

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR EN LA INTERPRETACIÓN DE ERRORES DE LOS ALUMNOS EN ÁLGEBRA

José L. Huitrado y Nuria Climent

En este trabajo se exponen los resultados parciales de una investigación sobre el conocimiento profesional de los profesores evaluadores de olimpiadas matemáticas puesto en acción al analizar errores relativos al álgebra. A través de dos pruebas de interpretación de errores, y a partir de un análisis inspirado en la teoría emergente de los datos, obtuvimos dimensiones para la caracterización de saberes en la comprensión de los errores. En los resultados describimos los saberes de un profesor estrechamente relacionados con la práctica y con el conocimiento sobre el aprendizaje de los alumnos.

Términos clave: Álgebra; Conocimiento profesional del profesor; Error

Teacher's knowledge in the interpretation of student's errors on algebra

This paper presents the partial results of a research on the professional knowledge of mathematics olympiad evaluators teachers put into action when analyzing errors relating to algebra. By means of two tests on errors interpretation and by using analysis inspired by the grounded theory, we obtained dimensions for the characterization of knowledge in understanding about errors. In the results section, we describe a teacher's knowledge related to practice and knowledge about students' learning.

Keywords: Algebra; Error; Teachers' professional knowledge

Existen diversas conceptualizaciones del conocimiento profesional del profesor, que han influido en las aproximaciones metodológicas que se aplican en su estudio (Llinares, 1996). Los significados de términos como concepciones, creencias y conocimientos, y las relaciones entre éstos, determinan diferentes posturas que imprimen peculiaridad a la definición de este conocimiento y a la relevancia de sus componentes. La perspectiva del conocimiento del profesor, en

este trabajo, se sitúa en la línea del conocimiento en acción o saber práctico profesional (Azcárate, 2004) o el “knowing something” al que hacen referencia Cook y Brown (1999). Frente a planteamientos que intentan distinguir entre creencias, concepciones y conocimientos, o analizar la descomposición de éstos, nos interesa comprender la influencia de conocimientos y concepciones desde un punto de vista integrado (Thompson, 1992).

Por otro lado, reconocemos en el error un elemento medular en las propuestas constructivistas de enseñanza de las matemáticas, al ser reconocido como indicador de la comprensión del alumno. En este sentido, sostenemos que el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas con una concepción constructivista del aprendizaje, debe permitirles la comprensión de los errores de sus alumnos.

Reconocemos con Llinares (1996) la complejidad y naturaleza contextualizada del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y “con ello” la necesidad de nuevas formas de aproximarnos a su comprensión; nuestra pretensión es aportar elementos para el diseño de situaciones que permitan el desarrollo del conocimiento profesional para la comprensión de errores.

LOS ERRORES DE LOS ALUMNOS Y EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

En nuestra consideración, el error es un elemento inherente al proceso de aprendizaje, compartimos que “los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos” (Rico, 1998, pp. 76). La presencia constante y el estatus que se concede al error caracterizan la postura de enseñanza que compartimos en donde el error es un indicador del proceso de comprensión del alumno.

El sustento de un contexto positivo para el error como medio para enseñar (Astolfi, 1999) se construye a partir de las aportaciones de Bachelard y Piaget. Así, nuestra concepción sobre el aprendizaje considera que este no es una acumulación de conocimientos, sino que los conocimientos anteriores son cuestionados a partir de desequilibrios, lo que provoca su reorganización. Por su parte, Bachelard (1948) plantea el aprendizaje en términos de la superación de obstáculos epistemológicos, planteamiento que es recuperado en la teoría de las situaciones didácticas en donde el error está asociado a la existencia de un obstáculo (Brousseau, 1976).

Cada paradigma sobre la enseñanza y el aprendizaje supone una posición respecto de lo que son ambos procesos y, por tanto, también sobre el error. Algunos posicionamientos en los que se fundamenta nuestro trabajo son el error como: (a) evidencia de conocimiento, (b) producto de una manera de conocer, (c) evidencia de un proceso creativo y, (d) un medio para enseñar.

Por otro lado, los errores en los que se centra nuestro trabajo se refieren a la comprensión sobre las ecuaciones. Socas (2011) reconoce tres etapas de investigación de los errores en el álgebra. La primera etapa está caracterizada por el recuento de estos, su clasificación y asociación con causas relativas al contenido matemático (e.g. Rico, 1998). En la segunda etapa se reconoce el error como elemento natural del proceso de aprendizaje, intentando comprender el pensamiento de los alumnos. Y en la tercera etapa se trabaja en clasificar los errores y conocer su origen, favoreciendo procedimientos que ayudan a los alumnos a corregirlos (e.g. Palarea, 1998; Socas, 2007).

Varios planteamientos sustentan la necesidad de que los profesores interpreten de manera adecuada los errores de los alumnos (Astolfi, 1999; Rico, 1998). Sin embargo, se cuenta con poca información de cómo ir más allá de su identificación y clasificación. En la literatura no se evidencian estudios sobre el conocimiento de los profesores en el análisis de los errores.

Nuestro interés es estudiar la forma en la que los conocimientos y creencias orientan las acciones del profesor (Thompson, 1992). En ese sentido, concebimos el conocimiento profesional del profesor integrado por diferentes tipos de saberes que orientan su acción, un saber práctico que se fortalece en la atención a problemas profesionales (Azcarate, 2004). En términos de Cook y Brown (1999), nos referimos a lo que ellos denominan *knowing (something)*, el cual no es asumido como un conocimiento estático que puede sustentar, posibilitar o ser usado en la acción, sino que es acción misma. Para el caso de nuestro estudio consideramos los saberes en la acción de comprender los errores.

METODOLOGÍA

Nos propusimos comprender el conocimiento que ponen en juego los evaluadores de olimpiadas matemáticas al analizar errores relativos al álgebra. A partir de un paradigma interpretativo, realizamos un estudio de casos mediante el cual estudiamos a cuatro profesores evaluadores de las olimpiadas de matemáticas en Zacatecas. Aquí nos centraremos en el caso de uno de ellos, al que llamaremos Raúl.

Al ser nuestra investigación un estudio de casos exploratorio, aspira a abrir las puertas a estudios más profundos y favorecer el surgimiento de nuevas preguntas de investigación. El tratamiento de la información se realizó siguiendo un proceso inductivo inspirado en la teoría emergente de los datos. Los instrumentos de recogida de datos fueron una entrevista semi-estructurada y dos pruebas de análisis de errores. La entrevista tuvo como objetivo recoger datos generales sobre Raúl así como algunas nociones sobre los errores. La revisión de la literatura sobre los errores nos permitió la selección de los contenidos de las dos pruebas de análisis sobre los errores aplicadas en dos momentos, con una distancia de cinco semanas. La primera, al interpretar los errores en los procesos

de resolución de tres alumnos a un ejercicio de división de potencias: “Cuando $n = 81$, ¿Cuál es el valor de $\frac{n^{20}}{3^n}$?” En la figura 1 ilustramos el análisis realizado con la primera prueba de errores y en torno al proceso del alumno A. La segunda, al valorar siete respuestas erróneas a la resolución de una ecuación a través de la tarea de reconstrucción de los procesos seguidos por los alumnos para llegar a cada una de ellas.

Parte I

Cuando $n = 81$ $\frac{n^{20}}{3^n}$

• Esta diciendo que 81 a la 20ª potencia, sobre 3 a la 81ª potencia da:

$$81 \cdot 81 \cdot 81$$

$$\begin{array}{r} 81 \cdot 81 \\ 181 \\ 648 \\ \hline 6,561 \end{array}$$

Parte II

• También Podemos hacerlo por eliminación de Unidades.

$$\frac{n^{20}}{3^n} = \frac{\cancel{n}^{20}}{\cancel{3}^n} = \frac{20}{3}$$

Res la diferencia, por eliminación de unidades sería de $\frac{20}{3}$

Figura 1. Protocolo de resolución correspondiente al alumno A

La información se recabó a partir de pruebas escritas y grabaciones de audio, se transcribió y se procedió a la selección de las unidades de información. A partir de múltiples reflexiones sobre los datos obtenidos con cada uno de los instrumentos, fue posible construir una serie de dimensiones sobre la interpretación del error. El instrumento de análisis que obtuvimos se extrae de las respuestas de Raúl, de nuestro análisis como investigadores y de la literatura que hemos revisado (Astolfi, 1999; Cerdán 2008; Rico, 1998). Si bien no consideramos específicamente ninguna de las clasificaciones presentadas en

estos trabajos, no podemos negar su influencia en nuestra sensibilidad teórica (Muñoz-Catalán, 2012; Strauss y Corbin, 1994).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Raúl es licenciado en educación secundaria con especialidad en Matemáticas, actualmente cursando una maestría en docencia. Tiene una experiencia de cuatro años de ejercicio profesional en bachillerato y secundaria. Participa desde hace ocho años en la olimpiada estatal de matemáticas de primaria y secundaria de Zacatecas; en este evento ha ejercido como juez y asesor. Considera que los principales errores que se presentan en el álgebra se deben a la dificultad de interpretar las diferentes funciones de la literal y lo relaciona con la adquisición de reglas sin significado como las leyes de los signos o de los exponentes; afirma que los errores se asocian, de manera general, con la forma de desarrollar la enseñanza (entrevista inicial, 30/08/2011). Las dimensiones obtenidas mediante nuestro estudio se organizan en la tabla 1 y se explican brevemente a continuación.

Dimensión origen. En una concepción negativa del error se asocia al descuido del alumno (O-DC) o la ausencia de conocimiento (O-AC); en la concepción positiva del error, lo identificamos como conocimiento alternativo (O-CA).

Dimensión análisis. El análisis difiere por la profundidad con que se realice: el análisis superficial y desinteresado (A-SD) del que solo trata de encontrar el error o el análisis en busca de sentido (A-BS) del que se interesa por obtener información sobre la comprensión del alumno.

Dimensión propósito. Un propósito de identificación del error (P-IE) se relaciona con un análisis superficial y desinteresado (A-SD); mientras que la comprensión del error (P-CE) se relaciona con un análisis en búsqueda de sentido (A-BS).

Dimensión evidencia. Se distingue entre fijar la atención en el error de manera puntual (E-EP) (como cuando se observa la punta del iceberg) o apreciarlo en el contexto de todo el proceso de resolución (E-TP) (como cuando consideramos el iceberg completo).

Dimensión valoración. La consideración del error como un elemento puntual (E-EP), está asociada a una valoración en sí mismo, valoración absoluta en lo aislado (V-AA), que asigna una etiqueta rápida, acentuando más las semejanzas que las diferencias; se contrapone con la valoración relativa en el contexto (V-RC) que, en el reconocimiento de la diversidad, busca caracterizar detalladamente al error como un caso, si no único, sí particular, y cuya caracterización sólo está completa si se considera el proceso en el cual se presenta.

Dimensión referencia. En correspondencia con la de valoración. En una valoración absoluta y aislada (V-AA), se hace notar la diferencia entre el estado en que queda el proceso de resolución al momento de presentarse el error y el proceso que se considera idóneo, referencia de distancia al proceso esperado (R-DPE). En contraposición, en una valoración relativa en el contexto (V-RC), se aprecia el significado que le aporta el error a todo el proceso alternativo, referencia del sentido al proceso alternativo (R-SPA).

Tabla 1
Dimensiones que emergieron del análisis

Actitud		
Negativa. Aversión ante el error		Positiva. Aprecio por el error
Concepción del error		
Como fallo del alumno	Como fallo del procesamiento de enseñanza	Como indicador del saber del alumno
Origen del error		
Descuido	Ausencia de Conocimiento	Conocimiento alternativo
Análisis		
Superficial desinteresado		Búsqueda de sentido
Propósito del análisis		
Identificar el error		Comprender el error
Evidencia		
Error puntual. Como punta del iceberg		Todo el proceso. El iceberg en toda su extensión
Valoración		
Valoración absoluta del error en lo aislado		Valoración relativa en el contexto general del proceso
Referencia de valoración		
El error determina la distancia al proceso esperado		El error le da sentido al proceso alternativo

Saberes en la interpretación del error

Las dimensiones obtenidas y que consideramos determinadas por las actitudes y concepciones sobre el error, permiten iniciar la caracterización de lo que hemos denominado saberes en la comprensión sobre los errores. Los consideramos

absoluta en lo aislado (V-AA) que de manera inmediata le lleva a concluir que el alumno expresa que $\frac{81^{20}}{3^{81}} = 81^{12}$; la referencia es la distancia al proceso esperado (R-DPE) (lo que el alumno debió de hacer, lo que debió de escribir).

De manera similar en la apreciación siguiente.

Raúl: [O-DC-AC; R-DPE] Considero que el error surge al no visualizar que se trata de dos números que son uno múltiplo del otro elevado a la potencia 20 y 81 respectivamente.

Que el alumno no considere la expresión como un cociente de potencias, hace que Raúl asuma que el origen del error sea un descuido o una ausencia de conocimiento (O-DC-AV). Para Raúl, no visualizar esa posibilidad, es considerado como la causa del error y el referente vuelve a ser la distancia al proceso esperado (R-DPE).

Un segundo intento del alumno se presenta en la figura 1 como segunda parte de la resolución. Raúl identifica los siguientes errores:

Raúl: [O-DC; E-EP] En su segunda explicación interpreta el $\frac{n^{20}}{3n}$ en la que $3n$ es 3 veces n , pudo ser por la forma en la que se escribió.

La apreciación de Raúl se concentra en señalar el error en el cambio de 3^n por 3^n , considerando como evidencia el error puntual (E-EP) y asociándolo con la forma en que lo escribió, lo que interpretamos como la designación de origen de descuido del alumno (O-DC). Respecto de la respuesta (figura 3), Raúl declara lo siguiente.

Raúl: [E-EP; V-AA; R-DPE] Otro error es que en su respuesta habla de diferencia, y la forma en la que expresa su respuesta, ya que de acuerdo al lenguaje matemático no es posible expresar $\frac{20}{3}$ sin haber un número el cual sea elevado a la 20.

Res la diferencia, por eliminación de unidades sería de $\frac{20}{3}$

Figura 3. Expresión del resultado que propone el alumno

Nombrar “diferencia por eliminación de unidades” y expresar una potencia sin base, sólo con el exponente: $(\frac{20}{3})$, son señalados, en lo particular, como evidencia de error en lo puntual (E-EP) sin que muestre intención de buscar una relación entre ellos o con el contexto, la valoración es absoluta en lo aislado (V-

AA). En este caso, la referencia de la apreciación aparece explícita cuando Raúl expresa “de acuerdo con el lenguaje matemático” (refiriéndose a la cancelación de términos semejantes), coincidiendo con una referencia de distancia al proceso esperado (R-DPE).

El análisis, durante la segunda visita (5 semanas después), se orientó a identificar similitudes en las dificultades evidenciadas por los tres alumnos, es conveniente mencionar que este segundo análisis, lo realiza después de trabajar en la segunda parte de la prueba de análisis de errores, tarea que suponía la reconstrucción de los procesos seguidos por los alumnos para llegar a cada una de las respuestas presentadas.

Raúl comienza afirmando que se trata del mismo error (refiriéndose a escribir $3n$ en lugar de 3^n).

Raúl: [A-BS; SEDO] Aquí es lo mismo; es el mismo error, ¿no? ¿y aquí, qué multiplicó?... no, aquí ni siquiera la noción de potencia 3^n .

Por medio de un análisis en la búsqueda de sentido (A-BS), Raúl pasa de considerar que los alumnos A y C tienen un error común asociado a la escritura por descuido (cambiar 3^n por $3n$ a diferenciarlos respecto de su origen (SEDO): uno asociado a la escritura y otro a un problema conceptual, pues el alumno C multiplica 81×20 .

Raúl: [A-BS; SEDO] Aquí es lo mismo; es el mismo error, ¿no? ¿y aquí, qué multiplicó?... no, aquí ni siquiera la noción de potencia 3^n . [A-BS; SEDO] Aquí es lo mismo; es el mismo error, ¿no? ¿y aquí, qué multiplicó?... no, aquí ni siquiera la noción de potencia 3^n .

En un análisis en donde le pedimos afinar su apreciación, Raúl reconoce que no siempre es posible diferenciar un problema de escritura de uno conceptual (P-CE).

Raúl: [P-CE; E-TP; SRIP; SEDO; SRPA] Un problema de escritura nos puede llevar a pensar que es un problema conceptual.

En el siguiente fragmento argumenta que, puede ser que el alumno A considere otra alternativa, al notar que la primera estrategia requiere de mucho trabajo, y que al plantear el proceso algebraico, cometió un error.

$$\frac{n^{20}}{3^n} = \frac{\cancel{n^{20}}}{\cancel{3n}} = \frac{20}{3}$$

Figura 4. Detalle del cambio de $3n$ por de 3^n

Raúl: [O-CA; A-BS; SRPA] Aquí déjeme decirle que me atrevo a decir que fue de escritura y aquí está la escritura aquí (...) porque sabe qué significa el 20 aquí arriba y dice:

{A:} “¡ah, pues lo multiplico! hójole, ¿cuántas veces? pues 20”;

Ya cuando vio que era mucho dijo:

{A:} “no, mejor le busco otra forma algebraica”

Y aquí fue donde cometió el error de escritura, el concepto lo tiene pero no, hubo el error acá, en esta confusión.

Cuando Raúl regresa sobre los procesos en la búsqueda de sentido (A-BS) (SRPA), tiene la posibilidad de reconsiderar su percepción del error, donde la escritura parcial del desarrollo de la potencia, que en un principio consideró error, es muestra de conocimiento, aunque no coincida con el esperado (O-CA).

CONCLUSIONES

Las dimensiones obtenidas y su aportación a la caracterización de las categorías iniciales de los saberes en acción, puesto que la literatura no da cuenta de productos en esta línea, pueden ser útiles en el proceso de definición del conocimiento práctico profesional del profesor de matemáticas.

Nuestra investigación parte de considerar el saber integral que los profesores ponen en acción al analizar los errores; así podemos resaltar la interrelación que detectamos entre las dimensiones obtenidas. Reconocemos una relación interesante, que fundamenta la necesidad de considerar al error con una concepción positiva que detone una actitud en el mismo sentido; aunque no podemos afirmar que una buena actitud pueda potenciar el desarrollo de conocimientos, sí puede detonar la decisión de ponerlos en juego.

Los saberes identificados orientan a una acción positiva; esto es, saberes positivamente intencionados en comprender. Podrían considerarse como una amalgama de concepciones y actitudes positivas con unos conocimientos flexibles; saber intencionado por considerar que vale la pena analizar con detalle, saber interesado en descubrir lo que hay detrás de un error.

Los instrumentos empleados en este estudio sugieren características de situaciones potencialmente favorables para el desarrollo del conocimiento profesional del profesor en la comprensión sobre los errores.

REFERENCIAS

- Astolfi, J. P. (1999). *El “error”, un medio para enseñar*. Sevilla, España: Diada Editora.
- Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: en busca de estrategias y recursos. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 43-60). La Coruña, España: SEIEM.

- Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México DF, México: Siglo XXI Editores.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques [Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas]. En J. Vanhamme y W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* [El problema y la enseñanza de las matemáticas. Actas de la XXVIII reunión organizada por la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Educación Matemática] (pp. 101-117). Louvain la Neuve, Bélgica: Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.
- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis doctoral. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Cook, S. D. N. y Brown, J. S. (1999). Bridging epistemologies: the generative dance between organizational knowledge and organizational knowing. *Organization Science*, 10(4), 381-400.
- Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina y C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento Profissional dos professores de Matemática. Que Formação?* (pp. 47-82). Lisboa, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2012). *El desarrollo profesional de una maestra novel. Un estudio de caso en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las Matemáticas (Tomos I-V)*. Saarbrücken, Alemania: LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG.
- Palarea, M. (1998). *La adquisición de lenguaje algebraico y la detección de los errores comunes cometidos en el álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife, España: Universidad de la Laguna.
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática: errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación e historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). Tenerife, España: SEIEM.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.

- Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: an overview. En N. K. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

Este trabajo fue publicado originalmente como Huitrado, J. L. y Climent, N. (2013). Conocimiento profesional del profesor ante errores relativos al álgebra de los alumnos de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 327-336). Bilbao, España: SEIEM.

José L. Huitrado	Nuria Climent
Universidad Autónoma de Zacatecas	Universidad de Huelva
jlhuitrado@gmail.com	climent@uhu.es

Recibido: Septiembre de 2013. Aceptado: Octubre de 2013.

Handle: