticalmente, tendremos (*Cor.* 12. *Prop.* 47.) $\frac{C\surd D}{16}=\frac{1}{4}\surd x$, ó $\frac{C\surd D}{4}=\surd x$, que dá $x=\frac{C^2D}{16}$: esto es, el espacio que descenderá un cuerpo grave cayendo libre ó verticalmente en el mismo tiempo que cayera por el arco de una cyclóide, cuyo diámetro del círculo generatriz sea D, será $x=\frac{C^2D}{16}$.

Corolario 4.

Si las oscilaciones de un péndulo son pequeñas, degeneran los arcos descritos por el cuerpo en arcos de cyclóide: por lo que las medias oscilaciones de un péndulo se executan en el mismo tiempo en que cayera el cuerpo por el arco de la cyclóide: esto es, en el tiempo $\frac{C\surd D}{16}$: y las oscilaciones enteras en el tiempo $\frac{C\surd D}{8}$.

Co-

Corolario 5.

Si un cuerpo cayere libre ó verticalmente en el mismo tiempo que describe el péndulo una oscilacion, tendremos $\frac{C\surd D}{8}=\frac{1}{4}\surd x$; ó $\frac{C\surd D}{2}=\surd x$, que dá $x=\frac{C^2D}{4}$: esto es, el espacio que descenderá un cuerpo grave libre ó verticalmente en el mismo tiempo que hiciera una oscilacion entera un péndulo; cuyos arcos descritos degeneran en cyclóide, que tiene por diámetro del círculo generatriz la cantidad D, es $=\frac{C^2D}{4}$.

Corolario 6.

Sea la longitud del péndulo l, ó el diámetro del círculo que describe $=2l$, y $\surd 2lx$ será qualquiera de sus cuerdas suponiendo la altura vertical CE que descienda el péndulo en su media oscilacion; pero esta cuerda es igual á la de la cyclóide, puesto que suponemos que degenera el círculo en ella: é igual á su arco correspondiente $BE=2\surd Dx$ por ser infinitamente pequeños ambos: luego $2\surd Dx=\surd 2lx$, que da $D=\frac{1}{2}l$; cuyo valor substituido en la equacion $x=\frac{C^2D}{4}$, (*Cor.* 5.) la reduce á $x=\frac{C^2l}{8}$: esto es, el espacio que descenderá un cuerpo libre ó verticalmente en el mismo tiempo que haga una pequeña oscilacion entera un péndulo de la longitud l, es $=\frac{C^2l}{8}$.

Corolario 7.

Si en la equacion $t=\frac{C}{16}\surd D$ (*Prop.* 48.) substituituimos $D = \frac{1}{2}l$, será $t = \frac{C}{16}\sqrt{\frac{1}{2}l}$, ó quadrando $t^2 = \frac{C^2 l}{16^2 . 2}$: esto es, las longitudes de los péndulos serán como los quadrados de los tiempos en que oscilan.

Escolio.

La razon de la circunferencia al diámetro, ú de $\frac{C}{2}$ es $= 3,1416$ &: luego la de $\frac{C^2}{8}$ será $= 4,93482528$: lo que da el espácio que descenderá el cuerpo libre ó verticalmente, en el mismo tiempo que haga una oscilacion entera el péndulo de la longitud l, $= x = l.4,9348$ &. La longitud del péndulo simple que vibra los segundos de tiempo al nivel del Mar varía segun las latitudes de los lugares. En el equador es, con corta diferencia, de 439 líneas del pie de Paris: y en el Polo es proxîmamente de 442. Si tomamos un medio 440, que es poco menos que la longitud del péndulo simple que vibra los segundos de tiempo á la orilla del Mar en España, tendremos, que los cuerpos caerán libre ó verticalmente en España en el tiempo de un segundo $\frac{440.49348}{10000}$ líneas del pie de Paris, ó 15 pies 00 pulgadas 11 $\frac{312}{1000}$ líneas: que hacen 16 pies y 1 pulgada del pie Ingles. En el equador, donde la longitud del péndulo simple es de 439 líneas, caerá el cuerpo en un segundo 16 pies 00 pulgadas 7 líneas: y en el Polo 16 pies 2 pulgadas y 11 líneas: donde se vé; que la diferencia en la caida de los cuerpos en las diversas latitudes es corta, pues es quando mas de una pulgada y 4 líneas: por cuyo motivo la establecimos (*Princ.* 3.) de 16 pies justos, cuyo número quadrado se hace cómodo para los cálculos que necesitamos.

PROPOSICION 49.

Hallar las potencias perpendicular y paralela á la tangente, que impelen á un cuerpo qualquiera que insiste sobre una superficie.

Siendo A el cuerpo qualquiera que insiste sobre la superficie BCG, y α la potencia que le impele segun la direccion AD, se puede descomponer esta en dos, una segun AC, que será $\frac{AC.\alpha}{AD}$, y otra segun la tangente FG, que será $\frac{CD.\alpha}{AD}$. La primera $\frac{AC.\alpha}{AD}$ se puede descomponer tambien en dos, una segun AH, que será $\frac{AH.\alpha}{AD}$, y otra segun la tangente FG, que será $\frac{HC.\alpha}{AD}$, no pudiendo impedir la accion de esta el plano FG, por serle tangente: y asi la suma $\frac{CD.\alpha}{AD} + \frac{HC.\alpha}{AD} = \frac{HD.\alpha}{AD}$ será la potencia que anima al cuerpo segun la tangente: ó llamando, como antes, Σ el ángulo que formare la direccion AD con la perpendicular AH á la tangente, será dicha potencia asimismo $= \alpha Sen.\Sigma$. La otra potencia segun la perpendicular AH será $\frac{AH.\alpha}{AD} = \alpha Cos.\Sigma$. Fig. 34. 35.

Corolario I.

Puesto que la potencia que anima al cuerpo por la tangente, es la misma que quando es esphérico, las propriedades en quanto á la velocidad, y espacio cor-

rido

rido por qualquiera cuerpo sobre una superficie plana ó curva, serán las mismas que las que se hallaron para los cuerpos esphéricos.

Corolario 2.

En virtud de la potencia $\frac{AH.\alpha}{AD} = \alpha Cos.\Sigma$ el cuerpo debe girar, siendo el ángulo giratorio $= \frac{\pm dt\int CH.\alpha dt Cos.\Sigma}{S}$, porque la reaccion de la potencia $\alpha Cos.\Sigma$ en el punto C le es igual y contraria, y actua á la distancia perpendicular $p = \pm CH$: luego (*Cor.* 4. *Prop.* 18.) debe producir el ángulo giratorio $\frac{\pm dt\int CH.\alpha dt Cos.\Sigma}{S}$; mas en el caso de caer el punto H hacia el lado de D respecto de C, y menos si cae al lado opuesto: en el primer caso el cuerpo girará, moviendose hacia D, y en el segundo al contrario.

Corolario 3.

Si fuere, pues, $CH = o$: esto es, si fuere el ángulo ACH recto, ó coincidiere la AH con la AC, el cuerpo no girará.

Corolario 4.

Fig. 36. Si el cuerpo A estubiere apoyado sobre la superficie en dos puntos C y F, la potencia $\alpha Cos.\Sigma$ se distribuye en estos dos puntos, siendo la parte que se emplea en C á la que se emplea en F, por la propriedad del centro de gravedad, como HF á HC: será, pues, la parte empleada en $C = \frac{\alpha FH\, Cos.\Sigma}{FC}$, y la empleada en $F = \frac{\alpha CH\, Cos.\Sigma}{FC}$: con que el ángulo giratorio que producirán ambas, será

$$dt\int\left(\frac{CH.\alpha.FH - FH\,\alpha\, CH}{SFC}\right) dt\, Cos.\Sigma = o.$$

Corolario 5.

Lo mismo se demonstrará aunque sean varios los puntos en que apoye el cuerpo, con tal que el punto H cayga entre los puntos de apoyo, para que unas rotaciones sean positivas, y otras negativas.

Corolario 6.

No obstante que la rotacion sea cero, siempre queda la potencia $\alpha sen.\Sigma$ que actua segun DE para hacer mover el cuerpo por el plano, lo que debe executar por pequeña que sea esta potencia ó ángulo Σ.

Escolio.

Estas son las leyes ó reglas generales que todos los Autores dan sobre el movimiento de los cuerpos por las superficies; pero, como hemos visto, están fundadas prescindiendo de las impresiones que sobre las mismas superficies debe hacer la potencia perpendicular $\alpha Cos.\Sigma$: atendiendo á estas, ya varía todo, como se explica en el siguiente Capítulo.

CAPITULO 8.

De la Friccion, y de lo que esta altera el movimiento de los cuerpos que insisten sobre superficies.

DEFINICION 45.

LLámase *Friccion* á la resistencia que encuentran los cuerpos al moverse paralelamente á las superficies sobre que insisten quando se impelen por una ó mas potencias.

Escolio.

Fig. 37. El paralelepípedo A animado por una potencia qualquiera α, cuya direccion AD sea obliqua al plano BE, debe, segun lo dicho en el Capítulo antecedente, ponerse en movimiento, por corto que sea el ángulo HAD, que llamamos Σ: pero esta theórica se fundó prescindiendo de la impresion que sobre el plano debe hacer la potencia $\alpha Cof.\Sigma$, que se dirige segun AH. Esta comprime al paralelepípedo y al plano,
Fig. 38. forma en este la impresion GCFI, y el obstáculo FI, que es preciso que venza la potencia paralela $\alpha fen.\Sigma$, que se dirige segun el plano BE para que pueda tener efecto el movimiento. A mas de esto, en lo material y práctico, por mas tersos y lisos que se hagan el plano y paralelepípedo, siempre les quedan pequeñas escabrosidades, que se observan claramente con el Microscopio: estas deben formar en la base otras tantas pequeñas impresiones en virtud de la potencia $\alpha Cof.\Sigma$, que, como el obstáculo FI, han de resistir al movimiento segun el plano BE. Si se consideran bien estos efectos se verá que en nada se diferencian de los que ex-

explicamos (*Esc.* 1. *Prop.* 27.) y redundan en el choque de dos cuerpos, quando rompiendose las primeras partículas quedan clavados uno en otro. La potencia $\alpha Cof.\Sigma$ hace aquí el efecto que allí la elasticidad lateral, y produce las impresiones recíprocas en el plano y el paralelepípedo, que allí llamamos pequeñas impresiones laterales: y la potencia $\alpha fen.\Sigma$ equivale aquí á la que allá expusimos por α, y producia la impresion total; solo faltan aquí las pequeñas impresiones en la parte superior del paralelepípedo, y que todo el lado FK encuentre cuerpo que le resista. En lugar de este se halla solo la elevacion ú obstáculo FI; pero esto no altera las leyes de la resistencia, solo sí la disminuye: de suerte, que esta misma resistencia que la práctica manifestó desde que se hicieron las primeras experiencias, y que vulgarmente se ha llamado *friccion*, en nada se diferencia de la fuerza de percusion, y es identicamente la misma cosa. Distinguiremos dos casos en la friccion: uno aquel en que el paralelepípedo no hace aun sino forzar las escabrosidades y obstáculo FI sin vencerlas enteramente, ni determinarse á correr: y otro aquel, en que ya forzadas, vencidas, ó rotas aquellas, toma su carrera. En el primero la fuerza de las escabrosidades y obstáculo será mayor que la máxima fuerza de percusion, ahora de friccion: con que es preciso que el paralelepípedo tome su movimiento, que llegue este al máximo, que disminuya despues hasta ser $u = o$, que sea luego negativo, y que llegue el caso de que haya equilibrio entre la potencia y la friccion, ú de que cese el movimiento: esto es, siendo la friccion igual á la potencia $\theta fen.\Sigma$, sea esta compuesta como se quiera. En el segundo caso, la fuerza de las escabrosidades y obstáculo es menor que la máxima fuerza de percusion ó friccion: con que el paralelepípedo vencerá á aquella, tomando carrera, y continuando siempre con ella quan-

quando fuere $\alpha sen.\Sigma >$, ó $= \pi$, y llegando á parar quando fuere $\alpha sen.\Sigma < \pi$, como se demonstró (*Cor.* 3. *y* 4. *Prop.*39.) quando se supuso la fuerza de percusion en este ultimo caso de friccion constante.

PROPOSICION 50.

Hallar la fuerza ó resistencia que tienen entre sí el obstáculo y las escabrosidades.

La fuerza de percusion es (*Proposicion* 42.) $\pi = \frac{HH}{HI+HI}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(X+Z)}{A+B}\right)$. Colóquese en esta expresion $B = \infty$, y $V = o$ por hallarse el plano BE inmovil: $\alpha = \alpha Cos.\Sigma$ por la potencia que se dirige segun AH; y en lugar de U solo, substitúyase $U Cos.\Sigma$ por la velocidad que queda segun AH, y se tendrá la fuerza de percusion que sobre la base CF padece el paralelepípedo $\pi = \frac{HH}{HI+HI}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2+\alpha sen.\Sigma(X+Z)\right)$. Llamando ahora la amplitud del obstáculo, y de las escabrosidades h: la impresion que sobre estos se hiciere i, y la fuerza de percusion que padecieren φ, será esta (*Prop.*42.) $= \frac{Dhih}{hi+hi}$: y siendo por lo mismo $\pi = \frac{DHIH}{HI+HI}$, tendremos esta analogia $\frac{HIH}{HI+HI} : \frac{hih}{hi+hi} = \frac{HH}{HI+HI}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2+\alpha Cos.\Sigma(X+Z)\right) : \varphi$: que da la percusion, fuerza, ó resistencia que tienen en sí el obstáculo y escabrosidades $\varphi = \frac{i(hh)}{I(hi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2+\alpha Cos.\Sigma(X+Z)\right)$.

Escolio.

En esta equacion, como se dixo (*Esc. Prop.* 42.) solo hay las h y h variables, las demas cantidades son las máximas: de suerte, que substituyendo ó considerando las h y h por las máximas amplitudes, tambien será φ la máxima.

Corolario.

Esta es, pues, la friccion que debe vencer la potencia $\theta sen.\Sigma$ para poner en carrera el paralelepípedo: pues habiendo vencido la máxima resistencia, y no variando ya la amplitud h del obstáculo y escobrisidades, queda tambien constante la resistencia, y sigue el paralelepípedo con la velocidad que le queda al tiempo de vencer la friccion, que será como la primitiva para seguir su curso baxo las reglas establecidas (*Prop.* 39.), puesto que esta friccion ó percusion permanece constante.

PROPOSICION 51.

Hallar la fuerza de percusion que puede producir, ó produce la potencia $\alpha sen.\Sigma$.

Siendo la velocidad con que se dirige el paralelepípedo segun CF $= U sen.\Sigma$: la potencia que le anima segun la misma direccion $\alpha sen.\Sigma$: las profundidades máximas de las impresiones x y z; y h y i las amplitudes y magnitudes de las mismas impresiones á qualquiera instante del choque: colocando estos valores en el de la percusion (*Prop.*42.) con $B = \infty$, y y $V = o$, y llamando Φ la fuerza de percusion que puede producir la potencia $\alpha sen.\Sigma$, será $\Phi = \frac{hh}{hi+hi}\left(\frac{1}{2}AU^2 sen.\Sigma^2+\alpha sen.\Sigma(x+z)\right)$. Fig. 38.

Corolario I.

Siendo, pues, $\Phi < \varphi$, el paralelepípedo no podrá tomar carrera; solo llegará á formar sobre el obstáculo y escabrosidades su máxîma impresion i, volviendo despues atras á causa de la elasticidad con velocidad negativa, hasta que siendo tambien esta cero, vuelva el paralelepípedo á tomar la positiva, y vaya asi continuando con repetidas oscilaciones, que deben disminuir continuamente al paso que vaya disminuyendo la elasticidad, y por consiguiente ha de llegar el caso en que quede parado el paralelepípedo, segun se dixo (*Esc. Def.* 45.).

Corolario 2.

Al contrario, si fuere $\Phi > \varphi$, el paralelepípedo tomará carrera, y continuará en ella sin límite si fuere $\theta sen.\Sigma =$, ó $> \varphi$.

Corolario 3.

El termino en que el paralelepípedo, dexando ya de sostenerse sobre el plano sin correr, querrá determinarse á la carrera, será aquel en que sea $\Phi = \varphi$, ó $\frac{i(bh)}{I(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2 + \alpha Cos.\Sigma(X+Z)\right) = ----$

$\frac{bh}{bi+hi}\left(\frac{1}{2}AU^2 sen.\Sigma^2 + \alpha sen.\Sigma(x+z)\right)$: que partiendo por $\frac{i(bh)}{bi+hi}$ queda $\frac{1}{I}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2 + \alpha Cos.\Sigma(X+Z)\right) -$

$= \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}AU^2 sen.\Sigma^2 + \alpha sen.\Sigma(x+z)\right)$.

Co-

Corolario 4.

Habiendose desvanecido en esta equacion las variables b y h, se sigue que á qualquier instante del choque se tendrá la igualacion de las dos fuerzas Φ y φ, y por consiguiente el efecto que se propone.

Corolario 5.

Si fuere $U = 0$, quedará $\frac{\alpha Cos.\Sigma(X+Z)}{I} = -$ $\frac{\alpha sen.\Sigma(x+z)}{i}$; pero por razon de la semejanza de las impresiones hechas por los mismos cuerpos es $\frac{X+Z}{I}$ á $\frac{x+z}{i}$ como $\frac{1}{H}$ á $\frac{1}{h}$: con que substituyendo estos valores, será $\alpha sen.\Sigma = \frac{h\alpha Cos.\Sigma}{H}$: esto es, la potencia $\alpha Cos.\Sigma$, que impele al paralelepípedo perpendicularmente sobre el plano, á la potencia $\alpha sen.\Sigma$, que vence la friccion, como la amplitud H de la impresion, á la amplitud b del obstáculo y de las escabrosidades.

Corolario 6.

Segun fuere mayor el número y magnitud de las escabrosidades, mayor necesita ser la potencia $\theta sen.\Sigma$ que ha de vencer la friccion; y al contrario.

Corolario 7.

El número de las escabrosidades, siguiendo una regularidad, podemos hacerle proporcional á la amplitud H de la impresion, particularmente en cuerpos

 no

no muy elásticos, será, pues, en este caso la amplitud de las escabrosidades $=nH$, denotando n un número qualquiera que dependa de la magnitud de las mismas escabrosidades. Suponiendo, á mas de esto, que denote l la longitud de la impresion, y k su ancho, será $H=lk$, lo que da $h=nlk+kX$, denotando kX la amplitud del obstáculo: con que tendremos $\alpha Cos.\Sigma : \alpha sen.\Sigma = lk : nlk+kX = l : nl+X$, ó $\alpha sen.\Sigma = \frac{(nl+X)\alpha Cos.\Sigma}{l}$.

Corolario 8.

Quanto mas larga sea la impresion, menor necesita ser la potencia $\alpha sen.\Sigma$ que ha de vencer la friccion.

Corolario 9.

Si se suponen los cuerpos sumamente lisos, y por tanto se prescinde de las escabrosidades, será $n=0$, y quedará $\alpha Cos.\Sigma : \alpha sen.\Sigma = l : X$: ó $\alpha sen.\Sigma = \frac{X\alpha Cos.\Sigma}{l}$.

Escolio 1.

De la equacion $\alpha sen.\Sigma = \frac{h\alpha Cos.\Sigma}{H}$: ó partiendo por α, $sen.\Sigma = \frac{hCos.\Sigma}{H}$, se puede deducir por las experiencias el valor de $sen.\Sigma$, ú de h; pero como es mas dificil en la práctica medir el valor de h, lo que no sucede con el de Σ, que con gran facilidad se puede notar, se deducirá aquel por la equacion $h = \frac{Hsen.\Sigma}{Cos.\Sigma}$. No hay sino ir elevando el plano poco á poco y con mucha suavidad desde su situacion horizontal, hasta que el paralelepípedo tome su carrera: notar el ángulo de esta ultima situacion que será el valor de Σ, de que depende el de $h = \frac{Hsen.\Sigma}{Cos.\Sigma}$. El valor de H, siendo el de la amplitud de la impresion, se puede medir á muy corta diferencia. De este modo se puede hallar el valor de h, no solo correspondiente á varias potencias, sino tambien á varias dimensiones de largos y anchos del paralelepípedo, y formar tablas de ellas, que servirán de mucho en la práctica. Si entre el plano y el paralelepípedo se coloca otro cuerpo blando, de suerte que, llenando este la impresion, impida que el paralelepípedo toque al plano, tanto el obstáculo, como las escabrosidades que hubiere que vencer, se formarán del cuerpo blando, cuya resistencia es mucho menor, y por consiguiente menor potencia se necesita para vencerla. Es conseqüencia que la experiencia acredita diariamente: y con tanta mas propiedad, quanto es preciso variar el cuerpo blando que se debe colocar entre los dos chocados, segun la especie y variedad de estos. Todo procede de que el cuerpo blando solo debe impedir el contacto de los dos chocados: para los ligeros y lisos el aceyte basta; pero para los muy pesados y escabrosos es preciso grasa ó sebo, y aun este se ha de templar segun los varios cuerpos.

Corolario 10.

Puede proceder la accion de dos potencias, de que resulta un movimiento compuesto en el paralelepípedo, una perpendicular al plano, y otra paralela á este. Que perpendicularmente al plano actue la potencia α, con la velocidad primitiva U: y paralelamente la potencia θ, con la velocidad primitiva V. Substitúyase, pues, α en lugar de $\alpha Cos.\Sigma$ y $\Sigma=0$ en en la equacion (*Proposicion* 50.), y quedará $\varphi = \frac{i(bh)}{I(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)\right)$. Substitúyase asimismo en la equacion (*Propos.* 51.) *sen.* $\Sigma = 1$, y V por U, y quedará $\Phi = \frac{bh}{bi+hi}\left(\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)\right)$.

Corolario 11.

El paralelepípedo estará, pues, á punto de tomar su carrera quando sea $\frac{1}{I}\left(\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)\right)$: ó por ser $I : i = H(X+Z) : b(x+z)$ quando sea $\frac{\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)}{H(X+Z)} = \frac{\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)}{b(x+z)}$.

Corolario 12.

Si fueren $U = 0$, y $V = 0$, quedará $\frac{\alpha}{H} = \frac{\theta}{b}$, ó $\theta = \frac{b\alpha}{H}$: esto es, la potencia α, que impele al paralelepípedo perpendicularmente sobre el plano, á la potencia θ que vence la friccion, como la amplitud H de la impresion, á la amplitud b del obstáculo y de las escabrosidades: lo mismo que se deduxo antes (*Cor.* 5).

Corolario 13.

Si solo fuere $U = 0$, quedará $\frac{\alpha}{H} = \frac{\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+z)}{b(x+z)}$ ó $\frac{b\alpha}{H} - \frac{AV^2}{2(x+z)} = \theta$: donde se ve quanto menor necesita ser en este caso la potencia θ, que ha de vencer la friccion.

Co-

Corolario 14.

Si fuere, pues, $\frac{b\alpha}{H} - \frac{AV^2}{2(x+z)} = 0$, tambien será $\theta = 0$: esto es, el paralelepípedo estará para vencer la friccion sin necesidad de potencia que le impela paralelamente al plano, y sí solo por la accion que produce la velocidad V.

Corolario 15.

Para que quede vencida la friccion, y el paralelepípedo tome su carrera, no se necesita, pues, sino que sea $\frac{b\alpha}{H} < \frac{AV^2}{2(x+z)} + \theta$.

Corolario 16.

Si el plano estubiere horizontal, y fuere α la gravedad de la masa A, se necesitará, para vencer la friccion, que sea $\frac{b}{H} < \frac{V^2}{64(x+z)} + \frac{\theta}{\alpha}$; ó si fuere $\theta = 0$, que sea $\frac{b}{H} < \frac{V^2}{64(x+z)}$: ó poniendo e por la altura de donde debiera caer el cuerpo para obtener la velocidad V, que sea $\frac{b}{H} < \frac{e}{x+z}$: ó $\frac{b(x+z)}{H} < e$.

Corolario 17.

La cantidad $b(x+z)$, siendo sumamente corta respecto de H en los cuerpos duros, manifiesta que cortisima velocidad primitiva necesita el paralelepípedo para vencer la friccion, y tomar su carrera.

Co-

Corolario 18.

Si fuere $V = o$, en el mismo caso de la gravedad, se necesitará para que el paralelepípedo venza la friccion, que sea $\frac{b}{H} < \frac{\theta}{\alpha}$: ó que la razon de la gravedad, á la potencia θ que ha de vencer la friccion, sea menor que $\frac{H}{h}$.

Escolio 2.

Si se exâminan los Autores que hasta ahora han tratado este asunto, se verá, que generalmente se ha creido, y aun se cree, la friccion solo proporcional á la potencia que impele el paralelepípedo perpendicularmente al plano; abstraccion hecha de las escabrosidades. Todo se ha fundado sobre algunas experiencias practicadas por varios, particularmente por *Mr. Amontons*, de la *Real Academia de las Ciencias de Paris*, y por *Mr. Bilfinger*. Aquel dice haber hallado siempre la potencia θ, que está á punto de vencer la friccion, igual á la tercera parte de α, ú de la potencia que impele al paralelepípedo perpendicularmente al plano: esto es, $\theta = \frac{1}{3}\alpha$; pero el segundo, solo hace $\theta = \frac{1}{4}\alpha$. Esta variedad debia poner en duda que fuese la friccion solo proporcional á la potencia α; pero considerando que las escabrosidades mayores ó menores de los planos de que se valieron para hacer las experiencias, podian ser la causa de tales diferencias, facilmente se persuadieron á ello: de suerte, que estas determinaciones parece que se establecieron abstraccion hecha de las escabrosidades. Pero baxo de esta suposicion no se acomoda la idea con nuestras fórmulas: segun ellas es (*Cor.* 9.) $\theta = \frac{X\alpha}{l}$: con que, segun *Amontons*, debe ser siempre $\frac{X}{l} = \frac{1}{3}$; ó segun *Bilfinger* $\frac{X}{l} = \frac{1}{4}$: esto es, la profundidad de la impresion debe ser siempre, segun el primer Autor, la tercera parte de la longitud del paralelepípedo; y segun el segundo la quarta parte: absurdo que resalta sin necesidad de manifestarle mucho. No debemos dudar, sin embargo, de las experiencias practicadas por estos dos célebres Autores: todo puede convenir si no se estendieron á hacerlas con varios cuerpos de igual gravedad, de igual amplitud en sus bases; pero de distintas dimensiones en largo y ancho, y de distintas durezas. Una experiencia muy tribial acredita este recelo. Si un cuchillo puesto con su corte sobre un plano, apoyando sobre él, se quiere hacer correr perpendicularmente á su plano, mas breve se inclina que corre, y cuesta dificultad mantenerle derecho; pero si se impele directamente segun su plano, á muy poco esfuerzo corre: lo que manifiesta claramente quanto menor es la friccion en este segundo caso que en el primero. Al contrario, para acercarnos á los dictamenes de los dos citados Autores, se debe creer que las escabrosidades permanecen por muy lisos y tersos que se pongan los cuerpos, y que el obstáculo, particularmente en cuerpos duros, se hace insensible, ó casi despreciable. En este caso será (*Corol.* 12.) $\theta = \frac{b\alpha}{H}$: ó substituyendo (*Cor.* 7.) $H = lk$, y $b = nlk + kX$, será $\theta = \frac{\alpha k(nl + X)}{lk} = \frac{\alpha(nl + X)}{l}$: de suerte, que despreciando la cantidad X, que procede del obstáculo, como infinitamente chica respecto de la nl, que corresponde á las escabrosidades, quedará $\theta = n\alpha$: esto es, segun *Amontons*, $n = \frac{1}{3}$; y segun *Bilfinger*, $n = \frac{1}{4}$: cuya diferencia es entonces regular, puesto que

que n expresó la magnitud de las escabrosidades. Esto prueda lo mucho que conviene nuestra theórica con las experiencias; pero si corresponde suponer el obstáculo como nulo en los cuerpos muy duros, no se puede hacer esta suposicion en los blandos, ó no muy duros: en estos casos, al contrario, mas bien se deben suponer las escabrosidades como nulas, respecto del obstáculo, y por consiguiente menos resistirá el paralelepípedo por su punta que por su lado mayor.

De los efectos despues de estar vencida la friccion.

PROPOSICION 52.

Hallar la relacion entre la velocidad u, y el espacio corrido por el cuerpo A.

Ya se tiene repetido (*Cor.2. Prop.*51.) que siempre que sea $\Phi > \varphi$, el paralelepípedo tomará su carrera: que si al mismo tiempo (*Esc. Def.*45.) la potencia θ, ó $\alpha sen.\Sigma$ que le anima paralelamente al plano fuese mayor que la fuerza que tubiere el obstáculo y las escabrosidades, continuará en ella sin límite: y que en todo el curso la friccion será constante, á causa que no aumenta la amplitud, ni del obstáculo, ni de las escabrosidades. En esta inteligencia, la theórica de la velocidad u que corresponde es (*Corol.* 1. *Propos.*34.) $u = \left(U^2 + \frac{\alpha(x+z)}{\frac{1}{2}A} - \frac{\int DHdx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó substituyendo θ por α, y h por H, resultará $u =$ --------- $\left(U^2 + \frac{2\theta(x+z)}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; pero siendo en este caso $z = 0$, respecto de x, quedará $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$: expresando U la velocidad primitiva que tuvo el cuerpo al vencer la friccion.

Corolario 1.

Sí fuere una sola ó unica potencia α la que impeliese al paralelepípedo, será preciso substituir $\alpha sen.\Sigma$ por θ, y quedará $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x sen.\Sigma}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 2.

Como de suponer $z = 0$, se deduce que ha de ser tambien D como infinito respecto de D, tendremos (*Prop.*27.) la fuerza del obstáculo y de las escabrosidades $\varphi = \frac{DhDh}{Dh+Dh} = Dh$: con que podremos substituir φ por Dh, y será tambien $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; ó en el caso de ser única la potencia α que impele al paralelepípedo $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x sen.\Sigma}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 3.

Para que llegue á pararse el paralelepípedo en el curso de su carrera, ha de ser $u = 0$: luego para este caso será $U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A} = 0$; ó $U^2 = \frac{2x}{A}(Dh - \theta) = \frac{2x}{A}(\varphi - \theta)$: donde se ve claramente, que para que pueda pararse el paralelepípedo, es preciso que sea $\varphi = Dh > \theta$; sin esto sería $\varphi - \theta$ negativo, y por consiguiente U imaginario, lo que es contra lo supuesto: ó $\varphi - \theta = 0$, y por consiguiente, asimismo, $U = 0$, lo que tambien es contra lo supuesto.

Corolario 4.

El punto en que parará el paralelepípedo será, pues, aquel en que sea $x = \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)} = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)}$.

PROPOSICION 53.

Hallar la relacion entre el espacio corrido por el cuerpo A, y su velocidad.

La equacion que á este caso corresponde es (*Cor.* 1. *Prop.* 39.) $x+z = \frac{\frac{1}{2}A(U^2-u^2)}{\pi-\alpha}$: que se reduce, substituyendo $\pi=\varphi$, $\alpha=\theta$, y $z=0$, á $x = \frac{A(U^2-u^2)}{2(\varphi-\theta)} = \frac{A(U^2-u^2)}{2(Dh-\theta)}$; y si fuere $\theta > \phi$, $x = \frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-\varphi)} = \frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-Dh)}$.

Corolario.

En el caso de haber máxîmo espacio x, será $u=0$: luego quedará este $x = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)} = \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)}$, como resultó antes (*Cor.* 4. *Prop.* 52.).

PROPOSICION 54.

Hallar la relacion entre el tiempo t, que emplea el cuerpo A en su carrera, y su espacio corrido.

La equacion (*Prop.* 29.) $dt = \frac{dx+dz}{u-v}$ se reduce, en este caso de ser $z=0$, y $v=0$, á $dt = \frac{dx}{u}$. Subs-

substitúyase en ella el valor de u hallado (*Prop.* 52.), y tendremos $dt = \frac{dx}{\left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$: é integrando $t = \frac{(A^2U^2+2Ax(\theta-Dh))^{\frac{1}{2}}-AU}{\theta-Dh} = \frac{(A^2U^2+2Ax(\theta-\varphi))^{\frac{1}{2}}-AU}{\theta-\varphi}$.

Corolario.

En el caso que haya máxîmo espacio corrido, en que es $Dh > \theta$, ó $\varphi > \theta$, hallamos (*Cor.* 4. *Prop.* 52. *y Cor. Prop.* 53.) $x = \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)} = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)}$: cuyo valor substituido, quedará el tiempo en que el cuerpo corre su máxîmo espacio, $t = \frac{AU}{Dh-\theta} = \frac{AU}{\varphi-\theta}$.

PROPOSICION 55.

Hallar la relacion entre el espacio x, que correrá el cuerpo A, y el tiempo t.

Multiplicando la equacion precedente $t = \frac{(A^2U^2+2Ax(\theta-\varphi))^{\frac{1}{2}}-AU}{\theta-\varphi}$ por $\theta-\varphi$, añadiendo á ambas partes AU, y quadrando, resulta $A^2U^2+2AUt(\theta-\varphi)+t^2(\theta-\varphi)^2 = A^2U^2+2Ax(\theta-\varphi)$: ó substrayendo de ambas partes A^2U^2, y partiendo por $2A(\theta-\varphi)$, $x = Ut + \frac{t^2(\theta-\varphi)}{2A} = Ut + \frac{t^2(\theta-Dh)}{2A}$.

PROPOSICION 56.

Hallar el tiempo t que emplea el cuerpo A en la carrera, por su relacion con la velocidad.

La equacion que á este caso corresponde es (*Cor.* 2. *Prop.* 45.) $t = \frac{A(u-U)}{\alpha-\pi}$: substituyendo θ por α, y φ por π, queda $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$.

Corolario.

En el caso que haya máxîma impresion, será $t = \frac{AU}{\varphi-\theta}$.

PROPOSICION 57.

Hallar la velocidad que tendrá el cuerpo A, por su relacion con el tiempo corrido.

Multiplicando la equacion $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$ por $\theta-\varphi$, partiendo por A, y restando de una y otra parte U, queda $u = U + \frac{t(\theta-\varphi)}{A}$.

Corolario.

Que el paralelepípedo A por sola la accion de su gravedad α descienda por el plano. Que sea n un número qualquiera, de suerte que sea $\alpha Sen.\Sigma-\varphi = \theta-\varphi = n\alpha$: y tendremos $u = U \pm \frac{n\alpha t}{A}$; pero siendo (*Cor.* 1. *Prin.* 3.) $A = \frac{1}{32}\alpha$, quedará $u = U \pm 32nt$.

Es-

Escolio.

Leonardo Eulero, en una de las *Memorias de la Academia Real de Berlin* del año 1748, sobre el méthodo en que se puede concebir la friccion, concluye, que es esta menor en el caso del movimiento, que en el del equilibrio; lo que es enteramente contra nuestras conclusiones. Para satisfacer esta diferencia bastará decir, que aquel Docto Autor no insistió en que consistiese la friccion en la theórica que expone; solo dice que puede servir para concebir sus efectos. Supone que procede unicamente de las escabrosidades del plano y paralelepípedo; y en ninguna manera del obstáculo FI, que ya vimos es preciso resulte en virtud de la potencia perpendicular $\alpha Cos.\Sigma$ que actua sobre el mismo paralelepípedo. Supone tambien que las escabrosidades sean pequeños planos inclinados ú dientes, todos semejantes para que puedan endentarse ó ajustarse perfectamente los del plano con los del paralelepípedo. Con esto bien es claro, que siendo la potencia que actua sobre el paralelepípedo de suficiente magnitud, obligará á este, ó á sus pequeños dientes, á que suban por los del plano, hasta que estriben vértices con vértices: pasado este punto caerán á los dientes siguientes cada uno á su correspondiente; despues volverán á subir, y continuando así, se hará la friccion por saltos de unos dientes á otros: de suerte que á la primera subida se experimenta la friccion total; y siendo las caidas una accion opuesta ó negativa, se disminuye la primera friccion, que fue la del acto del equilibrio. En esta idea, que por facil se conciben claramente los efectos que deben redundar, se perciben tambien los inconvenientes. Los dientes no pueden absolutamente llegar á quedar vértice con vértice, ni aun muy inmediatos á este estado,

sin

sin haber precedido ó formádose una impresion recíproca en los mismos dientes, y por consiguiente nuevo óbice que vencer, sin que jamas pueda llegar el caso de que este quede nulo, ni de que haya caida, y por lo mismo, que tampoco disminuya la friccion por el movimiento. Una experiencia, dice el mismo Docto Autor, que favorece su determinacion, y es: que no puede conseguirse que el paralelepípedo se mueva sobre el plano con mucha suavidad por mas que se cuide de dar á este sola la precisa inclinacion para que corra: dice, que una vez que se ponga en movimiento, acelera este con gran prontitud, y que por consiguiente es preciso que la friccion disminuya; pero vease que ninguna experiencia conviene mejor con nuestra theórica.

La equacion $u = U \pm 32nt$ es la que propriamente corresponde á este caso: si substituimos en ella $n = \frac{1}{32}$, quedará $u = U \pm t$; ó si se quiere la mayor suavidad posible en el acto de ir levantando el plano, pondremos $U = 0$, y quedará sin embargo aún $u = t$: esto es, la velocidad u que tomará el cuerpo A, quando se cuide de no darle sino la precisa inclinacion para que corra, será aún de tantos pies por segundo, como segundos contenga el tiempo t: de suerte, que al primer segundo de tiempo, ya correrá con la velocidad de un pie por segundo: á los dos segundos de tiempo, con la velocidad de dos pies por segundo, y asi en adelante. Solo falta manifestar despues de esto, que el suponer $n = \frac{1}{32}$ es hacer muy corto movimiento en el plano BE, ó aumentar muy
Fig. 37. poco el ángulo BEL $= \Sigma$, quando este, ó su inclinacion es la que ya tiene el cuerpo para estár al punto preciso de correr por el plano: en cuyo estado es $\alpha sen.\Sigma = \varphi$. Supongamos ahora que se aumente el án-

gulo de una diferencial $d\Sigma$, y que sea $\Sigma + d\Sigma$: el seno del ángulo BEL será igual $sen.\Sigma + d\Sigma Cos.\Sigma$, y el coseno $Cos.\Sigma - d\Sigma sen.\Sigma$. La potencia que anima al cuerpo paralelamente será en este segundo caso $\alpha sen.\Sigma + \alpha d\Sigma Cos.\Sigma$: esto es, mayor que la del primero, de $\alpha d\Sigma Cos.\Sigma$; y la que animará perpendicularmente $\alpha Cos.\Sigma - \alpha d\Sigma sen.\Sigma$. La potencia, que es capaz de vencer la friccion en este segundo caso, es (*Cor. 6. Prop. 51.*) $= \frac{h\alpha Cos.\Sigma}{H} - \frac{h\alpha d\Sigma sen.\Sigma}{H}$. La amplitud h es, como el ancho del paralelepípedo, multiplicado por la profundidad de la impresion: y siendo la primera cantidad constante, será h como la profundidad de la impresion: esto es, (*Cor. 10. Prop. 51.*) como la potencia $\alpha Cos.\Sigma - \alpha d\Sigma sen.\Sigma$: luego será la potencia, que es capaz de vencer la friccion en el segundo caso, como $\frac{a^2}{H}(Cos.\Sigma - d\Sigma sen.\Sigma)^2$, ó como $\frac{a^2}{H}(Cos.\Sigma^2 - 2d\Sigma Cos.\Sigma sen.\Sigma)$; y en el primero, en que es $d\Sigma = 0$, como $\frac{a^2}{H} Cos.\Sigma^2$. Aquella potencia será, pues, menor que esta, de $\frac{a^2}{H}.2d\Sigma Cos.\Sigma sen.\Sigma$: y la potencia primera total será, á esta diferencia, como $Cos.\Sigma^2$, á $2d\Sigma Cos.\Sigma sen.\Sigma$; pero la potencia primera total es $= \alpha sen.\Sigma$: luego la diferencia será $= \frac{2\alpha d\Sigma sen.\Sigma^2}{Cos.\Sigma}$. El aumento de la potencia que anima paralelamente es $= \alpha d\Sigma Cos.\Sigma$, y la disminucion de la que vence la friccion $= \frac{2\alpha d\Sigma sen.\Sigma^2}{Cos.\Sigma}$: luego será para el segundo caso $\alpha sen.\Sigma - \varphi = n\alpha = \alpha d\Sigma Cos.\Sigma + \frac{2\alpha d\Sigma sen.\Sigma^2}{Cos.\Sigma}$: ó $n = \frac{1}{32} = \frac{d\Sigma}{Cos.\Sigma}(1 + sen.\Sigma^2)$; ó substituyendo, segun *Mr. Bilfinger* $\frac{sen.\Sigma}{Cos.\Sigma} = \frac{1}{4}$, será

$\frac{1}{32}$

$\frac{1}{32} = \frac{d\Sigma(1+\frac{1}{17})}{4\sqrt{\frac{1}{17}}}$, y $d\Sigma = \frac{\sqrt{17}}{144}$. El radio siendo la unidad, es la circunferencia $= 3,14$, el grado $= \frac{3,14}{180}$; y el minuto $= \frac{3,14}{60.180}$: con que llamando m el número de minutos que vale $d\Sigma$, tendremos $\frac{3,14.m}{60.180} = \frac{\sqrt{17}}{144}$, y $m = \frac{75\sqrt{17}}{3,14}$: esto, es el número m de minutos á que corresponde el movimiento del plano es de $98\frac{1}{2}$: con que solo con aumentar la inclinacion del plano de $1^{\circ}\ 38\frac{1}{2}'$ mas que la que tiene quando se mantiene aún sin correr el cuerpo A, ya tomará este su carrera, aumentando su velocidad de suerte que sea á lo menos $u = t$: lo que prueba, como diximos, la conformidad de nuestra theórica con la práctica.

CAPITULO 9.

Del efecto de la friccion en las Máchinas simples.

DEFINICION 46.

SE llama Máchina todo instrumento que sirve para facilitar el movimiento de los cuerpos.

DEFINICION 47.

Dividense las máchinas en simples y compuestas. Estas son las que se componen de dos ó mas de aquellas. Las simples se reducen á la *Palanca*, el *Plano inclinado*, la *Cuña*, el *Tornillo*, el *Exe en peritróchio*, y el *Carrucho*, que en la Marina se llama *Motón*.

Escolio.

Ya se habló al fin del Cap. 4. de la Palanca. En esta no cabe friccion, por no tener parte alguna que se mueva insistiendo sobre superficie. Del plano inclinado se trató casi todo el Cap. 7, y nos ha servido de exemplo para determinar tambien la friccion; pero solo nos redugimos al caso en que el cuerpo A es impelido á descender: falta ahora resolver aquel en que asciende, y asimismo la rotacion que por la friccion puede resultar.

Del Plano inclinado.

DEFINICION 48.

Plano inclinado es aquel que no es paralelo ni perpendicular al horizonte: como si LE denota el horizonte, BE será el plano inclinado. Fig. 37.

Escolio.

En el cuerpo A, que insiste sobre el plano inclinado, concurre ya una potencia que le impele, que es la gravedad, y segun la direccion vertical AD. Por la accion de esta potencia, como ya tenemos dicho, el cuerpo puede solamente descender, no subir: para esto es precisa otra potencia que actue sobre él en la direccion EB, y no solo mayor que la $a sen. \Sigma$ que se dirige segun BE, sino mayor que esta potencia y la friccion juntas, puesto que ambas se oponen al movimiento del cuerpo segun EB. En el Capitulo precedente expresamos las potencias que han de vencer la friccion por $a sen, \Sigma.$, y por θ: aquella en el caso de no haber mas potencia que impela al cuerpo A, segun la direccion AD, que la α; y esta quando fuese la que resultare para mover el paralelepípedo segun BE, que es asimismo $\alpha sen.\Sigma$ en el primer caso: de suerte, que de qualquiera modo que sea, conociendo la resulta de la potencia ó potencias que actuaren segun BE, ó EB, y las que resultaren segun AH puestas en lugar de las que se colocaron en los exemplos de la friccion que debe vencerse, se tendrán resueltos los casos del movimiento del cuerpo A segun BE.

PROPOSICION 58.

Hallar la potencia necesaria para vencer la friccion, y hacer subir un paralelepípedo por un plano inclinado.

Ya vimos (*Cor.* 5. *Prop.* 51.) que para vencer la friccion en el caso del plano inclinado, siendo $U = 0$, es preciso que sea $\alpha sen.\Sigma = \frac{\alpha b Cos.\Sigma}{H}$, denotando Σ el ángulo HAD, ó BEL: α la única potencia que anima el paralelepípedo segun AD: $\alpha sen.\Sigma$ la que le anima segun BE; y $\alpha Cos.\Sigma$ la que le anima segun AH. Que una potencia θ impela ahora al paralelepípedo segun EB, y tendremos $\theta - \alpha sen.\Sigma$ por la potencia resultante segun EB, que substituida, en lugar de $\alpha sen.\Sigma$, en la equacion antecedente, tendremos para vencer la friccion, y caso de querer ya subir el paralelepípedo por el plano $\theta - \alpha sen.\Sigma = \frac{\alpha b Cos.\Sigma}{H}$: que da $\theta = \frac{\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$.

Corolario 1.

Si fuere $sen.\Sigma + \frac{b}{H} Cos.\Sigma < 1$, tambien será $\theta < \alpha$, y

por consiguiente no será necesaria tanta fuerza para subir el paralelepípedo por el plano, como para subirle verticalmante: de suerte, que el plano inclinado facilitará la operacion, y por lo mismo se numera entre las máchinas.

Corolario 2.

Si fuere $sen.\Sigma = 0$: ó lo que es lo mismo, si se hallare el plano horizontal, quedará $\theta = \frac{\alpha b}{H}$, ó $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{b}{H}$: de suerte, que quanto menor fuere b respecto de H, tanto menor será θ respecto de α.

Corolario 3.

Como se puede hacer b casi infinitamente menor que H, ya sea por disminuir la magnitud y número de las escabrosidades, ya por interponer otro cuerpo estraño entre el plano y paralelepípedo, la potencia θ necesaria para mover este horizontalmente puede ser casi infinitamente menor que α; pero nunca cero, á menos que no sea $b = 0$: lo que en la práctica es imposible.

Corolario 4.

Si fuere $sen.\Sigma = 1$: ó lo que es lo mismo, si se hallare el plano vertical, ó se hubiere de levantar el paralelepípedo sin la ayuda del plano inclinado, quedará $\theta = \alpha$: de suerte, que siempre es precisa una potencia igual á la gravedad del peso que se hubiere de levantar.

Corolario 5.

Si substituimos en la fórmula $\theta = \frac{\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$

los

los valores $H = lk$, $b = nlk + kX$ hallados (*Cor.* 7. *Prop.* 51.), resultará $\theta = \alpha(\mathit{sen}.\Sigma + n\mathit{Cof}.\Sigma + \frac{X}{l}\mathit{Cof}.\Sigma)$: denotando n un número qualquiera, que dependa de la magnitud de las escabrosidades: l la longitud del paralelepípedo, y X la profundidad de la impresion que este haga en el plano.

Corolario 6.

Si fuere $X = 0$: ó lo que es lo mismo, si el plano fuere muy duro, de suerte que en él no se haga sensible impresion, quedará $\theta = \alpha(\mathit{sen}.\Sigma + n\mathit{Cof}.\Sigma)$.

Corolario 7.

En el caso de la mayor θ, es $d\theta = \text{------}$ $\alpha(d\Sigma\mathit{Cof}.\Sigma - nd\Sigma\mathit{sen}.\Sigma) = 0$; ó $\mathit{sen}.\Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$: donde se percibe lo estraño de no ser la mayor fuerza la que se empleare levantando el peso verticalmente, sino aquella en que se tirare por un plano inclinado en que sea $\mathit{sen}.\Sigma = \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 8.

Si este valor se substituye en $\theta = \alpha(\mathit{sen}.\Sigma + n\mathit{Cof}.\Sigma)$, será la mayor $\theta = \alpha\sqrt{1+n^2}$: mayor que α segun fuere mayor la n, ó las escabrosidades.

Corolario 9.

La fórmula no dá la menor θ sino siendo $\mathit{sen}.\Sigma$ negativo: de suerte, que es menor la θ al paso que es menor $\mathit{sen}.\Sigma$; y pasando despues este seno á ser negativo, es $\alpha(-\mathit{sen}.\Sigma + n\sqrt{1-S^2}) = 0$, ó $-\mathit{sen}.\Sigma = n\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, quando es $\theta = 0$.

PROPOSICION 59.

Hallar la relacion entre la potencia λ y la velocidad u con que quiera subirse el paralelepípedo por el plano.

En lo demonstrado (*Cor.* 1. *Propos.* 52.) se halló $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x\mathit{sen}.\Sigma}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; denotando $\alpha\mathit{sen}.\Sigma$ la potencia que anima al paralelepípedo paralelamente al plano. Substituyendo ahora en su lugar $\lambda - \alpha\mathit{sen}.\Sigma$, será $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha\mathit{sen}.\Sigma)}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$: expresando U la velocidad que adquirió el paralelepípedo al punto de vencer la fuerza φ del obstáculo y de las escabrosidades.

Corolario 1.

Esta fuerza φ se halló (*Cor.* 2. *Pr.* 52.) $= Db$: luego tambien será $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha\mathit{sen}.\Sigma)}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 2.

Si fuere la velocidad U tan corta que se pudiere, sin error sensible, establecer $U = 0$, quedará $u = \left(\frac{2x}{A}(\lambda - \alpha\mathit{sen}.\Sigma - Db)\right)^{\frac{1}{2}}$: ó $u = \left(\frac{2x}{A}(\lambda - \alpha\mathit{sen}.\Sigma - \varphi)\right)^{\frac{1}{2}}$: ó porque en este caso es (*Cor.* 5. *Pro.* 51.) $\varphi = \frac{b}{H}\mathit{Cof}.\pi$,

será

será $u = \left(\frac{2x}{A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \frac{h}{H} Cos.\Sigma)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corolario 3.

Quadrando estas igualaciones, y ordenando, se tendrá $\lambda = \alpha sen.\Sigma + Db + \frac{Au^2}{2x} = \alpha sen\Sigma + \varphi + \frac{Au^2}{2x} = \alpha sen.\Sigma + \frac{b}{H} Cos.\Sigma + \frac{Au^2}{2x}$.

PROPOSICION 60.

Hallar el espacio subido por el paralelepípedo, por su relacion con la velocidad.

En lo demonstrado (*Propos.* 53.) se halló $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\theta - Db)}$, expresando θ la potencia que anima el paralelepípedo paralelamente al plano. Substituyendo ahora en su lugar $\lambda - \alpha sen.\Sigma$, será $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db)}$; ó $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \varphi)}$.

Corolario.

Si fuere la velocidad U tan corta que se pudiere, sin error sensible, establecer $U = o$, quedará $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db)}$; ó $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \phi)} = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha sen\Sigma - \frac{b}{H} Cos.\Sigma)}$.

PRO-

PROPOSICION 61.

Hallar el espacio subido por el paralelepípedo por su relacion con el tiempo en que le subió.

En lo demonstrado (*Prop.* 55.) se halló $x = Ut + \frac{t^2(\theta - Db)}{2A}$: expresando θ la potencia que anima el paralelepípedo paralelamente al plano. Substituyendo ahora en su lugar $\lambda - \alpha sen.\Sigma$, será $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db)}{2A}$: ó $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \varphi)}{2A}$.

Corolario.

Si fuere la velocidad U tan corta que se pudiere, sin error sensible, establecer $U = o$, quedará $x = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db) = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \varphi) = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - \frac{b}{H} Cos.\Sigma)$.

PROPOSICION 62.

Hallar la rotacion que deben tomar los cuerpos que, parados, insisten sobre el plano inclinado.

Qualesquiera que sean las potencias que animen al cuerpo A, que solo sobre un punto C insiste sobre el plano inclinado FG, pueden descomponerse en dos, una que actue paralelamente al plano, y la otra perpendicularmente: ambas se exercerán por reaccion en el punto C, y á las distancias AH, CH del centro de gravedad A del cuerpo. La gravedad α que actua segun la vertical AD se descompondrá en las dos $\alpha sen.\Sigma$, y $\alpha Cos.\Sigma$: y si á la primera se agregare otra potencia λ positiva ó negativamente que actue en el centro de gravedad, á las dos juntas $\alpha sen.\Sigma \pm \lambda$ equivaldrá la reac- Fig. 34. 35.

reaccion de ellas, que es la friccion. La diferencial del ángulo giratorio que producirán, será, pues, (*Pr.* 18. *y sus Cor.*) $= \frac{dt \int dt(\alpha\, sen.\Sigma \pm \lambda)AH \pm dt \int dt \alpha\, Cos.\Sigma.CH}{S}$: mas, en el segundo término quando la perpendicular AH cae mas abaxo que el apoyo C; y menos, quando cae mas arriba: de suerte, que siendo esta cantidad positiva girará el cuerpo hacia la parte de abaxo del apoyo C; y al contrario si fuere negativa.

Corolario 1.

Que sea $\lambda = n\alpha\, sen.\Sigma$, denotando n un número qualquiera mayor ó menor que la unidad: y substituyendo este valor en la expresion del ángulo giratorio, quedará esta $= \frac{dt \int dt(1 \pm n)\alpha\, sen.\Sigma.AH \pm dt \int dt.\alpha\, Cos.\Sigma.CH}{S}$.

Corolario 2.

Siendo $sen.\Sigma : Cos.\Sigma = DH : AH$, ó $AH\, sen.\Sigma = DH\, Cos.\Sigma$: substituyendo este valor en la ultima expresion del ángulo giratorio, quedará esta $= \frac{dt \int \alpha dt\, Cos.\Sigma(DH(1 \pm n) \pm CH)}{S} = \frac{dt \int \alpha dt\, Cos\Sigma(DC \pm n.DH)}{S}$.

Corolario 3.

Si desde el principio de la accion fuere, pues, $DC - n.DH = 0$; ó $\alpha\, sen.\Sigma : n\alpha\, sen.\Sigma = \lambda = DH : DC$, el cuerpo no girará.

Corolario 4.

Si en el cuerpo no actuare mas potencia que la gravedad, será $n = 0$: con que quedará la expresion del ángulo giratorio $= \frac{dt \int \alpha dt\, Cos.\Sigma.DC}{S}$.

Co-

Corolario 5.

Si desde el principio de la accion fuere $DC = 0$, el cuerpo no girará; pero siendo DC de algun valor, ó segun se expresa generalmente en la mechánica, siempre que la vertical AD, que pasa por el centro de gravedad A, cayere fuera del apoyo C, el cuerpo girará.

PROPOSICION 63.

Hallar la rotacion que deben tomar los cuerpos, que insisten sobre el plano inclinado, quando el apoyo hubiere vencido la friccion, y estubiere ya en movimiento.

La fuerza ó resistencia que en sí tienen el obstáculo, y las escabrosidades es (*Propos.* 50.) $\varphi = \frac{i(bh)}{I(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2 + \alpha\, Cos.\Sigma(X+Z)\right)$, y se dirige segun CH paralelamente al plano GF, y á la distancia AH del centro de gravedad del cuerpo A. El ángulo giratorio será, pues, (*Prop.* 18. *y sus Corol.*) $= \frac{dt}{S}\int \frac{i(bh)dt AH}{I(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2 + \alpha\, Cos.\pi(x+z)\right) \pm \frac{dt}{S}\int \alpha dt\, Cos.\Sigma.CH$.

Corolario 1.

La fuerza, ó resistencia $\varphi = \frac{i(bh)}{I(bi+hi)}\left(\frac{1}{2}AU^2 Cos.\Sigma^2 + \alpha\, Cos.\Sigma(X+Z)\right)$ es (*Esc. Def.* 45.) menor que la potencia $\alpha\, sen.\Sigma$ resultante de la gravedad, y que se dirige paralelamente al plano. Supóngase, pues, $\alpha\, sen.\Sigma - \lambda = \varphi$: y colocando este valor en la expresion antecedente del ángulo giratorio, que-

dará

dará esta $= \frac{dt\int dt(\alpha sen.\Sigma - \lambda).AH + dt\int\alpha dt Cos.\Sigma.CH}{S}$:
ó substituyendo (*Cor.*2. *Pr.*62.) $sen.\Sigma.AH = DH Cos.\Sigma$; y reduciendo, quedará en $\frac{dt\int\alpha dt DC Cos.\Sigma - dt\int\lambda dt.AH}{S}$.

Corolario 2.

Si fuere $DC = o$; ó si la vertical AD, que pasa por el centro de gravedad A, pasare asimismo por el apoyo C, quedará la expresion del ángulo giratorio en $-\frac{dt\int\lambda dt.AH}{S}$.

Corolario 3.

El cuerpo girará, pues, hacia la parte de arriba, quando el apoyo esté en movimiento, sin embargo de pasar la vertical AD por el mismo apoyo C.

Corolario 4.

No solamente girará el cuerpo de la misma manera en el caso de ser $DC = o$, sino en todos aquellos en que sea $\lambda.AH > \alpha Cos.\Sigma.DC$: de suerte, que aun siendo DC positiva; ó cayendo la vertical AD mas abaxo que el apoyo C, puede girar el cuerpo negativamente, ó hacia arriba.

Escolio.

De lo dicho se infiere lo que se equivocaron los que, no habiendo exâminado los cuerpos en movimiento, juzgaron que debian girar hacia abaxo siempre que la vertical AD pasare por mas abaxo que el apoyo C.

De

De la Cuña.

DEFINICION 49.

A un prisma como ABCD se llama vulgarmente *Cuña*. Fig. 39.

Escolio.

Si este se coloca entre dos cuerpos A y B, y se introduce en ellos por medio de la percusion, ó por una potencia que actúe en C, y en la direccion CD: se separan los dos cuerpos, aunque las potencias que los unen sean mayores. Fig. 40.

PROPOSICION 64.

La cuña se reduce al plano inclinado.

Como para el efecto lo mismo es considerar los dos cuerpos A y B fixos, y la cuña en movimiento, que al contrario, la cuña fixa, y los dos cuerpos en movimiento, pues la accion depende, en uno y otro caso, de la velocidad respectiva: podemos suponer la cuña fixa, y que una potencia qualquiera aplicada en los cuerpos actúe en la direccion DC; pero este caso se reduce á hacer subir ó impeler los dos cuerpos A y B por los dos planos inclinados DI, DL: luego la cuña se reduce al plano inclinado.

Corolario 1.

Las mismas fórmulas que expresaron los efectos del plano inclinado, deben por consiguiente expresar los de la cuña.

Escolio 1.

Fig.41. Lo ordinario es que los dos cuerpos A y B sean uno mismo, ó solo cuerpo M, que por medio de la cuña se procura separar ó rajar en dos, aumentándo su hendedura EKF hacia KM. La potencia que resiste consiste en la union, cohesion, ó fuerza de las partículas ó fibras del cuerpo en K, que es preciso vencer ó romper por medio de las potencias que se exercieren en G y H. Como las fibras en K tienen su elasticidad, dan de sí, ó se ponen en movimiento antes de romper. Esto solo sucede á un cierto número de fibras, y por consiguiente hay un punto como M, donde se mantienen firmes sin movimiento, y sobre el qual giran los cuerpos A y B. Las líneas GKM, HKM actuan, pues, como dos palancas del segundo genero, fixas en M, que tiran á vencer la potencia colocada en K, por medio de otras en G y H. La potencia en K será, pues, á la potencia en G, como MG, á MK: y asimismo á la colocada en H, como MH, á MK.

Corolario 2.

Si se llamare α la potencia en K, será $\frac{MK}{MG}\alpha$ la colocada en G: y $\frac{MK}{MH}\alpha$ la colocada en H.

Corolario 3.

La accion de estas dos potencias es perpendicular á MG, MH, porque girando los cuerpos A y B sobre M, los puntos G y H se dirigen perpendicularmente á los radios MG, MH.

Es-

Escolio 2.

Las fibras que resisten en K son varias, y colocadas á diversas distancias del centro inmovil M: las fuerzas que exercerán serán, por consiguiente, distintas; pero podemos suponer que K es el centro de todas ellas, donde, si se reunieran, actuaran con igual efecto. Lo mismo se debe entender de las potencias en G y H: pues estos puntos deben tomarse como los de reunion de todas las fuerzas que actuan en las impresiones que la cuña hace todo al rededor de G y H, cuyas amplitudes son H y *H*.

PROPOSICION 65.

Hallar la potencia necesaria para poner en movimiento la cuña, vencer su friccion, ó rajar los cuerpos con ella.

Respecto que la cuña se reduce al plano inclinado, hemos de valernos de la equacion (*Propos.* 58.) $\theta = \frac{\alpha(H sen.\Sigma + h Cos.\Sigma)}{S}$, en la qual θ denota la potencia que actua segun DI necesaria para vencer la friccion: todo se reduce á substituir los verdaderos valores de θ, α y Σ. Que sea x la potencia que actue sobre la cuña en C, y segun la direccion CD, y tirada la GO, paralela á la IC, será $\frac{DO}{DG}\cdot\frac{x}{n}=\theta$, denotando n un número qualquiera mayor que la unidad, á fin de tomar de la potencia x solo la parte $\frac{1}{n}$ que vence la friccion del plano ID: y Σ el ángulo DGM, puesto que en el plano inclinado denotó el ángulo que forma la direccion de la potencia en G con la perpendicular á ID: tendremos, pues, baxando la perpendi-

di-

dicular DN á la GM, $\frac{DN}{DG} = sen.\Sigma$. La potencia que actua en G es (*Cor.* 2. *Prop.* 64.) $\frac{MK}{MG}\alpha$, y es la que debe colocarse en lugar de α solo. Substituyendo, pues, todos estos valores en la equacion, tendremos

$$\frac{DO}{DG}\cdot\frac{x}{n} = \frac{\frac{MK}{MG}\alpha\left(\frac{DN.H}{DG}+\frac{NG.b}{DG}\right)}{H} : \text{ ó } \frac{x}{n} = \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H}(DN.H+NG.b).$$

Del mismo modo se halla que la otra parte $\frac{(n-1)x}{n}$ de la potencia x que vence la friccion del plano LD, es $\frac{(n-1)x}{n} = \frac{MK.\alpha}{MH.DP.H}(DQ.H+QH.h)$: luego $\frac{x}{n}+\frac{(n-1)x}{n}=x$

$$= \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H}(DN.H+NG.b)+\frac{MK.\alpha}{MH.DP.H}(DQ.H+QH.h).$$

Corolario 1.

Si el punto M estubiere infinitamente distante de K: y al mismo tiempo se supone la friccion nula ó cero, quedará $x = \frac{\alpha.DN}{DO}+\frac{\alpha.DQ}{DP}$; pero en este caso son GM y HM paralelas á CM, ó DN $=$ GO, y DQ $=$ HP: luego $x = \frac{\alpha.GO}{DO}+\frac{\alpha.HP}{DP} = \frac{\alpha.IC}{CD}+\frac{\alpha.CL}{CD} = \frac{\alpha.IL}{CD}$: que da $\alpha : x = CD : IL$.

Escolio 1.

Esta relacion $\frac{x}{\alpha} = \frac{IL}{CD}$, que generalmente dan todos los Autores, en que dicen estan las fuerzas x y α, que

que exerce la cuña, solo es cierta quando la friccion es cero, y quando está el punto M á una infinita distancia; uno y otro caso imposibles. El ultimo puede darse solamente quando con la cuña se tiraran á separar dos cuerpos sueltos segun una direccion paralela á IL, porque en este caso el punto K cae en los apoyos G y H: y M, por ser GM, HM paralelos á CD, está como á una infinita distancia.

Escolio 2.

Puede asimismo suponerse que sea MK $=$ MG, y la friccion casi nula al principio de la accion de la cuña, ó quando esta no se haya aun introducido en el cuerpo, sino de una cantidad infinitamente pequeña: pues en este caso se confunden los puntos M, K, G y H, y la friccion puede ser poco sensible; en todos los demas se hace notable el error de la igualacion $\frac{x}{\alpha} = \frac{IL}{CD}$ que dan generalmente los Autores.

Corolario 2.

Si la parte IDC de la cuña fuere igual y semejante á la otra parte LDC, como regularmente se executan, serán MH $=$ MG, DP $=$ DO, DQ $=$ DN, QH $=$ NG, H $= H$, y h $= b$, que reduce la equacion á $x = \frac{MK.2\alpha}{MG.DO.H}(DN.H+NG.b)$.

Corolario 3.

Como la fuerza x, necesaria para mover la cuña, es, segun la generalidad de los Autores, y segun lo dicho (*Corol.* 1.) $x = \frac{\alpha.IL}{CD} = \frac{2\alpha.IC}{CD} = \frac{2\alpha.GO}{DO} =$ MG.

$\frac{MG.H.2\alpha.GO}{MG.DO.H}$; y segun nuestra theórica $x = -\frac{MK.2\alpha}{MG.DO.H}(DN.H+NG.b)$: será dicha fuerza, segun la generalidad de los Autores, á la que expresa nuestra theórica, como $MG.GO.H$, á $MK(DN.H+NG.b)$, ó como $\frac{MG.GO}{MK}$, á $DN+\frac{NG.b}{H}$: donde se ve quan infinitamente menor puede ser esta fuerza segun nuestra theórica, que segun la generalidad de los Autores; y por consiguiente, quanta equivocacion se ha padecido.

PROPOSICION 66.

Determinar quando la cuña volverá hacia atras, en caso de no actuar la potencia x.

Quando la potencia x no actua, ó es $x = o$, la friccion se hace negativa, con que la equacion que exprese el caso en que se vencerá esta, se reduce á $\frac{DN.H-NG.b}{MG.DO.H} + \frac{DQ.H-QH.h}{MH.DP.H} = o$: ó quando hubiere igualdad y semejanza entre las dos mitades de la cuña ICD, LCD, $DN.H-NG.b = o$: ó $\frac{DN}{NG} = \frac{b}{H}$.

Corolario 1.

Siempre que fuere pues $\frac{DN}{NG} > \frac{b}{H}$, la cuña volverá atras luego que cese de actuar la potencia x.

Corolario 2.

No depende, pues, como creen generalmente los Autores, el volver la cuña atras de solo la magnitud del ángulo IDL, sino de este ángulo con las relaciones $\frac{DN}{NG}$ y $\frac{b}{H}$.

Escolio.

Hay otros instrumentos que se reducen tambien á la cuña y plano inclinado, como el cuchillo, y la hacha con que se parte la madera. La accion de esta depende de la velocidad con que cae ó choca: y asi la equacion que exprese su efecto ya no depende de la que determina el caso en que se vence la friccion, sino de aquella en que ya se supone la friccion vencida, y se mueve la hacha, cuña ó plano inclinado con cierta velocidad.

PROPOSICION 67.

Determinar el efecto de la hacha.

Como la hacha se reduce á la cuña y plano inclinado, tenemos que valernos de la equacion (*Prop.59.*) $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - a\,sen.\Sigma)}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. En ella debemos substituir (*Prop.65.*) $\frac{DN}{DG} = a\,sen.\Sigma$, y en lugar de a solo $\frac{MK}{MG}a$. A mas de esto, la potencia λ es en este caso $= o$, porque la hacha actua por sola la velocidad U con que vence la friccion. Substituyendo, pues, todas estas cantidades, quedará $u = \left(U^2 - \frac{2x.\frac{MK.a}{MG}.\frac{DN}{DG}}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; pero quando la hacha ha hecho todo su efecto, se para, y es $u = o$: luego quando la hacha hace todo su efecto, tenemos

 U^2

$$U^2 = \frac{2x}{A}\left(\frac{MK.DN.\alpha}{MG.DG} + Db\right) : \text{ó } x = \frac{\frac{1}{2}A.U^2.MG.DG}{MK.DN.\alpha + MG.DG.Db}$$

Como la cantidad x es el espacio corrido por el plano DI: llamando z al corrido segun DC, tendremos $x : z = ID : CD$, ó $x = \frac{DI.z}{CD}$: cuyo valor substituido en la equacion, da el espacio corrido por la hacha, ó efecto suyo $z = \frac{\frac{1}{2}A.U^2 MG.DG.CD}{ID(MK.DN.\alpha + MG.DG.Db)}$; pero por construccion es $\frac{DG.CD}{ID} = DO$: luego $z = \frac{\frac{1}{2}A.U^2 MG.DO}{MK.DN.\alpha + MG.DG.Db}$.

Corolario.

El efecto de la hacha será, pues, constantemente proporcional al producto de la masa A de ella, ú de su gravedad, por el quadrado U^2 de la velocidad con que choca al madero.

Del Tornillo.

DEFINICION 50.

Fig. 42. *Tornillo* es un plano inclinado, aplicado al rededor de un cylindro cóncavo ABCD, por el qual gira otro plano inclinado semejante, que circunda otro cylindro convexô AC.

DEFINICION 51.

Al cylindro convexô con su plano, es á lo que vulgarmente se llama *tornillo*. Llámase tambien *macho*: y al cylindro cóncavo *hembra*.

DE-

DEFINICION 52.

A las vueltas de los planos se llaman *Aspiras*, *Roscas*, ó *Pasos* del tornillo.

Escolio.

Si hay un peso Q, ó una potencia aplicada en F, que se dirija segun el exe EF del tornillo: y otra sobre la palanca EP, aplicada en P, impelida segun una direccion perpendicular al mismo exe: el tornillo girará levantandose el plano del macho por el de la hembra, y por consiguiente elevará el peso Q, ó vencerá la potencia aplicada en F.

Corolario.

De esto se infiere, que el tornillo no debiera numerarse máchina simple, puesto que se compone de un plano inclinado, y una palanca; pero lo será siempre que la longitud de esta no sea mayor que el radio del cylindro.

PROPOSICION 68.

Hallar la potencia necesaria para vencer la friccion, y poner en movimiento el tornillo.

El valor de la potencia que actua sobre las roscas es (*Prop.* 58.) $\theta = \frac{\alpha(H\,sen.\Sigma + b\,Cos.\Sigma)}{H}$. La potencia que fuerza los dos planos se supone en F, dirigida segun EF: supuesto que esta sea α, el ángulo que forma su direccion con la perpendicular al plano ó roscas, es el mismo que el que forman las mismas roscas con la perpendicular al exe EF: con que, dexando los caracteres α y Σ, estos denotarán la potencia aplicada

en

en F, y dirigida segun el exe EF, y ángulo que forman las roscas con la perpendicular al mismo exe. La potencia π, que debe vencer la friccion, se supone colocada en P, actuando perpendicularmente al exe, y á la distancia R de este: con que su momento será $R\pi$: y si llamamos r á la distancia perpendicular del exe á las roscas ó radio del tornillo, será $r\theta = \frac{r\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$ el momento de la friccion, y tendremos para vencerla $R\pi = r\theta = \frac{r\alpha(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)}{H}$, que da $\pi = \frac{r\alpha}{RH}(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)$.

Corolario 1.

Si la potencia π fuere, pues, menor que $\frac{r\alpha}{R.H}(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)$, el tornillo no podrá moverse.

Corolario 2.

Puesto una vez en movimiento el tornillo, y llevandolo con una velocidad constante, con esta misma debe seguir si las potencias que actuan se destruyen mutuamente, lo que sucede venciendo la friccion, que es la misma en el caso del movimiento que al tiempo de vencerla: la potencia necesaria para mantener el tornillo en movimiento con una velocidad constante ya adquirida, será asimismo $\pi = \frac{r.\alpha}{R.H}(H sen.\Sigma + b Cos.\Sigma)$.

Corolario 3.

Si se supone la friccion ó $b = 0$, quedará la equacion que exprese el caso de ponerse el tornillo en movimiento, en $\pi = \frac{r.\alpha.sen.\Sigma}{R}$: ó si llamamos C la circunferencia que describirá el punto P donde se aplica la potencia π, y c la del tornillo será asimismo, $\pi = \frac{c.\alpha.sen.\Sigma}{C}$; pero el radio es á $sen.\Sigma$, como la circunferencia c, á la distancia de una á otra rosca: luego llamando a esta distancia, será $c sen.\Sigma = a$; y $\pi = \frac{\alpha.a}{C}$; ó $\pi : \alpha = a : C$: esto es, la potencia que anima al tornillo, á la que se ha de vencer con él, como la distancia de una rosca á otra, á la circunferencia C que describe la potencia π.

Corolario 4.

Como esta theórica es la que generalmente se enseña por los Autores: es consequente que sus cálculos se fundan extraccion hecha de la friccion.

PROPOSICION 69.

Hallar el caso en que el tornillo volverá atras luego que cese de actuar la potencia π.

Quando cesa de actuar la potencia π, la friccion es negativa: y el caso en que se vencerá, volviendo atras el tornillo, será $0 = \frac{r.\alpha}{R.H}(H sen.\Sigma - b Cos.\Sigma)$, ó $sen.\Sigma = \frac{b}{H} Cos.\Sigma$: luego siempre que sea $sen.\Sigma > \frac{b}{H} Cos.\Sigma$, el tornillo volverá atras luego que cese de actuar la potencia π.

PROPOSICION 70.

Hallar la relacion entre la potencia que anima al tornillo, y la velocidad con que se moverá este, despues de haber vencido la friccion.

La

La fórmula que corresponde es (*Proposicion* 59.)

$$u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha sen.\Sigma)}{A} - \frac{2Dbx}{A}\right)^{\frac{1}{2}};$$ substituyendo en ella $\frac{R\lambda}{r}$ en lugar de λ solo, supuesto que sea λ la potencia que actue al extremo de la palanca P: suponiendo ahora, como es regular, que la velocidad U con que empieza á vencer la friccion el tornillo es despreciable, ó $U = 0$, quedará $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - Db$: ó substituyendo (*Cor.* 2. *Prop.* 52.) la fuerza de la friccion $\varphi = Db$, será $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \varphi =$ $\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \frac{b}{H} Cos.\Sigma.$

PROPOSICION 71.

Hallar la relacion entre el tiempo, la potencia que anima el tornillo, y el espacio que correra este segun la direccion de su exe.

La fórmula que corresponde es (*Cor. Propos.* 61.) $x = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha sen.\Sigma - Db)$, substituyendo en ella $\frac{R\lambda}{r}$ en lugar de λ sola; pero el espacio x expresa el que corren los dos planos respectivamente, y este es al espacio que corre el tornillo segun el exe, y que podemos llamar z, como 1 á $sen.\Sigma$: luego $x = \frac{sen.\Sigma}{z}$, que da $z = \frac{t^2 sen.\Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - Db\right) =$

$$\frac{t^2 sen.\Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \varphi\right) = \frac{t^2 sen.\Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha sen.\Sigma - \frac{b}{H} Cos.\Sigma\right).$$

Del

Del exe en peritrochîo.

DEFINICION 53.

Exe en peritrochîo es un exe que gira, obligado de una palanca que se le aplica.

Como el exe AB horizontal, vertical, ú obliquo, que sostenido de los postes C, D, gira obligado de una potencia aplicada en F sobre la palanca FE perpendicular al exe, hecha firme en él, y dirigida la potencia perpendicularmente al exe y á la palanca. Esta máchina debe vencer la potencia en Q, dirigida asimismo perpendicularmente al exe, y que actua sobre él, ya sea por una línea flexîble QG que se envuelve en el mismo exe, al paso que este gira, ya sea porque QG es otra palanca hecha firme en él. Fig. 43. 44.

Corolario 1.

Es indiferente que se repitan las palancas y potencias que actuen sobre el exe, ó que sea una rueda, como HIKL, con varias potencias que actuen en la circunferencia de ella: pues, por lo ya dicho, se pueden reducir á una sola aplicada á una distancia determinada del exe.

Corolario 2.

El exe en peritrochîo es, pues, una palanca del primero, segundo, ó tercer género, segun la situacion y distancia desde la potencia situada en Q, al exe.

PROPOSICION 72.

Hallar en el exe en peritrochîo la potencia necesaria para vencer la friccion, y poner la máchina en movimiento.

Sea

Fig. 45. Sea GFE el exe, y C su centro. Actue en L, al extremo de la palanca CL, la potencia λ, en la direccion LH, perpendicular á CL. Actue asimismo en A, al extremo de la palanca CA, la potencia α, perpendicular á CA, y que ha de vencer la antecedente. Sea Σ el ángulo con que se cortan las dos direcciones LH, AI: y tiradas las DB, CD paralelas á ellas y proporcionales á las mismas potencias λ y α, CB será (*Prop. 8. y sus Cor.*) la direccion de la potencia resultante de las dos, y asimismo expresará su valor. Siendo el seno de DCL $= Cos.\Sigma$, será CB, potencia resultante de las dos λ y α, $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: el signo superior en la cantidad $2\lambda\alpha Cos.\Sigma$, quando el ángulo BDC es obtuso, y el inferior, quando es agudo. Esta potencia fuerza al exe, haciendole apoyar en el punto G de su direccion CB, del mismo modo que si apoyara sobre un plano tangente al exe en el punto G, y á quien es perpendicular la direccion CB de la potencia resultante. La potencia necesaria para vencer la friccion, que exercerá en el punto G, será pues (*Corol. 6. Prop. 51.*) $= \frac{b}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$. La potencia que actua á girar el exe es λ colocada en L; pero reduciendola á otra colocada en G, será $\frac{R}{r}\lambda$, denotando R la longitud de la palanca CL, y r el radio CE del tornillo. La otra potencia que actua negativamente es α colocada en A; pero reducida á otra colocada en G, será $\frac{R}{r}\alpha$, denotando R la longitud de la palanca CA, Tendremos, pues, para el caso del equilibrio, ó punto de querer vencerse la friccion $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}\alpha = \frac{b}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: que reduciendo y ordenando, da

$$\lambda = \frac{\alpha(H^2 R R \pm b^2 r^2 Cos.\Sigma)}{H^2 R^2 - b^2 r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2 R R \pm b^2 r^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2 R^2 - b^2 r^2)^2} - \frac{H^2 R^2 - b^2 r^2}{H^2 R^2 - b^2 r^2}}.$$

Corolario 1.

La potencia λ necesaria para vencer la friccion y poner la máchina en movimiento, es pues siempre proporcional á la potencia α.

Corolario 2.

Variando el ángulo Σ, ó situacion de la palanca CL, varia asimismo el de la potencia λ necesaria para vencer la friccion: luego hay un máxîmo y mínimo valor de λ que depende del de Σ, ú de la situacion de la palanca CL.

PROPOSICION 73.

Hallar la máxîma y mínima fuerza que vencen la friccion en el exe en peritrochio.

Si suponemos λ y Σ variables, las demas cantidades constantes, y diferenciamos la equacion $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}\alpha = \frac{b}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$, será la diferencial $\frac{R}{r}d\lambda = \frac{b}{H} \cdot \frac{\lambda d\lambda \pm \alpha d\lambda Cos.\Sigma \mp \lambda\alpha d\Sigma\, sen.\Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}}$; pero en el caso de actuar la mayor ó menor λ, es $d\lambda = 0$: luego, en este caso, es $0 = \frac{\mp \lambda\alpha d\Sigma\, sen.\Sigma}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}}$ ó $sen.\Sigma = 0$, cuyo valor, substituido en el de λ dá la mayor y menor λ necesaria para vencer la friccion $\lambda =$

$$\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm b^2r^2)}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm b^2r^2)^2}{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2)^2} - \frac{\mathrm{H}^2R^2 - b^2r^2}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2}}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm b^2r^2 + \mathrm{H}br(\mathrm{R} \pm R)\right)}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - b^2r^2} = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} \mp br}$$: esto

es la mayor $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} - br}$, que sucede quando la palanca CL está á la parte opuesta de CA, y forman ambas una misma línea: y la menor $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} + br}$, que sucede quando la palanca CL coincide con la CA.

Corolario 1.

Habrá, pues, siempre ventaja en hacer que las dos palancas coincidan lo mas que se pueda: y si se procura ó establece esto, la potencia necesaria para vencer la friccion, será, como antes, $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} + br}$.

Corolario 2.

Es asimismo ventajoso procurar que sea $\mathrm{R} > R$, ó que sea la palanca CL lo mayor que sea posible, pues con ello se hace mayor el denominador de la expresion.

Corolario 3.

Si fuere $\mathrm{R} = R$, quedará $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{HR} + br)}{\mathrm{HR} \mp br}$, donde se ve que en el caso de coincidir las dos palancas, el instrumento ó máchina ya no da ventaja alguna, y que produce desventaja en el de estar opuestas las palancas.

Co-

Corolario 4.

Si fuere $\mathrm{R} < R$, el instrumento será desventajoso en ambos casos, por ser $\lambda > \alpha$.

Corolario 5.

Para saber aquel en que ya no será ventajoso, estando opuestas las palancas, no hay sino suponer $\alpha = \lambda$ en la equacion $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} - br}$, y tendremos $\mathrm{HR} - br = \mathrm{H}R + br$, que da $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{H}R + 2br}{\mathrm{H}}$, longitud que ha de tener R para que ya no sea ventajosa la máchina en este caso.

Corolario 6.

Habrá asimismo ventaja en disminuir la r, no solo en el caso de ser $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} + br}$ en que disminuye el numerador, y aumenta el denominador, sino tambien en el de ser $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}R + br)}{\mathrm{HR} - br}$; pues aunque disminuya el denominador, no es en tanta razon como el numerador, á causa de suponerse, para conseguir ventaja, que es $R < \mathrm{R}$.

Corolario 7.

Si se supone nula la friccion, será $b = 0$, y quedará en general $\lambda = \frac{\alpha(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm 0)}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - 0} + \alpha\sqrt{\frac{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}R \pm 0)^2}{(\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - 0)^2} - \frac{\mathrm{H}^2R^2 - 0}{\mathrm{H}^2\mathrm{R}^2 - 0}}$ $= \frac{\alpha R}{\mathrm{R}}$: en cuyo valor habiendose desvanecido el

de

de Σ, se sigue, que suponiendo nula la friccion, es indiferente la situacion de la palanca CL.

Escolio 1.

Por este motivo han padecido generalmente los Autores de Mechânica el error de suponer indiferente la situacion de la palanca CL: no menos que hacer $\lambda = \frac{\alpha R}{R}$, aunque en esto ya advierten algunos que es menester aumentar la λ lo que la fraccion requiriere; pero siempre sin advertirnos nada de la situacion de la palanca CL, que ya hemos visto lo que altera el valor de λ.

Corolario 8.

Si en lugar de una sola palanca CL, actuasen dos iguales y opuestas, con potencias iguales aplicadas á sus extremos, será $DB = 0$; y la potencia que fuerza al exe, y produce la friccion, se reducirá solamente á α, y la que la ha de vencer á $\frac{b}{H}\alpha$: con que para este caso se tendrá $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}\alpha = \frac{b}{H}\alpha$, que dá en general $\lambda = \frac{\alpha(HR + br)}{HR}$: en cuya expresion λ expresa la suma de las dos potencias iguales aplicadas á los extremos de las dos palancas iguales opuestas.

Corolario 9.

Lo mismo se debe entender aunque las palancas sean muchas mas, con tal que todas sean iguales, y lo mismo las potencias que en ellas se apliquen, destruyéndose las positivas á las negativas.

Co-

Corolario 10.

Esto mismo sucederá en la rueda HIKL, con tal que potencias iguales se apliquen á los extremos de sus diámetros. Fig. 43. 44.

Corolario 11.

Convendrá pues, asimismo, en todos estos casos, no solo que se aumente la R, sino que disminuya en general la r.

Corolario 12.

Como puesto en movimiento el exe en peritrochîo, y llevandolo con una velocidad constante, con esta misma debe seguir, si las potencias que actuaren se destruyeren mutuamente, lo que sucede venciendo la friccion, que es la misma en el caso del movimiento que al tiempo de vencerla: la potencia necesaria para mantener el exe en peritrochîo en movimiento con una velocidad constante ya adquirida, será asimismo, $\lambda = \frac{\alpha(HR + br)}{HR}$ en caso de la rueda, ó que palancas iguales y opuestas actuen asimismo con potencias iguales; y quando no actuare sino una sola $\lambda =$

$$\frac{\alpha(H^2RR \pm b^2r^2 Cos.\Sigma)}{H^2R^2 - b^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2RR \pm b^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - b^2r^2)^2} - \frac{H^2R^2 - b^2r^2}{H^2R^2 - b^2r^2}}.$$

Corolario 13.

Una potencia qualquiera, mayor que la asignada λ, puede dar al exe una velocidad determinada: con que una vez empleada esta por el tiempo preciso, ya no se necesita para conservar el mismo movimiento sino la sola potencia λ.

Es-

Escolio 2.

No se ha querido incluir en el cálculo, por no complicarle mas, la potencia que procede de la gravedad de la misma máchîna; pero es fácil hacer atencion á ella, suponiendola agregada á la α, ó suponiendo que esta sea la compuesta de la que actua en Q, y de la que produce la gravedad, como asimismo que la direccion AI es la que resulta de las dos.

Fig. 43, 44.
Fig. 45.

Corolario 14.

De esto se infiere claramente, que será ventajoso en el exe en peritrochîo que la potencia procedente de la gravedad de la máchîna, se oponga quanto es dable á la que actua en Q, porque con ello se disminuirá esta.

Corolario 15.

En el exe vertical no actua la potencia procedente de la gravedad, porque se dirige segun el exe; pero resultará de ella friccion, que será menor, quanto menos diste del centro del exe el apoyo ó punto sobre que cargue el peso de la máchîna.

Del Carrucho ó Monton.

DEFINICION 54.

Carrucho ó *Monton* es una pequeña rueda que gira sobre un exe, obligada de una línea flexîble que se le aplica.

Fig. 46. En una pieza BD de madera, ú otro qualquiera material sólido, que es lo que efectivamente se llama moton, se abre una hendidura LI, nombrada *caxera*, y

y en ella se aplica la rueda IGL, llamada *roldana*, y que gira sobre el exe C, apoyado en la pieza BD ó moton. Este se hace firme en B, y una potencia aplicada en H, en la línea flexîble HLIA, que pasa sobre la rueda, actua en la direccion de la misma línea LH, cuya fuerza se comunica á IA, y vence otra potencia aplicada en A, y que se dirige segun IA.

Corolario 1.

Las potencias aplicadas en H y A actuan del mismo modo que si estubieran colocadas en los puntos L y I, donde son tangentes á la roldana las líneas HL, AI: por lo que el carrucho ó monton se reduce á un exe en peritrochîo, cuyas palancas CL $=$ R, y CI $= R$, son entre sí iguales.

Corolario 2.

La relacion general dada (*Cor.* 12. *Prop.* 73.) entre las potencias λ y α que actuan en H y A, ó en L y I, se reducirá en el moton á

$$\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 \pm b^2r^2\,Cos.\,\Sigma)}{H^2R^2 - b^2r^2} \pm \alpha\sqrt{\frac{(H^2R^2 \pm b^2r^2\,Cos.\,\Sigma)^2}{(H^2R^2 - b^2r^2)^2} - 1}.$$

Corolario 3.

La potencia λ necesaria para vencer la friccion es, pues, proporcional á la potencia α que se ha de vencer.

Corolario 4.

La mayor y menor λ sucederán (*Prop.* 73.) quando sea

sea $sen.\Sigma = 0$: aquella será $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR-hr}$: y la menor $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR+hr} = \alpha$.

Corolario 5.

Nó puede darse en el moton caso en que suceda la menor $\lambda = \alpha$; porque siendo preciso para esto, que la IA se dirija al lado opuesto, ó segun HL, no actuará la línea flexible sobre la roldana en esta ocasion.

Corolario 6.

En el caso de la mayor $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR-hr}$, conviene que el exe de la roldana sea lo menor posible, porque con ello disminuye λ, no solo porque será menor el numerador, sino porque aumentará el denominador.

Escolio.

Puede dudarse si hallandose libre la línea HLIA sobre la roldana IL, ó no sujeta en algun modo á esta, no correrá la línea sobre la roldana, quedando esta parada ó sin moverse sobre el exe C: pues la potencia λ, aplicada en H, tira á la línea, y esta á la potencia en A, cuyo movimiento puede hacerse sin necesidad de que la roldana se mueva sobre el exe C. Para aclarar esta duda no es menester sino probar que las fuerzas que resisten, en caso de hacerse el movimiento sobre el exe, son menores que haciendose con la roldana firme: ó lo que es lo mismo, que λ es menor en el primer caso que en el segundo.

PRO-

PROPOSICION 74.

Determinar si en el moton debe hacerse el movimiento sobre el exe, y no sobre la roldana firme.

La potencia $\frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$ que vence la friccion la igualamos (*Prop.* 72.) á la diferencia de las dos potencias aplicadas en L y I, pero reducidas, en caso del movimiento sobre el exe C, al mismo exe: en el de no hacerse el movimiento sino sobre la circunferencia de la roldana, ya no necesitan reduccion, puesto que en ella estan aplicadas: tendremos, pues, para este caso $\lambda - \alpha = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: ó $\frac{R}{R}\lambda - \frac{R}{R}\alpha = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$; cuya expresion es la misma que la dada (*Prop.* 72.) si colocamos $R = R$, y $R = r$: substituyendo, pues, este valor en el de $\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1}$, que es el de la potencia λ, en caso de hacerse el movimiento sobre el exe, tendremos para aquel en que se hiciere el movimiento sobre la circunferencia de la roldana $\lambda = \frac{\alpha(H^2 \pm h^2 Cos.\Sigma)}{H^2 - h^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2 \pm h^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2-h^2)^2} - 1}$: cuya cantidad es mayor que la otra, como se infiere de solo reducir $\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2}$ á serie infinita: pues siendo esta $1 + \frac{h^2r^2}{H^2R^2}(1 \pm Cos.\Sigma) + \frac{h^4r^4}{H^4R^4}(1 \pm Cos.\Sigma) + \&c$, se ve que este valor es mayor quando mayor sea r: luego el movimiento se hace sobre el exe, y no sobre la circunferencia de la roldana.

Co-

Corolario 1.

Esta conclusion se ha deducido, baxo la suposicion de ser la friccion la misma en un caso que en otro, ú de ser $\frac{h}{H}$ el mismo valor en ambos casos: de donde se infiere, que si fuere $\frac{h}{H}$ menor quando se hiciere el movimiento sobre la circunferencia de la roldana, puede efectivamente lograrse este: pues si se supone $h = 0$ en este caso, quedará para él $\lambda = \alpha$, cuya cantidad es la menor posible.

Corolario 2.

No se hace el movimiento, pues, sobre el exe, sino á causa de la friccion: siendo esta nula, queda para todos casos $\lambda = \alpha$, y por consiguiente fuera indiferente la determinacion al movimiento sobre el exe, ó sobre la circunferencia de la roldana.

Escolio.

El moton fixo en B no contribuye á facilitar ó vencer el movimiento de la potencia α, puesto que la necesaria para ello λ, es mayor que aquella, siempre que la línea HLIA apoye sobre la roldana; pero haciendose preciso esto por alguna necesidad, contribuye mucho, puesto que la potencia λ, en caso de hacerse el movimiento sobre el exe, es menor que en caso de hacerse sobre la circunferencia de la roldana.

PROPOSICION 75.

Determinar la relacion entre las potencias λ y α, y la que actua en el punto fixo B, donde está hecho firme el moton.

La

La potencia en B es igual y contraria á la que actua en el exe C, que se compone de las dos que actuan en H y A; pero esta potencia compuesta se halló (*Prop. 72.*) $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: luego si suponemos esta Ω, tendremos $\Omega = \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha Cos.\Sigma}$: que dá $\lambda = \mp \alpha Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2 sen.\Sigma^2}$, ó - - - - $\alpha = \mp \lambda Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 sen.\Sigma^2}$.

DEFINICION 55.

El moton es tambien movible. Si se hace firme la línea HLIA en el punto A, y actuan dos potencias, una en H, y otra en B, aquella puede vencer á esta, y ponerla en movimiento con el moton. Por esto se llama *moton movible*.

PROPOSICION 76.

Hallar la relacion entre las potencias λ y Ω en el moton movible.

Habiendo hallado (*Proposicion 75.*) - - - - - - - $\alpha = \mp \lambda Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 sen.\Sigma^2}$: y (*Pro. 74.*) $\lambda =$

$$\frac{\alpha(H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}:$$

$$ó\ \alpha = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}:$$

tendremos $\mp \lambda Cos.\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2 sen.\Sigma^2} =$ - - - - -

$$\frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2 Cos.\Sigma)^2}{H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1.\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Co-

Corolario.

En el caso de la mayor λ, ú de estar paralelas las líneas HL, AI, es $\Sigma = 0$: luego quedará

$$-\lambda + \Omega = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2+h^2r^2}{H^2R^2-h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2+h^2r^2)^2}{(H^2R^2-h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}:$$

ó $-\lambda + \Omega = \frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$: que da $\Omega = \frac{2HR.\lambda}{HR+hr}$, y, $\lambda = \frac{\Omega(HR+hr)}{2HR}$.

De los Aparejos.

DEFINICION 56.

Aparejo es una máchina compuesta de varios motones.

Fig. 47. Por un moton fixo en B, y otro movible D, pasa una línea HFEDGC, fixa en C al moton B. Una potencia λ actua en H en la direccion FH, y tira otra potencia aplicada en A, que resiste al movimiento del moton DG sobre que actua en la misma direccion.

Fig. 48, 49. Por dos motones fixos en B, unidos uno á otro por sus planos, ó por sus extremos, y otro movible DG, pasa una línea HFEDGIKC fixa en C al moton DG. Una potencia λ actua en H en la direccion FH, y tira otra potencia aplicada en A, que resiste al movimiento del moton DG, sobre que actua en la misma direccion.

Fig. 50. Del mismo modo, por tres motones fixos en B, y unidos entre sí, y dos movibles fixos entre sí, pasa otra línea: en cuyo extremo H actua una potencia, y otra en A del mismo modo que antes: y asi de muchos mas motones, si se quisiere, es la composicion de estos llamada *aparejos*.

Es-

Escolio.

Supondremos, para facilidad del cálculo, que las líneas ó vueltas de los aparejos, como ED, CG, FH sean sensiblemente paralelas, lo que nos dá $\Sigma = 0$: y asimismo que todas las roldanas sean iguales, para no tener que introducir varios valores de R.

PROPOSICION 77.

Hallar la relacion entre la potencia actuante y la resistente en los aparejos.

Puesto que se supone $\Sigma = 0$, el caso se reducirá á aquel en que sucede la máxîma λ, y que (*Cor.* 4. *Def.* 54.) hallamos $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR-hr}$, suponiendo λ la potencia que actua en H, y α la que debe sufrir ó tirar la línea ED: serán, pues, estas dos potencias entre sí, como $HR+hr$, á $HR-hr$: y la que debe sufrir la línea $ED = \frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$. Por la misma razon, la que sufre la línea ED, á la que sufre la GC, es tambien como $HR+hr$, á $HR-hr$: luego la que sufre $GC = \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$. Esta misma es la que sufre la línea GI: y esta á la que sufre KC, será tambien como $HR+hr$, á $HR-hr$: luego la que sufre $KC = \frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$: y así al infinito de quantas vueltas fuere dando la línea por los motones. Si fueren, pues, dos líneas solas como ED, CG las que sostubieren al moton movible DG, las fuerzas que estas exercirán serán $\frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)}$ y $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$: si fueren tres, serán

λ

$\frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$ y $\frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$, y asi al infinito. Como las fuerzas que exercieren estas líneas han de ser iguales á la potencia Ω aplicada en A, tendremos $\Omega = \frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)} + \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2} + \frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3} + \&c.$: constando está serie de tantos términos como líneas sostubiere el moton movible.

Corolario 1.

Substitúyase $\frac{HR-hr}{HR+hr} = 1-Q$, que da $Q = \frac{2hr}{HR+hr}$, y será $\Omega = \lambda(1-Q+(1-Q)^2+(1-Q)^3+(1-Q)^4+\&)$: constando la serie de tantos términos como líneas sostubière el moton movible; ó si n representa el número de estas, será $\Omega =$ - - - - - - - - - - - - $\lambda\left((1-Q)^{n}+(1-Q)^{n-1}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+\&\right)$, siendo el último término de la serie aquel en que sea su exponente la unidad.

Corolario 2.

Tambien será $\lambda = \frac{\Omega}{(1-Q)^{n}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+(1-Q)^{n-4}+\&}$, donde se ve quanto conduce en los aparejos que sea Q ó su igual $\frac{2hr}{HR+hr}$ lo menor que sea posible: esto es, que sea la friccion $\frac{h}{H}$, y el radio del exe r lo menor posible, y el radio de la roldana R lo mayor posible.

Co-

Corolario 3.

Si se eleva cada término de la serie á la potestad que le corresponde, seran - - - - - - - - - - -

$$(1-Q)^{n} = 1-n.Q+\frac{n.(n-1)}{2}Q^2-\frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3}Q^3+\&$$

$$(1-Q)^{n-1} = 1-(n-1)Q+\frac{(n-1)(n-2)}{2}Q^2-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}Q^3+\&$$

$$(1-Q)^{n-2} = 1-(n-2)Q+\frac{(n-2)(n-3)}{2}Q^2-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3}Q^3+\&$$

$$(1-Q)^{n-3} = 1-(n-3)Q+\frac{(n-3)(n-4)}{2}Q^2-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3}Q^3+\&$$

$\& = \&$. El número de renglones de que ha de constar esta serie se deduce del coeficiente de $1-Q$, porque habiendo de ser (*Cor.* 1.) el ultimo la unidad, y encerrando el número, que se substrahe de la n en el coeficiente, tantas unidades como renglones hay menos uno, siendo q el número de renglones, tendremos $n-q+1 = 1$ por el ultimo coeficiente, que da $q = n$: esto es, los renglones de que consta la serie ha de ser de tantos como unidades tenga el número n, ó líneas sostubiere el moton movible. La suma de las unidades de todos los renglones será pues n: y por consiguiente $\Omega =$

$$\lambda\left\{n-\left\{\begin{matrix} n. \\ n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ \& \end{matrix}\right\}Q+\left\{\begin{matrix} n.\ (n-1) \\ (n-1)(n-2) \\ (n-2)(n-3) \\ (n-3)(n-4) \\ \& \end{matrix}\right\}\frac{1}{2}Q^2-\left\{\begin{matrix} n.\ (n-1)(n-2) \\ (n-1)(n-2)(n-3) \\ (n-2)(n-3)(n-4) \\ (n-3)(n-4)(n-5) \\ \& \end{matrix}\right\}\frac{1}{6}Q^3+\right\}$$

ó sumando las cantidades de todos los términos $\Omega =$ $\lambda\left(\frac{n}{1}-\frac{(n+1)nQ}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)Q^2}{1.2.3}-\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)Q^3}{1.2.3.4}+\&\right)$, que dá

$$\lambda = \frac{\Omega}{\frac{n}{1}-\frac{(n+1)n}{1.2}Q+\frac{(n+1)(n)(n-1)}{1.2.3}Q^2-\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^3+\&}$$

cons-

constando las series de tantos términos como unidades tiene la n mas uno, ó como líneas tiran el moton fixo B.

Corolario 4.

La fuerza que se exerce en B es la misma que se exerce en A con mas la potencia λ que actua en la línea FH: luego la fuerza que se exerce en B $= \Omega + \lambda$

$$= \lambda\left(\frac{n+1}{1} - \frac{(n+1)(n)}{1.2}Q + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{1.2.3}Q^2 - \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^3 + \&\right)$$

Corolario 5.

Es, pues, mayor de la cantidad λ la potencia que se puede vencer en B, que la que se puede vencer en A: y por consiguiente es ventajoso en los aparejos colocarlos de forma que la potencia que se ha de vencer esté en B, ó que este sea el moton movible, y DG el fixo.

Corolario 6.

Si se multiplica por Q la equacion precedente (*Cor.* 4.), y de una y otra parte se substrahe λ, tendremos

$$(\Omega+\lambda)Q - \lambda = -\lambda\left(1 - \frac{(n+1)}{1}Q + \frac{(n+1)(n)}{1.2}Q^2 - \frac{(n+1)(n)(n-1)}{1.2.3}Q^3 + \right) =$$

$-\lambda(1-Q)^{n+1}$, que reduciendo da $\Omega = \dfrac{\lambda(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}{Q}$

$$\text{y } \lambda = \frac{\Omega Q}{(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}.$$

Escolio 1.

Supóngase con *Mr. Bilfinger* $\frac{h}{H} = \frac{1}{4}$, y

$\frac{r}{R}$

$\frac{r}{R} = \frac{1}{5}$, y será (*Cor.* 1. *Prop.* 77.) $Q = \frac{2}{21}$, cuyo valor substituido en el de λ (*Corol.* 6. *Propos.* 77.) dá

$$\lambda = \frac{\frac{2}{21}.\Omega}{\left(1.-\frac{2}{21}\right)\left(1-\left(1-\frac{2}{21}\right)^n\right)} = \frac{2.\Omega}{19\left(1-\left(\frac{19}{21}\right)^n\right)}.$$

Suponiendo ahora $n = 3$, será $\lambda = \dfrac{2.\Omega}{19\left(1-\frac{6859}{9261}\right)} = \dfrac{9291\Omega}{22819}$.

En el caso de suponerse la friccion nula son $h = 0$, $Q = 0$; y la equacion $\lambda = \dfrac{\Omega Q}{(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}$ nada resuelve; pero acudiendo á la del (*Cor.* 3.) que dá $\lambda = \frac{\Omega}{n}$, y es la fórmula general que dan todos los Autores, conseqüente de esta suposicion, será, en este caso de $n = 3$, $\lambda = \frac{1}{3}\Omega$, ó $\lambda = \frac{1000}{3000}\Omega$: y esta potencia sería á la determinada antes, como $\frac{1}{3}$ á $\frac{9261}{22819}$; ó como 22819 : 27783 : cuya diferencia es bien considerable.

Escolio 2.

Hemos escusado, para facilidad del cálculo, el peso de los aparejos, y el de las cuerdas, que se han supuesto líneas: puedese introducir con facilidad si se quisiere: se hace muy necesario quando la potencia que hubiere que vencer fuere corta; siendo grande se hace despreciable. Hemos escusado tambien el grueso de las cuerdas, con su inflexîbilidad, que á veces cuesta vencer, particularmente quando las potencias son cortas; pero asimismo se podrá despreciar quando sean grandes.

LIBRO SEGUNDO.

DE LOS FLUIDOS.

CAPITULO PRIMERO.

Del equilibrio de los fluidos, y de la fuerza con que actuan en el reposo.

DEFINICION I.

F*Luido* es un cuerpo, cuyas partes ceden á qualquiera fuerza, y cediendo facilmente se mueven entre sí.

Es la definicion que da el *Cavallero Newton* en la Seccion 5. del libro 2. de su *Philosophia natural.* Es consequente á lo dicho en el Libro primero: aun en el caso de que qualesquiera de las partes se impeliesen perpendicularmente contra una superficie inmovil, deben, en virtud de haberse de formar en ellas impresion, separarse lateralmente, y tanto mas quanto menor fuere la densidad del fluido. Se hace abstraccion aqui del caso en que una sola partícula infinitamente chica fuese la impelida: pues, como ya se ha dicho, no necesitamos exâminarle para lo que nos proponemos.

PROPOSICION I.

Quando toda la masa del fluido está en reposo, la fuerza que padecen las partículas de ella en qualquiera direccion es la misma.

Si la fuerza que padece una partícula por todas partes no fuera la misma, cediera su lugar á la mayor fuerza por la definicion precedente, y se pusiera en movimiento; lo que es contra lo supuesto: luego la fuerza que padece qualquiera partícula del fluido, quando este está en reposo, es la misma en todas direcciones.

PROPOSICION 2.

La fuerza ó peso que, en virtud de la gravedad, comprime verticalmente hacia abaxo qualquiera partícula de un fluido que está en reposo, es igual al peso de la coluna vertical del fluido que está sobre ella.

Qualquiera partícula de fluido gravita sobre su inferior por la propiedad general de los graves, y esta gravitacion se comunica de unas á otras partículas por el contacto de ellas: luego la inferior sufre el peso ó fuerza de todas, ú de la coluna vertical que las encierra.

Corolario.

Como qualquiera partícula está impelida con igual fuerza en todas direcciones, se sigue que qualquiera partícula está impelida en todas direcciones con una fuerza igual al peso de la coluna vertical que está sobre ella.

DEFINICION 2.

A la superficie superior de un fluido, tenga la figura ú disposicion que tubiere, llamaremos solamente *superficie del fluido*, á fin de evitar repeticiones.

PROPOSICION 3.

Quando toda la masa del fluido está en reposo, su superficie es horizontal, ó perpendicular á la direccion de los graves.

Si la superficie del fluido no es horizontal, las colunas verticales inmediatas á una partícula del fluido, y cuyo peso sufrirá en todas direcciones, no serán iguales: por consiguiente la partícula se ha de poner en movimiento, lo que es contra lo supuesto: luego la superficie del fluido que está en reposo es horizontal.

Corolario 1.

Si la superficie del fluido fuere horizontal, toda la masa de él estará en reposo.

Corolario 2.

Quando toda la masa del fluido no estubiere en reposo, su superficie no será horizontal: ó no siendo esta horizontal, no estará toda la masa del fluido en reposo.

Escolio 1.

Se prescinde de la atraccion, ú otra qualquiera fuerza, excepto la gravedad, que los vasos ó cuerpos que encierran los fluidos pueden tener, como siendo de poquísima consideracion para nuestro intento.

Escolio 2.

Debe entenderse esto quando todo el fluido comprehendido en el vaso, ó el de dos ó mas vasos que se comunican, es el mismo ú de igual densidad: porque, en este caso, cada canal pesa, por lo demonstrado, lo mismo que su correspondiente. Pero no será lo propio si, siendo distintos los fluidos de dos ó mas vasos, se comunican de uno á otro por un orificio. Supóngase que la densidad ó el peso de un pie cúbico de un fluido sea m, y la del otro M. El peso que el primero exercerá en el orificio será $madbde$, y el que exercerá el segundo $MAdbde$, denotando $dbde$ el area del orificio, y la profundidad que tubiere este debaxo de la superficie de los fluidos a y A. Para que haya equilibrio tendremos $madbde = MAdbde$: ó $a : A = \frac{1}{m} : \frac{1}{M}$: esto es, las alturas de las superficies de los fluidos sobre el orificio, han de ser en razon inversa de las densidades de los mismos fluidos, ó en razon inversa de sus pesos.

PROPOSICION 4.

La fuerza que padece qualquiera diferencio-diferencial de una superficie que encierra el fluido, es perpendicular á dicha superficie.

De qualquiera manera que esté impelida una superficie por un fluido, las fuerzas se pueden descomponer en perpendiculares y paralelas á la superficie; pero estas se destruyen mutuamente (*Prop.* 1.): luego no quedan sino aquellas, y por consiguiente la fuerza que padece qualquiera diferencio-diferencial de una superficie que encierra el fluido, es perpendicular á dicha superficie.

PROPOSICION 5.

La fuerza que padece qualquiera diferencio-diferencial de superficie que encierra el fluido, quando este está en reposo, es igual al peso de una coluna vertical del mismo fluido, cuya base sea igual á la diferencio-diferencial de la superficie, y su altura á la vertical que tubiere el fluido sobre la diferencio-diferencial.

Cada partícula del fluido de las que comprimen la di-

diferencio-diferencial de la superficie sufre una fuerza igual al peso de la coluna vertical del fluido, que está sobre ella: luego toda la fuerza que comprime la diferencio-diferencial es igual al peso de tantas colunas verticales como partículas del fluido la tocan: esto es, al de una coluna vertical, cuya base sea igual á la diferencio-diferencial de la superficie, y la altura á la vertical que tubiere el fluido sobre la misma diferencio-diferencial.

Corolario 1.

Fig. 51. Si se cortare, pues, una superficie AB por dos horizontales infinitamente cercanas FG, HI, y por otras dos perpendiculares á ellas KL, MN, la fuerza que padecerá el area diferencio-diferencial LKMN en la direccion CD que le es perpendicular, estando el fluido en reposo, será $= m.a.LN.NM$: en cuya expresion, tomandose las medidas por piés, m denota el peso de un pie cúbico del fluido, y a la altura vertical de su superficie sobre la diferencio-diferencial.

Corolario 2.

La fuerza $ma.LN.NM$, segun la perpendicular CD, se puede descomponer en dos, una horizontal CE, y otra vertical ED: y serán las tres fuerzas entre sí como CD, CE, y ED: ó tirando la horizontal NO, y la vertical MO, como NM, MO, y ON, respecto de ser los triángulos CED, MON semejantes, y el ángulo MNO $=$ EDC. Tendremos, pues, NM á MO, como la fuerza perpendicular segun CD, $ma.LN.NM$, á $ma.LN.MO$, fuerza horizontal segun CE. Y tambien NM á NO, como la fuerza perpendicular segun CD, $ma.LN.NM$, á $ma.LN.NO$, fuerza vertical segun ED.

Co-

Corolario 3.

La fuerza horizontal será, pues, á la vertical, como MO á NO, ó como el seno al coseno del ángulo MNO.

Corolario 4.

La MO es igual á la diferencial vertical, ó á la diferencial da de la altura del fluido: luego tambien será la fuerza horizontal CE que padecerá el area diferencio-diferencial LKMN, en caso de estar el fluido en reposo, $= mada.LN$.

Corolario 5.

La fuerza horizontal CE se puede igualmente descomponer en otras dos horizontales: una, segun la direccion dada CP, y otra perpendicular á esta CQ: Fig. 52.
y serán las tres fuerzas como CE, CP, CQ; ó tirando las LR, NR paralelas á las direcciones CP, CQ, por ser los triángulos CEP, CEQ, NLR semejantes, como LN, NR y LR. Tendremos, pues, LN á NR, como la fuerza horizontal, segun CE, $= mada.LN$, á $mada.NR$, fuerza horizontal segun CP: y del mismo modo LN á LR, como $mada.LN$, á $mada.LR$, fuerza horizontal segun CQ.

Corolario 6.

El producto LN.NO es el area NT $=$ PQRS en la Fig. 53.
superficie horizontal del fluido terminada por las quatro verticales LP, TS, NQ, OR levantadas de los quatro ángulos del paralelogramo LO: luego tambien será la fuerza vertical que padece la diferencio-diferen- Fig. 51.
cial LKMN $= ma.PQ.PS.$

PRO-

PROPOSICION 6.

La suma de las fuerzas horizontales que padece un cuerpo qualquiera que está sumergido en un fluido quando este está en reposo, es cero: y por consiguiente el cuerpo ha de quedar en reposo en quanto al movimiento horizontal.

Fig. 54. Sea ADBE un cuerpo qualquiera, y ACBE un plano que le corte, coincidente con la superficie del fluido, quando este esté en reposo. Paralelos á este córtense los dos FOI, LQR infinitamente cercanos: y entre ellos la diferencio-diferencial OQNP. Levántese el plano vertical OTMK: báxese á este la perpendicular PG, y tírense las verticales GH, OK, y TM. Sean MH $=$ TG $= u$, HK $=$ GO $= du$, HG $=$ KO $= z$, y la altura vertical entre los dos planos FOI, LQR $= dz$; y será (*Cor. 5. Prop. 5.*) la fuerza horizontal que padecerá la diferencio-diferencial OQNP, en la direccion FT, ó su paralela AM, $= mzdzdu$: y la que padece FOQL, á causa de ser z constante por hallarse el fluido en reposo, $= muzdz$. Pero para que esta expresion sea la que padezca FOIRQL, hemos de substituir $u = 0$, por ser este el valor de u en el punto I: luego la suma de las fuerzas horizontales que padece la zona FOIRQL $= 0$. Lo mismo se demonstrará de todas las demas zonas en que se divida el cuerpo; y lo propio en qualesquiera otras direcciones: luego la suma de las fuerzas horizontales que padece todo el cuerpo es cero; y por consiguiente quedará este en reposo en quanto al movimiento horizontal.

PROPOSICION 7.

La fuerza vertical que padece un cuerpo, ó que le comunica el fluido, quando este está en reposo, es igual al peso del fluido que desocupa el cuerpo.

Sea ADBE un cuerpo qualquiera, y ACBE un plano que le corte coincidente con la superficie del fluido quando este esté en reposo. Fig. 55. Tómese la AB para medir en ella las abcisas, y sus perpendiculares EC, FG infinitamente cercanas para medir las ordenadas: tírense tambien las HI, KL infinitamente cercanas y paralelas á las abcisas: y haciendo AM $= x$, MH $= u$, será HK. HL $= dudx$: y la fuerza vertical que padecerá la diferencio-diferencial NPOQ de la superficie, será (*Cor. 6. Prop. 5.*) $= ma \cdot dudx$; ó por ser $a =$ HN altura del fluido sobre dicha superficie, poniendo HN $= z$ variable, será la fuerza vertical $= mzdudx$; pero la expresion $zdudx$ es la diferencio-diferencial del espacio del cuerpo LN comprehendido entre las quatro verticales HN, KP, IQ, LO: luego su integral $\int zdudx$, será todo el espacio que ocupa el cuerpo debaxo del fluido, y $m\int zdudz$ el peso del fluido que ocupara el mismo espacio: luego la fuerza que padece el cuerpo verticalmente hacia arriba, ó que le comunica el fluido que está en reposo, es igual al peso de este que desocupa el cuerpo.

PROPOSICION 8.

Para que un cuerpo sumergido en un fluido que está en reposo esté sin movimiento vertical, es preciso que el peso del cuerpo sea igual al del fluido que haya desocupado: y ademas, que la vertical que pasa por el centro del espacio del fluido desocupado, coincida con la que pasa por el centro de gravedad.

Las fuerzas $mzdudx$ son otras tantas potencias que impelen al cuerpo verticalmente hacia arriba, ó lo que es equivalente (*Pro. 14. Lib. 1. y sus Cor.*) $m\int zdudx$ es una potencia, que impele al cuerpo verticalmente hacia arriba, colocada en el centro de todas ellas, ú del espacio que ocupa el cuerpo en el fluido: y M, supo-

 nien-

niendo esta cantidad la masa de todo el cuerpo, es otra potencia que le impele verticalmente hacia abaxo: luego (*Cor.*10. *Prop.*17. *Lib.*1.) ha de ser $msfzdudx - M = 0$ para que el centro de gravedad quede sin movimiento: esto es, ha de ser el peso del cuerpo M, igual á $msfzdudx$ peso del fluido que haya desocupado. A mas de esto, si llamamos p la distancia horizontal desde la vertical, que pasa por el centro de gravedad, á la que pasa por la potencia $msfzdudx$, ó centro del espacio ó volúmen del cuerpo sumergido en el fluido, tendremos (*Cor.*6. *Prop.*20. *Lib.*1.) $\frac{msdtfpdtfzdudx}{S}$ por el ángulo giratorio; pero esta cantidad no puede ser cero desde el principio de la accion si no fuere $p = 0$: luego para que tampoco resulte rotacion, es preciso que la vertical, que pasa por el centro del espacio del fluido desocupado, coincida con la que pasa por el centro de gravedad.

CAPITULO 2.

De la fuerza con que en el movimiento actuan los fluidos contra una diferencio-diferencial de superficie.

PROPOSICION 9.

SI en la superficie que comprime al fluido que está en reposo, se hace un agujero, que por ahora se puede suponer infinitamente pequeño, saldrá por él el fluido con una velocidad igual á la que adquiriera este cayendo libremente de la altura vertical a que tenga el fluido sobre el agujero.

Supuesta A una partícula del fluido, y α la potencia que la anima cayendo libremente, tendremos (*Cor.*

(*Cor.*2. *Prop.*4. *Lib.*1.) $\frac{\alpha t}{A} = u$. Supóngase ahora la misma partícula saliendo por el agujero: la potencia que la animará será la fuerza de todas las partículas que estan contenidas en la altura a (*Prop.*2.): con que siendo n un número infinito, representará tambien este el número de partículas contenidas en dicha altura, y $n\alpha$ será la potencia que anima á la que sale por el agujero; pero el tiempo en que actua esta sobre la partícula ha de ser infinitamente pequeño, que debemos representar por $\frac{t}{n}$; con que tambien tendremos (*Cor.*2. *Prop.*4. *Lib.*1.) $\frac{n\alpha}{A} \cdot \frac{t}{n} = V$; denotando V la velocidad con que sale la partícula por el agujero: esto es, reduciendo $\frac{\alpha t}{A} = V$: luego las dos velocidades V y u son iguales.

Corolario.

Como las fuerzas que padecen las partículas del fluido son iguales en todas direcciones, se sigue, que en qualquiera direccion tomará la partícula impelida una velocidad $u = 8\sqrt{a}$: que es la que (*Cor.*1. *Princ.*3. *Lib.*1.) debe tomar un cuerpo ó partícula de fluido que cae libremente de la altura vertical a.

Escolio.

En la práctica no resulta jamas la velocidad del fluido sino menor de la que asignamos. Esta diferencia procede de la friccion que debe resultar en el choque de las partículas del fluido contra los lados del agujero: y aun de la que precisamente han de producir en el choque de unas partículas con otras, aun antes

tes de llegar á salir por el mismo agujero. Pero prescindiremos de estas fricciones, porque para el asunto no son necesarias, como mas adelante se verá.

PROPOSICION 10.

Hallar la relacion entre la fuerza perpendicular que padece una diferencio-diferencial de superficie, y la velocidad con que saliera por ella el fluido si tubiera libre pasage.

Fig. 51. La fuerza la hallamos (*Cor.* 1. *Prop.* 5.) $ma.\mathrm{LN}.\mathrm{NM}$, denotando LN. NM el area diferencio-diferencial de la superficie: y la velocidad con que saliera el fluido por esta diferencio-diferencial la hemos acabado de hallar $u = 8\sqrt{a}$: lo que da $a = \frac{u^2}{64}$: con que tambien tendremos la fuerza representada por $\frac{mu^2}{64}.\mathrm{LN}.\mathrm{NM}$.

Corolario.

Teniendo la velocidad con que saliera el fluido por la diferencio-diferencial, se tendrá la fuerza que esta padecerá, multiplicando su area LN. NM por el quadrado de la velocidad u, y por la constante $\frac{m}{64}$.

PROPOSICION 11.

La fuerza perpendicular que padecerá una diferencio-diferencial de superficie LN. NM, quando esta se mueva dentro del fluido en direccion que le sea perpendicular, será $= m.\mathrm{LN}.\mathrm{NM}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$, denotando u la velocidad perpendicular de la superficie.

La velocidad con que saliera el fluido por la diferencio-diferencial de una superficie, si tubiera libre pa-

pasage, es (*Cor. Prop.* 9.) $8\sqrt{a}$: con que si la superficie se mueve con la velocidad u en la misma direccion perpendicular por donde se dirige el fluido, la velocidad relativa será $8\sqrt{a} \pm u$: mas en el caso de moverse la superficie contra el fluido, y menos en el de apartarse ó huir de él: con que la fuerza perpendicular que padecerá, será (*Corol. Propos.* 10.) $= \frac{m.\mathrm{LN}.\mathrm{NM}}{64}\left(8\sqrt{a} \pm u\right)^2 = m.\mathrm{LN}.\mathrm{NM}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$, denotando a la altura vertical desde la diferencio-diferencial de la superficie, hasta la superficie del fluido estando este en reposo.

PROPOSICION 12.

Si el ángulo MNO que forma la superficie con la horizontal NO, perpendicular á LN, se llama n, será tambien la fuerza perpendicular que padecerá la diferencio-diferencial LKMN, moviendose esta perpendicularmente $= m.\mathrm{LN}.\frac{\mathrm{MO}}{sen.n}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2 = m.db.\frac{da}{sen.n}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$: haciendo la diferencial horizontal $\mathrm{LN} = db$.

Porque son $\mathrm{MN} : \mathrm{MO} = 1 : sen.n$, y $\mathrm{NM} = \frac{\mathrm{MO}}{sen.n} = \frac{da}{sen.n}$: cuyo valor substituido en la expresion $m.\mathrm{LN}.\mathrm{NM}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$ hallada (*Propos.* 11.) la reduce á $\frac{m.db.da}{sen.n}.\left(\sqrt{a} \pm \tfrac{1}{8}u\right)^2$, fuerza perpendicular que padecerá la diferencio-diferencial LKMN moviendose esta perpendicularmente.

PRO-

PROPOSICION 13.

Si en lugar de moverse la diferencio-diferencial LKMN en direccion que le sea perpendicular, se moviese en otra qualquiera que la corte con un ángulo dado θ, la fuerza perpendicular que padecerá la diferencio-diferencial, será $= \frac{m.db.da}{sen.n} \cdot (\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta)^2$.

La velocidad segun la direccion que tubiere la diferencio-diferencial, será á la velocidad perpendicular, como 1 á $sen.\theta$: con que será esta velocidad perpendicular $= u sen.\theta$, cuyo valor puesto en la expresion $\frac{m.db.da}{sen.n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u)^2$ hallada (*Prop.* 12.) en lugar de u sola, que alli representó la velocidad perpendicular, resulta la fuerza perpendicular de la diferencio-diferencial $= \frac{m.db.da}{sen.n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta)^2$.

PROPOSICION 14.

La fuerza que padecerá la diferencio-diferencial de la superficie LKMN en qualquiera direccion que la corte con un ángulo dado x, será $=$ - - - - - $\frac{m.db.da.sen.x}{sen.n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta)^2$

Fig. 56. Sea la direccion qualquiera DL: báxese del punto D la perpendicular DC á la superficie, y tirada la LC, será x el ángulo DLC, ó su igual DFG, siendo FG perpendicular á LD. Si representare, pues, DF la fuerza perpendicular, DG representará la que padece la diferencio-diferencial de la superficie en la direccion DL: y siendo DF á DG, como 1 : $sen.x$: serán tambien 1 á $sen.x$, como $\frac{m.db.da}{sen.n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta)^2$, fuerza perpendicular, á $\frac{m.db.da.sen.x}{sen.n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta)^2$, fuerza segun la direccion DL.

Corolario.

En caso de pedirse la fuerza segun la direccion del movimiento, es $x = \theta$: luego la fuerza que padecerá la diferencio-diferencial de la superficie LKMN en la direccion de su movimiento, será $\frac{m.db.da.sen.\theta}{sen.n}(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8} u sen.\theta)^2$.

Lema I.

Si por qualquiera punto D, de la direccion DL, se tira el plano vertical IED, perpendicular á la diferencio-diferencial LKMN, y el horizontal NLA, que coincida con la base LN: elevada la vertical DAI: tiradas las perpendiculares AB, DC, AH: llamando λ al ángulo NLA, y μ el LDA; será $sen.x$ del ángulo CLD, que forma la direccion DL con la diferencio-diferencial, $= sen.\lambda\, sen.n\, sen.\mu + Cos.\mu\, Cos.n$.

Supuesta LA $= q$, será AE $= q\, sen.\lambda$: y en el triángulo rectángulo BAE, por ser $sen.n$ el seno de BEA, será BA $=$ CH $= q\, sen.n$. En el triángulo tambien rectángulo LAD, es DA $= \frac{q Cos.\mu}{sen.\mu}$; y por ser semejantes los triángulos DAH, DIC, EIA, es IEA $=$ HDA, y el seno de este ángulo $= sen.n$: por lo que es DH $= \frac{q Cos.\mu Cos.n}{sen.\mu}$: con que CH$+HD=$CD $= q\, sen.\lambda\, sen.n + \frac{q Cos.\mu Cos.n}{sen.\mu}$. DL es $= \frac{q}{sen.\mu}$: luego en en el triángulo rectángulo CLD serán $\frac{q}{\mathit{sen}.\mu}$: $q\,\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.n$ $+\frac{q\,\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.\mu}=1:\mathit{sen}.x=\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.n.\mathit{sen}.\mu+\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n.$

Corolario 1.

Substituyendo este valor de $\mathit{sen}.x$ en la fuerza $\frac{m.db.da.\mathit{sen}.x}{\mathit{sen}.n}\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta\right)^2$ que padece la diferencio-diferencial, se reducirá esta á ----------- $m.db.da\left(\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.\mu+\frac{\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta\right)^2$.

Corolario 2.

Si del extremo N de la base LN se baxa, sobre la direccion LR que pasa por el otro extremo, la perpendicular NR: suponiendo esta $=dc$, será NR$=$ $db.\mathit{sen}.\lambda=dc$, y $db=\frac{dc}{\mathit{sen}.\lambda}$.

Corolario 3.

Substituyendo este valor de db en la fuerza $m.db.da\left(\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.\mu+\frac{\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta\right)^2$, se reducirá esta á $m.dc.da\left(\mathit{sen}.\mu+\frac{\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta\right)^2$.

Corolario 4.

En caso de pedirse la fuerza horizontal es $\mathit{sen}.\mu=1$, y $\mathit{Cos}.\mu=0$: luego será aquella $=m.dc.da\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta\right)^2$.

Co-

Corolario 5.

La fuerza horizontal será á la que se exerce en una direccion qualquiera, como la unidad á $\mathit{sen}.\mu+\frac{\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.n}$: ó como $\mathit{sen}.n\,\mathit{sen}.\lambda$ á $\mathit{sen}.n\,\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.\mu+\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n$.

Corolario 6.

Si fuere H la fuerza horizontal, será la que se exerce en una direccion qualquiera$=H\left(\mathit{sen}.\mu+\frac{\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.n}\right)$.

Corolario 7.

En el caso de pedirse la fuerza vertical, es $\mathit{sen}.\mu=0$, y $\mathit{Cos}.\mu=1$: luego será aquella $=\frac{H\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.n}$.

Corolario 8.

Si la horizontal NO, perpendicular á la base LN, se supone $=de$, será $\mathit{Cos}.n:\mathit{sen}.n=de:da=\frac{de\,\mathit{sen}.n}{\mathit{Cos}.n}$: cuyo valor substituido en la fuerza ----- $m.db.da\left(\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.\mu+\frac{\mathit{Cos}.\mu\,\mathit{Cos}.n}{\mathit{sen}.n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta\right)^2$, será tambien esta$=m.db.de\left(\frac{\mathit{sen}.n\,\mathit{sen}.\lambda\,\mathit{sen}.\mu}{\mathit{Cos}.n}+\mathit{Cos}.\mu\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{se}.\theta\right)^2$.

Corolario 9.

En caso de pedirse la fuerza vertical, es $\mathit{sen}.\mu=0$, y $\mathit{cos}.\mu=1$: luego será aquella$=m.db.de\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta\right)^2$.

Co-

Corolario 10.

Respecto que θ expresa el ángulo que forma la direccion del movimiento con la diferencio-diferencial, tambien será $fen.\theta = fen.\lambda fen.\eta fen.\mu + Cof.\mu Cof.\eta$, caso de pedirse la fuerza segun esta direccion.

Corolario 11.

Siendo el movimiento horizontal, es $fen.\mu = 1$, y $Cof.\mu = 0$: luego en este caso es $fen.\theta = fen.\lambda fen.\eta$.

Corolario 12.

Siendo el movimiento vertical, es $fen.\mu = 0$, y $Cof.\mu = 1$: luego en este caso será $fen.\theta = Cof.\eta$.

Corolario 13.

La fuerza horizontal, y en la direccion del movimiento asimismo horizontal, será pues $= -$ $m.dc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}ufen.\lambda fen.\eta\right)^2$: y la fuerza vertical con movimiento asimismo vertical $= m.db.de\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}uCof.\eta\right)$.

Escolio.

Estos casos deben entenderse quando la superficie AB está parte dentro del fluido, y parte fuera, de suerte que sea a la altura vertical desde la diferencio-diferencial LKMN, hasta la superficie del fluido P, estando este en reposo; pero puede estar la superficie AB toda sumergida en este, de suerte que sea Q un punto en la superficie del fluido. En este caso debiera representar a la altura vertical QM del fluido sobre la diferencio-diferencial LKMN; y no la altura PM de la superficie. Para evitar este inconveniente haremos $QP = D$, y $PM = a$, de suerte que ya no será a la altura vertical del fluido sobre la diferencio-diferencial LKMN, sino $D + a$: cuyo valor substituido en las expresiones en lugar de a sola, que antes denotaba dicha altura vertical, serán (*Propos.* 14. y *Cor.* 1. *Lem.* 1.) $\frac{m.db.dafen.\varkappa}{fen.\eta}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}ufen.\theta\right)^2 = -$ $m.db.da\left(fen.\lambda fen.\mu + \frac{Cof.\mu Cof.\eta}{fen.\eta}\right)\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}ufe.\theta\right)^2$ la fuerza segun una direccion qualquiera: (*Cor.* 4. *Lem.* 1.) $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}ufen.\theta\right)^2$ la horizontal: y (*Cor.* 9. *Lem.* 1.) $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}ufen.\theta\right)^2$ la vertical. Y si se piden las fuerzas segun la direccion del movimiento, en cuyo caso es $\varkappa = \theta$, serán $-$ $\frac{m.db.dafen.\theta}{fen.\eta}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}ufe.\theta\right)^2$ en una direccion qualquiera: (*Co.* 13. *Le.* 1.) $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}ufen\lambda fen.\eta\right)^2$ la horizontal, y $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}uCof.\eta\right)^2$ la vertical.

Fig. 51.

PROPOSICION 15.

Si un fluido se mueve en virtud de su propia gravedad, y toma una velocidad constante, parte de la accion de cada una de sus partículas queda destruida por una fuerza qualquiera.

Sea CI la superficie del fluido inclinada al horizonte, y B una partícula de él, cuya accion de la gravedad segun la vertical BD se descomponga en dos, una se-

Fig. 57.

segun BA, perpendicular á la superficie CI, y otra segun AD, paralela á la misma. Por la primera debe quedar en equilibrio el fluido, y por la segunda debiera accelerar su velocidad; pero, por la suposicion, la velocidad es constante: luego $du = 0$, y la suma de las potencias que actuan para aumentar la velocidad es cero: con que por precision hay una fuerza ó potencia en direccion opuesta que destruye á la que actua segun AD.

PROPOSICION 16.

Hallar la fuerza que padece una diferencio-diferencial de superficie, quando está esta en reposo, y es el fluido el que se mueve y la choca.

A primera vista se ofrece, que siendo la accion y la reaccion iguales, parece que para el efecto lo mismo es que se mueva la superficie que el fluido, y que toda la diferencia consiste en suponer que la velocidad u la tenga el fluido en direccion contraria: en efecto, si la gravitacion de las partículas del fluido fuera siempre perpendicular á la superficie de este, no se ofreciera duda en ello; pero no es asi, en caso de moverse el fluido: su movimiento depende de su desnivelacion, y por consiguiente ya no es perpendicular á su superficie la direccion, segun la qual gravitan las partículas del fluido. Que el fluido corra con la superficie CI inclinada al horizonte, y con la velocidad constante u: la gravitacion vertical α de las partículas del fluido en FB se puede descomponer en dos, una β segun BA perpendicular á la superficie CI, y otra γ paralela á la misma superficie; y siendo ω el ángulo ADB que forma la vertical con la superficie del fluido, será $\beta = \alpha sen.\omega$, y $\gamma = \alpha Cos.\omega$. Esta gravitacion ó potencia queda destruida (*Prop.* 15.), y solo queda la $\beta = \alpha sen.\omega$ perpendicular á la superficie CI: con que ten-

tendremos equilibrio en el fluido por la accion de ella, y su valor será el que hayamos de substituir en las fórmulas precedentes en lugar de α solo. Suponiendo ahora, como antes, la vertical $FB = a$, será $EB = a sen.\omega$, y substituyendo tambien este valor en lugar de a en la equacion hallada (*Cor.* 2. *Propos.* 6. *Lib.* 1.) $a = \frac{Au^2}{2\alpha}$, tendremos $a sen.\omega = \frac{Au^2}{2\alpha sen.\omega}$, que dá $\frac{\alpha}{A} = \frac{u^2}{2a sen.\omega^2}$; pero (*Cor.* 1. *Prin.* 3. *Lib.* 1.) es $\frac{\alpha}{A} = 32$: con que será $32 = \frac{u^2}{2a sen.\omega^2}$, que produce $u = 8a^{\frac{1}{2}} sen.\omega$, velocidad con que saldrá el fluido por un orificio hecho en B en virtud de sola la accion de la potencia $\beta = \alpha sen.\omega$. La velocidad relativa con que se moverá, pues, el fluido en el orificio, será $8a^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm u sen.\theta$; y el peso ó fuerza perpendicular que suportará la diferencio-diferencial de la superficie LN.NM, será $m.LN.NM\left(a^{\frac{1}{2}} se.\omega \pm \frac{1}{8} u se.\theta\right)^2$, ó $m.LN.NM\left((D+a)^{\frac{1}{2}} se.\omega \pm \frac{1}{8} u se.\theta\right)^2$, en cuyo valor colocando los de LN y NM hallados, ó bien substituyendo, en las fórmulas halladas (*Escolio Lem.* 1.) $(D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega$, en lugar de $(D+a)^{\frac{1}{2}}$, serán $\frac{m.db.da.sen.\varkappa}{sen.\eta}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2 =$ - - $m.db.da\left(sen.\lambda sen.\mu + \frac{Cos.\mu Cos.\eta}{sen.\eta}\right)\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ la fuerza segun una direccion qualquiera: - - - - - - $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ la horizontal, y $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ la vertical: y si se piden las fuerzas segun la direccion del movimienmiento $\frac{m.db.da\,sen.\theta}{sen.n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \tfrac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2 = -$ $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \tfrac{1}{8}u\,sen.\lambda\,sen.n\right)^2$ la horizontal, y $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \tfrac{1}{8}u\,Cos.n\right)^2$ la vertical.

Corolario 1.

Si el fluido se moviere horizontalmente será $sen.\omega = 1$, y las fuerzas se reducirán á las mismas que quando el fluido se halla parado, y se mueve la superficie chocada; por lo que en este caso solo corresponde bien el principio, generalmente recibido, de que lo mismo es, para el efecto, que se mueva la superficie, que el fluido.

Corolario 2.

En estas fórmulas se encierran, pues, las otras, solo con hacer $sen.\omega = 1$.

PROPOSICION 17.

Hallar la fuerza que padece una diferencio-diferencial de superficie quando se mueven á un tiempo, tanto la diferencial, como el fluido.

Para este caso no hay sino hallar la velocidad compuesta de las dos que se pondrá en estas últimas fórmulas en lugar de u: y el ángulo que formare la direccion compuesta con la diferencio-diferencial de la superficie, se colocará por θ: y quedará el caso resuelto, como es claro por la descomposicion y composicion de fuerzas.

Es-

Escolio.

Como el fluido es cuerpo, debieramos habernos sujetado en la theórica de este Capítulo á las leyes y principios que se dieron (*Cap. 6. Lib. 1.*), pues el impulso de una superficie contra el fluido es una efectiva percusion. Su fuerza, denotada allá por $\pi = \frac{DH\,DH}{DH+DH}$ es, en este caso de ser la dureza ú densidad del fluido D despreciable respecto á la del cuerpo, $\pi = DH$: esto es, la fuerza que padezca la superficie, es en razon directa de la densidad del fluido, y de la amplitud H de la impresion; pero esto no nos hubiera conducido á un perfecto conocimiento de la fuerza, pues aunque sepamos el valor de H en el caso del reposo, que se reduce al area superficial del cuerpo chocante perpendicular á la direccion del movimiento, no lo sabemos en el caso del actual movimiento; porque en este se altera dicho valor. Tampoco hubieramos logrado mejor conocimiento valiendonos de la igualacion (*Cor. 2. Prop. 42. Lib. 1.*) $\pi = \frac{H}{I}\left(\tfrac{1}{2}AU^2 + \alpha x\right)$ á que se reduce este caso, ó suponiendo la velocidad primitiva U con que se mueva la superficie igual cero, $\pi = \frac{H\alpha x}{I}$: pues siendo la impresion total I como Hx, solo nos quedara por esta equacion el conocimiento de que la fuerza π que padeciera la superficie, sería como la potencia α que la impeliese. Por esto hemos procurado tomar otro camino que, como se ha visto, nos ha conducido al verdadero conocimiento del valor de $\pi = \frac{m.db.da\,sen.x}{sen.n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \tfrac{1}{8}u\,se.\theta\right)^2$; pero por muy simple que sea la theórica que hemos em-

empleado, no dexara de combatirse con muy sólidos fundamentos, si la práctica no nos la verificara por quantos medios se proporcionan, como se verá mas adelante. Estos tropiezos han hecho el asunto, en todos tiempos, de la mayor dificultad, y los mas célebres Geómetras confiesan, que solo han procurado satisfacer, sin haberlo conseguido enteramente.

El *Doctor Wallis*, en sus *Obras Mathemáticas*, establece esta fuerza solamente como la simple velocidad: y baxo de esta doctrina funda sus cálculos en la proyeccion de los cuerpos arrojados por el ayre. No dá mas razones para seguir su regla, sino que con dupla velocidad aparta la superficie dupla cantidad de fluido, con tripla tripla, y asi en adelante. Añade podersele objetar, que con dupla velocidad, mueve la superficie dupla cantidad de fluido con dupla velocidad, y que por consiguiente parece que la superficie necesita duplicada fuerza para moverle; pero satisface con que la superficie no mueve, sino que solo separa el fluido. Es notable como no se le ofreció al *Doctor* la dificultad que de esto redunda, pues se hace dificil comprehender como pueda la superficie separar al fluido sin moverle: y sin moverle con velocidad proporcional á la suya.

El gran Geómetra *Leonardo Eulero*, en su *Ciencia*
Fig. 58. *naval*, dice: supóngase una superficie plana AB, cuya area sea a^2, puesta en movimiento dentro del agua, segun la direccion CO perpendicular á dicha superficie. Sea M el peso del cuerpo del qual AB es la superficie, y v la altura de donde hubiera de caer para obtener la velocidad que llevare en su movimiento. Sea asimismo $Cc = dx$ la longitud que caminare en un instante de tiempo, de suerte que en este instante pase la superficie de la situacion AB á la ab, siendo $Aa = Cc = Bb$: y como disminuye el cuerpo su velocidad, pone $v - dv$ por la altura de la qual debiera caer

caer

caer para obtener su velocidad disminuida. Esto supuesto, sigue el mismo Autor, el cuerpo habrá impelido en dicho instante de tiempo al agua contenida en el espacio $AabB$, cuyo peso es igual á ma^2dx, puesta m por la gravedad ó densidad del agua: y dado que el centro de gravedad de la superficie se dirija por la misma línea Cc, donde se halla el del volumen de agua $AabB$, á fin que no redunde rotacion, esta agua se pondrá en movimiento, y despues del primer instante de tiempo irá con la misma velocidad que el cuerpo: será, pues, el movimiento despues de este instante el del cuerpo y el del agua: esto es, $(M + ma^2dx)(v - du)^{\frac{1}{2}}$; que debe ser igual al que tubo el cuerpo al principio del movimiento, que era $Mv^{\frac{1}{2}}$: luego $Mv^{\frac{1}{2}} = (M + ma^2dx)(v - dv)^{\frac{1}{2}} = (M + ma^2dx)\left(v^{\frac{1}{2}} - \frac{dv}{2\sqrt{u}}\right)$: que dá $Mdv = 2ma^2vdx$. Supone despues, que sea p una potencia que dirigida segun CO sea capaz de producir el mismo efecto que la fuerza que impele la superficie: de que deduce $Mdv = pdx = 2ma^2vdx$, ó $p = 2ma^2v$: esto es, la potencia equivalente á la fuerza, ó la misma fuerza igual al duplo peso de una coluna de agua, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo para que obtubiera la velocidad con que se mueve. Para reducir esta theórica á la nuestra supondremos en la equacion $m.dc.da\left((D + a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega + \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ $sen.\omega = 1$, $sen.\theta = 1$, y quedará en $m.dc.da\left((D + a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}u\right)^2$: donde se ve, que solo pueden convenir una con otra haciendo $D + a = 0$, ó suponiendo que la diferencio-diferencial chocada coincida con la superficie del fluido, pues en este caso queda la fuerza $= m.dc.da.\frac{1}{64}u^2$: ó ó substituyendo $v = \frac{1}{64}u^2$, $m.dc.da.v$: cuya expresion es la misma que la de *Eulero*, con sola la diferencia de ser la suya dupla de lo que es esta. Pero en substancia, su theórica no conviene con la nuestra, sino en un caso solamente casi imposible de darse : y aun en él resulta que la fuerza es igual al duplo peso de una coluna de agua, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo para obtener la velocidad con que se mueve ; cuya disonancia confiesa aun el mismo Autor, considerando que el peso que sufre una superficie no es sino el simple de la misma coluna de agua, como resulta de nuestra theórica. Pero mas notable se hace aun este reparo, si en lugar de $Mdv = pdx$, se coloca $Mdv = \frac{pdx}{32}$, que es la legítima equacion. En los cuerpos graves que caen verticalmente es (*Prop. 6. y Cor.* 1. *Prin.* 3. *Lib.* 1.) $dv = \frac{Mudu}{32M}$, suponiedo u la velocidad con que se mueva el cuerpo : y en el caso de que la potencia p mueva á este, es $dx = \frac{Mudu}{p}$. De una y otra equacion resulta $32dv = \frac{pdx}{M}$; ó $Mdv = \frac{pdx}{32}$: que dá $\frac{pdx}{32} = 2ma^2vdx$; ó $p = 64ma^2v$: esto es, la resistencia igual al peso de 64 colunas de agua, cuya base sea la superficie impelida, y la altura aquella de donde fuera necesario que cayese el cuerpo para obtener la velocidad con que se mueve : peso espantoso, y muy distante de lo que nos enseñan los principios del Capítulo antecedente. A mas de esto, el peso del agua que mueve el cuerpo no es ma^2dx ; sino (*Cor.* 1. *Prop.* 5.) el de una coluna, cuya base es la superficie a^2, y la altura aquella que tubiere el fluido hasta su superficie : de suerte que el peso será mayor, quanto mas profunda se halle la superficie en el fluido, y por consiguiente tambien será mayor la resistencia : cuya resulta, tan clarísima, en ninguna manera la deduce el cálculo é igualaciones supuestas. Sin esta consideracion se pudiera quedar convencido de lo mismo : no es necesario para ello sino leer el Escolio al fin de la Proposicion 35. del Libro 2. de la *Philosophia natural del Cavallero Newton*, donde se verá claramente que el cuerpo, aunque solo choque al fluido ma^2dx, este choca al que tiene delante : este al otro que se sigue, y asi sin límite conocido : de suerte, que impele el cuerpo una cantidad de fluido que no se conoce ; tan lexos está de impeler solamente al contenido en el espacio a^2dx.

Daniel Bernoulli, bien conocido en la Republica literaria por sus científicas Obras, trahe semejante cálculo, en que del mismo modo concluye, (*a*) que no siendo el fluido elástico, la resistencia será igual á la dupla coluna del propio fluido, cuya base es la superficie impelida, y la altura aquella de donde debe caer para obtener la velocidad con que se mueve ; pero añade, que si el fluido fuere elástico, la resistencia será la quádrupla coluna, ó dupla que la primera. Esta resulta se hace conseqüente por la velocidad que les queda á los cuerpos, no solo elásticos, sino perfectamente elásticos, despues de fenecida la máxima impresion. Esta se halló (*Cor.* 4. *Prop.* 31. *Lib.* 1.) para nuestro caso, $= \frac{(M - ma^2dx)u}{M + ma^2dx}$: esto es, $(M - ma^2dx)u = (M + ma^2dx)(u - du)$, ó $Mudu = 2ma^2dxu^2$: donde substituyendo $Mudu = pdx$, queda $p = 2ma^2u^2$; esto

Gg 2

(*a*) *Comentarios de la Academia de Petersbourgo M.M. de Junio y Octubre de* 1727.

esto es, la resistencia dupla de la que se halló no siendo el fluido elástico. No es necesario decir de este cálculo sino que encierra las mismas dificultades y tropiezos que el antecedente, agregandose ademas la suposicion de que sea el fluido perfectamente elástico, sin embargo de no haber de exercer su total elasticidad, sino despues de un tiempo infinito. Lo mas particular de este asunto es, que no habiendo determinado nuestros Autores sino la fuerza que padecian las superficies, no se les ofreciese la imposibilidad de que fuese solamente como una funcion de la velocidad; pues siendo esta cero, tambien debia serlo la fuerza: lo que es contra todos los principios del Capítulo primero, que ellos, y todo el mundo, admiten por certísimos.

El *Cavallero Newton* empieza el exâmen de la qüestion por camino enteramente opuesto. (*a*) En la Seccion 1. dá las resultas ó propiedades que deben seguirse de suponer las resistencias como las simples velocidades: y en el Escolio, al fin de la misma Seccion, dice: *Pero esta resistencia de los cuerpos en la razon de las simples velocidades, es mas hypóthesis mathemática que physica: en los medios destituidos de toda tenacidad, la resistencia que se experimenta en los cuerpos es en razon duplicada de las velocidades. Porque*, sigue el mismo Autor, *por la accion de un cuerpo que se mueve con mayor velocidad, mayor movimiento se le comunica al fluido en la proporcion de la velocidad, y esto en menos tiempo; en igual tiempo por la razon de moverse mayor cantidad de fluido, aumenta el movimiento en razon duplicada de las velocidades: y la resistencia, por ser la fuerza de reaccion, es igual ó proporcional á aquel movimiento.* Este discurso, que es general entre todos los Autores, despues de lo que hemos dicho del *Dr. Wallis*, apoya asimismo nuestro Philosopho, y con él pasa en la Sec. 2. á

(*a*) *Philosophia naturalis, Lib. 2.*

á deducir las propiedades que deben resultar de suponer las resistencias como los quadrados de las velocidades. Sigue despues en la 3. á exâminar las propiedades que resultaran si la resistencia es parte como las simples, y parte como los quadrados de las velocidades, á fin de consultar despues las experiencias, y ver qual de estas suposiciones verifican. En las Secciones 4. y 5. determina el movimiento que deben tomar los cuerpos que giran en los fluidos que resisten, segun las suposiciones primeras: la densidad y compresion que padecen: y en la 6. trata del movimiento y resistencia que padecen los péndulos ó perpendículos que giran sobre un punto fixo en virtud de su gravedad. En la ultima Proposicion, que es la 31, demuestra que las diferencias de sus arcos descendentes, á los ascendentes, son como las mismas resistencias; pero para ello supone, que los péndulos oscilen en la cycloide, para que todas sus oscilaciones sean de igual duracion; ó como diximos (*Cor.* 4. *Prop.* 48. *Lib.* 1.), que sean las oscilaciones del péndulo muy cortas, para que los arcos que describen degeneren en cycloides. No dexó el mismo Cavallero de hacer y repetir las experiencias para conocer un principio tan necesario. Todas las expone en el Escolio general que trahe al fin de la Proposicion 31. Para las primeras se valió de un péndulo de $10\frac{1}{2}$ pies Ingleses de largo, compuesto de una bola de madera de $6\frac{7}{8}$ pulgadas de diámetro, que puso en movimiento. La primera Tabla que de ellas nos dá es esta.

Medios arcos descriptos en pulgadas. ------	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos.	$\frac{1}{656}$	$\frac{1}{242}$	$\frac{1}{69}$	$\frac{4}{71}$	$\frac{8}{37}$	$\frac{24}{29}$

Los primeros números están en la razon de 1 á 2: luego para que las resistencias sean como los quadrados de las velocidades, segun creyó y dixo en su Escolio, al al fin de la 1. Seccion, han de estár los segundos en la razon de 1 á 4.

La primera razon es de $\frac{1}{656}$ á $\frac{1}{242}$, ó como 1 á 2 $\frac{172}{242}$.

La segunda de 69 á 242, ó como 1 á 3 $\frac{35}{69}$.

La tercera de 71 á 276, ó como 1 á 3 $\frac{63}{71}$.

La quarta de 37 á 142, ó como 1 á 3 $\frac{31}{37}$.

La quinta de 29 á 111, ó como 1 á 3 $\frac{24}{29}$.

Donde se ve, que todas estas razones son mayores que de 1 á 4 en que están los quadrados de los medios arcos, ú de las velocidades. No obstante repara nuestro respetable Autor, que las últimas en que el péndulo hacía grandes oscilaciones, están muy cerca de ser como dichos quadrados, y por consiguiente, que en estas oscilaciones será la resistencia proxîmamente como los mismos quadrados. Pero no sucede lo propio en las oscilaciones pequeñas: en la primera fue como 1 á 2 $\frac{172}{242}$, y es muy regular que si hubiera hecho experiencias con menores oscilaciones, hubiera hallado en ellas la razon de las resistencias en la de 1 á 2, ó como las simples velocidades, pues quanto menores eran las oscilaciones, mayor halló la razon.

No dieron mejor suceso otra serie de observaciones hechas con el mismo péndulo, y trahe en su Tabla, que es

Medios arcos descriptos en pulgadas. - - - - - -	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos observadas. - - - - - -	$\frac{1}{748}$	$\frac{1}{272}$	$\frac{4}{325}$	$\frac{12}{250}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{36}{68}$,

Porque comparadas cada una de estas con su inmediata, resultan las razones de 1 á 2 $\frac{204}{272}$, de 1 á 3 $\frac{113}{325}$, de 1 á 3 $\frac{285}{250}$, de 1 á 4, y de 1 á 2 $\frac{103}{136}$. Es cierto, no obstante, que hay una exactamente como 1 á 4, que es la razon de los quadrados de las velocidades; pero la siguiente no es sino como 1 á 2 $\frac{103}{136}$, que es mayor, debiendo ser menor segun la disminucion en que las otras van: lo que prueba claramente que la diferencia $\frac{24}{125}$ es demasiado grande, y que cupo en ella alguna equivocacion. Disminuyéndola resultará mayor la razon, y yá no será la de 1 á 4.

Lo que antes adelantamos se verifica en otras dos Tablas que dá de observaciones hechas con una bala de plomo de 2 pulgadas de diámetro en lugar de la de madera.

Primera Tabla.

Medias oscilaciones descriptas en pulgadas. - -	1	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos observadas. - - - - - -	$\frac{1}{1808}$	$\frac{1}{912}$	$\frac{1}{386}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{181}$	$\frac{4}{58}$	$\frac{8}{30}$

Segunda.

Medias oscilaciones descriptas en pulgadas. -	1	2	4	8	16	32	64
Diferencias de los arcos observadas. - - - - - -	$\frac{1}{2040}$	$\frac{1}{1036}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{159}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{8}{121}$	$\frac{6}{35}$

Todas dan las razones mayores que de 1 á 4; pero particularmente las primeras de cada Tabla son de 1 á 1 $\frac{896}{912}$, y de 1 á 1 $\frac{1004}{1036}$, que están bien cerca de ser como las simples velocidades.

Los mismos sucesos resultan de otras experiencias hechas en el agua que tambien añade; pero de qualquiera forma, la resulta no concluye que las resistencias sean como los quadrados de las velocidades: antes bien como las simples velocidades, puesto que las pe-

pequeñas obscilaciones las dan así, y que se deben executar pequeñas, para que se verifique que las osciIaciones circulares degeneren en las de cycloide.

Sea como quiera, estas disparidades, ó la fuerza que al mismo Cavallero hacia su Escolio al fin de la 1. Seccion, le obligan á confesar, que no estaba muy confiado de sus experiencias, y que deseaba se repitiesen. Del mismo modo le hacen que solicite la resistencia, no baxo el principio de que sea como los quadrados, ó como las simples velocidades, sino como una funcion $hu+ku^{\frac{3}{2}}+lu^2$: y resuelve el caso; pero de ello nacen tambien no menos dispariedades quando se comparan unas observaciones con otras: de suerte, que de todas estas experiencias nada se puede concluir. En fin, en la Seccion 7. trata de la resistencia que padecen los cuerpos arrojados al traves de un fluido; pero todo lo funda en que dicha resistencia, que aqui llamamos fuerza que padecen las superficies, es como los quadrados de las velocidades: con que es suponer lo mismo que estaba en qüestion, y que se necesitaba especular.

Aun menos seguras resultas se han deducido de las experiencias physicas hechas con pequeñas máchinas ó instrumentos, de que los Libros están llenos: bastará decir, que solo la friccion de las mismas máchinas, ú de los fluidos contra las superficies de los orificios por donde salen, es capaz de producir efectos considerables, y de dexar duda en quantos experimentos de esta naturaleza se hagan, por mas cuidado que en ellos se ponga.

Quan lexos se estaba de llegar al verdadero conocimiento de las fuerzas por los caminos que hasta ahora se han conducido, se hará aun mas evidente quando por nuestra theórica se vea demonstrado, que las resistencias no siguen, ni la ley de las simples velo-

ci-

cidades, ni la de los quadrados, sino que varia segun las circunstancias, y disposicion de las superficies impelidas en los fluidos.

CAPITULO 3.

De las fuerzas con que en el movimiento actuan los fluidos contra superficies planas.

PROPOSICION 18.

Determinar la desnivelacion que resulta en la superficie de un fluido, por la accion ó movimiento de otra, que se mueve dentro de él.

Que sea AB una superficie plana quadrilonga con dos de sus lados horizontales, que se mueva en un fluido igualmente denso, y en reposo: y será (*Prop.* 14. *Lib.* 2.) la fuerza que padecerá la diferencio-diferencial KLMN, no suponiendo toda la superficie AB dentro del fluido $= \frac{m.db.da.sen.x}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$; ó integrando con respeto á la b, será la fuerza que padece todo el rectángulo diferencial EHIG $= \frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(\sqrt{a} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$. Supóngase ahora representada por la AH la misma superficie, vista de canto, siendo CD la superficie del fluido; y tendremos que para un punto como E, en que la superficie se aparta ó huye del fluido, será $\sqrt{a} - \frac{1}{8}u sen.\theta = 0$, aun antes de ser $a = 0$: lo que dá $a = PE = \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$; por lo que en este punto E la fuerza diferencial $\frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(\sqrt{a} - \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2 = 0$, y por consiguiente Fig. 51. Fig. 52.

ya

ya no la choca ó comprime el fluído, como tampoco á ninguno de los puntos mas arriba de E: con que debe formarse en el espacio CPE la cavidad CEP. Por el contrario, en la parte DF que la superficie impele al fluido, se forma la elevacion DFP, pues igualando $\sqrt{a}+\frac{1}{8}u\,sen.\theta$ á cero, resulta $\sqrt{a}=-\frac{1}{8}u\,sen.\theta$, cuyo signo negativo manifiesta que el punto á que esto corresponde está á la parte de arriba de P origen de la a. Quadrando la igualacion, dá $a=\frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$ altura del punto sobre P: y asi con el movimiento de la superficie AH se desnivela el fluido en toda la longitud CD de la superficie.

Corolario.

Para deducir las fuerzas que padecen las diferenciales de las superficies en las desnivelaciones, tendrémos que substituir $\sqrt{a}$ negativo en la superficie que impele al fluido, y positivo en la que se aparta de él: será, pues, la fuerza que padece una diferencial en la desnivelacion, tanto en una superficie, como en otra $=\frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(a-\frac{1}{4}u\,sen.\theta\sqrt{a}+\frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2\right)$, ó quando fuese el fluido el que se mueva, será $= \frac{mb.da.sen.x}{sen.n}\left(a\,sen.\omega^2-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta+\frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2\right)$.

Escolio.

Estas desnivelaciones son las que se notan diariamente en los cuerpos que se mueven en los fluidos. En la parte que estos están impelidos horizontalmente se ve una entumescencia ó elevacion, y en la parte opuesta un hoyo ó cavidad. Las alturas verticales de estas desnivelaciones son las que antes hemos determinado; pero no se pretende que todo el hueco carezca enteramente de presion, ni toda la igual entumescencia quede completa, porque por los lados de la superficie se introduce ó escapa el fluido, corriendo en direccion perpendicular al movimiento de la misma, y ocupa ó desocupa parte del hueco ó elevacion que hemos deducido. Estas cantidades se hacen notables siempre que se haya de determinar la justa ó absoluta fuerza que padecen las superficies, porque el aumento ó disminucion de efecto en la desnivelacion corresponde igualmente á todos los puntos de la superficie que están sumergidos en el fluido, y aunque sea cantidad insensible en la parte, es considerable en el todo, ó en la suma total. En efecto, por lo que corresponde á solo la parte desnivelada, es corta la diferencia, quando los cuerpos tienen mucha profundidad dentro del fluido, y se mueven con no muy crecidas velocidades: pues, como se verá en adelante, aun la accion de todo el hueco ó elevacion se hace despreciable en estos casos, mayormente quando los ángulos θ y x son muy agudos.

PROPOSICION 19.

El hueco CEP, y la elevacion DFP son iguales y semejantes: y las curvas CE, DF que terminan el fluido son ambas parábolas del primer género, cuyo parámetro es $64 sen.\omega^2$: y sus exes las verticales CB, DB, distantes del punto P la cantidad $CP=PD=u\,sen.\theta$.

Supóngase CB ó DB la abcisa, y BI la ordenada: y que la superficie AH pase en un tiempo determinado de CB á AH, ú de AH á DB. Todos los puntos ó partículas del fluido, como I, puestos en la superficie de la curva, habrán andado en el mismo tiempo su ordenada correspondiente, que (*Prop.* 16.) será proporcional á la velocidad que tubiere la partícula, ó ó $= 8\,sen.\omega\sqrt{CB}$, ó $8\,sen.\omega.\sqrt{DB}$ Llamando, pues, CB ó DB $= x$, y BI $= y$, tendremos $8\,sen.\omega\sqrt{x} = y$, ó $64x\,sen.\omega^2 = y^2$, equacion á la parábola, cuyo parámetro es $64\,sen.\omega^2$, y los exes CB, DB distantes de P la cantidad $CP = 8\,sen.\omega\sqrt{PE.} = 8\,sen.\omega\sqrt{\frac{u^2\,sen.\theta^2}{64\,sen.\omega^2}} = u\,sen.\theta.$

Escolio 1.

Para mayor facilidad é inteligencia llamaremos *superficie impelente* á la que impele el fluido, ó á la que este choca si fuere este el que se mueve: y *superficie impelida* á la que se aparta ó huye del fluido.

Escolio 2.

Como las fuerzas en una direccion qualquiera $\frac{m.db.da\,sen.x}{sen.n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ se reducen á las horizontales $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ solo con substituir en aquellas dc en lugar de $\frac{db.sen.x}{sen.n}$, y al contrario; bastará, para mayor facilidad, hallar por ahora las fuerzas horizontales, que se reducirán después á las otras, poniendo en ellas $\frac{db.sen.x}{sen.n}$ en lugar de dc, ó $\frac{b\,sen.x}{sen.n}$ en lugar de c, respecto de ser constante la cantidad $\frac{sen.x}{sen.n}$ á causa de tratarse por ahora solo de superficies planas.

PRO-

PROPOSICION 20.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana y quadrilonga, que se mueve en un fluido inmovil con dos de sus lados paralelos al horizonte, en caso de ser D $=$ o, y estar el extremo superior de la superficie fuera del fluido de una cantidad igual ó mayor que $\frac{1}{64}u^2\,sen.\theta^2$.

La fuerza horizontal que padece la diferencio-diferencial KLMN de la misma superficie es (*Cor.* 4. *Lem.* 1.) $= m.dc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$. Su integral respecto de la c, $mc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$ es la que padece el espacio diferencial FHIG: y el integral de esta cantidad con respeto á la a, $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2\,sen.\theta^2\right)$ es la fuerza horizontal que padece toda la superficie, sin faltarle mas que completar el integral. Llamando, pues, H la cantidad que complete el integral, será la fuerza horizontal que padece toda la superficie $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2\,sen.\theta^2\right) + H$. Para hallar el valor de H considerese que, no atendiendo á la desnivelacion del fluido, y haciendo $a =$ o, todo el integral se ha de desvanecer: luego en este caso H $=$ o. Lo mismo habia de suceder en la superficie impelente sino tubiera parte fuera del fluido; pero suponemos que lo está, y es preciso que en ella haga fuerza la desnivelacion. Debemos, pues, añadir esta cantidad en la superficie impelente, y substraherla en la superficie impelida. Para hallarla nos puede servir el integral, colocando (*Corolar. Propos.* 14.) $a^{\frac{1}{2}}$ negativo para ambas superficies, lo que lo reduce á - - - - Fig. 51.

mc

$mc\left(\frac{1}{2}a^2 - a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) - \mathrm{H}$. Substituyendo ahora por a el valor de toda la altura de la desnivelacion $= \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, será la fuerza que procede de la desnivelacion $\mathrm{H} = mc\left(\frac{u^4 sen.\theta^4}{2.64^2} - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.8.64} + \frac{u^4 sen.\theta^4}{64^2}\right) = \frac{mcu^4 sen.\theta^4}{6.64^2}$: y la total que padecerá la superficie $=$ $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 \pm \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$.

Corolario.

Como la altura de la desnivelacion es $= \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, si esta cantidad fuere despreciable, respecto de la a, altura total de la superficie sumergida en el fluido, se podrá despreciar la desnivelacion, ó todos los terminos de la fuerza, como $\frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}$ en que no se halla la a.

PROPOSICION 21.

Hallar la misma fuerza que padece la superficie impelente quando esta tubiere menor altura fuera del fluido que la que adquiere la desnivelacion.

Si el punto extremo A de la superficie cae entre
Fig. 59. P y F, el fluido pasará por encima de la superficie, y no actuará sobre esta, sino en aquella efectiva porcion que la misma superficie tendrá fuera del fluido, que por suposicion es menor que $\frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, altura total de la desnivelacion. Supóngase que sea n la altura efectiva que tenga la superficie fuera del fluido. Substitúyase en lugar de a en la fuerza que procede de la desnivelacion $mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta - \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, y resultará

tará esta $= mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$: con que la fuerza total que padecerá la superficie, será $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) +$ - - - - - - - $mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$.

PROPOSICION 22.

Hallar la misma fuerza que padece la superficie quando fuere el fluido el que se moviere.

En este caso no podemos excluir de la fórmula el valor de ω. La fuerza que padece la diferencio-diferencial es $m.dc.da\left(a^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$, y su integral $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$ la que padece toda la superficie sin comprehender la que resulta de toda la desnivelacion. Para esta es el integral $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,se.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, que substituyendo n por a en la superficie impelente, dá la fuerza que procede de la desnivelacion $=$ - - - - $mc\left(\frac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$: y por la que padece toda la superficie impelente $=$ - - - $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) +$ - - - - - $mc\left(\frac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$. Para la impelida se debe substituir $a\,sen.\omega^2 = \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$: con que la fuerza que padecerá, será $=$ - - - - - - $mc\left(\frac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,se.\omega\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^4}\right)$.

Co-

Corolario 1.

Si el extremo superior de la superficie coincidiere con la superficie del fluido: esto es, si cayere el punto A sobre P, será $n = 0$, y la fuerza total en la superficie impelente, se reducirá á -------

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right).$$

Corolario 2.

Al contrario, si el extremo A de la superficie estubiere elevado sobre el fluido de igual ó mayor cantidad que $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$, será $n = \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$: y la fuerza total en la superficie impelente se reducirá á

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right).$$

Escolio.

En el integral $mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 se.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta\right)$ $+ mc\left(\tfrac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$ se hace notable el caso en que cayga el punto H en P, ó que sea $a = 0$: esto es, que la superficie no esté sumergida cosa alguna en el fluido: pues el integral se reduce á $mc\left(\tfrac{1}{2}n^2 sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}n^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$, que es el valor de la fuerza que padeciera la parte elevada PF; pero como la superficie no hace presa en el fluido, tampoco actua sobre él, ni puede elevarle: luego para este caso debe desvanecerse la cantidad restante, sin embargo de no deducirse de la fórmula. PRO-

PROPOSICION 23.

Hallar la fuerza horizontal que padece la superficie impelida, ó que huye del fluido, en caso de que el extremo superior A cayga entre P y E; ó que tenga algun valor la D menor que PE $= \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$.

Como el fluido no llega sino á E, haciendo PE $= D + a$, y substituyendo en el integral $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$ en lugar de $D + a$, ha de resultar aquel igual á cero. El integral de la diferencial (*Proposicion* 16.) es

$$mc\left(Da sen.\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}} sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right) + H.$$

Substituyendo en él $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2} = D + a$, ó $a = \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2} - D$, se reduce á $mc\left(-\tfrac{1}{2}D^2 se.\omega^2 - \tfrac{1}{64}Du^2 se.\theta^2 + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2 sen.\omega^2}\right) + H = 0$: que dá $H = mc\left(\tfrac{1}{2}D^2 se.\omega^2 + \tfrac{1}{64}Du^2 se.\theta^2 - \frac{u^4 se.\theta^4}{6.64^2 se.\omega^2}\right)$: y el integral completo

$$= mc\left(\tfrac{1}{2}(D+a)^2 se.\omega^2 - \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}} se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}u^2(D+a) se.\theta^2 - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2 se.\omega^2}\right)$$

Corolario 1.

Si fuere $D = 0$, ó el extremo superior A de la superficie cayere en P, ó mas arriba de P, se reducirá la fuerza ó integral completo á --------

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}} u sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2 - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2 se.\omega^2}\right).$$

Corolario 2.

Si al contrario cayere el extremo superior A de

la

la superficie en E, será $D = \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$: lo que dá para completar el integral $a = o$, y el integral completo

$$= mc\left(Da sen.\omega^2 - \tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$$

Escolio.

Si el punto H, ó extremo inferior de la superficie, cayere en E, el integral ó fuerza que padece la superficie impelida debe desvanecerse, como en efecto se desvanece; pero no es lo propio si cae entre E y P, ó en P: en este caso es $D = o$, $a = o$, y la fuerza ó integral completo se reduce á $-\frac{mcu^4 sen.\theta^4}{6.64^2 sen.\omega^2}$, quando debe igualmente desvanecerse, puesto que no alcanza á impeler el fluido la superficie quando tenga menos parte sumergida en él que la cantidad PE. Esta resulta procede de que, despues de asignarse la fuerza que padece toda la superficie, despreciando la desnivelacion, se substrahe la fuerza con que el fluido dexa de actuar en el hueco CEP. En efecto debe ser asi, quando el punto H está mas baxo que el punto E, ó quando está sobre el mismo punto E; pero quando estubiere mas alto ya no es lo propio, porque se substragera aun mas de lo que sería la fuerza sin atender á la desnivelacion. La fuerza de la superficie impelida debe, pues, ser cero, siempre que el punto H llegue á E, ó que esté mas alto; y la expresion que se dió en la Proposicion solo sirve para quando cayga desde E hacia abaxo, ó que sea $(D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega =$, ó $> \frac{u sen.\theta}{8 sen.\omega}$.

PROPOSICION 24.

Hallar la fuerza horizontal que padecen las mismas

mas superficies quando tenga algun valor la D, ó que el extremo A esté sumergido en el fluido.

En este caso debe resultar el integral cero quando sea $a = o$, puesto que no actua el fluido sino hasta el extremo superior de la superficie, en que es $a = o$. La fuerza que padece la diferencio-diferencial es (*Propos.* 16.) $mdc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$, y su integral $=$

$$mc\left(Da sen.\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}} se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right) + H,$$

la que padece toda la superficie, denotando H la cantidad que ha de completar el integral. Substitúyase $a = o$, y quedará $= \pm \tfrac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}} sen.\omega sen.\theta + H = o$, que dá $H = \mp \tfrac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}} sen.\omega\, sen.\theta$: y la fuerza que padece toda la superficie $=$ ----------------

$$mc\left(Da se.\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2 se.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) se.\omega se.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$$

Corolario.

Si fuere $D = o$: esto es, si cayere el extremo superior de la superficie en P, quedará la fuerza que padecerá la impelente $=$ ------------

$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}} sen.\omega sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, como se halló (*Cor.* 1. *Prop.* 22.).

PROPOSICION 25.

Reducir las fuerzas horizontales halladas á las que padece una superficie plana en una direccion qualquiera.

Ya se dixo (*Esc.* 2. *Prop.* 19.) que para esto no es menester sino substituir $\frac{b sen.x}{sen.n}$ en lugar de c. Hecho así, se tendrán las siguientes fuerzas. La que padecerá cerán las superficies impelente ó impelida en el caso de estar enteramente sumergidas en el fluido, $=$

$$\frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(Da\,se.\omega^2 + \tfrac{1}{2}a^2\,se.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)se.\omega\,se.\theta + \tfrac{1}{64}au^2\,se.\theta^2\right)$$

La que padecerá la superficie impelente quando su extremo superior esté elevado sobre la superficie del fluido de la cantidad $\frac{n^2}{sen.\omega^2}$ menor que $\frac{1}{64}u^2\,sen.\theta^2$, $=$

$$\frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}a^2\,sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2\,sen.\theta^2\right) +$$
$$\frac{mbn\,sen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}n\,sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}n^{\frac{1}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \tfrac{1}{64}u^2\,sen.\theta^2\right) : \text{ó}$$

siendo n igual, ó mayor que $\frac{1}{64}u^2\,sen.\theta^2$, $=$

$$\frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}a^2\,sen.\omega^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2\,sen.\theta^2 + \frac{u^4\,sen.\theta^4}{6.64^2\,sen.\omega^2}\right).$$

La que padece la superficie impelida quando su extremo superior está mas baxo que la superficie del fluido, siendo $D < \frac{u^2\,sen.\theta^2}{64\,sen.\omega^2}$, $=$

$$\frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}(D+a)^2\,se.\omega^2 - \tfrac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}}se.\omega\,se.\theta + \tfrac{1}{64}u^2(D+a)se.\theta^2 - \frac{u^4\,sen.\theta^4}{6.64^2\,se.\omega^2}\right)$$

La que padece qualquiera de las dos superficies impelente ó impelida, siendo $D = 0$, y despreciandose la desnivelacion, $=$

$$\frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}a^2\,sen.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2\,sen.\theta^2\right).$$

PROPOSICION 26.

Reducir las expresiones antecedentes á funciones de e y de.

Siendo, por construccion y suposicion, $Cos.n : sen.n = de : da$, será $da = \frac{sen.n\,de}{Cos.n}$, y $a = \frac{e\,sen.n}{Cos.n}$, por ser en este caso constante $\frac{sen.n}{Cos.n}$. Substituyendo este va-

lor de a en las fórmulas precedentes, se reducen á

$$\frac{mb\,se.x}{Cos.n}\left(De\,se.\omega^2 + \frac{e^2\,se.n\,se.\omega^2}{Cos.n} \pm \frac{u\,se.\omega\,se.\theta\,Cos.n}{6\,sen.n}\left(\left(D+\frac{e\,se.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{eu^2\,se.\theta^2}{64}\right)$$

$=$ á la fuerza que padecieran las superficies impelente ó impelida, en el caso de estar enteramente sumergidas en el fluido, y á mayor cantidad que $\frac{u^2\,sen.\theta^2}{64\,sen.\omega^2}$.

$$\frac{mb\,sen.x}{Cos.n}\left(\frac{e^2\,seu.\omega^2\,sen.n}{2\,Cos.n} + \frac{u\,sen.\omega\,sen.\theta\,Cos.n}{6\,sen.n}\left(\frac{e\,sen.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{64}eu^2\,se.\theta^2\right) +$$
$$\frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}n^2\,sen.\omega^2 - \tfrac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,sen.\omega\,sen.\theta + \tfrac{1}{64}nu^2\,sen.\theta^2\right) = \text{á}$$

la fuerza que padecerá la superficie impelente, quando su extremo superior esté elevado sobre la superficie del fluido de la cantidad $\frac{n^2}{sen.\omega^2}$.

$$\frac{mb\,se.x}{Cos.n}\left(De\,sen.\omega^2 + \frac{e^2\,se.\omega^2\,se.n}{2\,Cos.n} - \frac{u\,se.\omega\,se.\theta\,Cos.n}{6\,sen.n}\left(D+\frac{e\,se.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{64}eu^2\,se.\theta^2\right)$$
$$+ \frac{mb\,sen.x}{sen.n}\left(\tfrac{1}{2}D^2\,sen.\omega^2 + \tfrac{1}{64}Du^2\,sen.\theta^2 - \frac{u^4\,sen.\theta^4}{6.64^2\,sen.\omega^2}\right) =$$

á la fuerza que padecerá la superficie impelida, quando sea $D < \frac{u^2\,sen.\theta^2}{64\,sen.\omega^2}$.

$$\frac{mb\,se.x}{Cos.n}\left(\frac{e^2\,se.\omega^2\,sen.n}{2\,Cos.n} \pm \frac{u\,se.\omega\,se.\theta\,Cos.n}{6\,sen.n}\left(\frac{e\,se.n}{Cos.n}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{64}eu^2\,sen.\theta^2\right) =$$

á la que padecerá qualquiera de las dos superficies, siendo $D = 0$, y despreciandose la desnivelacion.

PROPOSICION 27.

Reducir al caso al de hallarse la superficie plana horizontal.

En este caso es $sen.n = 0$, y $Cos.n = 1$; pero antes de substituir estos valores en las fórmulas, es preciso re-

reducir $\left(D+\frac{e\,\text{sen}.n}{\text{Cos}.n}\right)$ á la serie $D^{\frac{3}{2}}+\frac{\frac{3}{2}D\,e\,\text{se}.n}{\text{Cos}.n}+\frac{\frac{1}{4}e^2\,\text{sen}.n}{D^{\frac{1}{2}}\,\text{Cos}.n^2}$ $-$&, y substituir asimismo este valor.

La primera fórmula se reduce á ----------

$$mbe\,\text{sen}.x\ \left(D\,\text{sen}.\omega^2\pm\tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}u\,\text{se}.\omega\,\text{sen}.\theta+\tfrac{1}{64}u^2\,\text{sen}.\theta^2\right)=$$

$$mbe\,\text{sen}.x\ \left(D^{\frac{1}{2}}\text{sen}.\omega\pm\tfrac{1}{8}u\,\text{sen}.\theta\right)^2.$$ La segunda no tiene lugar, porque en este caso no puede estar parte de la superficie fuera del fluido; ó ha de estar toda dentro, ó toda fuera de él: y lo mismo sucede á la tercera. La quarta se reduce á la primera, que por consiguiente es la unica.

PROPOSICION 28.

Hallar la fuerza vertical que padecerá la misma superficie plana, baxo las condiciones supuestas.

Este caso se resuelve por el general dado (*Proposicion* 25.) solo con substituir $\text{sen}.x=\text{Cos}.n$, que es el efectivo valor que resulta de $\text{sen}.x$. Serán, pues,

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(Da\,\text{se}.\omega^2+\tfrac{1}{2}a^2\,\text{se}.\omega^2\pm\tfrac{1}{6}u\,\text{se}.\omega\,\text{se}.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}au^2\,\text{se}.\theta^2\right)$$

la fuerza que padecerán las superficies, impelente ó impelida, en el caso de estar enteramente sumergidas en el fluido.

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(Da\,\text{sen}.\omega^2+\tfrac{1}{2}a^2\,\text{sen}.\omega^2+\tfrac{1}{6}u\,\text{sen}.\omega\,\text{sen}.\theta\,(D+a)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{64}\,au^2\,\text{sen}.\theta^2\right)+$$

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(\tfrac{1}{2}n^2\,\text{sen}.\omega^2-\tfrac{1}{6}un^{\frac{3}{2}}\text{sen}.\omega\,\text{sen}.\theta+\tfrac{1}{64}nu^2\,\text{sen}.\theta^2\right)$$ la que padecerá la superficie impelente, quando su extremo superior esté elevado sobre la superficie del fluido de la cantidad $\frac{n^2}{\text{sen}.\omega^2}$.

mb

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(Da\,\text{se}.\omega^2+a^2\,\text{se}.\omega^2-\tfrac{1}{6}u\,\text{se}.\omega\,\text{sen}.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{64}au^2\,\text{se}.\theta^2\right)+$$

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(\tfrac{1}{2}D^2\,\text{sen}.\omega^2+\tfrac{1}{64}Du^2\,\text{sen}.\theta^2-\frac{u^4\,\text{sen}.\theta^4}{6.64^2\,\text{sen}.\omega^2}\right)$$ la que padecerá la superficie impelida, quando sea $D<\frac{u^2\,\text{sen}.\theta^2}{64\,\text{sen}.\omega^2}$.

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(\tfrac{1}{2}a^2\,\text{sen}.\omega^2\pm\tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,\text{sen}.\omega\,\text{sen}.\theta+\tfrac{1}{64}au^2\,\text{sen}.\theta^2\right)$$ la que padecerá qualquiera de las dos superficies, siendo $D=0$, y despreciando la desnivelacion.

PROPOSICION 29.

Hallar las mismas expresiones en funciones de e.

Substitúyase (*Prop.* 26.) $a=\frac{e\,\text{sen}.n}{\text{Cos}.n}$, y se tendrá

$$mb\left(De\,\text{se}.\omega^2+\frac{e^2\,\text{s}.\omega^2\,\text{s}.n}{2\,\text{Cos}.n}\pm\frac{u\,\text{s}.\omega\,\text{s}.\theta\,\text{Cos}.n}{6.\,\text{sen}.n}\left(\left(D+\frac{e\,\text{se}.n}{\text{Cos}.n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}eu^2\,\text{s}.\theta^2\right)$$

fuerza que padecerán las superficies, impelente ó impelida, en caso de estar enteramente sumergidas en el fluido, y á mayor cantidad que $\frac{u^2\,\text{sen}.\theta^2}{64\,\text{sen}.\omega^2}$.

$$mb\left(\frac{e^2\,\text{se}.\omega^2\,\text{se}.n}{2\,\text{Cos}.n}+\frac{u\,\text{se}.\omega\,\text{se}.\theta\,\text{se}.n}{6\,\text{sen}.n}\left(\frac{e\,\text{sen}.n}{\text{Cos}.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{64}eu^2\,\text{se}.\theta^2\right)+$$

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(\tfrac{1}{2}n^2\,\text{se}.\omega^2-\tfrac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\,\text{se}.\omega\,\text{se}.\theta+\tfrac{1}{64}nu^2\,\text{sen}.\theta^2\right)$$, fuerza que padecerá la superficie impelente, quando su extremo superior esté mas alto que la superficie del fluido de la cantidad $\frac{u^2\,\text{sen}.\theta^2}{64n^2\,\text{sen}.\omega^2}$.

$$mb\left(De\,\text{se}.\omega^2+\frac{e^2\,\text{se}.\omega^2\,\text{sen}}{2\,\text{Cos}.n}-\frac{u\,\text{se}.\omega\,\text{se}.\theta\,\text{Cos}.n}{6\,\text{Cos}.n}\left(D+\frac{e\,\text{se}.n}{\text{Cos}.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{64}eu^2\,\text{se}.\theta^2\right)+$$

$$\frac{mb\,\text{Cos}.n}{\text{sen}.n}\left(\tfrac{1}{2}D\,\text{se}.\omega^2+\tfrac{1}{64}Du^2\,\text{se}.\theta-\frac{u^4\,\text{sen}.\theta^4}{6.64^2\,\text{sen}.\omega^2}\right)$$, fuerza

que

que padecerá la superficie impelida, quando sea $D < \frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$.

$$mb\left(\frac{e^2 se.\omega^2 se.\eta}{2 Cos.\eta} \pm \frac{u se.\omega se.\theta Cos.\eta}{6 sen.\eta}\left(\frac{e sen.\eta}{Cos.\eta}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{64} e u^2 se.\theta^2\right)$$

fuerza que padecerá qualquiera de las dos superficies, siendo $D = o$, y despreciandose la desnivelacion.

Corolario 1.

Si se hallare la superficie horizontal, será (*Proposicion* 27.) la fuerza vertical que padecerá $= mbe Cos.\eta\left(D^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$; pero en este caso es $Cos.\eta = 1$: luego la fuerza vertical será = --- $mbe\left(D^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$.

Corolario 2.

Si á mas de estas condiciones fuere la superficie la que se moviere verticalmente, serán $sen.\omega = 1$, $sen.\theta = 1$, y la fuerza vertical, que padecerá, se reducirá á $mbe(\sqrt{D} \pm \tfrac{1}{8}u)^2$: y si la velocidad u fuere la que toma el fluido, cayendo de la altura D, será (*Cor. Prop. 9. Lib.* 1.) $u = 8\sqrt{D}$, ó $\tfrac{1}{8}u = \sqrt{D}$, lo que reduce la fuerza que padeciera la superficie á $mbe(\sqrt{D} \pm \sqrt{D})^2$: esto es, la que padeciera la superficie impelente $= 4mbeD$, ó igual al peso de 4 colunas del fluido, cuya base es be, y D la altura, que es la que tubiera el fluido encima de la superficie impelente. La que padecerá la superficie impelida será $= o$: lo que se hace bien notorio con solo reflexîonar que el fluido no puede en este caso alcanzar á impeler la superficie.

Co-

Corolario 3.

Si fuere el fluido el que se moviere verticalmente quedando la superficie en reposo, y siendo, como antes, $sen.\eta = o$, será $sen.\theta = 1$, y $sen.\omega = o$: con que se reducirá la fuerza vertical que padecerá la superficie á $\tfrac{1}{64} mbeu^2$: y si la velocidad u fuere la que toma el fluido cayendo de la altura D, será, como antes, $\tfrac{1}{8}u = \sqrt{D}$, ó $\tfrac{1}{64}u^2 = D$, lo que reduce la fuerza á $mbeD$, igual al peso de la simple coluna del fluido, cuya base es be, y su altura D. Si cayere, pues, el fluido verticalmente, por la accion de su propia gavedad, de qualquiera altura D, y chocare una superficie horizontal be, la fuerza que padecerá esta, será igual al peso de la coluna del mismo fluido que estubiere encima de la superficie chocada.

Corolario 4.

La fuerza diferencio-diferencial --------- $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ nos hace conocer, que si fuere constante la cantidad $D+a$: esto es, si la superficie plana estubiere horizontal siempre, tendremos su fuerza vertical total, é integral = -- $mbe\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$.

Escolio 1.

Aquí se ve claramente quan distinto es que se mueva la superficie, ó que se mueva el fluido: en el primer caso, la fuerza que padece la superficie es $4mbeD$, y en el segundo, solo $mbeD$: aquella quatro veces mayor que esta. Sin embargo, no conozco Autor

 que

que no haya supuesto hasta ahora que es lo mismo lo uno que lo otro: ó que no haya supuesto que siempre suporta el propio peso la superficie.

Escolio 2.

El *Cavallero Newton* en sus Corolarios 7, 8, 9 y 10 de la Propos. 36, Seccion 7 del Libro 2 de su *Philosophia natural*, dice: que una pequeña superficie horizontal, como la que suponemos *dbde*, ó *be*, quando el fluido cae libremente por la accion de su propia gravedad, sufre solamente un peso igual á la mitad de la coluna del fluido, cuya base es *be*, y la altura D; lo que no es sino la mitad de lo que hemos deducido.
Fig. 60. Supone para ello, que si ACDBA es un vaso constantemente lleno de un fluido, y que tenga el agugero EF en su fondo, el fluido no correrá sino en el espacio AMEFNB, que llama *cataratá*, formando las dos superficies curvas AME, BNF, y quedando el fluido sin movimiento, ó como un cuerpo duro, en los espacios CAE y DBF. Supone despues, que se ponga en medio del agugero EF la superficie PQ, y dice, que quedará sobre ella el espacio del fluido PHQ, del mismo modo sin movimiento, á causa de formarse los otros dos lados HQ, HP convexôs, y de dividirse el fluido como si fuera en dos cataratas. Dice mas, y es, que el peso que sufrirá la superficie PQ, será solo el del espacio PHQ, porque supone que todo el fluido contenido en AMEPH, y HQFNB corre con toda libertad, y sin actuar sobre las superficies HP, HQ. Dexamos al juicio del Lector la consideracion de como es posible que el fluido cayga con velocidad conocida sobre la superficie HP sin forzarla. Esto sería contra todos los principios, y aun contra los dados por el mismo Docto Autor. Segun los nuestros, la fuerza vertical que padecerá una diferencio-diferencial de la propia superficie HP, es $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega + \frac{1}{8}u se.\theta\right)^2$: ó por ser $sen.\omega = 0$, y $\frac{1}{8}u = a^{\frac{1}{2}}$ será $= m.db.de.a sen.\theta^2$. Donde se ve que, aun en el caso de suponerse todo lo que supone el Docto Autor, no solo sufre la superficie PQ el peso del fluido PHQ, sino tambien $m \int db.de.a sen.\theta^2$, en cuya expresion θ denota el ángulo que formare la vertical con la curva HP, y a la altura del fluido sobre el orificio: de suerte, que suponiendo θ constante, este peso es el de la coluna del fluido, cuya base es PQ, multiplicado por $sen.\theta^2$.

CAPITULO 4.

De la fuerza con que en el movimiento actuan los fluidos contra qualesquiera superficies.

PROPOSICION 30.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie qualquiera que se mueve en un fluido.

Divídase la superficie en pequeñas quadrículas sensiblemente planas, por planos horizontales y verticales. Hállese la fuerza positiva ó negativa que cada una padeciere, y sumandolas, se tendrá la fuerza total. Que sea D la altura vertical que hubiere desde la superficie del fluido hasta el canto alto de una quadrícula, y a la que tubiere esta misma. Con esto

$$mcda\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$$

será (*Proposicion* 20.) la fuerza horizontal que padece una diferencial de la misma quadrícula. El integral - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$$

 será

será la fuerza que padece toda ella, denotando a toda la altura vertical: ó substituyendo $D - \frac{1}{2}a$ por D, á fin que D denote la altura vertical desde la superficie del fluido hasta el centro de la quadrícula, será la fuerza horizontal que padece esta $=$ - - - - - - - -

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\left((D + \tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right);$$

y la que padece toda la superficie entera $=$ - - - -

$$msc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\left((D + \tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right).$$

Corolario 1.

La fuerza en una y otra desnivelacion del fluido, será (*Corolario Proposicion* 18.) $=$ - - - - -

$$msc\left(Da - \tfrac{1}{6}u\left((D + \tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right).$$

Corolario 2.

Reduciendo $(D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}$ á serie, es esta cantidad $= \frac{3}{2}D^{\frac{1}{2}}a\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c.\right)$: luego tambien será la fuerza horizontal que padecerá una quadrícula $=$ -

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au\,sen.\theta\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,sen.\theta^2\right).$$

Corolario 3.

Si fuere D muy grande respecto de a, ó se tratare a como una diferencial respecto de D, se pueden despreciar todos los terminos de la serie, excepto el primero, y quedará la fuerza que padecerá qualquiera quadrícula de las impelentes ó impelidas $=$ - - - -

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au\,sen.\theta + \tfrac{1}{64}u^2 a\,sen.\theta^2\right) = mca\left(D^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2.$$

Corolario 4.

El caso en que puede ser mayor la relacion $\frac{a}{D}$ es, quando las quadrículas son de las contiguas á la superficie del fluido. Como D expresa la altura vertical desde la superficie del fluido hasta el centro de la quadrícula, será $D = \frac{1}{2}a$. Substituyendo este valor en la serie, se reduce á $1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \&$: donde se ve que, aun en este caso extremo, se hacen casi despreciables todos los terminos de la serie, excepto el primero.

Corolario 5.

Como en este caso extremo de ser $D = \frac{1}{2}a$, es $(D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$, será en él la fuerza que padece la quadrícula $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$.

Corolario 6.

Será, pues, tambien en este caso la serie $\frac{3}{2}D^{\frac{1}{2}}a\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&\right) = \frac{3}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{2}a}\left(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} \&\right) = a^{\frac{3}{2}}$: que dá $\left(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} -\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{8}{9}}$: donde se ve lo poco que se aparta la serie de reducirse al primer termino, aun en este caso extremo.

Corolario 7.

No obstante, siendo a una diferencial respecto de de D, siempre se reduce la serie al primer termino, aun en las quadrículas contiguas.

PROPOSICION 31.

Hallar la fuerza horizontal que padecerá la superficie de un cuerpo formado por la revolucion de una línea, recta ó curva, al rededor de un exe horizontal, moviendose aquel en un fluido segun este propio exe, y paralelamente al horizonte.

Fig. 61. Sea ACG una curva que, girando sobre el exe horizontal AM, forme el cuerpo ADSM, y que este se mueva en la direccion ó exe AM, conservándose siempre este paralelo al horizonte. Tírense los dos planos horizontales infinitamente cercanos STOPV, XYQNZ, y los dos verticales BGOQW, MCPN que formarán el quadrilátero diferencio-diferencial QOPN, del qual se levantará la perpendicular QE, y tirará la QB, que será igual á la ordenada BG $= y$. Tírense, asimismo, la vertical QI, y la horizontal QF paralela al exe: con lo que esta formará un ángulo con el quadrilátero QOPN igual al complemento de FQR, siendo QR la prolongacion de EQ; pero BEQ es igual á FQR: luego el ángulo que forma la direccion QF del movimiento con el quadrilátero diferencio-diferencial QOPN es igual al complemento de BEQ, ó igual al ángulo EQB, cuyo seno se mide por la razon de la subperpendicular BE á la perpendicular EQ: será, pues, este seno $sen.\theta = \frac{BE}{EQ}$: y como en qualquiera curva, la subperpendicular es á la perpendicular, como la diferencial de la ordenada á la diferencial de la curva, será tambien, llamando AB $= x$, BG $=$ BQ $= y$, BI $= c$, y IQ $= a$, $sen.\theta = \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}$: y BQ $= y = \sqrt{c^2 + a^2}$: lo que, suponiendo a constante, dá $dc = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$. Puestos estos valores en la expresion de la fuerza horizontal $mdcda(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}usen.\theta)^2$, tendremos por la fuerza horizontal, y segun el exe que padece el quadrilátero diferencio-diferencial QOPN de qualquiera curva ó recta $\frac{mdaydy}{\sqrt{y^2 - a^2}}\left(\sqrt{D+a} \pm \frac{udy}{8\sqrt{dy^2 + dx^2}}\right)^2$: ó integrando respecto de la y, será la fuerza que padece una zona como VOQZ $= mda(D+a)\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \pm$ - - - $\frac{1}{4}muda\sqrt{D+a}\int\frac{ydy^2}{\sqrt{y^2 - a^2}\sqrt{dy^2 + dx^2}} + \frac{1}{64}mu^2da\int\frac{ydy^3}{\sqrt{y^2 - a^2}(dy^2 + dx^2)}$: y volviendo á integrar respecto de la a, será la fuerza que padece una superficie como AGQZA $=$

$$m\int da(D+a)\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \pm \frac{1}{4}mu\int da\sqrt{D+a}\int\frac{ydy^2}{\sqrt{y^2 - a^2}\sqrt{dy^2 + dx^2}} + \frac{1}{64}mu^2\int da\int\frac{ydy^3}{\sqrt{y^2 - a^2}(dy^2 + dx^2)} + H.$$

Corolario.

Si se supone $x = 0$, se reduce la superficie á un plano circular, que se mueve horizontal y perpendicularmente á su superficie: la fuerza que este padecerá, será pues $m\int da(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}} + H =$ $m\int da(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2\sqrt{y^2 - a^2} + H$: ó substituyendo r por y, y por el radio de cuya rotacion resultó el plano circular, será la fuerza que este padecerá $= m\int da(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u)^2 \sqrt{r^2 - a^2} + H$.

PRO-

PROPOSICION 32.

Hallar la fuerza horizontal que padecerá la superficie de un cylindro que flota y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

Fig. 62. Que sea BCQDE el cylindro, H su exe, BE un diámetro horizontal, GI la superficie del fluido, y CAL vertical. La resistencia que padece la diferencial horizontal en C, es (*Corolario 3. Proposicion* 30.) $= mca\left(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$, en cuya fórmula debemos substituir da por a, $D = CA = a$, y $sen.\theta =$ al seno de LCH, que llamando $AL = f$, será $sen.\theta = \frac{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{R}$, expresando R el radio del cylindro: hecha, pues, la substitucion, resulta la fuerza que padece la diferencial $= mcda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right.$: y la que padece toda la superficie $GCQ = ----$ $mc\int da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)$.

PROPOSICION 33.

Hallar la fuerza vertical que padece una superficie qualquiera, moviendose esta en un fluido inmovil.

Divídase la superficie del cuerpo, que estubiese dentro del fluido, en pequeñas quadrículas sensiblemente planas, por líneas horizontales y verticales. Hállese la fuerza vertical, positiva ó negativa, que cada una de estas padeciere, y sumando se tendrá la fuerza total. Esta práctica se tiene ya explicada (*Prop.* 30.) para hallar la fuerza horizontal: y respecto que esta

esta se reduce á otra en una direccion qualquiera, solo subtituyendo (*Esc. 2. Prop.* 19.) $\frac{b.sen.x}{sen.n}$ en lugar de c: y como en este caso, en que se hace el movimiento vertical, es (*Prop.* 28.) $sen.x = Cos.n$, será $\frac{b.Cos.n}{sen.n}$ lo que debamos substituir en la fórmula (*Propos.* 30.) en lugar de c, para hallar la fuerza vertical que padece una superficie qualquiera: será, pues, esta $= --$ $m\int\frac{bCos.n}{sen.n}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)sen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$

Corolario.

Del mismo modo (*Co. 2. Pro.* 30.) será la fuerza vertical que padece una quadrícula impelente ó impelida, $=$ $\frac{mbCos.n}{sen.n}\left(Da \pm \frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au\,sen.\theta\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c\right) + \frac{1}{64}u^2 a\,se.\theta^2\right)$: ó por ser (*Propos.* 26.) $\frac{aCos.n}{sen.n} = e$, substituyendo este valor, será asimismo dicha fuerza vertical $=$ $mbe\left(D \pm \frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}u\,se.\theta\left(1 - \frac{e^2 sen.n^2}{96D^2 Cos.n^2} - \frac{e^4 sen.n^4}{2048D^4 Cos.n^4} - \&c\right) + \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2\right)$: ú despreciando por cortos todos los terminos de la serie, excepto el primero, será asimismo $= ----$ $mbe\left(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$.

PROPOSICION 34.

Hallar la fuerza vertical que padecerá la superficie de un cylindro que flota y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

La fuerza horizontal que padece una diferencial horizontal del cylindro en C, se halló (*Prop.* 32.) $=$

mc

$mcda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, expresando R el radio del cylindo, $a=$ CA altura desde la diferencial á la superficie del fluido, y AL $=f$: luego será la vertical (*Pro.* 33.) $=\frac{mdbdaCos.n}{sen.n}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$; ó substituyendo el valor de $\frac{Cos.n}{sen.n}=\frac{CL}{LH}=\frac{a\pm f}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}$ quedará la fuerza vertical que padecerá la superficie GCQ $=mb\int\frac{da(a\pm f)}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$: y toda la GQI $=2mb\left(\int\frac{(a\pm f)ada}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}+\int(a\pm f)u^2da\frac{\sqrt{R-(a\pm f)^2}}{64R^2}\right)$.

CAPITULO 5.

De las resistencias horizontales que padecen los cuerpos quando estos se mueven en los fluidos: ó al contrario, quando estos se mueven contra los cuerpos.

PROPOSICION 35.

Hallar la resistencia horizontal que padece un cuerpo movido en un fluido.

Las resistencias que padecen los cuerpos movidos en los fluidos, se reducen á la resulta de las fuerzas que padecen las superficies segun una determinada direccion: ó á la suma de todas las fuerzas segun esta propia direccion, tomando positivas las que lo fueren, y negativas las que tambien lo fueren. Deduzcanse, pues, por las reglas del Capítulo precedente las fuerzas horizontales que padecen las superficies que terminan el cuerpo, y sumadas, se tendrá la resistencia.

PROPOSICION 36.

Hallar la resistencia horizontal que padece un paralelepípedo rectángulo que flota sobre un fluido con dos de sus lados paralelos al horizonte, moviendose el paralelepípedo, y no el fluido en direccion paralela á otros dos lados, en caso de ser $a >$, ó $=\frac{u^2sen.\theta^2}{64sen.\omega^2}$.

La fuerza que padece la superficie impelente es (*Proposicion* 21.) $=\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta+\frac{1}{64}au^2sen.\theta^2\right)+mc\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}usen.\theta+\frac{1}{64}nu^2sen.\theta^2\right)$. La que padece la impelida, por ser $sen.\omega=1$, es (*Cor.* 2. *Prop.* 23.) $=mc\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta+\frac{1}{64}au^2sen.\theta^2-\frac{u^4sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$. La que padecen las dos superficies laterales es cero, porque siendo paralelas á la direccion del movimiento es $c=0$: y la que padece la base ó superficie inferior es tambien cero, por ser en ella $da=0$. No se experimentan, pues, mas fuerzas, segun la direccion, que las de las dos superficies impelente ó impelida. Esta ultima es negativa, por actuar en direccion contraria á la primera: con que la resistencia que padecerá el paralelepípedo será $=$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}usen.\theta+\frac{1}{64}nu^2sen.\theta^2+\frac{u^4sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$

Corolario 1.

Si el paralelepípedo tubiere bastante altura fuera del fluido, de suerte que no le pase este por encima, ó ó que dicha altura sea mayor ó igual á $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$, será entonces $n = \frac{u sen.\theta^2}{64}$, y la resistencia se reducirá á

$$mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{u^4 sen.\theta^4}{3.64^2}\right) = \tfrac{1}{3}mcu sen.\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sen.\theta^3}{64^2}\right).$$

Corolario 2.

Si al contrario no tubiere altura alguna sobre el fluido, sino que la superficie superior esté de nivel con la del fluido, será $n = 0$, y la resistencia se reducirá á $mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right) = \tfrac{1}{3}mcu sen.\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sen.\theta^3}{2.64^2}\right)$.

Corolario 3.

Despreciandose la desnivelacion del fluido, se han de substraher todos los terminos donde no se halle la a (*Cor. Prop.* 20.): luego la resistencia que padecerá el paralelepípedo, despreciandose la desnivelacion del fluido, será $= \tfrac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u sen.\theta$.

Corolario 4.

Para despreciarse la desnivelacion del fluido, no es menester sino que la altura a que tiene el paralelepípedo dentro del fluido sea muy grande respecto de $\tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$. Siendo, pues, el paralelepípedo muy grande ó profundo, respecto de la velocidad $u sen.\theta$, se podrá despreciar la desnivelacion, y quedará la funcion que expresa la resistencia en una sola cantidad, que será como las simples velocidades u.

Es-

Escolio.

En esta theórica hemos sentado, que la fuerza con que actua el fluido contra una diferencio-diferencial de superficie es proporcional á $(8\sqrt{a \pm u sen.\theta})^2$, y el principio que nos conduxo fue, haber deducido que la velocidad con que saliera el fluido por la misma diferencio-diferencial, si tubiera libre pasage, fuera $8\sqrt{a \pm u sen.\theta}$. No obstante lo sólido de este fundamento, puede ofrecerse el reparo de que quizas sería igualmente sólido suponer, que el peso que debe sufrir la diferencio-diferencial, no ha de ser sino el de la coluna del fluido incumbente, que es $a \pm \tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, siendo $\tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$ la altura de la entumescencia ó cavidad. Si así se supone, el peso que suportará la diferencial de la superficie impelente ó impelida del paralelepípedo será $mcda\,(a \pm \tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2)$, cuyo integral $mc(\tfrac{1}{2}a^2 \pm \tfrac{1}{64}u^2 a sen.\theta^2 + \mathrm{H})$, ó - - - - - - - - - - $mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 \pm \tfrac{1}{64}u^2 a sen.\theta^2 + \frac{u^4 sen.\theta^4}{2.64}\right)$, pues resulta $\mathrm{H} = \frac{u^4 sen.\theta^4}{2.64}$ haciendo $a = \mp\tfrac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, será el peso total que suportará qualquiera de las dos superficies impelente ó impelida del paralelepípedo, y la resistencia que de ambos resulta, $= \tfrac{1}{32}mcau^2 sen.\theta^2$, cuya cantidad, como se verá despues en el Capítulo 7, debe reducirse á la mitad $\tfrac{1}{64}mcau^2 sen.\theta^2$ quando el paralelepípedo es solo un plano. Esta determinacion, que tanto se conforma con la opinion general, y lo que es mas con las experiencias que nos dá *M. Mariotte* en el tercer discurso de la parte segunda de su Tratado del movimiento de las aguas, pudiera muy bien equiponderar, ó quizas inducirnos á suprimir nuestra theórica; pero el cúmulo de experiencias que la acreditan,

no

no solo de la especie de las que practicó *M. Mariotte*, sino de quantas he podido averiguar, como se verá en el discurso del tratado, la han acreditado á la mayor justificacion. Pondremos solo por ahora las que absolutamente revocan las de *M. Mariotte*. Este Autor, en la regla 5 del discurso citado, trahe dos experiencias que hizo, exponiendo perpendicularmente á la corriente del Rio de la *Sena* una tabla de medio pie en quadro, valiendose de un instrumento que expone. Dice, que con la corriente de $3\frac{1}{4}$ pies por segundo, sostubo la tabla el peso de $3\frac{3}{4}$ libras. La tabla reducida á medida Inglesa es de $\frac{16^2}{4.15^2}$, y la corriente de $\frac{52}{15}$ pies. Para comparar estas experiencias con la fórmula $\frac{1}{64}mcau^2 sen.\theta^2$, tenemos $m = 1000$ onzas, que es el peso de un pie cubico de agua, $ca = \frac{1}{4}.\frac{16^2}{15^2}$, $sen.\theta = 1$, y $u = \frac{52}{15}$. Será, pues, segun la fórmula, el peso que debia soportar la tabla $= \frac{1}{64}.1000.\frac{16^2}{4.15^2}.\frac{52^2}{15^2} = \frac{21632}{405} = 53\frac{1}{2}$ onzas, ó 3 libras $5\frac{1}{2}$ onzas solo $6\frac{1}{2}$ onzas menos que lo que dice halló *M. Mariotte*. En la segunda experiencia dice, que sostubo la tabla 9 onzas con la corriente de $1\frac{1}{4}$ pies por segundo: con que será segun la fórmula el peso $= \frac{1}{64}.1000.\frac{16^2}{4.15^2}.\frac{16}{9} = 8$ onzas, solo 1 onza menos de lo que expone el Autor, cuyas diferencias no se pueden tener por sensibles en materias de esta calidad. Pero vease quanto se apartan estas experiencias, que el mismo Autor tiene por tan exâctas, de las que yo practiqué para certificarme. Una tabla quadrilonga de un pie de ancho, expuesta perpendicularmente á una corriente de 2 pies por segundo, suportó

$15\frac{1}{2}$ libras estando sumergida un pie justo en el fluido. Segun la opinion general debió suportar $\frac{1}{64}.1000.4 = 62\frac{1}{2}$ onzas, ó 3 libras $14\frac{1}{2}$ onzas, cantidad bien distante de la que dió la experiencia. La misma tabla suportó $26\frac{1}{4}$ libras en una corriente de $\frac{4}{3}$ pies por segundo, estando sumergida de 2 pies justos. En la opinion general debió suportar $\frac{1}{64}.1000.2.\frac{16}{9} = 56$ onzas, ó $3\frac{1}{2}$ libras, cantidad extremamente distante de lo que dió la experiencia. Lo mas notable, y que absolutamente debe revocar la opinion general es que, segun esta, el segundo peso debió ser menor que el primero, y fue tan al contrario como que se halló de $10\frac{3}{4}$ libras mayor, que es el triple del peso total $3\frac{1}{2}$ libras que se cree debió suportar. Al contrario, nuestra fórmula es (*Cor.* 1. *Pro.* 36.) $\frac{1}{3}mcu sen\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sen.\theta^3}{64.64}\right)$, que por ser las velocidades cortas, y $sen.\theta = 1$, se reduce á $\frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u$: ó por lo que se expondrá (*Cor.* 5. *Prop.* 52.) á la mitad $\frac{1}{6}mca^{\frac{3}{2}}u$. Será, pues, el peso que debió suportar la tabla en la primera experiencia $= \frac{1}{6}.1000.2 = 333$ onzas, ú de $20\frac{1}{2}$ libras, solo 5 libras mayor de lo que dió la experiencia, cuya diferencia debe resultar asi por lo expuesto (*Esc. Pro.* 18.). En la segunda experiencia el peso que debió suportar la tabla habia de ser $= \frac{1}{6}.1000.(2)^{\frac{3}{2}}.\frac{4}{3} = 628$ onzas, ú de $39\frac{1}{4}$ libras, 13 libras mayor que lo que dió la experiencia, cuyo exceso debe ser asi como se tiene expresado. Para que se vea la conformidad de estas experiencias con la theórica que hemos dado, no hay sino exâminar la razon $2 : (2)^{\frac{3}{2}}.\frac{4}{3} = 15 : 28$ en que deben estar, segun ella, los dos pesos suportados, pues se aparta muy poco de la de los pesos $15\frac{1}{2} : 26\frac{1}{4}$. En la opinion general esta razon debiera ser la de 4 á $\frac{2.16}{9} = 9 : 8$ en que están los productos de las superficies chocadas por los quadrados de las velocidades: razon excesivamente distante de la experimentada $15\frac{1}{2} : 26\frac{1}{4}$, pues como se dixo debiera de ser de mayor igualdad, quando no fue sino de menor. Las dos experiencias dan, con corta diferencia, la medida absoluta de la resistencia menor de un tercio de lo que resulta por la theórica, como se ha visto, y como lo debiamos esperar segun el *Esc. Prop.* 18: de esta suerte para obtener la justa ó absoluta medida de ella, debemos tomar los dos tercios de lo que resulte por la theórica.

PROPOSICION 37.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo moviendose con las mismas condiciones, caso de ser $a =$, ó $< \frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$.

En este caso ya se dixo (*Esc. Prop.* 23.) que no padece fuerza alguna la superficie posterior: con que se reducirá la resistencia á la fuerza que padeciere la superficie anterior $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right) +$ $mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{1}{64}nu^2 sen.\theta^2\right)$.

Corolario 1.

Si el paralelepípedo tubiere bastante altura fuera del fluido, de suerte que no le pase este por encima, ó que sea dicha altura mayor ó igual á $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$, será entonces $n = \frac{1}{64}u^2 sen\theta^2$, y la resistencia se reducirá á $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$.

Corolario 2.

Si al contrario no tubiere altura alguna sobre el fluido será $n = 0$, y la resistencia se reducirá á $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$, la misma que resulta despreciandose la desnivelacion del fluido.

PROPOSICION 38.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo, moviendose con las mismas condiciones, y en caso de estar enteramente sumergido en el fluido, siendo $D < u^2 sen.\theta^2$, y $D + a =$, ó $> \frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$.

La fuerza que padecerá la superficie impelente, será (*Pr.* 24.) $= mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}usen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$; y la que padecerá la impelida (*Propos.* 23.) $=$ $mc\left(\frac{1}{2}(D+a)^2 - \frac{1}{6}usen.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2(D+a) - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$: Substrayendo esta de aquella, y despejando, queda la resistencia $= \frac{1}{3}mcusen.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}} -$ $mc\left(\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^{\frac{3}{2}}usen.\theta + \frac{1}{64}Du^2 sen.\theta^2 - \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$.

Corolario.

Si fuere $D = 0$, se reducirá la resistencia, como se dixo (*Cor.* 2. *Prop.* 36.) á $\frac{1}{3}musen.\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 sen.\theta^3}{2.64^2}\right)$.

PROPOSICION 39.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo moviendose con las mismas condiciones, en caso de estar enteramente sumergido en el fluido, ó ser D $< \frac{u^2 sen.\theta^2}{64}$, y D$+a=$, ó $< \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$.

En este caso no padece fuerza alguna la superficie posterior (*Esc. Prop.* 23.), y la resistencia se reduce á la fuerza que padece la superficie anterior $=$ (*Pro.* 24)

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{6}u sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right).$$

Corolario.

Si fuere D$=$o, y por consiguiente $n=$o, se reducirá la resistencia á $mc\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u sen.\theta+\frac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$: la misma que resulta despreciandose la desnivelacion del fluido.

PROPOSICION 40.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo, moviendose con las propias condiciones, y en caso de estar enteramente sumergido en el fluido, siendo D$=$, ó $> \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$.

La fuerza que padecerá la superficie impelente será (*Pr.* 24)$=mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}u se.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}au^2 se.\theta^2\right)$: y la que padece la impelida $=$ - - - - - - - - - - - - $mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}u sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right)$.

Subs-

Substrayendo esta de aquella, y despejando, queda la resistencia $=\frac{1}{3}mcu sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)$.

Corolario 1.

Reduciendo $(D+a)^{\frac{3}{2}}$ á serie, será tambien esta resistencia $=\frac{1}{2}mcD^{\frac{1}{2}}au sen.\theta\left(1+\frac{a}{4D}-\frac{a^2}{24D^2}+\&\right)$.

Corolario 2.

Si fuere D muy grande respecto de a: esto es, si estubiere el paralelepípedo á una profundidad muy grande, de suerte que su altura a sea muy chica, respecto de la profundidad D, pueden despreciarse todos los terminos de la serie, excepto el primero, y quedará la resistencia $=\frac{1}{2}mcD^{\frac{1}{2}}au sen.\theta$.

Corolario 3.

Como para completar el integral, tanto de la fuerza que padece la superficie impelente, como la impelida, en caso de estar enteramente sumergidas en el fluido, y ser D$=$, ó $> \frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$, se ha de suponer $a=$o, se pueden sumar ó restar primero las fuerzas de las diferenciales, y hallar su resistencia, que integrada despues por medio de suponer $a=$o, dará la resistencia que padece el paralelepípedo. La fuerza que padece la diferencial impelente es (*Proposicion* 16.) despues de integrar respecto de la c, $= mcda\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}u sen.\theta\right)^2$, y la que padece la impelida $=mcda\left((D+a)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}u sen.\right)^2$: restando esta de aque-

lla

lla queda la resistencia procedente de estas dos diferenciales $= \frac{1}{2} mcda.u\,sen.\theta(D+a)^{\frac{1}{2}}$; ó integrando será la resistencia que padezca el paralelepípedo $= \frac{1}{3} mcu\,sen.\theta(D+a)^{\frac{3}{2}} + H$. Suponiendo ahora $a = 0$, queda $\frac{1}{3} mcD^{\frac{3}{2}} u\,sen.\theta + H = 0$, que dá $H = -\frac{1}{3} mcD^{\frac{3}{2}} u\,sen.\theta$: con que el integral completo ó resistencia que padecerá el paralelepípedo será $= \frac{1}{3} mcu\,sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)$, como antes (*Prop.* 40.).

Corolario 4.

Siempre que para completar los integrales, tanto de las superficies impelentes, como de las impelidas hubieremos de suponer $a = 0$, como en el caso de ser $D =$, ó $> \frac{1}{64} u^2 sen.\theta^2$; ó lo que es lo mismo si se pudiese despreciar la desnivelacion del fluido por ser $\frac{1}{64} u^2 sen.\theta^2$ muy corta respecto de a, se podrá hallar primero la resistencia de las diferenciales, y por ella, integrando, la de todo el cuerpo.

Corolario 5.

Como en ninguna de las expresiones de las resistencias horizontales que padece el paralelepípedo, en los varios casos que se han especulado, no se halla la dimension de la longitud de él, segun la direccion del movimiento, se sigue, que sea dicho paralelepípedo largo ó corto, segun dicha dimension, siempre padecerá la misma resistencia horizontal.

Corolario 6.

Como hecha dicha dimension igual cero, queda el paralelepípedo un plano ó quadrilongo que se mueve con dos de sus lados paralelos al horizonte; se sigue, que todas las expresiones de las resistencias horizontales dadas para el paralelepípedo convienen tambien para este quadrilongo.

PROPOSICION 41.

Hallar la resistencia horizontal que padece un paralelepípedo rectángulo AB que flota sobre un fluido con sus lados AF, KB inclinados al horizonte, moviendose el paralelepípedo, y no el fluido, horizontalmente, y en direccion paralela al lado AB, en caso de ser $a =$, ó $> \frac{1}{64} u^2 sen.\theta^2$, y no pasarle el fluido por encima. Fig. 63.

Sea ED la superficie del fluido, AJ su paralela, CH, EG, FQ verticales, y llamando $EG = a$, será la fuerza que padece la superficie impelente $DJ =$
$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2 + \frac{u^4 sen.\theta^4}{6.64^2}\right)$$
: ó llamando Δ al ángulo que forma la base AF con la horizontal AJ, será el seno que forma esta con $CJ = Cos.\Delta$, cuyo valor substituido en la expresion en lugar de $sen.\theta$, la reduce á
$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,Cos.\Delta + \tfrac{1}{64}au^2 Cos.\Delta^2 + \frac{u^4 Cos.\Delta^4}{6.64^2}\right).$$
Por igual razon la fuerza que padece la superficie impelida EA es
$$= mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,Cos.\Delta + \tfrac{1}{64}au^2 Cos.\Delta^2 - \frac{u^4 Cos.\Delta^4}{6.64^2}\right):$$
con que la resistencia que procede de estas dos fuerzas será
$$= \tfrac{1}{3}mcu\,Cos.\Delta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3 Cos.\Delta^3}{64^2}\right).$$
La fuerza que padece JF es $=$
$$mc\left(Da + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}au^2 sen.\theta^2\right):$$
ó llamando e la base AF, será $FI = e\,sen.\Delta$: con que substituyendo $Cos.\Delta$ por $sen.\theta$, $e\,sen.\Delta$ por a, y

a

a por D, será esta fuerza $=$ - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(ae\,\text{sen.}\Delta+\tfrac{1}{2}e^2\,\text{se.}\Delta^2+\tfrac{1}{6}u\,\text{Cos.}\Delta\left((a+e\,\text{sen.}\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$+\frac{mcu^2e}{64}\text{sen.}\Delta\,\text{Cos.}\Delta^2$. Por igual razon la que padece la base AF es $=$ - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(ae\,\text{sen.}\Delta+\tfrac{1}{2}e^2\,\text{sen.}\Delta^2-\tfrac{1}{6}u\,\text{sen.}\Delta\left((a+e\,\text{sen.}\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$+\frac{mcu^2e}{64}\text{sen.}\Delta^3$: con que la resistencia que procede de las fuerzas que padecen los dos lados JF, AF será $=$

$$mc\left(\tfrac{1}{6}u(\text{Cos.}\Delta+\text{sen.}\Delta)\left((a+e\,\text{se.}\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2e\,\text{se.}\Delta(\text{Co.}\Delta^2-\text{se.}\Delta^2)\right):$$

y la que padecerá todo el paralelepípedo $=$ - - - -

$$mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\,\text{Co.}\Delta+\frac{u^4\,\text{Cos.}\Delta^4}{3\cdot 64^2}+\tfrac{1}{6}u(\text{Cos.}\Delta+\text{se.}\Delta)\left((a+e\,\text{se.}\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$+\frac{mcu^2e}{64}\text{sen.}\Delta(\text{Cos.}\Delta^2-\text{sen.}\Delta^2).$$

Corolario 1.

Reduciendo $(a+e\,\text{sen.}\Delta)^{\frac{3}{2}}$ á serie, y despejando, será tambien la resistencia que padecerá el paralelepípedo $=$

$$mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\,\text{Cos.}\Delta+\frac{u^4\,\text{Cos.}\Delta^4}{3\cdot 64^2}+\tfrac{1}{64}u^2e\,\text{sen.}\Delta(\text{Cos.}\Delta^2-\text{sen.}\Delta^2)\right)+$$

$$\tfrac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u\,\text{sen.}\Delta(\text{Cos.}\Delta+\text{sen.}\Delta)\left(1+\frac{e\,\text{sen.}\Delta}{4a}-\frac{e^2\,\text{sen.}\Delta^2}{24a^2}+\&\right).$$

Corolario 2.

En caso de despreciarse la desnivelacion se deben quitar (*Corol. Propos.* 20.) todas las cantidades en que no se halle la a, ó la $e\,\text{sen.}\Delta$, que tambien hizo oficio de ella : luego para este caso será la re-

sistencia $=mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\,\text{Cos.}\Delta+\tfrac{1}{64}u^2e\,\text{sen.}\Delta(\text{Cos.}\Delta^2-\text{se.}\Delta^2)\right)+$

$$\tfrac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u\,\text{sen.}\Delta(\text{cos.}\Delta+\text{sen.}\Delta)\left(1+\frac{e\,\text{sen.}\Delta}{4a}-\frac{e^2\,\text{sen.}\Delta^2}{24a^2}+\&\right).$$

Corolario 3.

Si se suponen u y Δ infinitamente chicas, se pueden despreciar todos los términos en que estén elevadas á mayor potestad, y quedará la resistencia $=$

$$mc\left(\tfrac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u+\tfrac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}ue\,\text{sen.}\Delta\right)=mca^{\frac{1}{2}}u\left(\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{4}e\,\text{sen.}\Delta\right).$$

PROPOSICION 42.

Hallar la resistencia horizontal que padecerá un cylindro que flota y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

La fuerza horizontal que padece la superficie GCQ, ó IDQ del cylindro BQE, se halló (*Prop.* 32.) Fig. 62.

$$=mc\int da\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right),$$ expresando R el radio del cylindro, $a=$ CA la altura vertical desde una diferencial horizontal en C, hasta la superficie del fluido GI, y $f=$ AL. Restando, pues, la fuerza que padece la superficie impelida IDQ, de la que padece la impelente GCQ, quedará la resistencia que padece el cylindro $=\frac{mcu}{2R}\int a^{\frac{1}{2}}da\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}$.

Escolio.

Puede hallarse por otro méthodo particular la exâcta resistencia que padece una esphera, cylindro, y otros cuerpos formados por la revolucion de un exe ho-

horizontal, segun el qual se supone moverse el cuerpo, quando estan de tal manera sumergidos en el fluido, que a se hace despreciable respecto de D. En este caso, una zona vertical del mismo cuerpo se puede tomar por cda, siendo c toda la circunferencia de la misma zona, y da la diferencial de la ordenada. La fórmula $mcda\left(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2$, se reducirá á---

$$mcda\left(\sqrt{D} \pm \frac{1}{8}u\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}}\right)^2,$$ suponiendo x la abcisa, y la resistencia á $\frac{\frac{1}{2}mcuda^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$; ó si suponemos c la semicircunferencia del círculo, cuyo radio es la unidad, tendremos que substituir por c solo, $2ca$, y quedará la resistencia $= \frac{mcuada^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$. En la esphera es $\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}} = -\frac{x}{r}$ siendo r el radio de ella, y $ada = -xdx$: luego $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2+dx^2}} = \frac{x^2dx}{r}$, cuyo integral es $\frac{x^3}{3r}$, ó poniendo $x = r$, será la resistencia que padezca toda la esphera $\frac{1}{3}r^2.mcu\sqrt{D}$. En el cylindro $\frac{da}{\sqrt{dx^2+da^2}} = 1$: luego $\frac{ada^2}{\sqrt{dx^2+da^2}} = ada$, cuyo integral es $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}r^2$, y la resistencia $= \frac{1}{2}r^2mcu\sqrt{D}$: de suerte que la resistencia de la esphera es los $\frac{2}{3}$ de la del cylindro de igual diámetro. Si en lugar de r colocamos $\frac{1}{2}a$, siendo a el diámetro de esphera ó cylindro, serán sus resistencias $\frac{1}{12}a^2mcu\sqrt{D}$, y $\frac{1}{8}a^2mcu\sqrt{D}$.

PROPOSICION 43.

Hallar la resistencia horizontal que padece un cuerpo qualquiera, moviendose en un fluido inmovil.

Divídase la superficie del cuerpo en pequeñas quadrículas, como se dixo (*Prop.* 30.), y hállese la fuerza positiva, ó negativa, que cada una padezca: súmense, y resultará la resistencia que padecerá el cuerpo. O súmese la fuerza que padeciere una quadrícula impelente con la correspondiente impelida, ó que está en la misma direccion, y se tendrá la resistencia que procede de estas dos quadrículas: súmese esta con todas las demas que resultaren de las otras quadrículas, y se tendrá la resistencia total.

Corolario 1.

Si expresare θ el ángulo que formare la direccion horizontal con la quadrícula impelente, y Θ el que formare con la correspondiente impelida, ó que está en la misma direccion, será--------

$$mc\left(Da + \frac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2a\,sen.\theta^2\right)$$

la fuerza que padecerá la primera, y--------

$$mc\left(Da - \frac{1}{6}u\,sen.\Theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2a\,sen\Theta^2\right)$$

la que padecerá la segunda. Restando esta de aquella queda $\frac{1}{6}mcu(sen.\theta + sen.\Theta)\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)\right) +$ -- $\frac{1}{64}mcu^2a(sen.\theta^2 - sen.\Theta^2)$, que es la resistencia que resulta en el cuerpo, procedente de la accion del fluido en estas dos quadrículas correspondientes, ó que estan en la misma línea horizontal, paralela á la direccion.

Corolario 2.

Tambien será la misma resistencia que padecen qualesquiera dos quadrículas correspondientes $= \pm\frac{1}{4}mcauD^{\frac{1}{2}}(sen.\theta + sen.\Theta)\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \right) + \frac{mcau^2}{64}(sen.\theta^2 - sen.\Theta^2)$.

Corolario 3.

Si fuere D muy grande, respecto de a, se reducirá á $mc\left(\pm\frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au(sen.\theta + sen.\Theta) + \frac{1}{64}au^2(sen.\theta^2 - sen.\Theta^2)\right)$.

Corolario 4.

Si la parte anterior del cuerpo fuere igual y semejante á la posterior, tendremos generalmente en las quadrículas correspondientes $\theta = \Theta$, y la resistencia de estas se reducirá á $\frac{1}{3}mcusen.\theta\left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)$: ó á $\frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}asen.\theta\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^2}{2048D^2} - \&c\right)$, que es unicamente como las simples velocidades.

Corolario 5.

Si fuere a muy corta respecto de D, quedará $= \frac{1}{2}mcuD^{\frac{1}{2}}asen.\theta$.

Escolio.

Para hacer atencion á la desnivelacion del fluido se calcularán las fuerzas que padecen las quadrículas anteriores ó impelentes, á las quales alcanza la elevacion ó entumescencia del mismo fluido: y del mismo modo de aquellas que dexan de padecer las quadrículas posteriores ó impelidas, encerradas en el hueco ó cavidad que se forma en la parte posterior, segun se dixo (*Proposic.* 18.). Unas y otras se deben agregar á la resistencia antes determinada: las primeras porque actuan efectivamente contra la direccion del movimiento: y las segundas porque, habiendose substraido en el cálculo antecedente, deben agregarse de nuevo: las primeras son $mc\left(Da - \frac{1}{6}usen.\theta\left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2asen.\theta^2\right)$,

y las segundas $mc\left(Da - \frac{1}{6}use.\Theta\left((D + \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2ase.\Theta^2\right)$

Corolario 6.

No siendo las desnivelaciones excesivas, se puede suponer que todas las quadrículas que se hallan sobre la misma vertical estan chocadas por el fluido con el propio ángulo θ, suponiendo ser este un medio entre todas. En este caso, reduciendo la expresion de la fuerza que padece una de las quadrículas á $mcda\left(a - \frac{1}{4}ua^{\frac{1}{2}}sen.\theta + \frac{1}{64}u^2sen.\theta^2\right)$, tendremos el integral $mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}}sen.\theta + \frac{1}{64}u^2asen.\theta^2\right) =$ á la fuerza de todas aquellas que estan sobre la propia vertical: cuya cantidad, substituyendo $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}usen.\theta$, se reduce á $\frac{mu^4 scsen.\theta^4}{6.(64)^2}$; y por consiguiente la resistencia horizontal que resulta de la desnivelacion será $\frac{mu^4 scsen.\theta^4}{6.(64)^2}$.

Corolario 7.

La resistencia horizontal que procede de la desnivelacion, será pues generalmente en esta suposicion, como la quarta potestad de la velocidad.

Corolario 8.

Será, asimismo en general, la resistencia horizontal que padece qualquiera cuerpo, como tres cantidades: una que es como las simples velocidades, otra como los quadrados de las mismas, y otra como los quadrados-quadrados.

CAPITULO 6.

De las resistencias verticales que padecen los cuerpos quando estos se mueven en los fluidos: ó al contrario, quando estos se mueven contra los cuerpos.

PROPOSICION 44.

Hallar la resistencia vertical que padecerá un paralelepípedo rectángulo quando se halle enteramente sumergido en el fluido, conservando dos lados paralelos al horizonte, y el superior á mayor ó igual profundidad que $\frac{u^2 sen.\theta^2}{64 sen.\omega^2}$.

La fuerza que padecerán los lados verticales es cero, porque en ellos es $cos.\eta = 0$: lo que da la expresion (*Proposicion* 28.) ------------- mb

$$\frac{mb cos.\eta}{sen.\eta}\left(D a se.\omega^2 + \tfrac{1}{2} a^2 se.\omega^2 \pm \tfrac{1}{6} u se.\omega se.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64} a u se.\theta^2\right) = 0$$

La que padecen los dos horizontales es (*Cor.* 1. *Prop.* 29.) $= mbe(D^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8} u sen.\theta)^2$ en cuya expresion *be* denota el area de las superficies ó lados, y D la altura vertical que hubiere desde el lado á la superficie del fluido. Como en el paralelepípedo los dos lados horizontales estan á distinta profundidad, debe variar en ellos la D. Que sea la del superior D, y la del inferior $D+a$, denotando a la altura del paralelepípedo, y tendremos $mbe\left((D+a)^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ por la fuerza que padece el lado inferior: y $mbe\left(D^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \tfrac{1}{8} u sen.\theta\right)^2$ por la que padece el superior. Restando una de otra queda $mbe\left(\pm a sen.\omega^2 + \tfrac{1}{4} u \left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right) sen.\omega sen.\theta\right)$ por la resistencia vertical que padecerá el paralelepípedo: $+$ en el caso de moverse este hacia abaxo, y $-$ en el de moverse hacia arriba.

Corolario 1.

Si fuere el paralelepípedo el que se mueva, y no el fluido, será $sen.\omega = 1$: y la resistencia se reducirá á $mbe\left(\pm a + \tfrac{1}{4} u \left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right) sen.\theta\right)$.

Corolario 2.

Si á mas de esta condicion fuera $a = 0$, ó que el paralelepípedo se redugese á un plano horizontal, será la resistencia vertical que este padecerá = --- $\tfrac{1}{2} mbeu D^{\frac{1}{2}} sen.\theta$.

Co-

Corolario 3.

Lo mismo sucederá si D fuere muy grande respecto de a, de suerte que pueda despreciarse sin error sensible esta cantidad, como sucede en los cuerpos que caen por el ayre próximos á la superficie de la tierra.

Corolario 4.

Si el movimiento fuere vertical, será $sen.\theta = 1$, y esta resistencia se reducirá á $mbe\left(\pm a + \frac{1}{4}u\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)\right)$.

Corolario 5.

Si el movimiento fuere horizontal será $sen.\theta = 0$: y la resistencia vertical será $mbea =$ al peso de un cuerpo de fluido de la misma magnitud que el paralelepípedo.

Corolario 6.

Lo mismo resultará si el paralelepípedo no se moviere, ó fuere $u = 0$: pues se reduce la resistencia, del mismo modo, á $mbea$.

Corolario 7.

La resistencia será cero si haciendose el movimiento hacia arriba, fuere $u = \frac{4a\,sen.\omega}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)sen.\theta}$: y será negativa si fuere $u < \frac{4a\,sen.\omega}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)sen.\theta}$; ó siendo el paralelepípedo el

que se mueva, y no el fluido, será cero si fuere $u = \frac{4a}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)sen.\theta}$, y negativa si fuere $u < \frac{4a}{\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)sen.\theta}$.

Corolario 8.

Si fuere el fluido el que se mueva, y no el paralelepípedo, será $sen.\theta = cos.\omega$: y la resistencia vertical se reducirá á $mbe\left(\pm a\,sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}\right)sen.\omega\,cos.\omega\right)$. Esta expresion no es, sin embargo, legitima, sino quando la velocidad u es igual en ambas superficies superior é inferior.

Corolario 9.

Como este caso pide que el paralelepípedo esté enteramente sumergido en el fluido, no se puede estender la fórmula, sino hasta ser $D^{\frac{1}{2}}sen.\omega - \frac{1}{8}u\,sen.\theta = 0$, en caso de hazerse el movimiento hacia abaxo: ó hasta ser $(D+a)^{\frac{1}{2}}sen.\omega - \frac{1}{8}u\,se.\theta = 0$, en caso de hacerse el movimiento hacia arriba. En el primero será la resistencia $=$

$$mbe\left(a\,sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2 sen.\theta^2}{64\,sen.\omega^2} + a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u\,sen.\theta}{8\,sen.\omega}\right)sen.\omega\,sen.\theta\right),$$

y en el segundo $=$

$$mbe\left(-a\,sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2 sen.\theta^2}{64\,sen.\omega^2} - a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u\,sen.\theta}{8\,sen.\omega}\right)sen.\omega\,se.\theta\right):$$

esto es para ambos casos $=$

$$mbe\left(\pm a\,sen.\omega^2 + \frac{1}{4}u\left(\left(\frac{u^2 sen.\theta^2}{64\,sen.\omega^2} \pm a\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{u\,se.\theta}{8\,se.\omega}\right)se.\omega\,se.\theta\right).$$

Co-

Corolario 10.

Suponiendo que el paralelepípedo se reduzca á un plano, á fin de tener la misma velocidad en una y otra superficie, lo que dá $a = 0$: será la resistencia $= \frac{1}{4} mbeu \left(\frac{u\,sen.\theta}{4\,sen.\omega} \right) sen.\omega\, sen.\theta = \frac{1}{64} mbeu^2\, sen.\theta^2$.

PROPOSICION 45.

Hallar la resistencia que padecerá el mismo paralelepípedo rectángulo, que se mueve con las mismas condiciones, quando su superficie superior esté fuera del fluido.

En este caso será la resistencia la fuerza que padece la superficie inferior $= mbe\left(a^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u\, sen.\theta\right)^2$: denotando a la altura vertical que tubiere el paralelepípedo dentro del fluido.

Corolario 1.

Si fuere el paralelepípedo el que se mueva, y no el fluido, será $sen.\omega = 1$: y la resistencia quedará $= mbe\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\, sen.\theta\right)^2$.

Corolario 2.

Si ademas se hiciere el movimiento vertical, será $sen.\theta = 1$: y se reducirá á $mbe\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} u\right)^2$.

Corolario 3.

Si en este caso la velocidad u fuere la que pudiera tomar el fluido cayendo de la altura a, será $\sqrt{a} = \frac{1}{8} u$: luego la resistencia será $= mbe\left(\frac{1}{8} u \pm \frac{1}{8} u\right)^2 = \frac{1}{64} mbeu^2 (1 \pm 1)^2$; ó $mbe(\sqrt{a} \pm \sqrt{a})^2 = mbea(1 \pm 1)^2$: esto es, quando se hiciere el movimiento hacia abaxo $= 4mbea$, y en el de hacerse hacia arriba, $= 0$.

Corolario 4.

Si no se moviere tampoco el paralelepípedo, será $u = 0$: y la resistencia quedará $= mbea$.

Corolario 5.

Si el movimiento fuere horizontal, será $sen.\theta = 0$: y la resistencia, del mismo modo, quedará $= mbea$.

Corolario 6.

Si fuere el fluido el que se mueva, y no el paralelepípedo, será $sen.\theta = cos.\omega$: con que la resistencia se reducirá á $mbe\left(a^{\frac{1}{2}} sen.\omega \pm \frac{1}{8} u\, cos.\omega\right)^2$.

Corolario 7.

Si, á mas de esto, fuere $sen.\omega = 0$, ó se moviere el fluido verticalmente, quedará la resistencia $= \frac{1}{64} mbeu^2$: ó por ser $\frac{1}{64} u^2 = a$, $= mbea$.

CAPITULO 7.

De lo que las desnivelaciones del fluido en unas superficies alteran la fuerza que padecen otras, como tambien las resistencias.

PROPOSICION 46.

LA desnivelacion del fluido, que procede de la accion de una superficie qualquiera, se estiende todo al rededor de ella con igual y semejante parábola.

Fig. 64. Siendo PF la desnivelacion procedente del movimiento de una superficie, CD la superficie del fluido, y FD la parábola que lo termina, es preciso que se forme igual y semejante parábola CF al lado opuesto de PF, pues de la elevacion FP, y de la gravedad que esta comunica á todas las partículas del fluido, se forma la parábola FD: con que habiendose de comunicar igual gravedad hacia las de FC, igual parábola FC se debe formar. Semejante argumento existe para todo el rededor de la desnivelacion PF: luego semejante parábola se forma todo al rededor de dicha desnivelacion.

Corolario 1.

Esta regla se hace general para qualquiera superficie impelente ó impelida, vertical, inclinada ú horizontal.

Corolario 2.

Si fuere un cuerpo AG el que movido produgere la desnivelacion, siendo PG menor que PC=PD, no impedirá aquel que se forme la desnivelacion CGB, aunque sí la BGPF, por ocupar su lugar el mismo cuerpo.

Corolario 3.

Las desnivelaciones deben, por consiguiente, producir fuerza positiva ó negativa en las demas superficies que circundan, ó á que alcanzan, alterando las que padecian sin esta circunstancia: como tambien la velocidad con que saliera el fluido por un agugero hecho en las mismas.

Corolario 4.

Si la superficie fuere plana, será PC=PD= $u\,sen.\theta$, expresando θ el ángulo que formare la misma con la direccion del movimiento.

PROPOSICION 47.

Hallar la velocidad con que saldrá el fluido por un orificio hecho en una superficie, atendiendo al efecto que causa en ella la desnivelacion que otra produce.

La velocidad que toma el fluido por qualquiera orificio de una superficie, tiene relacion con la altura de la desnivelacion en la vertical del mismo orificio. Siendo $\frac{1}{64}u^2 sen.\theta^2$ la desnivelacion, toman las partículas del fluido, colocadas en la misma vertical, la velocidad $u\,sen.\theta$: luego si en general se tiene la altura de la desnivelacion sobre un orificio, multiplicandola por 64, y sacando la raiz quadrada, se tendrá la velocidad que tomarán las partículas del fluido; la que añadida ó substrahida de la que debe resultar, por la altura que tubiere la superficie del fluido sobre el orificio, se tendrá la velocidad con que saldrá por este.

PROPOSICION 48.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana impelente, que está enteramente sumergida en el fluido, atendiendo á la desnivelacion que produce otra igualmente impelente.

Fig. 65. Que sea CL la superficie impelente que padece la fuerza que se desea inquirir: CN la que causa la desnivelacion: OQ la superficie del fluido: OANQ la desnivelacion que resulta del movimiento de la superficie NC; y OFED la que resulta del movimiento de LC, que se supone menor que la primera, por ser el ángulo que forma CN con la direccion del movimiento mayor que el que forma LC. Sea en la vertical BCT, BC $=$ D, CG $= x$, y será la horizontal GH $= \frac{x\,\text{cos.}\eta}{\text{sen.}\eta}$, la vertical HK $= \text{D}+x$, y KI, desnivelacion correspondiente al punto H, $= \frac{1}{64}\text{OK}^2$ $= \frac{1}{64}(\text{BO}-\text{BK})^2 = \frac{1}{64}\left(u\,\text{sen.}\Theta - \frac{x\,\text{cos.}\eta}{\text{sen.}\eta}\right)^2$, expresando Θ el ángulo que forma la direccion del movimiento con CN; de suerte que la velocidad con que saldrá el fluido por el orificio hecho en H fuera $8(\text{D}+x)^{\frac{1}{2}} + u\,\text{sen.}\Theta - \frac{x\,\text{cos.}\eta}{\text{sen.}\eta}$. La fuerza horizontal que padecerá una diferencio-diferencial en H, será pues $= \text{-----}$ $m.dc.dx\left((\text{D}+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\left(u\,\text{sen.}\Theta - \frac{x\,\text{cos.}\eta}{\text{sen.}\eta}\right)\right)^2$: ó siendo c constante, será la fuerza que padece una diferencial $=$ $mc.dx\left((\text{D}+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\left(u\,\text{sen.}\Theta - \frac{x\,\text{cos.}\eta}{\text{sen.}\eta}\right)\right)^2$: cuyo integral

$$mc\left(\text{D}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}u\left((\text{D}+x)^{\frac{3}{2}} - \text{D}^{\frac{3}{2}}\right)\text{sen.}\Theta\right) + \text{-------}$$

mc

$$mc\left(\frac{u^2 x}{64}\text{sen.}\Theta^2 - \left(\tfrac{1}{10}(\text{D}+x)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}\text{D}(\text{D}+x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{15}\text{D}^{\frac{5}{2}}\right)\frac{\text{cos.}\eta}{\text{sen.}\eta}\right)$$

$$-mc\left(\frac{ux^2\,\text{sen.}\Theta\,\text{cos.}\eta}{64\,\text{sen.}\eta} - \frac{x^3\,\text{cos.}\eta^2}{3.64\,\text{sen.}\eta^2}\right),$$ suponiendo horizontal la union C de las dos superficies, será la fuerza horizontal que padecerá la superficie HC. Substitúyase ahora $x = \text{CT} = \frac{\text{RT}\,\text{sen.}\eta}{\text{cos.}\eta} = \frac{\text{EF}\,\text{sen.}\eta}{\text{cos.}\eta} = \frac{u\,\text{sen.}\eta}{\text{cos.}\eta}(\text{se.}\Theta - \text{se.}\theta)$, expresando θ el ángulo que forma la direccion del movimiento con la CL, siendo EF lo que se estiende una desnivelacion sobre la otra, y será la fuerza horizontal que padecerá la CR $=$ -----------

$$mc\left(\frac{\text{D}u\,\text{sen.}\eta(\text{sen.}\Theta - \text{sen.}\theta)}{\text{cos.}\eta} + \frac{u^2\,\text{se.}\eta^2(\text{sen.}\Theta - \text{sen.}\theta)^2}{2\,\text{cos.}\eta^2}\right) +$$

$$\tfrac{1}{6}mcu\,\text{se.}\Theta\left(\left(\text{D}+\frac{u\,\text{se.}\eta(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)}{\text{cos.}\eta}\right)^{\frac{3}{2}} - \text{D}^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{mc\,\text{cos.}\eta}{10\,\text{sen.}\eta}\left(\text{D}+\frac{u\,\text{se.}\eta(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)}{\text{cos.}\eta}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{mc\text{D}\,\text{cos.}\eta}{6\,\text{sen.}\eta}\left(\text{D}+\frac{u\,\text{se.}\eta}{\text{cos.}\eta}(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{mc\,\text{cos.}\eta}{15\,\text{sen.}\eta}\text{D}^{\frac{5}{2}} + \frac{mcu^3(\text{se.}\Theta^3 - \text{se.}\theta^3)\text{se.}\eta}{3.64.\text{cos.}\eta}.$$

Corolario 1.

La fuerza horizontal que padecería la CR resultante de la desnivelacion que ella sola produgera es (*Prop.* 24)

$$= mc\left(\text{D}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}u\left((\text{D}+x)^{\frac{3}{2}} - \text{D}^{\frac{3}{2}}\right)\text{sen.r} + \tfrac{1}{64}u^2 x\,\text{sen.}\theta^2\right) =$$

$$mc\left(\frac{\text{D}u\,\text{sen.}\eta}{\text{cos.}\eta}(\text{sen.}\Theta - \text{se.}\theta) + \frac{u^2\,\text{sen.}\eta^2(\text{sen.}\Theta - \text{sen.}\theta)^2}{2\,\text{cos.}\eta^2}\right) + \text{-----}$$

$$+\tfrac{1}{6}mcu\,\text{sen.}\theta\left(\left(\text{D}+\frac{u\,\text{se.}\eta}{\text{cos.}\eta}(\text{se.}\Theta - \text{se.}\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - \text{D}^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{mcu^3\,\text{sen.}\theta^3\,\text{sen.}\eta}{64.\text{cos.}\eta}(\text{se.}\Theta - \text{se.}\theta):$$

luego restando este valor de la fuerza antes hallada, quedará el exceso de fuerza horizontal que la comunicará la desnivelacion de la otra superficie $=$ -----

$$\tfrac{1}{6}mcu(\text{sen.}\Theta - \text{sen.}\theta)\left(\left(\text{D}+\frac{u\,\text{sen.}\eta}{\text{cos.}\eta}(\text{sen.}\Theta - \text{sen.}\theta)\right)^{\frac{3}{2}} - \text{D}^{\frac{3}{2}}\right) -$$

mc

$$\frac{mc\cos.n}{\mathrm{sen}.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\mathrm{se}.n}{\cos.n}(\mathrm{se}.\Theta-\mathrm{se}.\theta)\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\mathrm{se}.n}{\cos.n}(\mathrm{se}.\Theta-\mathrm{se}.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mcu^3\,\mathrm{sen}.n}{3.64\cos.n}(\mathrm{sen}.\Theta-\mathrm{sen}.\theta)^2(\mathrm{sen}.\Theta+2\,\mathrm{sen}.\theta).$$

Corolario 2.

La fuerza horizontal que padece toda la superficie CL resultante de la desnivelacion que ella sola produce, es (*Proposicion* 24.) = - - - - - - - - -

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{6}u\,\mathrm{sen}.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\,\mathrm{sen}.\theta^2\right),$$

expresando a toda la altura vertical de la misma superficie: luego añadiendo esta cantidad al exceso de fuerza que la comunica la otra superficie, será toda la fuerza horizontal que padecerá = - - - - - - - - -

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{6}u\,\mathrm{sen}.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\,\mathrm{sen}.\theta^2\right)+$$
$$\tfrac{1}{6}mcu(\mathrm{sen}.\Theta-\mathrm{sen}.\theta)\left(\left(D+\frac{u\,\mathrm{sen}.n}{\cos.n}(\mathrm{se}.\Theta-\mathrm{se}.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)-$$
$$\frac{mc\cos.n}{\mathrm{sen}.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\mathrm{se}.n}{\cos.n}(\mathrm{se}.\Theta-\mathrm{se}.\theta)\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\mathrm{se}.n}{\cos.n}(\mathrm{se}.\Theta-\mathrm{se}.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mu^3\,\mathrm{sen}.n}{3.64.\cos.n}(\mathrm{sen}.\Theta-\mathrm{sen}.\theta)^2(\mathrm{sen}.\Theta+2\,\mathrm{sen}.\theta).$$

Escolio 1.

Despues de la integracion substituimos x = - - - $\frac{u\,\mathrm{sen}.n}{\cos.n}(\mathrm{sen}.\Theta-\mathrm{sen}.\theta)$, á fin de tener la fuerza horizontal que padece la CR, comprehendida entre los puntos C y R, siendo este el que corresponde á la vertical FR que pasa por F, extremo de la parte á que se estiende la mayor elevacion sobre la menor; pero esto no debe entenderse sino en el caso de que la vertical FR

FR corte la superficie CL en un punto como R: si CL fuere menor que CR, ya no se debe substituir por x sino su legitimo valor, que será $k\,\mathrm{sen}.n$ si k denota la longitud CL de la superficie.

Escolio 2.

Si BT fuere menor que BC, ó si la superficie CL cayere á la parte de arriba de la horizontal del punto C, serán negativas las cantidades x, a, y $\mathrm{sen}.n$, con que se debe cuidar, en este caso, de mudar los correspondientes en las fórmulas que preceden.

PROPOSICION 49.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana impelida que está enteramente sumergida en el fluido, atendiendo á la desnivelacion que produce otra igualmente impelida.

Esta proposicion no se diferencia de la dada (*Propos.* 48.) sino en que son KI, y por consiguiente $\tfrac{1}{8}\left(u\,\mathrm{sen}.\Theta-\frac{x\cos.n}{\mathrm{sen}.n}\right)$, negativas. Variando, pues, los signos á los productos correspondientes, quedará la fuerza horizontal que padece la CR = - - - - - -

$$mc\left(\frac{Du\,\mathrm{sen}.n}{\cos.n}(\mathrm{sen}.\Theta-\mathrm{sen}.\theta)+\frac{u^2\,\mathrm{sen}.n^2}{2\cos.n^2}(\mathrm{sen}.\Theta-\mathrm{sen}.\theta)^2\right)-$$
$$\tfrac{1}{6}mcu\,\mathrm{sen}.\Theta\left(\left(D+\frac{u\,\mathrm{sen}.n}{\cos.n}(\mathrm{sen}.\Theta-\mathrm{sen}.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+ - - - - -$$
$$mc\frac{\cos.n}{\mathrm{sen}.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\mathrm{se}.n}{\cos.n}(\mathrm{se}.\Theta-\mathrm{se}.\theta)\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\mathrm{se}.n}{\cos.n}(\mathrm{se}.\Theta-\mathrm{se}.\theta)\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mcu^3\,\mathrm{sen}.n}{3.64.\cos.n}(\mathrm{sen}.\Theta-{}^3\mathrm{sen}.\theta^3).$$

Corolario 1.

Por igual razon el exceso de fuerza horizontal que le comunicará la desnivelacion de la otra superficie será =

$$=mc\left(-\tfrac{1}{6}u(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\left(\left(D+\frac{u\,\text{se.}n}{\text{cos.}n}(\text{sen.}\Theta-\text{sen.}\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\right)+$$

$$\frac{mc\,c\,\text{cos.}n}{\text{sen.}n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\text{se.}n}{\text{cos.}n}(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\text{se.}n}{\text{cos.}n}(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+\frac{mcu^3\,\text{sen.}n}{3.64.\text{cos.}n}(\text{sen.}\Theta-\text{sen.}\theta)^2(\text{sen.}\Theta+2\,\text{seu.}\theta).$$

Corolario 2.

Por lo mismo la fuerza horizontal que padecerá la superficie CL, será = - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}u\,\text{sen.}\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{46}u^2a\,\text{sen.}\theta^2\right)-$$

$$\tfrac{1}{6}mcu(\text{sen.}\Theta-\text{sen.}\theta)\left(\left(D+\frac{u\,\text{sen.}n}{\text{cos.}n}(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+$$

$$\frac{mc\,c\,\text{cos.}n}{\text{sen.}n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\text{se.}n}{\text{col.}n}(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{a\,\text{se.}n}{\text{cos.}n}(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+\frac{mcu^3\,\text{sen.}n}{3.64.\text{cos.}n}(\text{sen.}\Theta-\text{sen.}\theta)^2(\text{sen.}\Theta+2\,\text{sen.}\theta).$$

PROPOSICION 50.

Hallar la fuerza horizontal que padece una superficie plana impelida, que está enteramente sumergida en el fluido, atendiendo á la desnivelacion que produce otra impelente.

La velocidad con que saldrá el fluido por el orificio H de resulta de la desnivelacion que produce la superficie impelente NC es, por lo dicho (*Propos.* 48.) $=8(D+x)^{\frac{1}{2}}+u\,\text{sen.}\Theta-\frac{x\,\text{cos.}n}{\text{sen.}n}$; pero suponiendo ahora que la superficie CL es impelida ó que huye del fluido con la velocidad $u\,\text{sen.}\theta$, con esta menos saldrá el mismo fluido por el orificio H: será, pues, la efectiva $=8(D+x)^{\frac{1}{2}}+u(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)-\frac{x\,\text{cos.}n}{\text{sen.}n}$. No diferenciándose

esta

esta de la otra sino en tener $\text{sen.}\Theta-\text{sen.}\theta$ en lugar de $\text{sen.}\Theta$ solo, se resolverá esta Proposicion substituyendo en la dada (*Propos.* 48.) $\text{sen.}\Theta-\text{sen.}\theta$ en lugar de $\text{sen.}\Theta$ solo: será, pues, la fuerza horizontal que padecerá la CR = - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(Dx+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}u(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{3}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2x(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)^2\right)-$$

$$\frac{mc\,c\,\text{cos.}n}{\text{sen.}n}\left(\tfrac{1}{10}(D+x)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D(D+x)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)-\left(\frac{ux^2\,\text{cos.}n}{64\,\text{sen.}n}+\frac{x^3\,\text{cos.}n^2}{3.64.\text{se.}n^2}\right)mc.$$

Substitúyase ahora $x=CT=\frac{RT.\text{sen.}n}{\text{cos.}n}=\frac{BO.\text{sen.}n}{\text{cos.}n}=\frac{u\,\text{sen.}n\,\text{sen.}\Theta}{\text{cos.}n}$ para el caso en que sea CL = ó > CR, y será la fuerza horizontal que padecerá la CR = - - - -

$$mc\left(\frac{Du\,\text{se.}n\,\text{se.}\Theta}{\text{cos.}n}+\frac{u^2\,\text{se.}n^2\,\text{se.}\Theta^2}{2\,\text{cos.}n}+\tfrac{1}{6}u(\text{se.}\Theta-\text{se.}\theta)\left(\left(D+\frac{u\,\text{se.}n\,\text{se.}\Theta}{\text{cos.}n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$-\frac{mc\,c\,\text{cos.}n}{\text{sen.}n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\text{sen.}n\,\text{sen.}\Theta}{\text{cos.}n}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\text{sen.}n\,\text{sen.}\Theta}{\text{cos.}n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+\frac{mcu^3\left((\text{sen.}\Theta-\text{sen.}\theta)^3-\text{sen.}\theta^3\right)}{3.64.\text{cos.}n}.$$

Corolario 1.

La fuerza horizontal que padecerá la CR, resultante de la desnivelacion que ella sola produgera es (*Pr.* 24) =

$$mc\left(\frac{Du\,\text{se.}n\,\text{se}\Theta.}{\text{cos.}n}+\frac{u^2\,\text{se.}n^2\,\text{se.}\Theta^2}{2\,\text{cos.}n^2}-\tfrac{1}{6}u\,\text{se.}\theta\left(\left(D+\frac{u\,\text{se.}n\,\text{se.}\Theta}{\text{cos.}n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\right)+$$

$mc\frac{u^3\,\text{sen.}n\,\text{sen.}\Theta\,\text{sen.}\theta^2}{64\,\text{cos.}n}$: luego, restando este valor de la fuerza hallada antes, quedará la horizontal que le comunica la desnivelacion de la otra superficie

$$=mc\left(\tfrac{1}{6}u\,\text{sen.}\Theta\left(\left(D+\frac{u\,\text{sen.}n\,\text{sen.}\Theta}{\text{cos.}n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\right)- - - - -$$

$$\frac{mc\cos.n}{\sin.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\sin.n\,\sin.\Theta}{\cos.n}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\sin.n\,\sin.\Theta}{\cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mcu^3\,\sin.n\,\sin.\Theta^2\,(\sin.\Theta-3\sin.\theta)}{3.64.\cos.n}.$$

Corolario 2.

La fuerza horizontal que padece toda la superficie CL, resultante de la desnivelacion que ella sola produce es (*Proposicion* 24.) $=$ - - - - - -

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}u\,\sin.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2 a\,\sin.\theta^2,\right),$$

expresando a toda la altura vertical de la misma superficie: luego añadiendo esta cantidad á la que le comunica la otra superficie, será toda la fuerza horizontal que padecerá $=$ - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}u\,\sin.\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2 a\,\sin.\theta^2\right)+$$
$$\tfrac{1}{6}mcu\,\sin.\Theta\left(\left(D+\frac{u\,\sin.n\,\sin.\Theta}{\cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)- - - - - - - - -$$
$$\frac{mc\cos.n}{\sin.n}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\,\sin.n\,\sin.\Theta}{\cos.n}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\,\sin.n\,\sin.\Theta}{\cos.n}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)$$
$$+\frac{mcu^3\,\sin.n\,\sin.\Theta^2}{3.64.\cos.n}(\sin.\Theta-3\sin.\theta).$$

Escolio 1.

Despues de la integracion substituimos $x=\frac{u\,\sin.n\,\sin.\Theta}{\cos.n}$ para el caso en que sea RC $=$ ó $<$ CL: si fuere RC $>$ CL se debe substituir por x su legítimo valor, que será $k\,\sin.n$, denotando k la longitud de CL.

Escolio 2.

Fig. 66. Si BT fuere menor que BC, ó si la superficie CL cayese á la parte de arriba de la horizontal del punto C, serán negativas las cantidades x, a, y $\sin.n$ con que se mudarán en las fórmulas los signos correspondientes. En este caso puede entenderse la superficie impelida hasta salir fuera del fluido, como si en lugar de CL fuera CV.

Escolio 3.

Quando la superficie impelida se estiende hasta salir fuera del fluido, se ofrecen dos casos distintos: uno quando corta la OR por mas abaxo que el punto O, que ya queda determinado en la Proposicion y Corolarios precedentes: el otro quando corta la OB, y desnivelacion OA que se resuelve en el Corolario siguiente.

Escolio 4.

La cantidad $\frac{x\cos.n}{\sin.n}$ en la expresion de la velocidad $8(D\pm x)^{\frac{1}{2}}+u\,\sin.\Theta-\frac{x\cos.n}{\sin.n}$, no solo es cero quando es $\sin.n=1$, sino tambien quando es negativo $\cos.n$, ó que cae la superficie impelida entre AC y NC, porque entre estas dos líneas es constante la desnivelacion terminada por la AN paralela á la superficie OQ, siendo siempre $=\tfrac{1}{64}u^2\,\sin.\Theta^2$, de suerte que se desvanece el segundo termino de $\tfrac{1}{64}\left(u\,\sin.\Theta-\frac{x\cos.n}{\sin.n}\right)^2$ que antes daba el valor de KI.

Corolario 3.

Quando la superficie impelida se estiende hasta salir fuera del fluido, y que corta la desnivelacion OA, es la velocidad de aquel, en el punto mas alto, ú de la misma salida, $M=0$: esto es,

$8(D+x)^{\frac{1}{2}}+u(sen.\Theta-sen.\theta)-\frac{x cos.n}{sen.n}=0$, cuya equacion dá

$$x=\frac{u se.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)-\frac{64 se.n^2}{2cos.n^2}+\frac{8 se.n}{cos.n}\left(D-\frac{u se.n}{cos.n}(se.\Theta-se.\theta)+\frac{64 se.n^2}{4cos.n^2}\right)^{\frac{1}{2}}:$$

valor que se debe substituir por x, despues de haber integrado.

Corolario 4.

Si fuere $sen.n=-1$ quedará $x=D-\frac{1}{64}u^2(se.\Theta-se.\theta)^2$: y lo mismo para todos los casos en que caiga la superficie impelida entre AC y NC, sobre AC ó sobre NC.

Corolario 5.

Cayendo la misma superficie sobre CN, ó reduciendose las dos, impelente é impelida, á una sola superficie, es $sen.\theta=sen.\Theta$: luego, para este caso, quedará $x=D$: lo que muestra que el fluido terminará en la superficie OQ, quedando perfectamente de nivel, y sin dexar la menor cavidad detras de la superficie impelida.

Corolario 6.

Para qualquiera de los casos, en que la superficie impelida caiga entre AC y NC, habiendose de desvanecer $cos.n$, quedará la fuerza horizontal que padezca, $=$

$$mc\left(-Dx+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}u(se.\Theta-se.\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{64}u^2x(se.\Theta-sen.\theta)^2\right).$$

Corolario 7.

Si las dos superficies, impelida é impelente, se redugeren á una sola, será $x=D$, y $sen.\Theta=sen.\theta$: luego, substituyendo estos valores, quedará la fuerza que padezca la superficie impelida $=-\frac{1}{2}mcD^2$, expresando el signo negativo, hacerse la fuerza en oposicion de la impelente.

Co-

Corolario 8.

Si fuere x despreciable, respecto de D, quedará la fuerza horizontal que padezca la superficie impelida

$$=mc\left(-Dx+\frac{1}{4}u(se.\Theta-se.\theta)D^{\frac{1}{2}}x-\frac{1}{64}u^2x(se.\Theta-se.\theta)^2\right):$$

que, siendo $sen.\Theta=sen.\theta$, queda $=-mcDx$.

PROPOSICION 51.

Hallar las fuerzas horizontales que padece una superficie plana impelente, ó impelida, atendiendo á la desnivelacion que produce otra, quando media alguna distancia entre las dos.

Que sea NC una superficie impelente que produce Fig. 67. la desnivelacion AO: que en C la esté unida otra CG, y á esta en G la GH, de suerte que se busque la fuerza que padece esta superficie atendiendo á la desnivelacion AO: y respecto que la fuerza depende de la altura de la desnivelacion, y que la correspondiente al punto G es FB, y no la AE que antes usamos: substitúyase la BF en lugar de AE, y se tendrá resuelta la Proposicion. AE es igual á $\frac{1}{64}\overline{OE}^2=\frac{1}{64}u^2 sen.\Theta^2$, y $BF=\frac{1}{64}\overline{OF}^2=\frac{1}{64}(OE-EF)^2$: luego habrá que substituir $(OE-EF)^2$ en lugar de $\overline{OE}^2$, ó OE—EF en lugar de OE: esto es, $u sen.\Theta-EF$ en lugar de $u sen.\Theta$ solo, para que las fórmulas precedentes correspondan. Lo mismo resulta aunque la superficie NC sea impelida, por argüirse lo mismo para qualquiera caso. Si fuere la distancia horizontal entre las dos verticales AC, $BG=EF=q$, tendremos que substituir $u sen.\Theta-q$ en lugar de $u sen.\Theta$ solo.

Co-

Corolario 1.

Siendo la distancia horizontal $q = u\,\text{ſen.}\Theta =$ á toda la amplitud de la desnivelacion FO, será $u\,\text{ſen.}\Theta - q = 0$, y por consiguiente ninguna fuerza le comunicará á la superficie la desnivelacion.

Corolario 2.

Como lo mismo sucede quando es EF $>$ EO $= u\,\text{ſen.}\Theta$, ó $q >$ EO $= u\,\text{ſen.}\Theta$, se sigue, que para el caso, en que sea $q =$ ó $>$ EO $= u\,\text{ſen.}\Theta$, se debe substituir en las fórmulas, $q = u\,\text{ſen.}\Theta$.

Corolario 3.

Como las cantidades que expresan la fuerza que comunica la desnivelacion que produce la otra superficie estan todas afectas de $u(\text{ſen.}\Theta - \text{ſen.}\theta)$, quando se trata de la combinacion de superficies impelentes ó impelidas entre sí, y que ahora se ha de substituir $u\,\text{ſen.}\Theta - q$ en lugar de $u\,\text{ſen.}\Theta$ solo, estarán afectas de $u(\text{ſen.}\Theta - \text{ſen.}\theta) - q$: luego si fuere $u\,\text{ſen.}\Theta = u\,\text{ſen.}\theta + q$, no resultará fuerza comunicante alguna en estos casos.

Corolario 4.

Como en las curvas es muy corta la diferencia de los ángulos Θ y θ quando las diferenciales distan poco, y en las que aumentan su distancia es preciso substraher de ella la cantidad $\frac{q}{u}$: se sigue que en las curvas se puede despreciar la fuerza que se comunican unas partes á otras, lo que nos facilitará los cálculos.

PRO-

PROPOSICION 52.

Hallar la resistencia horizontal que padece un paralelepípedo rectángulo, que flota sobre un fluido con dos de sus lados paralelos al horizonte, moviendose el paralelepípedo, y no el fluido, en direccion paralela á otros dos lados, en caso de ser $a =$ ó $> \frac{1}{64}u^2\,\text{ſen.}\Theta^2$, y atendiendo á la fuerza que comunica á la superficie impelida la desnivelacion de la impelente.

Siendo en este caso $\text{ſen.}\eta = 1$, será (*Propos.* 50.) la fuerza que padece la superficie impelida $=$

$$mc\left(Dx + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}u(\text{ſe.}\Theta - \text{ſen.}\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2x(\text{ſe.}\Theta - \text{ſe.}\theta)^2\right),$$

donde se ha de substituir la x negativa, y (*Cor.* 4. *Prop.* 50.) $= D - \frac{1}{64}u^2(\text{ſen.}\Theta - \text{ſen.}\theta)^2$; ó substituyendo $u\,\text{ſen.}\Theta - q$, por $u\,\text{ſen.}\Theta$, denotando q toda la longitud del paralelepípedo, y $\text{ſen.}\Theta = \text{ſen.}\theta$, que son iguales en este caso, será la fuerza $=$

$$-mc\left(Dx - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}q\left((D+x^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}q^2x\right),$$

y el valor de $x = D - \frac{1}{64}q^2$. Substitúyase este en la fuerza, y se reducirá á

$$-mc\left(\tfrac{1}{2}D^2 - \tfrac{1}{6}qD^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{64}q^2D - \frac{1}{6.64^2}q^4\right);$$

ó poniendo $a = D$, que es toda la profundidad que tiene debaxo del fluido uno y otro extremo del paralelepípedo, será la fuerza que padece la superficie impelida

$$= -mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{6}qa^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{64}q^2a - \frac{1}{6.64^2}q^4\right).$$

La que padece la impelente, no pasandole el fluido por encima, es (*Proposicion* 20.) $=$

$$mc\left(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}}\text{ſen.}\theta^2 + \tfrac{1}{64}u^2a\,\text{ſen.}\theta^2 + \frac{u^4\,\text{ſeu.}\theta^4}{6.64^2}\right):$$

luego la resistencia que padecerá el paralelepípedo será $=$

mc

$$mc\left(\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}(u\,sen.\theta+q)+\frac{1}{64}a(u^2 sen.\theta^2-q^2)+\frac{1}{6.64^2}(u^4 se.\theta^4+q^4)\right).$$

Corolario 1.

Si la longitud del paralelepípedo fuere igual ó mayor que $u\,sen.\theta$, substituiremos $q = u\,sen.\theta.$, y será la resistencia que padecerá $=$ $mc\left(\frac{1}{3}ua^{\frac{3}{2}}sen.\theta+\frac{1}{3.64^2}u^4 sen.\theta^4\right)$, la misma que encontramos (*Cor.* 1. *Prop.* 36.).

Corolario 2.

Si fuere $q = 0$, ó se redugere el paralelepípedo á un plano, será la resistencia que padecerá $=$ $mc\left(\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta+\frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2+\frac{1}{6.64^2}u^4 sen.\theta^4\right)$.

Corolario 3.

La resistencia que padecerá aquel paralelepípedo será mayor que la que padece este plano de la cantidad $mc\left(\frac{1}{6}a^3 u\,sen.\theta-\frac{1}{64}au^2 sen.\theta^2+\frac{1}{6.64^2}u^4 sen.\theta^4\right)$.

Corolario 4.

La resistencia que padecerá el paralelepípedo, será dupla de la que padece el plano, menos la cantidad $\frac{1}{32}mcau^2 sen.\theta^2$; ó la que padece el plano, mitad de la que padece el paralelepípedo, mas la cantidad $\frac{1}{64}mcau^2 sen.\theta$.

Corolario 5.

Si la velocidad u fuere poca, puede despreciarse el término $\frac{1}{64}mcau^2 sen.\theta^2$ por ser corto, respecto del primero $\frac{1}{6}mca^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta$, y quedará la resistencia del plano, mitad de la que padece el paralelepípedo.

Corolario 6.

Si el paralelepípedo estubiere de tal modo debaxo del fluido, que sea a despreciable, respecto de D, será (*Cor.* 8. *Propos.* 50.) la fuerza que padezca la superficie impelida $= mcDa$; y siendo la impelente $=$ $mc\left(Da+\frac{1}{4}auD^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{64}au^2\right)$, quedará la resistencia que padecerá $= \frac{1}{4}mcau(D^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}u)$; ó si fuere u corta, respecto de D, $= \frac{1}{4}mcauD^{\frac{1}{2}}$: qne es mitad de la que padece (*Cor.* 2. *Prop.* 40.) no haciendo atencion á la desnivelacion.

Corolario 7.

La resistencia que padece un paralelepípedo de igual alto y ancho, sin atender á la desnivelacion, y quando es a despreciable, respecto de D, es (*Cor.* 2. *Prop.* 40.) $= \frac{1}{2}ma^2uD^{\frac{1}{2}}$: y la que padece una esphera (*Esc. Prop.* 42.) $= \frac{1}{12}a^2mcuD^{\frac{1}{2}}$: con que son estas dos resistencias como 1 : $\frac{1}{6}c$: y siendo la del paralelepípedo, atendiendo á la desnivelacion, $\frac{1}{4}ma^2u(D^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}u)$, será la que padece la esphera $= \frac{1}{24}ma^2u(D^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}u)$.

Escolio 1.

Por lo demonstrado en el Corol. 5 precedente se tomó en el cálculo aplicado á las experiencias expuestas en el Escolio de la Propos. 36, por la resistencia

que

que debiera haber sufrido la tabla, la mitad de la que resultó para un paralelepípedo.

Escolio 2.

De la misma manera se puede hallar la resistencia que padecen los demas cuerpos compuestos de superficies rectilíneas, atendiendo á la desnivelacion que altera las fuerzas; pero basta para nuestro intento, y mas quando habremos de reducirnos á las superficies curvas, en quienes se haze despreciable esta atencion.

CAPITULO 8.

De las dimensiones y figura que deben tener las líneas y superficies, para que, movidas en el fluido, padezcan la máxîma ó mínima resistencia.

Lema 2.

HAllar la línea ó superficie que goza el máxîmo ó mínimo de una propiedad; ó aquella que, entre varias que gozan en igual grado una propiedad, goza tambien el máxîmo ó mínimo de otra distinta propiedad.

Dividida la línea ó superficie en diferenciales, se puede exponer por una cantidad diferencial la propiedad que cada una de estas debe gozar: y como se pide la máxîma ó mínima, la diferencial de dicha cantidad ha de ser constante, respecto que en este caso, del mismo valor que aumentará su expresion una diferencial, la disminuirá otra, siendo este el preciso requisito para que no pueda ser mayor ó menor la propiedad. Diferénciese, pues, la cantidad ó expresion

diferencial que expone la propiedad, y dividida por la cantidad comun que multiplicare todos los terminos, se igualará á una constante, cuya equacion despejada será la de la línea ó superficie que gozará de la máxîma propiedad.

En caso de gozar de una máxîma ó mínima propiedad, sin perder de otra que goza, las diferenciales de ambas cantidades diferenciales que expresan las propiedades, se deben igualar entre sí, respecto que no debe aumentar la una con perjuicio de la otra. Esta igualacion despejada será, pues, la de la línea ó superficie que gozará de la máxîma ó mínima propiedad, sin haber perdido de la que antes gozaba.

PROPOSICION 53.

Dada de magnitud una superficie plana vertical, que se mueve horizontalmente en un fluido inmovil, hallar la figura que debe tener para que experimente la máxîma ó mínima resistencia.

Que sean x las abcisas medidas verticalmente desde la superficie del fluido, y y las ordenadas horizontales, por las quales se exprese la equacion á la línea que termina la superficie: con esto ydx será una diferencial horizontal de la misma superficie, que por la condicion del problema debe ser constante. La resistencia que padecerá la misma diferencial será (*Cor.* 3. *Prop.* 40.) $=\frac{1}{2}myx^{\frac{1}{2}}dxusen.\theta$: luego, segun el Lema, la diferencial de esta cantidad la hemos de igualar á la de ydx: y siendo esta expresion constante podemos substituir por ella q, y será ------------ $\frac{1}{2}mqusen.\theta.\frac{dx}{2\sqrt{x}}=0=\frac{mq^2usen.\theta}{4y\sqrt{x}}$: luego para que la superficie padezca la máxîma ó mínima resistencia, han de ser x ó y infinitas, y por consiguiente y ó x

cero. Habrá de ser, pues, la superficie de una infinita extension horizontal, y de una profundidad infinitamente pequeña para que padezca la menor resistencia posible.

Corolario.

Si la anchura horizontal de la superficie se diere terminada sin que pueda exceder en punto alguno de la misma, la superficie que menos resistencia padecerá será el rectángulo que se mueve con dos de sus lados paralelos al horizonte.

PROPOSICION 54.

Determinar las dimensiones que debe tener la misma superficie vertical ó rectángulo que debe padecer la máxima ó mínima resistencia posible, en caso de atender á la parte desnivelada.

La resistencia que padece el rectángulo, atendiendo á la desnivelacion, es $\frac{1}{3}muy\,sen.\theta\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3\,sen.\theta^3}{64^2}\right)$: y como se pide que esta resistencia sea la mínima, su diferencial será $\frac{1}{2}muyx^{\frac{1}{2}}dx\,sen.\theta+\frac{1}{3}mux^{\frac{3}{2}}dy\,sen.\theta+\frac{mu^4dy\,sen.\theta}{3.64^2}=0$; pero por haber de ser constante el area del rectángulo es $xy=q^2$, expresando q una constante: luego $xdy+ydx=0$, ó $dx=-\frac{xdy}{y}$, cuyo valor substituido en la equacion precedente dá, despues de partir por $mudy\,sen.\theta$, $-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3\,sen.\theta^3}{3.64^2}=0$, ó $\frac{2u^3\,sen.\theta^3}{64^2}=x^{\frac{3}{2}}$, que dá $x=\frac{u^2\,sen.\theta^2(4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$, y $y=\frac{16^2q^2}{u^2\,sen.\theta^2(4)^{\frac{1}{3}}}$, dimensiones que debe tener el rectángulo para padecer la mínima resistencia posible.

Co-

Corolario 1.

Las dimensiones del rectángulo dependen, pues, no solo de la velocidad u con que se mueva el rectángulo, sino tambien del ángulo θ con que incidiere en él el fluido: quando mayores fueren qualquiera de estas dos cantidades, mayor debe ser la profundidad x, y menor la anchura y del rectángulo; y al contrario quando fueren menores.

Corolario 2.

La anchura infinita y que determinamos (*Prop.* 53) no le conviene, pues, al rectángulo, sino en caso de despreciarse la desnivelacion, ú de ser $u\,sen.\theta=0$.

Corolario 3.

Si se substituyen los valores de $x=\frac{u^2\,sen.\theta^2(4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$ y de $y=\frac{16^2q^2}{u^2\,sen.\theta^2(4)^{\frac{1}{3}}}$ en la resistencia ---------- $\frac{1}{3}muy\,sen.\theta\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3\,sen.\theta^3}{64^2}\right)$ que padece el paralelepípedo, quedará la mínima que puede padecer el area rectángula $q^2=\frac{mq^2u^2\,sen.\theta^2}{16(4)^{\frac{1}{3}}}$.

Corolario 4.

Lo que se ha dicho de las dos Proposiciones antecedentes y sus Corolarios conviene igualmente á un paralelepípedo rectángulo, que flota con su base paralela

lela al horizonte, no atendiendo al efecto que la desnivelacion produce en la base.

PROPOSICION 55.

Hallar la línea que debe terminar un plano horizontal, para que, movido en un fluido horizontalmente, experimente la máxima ó mínima fuerza posible.

Fig. 68. Que sea ABC el plano horizontal compuesto de dos mitades iguales y semejantes, que divide la línea ó exe BD, en cuya direccion se haga el movimiento. Mídanse tambien sobre BD las abcisas x, y sobre sus perpendiculares, las ordenadas y. Con esto, supuesto que el plano tenga un grueso infinitamente pequeño da, y que este forme por todo con el horizonte un ángulo recto, será la fuerza que padecerá una diferencial de AB, ó BC $= mdady\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{udy}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2$, respecto que $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ expresa el seno del ángulo con que incide el fluido sobre la diferencial, y a la profundidad á que está el plano debaxo de la superficie del fluido. La diferencial de la expresion es

$$mdaddy\left(a + \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \cdots$$

$$mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}\right)$$ supuesta dx constante. Partiendo ahora por $mdaddy$, y substituyendo $-dy = \frac{bdx}{x}$ expresando z una variable ó indeterminada qualquiera, y b una constante, será (*Lem.* 2.)

$$a + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+z^2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^3}{4\sqrt{(b^2+z^2)^3}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+z^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+z^2)^2} = n,$$

ex-

expresando n otra constante. Dadas, pues, la a y la u, quedará determinada por esta equacion la z, que por consiguiente será constante en toda la línea ABC, y en la equacion $-dy = \frac{bdx}{z}$. Tendremos, pues, integrando $b - y = \frac{bx}{z}$ equacion á la línea recta, y por consiguiente las AB, BC que terminan el plano ó cubren la base AC han de ser rectas.

Corolario 1.

Habiendo supuesto $-dy = \frac{bdx}{z}$, ó que mientras aumentan las abcisas, las ordenadas disminuyen, el origen de las abcisas se hallará en D.

Corolario 2.

Puesto $x = 0$, queda $b - y = 0$, ó $y = b$: luego la semiordenada DC, correspondiente á la abcisa $x = 0$, será $= b$.

Corolario 3.

Para determinar el punto en que las AB ó CB cortan al exe DB en B, tenemos que suponer $y = 0$: será, pues, para este punto $b = \frac{bx}{z}$, que dá $x = \text{DB} = z$.

Corolario 4.

Como la cantidad $z = \text{DB}$ depende de la equacion

$$a + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+z^2}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^3}{4\sqrt{(b^2+z^2)^3}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+z^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+z^2)^2} = n;$$

y

y que aun sin variar la a y la u, se deducirán tantos valores distintos de aquella como cantidades distintas se substituyan por n: se sigue, que aun sin variar la a y la u, son infinitas líneas rectas distintas las que satisfacen á la qüestion.

Corolario 5.

La fuerza que padecerá qualquiera de dichas rectas como CB que cubre la semi-ordenada DC, será $= mda.b\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$: donde se ve que siendo u positiva, quanto mayor sea $z = DB$, tanto menor será la fuerza; y al contrario: cuya noticia ya teniamos con anticipacion.

Corolario 6.

Si la u fuere negativa, quanto mayor fuere la z, tanto mayor será la fuerza; y al contrario.

Corolario 7.

Si continuado el exe BD hasta K, se terminase el plano por las quatro rectas ABCKA, la fuerza que padecerá ABC será $2bmda\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, y la que padecerá CKA será $2bmda\left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, siendo $DB = z$, y $DK = Z$: luego la resistencia será -- $2bmda\left(\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{bu}{8(b^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} - \frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$: con que quanto mayores sean no solo DB, sino tambien DK, menor será la resistencia.

Es-

Escolio.

Del Problema y sus Corolarios solo deducimos que las líneas AB, CB han de ser rectas para que padezcan la máxîma ó mínima fuerza, padeciendola mucho menor al paso que se aleja mas el punto B; pero este punto puede darse terminado, ó lo que es lo mismo puede darse terminada la longitud del plano como si hubiera de reducirse á DE. En este caso parece que el plano se habia de terminar por las rectas AE, CE: asi es en algunos casos; pero en otros padece menor resistencia la terminacion por tres rectas AG, GF, y FC, siendo la segunda paralela á la base AC, ó perpendicular al exe, y $AG = CF$, asi como $GE = EF$, como se demuestra en el Problema siguiente.

PROPOSICION 56.

Dada la semibase DC, y el exe ó longitud del plano horizontal DE, con la paralela á la base EF, hallar el punto F, al qual tirada la CF, termine el plano DEFC, de suerte que, movido horizontalmente segun el exe DE, padezca la máxîma ó mínima fuerza.

Tirada FH paralela al exe, y llamando $DE = x$, y $EF = DH = y$, será la fuerza que padezca $EF = mda.y(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u)^2$, la que padezca FC = - - - - - - - $mda.(b-y)\left(a^{\frac{3}{2}} \pm \frac{u(b-y)}{8(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, y ambas juntas

$$= mda\left(ab \pm \tfrac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}uy + \tfrac{1}{64}u^2y \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^2}{4(x+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2(b-y)^3}{64(x^2+(b-y)^2)}\right).$$

Habiendo de ser esta la máxima ó mínima, será su diferencial -

$$mda\left(\pm\tfrac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}udy+\tfrac{1}{64}u^2dy\mp\frac{2a^{\frac{1}{2}}u(b-y)dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\pm\text{-----}$$

$$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^3dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3u^2(b-y)^2dy}{64(x^2+(b-y)^2)}+\frac{2u^2(b-y)^4dy}{64(x^2+(b-y)^2)^2}\right)=0$$

ó partiendo por $\frac{1}{4}udymda$, y substituyendo t por $b-y$, será $\pm a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}u\mp\frac{2a^{\frac{1}{2}}x^2t+a^{\frac{1}{2}}t^3}{(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3ux^2t^2+ut^4}{16(x^2+t^2)^2}=0$, ó

$$\pm16a^{\frac{1}{2}}(x^2+t^2)^2\mp16a^{\frac{1}{2}}(2x^2t+t^3)\sqrt{x^2+t^2}+ux^2(x^2-t^2)=0,$$

que reduciendo, y ordenando resulta ----------

$$\left.\begin{array}{l}16^2at^6+2.16^2ax^2t^4\text{------}*\text{-----}16^2ax^6\\ \pm32a^{\frac{1}{2}}ut^6\pm32a^{\frac{1}{2}}ux^2t^4\mp32a^{\frac{1}{2}}ux^4t^2\mp32a^{\frac{1}{2}}ux^6\\ \qquad-u^2x^2t^4+2u^2x^4t^2-u^2x^6\end{array}\right\}=0:$$

equacion del tercer grado, que tiene una raiz real positiva, ó valor de t^2, que es el que satisface á la qüestion.

Corolario 1.

Si se substituye en la equacion $t=0$, queda $-x^6(16a^{\frac{1}{2}}\mp u)^2$ cantidad negativa; y si se coloca $t=x$ queda 2.16^2ax^6 cantidad positiva: luego t es menor que x siempre que tenga algun valor la a, ó estubiere el plano algo sumergido en el fluido: y si fuere $a=0$, ó estubiere coincidente con la superficie del fluido, será $t=x$: de suerte, que el ángulo HFC será quando mas de 45°, y disminuye al paso que deba estar mas profundo el plano.

Corolario 2.

Siendo $a=\infty$ queda la equacion en -------

$t^6+2x^2t^4-x^6=0$, ó $t^6+2x^2t^4=x^6$, que añadiendo á una y otra parte x^4t^2, y partiendo por t^4+x^2, queda $t^4+x^2t^2=x^4$; de que resulta $t=x\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, mínimo valor de t: y en este caso el ángulo HFG es proxîmamente de $31^\circ\ 44'$.

Corolario 3.

Igualmente varía el valor de t, variando la velocidad u. El caso en que es $u=\infty$, corresponde á aquel en que es $a=0$, y en él es $t=x$; y quando es $u=0$, que corresponde al caso en que es $a=\infty$, es $t=x\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

Corolario 4.

Para la parte impelente del plano AGFC, como es $t<x$, será $\pm32a^{\frac{1}{2}}u(t^6+x^2t^4-x^4t^2-x^6)$ negativo; y positivo para la impelida AOLC: luego será la t, correspondiente á la primera, é igual CH, mayor que la t correspondiente á la segunda é igual CM: de suerte, que siendo DE $=$ DN, habría de ser GF $<$ OL para que el plano encuentre la menor resistencia.

Corolario 5.

El punto F caerá sobre el exe DB siempre que el valor de t, deducido de la equacion, fuere igual á la semibase CD, y en tal caso el semiplano se reducirá á un triángulo; pero si el valor de t fuere mayor que la semibase, el punto F caerá á la parte opuesta del exe sobre EG, y la CF cortará al exe entre D y E: en este caso, terminando el plano por una recta tirada desde C á E, será la que menos resistencia padecerá.

Corolario 6.

En todos estos casos serán, pues, nulas la EF y NL, y el semiplano se reducirá á un triángulo, como AEC, ó AKC: ofreciendose todos ellos, tengan los valores que se quisieren la a y la u, quando DC es igual ó menor que $ED\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, ó proxîmamente DC igual ó menor que $\frac{4}{5}$ ED.

Corolario 7.

Puesto que las dos líneas CF, FE padecen la menor fuerza, la padecerán tambien menor que otras dos CQ, QE, y estas menor que otras dos mas apartadas de la CF: pues todas las demas raices de la equacion que no sean la que dá la CF, son imaginarias.

Corolario 8.

Si entre las dos paralelas DC, EF se toma un punto qualquiera como I, y á él se tiran dos líneas rectas CI, IE, estas padecerán mayor fuerza que las CF, FE: pues prolongada la CI hasta Q, y padeciendo IQ, QE, por el Corolario precedente, menor fuerza que IE, y por consiguiente CQ, QE, menor que CI, IE: CF, y FE que la padecen menor que CQ, QE la padecerán mucho menor que CI y IE.

Corolario 9.

De lo mismo se infiere, que con qualesquiera líneas que se termine el plano, ya sean rectas, curvas ó mixtas, como estas queden comprehendidas entre las dos paralelas EF, DC, siempre padecerán mayor fuerza que las dos CF y FE.

Co-

Corolario 10.

Quando mayor sea la longitud del plano, ú del exe DE, menor será la fuerza que padecerá, porque FR y RS padecen menor fuerza que FE: luego CR y RS la padecen tambien menor que CF y FE.

Corolario 11.

Un cuerpo compuesto de dos prismas triangulares ABC, AKC, en el qual BD y DK son mayores que $\frac{4}{5}$ DC, y los lados AB $=$ BC y CK $=$ KA son verticales, movido segun el exe horizontal KB, padecerá menor resistencia que si fuera terminado por qualesquiera superficies curvas: respecto que, por el problema, qualquiera seccion de él horizontal, terminada por las rectas AB, BC, CK y KA, padecerá menor resistencia que si fuere terminada por otras qualesquiera líneas.

Corolario 12.

Lo mismo se debe entender de qualesquiera otro prisma, aunque sus lados AB, BC, CK y KA no sean verticales, con tal que las secciones, ú diferenciales horizontales formen un ángulo constante con el horizonte; pues en tal caso la fuerza que padecerá qualquiera diferencial, será $mbda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{ub\,sen.n}{8(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, expresando b la mitad del ancho del prisma; y siendo constante el ángulo n que forma la diferencial horizontal del cuerpo con el horizonte, no pueden, por consiguiente, variar las resultas que produxo el Problema, que contendrá igualmente este caso substituyendo $u\,sen.n$ por u.

PRO-

PROPOSICION 57.

Dada la longitud del plano horizontal BK, y su ancho AC, se pide la BD ó el lugar donde se debe colocar dicho ancho para que, formados los dos triángulos isósceles ABC, CKA que terminan el plano, encuentre este la máxima ó mínima resistencia posible, movido horizontalmente segun el exe BK.

Llamando BK $=e$, DC $=b$ y BD $=x$, será (*Proposicion* 56.) la fuerza que padecerá BC $=$

$$\left(ab+\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)}\right)mda$$

: la que padecerá

$$CK=mda\left(ab-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{u^2b^3}{64((e-x)^2+b^2)}\right)$$

y la resistencia que de ambas resulta $=$

$$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)}+\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{u^2b^3}{64((e-x)^2+b^2)}\right)$$

Habiendo de ser esta la máxîma ó mínima, será su diferencial

$$mda\left(-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2xdx}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2u^2b^3xdx}{64(x^2+b^2)^2}\right)+$$

$$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2(e-x)dx}{4((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2u^2b^3(e-x)dx}{64((e-x)^2+b^2)^2}\right)=0\text{ ; ó}$$

partiendo por $\frac{1}{4}mda.ub^2dx$, será

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{ub(e-x)}{8((e-x)^2+b^2)^2}=\frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{ubx}{8(x^2-b^2)^2},$$

de cuya equacion se deducirá el valor de $x=$ BD en todos los varios que se les dieren á a y u.

Co-

Corolario 1.

La equacion no resuelve el caso en que es $a=0$, ó $\frac{a}{u}=0$, puesto que quedará en él

$$-\frac{ub(e-x)}{8((e-x)^2+b^2)^2}=\frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$$

; lo que es imposible.

Corolario 2.

Al contrario, si fuere $\frac{u}{a}=0$, quedará

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

: lo que dá $x=\frac{1}{2}e$ por el valor de x que produce la mínima resistencia.

Corolario 3.

A medida que aumenta la razon $\frac{u}{a}$, aumenta tambien la x, que produce la mínima resistencia; pero sin llegar jamas á ser $x=e$, puesto que para este caso quedara

$$0=\frac{a^{\frac{1}{2}}e}{(e^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{ube}{8(e^2+b^2)^2}$$

; lo que es imposible.

Corolario 4.

Al contrario, el valor de x, que produce la máxîma resistencia, es menor que $\frac{1}{2}e$: y es $x=0$ quando es $a^{\frac{1}{2}}=\frac{ub}{8(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

PRO-

PROPOSICION 58.

Fig. 69. Que un cuerpo ABFA terminado por dos bases horizontales triangulares y semejantes ABC, DEF, rectángulas en A y D, y por los otros tres planos ABED, CBEF y ACFD, siendo vertical el ABED, se mueva horizontalmente en el fluido, y en la direccion de este propio plano ABED, hallar la relacion entre la profundidad AD, y la anchura DF de la base, para que siendo constante el volumen del cuerpo, padezca este la menor resistencia posible.

Supóngase que GHI sea una seccion ú diferencial horizontal del cuerpo, que por consiguiente será un triángulo semejante á las bases: prolongada la GH, tírese la vertical CK, ó paralela á AG, y llámense $AB = e$, $AC = b$, $AG = CK = a$, y $HK = z$. Con esto será $GH = b - z$, el seno de $GIH = ABC = \frac{b}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$, y la fuerza que padecerá la diferencial horizontal $= mda(b-z)\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{ubS}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, expresando S el seno del ángulo que forma el plano CBEF con el horizontal GHI; pero es $S = \frac{a(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$: luego la fuerza que padecerá la diferencial $= - - - - -$

$$mda(b-z)\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{uba(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = -$$

$$mada(b-z)\left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$ Igualmente, siendo los dos triángulos ABC, GIH semejantes, será $b : e = b-z : GI = \frac{e(b-z)}{b}$: luego el area de $GIH =$

e

$\frac{e(b-z)^2}{2b}$, y el espacio que ocupa la diferencial horizontal $= \frac{eda(b-z)^2}{2b}$: el qual habiendo de ser constante, por la condicion del Problema, será $\frac{eda(b-z)^2}{2b} = q^3$, expresando q una constante: cuyo valor, substituido en la fuerza, quedará en - - - - - - - - -

$$\frac{2mbaq^3}{e(b-z)}\left(1 + \frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$ Para la resolucion del Problema tenemos que igualar la diferencial de esta fuerza á la del espacio q^3; pero siendo esta cero, lo será tambien aquella, y tendremos - - - - - - - - -

$$\frac{dz}{b-z} - \frac{2uba^{\frac{1}{2}}dz}{8(b-z)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2uba^{\frac{1}{2}}e^2zdz}{8(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$- \frac{u^2b^2adz}{64(b-z)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)} - \frac{2u^2b^2ae^2zdz}{64(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^2} = 0,$$

cuya equacion se divide justamente por $-\frac{dz}{b-z}$, y queda

$$1 + \frac{2uba^{\frac{1}{2}}}{8(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2uba^{\frac{1}{2}}e^2z}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^{\frac{3}{2}}} +$$
$$\frac{u^2b^2a}{64(b-z)(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)} + \frac{2u^2b^2ae^2z}{64(a^2(b^2+e^2)+e^2z^2)^2} = 0.$$

Como, tomando la z positiva, ú de K á H, no puede ser mayor que $= b$, todos los terminos de esta equacion son positivos, y por consiguiente no dan valor alguno á la z, y asi solo nos queda el que resulta de la cantidad $-\frac{dz}{b-z}$, por la qual se dividió la primera equacion que dá, poniendo z negativo, $z = -\infty$: esto es, la base GH, de la diferencial horizontal, ha de ser infinita para que padezca la menor fuerza posible:

 ble:

ble: y por consiguiente todo el cuerpo se ha de reducir á un plano horizontal de amplitud infinita, ó á una diferencial horizontal de la misma amplitud, para que padezca la menor fuerza posible.

Corolario 1.

Fig. 70. Un duplo prisma AFCHA, en quien las dos bases horizontales sean iguales, y AE, BF, CG y DH sean verticales, padecerá, pues, menos resistencia que qualquiera otro su igual, en que la base inferior EFGH sea menor que la superior ABCD.

Corolario 2.

Lo mismo que se ha dicho de los prismas, se debe entender de qualquiera otro cuerpo, en quien las bases ó secciones horizontales no sean triángulos, sino planos terminados por una curva qualquiera como
Fig. 71. ABC: pues dividida la diferencial horizontal en varias quadrículas sensiblemente planas, para cada una de por sí, se demonstrará lo propio, y por consiguiente de todas, ú de toda la diferencial horizontal, así como de todo el cuerpo.

PROPOSICION 59.

Hallar la línea que debe terminar un plano horizontal, para que, movido en un fluido horizontalmente, experimente la máxîma ó mínima fuerza posible, comprehendiendo al mismo tiempo la máxima ó mínima area.

Ya se resolvió la primera parte ó condicion de este Problema (*Propos.* 55.), y hallamos que la diferencial de la fuerza que padece una diferencial de la lí-

línea, es $mdaddy\left(a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+$ $mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}\right)$. Esta diferencial se ha de igualar á la que resulta de $mdaxdy$, que es la diferencial del area, y es $mdaxddy$: luego despues de haber partido por $mdaddy$, tendremos

$$a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2} = x.$$

Substitúyase ahora $-dy = \frac{zdx}{b}$, expresando z una variable, y b una constante, y será

$$x = a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{3(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2) + \frac{u^2z^2}{64(b^2+z^2)^2}(3b^2+z^2).$$

La diferencial de esta equacion es

$$dx = \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2dz}{4(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}(2b^2-z^2) + \frac{2u^2b^2zdz}{64(b^2+z^2)^3}(3b^2-z^2),$$

cuyo valor substituido en la antecedente $-dy = \frac{zdx}{b}$, resulta $-dy = \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}ubzdz}{4(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}(2b^2-z^2) + \frac{2u^2bz^2dz}{64(b^2+z^2)^3}(3b^2-z^2)$: é integrando $b-y = \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u^2b}{32}\int \frac{z^2dz}{(b^2+z^2)^3}(3b^2-z^2)$. Suponiendo el valor de z, se tienen por consiguiente los de x y y, y se puede describir la línea.

Corolario 1.

Si en lugar de la máxîma ó mínima fuerza se quisiere que sea la máxîma ó mínima resistencia la que haya

haya de padecer la línea, por componerse de dos partes, una impelente y otra impelida, será la diferencial de la resistencia que redunda de la fuerza que padecen dos diferenciales opuestas de la línea ==

$$mdaddy\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dX^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dX^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+$$

$$mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)}-\frac{3u^2dy^2}{64(dX^2+dy^2)}-\frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}+\frac{2u^2dy^4}{64(dX^2+dy^2)^2}\right)$$

y la del area $mdady(x+X)$, á quien se debe igualar, $mdaddy(x+X)$, expresando x las abcisas de la parte impelente, y X las de la impelida. Partiendo por $mdaddy$, y substituyendo $-dy=\frac{zdx}{b}=\frac{ZdX}{b}$,

será $$x+X=\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2)+\frac{a^{\frac{1}{2}}uZ}{4(b^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+Z^2)+\frac{u^2z^2}{64(b^2+z^2)^2}(2b^2+z^2)-\frac{u^2Z^2}{64(b^2+Z^2)^2}(2b^2+Z^2).$$

Corolario 2.

Si se supone con esto, que se tomen constantemente unas abcisas iguales á las otras, ó que sea $x=X$, será tambien $z=Z$, y quedará $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(2b^2+z^2)$:

y $b-y=\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, ó $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Corolario 3.

Multiplicando en cruz las dos equaciones antecedentes, resulta -

$$\frac{(b-y)a^{\frac{1}{2}}uz(2b^2+z^2)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2x}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$: y partiendo por

$\frac{a^{\frac{1}{2}}uz}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $(b-y)(2b^2+z^2)=bzx$; ó $b-y=$ - -

$\frac{bzx}{2b^2+z^2}$, equacion á la curva.

Corolario 4.

Si se supone $b-y=o$, será $x=o$, y $y=b$: tomando, pues, C por el origen, y CB, perpendicular Fig. 72.
á la abcisa CA, $=b$, será el principio de donde nace la curva para ambas partes impelente é impelida.

Corolario 5.

Si tomamos la diferencial de $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}uz(2b^2+z^2)}{4(b^2+z^3)^{\frac{3}{2}}}$,

será $dx=\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}udz\left(\frac{2b^2+3z^2}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{6b^2z^2+3z^4}{(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$, que igualada á cero, dá reduciendo $2b^2-z^2=o$, ó $z=b\sqrt{2}$. Este valor substituido en el de x, resulta $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}ub\sqrt{2}(2b^2+2b^2)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$. Este es, pues, el valor de la máxîma x, y por consiguiente, siendo CA$=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, será A el punto hasta donde se estiende la curva.

Corolario 6.

Si se toma, asimismo, la diferencial de $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, será $dy=-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}ubdz\left(\frac{2z}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3z^3}{(b^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$, que

que igualada á cero dá $z=0$, y $2b^2-z^2=0$, ó $z=b\sqrt{2}$, como en el Corolario precedente. El primer valor de $z=0$, substituido en el de y, dá $y=b$, por lo que b es una de las máximas ordenadas, y la que corresponde al origen C, pues siendo $z=0$, es (*Cor.* 3.) $x=0$. El segundo valor de $z=b\sqrt{z}$, substituido en el de y dá la mínima $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$: y corresponde al punto A de la máxima x.

Corolario 7.

Si fuere, pues, $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}=0$, el punto A caerá sobre el exe CA. Si fuere $b>\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$ no habrá aun llegado á él, y la curva no habrá cerrado el espacio, y si fuere $b<\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$ la curva cortará al exe.

Corolario 8.

En el caso de $\frac{dy}{dx}=\frac{z}{b}=\infty$ es $z=\infty$, cuyo valor substituido en el de $y=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, da $y=b-0$, ó $y=b$. Es el valor de la otra máxima ordenada, y la que corresponde al punto F de las abscisas.

Corolario 9.

Por los dos Corolarios 5 y 6 tenemos $-\frac{dy}{dx}=\frac{bz(2(b^2+z^2)-3z^2)}{(2b^2+3z^2)(b^2+z^2)-6b^2z^2-3z^4}=\frac{z}{b}$. En el punto B, en donde es $z=0$, es $-\frac{dy}{dx}=0$: esto es, la curva es paralela al exe; así como en el punto D, donde es $z=\infty$, es $-\frac{dy}{dx}=\infty$: esto es, la curva es perpendicular al exe; y en el punto A, donde es $z=b\sqrt{2}$, es $\frac{-dy}{dx}=\frac{b\sqrt{2}}{b}=\frac{\sqrt{2}}{1}$: con que si fuere AG tangente á la curva en A, será $\frac{AE}{EG}=\frac{\sqrt{2}}{1}$.

Corolario 10.

Suponiendo $2b^2z+z^3=(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$, será $x=\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u=$ CF. De esta equacion resultan dos valores de z, uno $z=\infty$, que ya nos dió el valor de $y=$ FD, y otro $z=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, que dá $y=\text{FH}=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u(-1+\sqrt{5})}{(2+2\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}}$.

Corolario 11.

Por lo deducido se vé, que la curva tiene dos ramas: la primera BHA, es la que padece la mínima resistencia; y la segunda AD, la que padece la máxima.

Corolario 12.

La amplitud de esta ED es $=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u=\frac{1}{36}a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)$: luego la relacion entre su amplitud ED, y su longitud EA$=b$, será $\frac{a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)}{36b}$: así como la relacion entre la amplitud CB$=b$, y la longitud

gitud CA $=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, de la otra, $=\frac{9b}{a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}}$. Pero en el punto A es (*Cor.* 7.) $b=\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$: luego la primera relacion será $=\frac{6\sqrt{3}(4\sqrt{6}-9)}{36}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$: y la segunda $=\frac{9}{6\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{1}$.

Corolario 13.

Las dos ramas son, pues, muy distintas, teniendo la AD mucha mas agudeza EAD, que la BHA en BAC.

Corolario 14.

Como, tanto la $x=\frac{a^{\frac{1}{2}}u(2bz^2+z^3)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, como la $b-y=\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, se hallan multiplicadas por $a^{\frac{1}{2}}u$, su relacion será constante, tengan los valores que se quisieren la a y la u: luego si b es la misma, para todas profundidades en el fluido, como para todas velocidades, sirve la misma curva.

Corolario 15.

El cuerpo que menor resistencia padecerá en el fluido, teniendo la misma anchura, ó la misma relacion entre CB y CA, y que al mismo tiempo encerrará mayor espacio, será el que tubiere todas sus secciones horizontales como IBA.

Corolario 16.

Si se quisiere tomar de la curva una parte como KB, de suerte que la longitud KL, sea á la anchura LB, como un numero dado n, á la unidad, haremos KL $=x=\frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b^2z+z^3)}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, y LB $=b-y=\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, y será $2b^2z+z^3=nbz^2$, ó $2b^2+z^2=nbz$, que dá $z=\frac{1}{2}b(n\pm\sqrt{n^2-8})$. Substituyendo este valor en el de LB $=\frac{a^{\frac{1}{2}}ubz^2}{4(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, resulta LB $=\frac{a^{\frac{1}{2}}u(n^2\pm n\sqrt{n^2-8}-4)}{(4+2(n^2\pm n\sqrt{n^2-8}-4))^{\frac{3}{2}}}$ y $a^{\frac{1}{2}}u=\frac{\text{LB}.(4+2(n^2\pm n\sqrt{n^2-8}-4))^{\frac{3}{2}}}{n^2\pm n\sqrt{n^2-8}-4}$: cuyo valor substituido en el de la máxîma CA $=$ (*Corol.* 5.) $\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, y en el de CB (*Cor.* 7.) $=\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$, se tendrán CB y CA, y se podrá describir, como antes, la curva, que pasará por el punto K.

Escolio.

Supuesta $b=1$, y z como en la primera coluna, se hallan las abcisas y ordenadas como en la segunda y tercera coluna de la Tabla siguiente.

Tabla de las abcisas y ordenadas de la curva, que encerrando el máximo ó mínimo espacio, experimenta la mínima ó máxima resistencia en el fluido.

z	x	$b-y$	
0	0	0	Primera rama.
$\frac{1}{10}$	$\frac{1809}{102\sqrt{303}}$	$\frac{45}{101\sqrt{303}}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{99\sqrt{51}}{2.17^2}$	$\frac{6\sqrt{51}}{17^2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{27\sqrt{15}}{50}$	$\frac{3\sqrt{15}}{25}$	
1	$\frac{9\sqrt{6}}{8}$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}$	
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1	
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1	Segunda rama.
2	$\frac{18\sqrt{15}}{25}$	$\frac{6\sqrt{15}}{25}$	
4	$\frac{108\sqrt{51}}{17^2}$	$\frac{24\sqrt{51}}{17^2}$	
∞	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	

CAPITULO 9.

Del movimiento progresivo horizontal que toman los cuerpos flotantes, siendo impelidos por una ó mas potencias.

PROPOSICION 60.

HAllar la relacion entre el tiempo y la velocidad que tomará un cuerpo flotante, siendo impelido por una potencia, cuya direccion sea horizontal, colocada en el centro de las resistencias, suponiendo que este concurra con el de gravedad.

Siendo la direccion de la potencia horizontal, lo será asimismo la de la resistencia, y por concurrir ambas en un punto, será la resulta de las fuerzas como una sola potencia que actua sobre el centro de gravedad, por suponerse concurrir este con el de las resistencias. El cuerpo no girará por consiguiente, y solo se moverá horizontalmente, segun la direccion de la potencia. Siendo esta π y M la masa del cuerpo, tendremos (*Cor.* 1. *Ax.* 2. *Lib.* 1.) $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = Mdu$, expresando $Ru \pm Qu^2 + Nu^4$ las resistencias que (*Corolar.* 8. *Proposic.* 43.) padece el cuerpo: ó $dt = \frac{Mdu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, cuya equacion integrada da $t = M\int \frac{du}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$: ó partiendo numerador y denominador por N, será $t = \frac{M}{N}\int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4}$. Que sea ahora - - - - -

$$\frac{\pi}{N}-\frac{Ru}{N}\mp\frac{Qu^2}{N}-u^4=\left.\begin{array}{r}f^2gh-f^2(g-h)u-f^2u^2-u^4\\-gh(g-h)u+(g-h)^2u^2\\+ghu^2\end{array}\right\}$$ en cuya equacion hay dos raices reales, una positiva $u=h$, y otra negativa $a=-g$, con dos imaginarias contenidas en la equacion $f^2-(g-h)u+u^2=0$: y tendremos $dt=\frac{(A+Bu)du}{f^2-(g-h)u+u^2}+\frac{Cdu}{g+u}+\frac{Ddu}{h-u}$, siendo $D=\frac{M}{N(g+h)(2h^2-gh+f^2)}$, $C=\frac{M}{N(g+h)(2h^2-gh+f^2)}$, $B=D-C$ y $A=C(2g-h)-D(g-2h)$: de donde se deduce $t=\frac{A+\frac{1}{2}B(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(Arc.tang.\left(u-\frac{1}{2}(g-h)\right)-Arc.tang.\left(V-\frac{1}{2}(g-h)\right)\right)+\frac{1}{2}Bl\left(\frac{f^2-(g-h)u+u^2}{f^2-(g-h)V+V^2}\right)+Cl\frac{g+u}{g+V}+Dl\frac{h-V}{h-u}$: siendo los arcos los de un círculo, cuyo radio es $(f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$, y expresando V la velocidad positiva con que empezó á moverse el cuerpo.

Corolario I.

En caso de tener el cuerpo una velocidad determinada, y disminuir esta, por ser mayores las fuerzas de las resistencias que la potencia π, la equacion será $dt(\pi-Ru\mp Qu^2-Nu^4)=-Mdu$ la misma que antes, con sola la diferencia de ser du negativo: luego la misma equacíon y raices satisfacen en ambos casos, solo con la diferencia de que en este, por haber $-Mdu$, se debe mudar á los integrales que resultan el signo, para tener el verdadero valor. Será, pues, en este caso $t=\frac{A+\frac{1}{2}B(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(Arc.tang.\left(V-\frac{1}{2}(g-h)\right)-Arc.tang.\left(u-\frac{1}{2}(g-h)\right)\right)$

$+\frac{1}{2}Bl\left(\frac{f^2-(g-h)V+V^2}{f^2-(g-h)u+u^2}\right)+Cl\frac{g+V}{g+u}+Dl\frac{h-u}{h-V}$.

Corolario 2.

Si en el propio caso de disminuir la velocidad se quisiere incluir aquel en que es $\pi=0$, será $h=0$, por haberse de desvanecer tambien su termino correspondiente f^2gh. Substituyendo, pues, en el ultimo valor de t el de $h=0$, se tendrá el propio de este caso.

Corolario 3.

En caso de haber adquirido el cuerpo su máxîma ó mínima velocidad es $du=0$: luego tambien será $\pi-Ru\mp Qu^2-Nu^4=0$, como asimismo la raiz real positiva $h-u=0$: luego la máxîma ó mínima velocidad que puede adquirir el cuerpo es h.

Corolario 4.

Como en el caso de adquirir el cuerpo su máxîma ó mínima velocidad h, es $Dl\frac{h-V}{h-u}$, ó $Dl\frac{h-u}{h-V}=\infty$, se sigue, que tambien será $t=\infty$, ó que el cuerpo necesitará un tiempo infinito para adquirir su máxîma ó mínima velocidad, ó lo que es lo mismo, que jamas podrá adquirir esta.

Corolario 5.

Si el cuerpo tubiere sus dos mitades impelente é impelida iguales y semejantes, será $Q=0$: y si á mas de esto fuere muy grande, ó estubiere muy sumergido en el fluido, sin que sea excesiva la velocidad

máxî-

máxîma h, se puede despreciar Nu^4, que resulta de la desnivelacion, y quedará $t = M\int \frac{du}{\pi - Ru} = \frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$ en caso de aumentar la velocidad; y $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ en el de disminuir.

Corolario 6.

Con las condiciones precedentes será la máxîma ó mínima velocidad $= \frac{\pi}{R}$.

Corolario 7.

En caso de adquirirla el cuerpo será tambien $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru} = \infty$; ó $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - Ru}{\pi - RV} = \infty$.

Corolario 8.

Tambien será $\frac{Rt}{M} = l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$: y suponiendo $lq = 1$, $\frac{Rt}{M} lq = l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$, ó $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$: que dá la velocidad á qualquiera tiempo del curso, aumentando la velocidad, $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{q^{\frac{Rt}{M}}}\right) + \frac{V}{q^{\frac{Rt}{M}}}$.

Corolario 9.

En el caso de disminuir, será $\frac{Rt}{M} = l \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$, y $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$: que dá la velocidad á qualquiera tiempo del curso, $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - q^{\frac{Rt}{M}}\right) + Vq^{\frac{Rt}{M}}$.

Corolario 10.

Siendo $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ de la especie de quebrado, tambien lo será q: por consiguiente, quando sea $t = \infty$, será $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$: luego en este caso será, como antes, la misma velocidad $u = \frac{\pi}{R}$.

Corolario 11.

Si en el valor $\frac{\pi}{R}$ de la máxîma velocidad que resulta despreciando la desnivelacion, se substituyen sus iguales $\pi = Nf^2gh$, y $R = N(f^2 + gh)(g - h)$, será dicha máxîma velocidad $= \frac{f^2gh}{(f^2 + gh)(g - h)}$: cuya cantidad siempre es mayor que la velocidad máxîma h que resulta atendiendo á la desnivelacion, á menos que no sea $f^2 < g(g - h)$.

Corolario 12.

El caso en que una velocidad máxîma es igual á la otra, es aquel en que es $f^2 = g(g - h)$. Si este valor de f^2 se substituye en el tercer término de la equacion, supuesta (*Prop.* 60.) $u^2(f^2 + (g - h)^2 + gh)$, quedará este en h^2u^2, de suerte que quedará positivo: lue-

luego no puede la velocidad máxîma h ser mayor que $\frac{\pi}{R}$; á menos que no sea $\mp Q$ positivo, ó lo que es lo mismo, que la parte del cuerpo impelente no sea mucho mas aguda que la impelida.

Corolario 13.

Si suponemos $\frac{f^2gh}{(f^2+gh)(g-h)} = h+\theta$, expresando θ la diferencia entre las dos máxîmas velocidades: esto es, $\theta = \frac{\pi}{R} - h$, quedará dicha diferencia $\theta = \frac{f^2gh}{(f^2+gh)(g-h)} - h = \frac{h^2(f^2-g(g-h))}{(f^2+gh)(g-h)}$.

Escolio 1.

Aseguramos en la Proposicion, que $f^2-(g-h)u+u^2$ contiene dos raices imaginarias, aunque puede tener dos reales si $\frac{1}{4}(g-h)^2 > f^2$, pues para que se llegue á este extremo es preciso que el tercer termino $u^2(-f^2+(g-h)^2+gh)$ sea excesivamente positivo, ó que la parte impelente del cuerpo sea excesivamente aguda respecto de la impelida; lo que en la práctica no es regular.

Escolio 2.

Supusimos en la Proposicion, para facilitar el cálculo, que la potencia estubiese colocada en el centro de gravedad, y que con este concurriese el de las resistencias; pero esta suposicion se hace imposible, á menos que no varie el centro de gravedad por variar el de las resistencias, como se verá mas adelante, y como se puede colegir de solo considerar como varian las

las resistencias que resultan en la desnivelacion; sin embargo quando estas no fueren excesivas, ó que el cuerpo no produgere inclinacion considerable, por separarse los dos centros, se puede despreciar la diferencia que resulta.

Escolio 3.

Aunque se haya deducido (*Cor.4.*) que el tiempo que necesita un cuerpo para adquirir su máxîma ó mínima velocidad es infinito, no por eso dexa de adquirirla casi toda en un tiempo muy corto. Que sea T el que necesita desde el reposo para adquirirla, y t el que necesita asimismo para adquirirla desde una velocidad primitiva V: y será $T = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - Ru}$, y $t = \frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru}$: con lo qual el tiempo que empleará desde el reposo hasta adquirir la velocidad V, será $T-t = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - Ru} - \frac{M}{R} l \frac{\pi - RV}{\pi - Ru} = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - RV}$. Que sea ahora V una velocidad poco menos que la máxîma $\frac{\pi}{R}$: sea, por exemplo $V = \frac{\pi}{R} - \frac{\pi}{100R} = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, y será $T-t = \frac{M}{R} l \frac{\pi}{\pi - \pi\left(1-\frac{1}{100}\right)} = \frac{M}{R} l\, 100 = \frac{M}{R}.4,6$: de suerte que si fuere $M = R$, será $T-t = 4'' \; 36'''$, tiempo que empleará el cuerpo desde el reposo, para adquirir una velocidad que no es menor que la máxîma, sino de $\frac{1}{100}$. Si fuere $M = 2R$, será duplo el tiempo, si triplo triplo, y así en adelante: de suerte, que aunque sea M cien veces mayor que R, no será el tiempo sino $4600'' = 7' \; 40''$.

En un paralelepípedo rectángulo que flota con su base paralela al horizonte, es $M = mbae$, expresando e la longitud del paralelepípedo, y $R = \frac{1}{3}mba^{\frac{3}{2}}$: luego $\frac{M}{R} = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}}$, y $T - t = \frac{3e}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot (4'' \ 36''')$: si fuere, pues, $a = 1$, y $e = 20$, será el tiempo $T - t$, que empleará en adquirir una velocidad, solo $\frac{1}{100}$ menor que la máxîma, $= 4' \ 36''$: por donde se ve, que á muy corto tiempo adquieren los cuerpos una velocidad que, sin error sensible, se puede suponer que sea la máxîma. Lo mismo se dice del valor $D l \frac{h - V}{h - u}$, que dá el tiempo infinito en caso de no despreciarse la desnivelacion.

PROPOSICION 61.

Hallar la relacion entre la velocidad y el espacio que corre un cuerpo flotante, impelido por una potencia, cuya direccion sea horizontal, colocada en el centro de las resistencias, suponiendo que este concurra con el de gravedad.

Por la Proposicion precedente tenemos $dt = \frac{Mdu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, y (*Cor.4.Prop.3.Lib.1.*) $dt = \frac{de}{u}$, expresando e el espacio corrido: cuyo valor substituido dá $de = \frac{Mudu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Na^4}$. Será, pues, asimismo por la precedente $de = \frac{(A + Bu)du}{f^2 - (g - h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g + u} + \frac{Ddu}{h - u}$, siendo $D = \frac{M}{N(g + h)(2h^2 - gh + f^2)}$, $C = \frac{M(1 - g - h)}{N(g - h)(2g^2 - gh + f^2)}$, $B = D - C$, y $A = C(2g - h) - D(g - 2h)$: con que igualmente será $e = \text{-----------------}$

$$\frac{A + \frac{1}{2}B(g - h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g - h)^2}\left(\mathit{Arc.tang.}\left(u - \tfrac{1}{2}(g - h)\right) - \mathit{Arc.tang.}\left(V - \tfrac{1}{2}(g - h)\right)\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}B\, l\left(\frac{f^2 - (g - h)u + u^2}{f^2 - (g - h)V + V^2}\right) + C\, l\frac{g + u}{g + V} + D\, l\frac{h - V}{h - u}.$$

Corolario 1.

Los integrales con que se halla el valor del espacio corrido e son, pues, los mismos que aquellos con que se halla el tiempo t en que se corre, con sola la diferencia de variar las constantes C, B y A.

Corolario 2.

El cuerpo no podrá, pues, adquirir su máxîma ó mínima velocidad, sino despues de haber corrido un espacio infinito.

Corolario 3.

Si el cuerpo tubiere sus dos mitades, impelente é impelida, iguales y semejantes, y se despreciare el efecto de la desnivelacion Nu^4, quedará $de = \frac{Mudu}{\pi - Ru}$: luego será $e = \frac{M}{R^2}\left(R(V - u) + \pi\, l\frac{\pi - RV}{\pi - Ru}\right)$.

Corolario 4.

Si el curso se empezare desde el reposo, será $V = 0$: luego quedará $e = \frac{M}{R^2}\left(-Ru + \pi\, l\frac{\pi}{\pi - Ru}\right)$.

 Co-

Corolario 5.

Si substituimos $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - \frac{1}{100}\right)$, será $e = -$ $\frac{M}{R^2}\left(-\pi\left(1-\frac{1}{100}\right)+\pi(4,6)\right) = \frac{M\pi}{R^2}(3,61)$.

Corolario 6.

El espacio corrido será, pues, en razon directa de la potencia y de la masa, y en inversa duplicada de la constante R que multiplica las resistencias.

PROPOSICION 62.

Hallar la velocidad de las olas.

En las olas la potencia que actua es la gravedad de la misma ola. Si por qualquiera accidente se eleva parte de la superficie del fluido, su gravedad le obliga, despues de haber adquirido su mayor elevacion, á descender, y á tomar igual disposicion y figura hacia abaxo, que la que tubo hacia arriba, pues la accion y reaccion son iguales. De esta suerte en las olas ABCDEFG, la parte ABC que se eleva sobre el nivel AG, es igual y semejante á CDE, y esta á EFG, y asi de las demas. El movimiento de la ola consiste, pues, en elevarse el punto D al H, en cuyo caso se dice que la ola corrió desde B á H, ú desde I á D: y esta elevacion depende del peso de la coluna BI, que tiene que mover la masa BID. Sea, pues, la altura $BI = a$: la mitad de la amplitud de la ola $ID = b$: la parte ya baxada de esta $BK = DL = x$: t el tiempo, y u la velocidad de los puntos K ó L. Con esto tendremos (*Cor. Ax.* 2, *y Prin.* 2.) $32(a-2x)dt = (a+b)du$; ó substituyendo $dt = \frac{dx}{u}$, $32(a-2x)dx = (a+b)udu$:

é integrando, $64(ax-x^2) = (a+b)u^2$; ó $u = \frac{dx}{dt} = \frac{8(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}$: de que se deduce $dt = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}dx}{8(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$; é integrando, $t = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$ *Arc.*BM, siendo BMI un semicírculo descripto con el diámetro $BI = a$. Cayendo el punto K á I, y elevandose L á H, el arco BM degenera en todo el semicírculo BMI, y la razon $\frac{Arc.BM}{\frac{1}{2}a}$ es la de la semicircunferencia al radio, que llamada c, será, todo el tiempo en que cae el punto B al I, sube el D al H, ó pasa B á H, $= \frac{1}{8}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$: el mismo (*Cor.* 4. *Prop.* 48.) que emplea en hacer su oscilacion un péndulo de la longitud $\frac{a+b}{2}$. Este tiempo $\frac{1}{8}(a+b)^{\frac{1}{2}}$, es á un segundo, como la longitud $ID = b$, que describe la ola en aquel, á $\frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}}c}$, longitud que correrá la ola en un segundo de tiempo, que es su verdadera velocidad.

Corolario 1.

El tiempo $\frac{1}{8}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, es á qualquiera otro tiempo $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$ *Arc.*BM, en que pasa el punto B, de B á N, como la longitud b que corre la ola en aquel, á $BN = \frac{b\,Arc.BM}{c.\frac{1}{2}a}$, de suerte, que si hacemos $BN = y$, será $y = \frac{b\,Ar.BM}{c.\frac{1}{2}a}$, equacion de la ola, ó curva BOC, que es una especie de cycloide. Es-

Escolio 1.

La relacion entre a y b es vária en las olas, segun ván en aumento ú disminucion. Las primeras son las que los Marineros llaman *picadas*, porque la fuerza del viento las va haciendo aumentar: en ellas la relacion $\frac{a}{b}$ es mayor que en las segundas, que son las mares que llaman de *leva*, ó que quedan despues que el viento ha disminuido, ó cesado enteramente: de suerte, que en estas puede ser b muchas veces mayor que a, porque conservandose constante b, disminuye continuamente a, hasta llegar á ser igual cero. Si en las primeras, ó en aquellas que ya han tomado todo el incremento posible, respecto del viento que las conmueve, se supone que el movimiento del punto B hacia H, se reduzca á la continua aplicacion ó rotacion del círculo BMI sobre la recta ID, tendremos PC $= \frac{1}{2}$BPI $= \frac{1}{4}ac$, y ID $= b = a + \frac{1}{2}ac = a(1+\frac{1}{2}c)$. La mayor relacion $\frac{a}{b}$, será, pues, segun este supuesto $\frac{a}{a(1+\frac{1}{2}c)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2,57}$: todas las demas serán menores y menores hasta el infinito.

Escolio 2.

El *Cavallero Newton* en su *Phylosophia natural* (*Prop.46. Lib.2.*) omite el valor de a: en este caso, la velocidad de la ola es $= \frac{8b^{\frac{1}{2}}}{c}$, y es como las raices quadradas de sus amplitudes, segun afirma aquel gran Autor.

CA-

CAPITULO 10.

De los momentos que padecen los cuerpos en su movimiento progresivo horizontal.

PROPOSICION 63.

HAllar los momentos que padece un cuerpo que se mueve horizontalmente en un fluido.

La resistencia es una accion ó fuerza con que el fluido actua sobre el cuerpo, y por consiguiente una potencia: si se multiplican las varias que se exercen sobre las distintas diferenciales de las superficies del cuerpo, segun las direcciones perpendiculares á los planos que, pasando por ellas, coinciden con el exe de rotacion, por sus distancias al propio exe, la suma de los productos será la de los momentos.

Escolio.

Los momentos pueden resultar ó calcularse con respecto á tres exes, dos horizontales perpendiculares entre si, y uno vertical; y aun los dos primeros se pueden tomar arbitrariamente: nos reduciremos, sin embargo, á hallar los momentos que resultan con respecto al exe horizontal perpendicular á la direccion del movimiento, puesto que qualquiera direccion que este tenga se puede descomponer en dos perpendiculares á dos exes asignados.

PRO-

PROPOSICION 64.

Hallar los momentos que padece un cuerpo qualquiera flotante, que se mueve horizontalmente en un fluido inmovil.

Divídase la superficie del cuerpo en pequeñas quadrículas sensiblemente planas por planos horizontales y verticales, y hállese la fuerza que cada una padece en la direccion perpendicular al plano que, pasando por la misma quadrícula, coincide con el exe horizontal de rotacion. Multiplíquese esta fuerza, por la distancia desde la quadrícula al exe, y el producto será el momento. Sumando los que resultaren de todas las quadrículas, se tendrá el que padece todo el cuerpo. La fuerza horizontal que padece una quadrícula, se halló (*Proposicion* 30.) $=$ - - - - - - - - - - - - - - -

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{46}u^2 a\,sen.\theta^2\right):$$

luego (*Propos.* 25.) la que padece en la direccion perpendicular al plano que, pasando por la misma quadrícula, coincide con el exe, será $=$ - - -

$$\frac{mb\,se.x}{sen.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,se.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,se.\theta^2\right):$$

expresando x el ángulo del complemento que forma la quadrícula con el plano que, pasando por ella, coincide con el exe, u la velocidad horizontal, y θ el ángulo que forma la quadrícula con la direccion del movimiento. Multiplicando por r, distancia de la quadrícula al exe, será el momento que padecerá $=$

$$\frac{mbr\,se.x}{sen.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,se.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,sen.\theta^2\right)$$

Corolario 1.

Los momentos que padecen las quadrículas de las

las dos desnivelaciones serán - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{mbr\,se.x}{sen.n}\left(Da - \tfrac{1}{6}u\,sen.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 u\,se.\theta^2\right),$$

y ambos positivos: con que para atender á la desnivelacion del fluido se agregarán á los que antes se determinaron.

Corolario 2.

Descomponiendo las fuerzas, y por consiguiente los momentos que resultan con respeto á un exe horizontal, se pueden reducir estos á horizontales y verticales: aquellos serán el producto de las fuerzas horizontales que padecen las quadrículas por su distancia vertical al plano horizontal que pasa por el centro de gravedad: y estos el producto de las fuerzas verticales que padecen las mismas quadrículas por su distancia horizontal al plano vertical que pasa por el centro de gravedad.

Corolario 3.

Descomponiendo asimismo las fuerzas, y por consiguiente los momentos que resultan con respeto á un exe vertical, se pueden reducir estos á dos con direcciones perpendiculares entre sí, ambas con respeto al mismo exe.

Corolario 4.

Si el plano vertical coincidente con una de estas direcciones, cortare al cuerpo en dos partes iguales y semejantes, los momentos que resultaren en quanto á esta direccion se destruirán, porque los positivos de un lado, son iguales á los negativos del otro.

PROPOSICION 65.

Hallar los momentos que con respeto á un exe vertical padece qualquier cuerpo flotante que se mueve horizontalmente en direccion perpendicular al plano vertical que divide al cuerpo en dos partes iguales y semejantes.

La fuerza horizontal que padece qualquier quadrícula, ó diferencio-diferencial en que se divida el cuerpo, es (*Proposicion* 30.) - - - - - - - - - -

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}usen.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2ase.\theta^2\right);$$

ó substituyendo x por D, y dx por a, para representar x la altura vertical desde la quadrícula á la superficie del fluido, y dx la altura de aquella, será $=$ $mcdx\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$: ó porque la parte impelente del cuerpo se supone igual y semejante á la impelida, la resistencia de dos quadrículas será (*Cor.* 3. *Propos.* 40.) $= \frac{1}{2}mcux^{\frac{1}{2}}dxsen.\theta$. Si fuere, pues, y la distancia horizontal desde el exe á la línea que junta las dos quadrículas, será el momento que estas padecerán $=$ $\frac{1}{2}mcuyx^{\frac{1}{2}}dxsen.\theta$, y el que padecerá todo el cuerpo $=$ $\frac{1}{2}mu\int cyx^{\frac{1}{2}}dxsen.\theta$.

Corolario.

Los que padecen las quadrículas de las dos desnivelaciones serán $mcdx\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$.

DEFINICION 3.

A los momentos que padece un cuerpo con respeto á

á un exe horizontal, se llama *estabilidad*, en atencion á ser los que actuan para hacer perseverar el cuerpo en el estado en que antes se hallaba.

PROPOSICION 66.

Hallar la estabilidad, ó los momentos que padece qualquier cuerpo flotante que se mueve horizontalmente, en direccion perpendicular al exe horizontal de rotacion.

La fuerza horizontal que padece qualquier quadrícula es, por lo dicho antes, $= mcdx\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$. Que sea ahora k la altura vertical desde el centro de gravedad del cuerpo hasta la superficie del fluido, y será $k-x$ la que hay desde el mismo centro hasta el plano horizontal que pasa por la quadrícula: por lo que $mcdx(k-x)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$ será el momento horizontal que padecerá aquella. Del mismo modo, si llamamos y la ordenada del cuerpo, ó distancia horizontal desde la quadrícula hasta el plano vertical coincidente con el exe de rotacion, será - - - - - - - - - $mcdy\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$ la fuerza vertical que padecerá la misma, y su momento vertical $=$ - - - - - - - - - - $mcydy\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$: luego el todo de los momentos que padecerá el cuerpo, serán $m\int cydy\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2 +$ $m\int cdx(k-x)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}usen.\theta\right)^2$.

Corolario 1.

Los que resultan de las desnivelaciones serán por con-

consiguiente $m\int cydy\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}u\,sen.\theta\right)^2+m\int cdx(k\pm x)\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}u\,se.\theta\right)$: $+$ en la parte impelente, y $-$ en la impelida.

Corolario 2.

Si el plano vertical coincidente con el exe cortare al cuerpo en dos mitades iguales y semejantes, la suma de los momentos de dos quadrículas correspondientes en una y otra mitad será $= - - - - - - -$ $\frac{1}{2}m\int cux^{\frac{1}{2}}ydy\,sen.\theta+\frac{1}{2}m\int cu(k-x)x^{\frac{1}{2}}dx\,sen.\theta$.

Corolario 3.

Si y expresa la ordenada de la parte impelente, y Y la de la impelida: siendo los momentos de esta negativos, serán los que padezca el cuerpo $= mcydy\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}u\,se.\theta\right)^2-$ $mcYdY\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}u\,se.\Theta\right)^2+mcdx(k-x)\left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}u(se.\theta+se.\Theta)\right)+\frac{1}{64}u^2(se.\theta^2-se.\Theta^2)$ expresando θ y Θ los ángulos que forman las quadrículas con la direccion del movimiento, asi en la parte impelente como en la impelida.

Corolario 4.

Siendo $u=0$, ó no moviendose el cuerpo horizontalmente, se reducirán los momentos á solo los verticales $\int mcyxdy-\int mcYxdY=\int mcx(ydy-YdY)$.

Corolario 5.

La cantidad $m\int cx(ydy-YdY)$ es igual al producto del peso de todo el cuerpo por la distancia horizontal desde el centro de gravedad á la vertical que pasa por el del volumen: luego si llamamos P el peso de todo el cuerpo, y h la distancia horizontal desde el centro de gravedad á la vertical que pasa por el del volumen, será $m\int cx(ydy-YdY)=hP$.

Corolario 6.

Estos momentos verticales $m\int cx(ydy-YdY)=hP$ pueden ser positivos ó negativos segun fuere $\int cxydy$ mayor ó menor que $\int cxYdY$: ó segun que la vertical, que pasa por el centro de volumen, pase entre el centro de gravedad, y la parte impelente, ó entre dicho centro, y la parte impelida.

Corolario 7.

Si fuere, pues, $\int cxydy=\int cxYdY$, los momentos serán cero.

Corolario 8.

En los cuerpos formados por la revolucion de un plano qualquiera al rededor de un exe horizontal H, Fig. 62.
la vertical QH, que pasa por el centro de volumen, pasa tambien por dicho exe: luego llamando K la distancia HO de este al centro O de gravedad, y Δ el ángulo QHO, será la distancia desde O á la vertical QH $=h=K\,sen.\Delta$, y $hP=KP\,sen.\Delta$.

Corolario 9.

En cuerpos que no esten formados por la revolucion de un plano qualquiera al rededor de un exe horizontal, no dexará por ello de ser $hP=KP\,sen.\Delta$; pero K será variable, segun las varias inclinaciones $sen.\Delta$ que tubiere el cuerpo.

Co-

Corolario 10.

Si el centro H estubiere mas baxo que el de gravedad, será K negativo, y por consiguiente tambien lo será el momento $KP\,sen.\Delta$.

Escolio.

Es necesario tener presente, que los momentos que proceden del peso del cuerpo son integros, por ser el peso efectivo; á diferencia de los momentos que proceden de las resistencias, porque estas deben disminuirse á los dos tercios (*Esc. Prop. 36.*): y así en caso de haberse de complicar unos con otros, se atenderá á disminuir á los dos tercios toda cantidad que multiplicare la velocidad u.

PROPOSICION 67.

Hallar en general el momento que padecerá un cuerpo qualquiera que no se mueve, compuesto de dos mitades iguales y semejantes, que las divide un plano coincidente con el exe horizontal.

Fig. 74. Que sea ABD el cuerpo compuesto de dos mitades iguales y semejantes ABE, DFE; C su centro de gravedad; BCE perpendicular á AD, siendo esta línea la que coincide con la superficie del fluido quando el cuerpo se halla recto, ó BCE vertical. Que el cuerpo se halle inclinado siendo GL la superficie del fluido, y tírense las verticales MC, FN, la primera que pase por el centro de gravedad C, y la segunda por el centro F que es el del volumen quando el cuerpo se halla recto. Con esto, llamando $AD = e$, $CE = k$, $CF = \pm H$, y el ángulo de la inclinacion $MCE = CFN = LED = \Delta$, será la horizontal $CN = H\,sen.\Delta$,

EM

$EM = k\,sen.\Delta$, y el area del triángulo DEL ó AEG, siendo DL ó AG sensiblemente líneas rectas, será $\frac{1}{8}e^2 sen.\Delta$. El momento que padecerá toda la parte del cuerpo ABD, siendo el peso de este P, será $\pm CN.P = \pm HP\,sen.\Delta$: el que padecerá el triángulo LED, será $m(\frac{2}{3}EL + EM).\frac{1}{8}e^2 sen.\Delta = m(\frac{1}{3}e + k\,sen.\Delta)\frac{1}{8}e^2 sen.\Delta$, y el que padecerá el triángulo AEG, será - - - - - $m(\frac{2}{3}EG - EM).\frac{1}{8}e^2 sen.\Delta = m(\frac{1}{3}e - k\,sen.\Delta)\frac{1}{8}e^2 sen.\Delta$: de suerte, que la suma de todos los momentos que padecen los triángulos como LED en toda la longitud del cuerpo, será $\frac{m}{8}\int ce^2 sen.\Delta(\frac{1}{3}e + k\,sen.\Delta)$: y todos los correspondientes á $AEG = \frac{m}{8}\int ce^2 sen.\Delta(\frac{1}{3}e - k\,sen.\Delta)$.

La suma de todos estos momentos con el $\pm HP\,sen.\Delta$ es el que padecerá todo el cuerpo: luego será - -

$$\pm HP\,sen.\Delta + m\int \tfrac{1}{8}ce^2 sen.\Delta(\tfrac{1}{3}e + k\,sen.\Delta) + m\int \tfrac{1}{8}ce^2 sen.\Delta(\tfrac{1}{3}e - k\,sen.\Delta)$$

$$= (\pm HP + \tfrac{m}{12}\int e^3 c)\,sen.\Delta.$$

Escolio 1.

En el cálculo se supuso que las dos líneas AD, GL se cortan sobre la BE, lo que de ordinario no sucederá así; pero suponiendo tambien que la inclinacion sea infinitamente pequeña, podrá suponerse sin error sensible: siendo necesario lo mismo para que en general se puedan tomar AG, DL como líneas rectas.

Corolario 1.

Puesto que, estando el cuerpo parado en inclinaciones infinitamente pequeñas, es el momento $= (HP + \frac{m}{12}\int e^3 c)\,sen.\Delta$: y asimismo (*Cor. 5. Pro. 65.*)

=

$= m\int cx(ydy - YdY) = bP$, serán, por consiguiente, en inclinaciones infinitamente pequeñas ------- $(HP + \frac{1}{12} m\int e^3 c)\, se.\,\Delta = m\int cx(ydy - YdY) = bP = KP\, se.\,\Delta$.

Corolario 2.

Substituyendo este valor de $m\int cx(ydy - YdY)$ en el momento, estando el cuerpo en movimiento, será tambien este en inclinaciones infinitamente pequeñas

$$= \left(PH + \tfrac{1}{12} m\int e^3 c\right) sen.\,\Delta + \tfrac{1}{4} mu\int cx^{\frac{1}{2}}\left(ydy\,sen.\,\theta + YdY\,sen.\,\Theta\right) + \text{--}$$

$$\tfrac{1}{64} mu^2 \int c\left(ydy\,se.\,\theta^2 - YdY\,se.\,\Theta^2\right) + \tfrac{1}{4} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx(k - x)(se.\,\theta + se.\,\Theta)$$

$$+ \tfrac{1}{64} mu^2 \int cdx(k - x)(sen.\,\theta^2 - sen.\,\Theta^2).$$

Corolario 3.

Por suponerse el cuerpo de dos mitades iguales y semejantes, y las inclinaciones infinitamente pequeñas son, sin error sensible, cero la tercera y quinta cantidades: luego el momento quedará = ----

$$\left(HP + \tfrac{1}{12} m\int e^3 c\right) sen.\,\Delta + \tfrac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} ydy\,se.\,\theta + \tfrac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx(k - x)\,se.\,\theta;$$

siendo $\frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} ydy\,sen.\,\theta$ los momentos verticales que padece el cuerpo, y $\frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx(k - x)\,sen.\,\theta$ los horizontales.

Escolio 2.

A estos momentos se deben añadir los que resulten de la desnivelacion; á menos que no se hagan despreciables: y lo mismo los que pudieren originarse de la accion de unas en otras superficies.

Es-

Escolio 3.

Leonardo Eulero y *M. Bouguer*, que son los Autores que han tratado este asunto con mas extension, no han calculado, sin embargo, sino los momentos que resultan en el caso del reposo, ú de ser $u = 0$. Las fórmulas manifiestan la diferencia que puede haber de unos casos á otros. En el del reposo es el momento solamente $\left(HP + \frac{1}{12} m\int e^3 c\right) sen.\,\Delta$: en el del movimiento $\left(PH + \frac{1}{12} m\int e^3 c\right) sen.\,\Delta + \frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} ydy\,sen.\,\theta + \frac{1}{2} mu\int cx^{\frac{1}{2}} dx(k - x)\,sen.\,\theta$ la diferiencia, siendo u de algun valor considerable, es excesiva.

PROPOSICION 68.

Hallar los momentos que padece un paralelepípedo rectángulo que flota sobre un fluido, con dos de sus lados paralelos al horizonte, moviendose el paralelepípedo horizontalmente, en direccion paralela á dos de sus lados verticales.

El momento vertical que padecen los lados verticales es cero, por ser en ellos $dy = 0$: el horizontal $m\int cdx(k - x)\left(\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} u(sen.\,\theta + sen.\,\Theta) + \frac{1}{64} u^2 (sen.\,\theta^2 - se.\,\Theta^2)\right)$ se reduce á $m\int cdx(k - x)\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} u = mcu\left(\frac{1}{3} kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}}\right)$ por ser $sen.\,\theta = sen.\,\Theta = 1$. Los que padece la base son cero, por ser en ella $dx = 0$, $sen.\,\theta = sen.\,\Theta = 0$, $y = Y$, y $dy = dY$. Los que proceden de la desnivelacion por ser $dy = 0$, y $sen.\,\theta = sen.\,\Theta = 1$, son en una y otra superficie $m\int cdx(k \pm x)(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u)^2$, y en

 am-

ambas juntas $2m\int cdxk\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}u\right)^2 = 2mck\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}u+\frac{1}{64}u^2x\right)$, que substituyendo $\frac{1}{8}u$ por $x^{\frac{1}{2}}$, se reducen á $\frac{mcku^4}{3.64^2}$: de esta suerte los momentos que padece todo el paralelepípedo son $mc\left(\frac{1}{3}k\left(x^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^4}{64^2}\right)-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}u\right)$, ó poniendo a por toda la altura vertical que tubiere sumergida en el fluido, serán $\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^4}{62^2}\right)-\frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u\right)$.

Corolario 1.

Puesto que $mc\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^4}{64^2}\right)-\frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u\right)$ son los momentos horizontales, dividiendolos por las resistencias asimismo horizontales (*Corolar.* 1. *Proposic.* 36.) $\frac{1}{3}mc\left(a^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^4}{64^2}\right)$, quedará la distancia desde el centro de gravedad al de las resistencias horizontales $= k-\frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$, ó la que hay desde este centro á la superficie del fluido $= \frac{v\varepsilon\quad ^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$.

Corolario 2.

Estos momentos serán positivos, y obligarán á que gire el paralelepípedo, elevandole su extremo impelente, si fuere $k > \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$; al contrario, serán negativos, y obligarán á que gire el paralelepípedo, baxandole su extremo impelente, si fuere - - - - - $k < \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$, y serán cero, ó quedará horizontal el paralelepípedo, si fuere $k = \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{5\left(a^{\frac{5}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$.

Escolio.

La desnivelacion de los dos lados impelente é impelido alteran las fuerzas que padece la base del paralelepípedo, y por consiguiente resultan en ella momentos.

PROPOSICION 69.

Hallar los momentos que padece la base del propio paralelepípedo rectángulo, y resultan de las fuerzas que la comunican las dos desnivelaciones.

La fuerza horizontal que padece una diferencial de superficie plana impelente sumergida en el fluido, y producida por la desnivelacion de otra igualmente impelente es (*Proposicion* 48.) - - - - - - - - - - - $mcdx\left((D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\left(u\,sen.\Theta-\frac{x\cos.n}{sen.n}\right)\right)^2$ expresando $D+x$ la altura vertical desde la diferencial hasta la superficie del fluido, que en nuestro caso es a: $sen.\Theta$ el seno que forma la direccion del movimiento con la superficie que causa la desnivelacion, que en nuestro caso es 1: y $\frac{x\cos.n}{sen.n}$ la distancia horizontal desde la diferencial hasta el extremo de la superficie, que podemos llamar y: de esta suerte será $y = \frac{x\cos.n}{sen.n}$, y

dx

$dx = \frac{dy\,sen.n}{cos.n}$. Substituidos estos valores en la expresion se reduce á $\frac{mcdy\,sen.n}{cos.n}\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$, y multiplicando esta fuerza horizontal por $\frac{cos.n}{sen.n}$ (*Propos.* 25.), se reduce á la vertical $mcdy\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$. Llamando ahora e la longitud del paralelepípedo, será $\frac{1}{2}e-y$ la distancia desde su centro á la vertical que pasa por la diferencial: y por tanto el momento que esta padece será $= mc\left(\frac{1}{2}e-y\right)dy\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u+y)\right)^2$. Por igual razon, el momento que padecerá otra quadrícula igualmente distante del otro extremo de la base, á causa de la desnivelacion en la superficie impelida, será ------ $mc\left(\frac{1}{2}e-y\right)dy\left(a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$: y siendo este substractivo, quando el otro adictivo, será el que resulta de las dos $= \frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}e-y)(u-y)dy$: cuyo integral ------ $\frac{1}{2}mca^{\frac{1}{2}}y(\frac{1}{2}eu-\frac{1}{4}ey-\frac{1}{2}uy+\frac{1}{3}y^2)$, ó sustituyendo $y=u$, no siendo el espacio hasta donde alcanza la desnivelacion mayor que e, serán los momentos que padece toda la base $= \frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}u^2(\frac{1}{2}e-\frac{1}{3}u)$.

Corolario 1.

Siendo $u > e$ se debe substituir en el integral $y=e$, y quedarán los momentos que padece la base $= \frac{1}{24}mca^{\frac{1}{2}}e^3$.

Co-

Corolario 2.

Como en estos momentos no se halla la velocidad u, se sigue, que siendo $u=e$, no pueden ya aumentar los momentos que padezca la base, por mucho que aumente la velocidad del paralelepípedo.

Corolario 3.

Siendo así e, como $e-\frac{2}{3}u$ positivos, se sigue que los momentos que en qualquier tiempo padezca la base serán positivos.

Corolario 4.

Los momentos que padecerá todo el paralelepípedo serán pues $mb\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{3}{2}}u+\frac{1}{64^2}u^4\right)-\frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}}u+\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}eu^2-\frac{1}{3}u^3\right)\right)$.

Corolario 5.

Estos momentos serán positivos y obligarán á que gire el paralelepípedo, elevandole su extremo impelente, si fuere $k > \frac{12a^{\frac{5}{2}}-15a^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}eu-\frac{1}{3}u^2)}{20\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64^2}u^3\right)}$; y al contrario, serán negativos y obligarán á que gire el paralelepípedo, baxandole su extremo impelente, si fuere $k < \frac{12a^{\frac{5}{2}}-15a^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}eu-\frac{1}{3}u^2)}{20\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64^2}u^3\right)}$.

Co-

Corolario 6.

Como variando la u, varian tambien los momentos, y ha de girar el paralelepípedo, varían, por consiguiente, las resistencias, y ya no dependerán solamente de la velocidad, sino tambien de la disposicion ó inclinacion que tome el paralelepípedo.

Escolio 1.

Con esto basta para ver la diferencia que resulta de considerar al cuerpo sin movimiento horizontal, al de existir este. En aquel caso el paralelepípedo no padeciera momento alguno, ó para padecerle fuera preciso que se inclinase baxando su superficie impelente: en el segundo, no solo la padece sin esta precision, sino que pueden obligarle á que eleve su superficie impelente, mayormente siendo $k > \frac{3}{5}a$.

Escolio 2.

Con lo dicho se ve claramente lo que advertimos de paso en el Escolio 2 de la Proposicion 60: el cuerpo varía su disposicion variando con el movimiento sus resistencias; y por consiguiente no permanecen las mismas que aquellas sobre que se demonstró que necesitaba un tiempo infinito, para obtener su máxima velocidad: con que tampoco permanece dicha demonstracion sino próximamente en velocidades cortas.

Lema 3.

Si una quadrícula fuere paralela al exe horizontal de rotacion, y sobre ella se levantare una perpendicular hasta que concurra con el plano vertical coincidente con el exe, la expresion $\frac{r sen.n}{sen.n}$ será igual á la vertical comprehendida entre la perpendicular y el exe.

Que sea C una quadrícula de la qual se levante la perpendicular CK, hasta que concurra en K con el plano vertical KO cooincidente con el exe O: y como el ángulo CKO es igual al que forma la quadrícula con el horizonte, cuyo seno es $sen.n$, y $sen.x$ el de OCK, complemento del que forma CO con la quadrícula, tendremos el seno de CKO $=$ $sen.n$ al seno de OCK $=$ $sen.x$, como r $=$ CO, á KO $= \frac{r sen.x}{sen.n}$. Fig. 62.

PROPOSICION 70.

Hallar los momentos que padece el propio paralelepípedo rectángulo, flotando con las mismas condiciones; pero estando su base inclinada al horizonte, con los dos lados de esta perpendiculares á la direccion paralelos al mismo.

Sea AKBF el paralelepípedo, O su centro de gravedad, y ED la superficie del fluido. Tírese LOM paralela á los lados KA, BF, la horizontal AJ, y las verticales FQ, EG, y RON. Sean tambien AF $= e$, AM $= g$, OM $= n$, EG $= a$, el ángulo de la inclinacion JAF $= \Delta$, y FQ $= a + e sen.\Delta$. Fig. 63.

El momento que padece una diferencial de la superficie impelente es $\frac{mbrdx sen.x}{sen.n}\left(x + \frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}cos.\Delta + \frac{1}{36}u^2 cos.\Delta^2\right)$: y siendo HC $= x$, y CS perpendicular á DF, será (*Lema antecedente*) OS $= \frac{r sen.x}{sen.n}$, DC $= \frac{x}{cos.\Delta}$, FD $= \frac{a + e sen.\Delta}{cos.\Delta}$, FC $= \frac{a + e sen.\Delta - x}{cos.\Delta}$, FC $-$ OM $=$ OV $= \frac{a + e sen.\Delta - x}{cos.\Delta} - n$

y,

y $OS=\frac{r\,\text{sen.}x}{\text{sen.}n}=\frac{a+e\,\text{sen.}\Delta-x}{\text{cos.}\Delta^2}-\frac{n}{\text{cos.}\Delta}$: con lo que se reduce el momento á - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mbdx\left(\frac{a+e\,\text{sen.}\Delta-x}{\text{cos.}\Delta^2}-\frac{n}{\text{cos.}\Delta}\right)\left(x+\tfrac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right),$$

cuyo integral, despues de haber substituido $a+e\,\text{sen.}\Delta$ por x, es

$$\frac{mb(a+e\,\text{sen.}\Delta)^2}{\text{cos.}\Delta^2}\left(\tfrac{1}{6}(a+e\,\text{sen.}\Delta)+\tfrac{1}{15}u(a+e\,\text{se.}\Delta)^{\frac{1}{2}}\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{2.64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right)$$

$$-\frac{mbn(a+e\,\text{sen.}\Delta)^2}{\text{cos.}\Delta}\left(\tfrac{1}{2}(a+e\,\text{sen.}\Delta)+\tfrac{1}{6}u(a+e\,\text{sen.}\Delta)\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right):$$

momentos que padece toda superficie impelente.

Los que padece la impelida son los mismos, mudando el signo á la u, y suponiendo $e\,\text{sen.}\Delta=0$: serán pues $\frac{mba^2}{\text{cos.}\Delta^2}\left(\tfrac{1}{6}a-\tfrac{1}{15}a^{\frac{1}{2}}u\,\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{2.64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right)$

$$-\frac{mbna}{\text{cos.}\Delta}\left(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{6}ua^{\frac{1}{2}}\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right).$$

El que padece una diferencial de la base es $\frac{mbr\,\text{sen.}x\,dx}{\text{sen.}n}\left(a+x-\tfrac{1}{4}u\,\text{sen.}\Delta(a+x)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{64}u^2\text{sen.}\Delta^2\right)$: y, siendo $ZY=x$, y YW perpendicular á AF, será OW (*Lem. anteced.*) $=\frac{r\,\text{sen.}x}{\text{sen.}n}$, $AY=\frac{x}{\text{sen.}\Delta}$, $MY=g-\frac{x}{\text{sen.}\Delta}$, y, $OW=\frac{r\,\text{sen.}x}{\text{sen.}n}=\frac{g}{\text{sen.}\Delta}-\frac{x}{\text{sen.}\Delta^2}$: con lo que se reduce el momento á -

$$mbdx\left(\frac{g}{\text{sen.}\Delta}-\frac{x}{\text{sen.}\Delta^2}\right)\left(a+x-\tfrac{1}{4}u\,\text{sen.}\Delta(a+x)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{64}u^2\text{sen.}\Delta^2\right),$$

cuyo integral, despues de substituir $e\,\text{sen.}\Delta$ por x, es

$$\frac{mbg}{\text{sen.}\Delta}\left(ae\,\text{sen.}\Delta+\tfrac{1}{2}e^2\text{sen.}\Delta^2-\tfrac{1}{6}u\,\text{sen.}\Delta\left((a+e\,\text{sen.}\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2e\,\text{se.}\Delta^3\right)$$

$$-\frac{mb}{\text{sen.}\Delta^2}\left(\tfrac{1}{2}ae^2\text{sen.}\Delta^2+\tfrac{1}{3}e^3\text{se.}\Delta^3-\tfrac{1}{2}u\,\text{se.}\Delta(a+e\,\text{se.}\Delta)^{\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{5}(a+e\,\text{se.}\Delta)-\tfrac{1}{3}a\right)\right)$$

+

$$+\frac{mb}{\text{sen.}\Delta^2}\left(\tfrac{1}{15}ua^{\frac{5}{2}}\text{sen.}\Delta-\frac{1}{2.64}u^3e^2\text{sen.}^4\right).$$

Los momentos que padece una diferencial de la desnivelacion en la superficie impelente son - - - - -

$$mbdx\left(\frac{a+e\,\text{sen.}\Delta-x}{\text{cos.}\Delta^2}-\frac{n}{\text{cos.}\Delta}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right);$$

y en la impelida $mbdx\left(\frac{a-x}{\text{cos.}\Delta^2}-\frac{n}{\text{cos.}\Delta}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right)$

ambas juntas serán -

$$mbdx\left(\frac{2a+e\,\text{sen.}\Delta}{\text{cos.}\Delta^2}-\frac{2n}{\text{cos.}\Delta}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\text{cos.}\Delta+\tfrac{1}{64}u^2\text{cos.}\Delta^2\right):$$

cuyo integral, despues de haber substituido $\tfrac{1}{64}u^2\text{cos.}\Delta^2$ por x, es $\frac{mbu^4\text{cos.}\Delta^4}{6.64^2}\left(\frac{2a+e\,\text{sen.}\Delta}{\text{cos.}\Delta^2}-\frac{2n}{\text{cos.}\Delta}\right)$, momentos que padecerán ambas desnivelaciones. Sumando estos con los que padece la superficie impelente, restando los de la impelida, y los de la base, serán los que padece todo el paralelepípedo $=$ - - - - - -

$$mb\left\{\begin{array}{l}
\frac{(a+e\,\text{se.}\Delta)^3-a^3}{6.\text{cos.}\Delta^2}+\frac{u\left((a+e\,\text{se.}\Delta)^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{5}{2}}\right)}{15\,\text{cos.}\Delta}+\frac{u^2\left((a+e\,\text{se.}\Delta)^2-a^2\right)}{2.64}+\frac{u^4(2a+e\,\text{se.}\Delta)\text{cos.}\Delta}{6.64^2}\\
-\frac{n\left((a+e\,\text{se.}\Delta)a^2-a^2\right)}{2\,\text{cos.}\Delta}-\tfrac{1}{6}nu\left((a+e\,\text{se.}\Delta)^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\right)-\tfrac{1}{64}nu^2e\,\text{se.}\Delta\,\text{cos.}\Delta-\frac{nu^4\text{cos.}\Delta^3}{6.64^2}\\
-ge\left(a+\tfrac{1}{2}e\,\text{sen.}\Delta\right)+\tfrac{1}{6}gu\left((a+e\,\text{sen.}\Delta)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right)-\tfrac{1}{64}gu^2e\,\text{sen.}\Delta^2\\
+\tfrac{1}{2}e^2\left(a+\tfrac{2}{3}e\,\text{se.}\Delta\right)-\frac{u(a+e\,\text{se.}\Delta}{2.\text{sen.}\Delta}\left(\tfrac{1}{5}(a+e\,\text{se.}\Delta)-\tfrac{1}{3}a\right)-\frac{ua^{\frac{5}{2}}}{15\,\text{sen.}\Delta}+\frac{u^2e\,\text{se.}\Delta^2}{2.64}
\end{array}\right.$$

Corolario I.

Como todas las cantidades que estan afectas de la n son negativas, se sigue, que quando menor fuere esta, ó mas baxo esté el centro de gravedad, mas po- si-

sitivos serán los momentos, y por consiguiente con mas fuerza elevará el paralelepípedo su extremo impelente.

Corolario 2.

Los momentos serán positivos ó negativos segun la relacion de las tres cantidades a, $\text{sen.}\Delta$, y u, que son variables, y dependen unas de otras.

Corolario 3.

Como en ninguno de los momentos que resultan de la base se halla la n, se sigue, que el que esté mas ó menos elevado el centro de gravedad no puede alterar dichos momentos.

Corolario 4.

En el primer instante de la accion ú del movimiento del paralelepípedo es $u = 0$, y quedan los momentos en

$$mb\left(\frac{(a+e\,\text{se.}\Delta)^3-a^3}{6\cos.\Delta^2}-\frac{n((a+e\,\text{se.}\Delta)^2-a^2)}{2\cos.\Delta}-ge(a+\tfrac{1}{2}e\,\text{se.}\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}e\,\text{se.}\Delta)\right):$$

luego para que desde este mismo instante sean los momentos positivos, es preciso que sea - - - - - - -

$$n < \frac{(a+e\,\text{sen.}\Delta)^3-a^3+\cos.\Delta\; ea(3e-6g)+e^2(2e-3g)\cos.\Delta^2\,\text{sen.}\Delta}{3((a+e\,\text{sen.}\Delta)^2-a^2)\cos.\Delta}.$$

Escolio.

Del mismo modo que se calcularon los efectos que producen en la base del paralelepípedo las desnivelaciones, en caso de suponerle horizontal, se pueden calcular en el de estár inclinado; pero el cálculo es cansado, y por no conducir al intento se ha omitido.

PRO-

PROPOSICION 71.

Hallar los momentos que padece un cylindro que flota, y se mueve horizontalmente en direccion perpendicular á su exe.

Que sea BQDE el cylindro, H su exe, y O su centro de gravedad: GI la superficie del fluido, BE un diámetro horizontal, y las CL, HQ, y OK verticales: tírese la HOD, y sean $CH = R$, $OH = K$, $CA = x$, $AL = f$, y el ángulo $HOK = \Delta$: con lo que serán $CL = x+f$, $HL = \sqrt{R^2-(x+f)^2}$, $FO = K\cos.\Delta$, $NO = k = K\cos.\Delta - f$, $HF = K\,\text{sen.}\Delta$, Fig. 62.

$$KF = \frac{K\,\text{sen.}\Delta(x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}},\ \frac{dy}{dx} = \frac{KF}{HF} = \frac{x+f}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{R},$$ y $LH + HF = y = \sqrt{R-(x+f)^2}+K\,\text{sen.}\Delta$: lo que dá $\frac{ydy}{dx} = x+f+$ - - $\frac{K\,\text{sen.}\Delta(x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$. Estos valores substituidos en la fórmula de los momentos (*Proposicion 66.*) - - - - - - -

$$mc\left(\frac{ydy}{dx}+k-x\right)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{udx}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2 dx,$$ reducen estos á

$$mcK\left(\cos.\Delta \pm \frac{(x+f)\,\text{sen.}\Delta}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{8R}\right)^2 dx.$$

En la parte impelida, siendo $KF = \frac{K(x+f)\,\text{sen.}\Delta}{\sqrt{R^2(x+f)^2}}$ negativo, sirve el signo — en esta cantidad. Substrayendo ahora el momento impelido del impelente, quedarán los momentos que padece todo el cylindro =

$$=\frac{mcKucos.\Delta}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}+ - - - - - - - - - -$$
$$2mcKsen.\Delta\left(\int\frac{(x+f)xdx}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x+f)dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}\right).$$

Corolario 1.

$\frac{mcu}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}$ es (*Proposicion* 42.) la resistencia horizontal que padece el cylindro, y
$$2mc\left(\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x\pm f)dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}\right)$$
(*Prop.* 34.) la fuerza vertical: si llamamos la primera N y la segunda Q, quedarán los momentos que padece el cylindro $=NKcos.\Delta+QKse.\Delta=K(Ncos.\Delta+Qse.\Delta)$.

Corolario 2.

Si fuere $u=0$, serán los momentos que padece todo el cylindro $=2mcKsen.\Delta\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$, ó porque $2mc\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$ es la fuerza vertical que padece el mismo, en este caso igual á su peso: si llamamos P el peso del cylindro, será el momento que, padecerá, siendo $u=0$, $=PKsen.\Delta$, como se dixo antes (*Cor.* 8. *Prop.* 66.).

Escolio.

Aunque no se haya hecho atencion en el cálculo de los momentos que padece el cylindro á los que produce la desnivelacion, no por ello dexan de estar compre-

prehendidos en la expresion $K(Ncos.\Delta+Qsen.\Delta)$. Su fórmula es $mc\int\frac{rsen.x}{sen.n}dx(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}sen.n+\frac{1}{64}sen.n^2u^2)$, y esto, tanto para los de la superficie impelente, como para los de la impelida, por ser en ambas positivos. Substituyendo en ellos el valor de $\frac{rsen.x}{sen.n}=Kcos.\Delta\pm\frac{Ksen.\Delta(x\pm f)}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$, y sumando los de ambas superficies, serán los efectivos - - - - - - - - - - $2mcKcos.\Delta\int dx(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}sen.n+\frac{1}{64}u^2sen.n^2)$; pero la resistencia horizontal que padece la desnivelacion es tambien $2mc\int dx(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}sen.n+\frac{1}{64}u^2sen.n^2)$: luego la resistencia horizontal N, ya no es solo igual á la primera cantidad $\frac{mcu}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}$, sino á esta, con mas $2mc\int dx(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}sen.n+\frac{1}{64}u^2sen.n^2)$: por consiguiente, expresando N la total resistencia horizontal que padeciere el cylindro, quedarán comprehendidos en la expresion $K(Ncos.\Delta+Qsen.\Delta)$ los momentos que resultan de la desnivelacion.

CA-

CAPITULO 11.

De la inclinacion que toman los cuerpos que flotan en los fluidos quando se hallan impelidos por una ó mas potencias.

PROPOSICION 72.

Hallar la inclinacion que toman los cuerpos que flotan, quando están impelidos de una ó mas potencias.

La inclinacion no es mas que aquella situacion respecto de la vertical en que ya cesa de girar sobre un exe horizontal el cuerpo impelido por una ó mas potencias, respecto á equilibrarse los momentos de estas con los de las resistencias del fluido. Búsquense, pues, unos y otros por lo dicho en los Capitulos precedentes, ó por las Proposiciones que se siguen, é igualandolos á cero, se deducirá de la equacion la inclinacion que tomará el cuerpo.

PROPOSICION 73.

Hallar el momento con que actua un peso que se le agrega á un cuerpo flotante, colocado en un punto determinado del plano vertical perpendicular al exe de rotacion que pasa por el centro de gravedad.

Fig. 63. Que el peso π esté en el punto colocado sobre el plano vertical perpendicular al exe de rotacion que pasa por el centro de gravedad O. Que la perpendicular πX, al plano coincidente con el exe, y con los centros de gravedad y magnitud, sea $=p$, y $OX=q$: con lo que será πR perpendicular al plano vertical que coincide con el exe, $=q\,sen.\Delta+p\,cos.\Delta$, expresando Δ el ángulo de la inclinacion ROX que tomare el cuerpo, y el momento del peso $=\pi(q\,sen.\Delta+p\,cos.\Delta)$.

Escolio.

Se supone que el exe de rotacion esté horizontal, y que el cuerpo tenga toda la regularidad necesaria, para que despues de inclinado se conserve el exe del mismo modo; sin esto es preciso atender á nueva inclinacion perpendicular á la primera.

Corolario 1.

Si fuesen varios los pesos π que se añadieren, cada uno de por sí producirá el momento $\pi(q\,se.\Delta+p\,cos.\Delta)$: y la suma de todos será el momento total que actua sobre el cuerpo.

Corolario 2.

Si en lugar de añadirse un peso π, se substragere ó quitare, será π negativo, y su momento $=-\pi(q\,sen.\Delta+p\,cos.\Delta)$.

Corolario 3.

Si al mismo tiempo se substragere de la parte opuesta al exe de rotacion, será p negativo, y el momento $=-\pi(q\,sen.\Delta-p\,cos.\Delta)=\pi(p\,cos.\Delta+q\,se.\Delta)$, momento positivo en caso de ser $p\,cos.\Delta > q\,sen.\Delta$.

Corolario 4.

Si el peso que se substragere de un lado se colocare al lado opuesto, y á una misma distancia q del exe, los mo-

momentos serán $\pi(q\,\text{sen.}\,\Delta + p\cos.\Delta) - \pi(q\,\text{se.}\,\Delta - \Pi\cos.\Delta) = (p+\Pi)\pi\cos.\Delta$: esto es, será el momento igual al producto del peso π por el coseno de la inclinacion, y por la distancia horizontal $p+\Pi$ del punto de donde se quitó el peso hasta el punto donde se puso.

Corolario 5.

Si la inclinacion fuere muy corta, quedará este propio momento $=\pi(p+\Pi)$: esto es, igual al producto del peso π por la distencia $p+\Pi$ que se hubiere transportado.

Corolario 6.

Si quedando tanto π como p positivos, fuere q negativo: esto es, si se colocare el peso π debaxo del plano horizontal coincidente con el exe, será el momento $\pi(p\cos.\Delta - q\,\text{sen.}\,\Delta)$.

Corolario 7.

Si á mas de esto fuere $p=0$, quedará el momento $=-\pi q\,\text{sen.}\,\Delta$: luego todo peso colocado debaxo del centro de gravedad resiste á la inclinacion en la razon de $\pi q\,\text{sen.}\,\Delta$.

Corolario 8.

Si al contrario se quitare el peso, será el momento $=\pi q\,\text{sen.}\,\Delta$, y contribuirá al aumento de la inclinacion en la razon $\pi q\,\text{sen.}\,\Delta$.

PROPOSICION 74.

Hallar la inclinacion que tomará un paralelepípedo rectángulo, que flotando sobre un fluido con su base

se paralela al horizonte, se le agrega un nuevo peso, en un punto determinado del plano vertical perpendicular á dos de los lados, que pasa por el centro de gravedad.

En este caso, por suponerse el paralelepípedo sin movimiento es $u=0$: luego sus momentos se reducirán (*Corolar.* 4. *Proposicion* 70.) á - - - - - - -

$$mb\left(\frac{(a+e\,\text{se.}\,\Delta)^3-a^3}{6\cos.\Delta^2}-\frac{n((a+e\,\text{se.}\,\Delta)^2-a^2}{2\cos.\Delta}-ge(a+\tfrac{1}{2}e\,\text{se.}\,\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}e\,\text{se.}\,\Delta)\right):$$

luego $\pi(q\,\text{sen.}\,\Delta+p\cos.\Delta)=$ - - - - - - - - - - - - - - - -

$$mb\left(\frac{(a+e\,\text{se.}\,\Delta)^3-a^3}{6\cos.\Delta^2}-\frac{n((a+e\,\text{se.}\,\Delta)^2-a^2)}{2\cos.\Delta}-ge(a+\tfrac{1}{2}e\,\text{se.}\,\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}e\,\text{se.}\,\Delta)\right):$$

ó porque en este caso es $g=\frac{1}{2}e$, $\pi(q\,\text{sen.}\,\Delta+p\cos.\Delta)=$

$$mb\left(\frac{(a+e\,\text{sen.}\,\Delta)^3-a^3}{6\cos.\Delta^2}-\frac{n((a+e\,\text{sen.}\,\Delta)^2-a^2)}{2\cos.\Delta}+\tfrac{1}{12}e^3\,\text{sen.}\,\Delta\right).$$

La fuerza vertical que padece el paralelepípedo es (*Propos.* 7.) $=mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}e\,\text{sen.}\,\Delta}{\cos.\Delta}\right)$: con que suponiendo que sea P el peso total de él, será - - - - - $P+\pi=mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}e\,\text{sen.}\,\Delta}{\cos.\Delta}\right)$, que dá $a=\frac{(P+\pi)\cos.\Delta}{mbe}-\frac{1}{2}e\,\text{sen.}\,\Delta$. Substituyendo este valor en la equacion precedente, se reduce á

$$\pi(q\,\text{se.}\,\Delta+p\cos.\Delta)=mbe\,\text{se.}\,\Delta\left(\frac{P^2}{2m^2b^2e^2}-\frac{nP}{mbe}+\tfrac{1}{12}e^2+\frac{e^2\,\text{sen.}\,\Delta^2}{24\cos.\Delta^2}\right):$$

ó si se supone que sea a la altura vertical que tenia el paralelepípedo dentro del fluido antes de agregarsele el peso, ó quando estaba con su base horizontal: siendo en este caso $P=mbea$, será $\pi(q\,\text{sen.}\,\Delta+p\cos.\Delta)=$
$mbe\,\text{sen.}\,\Delta\left(\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2+\frac{e^2\,\text{sen.}\,\Delta^2}{24\cos.\Delta^2}\right)$, ó - - - - - - - -
$\frac{\pi p\cos.\Delta}{mbe\,\text{sen.}\,\Delta}-\frac{e^2\,\text{sen.}\,\Delta^2}{24\cos.\Delta^2}=\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe}$. Que sea ahora $\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe}=\pm A^2$, y $x=\frac{e\,\text{sen.}\,\Delta}{\cos.\Delta}=FC$,

y quedará $\frac{\pi p}{mbx} - \frac{1}{24}x^2 = \pm A^2$, que dá ------

$x^3 \pm 24A^2x - \frac{24\pi p}{mb} = 0$: cuya equacion resuelta por el comun uso de Algebra, dará el valor de x, y por consiguiente de la inclinacion que tomará el paralelepípedo.

Corolario 1.

Si A^2 fuere positivo, ó si siendo negativo, fuere $(8A^2)^3$ menor que $\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2$, la equacion tendrá dos raices imaginarias, y por consiguiente solo una real $=$

$$\left(\frac{12\pi p}{mb}+\left(\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2+(8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \mp \frac{8A^2}{\left(\frac{12\pi p}{mb}+\left(\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2+(8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}:$$

que es la unica disposicion ó inclinacion que debe tomar el paralelepípedo. El signo superior para quando sea A positivo, y el inferior para quando sea negativo.

Corolario 2.

Siendo A^2 negativo, si fuere $(8A^2)^3$ mayor que $\left(\frac{12\pi p}{mb}\right)^2$, la equacion tendrá todas tres raices reales: y por consiguiente el paralelepípedo podrá tomar tres disposiciones ó inclinaciones distintas.

Escolio 1.

Como el valor de la fórmula $x^3 + 24A^2x - \frac{24\pi p}{mb}$, es la suma de los momentos, siempre que estos fueren positivos, se dirigirán á sostener, poner mas derecho, ó hacer mas estable el paralelepípedo; al con-

tra-

trario, si fueren negativos se emplearán en hacerle caer mas. Las raices de la equacion son, pues, los límites de estos momentos positivos ó negativos: y por consiguiente siempre que se fuere inclinando el paralelepípedo, y se pasare de una raiz á otra, se pasará tambien de los momentos positivos á los negativos, ó al contrario. Si al inclinarse el paralelepípedo para establecerse en la primera raiz, fueren los momentos negativos, pasando despues á ocupar la segunda, serán positivos: y así en adelante.

Corolario 3.

Los momentos, antes de establecerse el paralelepípedo en la primera raiz, son negativos, pues substituyendo en ellos $x = 0$, quedan reducidos á $-\frac{24\pi p}{mb}$.

Corolario 4.

El paralelepípedo debe, pues, inclinarse hasta establecerse en la primera raiz: y no puede pasar á ocupar la segunda, sin que otra fuerza extraña qualquiera no venza los momentos positivos que se opondrán á ello.

Escolio 2.

El paralelepípedo no puede establecerse en la segunda raiz, habiendo qualquier fuerza extraña que le saque de ella, porque si le obliga á ponerse mas vertical, los momentos resultarán positivos: y por consiguiente continuará en ponerse mas vertical hasta volverse á la primera raiz; y si le obliga á ponerse menos vertical, los momentos resultarán negativos: y por consiguiente continuará en inclinarse mas y mas.

Co-

Corolario 5.

La estabilidad ó conservacion de fuerzas del paralelepípedo para mantenerse sin caer enteramente, consiste en que ninguna fuerza extraña sea capáz de inclinarle hasta pasar de la segunda raiz.

Corolario 6.

Si fuere π, ó $p = 0$, queda la equacion en $x^3 \pm 24A^2x = 0$, cuya primera raiz es $x = 0$: luego el paralelepípedo deberá mantenerse derecho sobre el fluido, á menos que alguna fuerza extraña no venza los momentos positivos que se exercitarán en la inclinacion.

Corolario 7.

Las otras dos raices de la equacion $x^3 \pm 24A^2x = 0$, son $x = 2A\sqrt{\mp 6}$, que son imaginarias quando es A^2 positivo: de donde parece debiera inferirse, que en este caso los momentos que padecerá el paralelepípedo en su inclinacion, qualquiera que esta sea, serán siempre positivos.

Escolio 3.

Este Corolario sería generalmente cierto sino debiera llegar el caso de que el ángulo en la base A saliese fuera del fluido: en este caso, tanto los momentos, como la fuerza vertical que padece el paralelepípedo varían: y por consiguiente resulta para él distinta equacion, que, como se verá, produce mas raices que la única antes hallada. Como *Mr. Bouguer* en su *Tratado del Navio* no exâmina la estabilidad sino en las inclinaciones infinitamente pequeñas, pudiera pare-

recer que acepta la generalidad del Corolario, pues encarga se cuide de que no sea negativo el signo del segundo término para que siempre sean positivos los momentos, y con ellos estable el paralelepípedo. No insistirémos sobre que solo resultan negativos quando lo es el todo de la fórmula $x^3 \pm 24A^2x$, y no solo el segundo término; pues limitándose el Autor á solas las inclinaciones infinitamente pequeñas, mira como despreciable el primer término x^3. Para que no sea negativo el segundo término $24A^2x$, basta que no lo sea A^2, ó su igual $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2 - \frac{\pi q}{mbe}$, ó porque *Mr. Bouguer* supone $\pi = 0$, que no lo sea $\frac{1}{2}a^2 - na + \frac{1}{12}e^2$: de donde deduce, que siempre que no sea $n > \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, ó que se cuide de que el centro de gravedad no esté mas alto que $\frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, se tendrá seguridad en la estabilidad del paralelepípedo: añadiendo, que esta cantidad expresará por consiguiente la altura á que se podrá poner el centro de gravedad sin riesgo: por cuyo motivo dice que se puede llamar con justo titulo *metacéntro* al punto que la termina. El error á que todo esto puede conducir, no mirandolo con el cuidado que el Autor encarga, salta inmediatamente á los ojos, pues la expresion $\frac{e^2}{12a}$ manifiesta que tanto quanto menor sea a, mayor será la altura del metacéntro, y por consiguiente la seguridad del paralelepípedo: de suerte que si fuera a infinitamente pequeña, á infinita altura se podria colocar el centro de gravedad del paralelepípedo sin riesgo de perder su estabilidad: absurdo que qualquiera reconoce. Pero la consequencia es cierta en los casos en que no salgan los ángulos en la base fuera del fluido, que es sobre lo que se fundó el el Autor. No obstante, como siendo a corta, es tan facil el que salgan, por mas que se suponga la inclinacion infinitamente pequeña, se reconoce claramente el error que puede resultar. Este error no se limita solo al paralelepípedo, trasciende á los demas cuerpos, porque el defecto nace de la suposicion que en el exâmen de solas inclinaciones infinitamente pequeñas se hace de que la seccion de la superficie del fluido, y el plano que coincide con el exe, y divide el cuerpo en dos partes iguales, sea siempre la misma; lo que está muy distante de ser cierto, quando el cuerpo ocupa poco espacio en el fluido, y la potencia π que actua sobre él es considerable: pues la misma que produce una inclinacion infinitamente pequeña quando el cuerpo ocupa mucho espacio en el fluido, producirá otra muy sensible quando ocupe poco; y en tal caso la suposicion que se hace de la inclinacion infinitamente pequeña, es falsa, por mas pequeña que se establezca la potencia: á que debe agregarse, que el peso del cuerpo varía de la cantidad π, y esta diferencia, á que no se ha hecho jamas atencion, es mas considerable á proporcion que el peso del cuerpo es menor.

PROPOSICION 75.

Hallar la inclinacion que tomará el mismo paralelepípedo rectángulo, quando qualquiera de sus ángulos en la base salgan fuera del fluido.

Los momentos que padece el paralelepípedo son

$$(Cor.4.\,Prop.70.) = mb\left(\frac{(a+e\mathit{se}.\Delta)^3-a^3}{6\mathit{cos}.\Delta^2}-\frac{n((a+e\mathit{se}.\Delta)^2-a^2}{2\mathit{cos}.\Delta}\right)$$

$$+mb\left(e(g-e)(a+\tfrac{1}{2}e\mathit{sen}.\Delta)+\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}e\mathit{sen}.\Delta)\right);$$ pero por ser en este caso $e=\mathrm{EF}$, $g=\mathrm{FM}$, y $a=0$, se reducen á $$mb\left(\frac{e^3\mathit{sen}.\Delta^3}{6\mathit{cos}.\Delta^2}-\frac{ne^2\mathit{sen}.\Delta^2}{2\mathit{cos}.\Delta}+\tfrac{1}{2}ge^2\mathit{sen}.\Delta-\tfrac{1}{6}e^3\mathit{sen}.\Delta\right).$$

La fuerza vertical que padece el paralelepípedo es $(Prop.7.) = \tfrac{1}{2}mbe.\mathrm{DF} = \mathrm{P}+\pi$, ó llamando z la DF, $\tfrac{1}{2}mbez = \mathrm{P}+\pi$, lo que dá $e = \dfrac{\mathrm{P}+\pi}{\tfrac{1}{2}mbz}$, y $\dfrac{\mathit{sen}.\Delta}{\mathit{cos}.\Delta} = \dfrac{z}{e} = \dfrac{\tfrac{1}{2}mbz^2}{\mathrm{P}+\pi}$. Tendremos, pues, $\pi(q\mathit{sen}.\Delta+p\mathit{cos}.\Delta) =$

$$mb\left(\frac{e^3\mathit{sen}.\Delta^3}{6\mathit{cos}.\Delta^2}-\frac{ne^2\mathit{sen}.\Delta^2}{2\mathit{cos}.\Delta}+\tfrac{1}{2}ge^2\mathit{sen}.\Delta+\tfrac{1}{6}e^3\mathit{sen}.\Delta\right),$$ ó partiendo por $\mathit{sen}.\Delta$, y substituyendo los valores de e, y de z, $\pi\left(q+\dfrac{p(\mathrm{P}+\pi)}{\tfrac{1}{2}mbz^2}\right) =$ ----------

$$mb\left(\frac{(\mathrm{P}+\pi)z}{3mb}-\frac{n(\mathrm{P}+\pi)}{mb}-\frac{g(\mathrm{P}+\pi)^2}{\tfrac{1}{2}m^2b^2z^2}-\frac{(\mathrm{P}+\pi)^3}{\tfrac{3}{4}m^3b^3z^3}\right):$$ que

que dá $$z^4 \begin{matrix}-3nz^3 \\ -\dfrac{3\pi qmbz^3}{\mathrm{P}+\pi}\end{matrix} \begin{matrix}+\dfrac{6g(\mathrm{P}+\pi)z}{mb} \\ -6p\pi z\end{matrix} -\frac{4(\mathrm{P}+\pi)^2}{m^2b^2} = 0.$$

Hallado el valor de z por esta equacion, se tendrá el de $e = \dfrac{\mathrm{P}+\pi}{\tfrac{1}{2}mbz}$, y por consiguiente los dos puntos D y E, que dan la posicion de la superficie del fluido, y la inclinacion del paralelepípedo.

Escolio I.

Los momentos que padece la base en este caso no son los mismos que en el antecedente: para aquellos se substituyó $(Prop.70.)$ $r\mathit{sen}.x = g-\dfrac{a}{\mathit{sen}.\Delta}$: para estos, á causa de ser $e<2g$, es $r\mathit{sen}.x = g-\dfrac{a}{\mathit{sen}.\Delta}-(2g-e) = e-g-\dfrac{a}{\mathit{sen}.\Delta}$. Colocando, pues, en aquellos, que son $mb\left(ge(a+\tfrac{1}{2}e\mathit{sen}.\Delta)-\tfrac{1}{2}e^2(a+\tfrac{2}{3}e\mathit{sen}.\Delta)\right)$, $e-g$ por g.

La

g solo, tendremos estos $=$ - - - - - - - - - - - - - - - - -

$mb\left(e(e-g)(a+\frac{1}{2}e sen.\Delta)-\frac{1}{2}e^2(a+\frac{2}{3}e sen.\Delta)\right)$; ó por ser negativos, $=mb\left(e(g-e)(a+\frac{1}{2}e sen.\Delta)+\frac{1}{2}e^2(a+\frac{2}{3}e sen.\Delta)\right)$ como lo hemos supuesto.

Corolario 1.

Si fuere $\pi=0$, se reducirá la equacion á $z^4-3nz^3+\frac{6gPz}{mb}-\frac{4P^2}{m^2b^2}=0$; ó substituyendo por P su igual $2mbga$, y e por toda la longitud de la base $2g$, como antes, será $z^4-3nz^3+3e^2az-4e^2a^2=0$.

Escolio 2.

Puesto que la estabilidad del paralelepípedo se haya de conservar siendo $n<\frac{1}{2}a+\frac{e^2}{12a}$, pongamos $n=\frac{e^2}{12a}$: y para simplificar la equacion, $e=12a$, y se reducirá á $z^4-36az^3+432a^3z-576a^4=0$. La menor raiz de esta equacion es menor que $2a$, y habiendo de ser $z=2a$ para que empiece á salir el ángulo en la base fuera del fluido, es claro que dicha menor raiz no sirve para nuestro caso. La segunda es, con corta diferencia, $z=\frac{24}{10}a$, y aun esta cantidad es algo mayor que la legitima raiz, de suerte que substituyendola por z, viene la expresion negativa: lo que prueba, que si alguna fuerza extraña obliga al paralelepípedo á inclinarse de suerte que sumerja un lado de $\frac{24}{10}a$, ó lo que es equivalente, que le obligue á inclinarse de $13^\circ\frac{1}{2}$, de repente caerá á substituirse en la quarta raiz, porque la tercera es negativa, y tampoco sirve para el caso. Esta quarta raiz es proxîmamente $z=35a$, y equivale á la inclinacion de 88° con corta diferencia: luego quando una potencia extraña hiciere inclinar el paralelepípedo de $13^\circ\frac{1}{2}$, de repente caerá hasta la inclinacion de 88°: vease, pues, quan lexos está de conservar la estabilidad. Mayores diferencias resultaran de suponer a menor; pero basta en el asunto para comprehender que la seguridad en la estabilidad no debe fundarse sino en que las potencias extrañas no puedan inclinar al cuerpo mas de lo que corresponde á la segunda raiz: pasada esta, se pierde enteramente la estabilidad, y el cuerpo toma casi una total inclinacion.

PROPOSICION 76.

Hallar la inclinacion que tomará un cuerpo qualquiera que, flotando sobre un fluido, se le agrega un nuevo peso en un punto determinado del plano vertical perpendicular al exe de rotacion, que pasa por el centro de gravedad.

Para este caso, en que tambien es $u=0$, es el momento que padece el cuerpo (*Proposicion 66.*) $= m\int cxdx\left(\frac{ydy}{dx}+k-x\right)=m\int cxydy+m\int cxdx(k-x)$: ó porque se destruye la segunda cantidad, á causa de los momentos negativos de la parte impelida, que son iguales á los de la impelente, $=m\int cxydy$: y siendo el del peso $=\pi(q sen.\Delta+p cos.\Delta)$, tendremos la igualacion $\pi(q sen.\Delta+p cos.\Delta)=m\int cxydy$. Substituyendo en este segundo miembro el valor de y, y el de dy en x y dx, deducido de la equacion que por la figura y disposicion del cuerpo resultare, integrando y colocando el valor máxîmo de x, deducido de la igualacion que se hiciere del peso $P+\pi$, y la fuerza vertical

 $m\int$

$m\int cxdy$ que padece el cuerpo: esto es, $P+\pi = m\int cxdy$, quedará otra equacion, de la qual se deducirá el valor de $\mathit{sen}.\Delta$.

Corolario 1.

Si la inclinacion fuere infinitamente pequeña, podemos substituir en lugar de $m\int cxydy$ su igual (*Cor.* 1. *Proposic.* 67.) $\left(\pm H.P+\frac{m}{12}\int ce^3\right)\mathit{sen}.\Delta$; y será - - - - $\pi(q\,\mathit{sen}.\Delta+p) = \left(\pm H.P+\frac{m}{12}\int ce^3\right)\mathit{sen}.\Delta$, que dá

$$\mathit{sen}.\Delta = \frac{p\pi}{\pm H.P+\frac{m}{12}\int ce^3 - q\pi}.$$

Corolario 2.

En los cuerpos formados por la revolucion de una línea qualquiera al rededor del exe horizontal de rotacion es (*Cor.* 8. *Prop.* 66.) el momento $= PK\mathit{sen}.\Delta$, expresando P el peso total del cuerpo, que en este caso es $P+\pi$. Substituyendo, pues, este valor en lugar de P solo, será el momento $= K(P+\pi)\mathit{sen}.\Delta$; y $\pi(q\,\mathit{sen}.\Delta+p\cos.\Delta) = K(P+\pi)\mathit{sen}.\Delta$: que dá el seno de la inclinacion $\mathit{sen}.\Delta = \frac{\pm p\pi}{((K(P+\pi)-q\pi)^2+p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Corolario 3.

Fig. 62. Habiendo expresado por q la distancia desde el centro de gravedad O, hasta el plano, que pasando por el peso añadido π, es perpendicular á DOH; si suponemos que ya no exprese sino la distancia desde el exe H al mismo plano, tendrémos que substituir $K+q$ por q solo, y quedará el seno de la inclinacion

$\mathit{sen}.\Delta = \frac{\pm p\pi}{((KP\pm q\pi)^2+p\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$: siendo el de un ángulo mayor que 90 grados si fuere $KP-q\pi$ negativo.

Corolario 4.

No hallandose en la expresion $\mathit{sen}.\Delta =$ - - - - $\frac{\pm p\pi}{((KP\pm q\pi)^2+p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$ sino una sola raiz ó valor de $\mathit{sen}.\Delta$, porque la negativa no sirve sino para el lado opuesto quando es p negativo, se sigue que los momentos serán siempre positivos despues de dicha primera raiz, inclínese lo que quisiere el cuerpo formado por la revolucion de una línea qualquiera al rededor de un exe horizontal.

Corolario 5.

Como KP se halla solamente en el denominador, quanto mayor fuere esta cantidad, menor será el valor de $\mathit{sen}.\Delta$.

PROPOSICION 77.

Hallar la inclinacion que tomará un cuerpo qualquiera que, flotando sobre un fluido, es impelido por una potencia constante horizontal, perpendicular al exe de rotacion, que igualmente se supone horizontal, colocada en la vertical, que pasa por el centro de gravedad.

Los momentos que padece el cuerpo son (*Prop.* 66) $= m\int cydy(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta)^2+m\int cdx(k-x)(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{1}{8}u\,\mathit{sen}.\theta)^2$: y supuesto que sea O su centro de gravedad, y AOB Fig. 76. la inclinacion que hubiere tomado respecto de la vertical

tical BO, siendo Δ el ángulo de AOB, si fuese A el punto donde actue la potencia π, cuya direccion es la horizontal CA, y AO $= q$, será el momento con que actue la potencia segun CD $= q\pi \cos.\Delta$. Con esto tendremos las tres equaciones $q\pi = \ldots$

$$m\int cydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{8}u\,\text{sen.}\theta)^2 + m\int cdx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{8}u\,\text{sen.}\theta)^2. \ldots$$

$$P + \pi\,\text{sen.}\Delta\cos.\Delta = m\int cdy(x^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{8}u\,\text{sen.}\theta)^2,$$ y $$\pi\cos.\Delta^2 = m\int cdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \tfrac{1}{8}u\,\text{sen.}\theta)^2.$$

Substituyendo en ellas los valores de $\text{sen.}\theta$, y, y de dy, en x y dx, deducidos de la equacion que diere la figura y disposicion del cuerpo, é integrando realmente, se tendran otras tres equaciones, por las quales se hallaran los valores de x, de u, y de Δ.

PROPOSICION 78.

Hallar la inclinacion que tomará un cylíndro que flota horizontalmente, siendo impelido por una potencia constante π horizontal, y perpendicular al exe, colocada en el plano vertical que pasa por el centro de gravedad.

Los momentos que padece el cylindro no habiendo potencia que actue sobre él, son (*Cor.* 1. *Prop.* 71.) $= K(N\cos.\Delta + Q\,\text{sen.}\Delta)$, expresando N la resistencia horizontal, y Q las fuerzas verticales. Despues que adquiere su máxima velocidad es $N = \pi\cos.\Delta^2$, y $Q = P + \pi\,\text{sen.}\Delta\cos.\Delta$: luego, substituyendo estos valores, tendremos $K(\pi\cos.\Delta^3 + P\,\text{sen.}\Delta + \pi\,\text{sen.}\Delta^2\cos.\Delta) = q\pi\cos.\Delta$; ó partiendo por $K\cos.\Delta$, $\ldots$

$$\pi + \frac{P\,\text{sen.}\Delta}{\cos.\Delta} = \frac{q\pi}{K} : \text{ ó } \frac{P\,\text{sen.}\Delta}{\cos.\Delta} = \frac{q\pi - K\pi}{K} = \frac{\pi(q-K)}{K}:$$

y respecto que $\frac{\text{sen.}\Delta}{\cos.\Delta}$ es la tangente del ángulo de la inclinacion, será $\text{tang.}\Delta = \frac{\pi(q-K)}{KP}$.

Co-

Corolario 1.

Si se quisiere deducir el caso en que la velocidad del cylindro sea cero, ó en que un exe horizontal fixo, que pase por el centro de gravedad, le sujete, impidiendole su movimiento horizontal y vertical, y dexandole solo el giratorio, no hay sino substraher las cantidades que de aquellos resultan, dexando solo el momento $KP\,\text{sen.}\Delta$; y será $KP\,\text{sen.}\Delta = q\pi\cos.\Delta$; que dá $\text{tang.}\Delta = \frac{q\pi}{KP}$.

Corolario 2.

La tangente de la inclinacion, estando el cylíndro libre, es á la misma, girando sobre un exe fixo, como $q-K$ á q: ó como la distancia de la potencia al exe del cylindro, á la distancia de la misma al centro de gravedad.

Corolario 3.

Estos mismos momentos $KP\,\text{sen.}\Delta$ que resultaron para el cylindro, resultan igualmente, para todo cuerpo formado por la revolucion de una línea qualquiera al rededor de un exe horizontal: luego para todos estos cuerpos será la estabilidad ó tangente de inclinacion, en caso de suponerse el exe fixo $\text{tang.}\Delta = \frac{q\pi}{KP}$, siendo esta mayor que la que resultare estando libres ó con su movimiento horizontal.

Corolario 4.

Lo mismo cabe en qualquier cuerpo, aunque no sea formado por la revolucion de una línea qualquiera al al rededor de un exe horizontal, con sola la diferencia de que la cantidad K es variable, segun las varias inclinaciones.

Corolario 5.

Hallamos (*Cor.8. Prop.66.*) $K\,\text{sen}.\Delta = h$, expresando h la distancia horizontal desde el centro de gravedad á la vertical que pasa por el centro del volumen: luego será $K = \frac{h}{\text{sen}.\Delta}$, cuyo valor, substituido en el de $\text{tang}.\Delta = \frac{q\pi}{KP}$, dá $\text{tang}.\Delta = \frac{q\pi\,\text{sen}.\Delta}{hP} = \frac{\text{sen}.\Delta}{\text{cos}.\Delta}$: luego $\text{cos}.\Delta = \frac{hP}{q\pi}$: y reduciendo $\text{sen}.\Delta = \frac{q^2\pi^2 - h^2P^2}{q^2\pi^2}$.

CAPITULO 12.

De los momentos que padecen los cuerpos, quando giran en los fluidos libremeute sobre un exe qualquiera, que pasa por su centro de gravedad.

PROPOSICION 79.

Hallar los momentos que padece un cuerpo qualquiera, que gira sobre un exe, que pasa por el centro de gravedad.

Divídase la superficie del cuerpo en pequeñas quadrículas sensiblemente planas, por planos horizontales y verticales: hállese la fuerza positiva ó negativa que cada una padeciere, segun la direccion de su movimiento: multiplíquese esta por la distancia perpendicular de la quadrícula al exe de rotacion: y sumando todos los productos, se tendran los momentos totales.

La

La fuerza horizontal que padece una quadrícula, impelente ó impelida, es (*Proposicion 30.*) =

$$mc\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,\text{sen}.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,\text{sen}.\theta^2\right):$$

y reducida á una direccion qualquiera =

$$\frac{mb\,\text{sen}.x}{\text{sen}.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,\text{sen}.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,\text{sen}.\theta^2\right).$$

Que sea ahora r la distancia perpendicular desde la quadrícula al exe, y será el momento que esta padecerá =

$$\frac{mbr\,\text{sen}.x}{\text{sen}.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,\text{sen}.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,\text{sen}.\theta^2\right),$$

y el que padecerá todo el cuerpo =

$$m\int\frac{br\,\text{sen}.x}{\text{sen}.n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\,\text{sen}.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,\text{se}.\theta^2\right).$$

Corolario 1.

Los momentos de una y otra desnivelacion serán por consiguiente =

$$m\int\frac{br\,\text{sen}.x}{\text{sen}.n}\left(Da - \tfrac{1}{6}a\,\text{sen}.\theta\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \tfrac{1}{64}u^2 a\,\text{sen}.\theta^2\right).$$

Corolario 2.

Si la mitad del cuerpo fuere igual y semejante á la otra mitad, de suerte que las r, $\text{sen}.\theta$, $\text{sen}.n$, D y a de la una mitad fueren iguales á las mismas de la otra, sumando los momentos que padecen cada dos quadrículas correspondientes de una y otra parte, quedará el momento que padece todo el cuerpo =

$$\tfrac{1}{3}m\int\frac{bru\,\text{sen}.x\,\text{sen}.\theta}{\text{sen}.n}\left((D+\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\tfrac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}m\int\frac{bruD^{\frac{1}{2}}a\,\text{sen}.x\,\text{sen}.\theta}{\text{sen}.n}\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&\right);\ \text{ó}$$

si

si se desprecian todos los terminos de la série, excepto el primero $= \frac{1}{2} m \int \frac{bruD^{\frac{1}{2}} a\,sen.x\,sen.\theta}{sen.n}$.

Corolario 3.

Siendo V la velocidad angular con que gira el cuerpo es (*Cor.1.Prop.18.Lib.1.*) $V = \frac{udt}{r}$ y $u = \frac{rV}{dt}$, cuyo valor substituido en el de los momentos, serán tambien estos $= m\int \frac{br\,sen.x}{sen.n}\left(Da \pm \frac{rV\,se.\theta}{6dt}\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{r^2V^2 a\,sen.\theta^2}{64.dt^2}\right)$.

Corolario 4.

Los momentos de una y otra desnivelacion serán por consiguiente = ------------------

$$m\int\frac{br\,sen.x}{sen.n}\left(Da - \frac{rV\,se.\theta}{6dt}\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{r^2V^2\,sen.\theta^2}{64dt^2}\right).$$

Corolario 5.

Si la mitad del cuerpo fuere igual y semejante á la otra mitad, de suerte que las r, $sen.\theta$, $sen.x$, $sen.n$, D y a de la una mitad fueren iguales á las mismas de la otra, sumando los momentos que padecen dos quadrículas correspondientes de una y otra parte, quedará el momento que padece el todo del cuerpo $=$

$$\frac{1}{3}m\int\frac{br^2V\,sen.x\,sen.\theta}{dt\,sen.n}\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) = ----$$

$$\frac{1}{2}m\int\frac{br^2V\,sen.x\,sen.\theta D^{\frac{1}{2}}a}{dt\,sen.n}\left(1-\frac{a^2}{96D^2}-\frac{a^4}{2048D^4}-\&\right)$$

Co-

Corolario 6.

Si las superficies del cuerpo se quisieren expresar por una equacion algébrica, se puede substituir D+x por D, y dx por a: con lo que quedarán los momentos $= m\int\frac{br\,sen.x}{sen.n}dx\left(D+x \pm \frac{rV\,sen.\theta}{4dt}(D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{r^2V^2\,se.\theta^2}{64dt^2}\right)$; ó si el cuerpo flotare, serán $= m\int\frac{br\,sen.x\,dx}{sen.n}\left(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{rV\,sen.\theta}{8dt}\right)$.

Corolario 7.

Si la mitad del cuerpo fuere igual y semejante á la otra mitad, de suerte que las r, $sen.\theta$, $sen.x$, $sen.n$, D y a de la una mitad fueren iguales á las mismas de la otra, serán los momentos $=\frac{1}{2}mV\int\frac{br^2(D+x)^{\frac{1}{2}}dx\,sen.x\,sen.\theta}{dt\,sen.n}$; ó si el cuerpo flotare, serán = ------------

$$\frac{1}{2}mV\int\frac{br^2x^{\frac{1}{2}}dx\,sen.x\,sen.\theta}{dt\,sen.n}.$$

Corolario 8.

Los momentos que padeciere el cuerpo serán, pues, proporcionales á $\frac{V}{dt}$, ó iguales á una constante qualquiera que sea, multiplicada por $\frac{V}{dt}$.

Corolario 9.

Si el cuerpo fuere formado por la revolucion de una línea qualquiera al rededor del mismo exe que pasa por el centro de gravedad, y sobre que gira el cuerpo, po, será $\mathrm{sen.}\varkappa = o$, y por consiguiente tambien serán los momentos $= o$.

PROPOSICION 80.

Reducir los momentos que padece un cuerpo que tiene dos mitades iguales y semejantes, y que gira sobre un exe horizontal, á horizontales y verticales.

Si se divide el momento $\frac{mbruD^{\frac{1}{2}}a\,\mathrm{sen.}\varkappa\,\mathrm{sen.}\theta}{2\,\mathrm{sen.}n} = \frac{mbrux^{\frac{1}{2}}dx\,\mathrm{sen.}\varkappa\,\mathrm{sen.}\theta}{2\,\mathrm{sen.}n}$, que padecen qualesquiera dos quadrículas, por r, quedará la fuerza que estas exercen $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\,\mathrm{sen.}\varkappa\,\mathrm{sen.}\theta}{2\,\mathrm{sen.}n}$. La velocidad u se puede descomponer en la horizontal $\frac{u(k-x)}{r}$, y la vertical $\frac{uy}{r}$: expresando k la altura vertical desde el centro de gravedad á la superficie del fluido, x la misma desde la quadrícula á la propia superficie, y y la distancia horizontal desde la quadrícula al plano vertical que coincide con el exe. Substituyendo estos valores por u solo en la fuerza, se compondrá esta de las dos $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx(k-x)\mathrm{sen.}\varkappa\,\mathrm{sen.}\theta + mbuyx^{\frac{1}{2}}dx\,\mathrm{sen.}\varkappa\,\mathrm{sen.}\theta}{2r\,\mathrm{sen.}n}$: ó porque la primera procede de movimiento horizontal, en cuyo caso (*Cor.* 11. *Lem.* 1.) es $\mathrm{sen.}\theta = \mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n$, y la segunda de vertical, que dá (*Corolario* 12. *Lema* 1.) $\mathrm{sen.}\theta = \mathrm{cos.}n$, se compondrá de las dos $\frac{mdux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\,\mathrm{sen.}n}\left(\mathrm{sen.}\varkappa\,\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n(k-x) + y\,\mathrm{sen.}\varkappa\,\mathrm{cos.}n\right)$. Cada una de estas partes se puede descomponer en dos, una horizontal y otra vertical, substituyendo en el primer caso (*Lema* 1.) $\mathrm{sen.}\varkappa = \mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n$, y en el segundo $\mathrm{sen.}\varkappa = \mathrm{cos.}n$, serán, pues, las quatro partes

$$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\,\mathrm{sen.}n}\left(\mathrm{se.}\lambda^2\,\mathrm{se.}n^2(k-x) + \mathrm{se.}\lambda\,\mathrm{se.}n\,\mathrm{cos.}n(k-x) + y\,\mathrm{se.}\lambda\,\mathrm{se.}n\,\mathrm{cos.}n + y\,\mathrm{cos.}n^2\right)$$

Para reducir esta fuerza á momentos horizontales y verticales, se han de multiplicar las partes $\mathrm{sen}\lambda^2\,\mathrm{sen.}n^2(k-x) + y\,\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n\,\mathrm{cos.}n$, por $(k-x)$, distancia vertical desde la quadrícula al plano horizontal que pasa por el centro de gravedad; y las $\mathrm{sen}\lambda.\mathrm{sen.}n\,\mathrm{cos.}n(k-x) + y\,\mathrm{cos.}n^2$, por y, distancia horizontal desde la propia quadrícula al plano vertical coincidente con el exe. Serán, pues, los momentos que padecen dos quadrículas correspondientes, $=$

$$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\,\mathrm{sen.}n}\left(\mathrm{sen.}\lambda^2\,\mathrm{sen.}n^2(k-x)^2 + 2\,\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n\,\mathrm{cos.}n(k-x)y + y^2\,\mathrm{cos.}n^2\right)$$

$= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\,\mathrm{sen.}n}\left(\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n(k-x) + y\,\mathrm{cos.}n\right)^2$ ó substituyendo $\frac{udt}{r} = V$, $= \frac{mbVx^{\frac{1}{2}}dx}{2dt\,\mathrm{sen.}n}\left(\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n(k-x) + y\,\mathrm{cos.}n\right)^2$: y los que padece todo el cuerpo $= \frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{\mathrm{sen.}n}\left(\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n(k-x) + y\,\mathrm{cos.}n\right)^2 =$

$$\frac{\frac{1}{2}mV}{dt}\int cx^{\frac{1}{2}}dx\left(\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n(k-x)^2 + 2y(k-x)\mathrm{cos.}n + \frac{y^2\,\mathrm{cos.}n^2}{\mathrm{sen.}\lambda\,\mathrm{sen.}n}\right).$$

PROPOSICION 81.

Reducir los momentos que padece un cuerpo que tiene dos mitades iguales y semejantes, y que gira sobre un exe vertical, á dos horizontales perpendiculares entre sí.

Supónganse tirados dos planos verticales coincidentes con el exe, y perpendiculares entre sí: que la distancia horizontal desde una quadrícula á uno de los pla-

planos se llame z, y la otra y: descompóngase la velocidad u en dos paralelas á los mismos planos, que serán $\frac{uz}{r}$ y $\frac{uy}{r}$: substitúyanse estos valores en la fuerza $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx sen.x sen.\theta}{2 sen.n}$ (*Prop.* 80.) que padecen dos quadrículas correspondientes en lugar de u solo, y quedará esta dividida en dos $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx sen.x sen.\theta}{2r sen.n}(z+y)$. Como ambas proceden de movimiento horizontal, y se piden ó exercitan en la misma direccion, para ambas es, tanto $sen.x$, como $sen.\theta = sen.\lambda sen.n$: luego serán $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx sen.\lambda^2 sen.n^2}{2r sen.n}(z+y) = \frac{\frac{1}{2}mcVx^{\frac{1}{2}}dx sen.\lambda sen.n}{dt}(z+y)$. Multiplíquese ahora cada una por la distancia horizontal z y y desde el exe á su direccion, y colocando dz y dy por c, serán los momentos ----------
$\frac{\frac{1}{2}mVx^{\frac{1}{2}}dx sen.\lambda sen.n}{dt}(z^2dz+y^2dy)$.

Escolio 1.

Se ha supuesto, como se vé en el cálculo, no solo que las dos mitades del uno y otro lado del uno de los planos verticales sean iguales y semejantes, sino tambien las otras dos de un lado y otro del otro plano vertical: lo que se debe tener presente para no confundirlo con los cuerpos que pueden solo tener iguales y semejantes las dos mitades que divide un solo plano.

Escolio 2.

Aunque la rotacion se puede hacer sobre qualquier exe, y con qualquiera inclinacion, pudiendose, sin

sin

sin embargo, reducir á tres, una sobre un exe vertical, y dos sobre dos exes horizontales perpendiculares entre sí, nos reduciremos, para mayor facilidad, á especular la rotacion solo sobre estos tres exes; ó solo sobre uno vertical y otro horizontal, respecto á que lo que se dixere de este, corresponde igualmente al otro horizontal.

PROPOSICION 82.

Hallar los momentos que padecerá un cylindro que flota horizontalmente, y gira sobre un exe horizontal paralelo á sus lados, y pasa por el centro de gravedad.

Que sea ABFD el cylindro, C su centro de magnitud, y CGE una vertical en que se halla el centro de gravedad G. Tírese la horizontal BF, asi como CB, GB, y serán $CG = k$, $CB = R$, $CE = x$, y $BE = y$. El momento que padece una diferencial horizontal en B con su correspondiente en F es (*Cor.* 7. *Prop.* 79.) $= \frac{\frac{1}{2}mbr^2Vx^{\frac{1}{2}}dx sen.x sen.\theta}{dt sen.n}$, siendo b la longitud del cylindro, $r = GB$, $x = \theta =$ ángulo GBC. $sen.n =$ seno de BCE es $= \frac{y}{R}$: con que será k: $sen.\theta = r : \frac{y}{R}$: lo que dá $r sen.\theta = \frac{ky}{R}$. Estos valores substituidos en los momentos los reducen á $\frac{\frac{1}{2}mbVk^2yx^{\frac{1}{2}}dx}{Rdt} = \frac{mbVk^2}{2Rdt}x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-x^2}$. Serán, pues, los que padece todo el cylindro desde la horizontal BF hasta el diámetro, asimismo horizontal AD $= \frac{mbVk^2}{2Rdt}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-x^2}$; ó reduciendo $\sqrt{R^2-x^2}$ á serie, é integrando en efecto = ----------- Fig. 77.

mb

$$\frac{mbVk^2}{dt}\left(\tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.2R^2}-\frac{x^{\frac{11}{2}}}{11.8R^4}-\frac{x^{\frac{15}{2}}}{15.16R^6}-\frac{5x^{\frac{19}{2}}}{19.128R^8}-\frac{7x^{\frac{23}{2}}}{23.256R^{10}}-\&\right).$$

Substituyendo ahora $x=R$, serán los momentos que padece todo el medio cylindro ABHFD $=-$

$$\frac{mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{dt}\left(\tfrac{1}{3}-\frac{1}{7.2}-\frac{1}{11.8}-\frac{1}{15.16}-\frac{5}{19.128}-\frac{7}{23.256}-\&\right):$$

ó con cortísima diferencia $=\frac{6}{25}\,\frac{mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{dt}$.

Corolario 1.

Los momentos de la desnivelacion se hacen despreciables por lo prevenido en la Proposicion precedente.

Corolario 2.

Todos los momentos se desvanecen quando es $k=0$: esto es, quando coincide el centro de gravedad con el exe.

CAPITULO 13.

De la velocidad angular con que giran los cuerpos flotantes sobre un exe qualquiera.

PROPOSICION 83.

Hallar la velocidad angular con que gira un cuerpo flotante sobre un exe qualquiera, hallandose animado por una ó mas potencias.

La velocidad angular es (*Cor.2. Lem.3.Lib.1*) $V=\frac{dt\int p\pi dt}{S}$, expresando $p\pi$ la suma de los momentos de las potencias que actuen, t el tiempo de su accion, y S la suma de los momentos de inercia: substitúyanse, pues, en lugar de $p\pi$, los momentos que padeciere el cuerpo, y resultan de las resistencias, y de las potencias que actuaren, y se tendrá una equacion, de la qual se debe deducir el valor de la velocidad angular V en qualquiera instante de la accion.

Corolario 1.

Quanto mayores fueren los momentos de inercia, mayor tiempo necesitará el cuerpo para adquirir una misma velocidad angular.

Escolio.

Los momentos $p\pi$, ó suma de ellos, pueden proceder de la accion de varias potencias: pueden ser estas constantes ó independientes de la velocidad angular V; ó pueden tener una absoluta dependencia de esta, como en efecto la tienen por motivo de las resistencias del fluido, como vimos en el Capitulo precedente. *Mr. Bouguer* (*Tratado del Navio*, lib.2. sec.3. cap.1. §.3.), y *Leonardo Eulero* prescindieron de ellas, y aun añade aquel, haber sido por motivo de que el cuerpo separa muy poco fluido, y ser la accion de este como la del ayre en los péndulos, que casi se hace insensible, á causa de ser la velocidad angular V muy corta; pero el caso resulta tan diverso, como que los péndulos oscilaran aun mas perfectamente sin resistencia: y los cuerpos en su rotacion sobre los fluidos no pudieran subsistir. El único caso en que esto tiene cavimento es aquel en que el cuerpo está formado por la rotacion de un plano qualquiera al rededor de un exe, con el qual coincide el centro de gravedad: en este, supuesto que la rotacion ú oscilacion se haga so-

sobre un exe horizontal, inclinado un poco el cuerpo, será el momento que le obligue á girar (*Corol.* 8. *Prop.* 66.) el que resulta de la accion del fluido verticalmente, que es $\mathrm{KP}\,\text{sen.}\,\Delta$, el qual es cero quando es $\mathrm{K}=0$; pero esta condicion de $\mathrm{K}=0$ se hace precisa para que los momentos resistentes se desvanezcan: luego no se desvanecen, ni aun en este caso, sino quando el cuerpo ya no tiene accion para girar: esto es, quando pierda enteramente la estabilidad, y se haga imposible en la práctica el sostenerse. Se hace, pues, precisa por consiguiente la resistencia del fluido en la rotacion de los cuerpos. Que en algunos casos no sea tan diminuta como creyó *Mr. Bouguer* se hará patente mas adelante.

Corolario 2.

Si fuere $p\pi = 32\mathrm{KP}\,\text{sen.}\,\Delta - \frac{\mathrm{GV}}{dt}$, siendo K, P y G constantes, será $\mathrm{V} = \frac{dt\int(32\mathrm{KP}\,dt\,\text{sen.}\,\Delta - \mathrm{GV})}{\mathrm{S}}$: ó porque (*Cor.* 1. *Prop.* 18. *Lib.* 1.) es $\mathrm{V} = \frac{udt}{\mathrm{K}}$, expresando u la velocidad que tenga un punto, distante del exe la cantidad K, será $\frac{udt}{\mathrm{K}} = \frac{dt\int\left(32\mathrm{KP}\,dt\,\text{sen.}\,\Delta - \frac{\mathrm{G}udt}{\mathrm{K}}\right)}{\mathrm{S}}$: y $\mathrm{S}u = 32\mathrm{K}^2\mathrm{P}\int dt\,\text{se.}\,\Delta - \mathrm{G}\int udt$.

Corolario 3.

Si se supone $\mathrm{G}=0$, ó se prescinde de las resistencias, como hicieron los Autores citados, quedará $\mathrm{V} = \frac{dt\int 32\mathrm{KP}\,dt\,\text{sen.}\,\Delta}{\mathrm{S}} = \frac{32\,dt\,\mathrm{KP}}{\mathrm{S}}\int dt\,\text{sen.}\,\Delta$.

PRO-

PROPOSICION 84.

Hallar la longitud del Péndulo simple isochrono con el cuerpo flotante, que gira sobre un exe horizontal.

Que sea la longitud del Péndulo L, y será (*Cor.* 1. *Def.* 29. *Lib.* 1.) $\mathrm{V} = \frac{\xi dt\int dt\,\text{sen.}\,\Delta}{\mathrm{L}} = \frac{\omega dt}{\mathrm{L}}$, suponiendo ω la velocidad del cuerpo en el Péndulo: luego $\int dt\,\text{sen.}\,\Delta = \frac{\omega}{\xi}$; pero por suponerse que los cuerpos describen arcos semejantes en iguales tiempos, es $\omega : u = \mathrm{L} : \mathrm{K}$, y $\omega = \frac{\mathrm{L}u}{\mathrm{K}}$, con que tambien es $\int dt\,\text{sen.}\,\Delta = \frac{\mathrm{L}u}{\xi\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{L}u}{32\mathrm{K}}$, cuyo valor substituido en la equacion $\mathrm{S}u = 32\mathrm{K}^2\mathrm{P}\int dt\,\text{sen.}\,\Delta - \mathrm{G}\int udt$, resulta $\mathrm{S}u = \mathrm{KPL}u - \mathrm{G}\int udt$. Suponiendo ahora que las oscilaciones sean cortas, ó infinitamente pequeñas, podemos suponer el arco que describen los cuerpos igual al seno del mismo arco, que en el flotante es $\mathrm{K}\,\text{sen.}\,\Delta$, y por consiguiente será $udt = \mathrm{K}d\,\text{sen.}\,\Delta$, y $\int udt = \mathrm{K}\,\text{sen.}\,\Delta$, que dá $\mathrm{S}u = \mathrm{KPL}u - \mathrm{GK}\,\text{sen.}\,\Delta$; pero la velocidad ω al medio de la oscilacion es $= 8\left(\frac{\mathrm{L}^2\,\text{sen.}\,\Delta^2}{2\mathrm{L}}\right)^{\frac{1}{2}} = 8\,\text{sen.}\,\Delta\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}u}{\mathrm{K}}$: luego $u = \frac{8\mathrm{K}\,\text{sen.}\,\Delta}{\sqrt{2\mathrm{L}}}$, cuyo valor substituido, resulta $\frac{8\mathrm{KS}\,\text{sen.}\,\Delta}{\sqrt{2\mathrm{L}}} = \frac{8\mathrm{K}^2\mathrm{P}\,\text{sen.}\,\Delta\sqrt{\mathrm{L}}}{\sqrt{2}} - \mathrm{GK}\,\text{sen.}\,\Delta$; ó $\frac{1}{8}\mathrm{G}\sqrt{2\mathrm{L}} = \mathrm{KPL} - \mathrm{S}$, y quadrando $\frac{1}{32}\mathrm{G}^2\mathrm{L} = \mathrm{K}^2\mathrm{P}^2\mathrm{L}^2 - 2\mathrm{KPLS} + \mathrm{S}^2$, que dá $\mathrm{L} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}} - \frac{\mathrm{G}^2}{64\mathrm{K}^2\mathrm{P}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}} + \frac{\mathrm{G}^2}{64\mathrm{K}^2\mathrm{P}^2}\right)^2 + \frac{\mathrm{S}^2}{\mathrm{K}^2\mathrm{P}^2}}$.

Es-

Escolio 1.

La analogía $\omega : u = L : K$, no es enteramente legítima; pero respecto á la pequeñez de los arcos descritos se puede tomar por tal.

Corolario 1.

Si se supone $G = 0$, ó se prescinde de las resistencias, quedará $L = \frac{S}{KP}$: la misma longitud que hallamos (*Cor.* 3. *Def.* 30. *Lib.* 1.) del Péndulo simple isochrono de otro compuesto: luego el cuerpo flotante oscila como un Péndulo.

Corolario 2.

Si llamamos l la longitud del Péndulo simple que vibre los segundos de tiempo medio, y t el tiempo en segundos en que vibra ó gira el cuerpo flotante ó Péndulo L: respecto que los quadrados de los tiempos en que se hacen las oscilaciones son como las longitudes de los Péndulos (*Cor.* 7. *Prop.* 48. *Lib.* 1.) serán $l : L = 1 : t^2$, y $L = lt^2$; cuyo valor substituido en la equacion $L = \frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}$, resulta $t =$

$$\sqrt{\frac{S}{KPl} + \frac{G^2}{64K^2P^2l} \pm \frac{1}{l}\sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}}.$$

Corolario 3.

Si se supone $G = 0$, queda $t = \sqrt{\frac{S}{KPl}}$.

Es-

Escolio 2.

Podemos comparar ahora, para satisfacer lo dicho (*Esc. Prop.* 83.), los momentos resistentes $\frac{6mbVk^2R^{\frac{5}{2}}}{25dt}$ (*Prop.* 82.) que padece un cylindro en su rotacion, con los $kP\,\text{sen.}\Delta$, á que se reduce su estabilidad. Supongamos $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25dt} = kP\,\text{sen.}\delta$, y substituyamos (*Cor.* 1. *Prop.* 18. *Lib.* 1.) por $\frac{V}{dt}$, su igual $\frac{u}{k}$, suponiendo u la velocidad con que se mueve el exe del cylindro, distante del centro de gravedad la cantidad k, y será $\frac{6mbuR^{\frac{3}{2}}}{25} = P\,\text{sen.}\delta$. Supongamos tambien que el cylindro esté sumergido en el fluido hasta su mayor anchura, segun se supuso (*Prop.* 82.), y será su peso $P = \frac{1}{2}R^2cbm$, expresando c la circunferencia del cylindro, cuyo diámetro es la unidad: lo que dá $\frac{6}{25}mbuR^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}R^2cbm\,\text{sen.}\delta$, ó $12u = 25R^{\frac{1}{2}}c\,\text{sen.}\delta$. Supóngase asimismo que inclinado el cylindro del ángulo Δ, produgera al restablecerse, por dexarle en libertad, la velocidad u, y será (*Prop.* 84.) $u = \frac{8k\,\text{sen.}\Delta}{\sqrt{2L}}$; ó poniendo $k = \frac{1}{2}R$, $u = \frac{4R\,\text{sen.}\Delta}{\sqrt{2L}}$: lo que dá $\frac{48R\,\text{sen.}\Delta}{\sqrt{2L}} = 25R^{\frac{1}{2}}c\,\text{sen.}\delta$, y $\text{sen.}\delta = \frac{48R^{\frac{1}{2}}\text{sen.}\Delta}{25c\sqrt{2L}}$. Será, pues, baxo el supuesto de $k = \frac{1}{2}R$, y $P = \frac{1}{2}R^2bcm$, $\frac{6mbVk^2R^{\frac{3}{2}}}{25dt} = kP\,\text{sen.}\delta = \frac{24R^{\frac{3}{2}}P\,\text{sen.}\Delta}{25c\sqrt{2L}}$: y asi la fuerza de la estabilidad, ó momento $kP\,\text{sen.}\Delta = \frac{1}{2}RP\,\text{sen.}\Delta$, será al momento resistente que la misma inclinacion

Δ produce en la rotacion, como $\frac{1}{2}\mathrm{RP}\mathit{sen}.\Delta$ --- $\frac{24\mathrm{R}^{\frac{3}{2}}\mathrm{P}\mathit{sen}.\Delta}{25c\sqrt{2\mathrm{L}}}$, ó como $25c\sqrt{2\mathrm{L}}$ á $48\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}$. Si suponemos (*Cor.* 1.) $\mathrm{L}=\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}}$, y se supone $\mathrm{S}=\frac{1}{4}k^2\mathrm{P}$, será $\mathrm{L}=\frac{1}{4}k=\frac{1}{8}\mathrm{R}$: y un momento al otro, como $25c$ á 96.

Escolio 3.

Tambien se puede examinar, en el propio caso del cylindro, el valor de L, atendiendo al de G. Los momentos resistentes son (*Pro.* 82. *y Cor.* 2. *Pro.* 83) $\frac{6mb\mathrm{V}k^2\mathrm{R}^{\frac{3}{2}}}{25dt}=\frac{\mathrm{GV}}{dt}$: luego $\mathrm{G}=\frac{6}{25}mbk^2\mathrm{R}^{\frac{3}{2}}$, ó poniendo $k=\frac{1}{2}\mathrm{R}$, $\mathrm{G}=\frac{6}{100}mb\mathrm{R}^{\frac{7}{2}}$, y $\frac{\mathrm{G}^2}{64k^2\mathrm{P}^2}=$ --- $\frac{36m^2b^2\mathrm{R}^5}{\mathrm{P}^2(100)^2(32)^2}$, ó substituyendo $\mathrm{P}=\frac{1}{2}\mathrm{R}^2bcm$, $\frac{\mathrm{G}^2}{64k^2\mathrm{P}^2}$ $=\frac{36\mathrm{R}.}{(25c)^2(16)^2}$. Del mismo modo substituyendo en $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}}$ los valores de K y P, con $\mathrm{S}=\frac{1}{4}\mathrm{K}^2\mathrm{P}$, será $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{KP}}=\frac{\mathrm{K}^2\mathrm{P}}{4\mathrm{KP}}=\frac{1}{4}\mathrm{K}=\frac{1}{8}\mathrm{R}$: con que tendremos $\mathrm{L}=\frac{1}{8}\mathrm{R}+$

$$\frac{36\mathrm{R}}{(25c)^2(26)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{8}\mathrm{R}+\frac{36\mathrm{R}}{(25c)^2(16)^2}\right)^2-\frac{1}{64}\mathrm{R}^2}=\frac{1}{8}\mathrm{R}+\frac{36\mathrm{R}}{(25c)^2(16)^2}$$

$$+\frac{1}{8}\mathrm{R}\sqrt{\left(1+\frac{36}{(25c)^2(32)^2}\right)^2-1}=\frac{1}{8}\mathrm{R}+\frac{36\mathrm{R}}{(25c)^2(16)^2}+$$

$$\frac{3\mathrm{R}}{25c.16}\sqrt{1+\frac{9}{(25c)^2.16}},$$ ó con corta diferencia $\mathrm{L}=\frac{1}{8}\mathrm{R}(1+\frac{1}{52})$: de suerte que del valor de G solo resulta el Péndulo simple isochrono con el cylindro, $\frac{1}{419}\mathrm{R}$ mayor.

Co-

Corolario 4.

Sí substituímos el valor de $\mathrm{L}=\frac{1}{8}\mathrm{R}$ en la equacion (*Cor.* 2.) $\mathrm{L}=lt^2$, tendremos $lt^2=\frac{1}{8}\mathrm{R}$: lo que dá el tiempo en que concluirá una oscilacion ó vibracion el cylindro $t=\frac{\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$.

Escolio 4.

La longitud del Péndulo simple que vibra los segundos de tiempo medio á la orilla del Mar en España, ya diximos (*Esc. Prop.* 48. *Lib.* 1.) que es de 440 líneas del pie de *París*, ú de $\frac{440.16}{15}$ del de *Londres*: será, pues, $l=\frac{440.16}{15.144}=3\frac{7}{27}$; cuyo valor, substituido en la equacion $t=\frac{\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$, será $t=\frac{1}{8}\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{27}{11}}$, ó con corta diferencia $t=\frac{63}{320}\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}$. Si ponemos, pues, el cylindro de 32 pies de diámetro, será $\mathrm{R}=16$, y el tiempo en que cumplirá su oscilacion será de cerca de $\frac{63}{80}$ de segundo.

PROPOSICION 85.

Hallar la máxîma y mínima velocidad con que giran los cuerpos flotantes.

Baxo el supuesto de $p\pi=32\mathrm{KP}\mathit{sen}.\Delta-\frac{\mathrm{GV}}{dt}$, hallamos (*Cor.* 2. *Prop.* 83.) $\mathrm{S}u=32\mathrm{K}^2\mathrm{P}\int dt\,\mathit{sen}.\Delta-\mathrm{G}\int udt$. Diferenciando esta equacion es $\mathrm{S}du=32\mathrm{K}^2\mathrm{P}dt\,\mathit{sen}.\Delta-\mathrm{G}udt$, ó $\frac{du}{dt}=\frac{32\mathrm{K}^2\mathrm{P}\mathit{sen}.\Delta-\mathrm{G}u}{\mathrm{S}}$: luego en la máxîma u,

en

en que es $du = o$, tenemos $32K^2 P sen. \Delta - Gu = o$, que dá la máxima $u = \frac{32K^2 P sen. \Delta}{G}$. Del mismo modo la mínima u, sucede á la máxima du, ó ------ $\frac{32K^2 P sen. \Delta - Gu}{S}$: luego la mínima $u = o$.

Corolario 1.

En el (*Cor.* 12. *Def.* 33. *Lib.* 1.) se halló que la accion, que sobre las fibras de una palanca resulta, con motivo del movimiento, es proporcional á Sdu. Considerando, pues, el cuerpo flotante, que gira como una palanca, la accion que padecerán sus fibras será como Sdu, ó como su igual $32K^2 P dt sen. \Delta - Gudt$; y la mayor que padecerán en toda la vibracion, que es en el instante de empezarla ó fenecerla, como $32K^2 P dt sen. \Delta$.

Corolario 2.

Luego la mayor accion que padecen las fibras de un cuerpo en el acto de la rotacion, ninguna dependencia tiene de G, ú de la resistencia del fluido, y solo procede de la cantidad $K^2 P dt sen. \Delta$, ó $32K^2 P sen. \Delta$: esto es, del producto de la estabilidad $KP sen. \Delta$ por $32K$.

Corolario 3.

Una palanca unida al cuerpo que gira, padecerá la accion proporcional á Sdu, expresando S los momentos de inercia de la sola palanca; pero es $du = \frac{32K^2 P dt sen. \Delta - Gudt}{S}$: luego la accion que padecerá la palanca será proporcional á $\frac{Sdt(32K^2 P sen. \Delta - Gu)}{S}$: y la mayor de todas, proporcional á $\frac{SK^2 P sen. \Delta}{S}$.

APEN-

APENDICE I.

Sobre la theórica de los Cometas que vuelan los Niños, para verificar la ley con que resisten los fluidos.

EL medio de verificar la theórica en que cabe duda, es aplicarla á varias experiencias. De las mas comunes que se nos ofrecen á la vista diariamente, en asunto á la resistencia de los fluidos, es el vuelo de los Cometas que usan los Niños. O la fuerza del viento en ellos es en razon compuesta duplicada de su velocidad y seno de su ángulo de incidencia, como generalmente creen todos los Autores modernos; ó como la misma simple razon, segun hemos expuesto. Dando una verdadera theórica de los Cometas se puede comprobar qual de los dos systhemas conviene con la práctica: y por consiguiente, qual es el verdadero. *Eulero*, hijo de *Leonardo*, en las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de *Berlin*, tom. 12. pag. 322, dá esta theórica, fundada en el primer systhema, ó razon duplicada. Divide su Memoria en tres casos: el primero supone, que el Cometa con su hilo sea un cuerpo rígido é incapaz de alteracion: y el segundo y tercero, que el hilo esté atado á un solo punto determinado del Cometa, sobre el qual pueda este girar libremente. El primer caso no se hace de modo alguno aplicable á la práctica, que es lo que apetecemos para conseguir las luces de la experiencia. En el segundo atiende *Eulero* á dos rotaciones que debe tener el Cometa, una sobre el extremo superior del hilo, y otra sobre el extremo inferior: esta dice que resulta de tres fuerzas, una la del viento, reunida en el centro

tro de magnitud del Cometa: otra la del peso del mismo, reunida en su centro de gravedad; y otra la del peso del hilo, reunida en el centro de gravedad de él. Las dos primeras son efectivas; pero la tercera solo cabe siendo el hilo rígido, ó como una palanca: siendo enteramente flexible, como lo supondremos, en nada actua á tal rotacion, porque la única fuerza que exerce solo actua segun la direccion del mismo hilo; y en ninguna manera obliquamente, que era lo único que podia contribuir á la efectiva rotacion. Debemos, pues, inferir que *Eulero* consideró el hilo rígido, sin embargo de suponer que el Cometa podia girar libremente sobre los dos extremos de aquel, lo que hace el caso igualmente inaplicable á la practica que el primero. A mas de esto se sujetó en él á solo atar el hilo á un punto determinado del Cometa, lo que en la práctica tampoco tubiera jamas ningun buen efecto. De ordinario se atan al Cometa dos, tres, ó quatro hilos, que reunidos á una distancia corta, sigue despues uno solo. Con esta disposicion el Cometa queda seguro sin poderse mover ó girar sobre ninguno de sus diámetros; sin ello, al menor accidente, fácil se descompone, y se precipita al suelo. Bien apercibió esto *Eulero*; pero para poner á ello el preciso reparo, halló que le venia tan complicado el cálculo, que estimó mejor escusarlo, y ceñirse á aquel unico caso de un solo hilo. En efecto el cálculo viene bien embarazoso; pero es solo en la suposicion de ser las fuerzas del viento en razon compuesta duplicada de sus velocidades, y de los senos de sus ángulos de incidencia: en la de ser como la simple razon, segun la ultima theórica, ya no es lo propio: el cálculo resulta sumamente fácil, con que no podemos menos de atender á la circunstancia de los varios hilos, resolviendo el Problema generalmente; y por lo que toca á comparar las fuerzas del viento, para ver si en efecto no corresponden á la razon duplicada, nos reducirémos al solo caso de un hilo, como hizo *Eulero*.

Este aplica al Cometa, en su tercer caso, una cola; pero supone que sea otro plano ó Cometa paralelo al primero, que gira libremente en el extremo inferior de este; cuya suposicion no es menos dificil de verificarse en la práctica que las primeras. La cola en el Cometa se hace precisa, á fin de establecer su centro de gravedad mas baxo que el de magnitud, y evitar con ello el movimiento giratorio lateral que resultara; pero mejor que un plano, para la práctica y theórica, se hace un cuerpo rígido qualquiera, largo y delgado, como un alambre, ó la continuacion de la caña, que corre desde el extremo alto hasta el mas baxo, siendo el diámetro principal del mismo Cometa. Con esto podemos escusar hacer atencion á dicha cola; y bastará, para suponerla, establecer el centro de gravedad mas baxo que el de magnitud. Pudiera asimismo producir el efecto necesario de la cola un contrapeso qualquiera, colocado en el extremo inferior del Cometa; pero en este caso, siendo el contrapeso de igual peso á la cola, no baxaria tanto el centro de gravedad como la misma cola; lo que importa mucho para evitar la rotacion lateral sin aumentar peso. La cola, tal como la usan los Niños, es en efecto la mas adequada; pero habiendo de atender en ella al ángulo que formara con el diámetro del Cometa, nos complicaría mucho el cálculo por lo que nos separara el centro de gravedad del cuerpo del mismo Cometa: y asi nos reducimos á una cola rígida, que sea la continuacion del mismo diámetro, cuya suposicion nada se aparta de poderse aplicar á la práctica.

Esto supuesto: sea AB el Cometa, ó mas bien su diámetro, por considerarse cortado por un vertical que coincida con dicho diámetro con el hilo GOV, y aun con la cola BX. Sean AG, DG los dos hilos alto Fig. 78.

y baxo, que atados al diámetro, y unidos en G al unico GOV, sujetan al Cometa. Sean tambien G el centro de magnitud, y P el de gravedad. Tírense la GE perpendicular al diámetro BA, las PK, EML verticales, la GK paralela al horizonte VFL, y la IGF tangente al hilo en el punto G. Sean por ultimo

$PC = b$
$CE = e$
$GE = g$
$P =$ al peso del Cometa con su cola.
$u =$ á la velocidad del viento.
$\varphi =$ al ángulo GEL.
$\theta =$ al ángulo IGE.

$Ru\,\mathit{sen}.\varphi =$ á la fuerza del viento en el Cometa, segun la direccion perpendicular á su plano, y segun el systhema expuesto de estas fuerzas: y será de resulta el ángulo $IHE = \varphi + \theta$.

Hallar los senos y cosenos de φ, θ, y $\varphi+\theta$.

1 Habiendo de girar el Cometa libremente sobre el Punto G, los momentos respectivos á este punto deben equilibrarse. Las fuerzas que actuan son el peso P del Cometa que se dirige segun la vertical PK, y la fuerza del viento $Ru\,\mathit{sen}.\varphi$, que se dirige segun la perpendicular al diámetro BA. Sus momentos son $P.GK = P(KM+MG) = P(b+e)\mathit{cos}.\varphi + Pg\,\mathit{sen}.\varphi$, y $Ru\,\mathit{sen}.\varphi.CE = Rue\,\mathit{sen}.\varphi$. Han de ser, pues, $Rue\,\mathit{sen}.\varphi = P(b+e)\mathit{cos}.\varphi + Pg\,\mathit{sen}.\varphi$: que da $\frac{\mathit{sen}.\varphi}{\mathit{cos}.\varphi} = \mathit{tang}.\varphi = \frac{P(b+e)}{Rue - Pg}$: y por consiguiente $\mathit{sen}.\varphi = \frac{P(b+e)}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$

y $\mathit{cos}.\varphi = \frac{Rue-Pg}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

2 Para hallar el seno del ángulo θ que forma la tangente IGF con la GE, tenemos, que en el triángulo GEH los tres lados GE, EH, HG, ó los senos de sus ángulos opuestos, pueden expresar las fuerzas que actuan: GE, la $Ru\,\mathit{sen}.\varphi$, por dirigirse segun la misma GE perpendicular al diámetro BA: EH, la P, por dirigirse segun esta propia vertical: quedando GH para expresar la resulta de las otras dos fuerzas, segun el mismo hilo GH. Serán, pues, $\mathit{sen}.(\varphi+\theta) : \mathit{sen}.\theta = Ru\,\mathit{sen}.\varphi : P$: luego $Ru\,\mathit{sen}.\varphi\,\mathit{sen}.\theta = P\,\mathit{sen}.(\varphi+\theta) = P\,\mathit{sen}.\varphi\,\mathit{cos}.\theta + P\,\mathit{sen}.\theta\,\mathit{cos}.\varphi$: que dá $\frac{\mathit{sen}.\varphi}{\mathit{cos}.\varphi} = \mathit{tang}.\varphi = \frac{P\,\mathit{sen}.\theta}{Ru\,\mathit{sen}.\theta - P\,\mathit{cos}.\theta}$, segundo valor de esta tangente. Igualando ahora los dos valores hallados, será $\frac{P(b+e)}{Rue-Pg} = \frac{P\,\mathit{sen}.\theta}{Ru\,\mathit{sen}.\theta - P\,\mathit{cos}.\theta}$: que dá $\frac{\mathit{sen}.\theta}{\mathit{cos}.\theta} = \mathit{tang}.\theta = \frac{P(b+e)}{Rub+Pg}$

y por consiguiente $\mathit{sen}.\theta = \frac{P(b+e)}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$

y $\mathit{cos}.\theta = \frac{Rub+Pg}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

3 Substituyendo en las equaciones $\mathit{sen}.(\varphi+\theta) = \mathit{sen}.\varphi\,\mathit{cos}.\theta + \mathit{sen}.\theta\,\mathit{cos}.\varphi$, y $\mathit{cos}.(\varphi+\theta) = \mathit{cos}.\varphi\,\mathit{cos}.\theta - \mathit{sen}.\varphi\,\mathit{sen}.\theta$ los valores hallados de $\mathit{sen}.\varphi$, $\mathit{cos}.\varphi$, $\mathit{sen}.\theta$ y $\mathit{cos}.\theta$, será

$$\mathit{sen}.(\varphi+\theta) = \frac{Ru.P(b+e)^2}{(((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)\cdot((Rub+Pg)^2+P^2(l+e)^2))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathit{cos}.(\varphi+\theta) = \frac{(Rue-Pg)(Rub+Pg) - P^2(b+e)^2}{(((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)\cdot((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2))^{\frac{1}{2}}}$$

4 Que sea $u = 0$, y será $\mathit{sen}.(\varphi+\theta) = 0$, y $\mathit{cos}.(\varphi+\theta) = -1$: lo que denota que la tangente FH caerá á la parte de abaxo de la horizontal FL, y que coincidirá Fig. 78. 79.

con la vertical HL: esto es, que el Cometa quedará colgando del hilo. Serán asimismo $sen.\varphi = sen.\theta = \frac{b+e}{(g^2+(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = sen.$IGE; pero $\frac{b+e}{(g^2+(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = sen.$PGE: luego el punto I concurre con el punto P: esto es, la prolongacion del hilo FG pasa por el centro de gravedad: cuya noticia tan comun, verifica lo supuesto.

5 Que sea $Rue = Pg$, y será $cos.\varphi = 0$, y $sen.\theta = 1$: lo que denota que en este caso el Cometa AB queda vertical. Será asimismo $cos.(\varphi+\theta) = \frac{-P}{(R^2u^2+P^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-e}{(e^2+g^2)^{\frac{1}{2}}} = sen.$EGI; pero $\frac{-e}{(e^2+g^2)^{\frac{1}{2}}} = sen.$ EGC: luego el punto I concurre con el punto C, ó la prolongacion del hilo pasa por el centro de magnitud C. Fig. 80.

6 Que sea $u = \infty$, y será $sen.\varphi = 0$: lo que denota que el Cometa se hallará horizontal. Tambien será $sen.(\varphi+\theta) = 0$: y por consiguiente la tangente HE se hallará vertical. Fig. 78.

Hallar la fuerza que hace el viento en el Cometa.

7 Esta fuerza es $= Rusen.\varphi$: substituyendo en ella el valor de $sen.\varphi = \frac{P(b+e)}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, quedará $Rusen.\varphi = \frac{RuP(b+e)}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

8 Que sea $u = 0$, y será $Rusen.\varphi = 0$.

9 Que sea $Rue = Pg$, y será $Rusen.\varphi = \frac{Pg}{e}$.

10 Que sea $u = \infty$, y será $Rusen.\varphi = \frac{P(b+e)}{e}$.

Que

11 Que sea en general $(Rue-Pg)^2 = (n^2-1)P^2(b+e)^2$, expresando n un número qualquiera, y será $Rusen.\varphi = \frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne} + \frac{Pg}{ne}$.

12 Este valor manifiesta que no padece el Cometa la máxima fuerza quando es $u = \infty$; porque aunque en este caso es tambien $\frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne}$ el máximo es $\frac{Pg}{ne}$ el mínimo. Para hallar, pues, la máxima $Rusen.\varphi$ diferenciemos su valor, y será

$$\frac{RP(b+e)du}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(Rue-Pg)(b+e)R^2Peudu}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que dá $u = \frac{P((b+e)^2+g^2)}{Rge}$. Substituyamos este valor de u en el de $Rusen.\varphi$, y será la máxima

$$Rusen.\varphi = \frac{\frac{P}{ge}\left((b+e)^2+\frac{Pg}{e}\right)P(b+e)}{\left(\frac{P^2}{g^2}(b+e)^4+P^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{P}{e}\left((b+e)^2+g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hallar la fuerza que hace el hilo.

13 Ya se dixo (§.2) que en el triángulo GEH, expresando GE la fuerza $Rusen.\varphi$ del viento, y EH el peso P del Cometa, expresa GH la fuerza ó tension resultante que actua sobre el hilo: es pues esta en el punto G $= \frac{Psen.\varphi}{sen.\theta} = \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

14 Para hallar la misma fuerza ó tension en qualquiera otro punto del hilo, supóngase este como un polígono, compuesto de infinito numero de lados infinitamente pequeños. Que sean dos de estos AB, BC, y Fig. 81.

tira-

tirada la vertical BF, y la CF paralela á AB, CF expresará la fuerza ó tension que hace BA, BC la que hace la misma BC, y BF la fuerza resultante de las dos, que debe equilibrar el peso del hilo. Será, pues, la tension de BA á la tension de BC, como el seno de FBC al seno de CFB, ú de su igual ABF; esto es, las dos tensiones de BA y BC, como reciprocamente los senos de ABF, y FBC. Lo mismo se demonstrará de la tension de CB con la que se sigue CD, y así de todas las diferenciales: luego en general la tension del hilo en qualquiera punto de él, es reciprocamente como el seno que forma el mismo hilo con la vertical.

15 Que sea ABCDE el hilo: divídase en las partes infinitamente pequeñas AB, BC, CD, DE, &c. de los puntos B, C, D, E, &c., levántense verticales, y tírense CF paralela á BA, DG paralela á CB, EH á DG, &c.: con esto, en el triángulo FBC, llamando los ángulos FBA, GCB, HDC, &c. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., si CF expresa la fuerza ó tension que sufre BA, CB expresará la que sufre BC, y las dos fuerzas serán como $sen.\beta : sen.\alpha$: esto es, si llamamos A la fuerza que sufre AB, B la que sufre BC, C la que sufre CD, &c., será $A : B = sen.\beta : sen.\alpha$: de la misma manera será $B : C = sen.\gamma : sen.\beta$, y $C : D = sen.\delta : sen.\gamma$: de donde se deducen las equaciones $A sen.\alpha = B sen.\beta = C sen.\gamma = D se.\delta =$ &c.; por lo que $A : D = sen.\delta : sen.\alpha$: esto es, la fuerza que sufre ó padece el hilo en AB á la que padece en DE reciprocamente como el seno de α al seno de δ.

16 Esto debe entenderse no haciendo atencion á la fuerza que puede producir el viento sobre el hilo, que podemos despreciar. Si se quisiere hacer atencion á ella, es preciso tomar en lugar de la vertical FB la direccion resultante de las dos fuerzas, gravedad y accion del viento.

17 Que se tomen las abscisas sobre una vertical
Fig. 82. AB, y las ordenadas sobre una horizontal, y llamando á

á aquellas x, á estas y, y á las diferenciales del hilo $dh = FA$, ó AD, serán AE, AC las dx, y EF, CD las dy. El seno del ángulo que formare el hilo con la vertical será, pues, generalmente $\frac{dy}{dh}$: y como el seno que forma en el extremo superior G es $sen.(\varphi+\theta)$, y la Fig. 78.
tension en el mismo punto $= \frac{P sen.\varphi}{sen.\theta}$, tendremos --

$$\frac{1}{sen.(\varphi+\theta)} : \frac{dh}{dy} = \frac{P sen.\varphi}{sen.\theta} : \frac{P sen.\varphi\, sen.(\varphi+\theta)dh}{sen.\theta dy},$$

fuerza ó tension que padecerá el hilo en qualquier punto de él; ó substituyendo por $P sen.(\varphi+\theta)$ su igual ----- $Ru sen.\varphi\, sen.\theta$, (§. 2) será dicha tension $= \frac{dh}{dy} Ru sen.\varphi^2$.

18 Para hallar esta tension en cantidades conocidas despejadas de diferenciales, igualaremos las fuerzas opuestas que actuan sobre el punto A, reduciendolas á la direccion vertical. Fig. 82. Siendo la tension que actua segun AF $= \frac{P sen.\varphi\, sen(\varphi+\theta)dh}{sen.\theta dy}$, será la que actua segun AE $= \frac{P sen.\varphi\, sen.(\varphi+\theta)dx}{sen.\theta dy}$: y por la misma razon, la que resulta segun CA de la tension del hilo DA, será $= \frac{P sen.\varphi\, sen.(\varphi+\theta)(dx\ \ ddx)}{sen.\theta dy}$, suponiendo dy constante. A mas de esto, siendo h la longitud del hilo, que consideraremos conforme y de una misma densidad, podemos llamar kh el peso total de él: luego el peso total de una diferencial será kdh. Este con la fuerza segun CA debe equilibrar la fuerza segun AE: $\frac{P sen.\varphi\, sen.(\varphi+\theta)dx}{sen.\theta dy} = \frac{P sen.\varphi\, sen.(\varphi+\theta)(dx-ddx)}{sen.\theta dy} + kdh$, de que resulta $\frac{dydh}{ddx} = \frac{P sen.\varphi\, sen.(\varphi+\theta)}{k sen.\theta}$ cantidad constan-

tante. Que sea, pues, $\frac{P\,\mathrm{sen.}\varphi\,\mathrm{sen.}(\varphi+\theta)}{k\,\mathrm{sen.}\theta} = A$, y será $\frac{dydb}{ddx} = A$, ó $dydb = Addx$: é integrando $(B+b)dy = Adx = A(db^2-dy^2)^{\frac{1}{2}}$: y quadrando $(B+b)^2dy^2 = A^2(db^2-dy^2)$, que dá $\frac{db}{dy} = \frac{((B+b)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$. Introduciendo este valor en el de la tension del hilo hallada $\frac{P\,\mathrm{sen.}\varphi\,\mathrm{sen.}(\varphi+\theta)db}{\mathrm{sen.}\theta dy}$ quedará esta $= \frac{P\,\mathrm{se.}\varphi\,\mathrm{se.}(\varphi+\theta)\,((B+b)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}{A\,\mathrm{sen.}\theta} = k((B+b)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}$

19 Para hallar el valor de la constante B que nos completa el integral, tenemos que en el extremo superior del hilo G es $\frac{db}{dy} = \frac{1}{\mathrm{sen.}(\varphi+\theta)}$; pero de la equacion $\frac{P\,\mathrm{sen.}\varphi\,\mathrm{sen.}(\varphi+\theta)}{k\,\mathrm{sen.}\theta} = A$, resulta $\frac{1}{\mathrm{sen.}(\varphi+\theta)} = \frac{P\,\mathrm{sen.}\varphi}{Ak\,\mathrm{sen.}\theta}$: luego en dicho extremo será $\frac{P\,\mathrm{sen.}\varphi}{Ak\,\mathrm{sen.}\theta} = \frac{((B+b)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$, denotando b la total longitud del hilo: ó $\frac{P^2\mathrm{sen.}\varphi^2}{k^2\mathrm{sen.}\theta^2} = (B+b)^2+A^2 = (B+b)^2 + \frac{P^2\mathrm{se.}\varphi^2\mathrm{se.}(\varphi+\theta)^2}{k^2\mathrm{sen.}\theta^2}$ de que resulta $(B+b)^2 = \frac{P^2\mathrm{sen.}\varphi^2}{k^2\mathrm{sen.}\theta^2}(1-\mathrm{sen.}(\varphi+\theta)^2) = \frac{P^2\mathrm{sen.}\varphi^2\mathrm{cos.}(\varphi+\theta)^2}{k^2\mathrm{sen.}\theta^2}$: luego $B = \frac{P\,\mathrm{sen.}\varphi\,\mathrm{cos.}(\varphi+\theta)}{k\,\mathrm{sen.}\theta} - b$.

20 Si se substituye este valor de B en la tension del hilo hallada (§.18.) tendremos esta en qualquiera punto de él, distante del origen la cantidad H

$$= \frac{1}{\mathrm{sen.}\theta}\left(\left(P\,\mathrm{sen.}\varphi\,\mathrm{cos.}(\varphi+\theta) - k\,\mathrm{se.}\theta(b-H)\right)^2 + P^2\mathrm{se.}\varphi^2\mathrm{se.}(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

21 En el punto del origen ó mas baxo V es $H = 0$: luego la tension en el punto ó extremo V del hilo $=$

$$\frac{1}{\mathrm{sen.}\theta}\left(\left(P\,\mathrm{sen.}\varphi\,\mathrm{cos.}(\varphi+\theta) - kb\,\mathrm{sen.}\theta\right)^2 + P^2\mathrm{sen.}\varphi^2\mathrm{sen.}(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2} - kb\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

22 Que sea $u = 0$, y quedará la fuerza ó tension del hilo en el punto V $= \frac{-P(P^2g^2+P^2(b+e)^2)}{P^2g^2+P^2(b+e)^2} - kb = -(P+kb)$, peso del Cometa é hilo.

23 Que sea $Rue = Pg$, y quedará la tension $= \left((-P-kb)^2 + \frac{P^2g^2}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{P^2(g^2+e^2)}{e^2} + kb(2P+kb)\right)^{\frac{1}{2}}$.

24 Que sea $u = \infty$, y quedará la tension $= \frac{Pb}{e} - kb$.

25 De estos casos se deduce claramente que la tension del hilo varía, segun varía la velocidad del viento u: y asimismo, que no sucede la máxima quando es $u = \infty$; pues aunque aumenta el primer término, aumentando la u, disminuye el segundo. Se percibe esto claramente reduciendo $\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}$ á una serie: pues resulta la tension $=$

$$\left(\left(\frac{P(Rub+Pg)}{Rue-Pg} - \frac{P^3(b+e)^3Ru}{(Rue-Pg)^3} + \frac{P^5(b+e)^5Ru}{(Rue-Pg)^5} - \&c - kb\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta expresion manifiesta, que luego que se haga Pg despreciable respecto de Rue, la tension queda sensiblemente constante, é $= \frac{Pb}{e} - kb$, por mas que aumente la u.

26 La expresion $\frac{Pb}{e}$ manifiesta tambien, que quanto mayor fuere b respecto de e, tanto mas aumentará la tension; esto es, quanto mas larga y mas pesada fuere la cola del Cometa, tanto mas aumentará la tension ó fuerza del hilo.

Hallar la altura vertical que obtendrá el Cometa.

27 De la equacion $(B+H)dy = Adx$, tenemos tambien $(B+H)^2(dH - dx)^2 = A^2 dx$, que da $dx = \frac{(B+H)dH}{((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}$: é integrando $x = ((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}$: ó $x^2 = (B+H)^2+A^2$, equacion al centro de una hypérbole equilátera, cuyo semidiámetro es A, las abcisas x, y las ordenadas B+H. Si con el semidiámetro $A = \frac{P\,\mathrm{sen}.\varphi\,\mathrm{sen}.(\varphi+\theta)}{k\,\mathrm{sen}.\theta} = CD$ se describe, pues, la hypérbole equilátera DEF, las ordenadas expresarán las longitudes del hilo, y las abcisas las alturas verticales del Cometa. Fig. 83.

28 Supongase F el punto correspondiente al Cometa, y será para él $H = b$, y (§. 19.) $(B+b)^2+A^2 = \frac{P^2\,\mathrm{sen}.\varphi^2}{k^2\,\mathrm{sen}.\theta^2} = x^2$: luego $x = FL = \frac{P\,\mathrm{sen}.\varphi}{k\,\mathrm{sen}.\theta}$.

29 EM es la abcisa en caso de ser EH = B, y H = o, poniendo, pues, en la equacion $x^2 = (B+H)^2+A^2$, H = o, y (§. 19.) $B = \frac{P\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.(\varphi+\theta)}{k\,\mathrm{sen}.\theta} - b$, será

$$x^2 = (EM)^2 = \left(\frac{P\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.(\varphi+\theta)}{k\,\mathrm{sen}.\theta} - b\right)^2 + \frac{P^2\,\mathrm{se}.\varphi^2\,\mathrm{se}.(\varphi+\theta)^2}{k^2\,\mathrm{sen}.\theta^2}, \text{ que dá}$$

$$EM = \frac{((P\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.(\varphi+\theta) - kb\,\mathrm{sen}.\theta)^2 + P^2\,\mathrm{sen}.\varphi^2\,\mathrm{sen}.(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}{k\,\mathrm{sen}.\theta}.$$

Se-

30 Será, pues, la altura vertical del Cometa EK (*Figur.* 83.), ó HL (*Figur.* 78.) =

$$\frac{P\,\mathrm{sen}.\varphi}{k\,\mathrm{sen}.\theta} - \frac{1}{k\,\mathrm{sen}.\theta}((P\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.(\varphi+\theta) - kb\,\mathrm{sen}.\theta)^2 + P^2\,\mathrm{sen}.\varphi^2\,\mathrm{se}.(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

cuya cantidad es la diferencia de las tensiones de los dos extremos del hilo dividida por k.

31 Si esta diferencia fuere, pues, cero, tambien la altura vertical que tenga un extremo del hilo sobre el otro, será cero: esto es, si las dos tensiones de los extremos fueren iguales, estos se hallarán en una misma horizontal; cuyo principio de Mechánica es bien conocido.

32 La tension en el extremo del Cometa la hallamos (§. 13) $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^3(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, y la del extremo baxo V =

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2} - kb\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2-P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}:$$

luego la altura vertical que obtendrá el Cometa sobre el horizonte será $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Rue-Pg)^2+P(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} -$

$$\left(\left(\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)} - b\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

33 Que sea $u = o$, y será la altura vertical del Cometa $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - b = -b$, longitud del hilo negativa: lo que es bien sabido.

34 Que sea $u = \infty$, y será la altura vertical $= \frac{Pb}{ke} - \frac{Pb}{ke} + b = b$, longitud del hilo igualmente.

35 Para hallar el caso en que será la altura vertical cero, ó en que se mantendrá el Cometa en la horizontal del punto V, se igualará la expresion á cero. Tomando la del (§. 30.) será

P

$$\frac{P\,sen.\varphi}{k\,sen.\theta}-\frac{1}{k\,sen.\theta}\left((P\,se.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)-kh\,se.\theta)^2+P^2\,se.\varphi^2\,se.(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0:$$

ó multiplicando por $k\,sen.\theta$, y quadrando $P^2 sen.\varphi^2 = P^2 sen.\varphi^2 - 2Pkh\,sen.\varphi\,sen.\theta\,cos.\varphi+\theta) + k^2h^2 sen.\theta^2$, que se reduce á $\frac{2P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)}{k\,sen.\theta}-h=0$; pero (§.19.) es $B=\frac{P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)}{k\,sen.\theta}-h$, ó $B+h=\frac{P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)}{k\,sen.\theta}$: luego para que la altura vertical sea cero, habrá de ser $2B+h=0$, ó $B=-\frac{1}{2}h$: esto es, los dos extremos del hilo estarán igualmente distantes, y á partes opuestas del exe de la hyperbole; cuya noticia es bien conforme á los principios notorios.

36 Substituyendo los valores de los senos, y cosenos en $\frac{2P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)}{k\,sen.\theta}-h$, resulta - - - - - - - - - -

$$\frac{2P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}=kh,$$

cuya equacion se ha de verificar para que el Cometa quede en la

Fig. 78. horizontal del punto V.

37 Sí se supone la velocidad del viento constante, dexando variable la longitud del hilo h, será asimismo variable la altura vertical del Cometa. Como el segundo termino es negativo, quanto menor sea este, mayor será la altura vertical; pero no suponiendo sino la h variable, será menor quando sea $\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+(b+e)^2)}-h=0$; ó lo que es lo mismo, quando sea $B=0$: luego la mayor altura del Cometa sobre el horizonte se consigue quando es $h=\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$: y será dicha máxîma altura = - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}.$$

Co-

38 Como el valor de h en este ultimo caso no es sino la mitad del que se halló en el precedente, se sigue, que la longitud del hilo que hará elevar el Cometa á la máxîma altura, no es sino la mitad de aquella que le obliga á mantenerse en la horizontal del punto V.

39 Como la altura vertical del Cometa depende de la diferencia en las tensiones de los dos extremos del hilo, se sigue, que su mayor altura se conseguirá quando la tension en el extremo inferior V sea la mínima. Para saber, pues, quando el Cometa logra su máxîma altura, basta atender á que el hilo haga la menor fuerza posible.

40 Como el seno del ángulo que forma el hilo con la vertical en qualquier punto se halló (§§. 17. *y* 18.) $=\frac{dh}{dy}=\frac{((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$: y para el extremo V es $H=0$, así como $B=0$ para el caso en que el Cometa obtenga la máxîma altura, tendremos el seno del ángulo que formará el hilo en su extremo V con la vertical $=\frac{A}{A}=1$: luego será este ángulo recto: y así para saber quando el Cometa logra su máxîma altura, basta atender á que en el extremo V se halle el hilo horizontal.

Hallar el valor de la horizontal VL.

41 De las dos equaciones $(B+H)dy=Adx$, y $x^2=(B+H)^2+A^2$ se deduce $dy=\frac{Adx}{(x^2-A^2)^{\frac{1}{2}}}$ (*); pero

$\int$

(*) Esta es la equacion de la *Cadenaria*: la misma que halló *Juan Bernoulli* en el Diario de los Sabios año de 1692; y despues de él otros.

$\int \frac{A^2 dx}{2(x^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}}$ es un sector de la hyperbole : luego si el sector de la hyperbole se divide por $\frac{1}{2}A$, se tendrá el valor de y.

Fig. 83. 42 Para hallar el valor de un sector FDC, EDC, eDc &c., llamemos las abcisas de la asymtota $CQ = z$, y las ordenadas perpendiculares $FQ = v$. La equacion á esta asymtota será $vz = \frac{1}{2}A^2$, y la diferencial del area $QFDP = vdz = \frac{A^2 dz}{2z}$: cuyo integral es $\frac{1}{2}A^2 lz$; pero para que este integral denote solamente el area QFDP es preciso que siendo $z = CP = A\sqrt{\frac{1}{2}}$ venga el integral cero : luego el area $QFDP = \frac{1}{2}A^2 l \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Esta area es igual al sector CFD: porque $QFDC = QFDP + PDC = QFC + FDC$, y $PDC = QFC$, con que $QFDP = FDC$: luego el sector $FDC = \frac{1}{2}A^2 l \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$, que dá $y = A l \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

43 El valor de z se deduce de que $(CF)^2 = v^2 + z^2 = 2x^2 - A^2$, que dá $z^2 = x^2 - \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(x^2 - \frac{1}{2}A^2)^2 + \frac{1}{4}A^4}$: con que será $y = A l \frac{((B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$: esto es, en el extremo del hilo donde está el Cometa, y en que es $H = b$, $y = A l \frac{((B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2 + \sqrt{((B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$: y, en el otro extremo, en que es $H = 0$, $y =$ - - - - - $A l \frac{(B^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4})^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Quitando esta cantidad de aquella, quedará la horizontal $VL = \frac{1}{2}A l \frac{(B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{((B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{B^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}$, ó reduciendo este logarithmo á los de las tablas comunes,

$$VL = \frac{1}{2}A(2,3025851) l \frac{(B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2 + \sqrt{((B+b)^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{B^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}:$$

en cuyo valor se substituirán $B =$ - - - - - - - - - - - - - $\frac{P((Rue - Pg)(Rub + Pg) - P^2(b+e)^2)}{k((Rue - Pg)^2 + P^2(b+e)^2)} - b$, y $A = \frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Rue - Pg)^2 + P^2(b+e)^2)}$, tomando el signo positivo, tanto en numerador, como en denominador, si fuere B positivo : positivo en el numerador, y negativo en el denominador, si fuere B negativo, y $b > B$: y negativo en numerador y denominador, si fuere B negativo, y $b < B$.

44 Que sea $u = 0$, y será $A = 0$, y por consiguiente $VL = 0$. Fig. 78.

45 Que sea $u = \infty$, y será $A = 0$, y por consiguiente, como antes, $VL = 0$.

46 En el caso que los dos extremos del hilo se hallen en la misma horizontal es (§. 35) $B = -\frac{1}{2}b$: luego en él será $VL = \frac{1}{2}A(2,3025851) l \frac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}A^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}A^2 - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}}$ que se reduce, por ser $B = \frac{P\,sen.\varphi\,cos.(\varphi+\theta)}{k\,sen.\theta} - b = -\frac{1}{2}b$, que dá $A = \frac{P\,se.\varphi\,se.(\varphi+\theta)}{k\,sen.\theta} = \frac{b\,sen.(\varphi+\theta)}{2\,cos.(\varphi+\theta)}$, á $VL = A(2,3025851) l \frac{1 + cos.(\varphi+\theta)}{1 - cos.(\varphi+\theta)}$.

Reducir las fórmulas á un caso fácil para la práctica.

47 Podemos suponer para esto $e = b$, y $g = 2e$: pues esta determinacion de valores depende solo de la longitud de los hilos AG, GD, y de la eleccion del punto D, ambas cosas arbitrarias. Se trasladará la distancia PC de C á E, y se harán $AG = (4b^2 + (CA - b)^2)^{\frac{1}{2}}$, con lo que se sendrán, puesto á eleccion el punto D, $e = b$, y $g = 2e$. Fig. 78.

Se-

48 Segun la theórica de las Velas, que se verá (*Tom.*2.§.261) es la fuerza del Cometa $= \frac{1}{20} mua^2 sen.\varphi$: ó tomando de esta los dos tercios, por lo expresado (*Esc. Prop.*36. *Lib.*2.), será $\frac{1}{30} mua^2 sen.\varphi$: luego $R = \frac{1}{30} ma^2$, denotando a^2 el area del Cometa, que podemos suponer de 9 pies, y m el peso de un pie cubico de agua del Mar, que en el (*Tom.*2.§.109) es de $64\frac{3}{8}$ libras : lo que da $R = \frac{64\frac{3}{8} \cdot 9}{30}$, ó con corta diferencia $= 19$.

49 Que sea, á mas de esto, el peso del Cometa con su cola, de media libra, y será $P = \frac{1}{2}$. Pongamos tambien, que 2000 pies de hilo pesen una libra, y será $2000k = 1$, ó $k = \frac{1}{2000}$.

Todos estos valores, substituidos en las fórmulas, las reducen á un caso fácil para la práctica.

50 Valores de los senos y cosenos de φ, θ, y $(\varphi + \theta)$.

$$sen.\varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}. \qquad cos.\varphi = \frac{19u-1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$sen.\theta = \frac{1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}. \qquad cos.\theta = \frac{19u+1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$sen.(\varphi+\theta) = \frac{19u}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}.$$

$$cos.(\varphi+\theta) = \frac{(19u-1)(19u+1)-1}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}.$$

51 Estos valores manifiestan claramente la poca velocidad que necesita tener el viento para que la tangente HF se eleve sobre el horizonte. Esta debe quedar horizontal quando $cos.(\varphi+\theta) = 0$: luego para que suceda esto ha de ser $(19u-1)(19u+1) = 1$, ó $u = \frac{1}{19}\sqrt{2}$; de suerte que no son ni aun 11 líneas por segundo las que ha de correr el viento para que la tangente HF quede horizontal. Tam-

52 Tambien manifiestan los mismos valores, que á poca que sea la velocidad u del viento ya se pone casi horizontal el Cometa : para esto basta que $sen.\varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ se haga despreciable. Supongamos, pues, $\frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{38}$ seno de menos de un grado, y será con corta diferencia $\frac{1}{19u} = \frac{1}{38}$, que dá $u = 2$: esto es, 2 pies de velocidad en el viento son ya suficientes para poner al Cometa horizontal, á menos de un grado de diferencia.

53 La fuerza que hace el extremo del hilo V la hallamos (§.21) $=$

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2-kb}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} :$$

luego en este caso $= \left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{(19u-1)^2+1} - \frac{b}{2000}\right)^2 + \frac{19^2u^2}{((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

54 Esta expresion, siendo u de algun valor considerable, se reduce á $\frac{1}{2} - \frac{b}{2000}$: donde se ve, que la fuerza del hilo se mantiene casi sensiblemente constante sin alterarse por mas que aumente el viento.

55 La altura del Cometa la hallamos $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} -$

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)} - b\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{k^2((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} :$$

luego en este caso será $= \frac{\frac{1}{2}((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} -$

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)} - b\right)^2 + \frac{19^2u^2}{\frac{1}{(2000)^2}((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} :$$

y la máxîma $= \frac{1000((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2000 \cdot 19u}{(19u-1)^2+1}$:

que

que se reduce, siendo u de algun valor considerable, á $1000 - \frac{2000}{19u}$: por lo que, quanto mayor sea la velocidad del viento, tanto mayor será la altura máxîma del Cometa.

56 La longitud del hilo, propia para conseguir esta máxîma altura vertical del Cometa, se halló $= \frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$: luego será ahora $= \frac{\frac{1}{2}((19u-1)(19u+1)-1)}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)}$: que se reduce, siendo u de algun valor considerable, á $1000\left(1+\frac{2}{19u}\right)$. Si fuere $u=2$, quedará $=1052,6$.

57 Otra qualquiera longitud del hilo, menor ó mayor, da menor altura vertical al Cometa. 1000 pies de hilo, suponiendo $u=2$, no dan sino $925,7$ de altura al Cometa, quando la altura máxîma es de $947,4$: 1500 de aquel no dan sino $549,6$ de esta: y el doble de los $1052,6$, que dan la mayor elevacion ó altura: esto es, $2105,2$ pies de hilo dan el caso en que el Cometa se queda en la horizontal del punto V.

58 La distancia horizontal VL la hallamos $=$

$$\tfrac{1}{2}A(2,3025851)l\frac{(B+b)^2+\frac{1}{2}A^2\pm\sqrt{((B+b)^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{2}A^2\pm\sqrt{(B^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}},$$

ó en el caso de la máxîma altura vertical del Cometa en que es $B=0$, será $=\frac{1}{2}A(2,3025851)l\frac{b^2+\frac{1}{2}A^2+\sqrt{(b^2+\frac{1}{2}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{2}A^2}$;

pero b la hallamos $=1000\left(1+\frac{2}{19u}\right)$, y $A = \frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$, que siendo u de algun valor considerable, se reduce á $\frac{2000 \cdot 19u}{19^2u^2-2 \cdot 19u}$, ó á $1000 \cdot \frac{2}{19u}\left(1+\frac{2}{19u}\right)=\frac{2b}{19u}$: luego colocando este valor de A, quedará la horizontal VL en el caso de la máxîma

$$\text{altura} = \frac{1000}{19^2u^2}(19u+2)(2.3025851)l\frac{1+\frac{2}{19^2u^2}+\left(\left(1+\frac{2}{19^2u^2}\right)^2-\frac{4}{19^4u^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{19^2u^2}}$$

$$= \frac{1000}{19^2u^2}(19u+2)(2,3025851)l\frac{19^2u^2+2+19u\sqrt{19^2u^2+4}}{2};$$

ó con corta diferencia $= \frac{2000}{29^2u^2}(19u+2)(2,3025851)l19u$.

Pongamos ahora $u=2$, y será VL $= \frac{1000}{19^2}(20)(2,3025851)l38 = 201,5$ pies.

59 Esto da el ángulo LVG $=78°$, y la distancia directa VG $=969,3$ pies: de suerte, que el hilo embebe en su arco $83,3$ pies.

Reducir las fórmulas al caso de Eulero, *en que es* $g=0$, *siendo tambien* $e=b$.

60 En este caso serán $sen.(\varphi+\theta)=\frac{4PRu}{R^2u^2+4P^2}$, y $cos.(\varphi+\theta)=\frac{R^2u^2-4P^2}{R^2u^2+4P^2}$.

61 Que sea $u=0$, y será $sen.(\varphi+\theta)=0$, y $cos.(\varphi+\eta)=-1$: acorde con lo dicho (§.4), y con todo buen principio de Mechânica.

62 La fuerza que hace el viento en el Cometa, se reduce á $\frac{2PRu}{(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}$.

63 La fuerza que hace el extremo del hilo V, se reduce á $\left(\left(\frac{PR^2u^2-4P^3}{R^2u^2+4P^2}-kb\right)^2+\frac{16R^2u^2P^4}{(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

 Que

64 Que sea $u=0$, y quedará esta fuerza ó tension $=-P-kb$, peso de Cometa é hilo.

65 La altura vertical del Cometa se reduce á

$$\frac{P(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}{k(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}-\left(\left(\frac{P(R^2u^2+4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}-b\right)^2+\frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{P}{k}-\left(\left(\frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}-b\right)^2+\frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

66 Que sea $u=0$, y será la altura vertical $=\frac{P}{k}-\frac{P}{k}-b=-b$, longitud del hilo.

67 La máxîma altura, siendo b variable, se reduce á $\frac{P(Ru-2P)^2}{k(R^2u^2+4P^2)}$: y la longitud del hilo, que da esta máxîma altura, $b=\frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

68 Esta longitud de hilo será, pues, á la altura máxîma, como $Ru+2P$, á $Ru-2P$.

69 La longitud del hilo necesaria para que quede el Cometa en la horizontal del punto V, se reduce á $b=\frac{2P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

Todas estas resultas convienen precisamente con lo que se observa en la práctica. Pasemos á exâminar si sucede lo mismo en el systhema de ser las fuerzas del viento en razon compuesta duplicada de sus velocidades, y senos de incidencia.

La misma theórica de los Cometas, suponiendo ser la resistencia de los fluidos en razon compuesta duplicada de sus velocidades y senos de ángulos de incidencia.

70 La fuerza del viento en el Cometa será ahora $ru^2 sen.\varphi^2$. Esta cantidad substituida en la equacion (§.1) en lugar de $Ru sen.\varphi$, que entonces expresó la mis-

misma fuerza, y haciendo $e=b$, y $g=0$, dá $ru^2 sen.\varphi^2=2P cos.\varphi$.

71 Será, pues, $sen.\varphi^2=\frac{2P}{ru^2}cos.\varphi$: y $1-sen.\varphi^2=cos.\varphi^2=1-\frac{2P}{ru^2}cos.\varphi$: de que se deduce $cos.\varphi=-\frac{P}{ru^2}\pm\left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$: y $sen.\varphi=\left(-\frac{2P^2}{r^2u^4}\pm\frac{2P}{ru^2}\left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

72 La equacion (§.2) se reduce á $ru^2 sen.\varphi^2 sen.\theta=P sen.(\varphi+\theta)=P(sen.\varphi cos.\theta+sen.\theta cos.\varphi)$: ó subtituyendo por lo antecedente $2P cos.\varphi=ru^2 sen.\varphi^2$, será $2P sen.\theta cos.\varphi=P(sen.\varphi cos.\theta+sen.\theta cos.\varphi)$: ó $sen.\theta cos.\varphi=sen.\varphi cos.\theta$: luego $\varphi=\theta$.

73 Tendremos, pues, $sen.(\varphi+\theta)=2sen.\varphi cos.\varphi$, y $cos.(\varphi+\theta)=cos.\varphi^2-sen.\varphi^2=2cos.\varphi^2-1$: que da $sen.(\varphi+\theta)=\left(\frac{8P}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{P}{ru^2}\pm\left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$: y $cos.(\varphi+\theta)=1+\frac{4P^2}{r^2u^4}\mp\frac{4P}{ru^2}\left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

74 Para facilitar estas expresiones, ó ponerlas mas inteligibles, supongamos $r^2u^4=n^2-1$, y será $sen.(\varphi+\theta)=\frac{2}{n+1}\sqrt{2(n-1)}$, y $cos.(\varphi+\theta)=1-\frac{4}{n+1}$.

75 Que sea $u=0$, y será $n=1$, $sen.(\varphi+\theta)=0$, y $cos.(\varphi+\theta)=-1$.

76 Que sea $r^2u^4=8$, y será $n=3$, $sen.(\varphi+\theta)=1$, y $cos.(\varphi+\theta)=0$.

77 Que sea $u=\infty$, y será $n=\infty$, $sen.(\varphi+\theta)=0$, y $cos.(\varphi+\theta)=1$.

78 La fuerza del viento en el Cometa es $ru^2 sen.\varphi^2=2P cos.\varphi=-\frac{2P^2}{ru^2}\pm 2P\left(1+\frac{P^2}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}}=2P\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

79 Que sea $u=0$, y será $n=1$, que dá $ru^2 sen.\varphi^2=0$.

Que

80 Que sea $r^2u^4=8$, y será $n=3$, que da $ru^2 sen.\varphi^2 = P\sqrt{2}$.

81 Que sea $u=\infty$, y será $n=\infty$, que da $ru^2 sen.\varphi^2 = 2P$.

82 La theórica de la tension, ó fuerza del hilo, resulta la misma en este systhema que en el otro; solo es preciso poner en este los correspondientes valores de los senos y cosenos de φ, θ, y $(\varphi+\theta)$.

La expresion (§. 20.) es =

$$\frac{1}{sen.\theta}\left(\left(P sen.\varphi cos.(\varphi+\theta) - kh sen.\theta\right)^2 + P^2 sen.\varphi^2 sen.(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}:$$

y substituyendo en ella $\varphi=\theta$, queda en

$$\left(P^2+k^2h^2-2Pkh cos.(\varphi+\theta)\right)^{\frac{1}{2}} = \left((P-kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

83 Que sea $u=0$, y será $n=1$, que da la tension del hilo $= P+kh$, peso de Cometa é hilo.

84 Que sea $r^2u^4=8$, y será $n=3$, que da la tension $= (P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

85 Que sea $u=\infty$, y será $n=\infty$, que da la tension $= P-kh$, peso del Cometa, menos el peso del hilo.

86 La altura vertical del Cometa, como resulta de los mismos principios que la tension, es igualmente la propia que en el otro systhema: esto es, la diferencia de las dos tensiones de los extremos del hilo, dividida por k: será pues $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k}\left((P-kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

87 Que sea $u=0$, ó $n=1$, y será la altura vertical $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$.

88 Que sea $r^2u^4=8$, ó $n=3$, y será la altura $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k}(P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

89 Que sea $u=\infty$, ó $n=\infty$, y será la altura $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} + h = h$.

Pa-

90 Para el caso que el Cometa se haya de mantener en la horizontal del punto V, tendremos $\frac{P}{k} = \frac{1}{k}\left((P-kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, ó $2P-kh = \frac{8P}{n+1}$; que da $n = \frac{6P+kh}{2P-kh}$, y $r^2u^4 = \frac{16P(2P+kh)}{(2P-kh)^2}$.

91 Hasta aquí no nos ha manifestado este systhema nulidad alguna; pero se manifiesta luego que se especulan los valores de estas alturas verticales. Siendo $r^2u^4=8$ es la altura vertical $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k}(P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$, cantidad constante negativa, tenga el valor que quisiere la h, ó la k, y aun la P: de suerte que este systhema manifiesta que el Cometa no puede ni aun llegar á la horizontal del punto V con sola la velocidad del viento $u = \left(\frac{8}{r^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. En este systhema es $ru^2 = \frac{ma^2}{64}u^2$: luego será $r = \frac{ma^2}{64}$, ó poniendo la densidad del ayre $m = \frac{64}{29.29}$ y $a^2=9$, será $r = \frac{9}{29^2}$, y $r^2 = \frac{81}{29^4}$. No podrá, pues, el Cometa elevarse, ni aun hasta la horizontal del punto V, siendo $u = \frac{29}{3}(8)^{\frac{1}{4}}$: esto es, siendo la velocidad del viento de $16\frac{1}{4}$ pies por segundo; lo que evidentemente es contra la práctica, pues esta velocidad no solo es capaz de elevar al Cometa hasta la horizontal del punto V, sino hasta casi ponerle vertical con este punto, mayormente si fuere kh cantidad corta. En efecto en el otro systema, siendo u tan grande, pueden despreciarse todas las cantidades en que no se halla la u: y se reducirá la altura vertical á $\frac{P}{k} - \frac{P}{k} + h = h$, longitud del hilo.

Pon-

92 Pongamos en $r.^2u^4 = \frac{16P(2P+kh)}{(2P-kh)^2}$, equacion que debe verificarse para que el Cometa quede en la horizontal del punto V, los valores de $P=\frac{1}{2}$, $k=2000$, y $h=1000$, y será $r^2u^4=48$, ó $u^4=\frac{29}{3}(48)^{\frac{1}{2}}$, que da u mayor que de 25 pies, velocidad excesiva que quizas rasgara en pedazos el Cometa; tan lexos está de que no pudiera elevarle sino hasta la horizontal del punto V. En el otro systhema, este caso elevara al Cometa hasta ponerle sensiblemente vertical con el punto V.

Basta esto para persuadirse de la falsedad del systhema que supone la resistencia de los fluidos en razon compuesta duplicada de sus velocidades, y de los senos de los ángulos de incidencia.

APEN-

APENDICE 2.

DEspues de casi concluida la impresion de esta Obra, me vinieron de Inglaterra el resto de las Transacciones Philosophicas de aquella Real Sociedad, que me faltaban, y se habian impreso nuevamente. En el Tom.51. part. 1. pag. 100, se hallan unas experiencias hechas por *Mr. J. Smeaton*, con el titulo, *An experimental enquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other Machines depending on a circular motion.* El Autor da una pequeña Máchîna de su invencion, en que, por repetidas experiencias hechas con ella, averigua la fuerza que exercita el agua que, saliendo de un deposito por un agujero, choca los alabes de una rueda vertical, dispuesta á modo de la de un Molino: en el exe de esta se envuelve una cuerda que suspende un peso, y sirve para deducir el efecto de la Máchîna. El hecho de procurar el Autor estos exâmenes, demuestra claramente la desconfianza que tenia en punto á las determinaciones hasta ahora dadas sobre los efectos y fuerzas, ó resistencias del agua. Se hace cargo, antes de empezar, de las diferencias que resultan de hacer las experiencias con modelos, á hacerlas con Máchînas en grande, por motivo de la friccion que segun hemos visto debe ser diversa, á causa de las distintas dimensiones y pesos que se dan á las piezas que componen la Máchîna. Para salvar este escrúpulo, da un méthodo bien ingenioso de averiguar las fricciones, y de corregir sus efectos en las experiencias, con lo qual, en quanto es dable, se puede confiar en ellas, á lo menos lo bastante para manifestar la ley con que actua el agua. No nos detendremos en especular ó determinar las fuerzas absolutas, nos contentaremos con hacer ver como dichas experiencias, y sus resultas, convienen con la theórica que hemos explicado, y como se apartan enteramente de la que hasta ahora se ha enseñado. Para esto basta decir, que el efecto de la Máchîna debe medirse por el producto del peso que levante, por la velocidad con que lo levante: porque si la velocidad es cero, el efecto lo es tambien, é igualmente lo será, si el peso fuere cero: con esto se vé claramente que si desde una corta cantidad de peso se fuese aumentando este, el efecto será mayor y mayor hasta un cierto termino, que ya debe disminuir, porque siendo el peso excesivo, la Máchîna no lo podrá mover, y quedará el efecto cero. Aquel termino de aumento de efecto es por consiguiente el máxîmo, y es el que siempre se ha solicitado para lograr la mayor ventaja en las Máchînas. El modo de deducirle es hallar primero el valor del peso levantado en funciones de la potencia ó fuerza actuante: multiplicar este valor por la velocidad del mismo peso, y hallar el máxîmo de dicha expresion. En el caso de nuestro Autor sean

V la velocidad con que se mueve el agua chocante.
u la velocidad de los alabes de la rueda, y la del peso.
P el peso.
R el radio de la rueda.
r el radio del exe donde se envuelve la cuerda.
y F la cantidad de la friccion resultante del peso de toda la Máchîna.

Con esto $V-u$ será la velocidad con que el agua choca los alabes: y en la theórica que hasta ahora se ha enseñado, se puede expresar su fuerza por $A(V-u)^2$, siendo A una constante, y su momento por $RA(V-u)^2$. Este debe ser igual al momento del peso rP, con mas los de las fricciones: el que resulta del peso puede expresarse por nP, siendo n un número constante qualquiera: y el que resulta del peso total de la Mcáhina por fF, siendo f otro número constante qualquiera. Ten-

dremos, pues, $RA(V-u)^2 = rP+nP+fF$, que da $P = \frac{RA(V-u^2)-fF}{r+u}$: y $Pu = \frac{RAu(V-u)^2-fFu}{r+u}$.

Para hallar el máxîmo de esta cantidad debemos diferenciarla, é igualar la diferencial á cero. Será por tanto $RAdu(V^2-4Vu+3u^2)-fFdu=0$: que da $u=\frac{2}{3}V-\left(\frac{fF}{3RA}+\frac{1}{9}V^2\right)^{\frac{1}{2}}$: es la velocidad que deben tener los alabes de la rueda, y el peso para que la Máchîna haga el mayor efecto posible: de suerte, que el peso se debe ir proporcionando, para conseguir la expresada velocidad. Si se supone $F=0$: esto es, la friccion nula, quedará $u=\frac{1}{3}V$: es lo que hasta ahora nos han enseñado generalmente todos los Autores. La velocidad V del agua debiera, segun esto, ser á la velocidad u de los alabes; excluida la friccion, como 3 con 1: atendiendo á aquella, la razon debiera ser aun mayor; de suerte, que la velocidad de los alabes, segun dicho systhema, debe ser aun menor que la tercera parte de la velocidad del agua. Echense ahora los ojos sobre las experiencias de nuestro Autor pag. 115. coluna 12, y se verá la falsedad del mismo systhema, porque no se halla ni una sola experiencia de las 27 que expone, que no dé la velocidad de los alabes mayor que la tercera parte de la velocidad del agua: llegando el exceso hasta dar algunas la mitad.

Para resolver el caso segun nuestra theórica, no tenemos sino expresar la fuerza con que choca el agua los alabes por $A(V-u)$: lo que reduce la equacion primera á $RA(V-u)=rP+nP+fF$, y da $P=\frac{RA(V-u)-fF}{r+u}$, y $Pu=\frac{RAu(V-u)-fFu}{r+n}$: cuya diferencial igualada á cero, da $RA(V-2u)-fF=0$, ó $u=\frac{1}{2}V-\frac{fF}{2RA}$: donde se ve que la velocidad de los alabes debe ser algo menos que la mitad de la velo-ci-

cidad del agua que los choca, segun se halló por las experiencias, ó segun lo expresa con cortísima diferencia la coluna 12. de la pag. 115. de nuestro Autor. Pero no es aun esto lo que acredita mas nuestra theórica. La cantidad A es la constante, que multiplicada por la velocidad produce la resistencia ó fuerza del fluido, que (*Cor. 3. Prop. 36. Lib. 2.*) es $\frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u\,sen.\theta$, ó siendo $se.\theta = 1$, $= \frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u$, por lo que es $A = \frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}$, en cuya expresion ca denota la seccion vertical del agua en el canal, ó del agujero por donde sale aquella: y asi se ve que quanto mayor fuere dicho agujero, menor será $\frac{fF}{2RA}$, y mayor la velocidad u que corresponde dar á los alabes, y al peso P. Ninguna cosa mas conforme con las experiencias del Autor de ellas. En la misma pag. 115 se ve que las practicó por seis distintos agujeros unos mayores que otros. Las primeras 10 hechas con el menor agujero, dan, tomando un medio entre ellas y supuesto $V = 10$, $u = 3{,}548$, y $\frac{fF}{2RA} = 1{,}452$. Las 7 segundas, hechas con mayor agujero $u = 3.89$. y $\frac{fF}{2RA} = 1{,}11$. Las 4 terceras, con otro mayor, $u = 4{,}3$, y $\frac{fF}{2RA} = 0{,}7$. Las 3 quartas, con otro mayor, $u = 4{,}53$, y $\frac{fF}{2RA} = 0{,}47$. Las 2 quintas, con otro mayor, $u = 4.775$, y $\frac{fF}{2RA} = 0{,}225$: y ultimamente la 6, con otro mayor agujero, da $u = 5{,}2$: cuya cantidad excede en algo el mayor valor que puede tener la $u = 5$, cuya diferencia es bien corta á vista de las que dan entre sí las demas experiencias. No se verá menos acreditada la misma theórica quando se vea en el Tom. 2. aplicada á todas las acciones y movimientos del Navío.

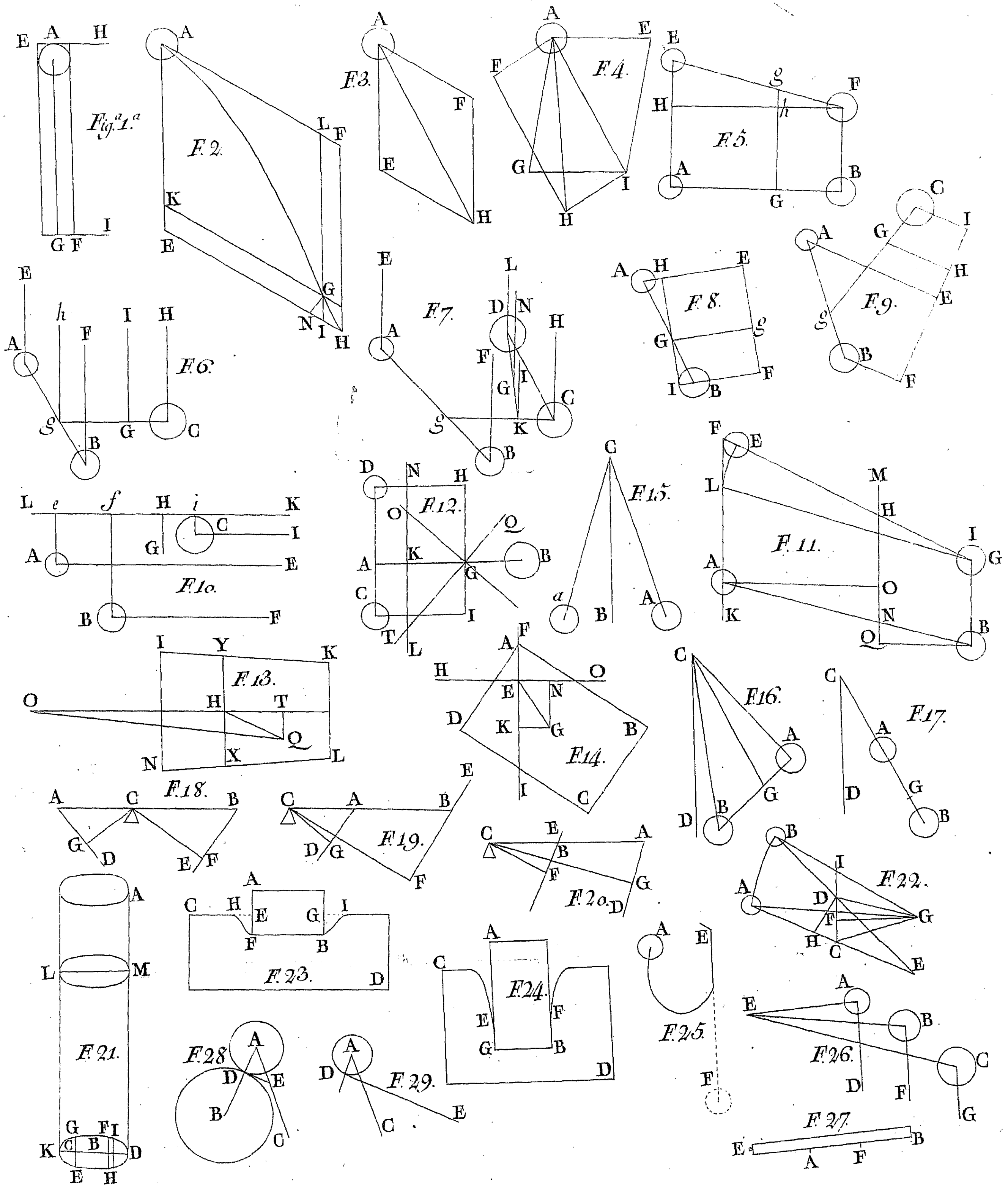
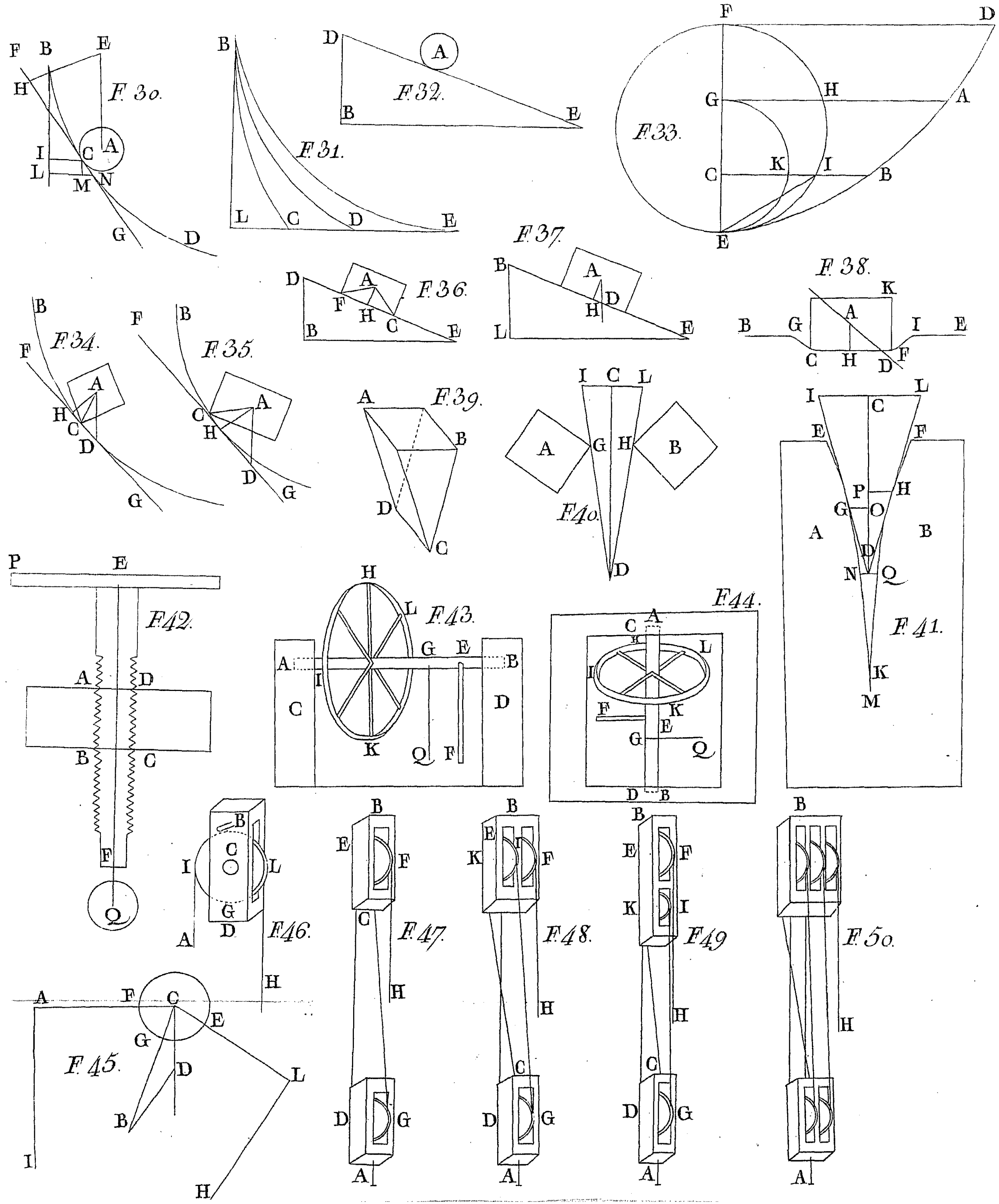
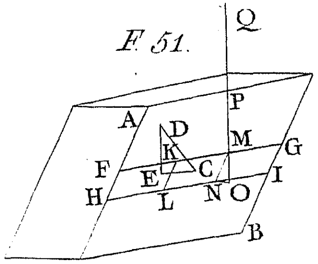
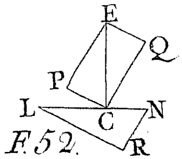


Fig.a 1.a
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
F. 15.
F. 16.
F. 17.
F. 18.
F. 19.
F. 20.
F. 21.
F. 22.
F. 23.
F. 24.
F. 25.
F. 26.
F. 27.
F. 28.
F. 29.

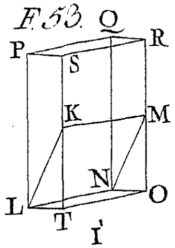

F. 30.
F. 31.
F. 32.
F. 33.
F. 34.
F. 35.
F. 36.
F. 37.
F. 38.
F. 39.
F. 40.
F. 41.
F. 42.
F. 43.
F. 44.
F. 45.
F. 46.
F. 47.
F. 48.
F. 49.
F. 50.



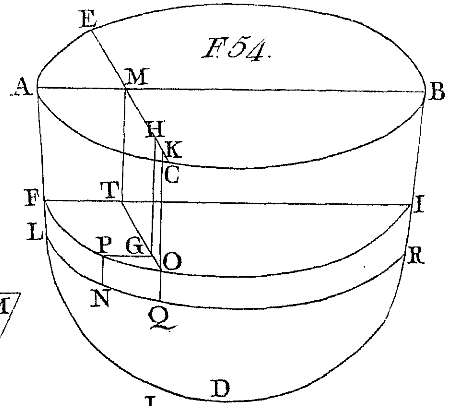
F. 51.



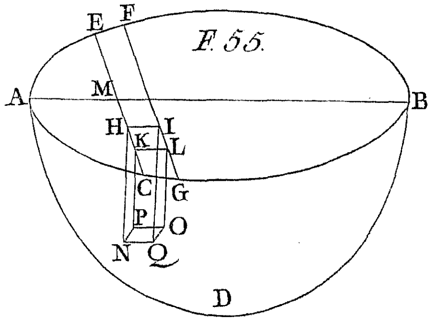
F. 52.



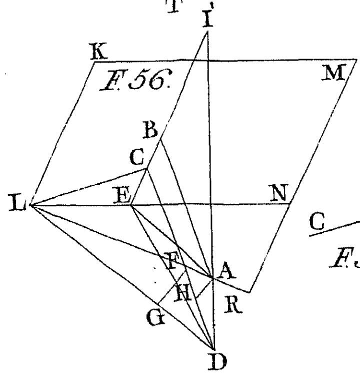
F. 53.



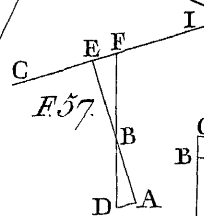
F. 54.



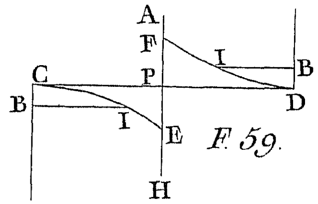
F. 55.



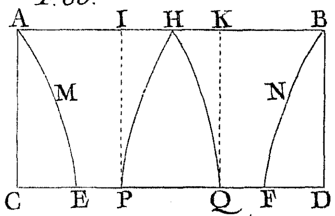
F. 56.



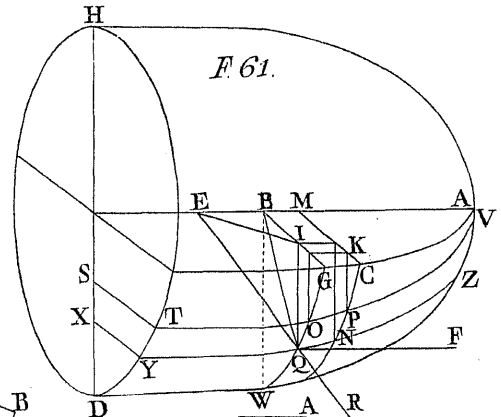
F. 57.



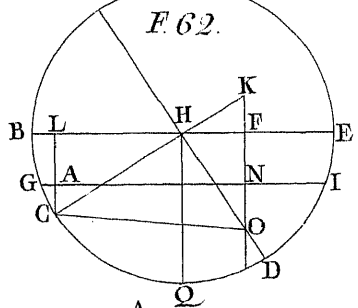
F. 59.



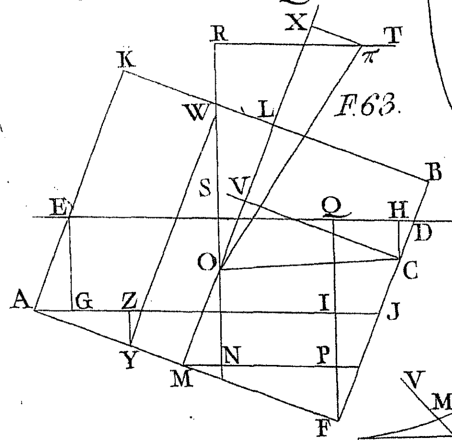
F. 60.



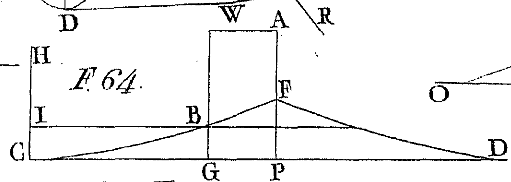
F. 61.



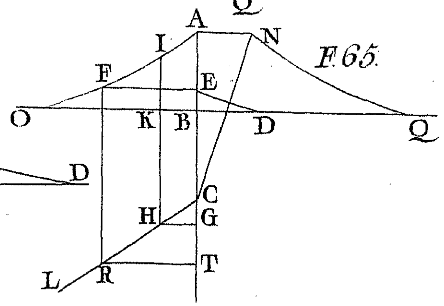
F. 62.



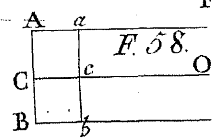
F. 63.



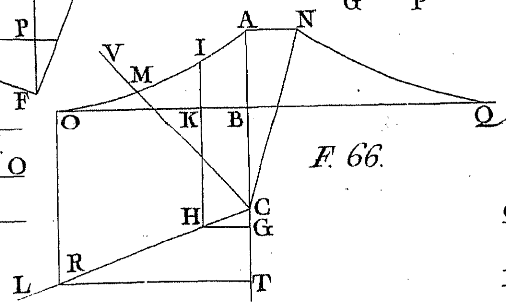
F. 64.



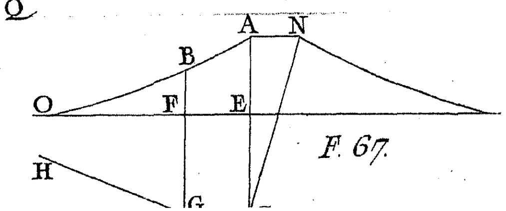
F. 65.



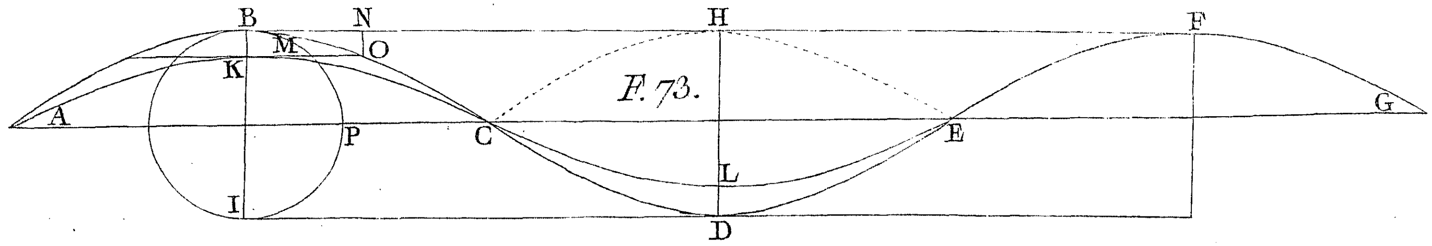
F. 58.

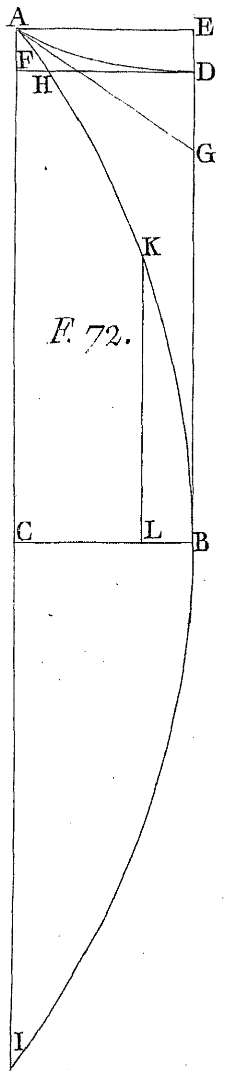


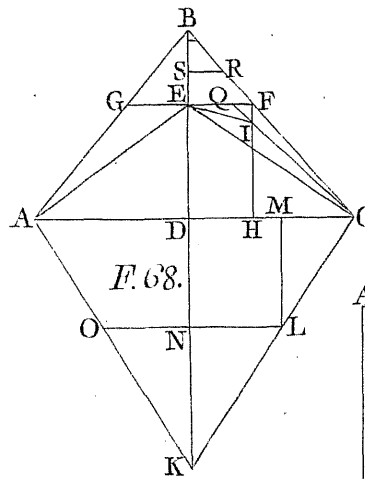
F. 66.

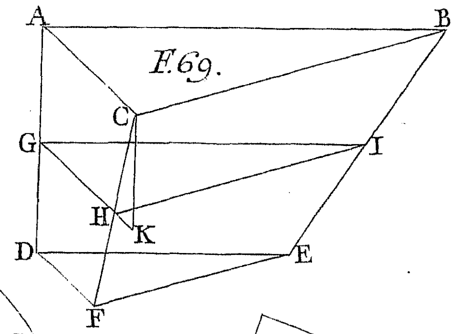


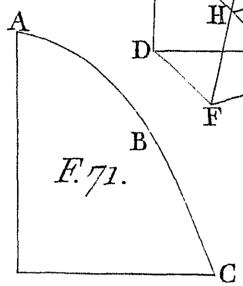
F. 67.

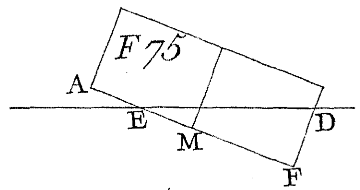

F. 73.
B N H F
M O
K
A P C E G
L
I D

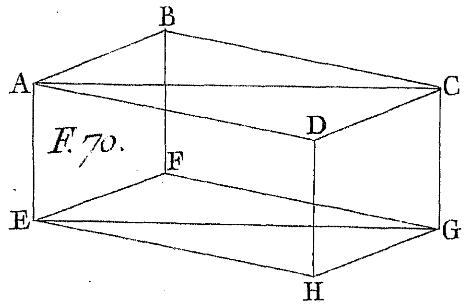

F. 72.
A E
F D
H
G
K
C L B
I

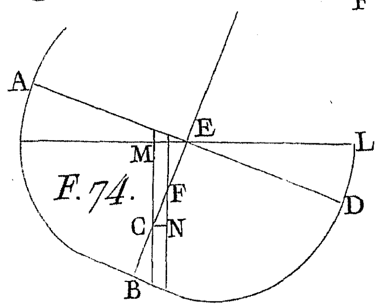

F. 68.
B
S R
G E Q F
I
A D H M C
O N L
K

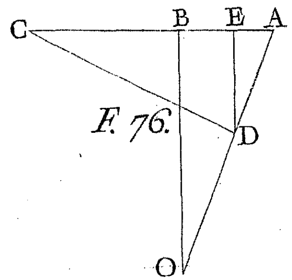

F. 69.
A B
C
G I
H K
D E
F

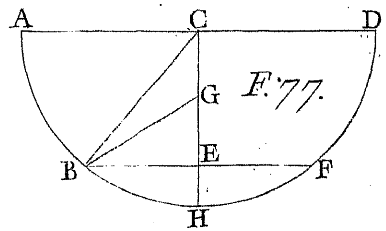

F. 71.
A
B
C

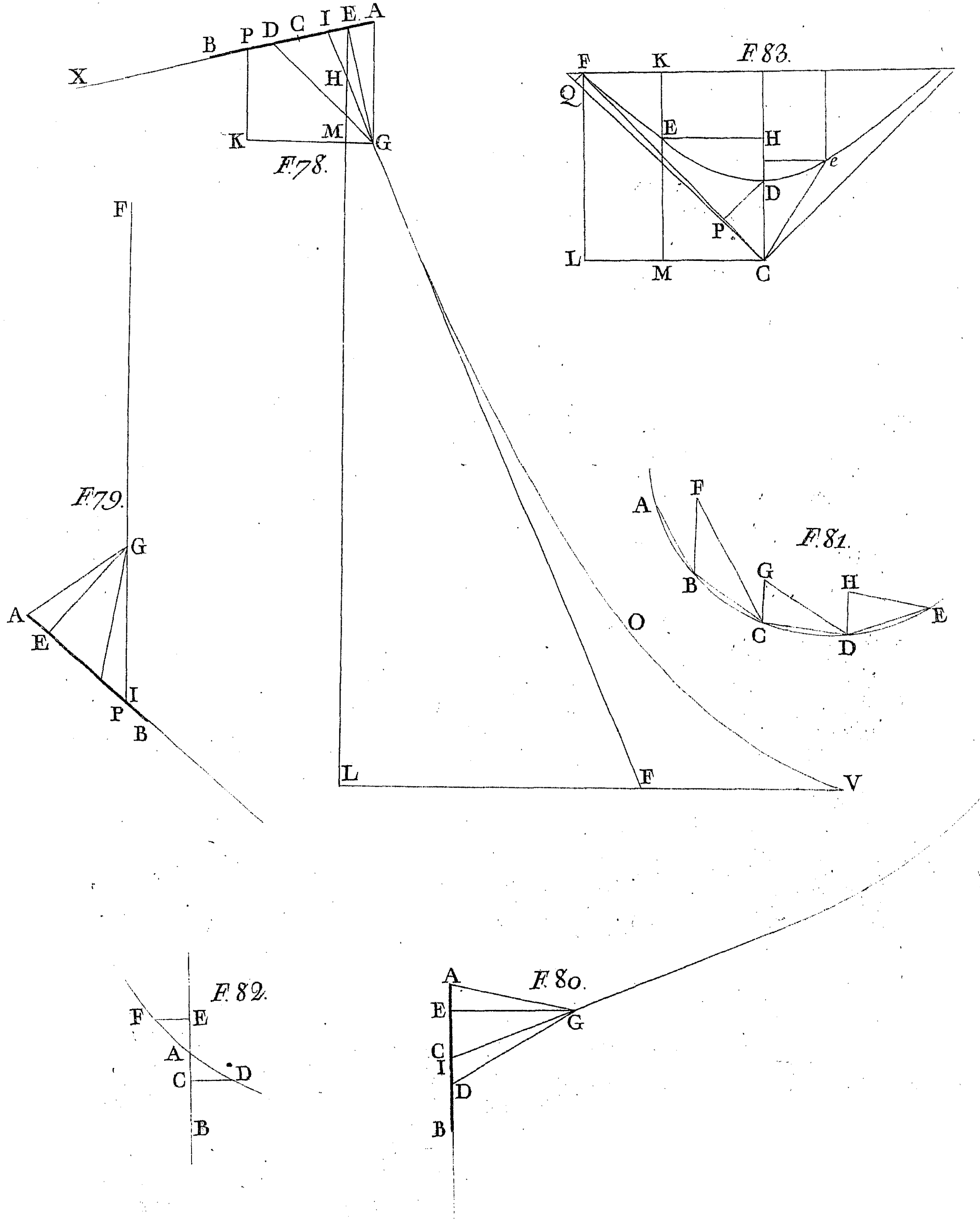

F. 75
A
E D
M
F


F. 70.
B
A C
D
F
E G
H


F. 74.
A
E
M L
F
C N D
B


F. 76.
C B E A
D
O


F. 77.
A C D
G
E
B F
H


X B P D C I E A
H
K M G
F. 78.
O
L F V
F K
F. 83.
Q
E H
e
D
P
L M C
F
F. 79.
G
A
E
I
P
B
A F
F. 81.
G H
B
C D E
F. 82.
F E
A
C D
B
A
F. 80.
E G
C
I
D
B