

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**



**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA**

**SOBRE DIFUSIONES ORNSTEIN-UHLENBECK  
MULTIDIMENSIONALES Y TRANSFORMADAS DEL  
WIENER. APLICACIONES A LA ECOLOGIA**

**PATRICIA ROMAN ROMAN**

**TESIS DOCTORAL 1988**

17/70

BIBLIOTECA	
FACULTAD DE CIENCIAS	
GRANADA	
Estante	T
Tabla	17
Núm.	70

SOBRE DIFUSIONES ORNSTEIN-UHLENBECK MULTIDIMENSIONALES  
Y TRANSFORMADAS DEL WIENER. APLICACIONES A LA ECOLOGIA.

Realizado el acto público de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 22 de Septiembre de 1988, en la Universidad de Granada, ante el Tribunal formado por:

Presidente: Dr. D. ANTONIO PASCUAL ACOSTA

(Catedrático de la Universidad de Sevilla.  
Consejero de Educación de la Junta de Andalucía)

Vocales: Dr. D. LUIS FARRAS GUIJOSA

(Catedrático de la Universidad de Málaga)

Dr. D. ANDRES GONZALEZ CARMONA

(Profesor Titular de esta Universidad)

Dr. D. FABLO BOBILLO GUERRERO

(Catedrático de esta Universidad)

Secretario: Dra D<sup>a</sup> JOSEFA LINARES PEREZ

(Profesora Titular de esta Universidad)

obtuvo la calificación de

APTO CUM LAUDE



UNIVERSIDAD DE GRANADA  
FACULTAD DE CIENCIAS

DON JUAN DE DIOS PEREZ JIMENEZ, PROFESOR TITULAR  
Y SECRETARIO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA -  
UNIVERSIDAD DE GRANADA,

Núm. 1202

C E R T I F I C O: Que la presente Tesis -  
Doctoral corresponde a la presentada  
en esta Facultad por D<sup>a</sup> Patricia Ro-  
mán Román, que fué calificada con Ap-  
to "Cum laude" el día 22 de Septiem-  
bre de 1988 por el Tribunal corres-  
pondiente que fué aprobado en Comi-  
sión de Doctorado celebrada el día -  
15 de Septiembre de 1988, siendo el -  
tema " Sobre difusiones ornstein-uh-  
lenbeck multidimensionales y transfor-  
madas del Wiener. Aplicaciones a la  
Ecología".

Y para que conste y surta los efectos co-  
rrespondientes se extiende la presente certifica-  
ción con el visto bueno del Iltmo. Sr. Decano en  
Granada a veintiocho de octubre de mil novecien-  
tos ochenta y ocho.

Vº. Bº.

EL DECANO,

*Carb...*



*J. D. Pérez*

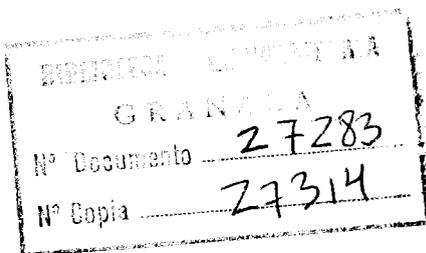
**SOBRE DIFUSIONES ORNSTEIN-UHLENBECK MULTIDIMENSIONALES Y  
TRANSFORMADAS DEL WIENER. APLICACIONES A LA ECOLOGIA.**

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Fecha 4 NOV. 1988

SALIDA NUM. 1202



Memoria que para optar al grado de  
Doctor en Estadística presenta Patricia  
Román Román.

Vº Bº

EL DIRECTOR DE LA TESIS

Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez

DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA

UNIVERSIDAD DE GRANADA



**INDICE**

## INDICE

INTRODUCCION.....	1
CAPITULO I. PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK	
. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck como ampliacion del movimiento Browniano.....	7
. Caracterización del proceso de Ornstein-Uhlenbeck como Markoviano, Gaussiano y estacionario.....	14
. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante.....	20
. Construcción del MOU(Ornstein-Uhlenbeck multivariante).....	22
. Modelo de multi-urnas de Ehrenfest.....	23
- Analogía con el Teorema Central del Límite.....	26
- Convergencia de distribuciones finito-dimensionales.....	27
. Variaciones y generalizaciones del proceso clasico de Ehrenfest.....	28
- Modelo básico.....	28
- Resultados de convergencia débil.....	30
- Extensión de resultados de convergencia débil a clases de procesos discretos en el tiempo.....	32
- Caso particular: Modelo de urnas de Iglehart.....	34
CAPITULO II. MODELO DE ECOLOGIA	
. Introducción.....	37
. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante.....	37

- Invarianza del modelo.....	40
. Inferencia.....	42
. "Home range" de cada animal.....	52
. Interacción territorial.....	58
- Interacción estática.....	58
- Interacción dinámica.....	65
. Tests de independencia de conjuntos de variables.....	66
. Modelo lineal.....	76

CAPITULO III. TIEMPOS DE PRIMER PASO

. Introducción.....	83
. Función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso Wiener.....	88
. Transformaciones al proceso Wiener.....	91
. Aplicaciones	
A) Obtención de la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso de Wiener a través de transformaciones de barreras, para las cuales es conocida la función de densidad de proba- bilidad de tiempo de primer paso para algun proceso de difusión transformado del Wiener.....	94

B) Obtención de la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para procesos transformados del Wiener a través de barreras transformadas, basandonos en la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso de Wiener a través de barreras particulares, para las cuales dichas funciones son conocidas.....	95
- Proceso de Ornstein-Uhlenbeck.....	100
- Proceso logarítmico-normal.....	102
APENDICE I. Programas de ordenador.....	105
APENDICE II. Logaritmo de una matriz.....	128
BIBLIOGRAFIA.....	134

## INTRODUCCION

El movimiento de pequeñas partículas microscópicas en suspensión líquida fué observado por el botánico inglés Robert Brown en 1826. Al movimiento caótico de cada partícula se le llamó movimiento Browniano y a una partícula, realizando tal movimiento, partícula Browniana.

Este movimiento es el resultado de las colisiones de la partícula con las moléculas del fluido en el que está inmersa. La partícula, en concreto, es mucho más grande y pesada que las moléculas colindantes del fluido, de modo que cada colisión tendrá un efecto imperceptible; sin embargo, la superposición de muchas interacciones produce un efecto observable.

Las colisiones moleculares de una partícula Browniana ocurren tan rápidamente y con tanta frecuencia que los pequeños cambios en la trayectoria de la partícula causados por cada impacto simple no son percibidos por el observador y, por tanto, la trayectoria exacta de la partícula debe ser descrita estadísticamente.

En 1860, Wiener propone la primera explicación del fenómeno, muy próxima ya a la idea actual.

Diversos autores, tales como Smoluchovski, Langevin y otros, continuaron su estudio, y fueron Ornstein y Uhlenbeck los que, en 1930, establecieron una nueva teoría del Movimiento Browniano mediante el proceso de Ornstein-Uhlenbeck referido a la velocidad de la partícula Browniana. A partir de 1943, con el trabajo de Doob, dicho proceso se consideró dentro de la Teoría General de Procesos Estocásticos, dejando atrás su entorno físico; desde entonces, no han dejado de producirse progresos en el estudio de su teoría.

En el Capítulo I de esta Memoria se estudia primero el proceso de Ornstein-Uhlenbeck de la misma forma en que surgió, es decir, como

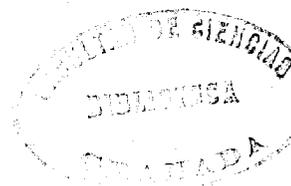
ampliación del movimiento Browniano, para más tarde dar definiciones y caracterizaciones de dicho proceso tanto en el caso univariante como multivariante.

Sin embargo, el objetivo principal del Capítulo será el estudio de la obtención del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante, como difusión que es, por medio del paso al límite de modelos probabilísticos discretos multivariantes, lo cual no es más que la extensión al proceso de Ornstein-Uhlenbeck de la idea ya conocida de obtener el Wiener unidimensional a través de esquemas discretos de recorridos aleatorios. Los modelos probabilísticos discretos multivariantes que estudiaremos serán el modelo de multi-urnas de Ehrenfest y algunas variaciones y generalizaciones del proceso clásico de Ehrenfest, que como caso particular incluye el modelo de urnas de Iglehart.

Es de destacar también las aplicaciones de las difusiones en general, y del proceso de Ornstein-Uhlenbeck en particular, en diversos campos tales como: Economía -Tinter & Segunta (1972); Gutiérrez Jáimez (1981)-, Biología -Nobile, Ricciardi y Sacerdote (1985)-, en Energía Solar -Haslett (1979)-, en Ecología -Dunn & Gipson (1977) y Dunn & Brisbin (1985)-.

Nos centraremos en el Capítulo II de esta Memoria en el estudio de un modelo de Ecología basado en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, y para ello será necesario conocer resultados de Inferencia que permitan estimar los modelos para, más tarde, efectuar tests de hipótesis en base a muestras observadas.

Estas muestras se tomarán mediante "hojas de datos" referidas a la posición de los animales a través del tiempo, medidas en instantes discretos y, distinguiendo la observación inicial de las restantes, en cada una de las hojas.



Supondremos dos casos:

- A) Las observaciones iniciales de cada hoja de datos serán conocidas o fijadas por nosotros.
- B) Las observaciones iniciales de cada hoja de datos serán desconocidas y se observarán en el instante de iniciar el muestreo.

Dependiendo de cada caso, las estimaciones por máxima verosimilitud de los parámetros del modelo serán estudiadas. Hay que notar que en dicho estudio se han utilizado derivación de matrices y productos de Kronecker.

En el Apéndice I de esta Memoria aparecen programas de ordenador para el calculo de estas estimaciones. El primer programa que presentamos es para el caso A) y fijamos el número máximo de hojas de datos y de observaciones sucesivas de cada hoja en diez y el número de animales en dos. Estos datos pueden modificarse siempre que lo admita la capacidad del ordenador, ya que al utilizar productos de Kronecker las dimensiones aumentan mucho.

Notemos que la suposición de que el número de animales sea dos no es demasiado restrictiva, ya que el estudio posterior de problemas tales como territorio de un animal o interacción se realizará para el caso de uno y dos animales respectivamente.

El segundo programa que presentamos incluye los casos A) y B) y permite dimensionar numéricamente las matrices en base a los datos que tengamos y siempre atendiendo a las limitaciones de ordenador que ya hemos comentado.

En el Apéndice II de esta Memoria hacemos un estudio del logaritmo de una matriz que aparecerá en la Inferencia del modelo usado.

Una vez conocidos los parámetros del modelo estudiamos propiedades en el contexto ecológico tales como: "home range" de un animal e interacción

entre animales.

Dentro de la interacción distinguimos dos casos:

- Interacción estática, para cuyo estudio hemos definido un Coeficiente de Interacción Estática que mide el grado de solapamiento de los territorios para cada par de animales. Calculamos además el valor de dicho coeficiente para unos datos concretos.
- Interacción dinámica, cuyo estudio descomponemos en dos: un test de independencia para conjuntos de variables y un test para la matriz de un modelo lineal adecuado.

Por último, el problema de determinar tiempos de primer paso a través de barreras móviles para procesos de difusión y otros procesos de Markov surge en modelos de muy variados campos de investigación. Así, en poblaciones genéticas -Ewens (1979)- siendo  $X(t)$  el número de una cierta clase de genes en el tiempo  $t$  de una determinada población con un total de  $N(t)$  genes, el cálculo del tiempo en que  $X(t)$  alcanza por primera vez a  $N(t)$ , llamado tiempo de fijación de dicho gen en la población; en Ecología, la obtención del tiempo de primer paso de animales por determinadas zonas; en Estadística, la determinación del tiempo de primer paso de un proceso de Wiener a través de ciertas barreras móviles, que surge asintóticamente en Análisis Secuencial (Darling and Siegert (1953)) y para calcular la potencia de tests estadísticos (Durbin (1971)).

Para el proceso de Wiener estándar unidimensional que parte del punto  $x_0=0$  en el tiempo inicial  $t_0=0$  se conocen las funciones de densidad de tiempo de primer paso para barreras constantes y lineales en el tiempo.

Además, diversos autores -Park & Paranjape (1974) y Ricciardi, Sacerdote y Sato (1984)- han dado ecuaciones integrales para la función de

densidad de tiempo de primer paso de un proceso de difusión a través de una función continua con derivada acotada. Un estudio detallado aparece en el Capítulo III de esta Memoria.

Utilizando procesos de difusión, que se obtienen como transformaciones del Wiener -Ricciardi (1976)-, podemos obtener funciones de densidad de tiempos de primer paso para procesos transformados del Wiener a través de barreras transformadas, y funciones de densidad de tiempo de primer paso para el Wiener a través de barreras que no cumplan las condiciones dadas para verificar las ecuaciones integrales citadas.

En concreto, nos hemos centrado en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y Log-normal unidimensionales y hemos obtenido expresiones concretas para las funciones de densidad de tiempos de primer paso a través de ciertas barreras.

Queda abierto el estudio posterior orientado a generalizar todo lo realizado en este último Capítulo a los casos bidimensional y multidimensional.

Es nuestro propósito también aplicar la Inferencia dada en el Capítulo II a otros datos reales.

**CAPITULO I**

**PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK**

El objetivo principal de este Capitulo es el estudio de la obtención del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante por medio del paso al límite de modelos probabilísticos discretos multivariantes, lo cual es un problema estrictamente probabilístico y que se trata con herramientas tales como convergencia débil de procesos.

Esta idea no es más que la extensión al proceso de Ornstein-Uhlenbeck de la idea ya conocida de obtener el Wiener unidimensional a través de esquemas discretos de recorridos aleatorios que, por paso al límite, bajo determinadas hipótesis, generan las ecuaciones de Kolmogorov del Wiener (véase Cox-Miller (1967) ó Gutiérrez Jáimez, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1971).

Vamos a citar algunas definiciones y caracterizaciones del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, tanto en el caso univariante como multivariante, antes de estudiarlo como proceso límite.

### El proceso de Ornstein-Uhlenbeck como ampliación del movimiento Browniano.

El proceso de movimiento Browniano se construyó como un modelo para una partícula microscópica en suspensión líquida. Sin embargo, el modelo no se adapta totalmente a la realidad. Esto es debido a la suposición de independencia de los incrementos en el desplazamiento, con lo que se ignoran los efectos de la velocidad de la partícula al comienzo del periodo incremental de tiempo. Se pueden hacer mejoras de la siguiente forma:

Sea  $V(t)$  la velocidad de una partícula de masa  $m$  suspendida en un líquido. Sea  $\Delta V = V(t+\Delta t) - V(t)$ , de modo que  $m\Delta V$  es la variación en el momento de inercia de la partícula durante el tiempo  $\Delta t$ . La ecuación

básica es:

$$m\Delta V = -\beta V \Delta t + \Delta M \quad (1.1)$$

donde  $-\beta V$  es la fuerza de resistencia de la viscosidad, de modo que  $-\beta V \Delta t$  es la pérdida en momento de inercia debida a fuerzas viscosas durante  $\Delta t$ ;  $\Delta M$  es la transferencia de momento de inercia debida al bombardeo molecular de la partícula durante el tiempo  $\Delta t$ .

Sea  $M(t)$  la transferencia de momento hasta el tiempo  $t$  y tomamos  $M(0)=0$ . Suponemos que:

- i)  $M(t+\Delta t) - M(t)$  es independiente de  $\mathcal{F}\{M(\tau), \tau \leq t\}$
- ii) la distribución de  $\Delta M$  depende sólo de  $\Delta t$ .
- iii)  $M(t)$  es continua en  $t$ .

Estas tres condiciones caracterizan a  $M(t)$  como un movimiento Browniano. La presencia de tendencia en  $M(t)$  nos llevaría a incluir un término  $\mu \Delta t$  en el lado derecho de la igualdad en la ecuación (1.1). Tal término correspondería a un campo de fuerza constante y, puede ser útil, por ejemplo, para considerar un campo gravitatorio. Sin embargo, supondremos que no existe tal campo de fuerza constante y tomamos  $EM(t)=0$ .

Si tomamos  $EM^2(t) = \sigma^2 t$ , se tendrá  $M(t) = \sigma X(t)$ , donde  $X(t)$  es un movimiento Browniano normalizado y la ecuación (1.1) quedará de la siguiente forma:

$$m\Delta V = -\beta V \Delta t + \sigma \Delta X \quad (1.2)$$

Dividiendo por  $\Delta t$  y tomando límites cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  se llega a la ecuación de Langevin

$$m \frac{dV}{dt} = -\beta V + \sigma \frac{dX}{dt} \quad (1.3)$$

Sin embargo, esta ecuación no tiene sentido ya que  $\frac{dX}{dt}$  no existe en ningún punto. (Las trayectorias del Wiener no son diferenciables en ningún punto, con probabilidad uno).

Vamos a realizar algunas transformaciones en (1.3)

Dividimos por  $m$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\beta V}{m} + \frac{\sigma}{m} \frac{dX}{dt}$$

Multiplicamos por  $e^{\alpha t}$ , donde  $\alpha = \beta/m$

$$e^{\alpha t} \frac{dV}{dt} = -\alpha e^{\alpha t} V + e^{\alpha t} \frac{\sigma}{m} \frac{dX}{dt}$$

de donde

$$e^{\alpha t} \frac{dV(t)}{dt} + \alpha e^{\alpha t} V(t) = e^{\alpha t} \frac{\sigma}{m} \frac{dX}{dt}$$

y dado que  $\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} V(t)) = e^{\alpha t} \frac{dV(t)}{dt} + \alpha e^{\alpha t} V(t)$ , queda

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} V(t)) = \gamma e^{\alpha t} \frac{dX}{dt}$$

donde  $\alpha = \beta/m$  y  $\gamma = \sigma/m$ .

Suponemos ahora que  $V(0)=0$  e integramos desde 0 hasta  $t$

$$e^{\alpha t} V(t) = \gamma \int_0^t e^{\alpha \tau} dX(\tau)$$

Como  $d(e^{\alpha \tau} X(\tau)) = e^{\alpha \tau} dX(\tau) + \alpha e^{\alpha \tau} X(\tau)$ , se tiene que

$$\int_0^t e^{\alpha \tau} dX(\tau) = e^{\alpha t} X(t) - \alpha \int_0^t e^{\alpha \tau} X(\tau) d\tau$$

Por tanto

$$e^{\alpha t} V(t) = \gamma e^{\alpha t} X(t) - \gamma \alpha \int_0^t e^{\alpha \tau} X(\tau) d\tau$$

Ahora la integral que aparece es, para cada  $\omega$ , la integral de una función continua (las trayectorias del Wiener son continuo-muestrales c.s.) que está perfectamente definida.

Vamos a obtener una expresión para  $V(t)$

$$e^{\alpha t} V(t) = \gamma e^{\alpha t} \left[ X(t) - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} X(\tau) d\tau \right]$$

Teniendo en cuenta que  $X(0)=0$ , la expresión entre corchetes es el



desarrollo por partes de la integral

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} dX(\tau)$$

Por tanto

$$V(t) = \gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} dX(\tau)$$

y así,  $V(t)$  está bien definido y es un proceso con trayectorias continuas.

Definición 1. -

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $V(t)$  normalizado a cero en  $t=0$  se define como

$$V(t) = \gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} dX(\tau)$$

donde la integral es el límite de las sumas correspondientes para cada trayectoria.

Proposición. -

$V(t)$  es un proceso Gaussiano con covarianza

$$EV(s)V(t) = \rho(e^{-\alpha|s-t|} - e^{-\alpha(s+t)})$$

donde  $\rho = \gamma^2 / 2\alpha$ .

Dem. -

El que  $V(t)$  sea Gaussiano se deduce por ser límite de sumas

$$\sum_k \varphi(t_k) \Delta_k X$$

donde  $\Delta_k X = X(t_{k+1}) - X(t_k)$  son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas.

Supongamos el caso  $s > t$ , tomamos

$$0 = t_0 < \dots < t_n = t < t_{n+1} < \dots < t_m = s$$

y se tiene

$$V(s) \cong \gamma \sum_0^m e^{-\alpha(s-t_k)} \Delta_k X$$

$$V(t) \cong \gamma \sum_0^n e^{-\alpha(t-t_k)} \Delta_k X$$

$$EV(s)V(t) \cong E \left[ \gamma^2 \left( \sum_0^m e^{-\alpha(s-t_k)} \Delta_k X \right) \left( \sum_0^n e^{-\alpha(t-t_k)} \Delta_k X \right) \right] =$$

$$= \gamma^2 E \left[ \sum_0^n \left[ e^{-\alpha(t-t_k)} \Delta_k X \left[ \sum_0^m e^{-\alpha(s-t_k)} \Delta_k X \right] \right] \right]$$

Dado que  $E(\Delta_k X)(\Delta_j X) = 0$  si  $k \neq j$  y  $E(\Delta_k X)^2 = t_{k+1} - t_k$ , se obtiene

$$EV(s)V(t) \cong \gamma^2 \sum_0^n e^{-\alpha(s+t-2t_k)} (t_{k+1} - t_k) =$$

$$= \gamma^2 \sum_0^n e^{-\alpha(s+t)} e^{2\alpha t_k} (t_{k+1} - t_k)$$

y tomando límites

$$EV(s)V(t) = \gamma^2 e^{-\alpha(s+t)} \int_0^t e^{2\alpha \tau} d\tau = \gamma^2 e^{-\alpha(s+t)} \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1) =$$

$$\rho \left[ e^{-\alpha(s-t)} - e^{-\alpha(s+t)} \right]$$

En el caso  $s < t$ , se obtiene

$$EV(s)V(t) = \rho \left[ e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(s+t)} \right]$$

Y uniendo ambos casos

$$EV(s)V(t) = \rho \left[ e^{-\alpha|s-t|} - e^{-\alpha(s+t)} \right]$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $EV(t) \xrightarrow{2} \rho$ , de modo que  $V(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} V(\infty)$ , donde  $V(\infty)$  es  $N(0, \rho)$ . ¿Qué ocurriría si el proceso comenzara con esa distribución

límite?

La integración de la ecuación de Langevin da lugar a

$$e^{\alpha t} V_1(t) - V_1(0) = \gamma \int_0^t e^{\alpha \tau} dX(\tau)$$

$$e^{\alpha t} V_1(t) - V_1(0) = \gamma e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} dX(\tau)$$

de donde

$$V_1(t) = e^{-\alpha t} V_1(0) + \gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} dX(\tau)$$

siendo

$$V(t) = \gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} dX(\tau)$$

### Definición 2. -

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario se define como

$$Y(t) = V(t) + e^{-\alpha t} V_1(0)$$

donde  $V_1(0)$  es  $N(0, \rho)$  e independiente de  $\mathcal{F}\{V(t); t \geq 0\}$ .

### Proposición. -

$Y(t)$  es un proceso Gaussiano estacionario con covarianza

$$\Gamma(s, t) = \rho e^{-\alpha |s-t|}$$

Dem. -

El que sea Gaussiano es análogo al caso anterior. Vamos a calcular la covarianza:

$$\begin{aligned} E[Y(s)Y(t)] &= E\left[ [V(s) + e^{-\alpha s} V_1(0)] [V(t) + e^{-\alpha t} V_1(0)] \right] = \\ &= E\left[ V(s)V(t) + e^{-\alpha t} V_1(0)V(s) + e^{-\alpha s} V_1(0)V(t) + e^{-\alpha(s+t)} V_1^2(0) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[V(s)V(t)] + E\left[e^{-\alpha(s+t)} V_1^2(0)\right] = \\
&= \rho \left[ e^{-\alpha|s-t|} - e^{-\alpha(s+t)} \right] + \rho e^{-\alpha(s+t)} = \rho e^{-\alpha|s-t|} \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Dos propiedades importantes del proceso de Ornstein-Uhlenbeck son las siguientes:

Propiedad 1. -

$Y(t)$  es un proceso de Markov con probabilidades de transición estacionarias, que tiene todas sus trayectorias muestrales continuas.

Dem. -

Esta propiedad se deduce del hecho de que para  $\tau \geq 0$ ,  $Y(t+\tau) - e^{-\alpha t} Y(\tau)$  es independiente de  $\mathcal{F}(Y(s), s \leq \tau)$ .

Para probar esto, basta con calcular la covarianza

$$E\left[(Y(t+\tau) - e^{-\alpha t} Y(\tau)) Y(s)\right] = \Gamma(t+\tau, s) - e^{-\alpha t} \Gamma(\tau, s) = 0 \quad \text{si } s \leq \tau$$

ya que si  $s \leq \tau$

$$\Gamma(t+\tau, s) = \rho e^{-\alpha|t+\tau-s|} = \rho e^{-\alpha t} e^{-\alpha(\tau-s)} = e^{-\alpha t} \Gamma(\tau, s)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
&P\left[Y(t+\tau) \in A \mid Y(\tau) = x, Y(s), s \leq \tau\right] = \\
&= P\left[Y(t+\tau) - e^{-\alpha t} Y(\tau) \in A - e^{-\alpha t} x \mid Y(\tau) = x, Y(s), s \leq \tau\right] = \\
&= P\left[Y(t+\tau) - e^{-\alpha t} Y(\tau) \in A - e^{-\alpha t} x \mid Y(\tau) = x\right] = P\left[Y(t+\tau) \in A \mid Y(\tau) = x\right]
\end{aligned}$$

y con esto queda demostrada la propiedad de Markov.

La variable aleatoria  $Y(t+\tau) - e^{-\alpha t} Y(\tau)$  es normal con media cero y

$$E\left[(Y(t+\tau) - e^{-\alpha t} Y(\tau))^2\right] =$$

$$E\left[\left[Y(t+\tau)-e^{-\alpha t}Y(\tau)\right]Y(t+\tau)\right]-E\left[e^{-\alpha t}Y(\tau)\left[Y(t+\tau)-e^{-\alpha t}Y(\tau)\right]\right]=$$

$$=E\left[Y(t+\tau)Y(t+\tau)-e^{-\alpha t}Y(\tau)Y(t+\tau)\right]=\rho-\rho e^{-\alpha t}e^{-\alpha t}=\rho(1-e^{-2\alpha t})$$

Así,  $P_t(\cdot/x)$  tiene distribución  $\mathcal{N}(e^{-\alpha t}x, \rho(1-e^{-2\alpha t}))$ .

La continuidad se deduce de la definición de  $V(t)$  en términos de una integral de  $X(t)$ .

### Propiedad 2. -

Si un proceso es Gaussiano, estacionario, de Markov y continuo en probabilidad, entonces es de la forma  $Y(t)+c$ , donde  $Y(t)$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

### Caracterización del proceso de Ornstein-Uhlenbeck como Markoviano, Gaussiano y estacionario.

Un proceso de Markov se define como un proceso estocástico con la propiedad de que para cualquier conjunto de  $n$  tiempos sucesivos (esto es,  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ) se cumple

$$P_{1/n-1}(y_n, t_n / y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}) = P_{1/1}(y_n, t_n; y_{n-1}, t_{n-1})$$

(Los subíndices indican el número de variables que se involucran:  $P_1$  (1 variable),  $P_{1/n-1}$  (1 variable condicionada a  $n-1$ )).

Es decir, la probabilidad condicionada en  $t_n$ , dado el valor  $y_{n-1}$  en  $t_{n-1}$ , está determinada unívocamente y no está afectada por cualquier conocimiento de los valores tomados en tiempos anteriores.

El ejemplo más antiguo y mejor conocido de un proceso de Markov en Física es el movimiento Browniano. Son de especial interés, procesos estocásticos que sean a la vez Markovianos y estacionarios, sobre todo

para describir fluctuaciones de equilibrio. Supongamos que en un sistema físico aislado cerrado se tiene una cierta cantidad o conjunto de cantidades  $Y(t)$  que se pueden tratar como un proceso de Markov. Cuando tal sistema está en equilibrio,  $Y(t)$  es un proceso de Markov estacionario. En particular,  $P_1$  es independiente del tiempo y será la distribución de equilibrio de  $Y(t)$ .

La velocidad vertical de una partícula Browniana en un campo gravitatorio homogéneo es un proceso estacionario, sin embargo no lo es su posición.

Para procesos de Markov estacionarios las probabilidades de transición  $P_{1/1}$  no dependen de los dos tiempos particulares, sino sólo del intervalo de tiempo. Por ello, introducimos la siguiente notación

$$P_{1/1}(y_2, t_2 / y_1, t_1) = T_\tau(y_2 / y_1) \quad \text{con } \tau = t_2 - t_1$$

La ecuación de Chapman-Kolmogorov que, en general, es

$$P_{1/1}(y_3, t_3 / y_1, t_1) = \int P_{1/1}(y_3, t_3 / y_2, t_2) P_{1/1}(y_2, t_2 / y_1, t_1) dy_2$$

ahora para  $\tau, \tau' > 0$ , queda

$$T_{\tau+\tau'}(y_3 / y_1) = \int T_{\tau'}(y_3 / y_2) T_\tau(y_2 / y_1) dy_2$$

Considerando la integral como producto de dos matrices se tiene

$$T_{\tau+\tau'} = T_{\tau'} T_\tau \quad (\tau, \tau' > 0)$$

El ejemplo más conocido de un proceso de Markov estacionario es el Proceso de Ornstein-Uhlenbeck definido por

$$P_1(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} y_1^2\right)$$

$$T_\tau(y_2 / y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2\tau})}} \exp\left[-\frac{(y_2 - y_1 e^{-\tau})^2}{2(1-e^{-2\tau})}\right]$$



Este proceso se construyó originalmente para describir el comportamiento estocástico de la velocidad de una partícula Browniana.

Claramente tiene media cero y la función de autocorrelación es

$$k(\tau) = \left[ \frac{\text{Cov}(X(t), X(t+\tau))}{\sqrt{\text{Var } X(t)} \sqrt{\text{Var } X(t+\tau)}} \right] = e^{-\tau}$$

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es estacionario, Gaussiano y Markoviano. El Teorema de Doob establece que este es, esencialmente, el único proceso con esas tres propiedades. "Esencialmente" significa que se permiten transformaciones lineales de "y" y de "t" y habrá otros procesos, aunque triviales, con esas propiedades. Veamos la demostración.

Sea  $Y(t)$  un proceso de Markov, Gaussiano y estacionario. Por tanto, podemos asegurar que

$$P_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \quad \text{salvo transformaciones lineales}$$

Las probabilidades de transición son Gaussianas y tienen, por tanto, la forma general:

$$T_\tau(y_2/y_1) = D \exp\left[-\frac{1}{2} (Ay_2^2 + 2By_2y_1 + Cy_1^2)\right]$$

donde A, B, C y D son funciones de  $\tau$ .

Imponiendo

$$\int T_\tau(y_2/y_1) dy_2 = 1$$

se deduce que

$$D = \sqrt{A/2\pi} \quad C = B^2/A$$

En efecto

$$\int D \exp\left(-\frac{1}{2} (Ay_2^2 + 2By_2y_1 + Cy_1^2)\right) dy_2 = 1$$

se toma  $C = B^2/A$  para obtener un cuadrado perfecto

$$\int D \exp\left(-\frac{1}{2} (\sqrt{A} y_2 + \sqrt{C} y_1)^2\right) dy_2 = 1$$

y dado que

$$\int \exp\left(-\frac{1}{2} (\sqrt{A} y_2 + \sqrt{C} y_1)^2\right) dy_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{A}}$$

se obtiene que  $D = \sqrt{A/2\pi}$ .

Por otra parte, imponiendo que

$$\int T_{\tau}(y_2/y_1) P_1(y_1) dy_1 = P_1(y_2)$$

se deduce que  $B^2 = A(A-1)$ .

En efecto, se tiene

$$\int T_{\tau}(y_2/y_1) P_1(y_1)/P_1(y_2) dy_1 = 1$$

es decir,

$$\int D \exp\left[-\frac{1}{2} (Ay_2^2 + 2By_2y_1 + Cy_1^2)\right] \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2} y_1^2\right] 2\pi \exp\left[\frac{1}{2} y_2^2\right] dy_1 = 1$$

$$\int D \exp\left[-\frac{1}{2} \left[(A-1)y_2^2 + 2By_2y_1 + (C+1)y_1^2\right]\right] dy_1 = 1$$

Para conseguir un cuadrado perfecto, tomamos  $B = \sqrt{A-1} \sqrt{C+1}$ , es decir  $B^2 = (A-1)(C+1)$ .

En este caso, la integral queda

$$D \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{C+1}} = 1$$

Luego  $\sqrt{C+1} = D \sqrt{2\pi}$ ,  $C+1 = D^2(2\pi)$ ,  $C+1 = \frac{A}{2\pi} 2\pi = A$ , y por tanto  $B^2 = A(A-1)$ .

El parámetro A, aún desconocido, se puede expresar en términos de la función de autocorrelación, igualmente desconocida, usando

$$k(\tau) = \iint y_1 y_2 T_{\tau}(y_2/y_1) P_1(y_1) dy_1 dy_2 \quad (\tau \geq 0)$$

lo cual nos lleva a que  $A = (1-k^2)^{-1}$ .

En efecto, sustituyendo queda

$$k(\tau) = \int y_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_1^2\right] dy_1 \int y_2 \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\sqrt{A} y_2 - \sqrt{A-1} y_1)^2\right] dy_2$$

Haciendo el cambio  $x = \sqrt{A} y_2 - \sqrt{A-1} y_1$ ,  $dx = \sqrt{A} dy_2$ , llegamos a

$$k(\tau) = \frac{\sqrt{A-1}}{\sqrt{A}}$$

y de aquí,  $A = (1-k^2)^{-1}$ .

Por tanto

$$T_\tau(y_2/y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k^2)}} \exp\left[-\frac{(y_2 - ky_1)^2}{2(1-k^2)}\right]$$

ya que  $B = -k/(1-k^2)$  y  $C = k^2/(1-k^2)$ .

Nos quedaria por calcular el valor de  $k$ . Para ello, tomamos un tercer tiempo  $t_3 = t_2 + \tau'$  ( $\tau' > 0$ ) y usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov se tiene

$$k(t_3 - t_1) = k(\tau + \tau') = \iint y_1 y_3 T_{\tau+\tau'}(y_3/y_1) P_1(y_1) dy_1 dy_3$$

y dado que

$$T_{\tau+\tau'}(y_3/y_1) = \int T_{\tau'}(y_3/y_2) T_\tau(y_2/y_1) dy_2$$

entonces

$$k(t_3 - t_1) = \int y_3 dy_3 \int T_{\tau'}(y_3/y_2) dy_2 \int T_\tau(y_2/y_1) y_1 P_1(y_1) dy_1$$

que se puede poner como

$$\begin{aligned} & \left[ \int y_3 dy_3 \int T_{\tau'}(y_3/y_2) y_2 P_1(y_2) dy_2 \right] \left[ \int y_2 dy_2 \int T_\tau(y_2/y_1) y_1 P_1(y_1) dy_1 \right] = \\ & = k(t_3 - t_2) k(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Y la relación  $k(t_3 - t_1) = k(t_3 - t_2) k(t_2 - t_1)$  para  $k(\tau)$  nos lleva a que

$$k(\tau) = e^{-\gamma\tau}$$

y sustituyendo este valor en la expresión para  $T_\tau(y_2/y_1)$  se completa la demostración.

Un segundo Teorema de caracterización es el siguiente:

"Si  $Y(t)$  es estacionario, Gaussiano y tiene una función de autocorrelación exponencial  $k(\tau)=k(0)e^{-\gamma\tau}$ , entonces  $Y(t)$  es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, y por tanto Markoviano".

### Proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante.

Hemos visto ya que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario univariante se puede caracterizar como el único proceso de Markov normal, estacionario, continuo en probabilidad y con media cero. Usaremos estas propiedades para definir el proceso de Ornstein-Uhlenbeck k-dimensional.

#### Definición 1.-

Un proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario k-variante es un proceso de Markov k-variante  $\{Y(t)\}$  que es estacionario, Gaussiano, continuo en probabilidad y que verifica  $EY(t)=0$ .

#### Definición 2.-

Un proceso de Ornstein-Uhlenbeck k-variante es un proceso de Markov k-variante que tiene las mismas probabilidades de transición que un proceso estacionario de Ornstein-Uhlenbeck.

La distribución de un proceso Gaussiano con media cero está caracterizado unívocamente por la estructura de covarianza. En particular, un proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario k-variante tiene una estructura de covarianza muy similar a la del proceso de Ornstein-Uhlenbeck clásico.

Vamos a dar, por tanto, dos caracterizaciones basadas en la covarianza. La demostración de ambos teoremas puede verse en Schach (1971)

#### Teorema 1.-

Sea  $\{Y(t)\}$  un proceso Gaussiano k-variante con  $EY(t)=0$ . Entonces  $\{Y(t)\}$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario si y sólo si su

covarianza tiene la forma

$$EY(s)Y'(s+t) = C e^{Bt} \quad t \geq 0$$

Teorema 2.-

Un proceso de Markov k-variante  $\{Y(t); t \geq 0\}$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck si y sólo si para cada  $s, t \geq 0$ , la distribución condicionada de  $Y(s+t)$ , dada  $Y(s)$  es  $N(\mu, \Sigma)$  con momentos de la forma:

$$\begin{aligned} \mu &= e^{B't} Y(s) \\ \Sigma &= C - e^{B't} C e^{Bt} \end{aligned}$$

donde C es una matriz de covarianza.

Por otra parte, se tiene la siguiente definición

Definición 3.-

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck multidimensional es un proceso de difusión (proceso Markoviano fuerte con trayectorias continuas) con núcleo de probabilidad de transición:

$$g(t; x, y) = (2\pi)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} (y-\mu)' \Sigma^{-1} (y-\mu)\right]$$

para  $t \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , y donde  $\mu = e^{-t} x$ ,  $\Sigma = (1 - e^{-2t}) A$ , con A una matriz definida positiva.

Ese núcleo es la solución elemental de la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t; x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} (\partial^2 g(t; x, y) / \partial x_i \partial x_j) - \sum_i x_i (\partial g(t; x, y) / \partial x_i)$$

donde  $t > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

Además, para cualquier número finito de tiempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$  es fácil calcular la función característica conjunta de los vectores  $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_k)$ . En efecto, si tomamos  $y(0) = y_0$  con probabilidad uno, se tiene

$$\phi(s_1, s_2, \dots, s_k; t_1, t_2, \dots, t_k) = E\left[\exp\left[i(s_1 y(t_1) + \dots + s_k y(t_k))\right]\right] =$$



$$\begin{aligned}
&= \exp \left[ -\frac{1}{2} s_k' (b_k A) s_k - \frac{1}{2} (s_{k-1} + a_k s_k)' (b_{k-1} A) (s_{k-1} + a_k s_k) - \dots \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (s_1 + a_2 s_2 + \dots + \prod_{j=2}^k a_j s_j)' (b_1 A) (s_1 + a_2 s_2 + \dots + \prod_{j=2}^k a_j s_j) + \\
&\quad \left. + 1 (s_1 + a_2 s_2 + \dots + \prod_{j=2}^k a_j s_j) (a_1 y_0) \right]
\end{aligned}$$

donde  $a_i = \exp[-(t_i - t_{i-1})]$ ,  $b_i = 1 - \exp[-2(t_i - t_{i-1})]$ ,  $t_0 = 0$ .

### Construcción del MOU (ORNSTEIN-UHLENBECK MULTIVARIANTE)

El proceso MOU  $\{y(t); 0 \leq t \leq 1\}$  se puede construir de la siguiente forma:

Sea  $C[1, e^2]$  el espacio de las funciones continuas en el intervalo cerrado  $[1, e^2]$  dotado de la topología de la convergencia uniforme. Denotamos por  $\mathcal{C}[1, e^2]$  al Boreliano sobre él.

Construimos en  $\mathcal{C}[1, e^2]$  la medida de Wiener correspondiente al movimiento Browniano  $x(\cdot)$  en  $[1, e^2]$  con  $x(1) = \text{cte}$  con probabilidad uno.

Ahora, tomamos  $d$  copias de  $C[1, e^2]$  y construimos el espacio producto  $C_d[1, e^2]$  con la topología producto y el campo de Borel producto  $\mathcal{C}_d[1, e^2]$ . Se toma como medida en  $\mathcal{C}_d[1, e^2]$  la medida producto con la condición inicial para el  $i$ -ésimo movimiento Browniano  $x^i(1) = \sum_{j=1}^d b_{ij}^{-1} y_0^j$  donde la matriz  $B^{-1} = (b_{ij}^{-1})$  es la inversa de la raíz de  $A$  (que es definida positiva y simétrica,  $A = BB^T$ ).

Ahora, sea  $\{x(t); 1 \leq t \leq e^2\}$  el movimiento Browniano  $d$ -dimensional e introducimos la transformación

$$y(t) = e^{-t} B x(e^{2t}) \quad 0 \leq t \leq 1$$

que es una aplicación medible de  $C_d[1, e^2]$  en  $C_d[1, e^2]$  e induce en  $\mathcal{C}_d$  la medida  $\mu(\cdot, y_0)$ . Esta medida  $\mu$  es la generada por el núcleo  $g(t; x, y)$  del MOU.

Vamos a centrarnos ya en el objetivo principal del Capitulo: el estudio del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante como limite de modelos probabilísticos discretos, en concreto, modelos de transferencia de urnas.

Veremos primero el modelo básico y resultados de convergencia debil para el modelo de multi-urnas de Ehrenfest para luego pasar a variaciones y generalización del proceso clásico de Ehrenfest.

### Modelo de multi-urnas de Ehrenfest

Consideramos  $N$  bolas distribuidas en  $d+1$  ( $d \geq 2$ ) urnas numeradas con  $0, 1, 2, \dots, d$ . Diremos que el sistema está en el estado  $i = (i_1, i_2, \dots, i_d)$  si hay  $i_j$  bolas en la urna  $j$  ( $j=1, 2, \dots, d$ ) y  $N - \sum_{j=1}^d i_j$  bolas en la urna 0.

En etapas discretas y sucesivas elegimos aleatoriamente una bola de una de las  $d+1$  urnas, elegida dicha urna también al azar (por tanto, cada una de las  $N$  bolas tiene probabilidad  $1/N$  de ser elegida). La bola elegida se saca de su urna y se coloca en la urna  $i$  ( $i=0, 1, \dots, d$ ) con probabilidad  $p_i$ , donde las  $p_i$  son los elementos de un vector dado  $(p_0, p)$  que verifican  $p_i > 0$  y  $\sum_{i=0}^d p_i = 1$ . Denotamos por  $X_N(k)$  el estado del sistema después de la  $k$ -ésima redistribución de bolas.

Vamos a dar teoremas límites para la sucesión de procesos  $\{X_N(k); k=0, 1, \dots, N\}$  cuando  $N$  tiende a  $\infty$ .

Para el modelo clásico de Ehrenfest ( $d=1$ ,  $p_0=p_1=1/2$ ) Kac (1947) demostró que la distribución de  $(X_N([Nt]) - N/2) / (N/2)^{1/2}$  converge cuando  $N \rightarrow \infty$  a la distribución de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck en el tiempo  $t$ , que parte de  $y_0$  en el tiempo  $t=0$ , supuesto que  $X_N(0) = [(N/2)^{1/2} y_0 + N/2]$ . (El símbolo  $[x]$  denota la parte entera de  $x$ ).

Karlin y McGregor (1965) obtuvieron un resultado similar para la versión continua en el tiempo del modelo con  $d=2$  y con la selección aleatoria de las bolas dada por la ocurrencia de sucesos de un proceso de Poisson independiente.

Centrándonos ya en el modelo general expuesto, el proceso  $\{X_N(k); k=0, 1, \dots, N\}$  tiende al estado de pseudo-equilibrio  $Np$  y los estados alejados de  $Np$  ocurrirán raramente. Así pues, vamos a considerar las fluctuaciones de  $X_N(k)$  alrededor de  $Np$  medidas en una escala apropiada.

Consideramos  $\{Y_N(k); k=0, \dots, N\}$  donde

$$Y_N(k) = (X_N(k) - Np) / N^{1/2}$$

y a partir de éstos definimos una sucesión de procesos estocásticos  $\{y_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  que son continuo-muestrales c.s., lineales en los intervalos  $((k-1)N^{-1}, kN^{-1})$  y verifican  $y_N(kN^{-1}) = Y_N(k)$  para  $k=0, 1, \dots, N$ . En otras palabras

$$y_N(t) = Y_N(k) + (Nt - k)(Y_N(k+1) - Y_N(k)) \quad \text{si } kN^{-1} \leq t \leq (k+1)N^{-1}$$

Denotaremos por  $X_N^i(0) = [N^{1/2} y_0^i + Np_i]$  donde  $y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^d)$  es un elemento arbitrario, pero fijo de  $\mathbb{R}^d$ . (Por  $X_N^i(\cdot)$  notamos la  $i$ -ésima componente del vector  $X_N(\cdot)$ ).

Los procesos  $\{X_N(k); k=0, 1, \dots, N\}$  para  $N=1, 2, \dots$  se pueden definir en un espacio de probabilidad  $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$ . Claramente, la transformación que lleva la sucesión  $\{X_N(k); k=0, \dots, N\}$  a  $\{y_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  es medible e induce una medida de probabilidad en  $\mathcal{E}_d$ . Dicha medida inducida será denotada por  $\mu_N(\cdot, y_0)$ .

Teorema. -

$$\mu_N(\cdot, y_0) \Rightarrow \mu(\cdot, y_0) \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty$$

(convergencia débil de sucesiones de medidas de probabilidad <sup>(1)</sup>)

donde  $\mu(\cdot, y_0)$  es la medida de probabilidad en  $\mathcal{E}_d$  de un proceso de difusión  $d$ -dimensional  $y(\cdot)$ , que empieza en el punto  $y_0$ , y que es análogo al proceso de Ornstein-Uhlenbeck cuya distribución en el tiempo  $t$  es una normal multivariante con vector media  $y_0 e^{-t}$  y matriz de covarianza  $\Sigma$ , cuyos elementos son:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} (1-e^{-2t})p_i(1-p_i) & i=j \\ -(1-e^{-2t})p_i p_j & i \neq j \end{cases}$$

Para aplicaciones es útil notar que  $\mu_N(\cdot, y_0) \Rightarrow \mu(\cdot, y_0)$  es equivalente a <sup>(2)</sup>

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N \left\{ \{f(y(\cdot)) \leq \alpha\}; y_0 \right\} = \mu \left\{ \{f(y(\cdot)) \leq \alpha\}; y_0 \right\}$$

.....

(1) Sea  $S$  un espacio métrico y  $\mathcal{Y}$  el campo de Borel generado por los conjuntos abiertos de  $S$ . Si  $\nu_N$  y  $\nu$  son medidas de probabilidad en  $\mathcal{Y}$  y si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_S f d\nu_N = \int_S f d\nu$  para cada función  $f$  continua y acotada en  $S$ , entonces diremos que  $\nu_N$  converge débilmente a  $\nu$  ( $\nu_N \Rightarrow \nu$ ).

(2) La convergencia aquí es en el sentido ordinario de convergencia, es decir, para todo  $\alpha$  tal que el miembro de la derecha sea continuo.

para todo funcional  $f$  en  $C_d[0,1]$ , los cuales con continuos c.s. con respecto a  $\mu(\cdot, y_0)$ .

Usualmente se requiere obtener la convergencia debil en dos pasos. Primero, se debe obtener la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales de los procesos aproximados,  $\{y_N(t); t \geq 0; N=1,2,\dots\}$  en nuestro caso, a la distribución finito-dimensional correspondiente del proceso limite. Segundo, se debe demostrar que la probabilidad de que los sucesos aproximados puedan tener fluctuaciones grandes entre los puntos en los que esos procesos están determinados por sus distribuciones finito-dimensionales, es pequeña.

Analógia con el Teorema Central del Limite. (La distribución de  $y_N(t)$  converge a la distribución de  $y(t)$  para un valor fijo de  $t$ ).

Seleccionamos un vector arbitrario  $y_0 \in \mathbb{R}^d$ , tomamos  $X_N^i(0) = [N^{1/2} y_0^i + N p^i]$  y sólo consideramos valores de  $N$  lo suficientemente grandes como para asegurar que  $0 \leq X_N^i(0) \leq N$  para  $i=1,2,\dots,d$ . Para dichos valores de  $N$ , sea el proceso de Markov  $\{X_N(k); k=0,1,\dots,N\}$  que caracteriza el estado de nuestro esquema de multi-urnas definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, P_N)$ .<sup>(3)</sup>

Para el modelo de multi-urnas de Ehrenfest el análogo del TCL para sumas de variables aleatorias i.i.d. es el siguiente:

.....  
 (3) La construcción de este espacio de probabilidad para una distribución inicial, prob. de transición en un paso y espacio de estados dados, puede verse en Chung (1967), Teorema 1, pág. 7.



"Para cualquier vector  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  y condición inicial

$$X_N^1(0) = [N^{1/2} y_0^1 + N p_1]$$

$$\lim P_N \left\{ Y_N^1([Nt]) \leq x \right\} = (2\pi)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2} \int_{(y: y \leq x)} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y-\mu)' \Sigma^{-1} (y-\mu) \right] dy$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $t \in [0, 1]$ , donde  $\mu = y_0 e^{-t}$  y  $\Sigma$  tiene como elementos

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} (1-e^{-2t}) p_i (1-p_j) & i=j \\ -(1-e^{-2t}) p_i p_j & i \neq j \end{cases}$$

que coincide con la integral del núcleo de probabilidad de transición del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante.

#### Convergencia de distribuciones finito-dimensionales.-

Vamos a establecer la convergencia de las f.d.d. (distribuciones finito-dimensionales) de la sucesión de procesos  $\{y_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  para  $N=1, 2, \dots$  a las distribuciones correspondientes del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multidimensional  $\{y(t); 0 \leq t \leq 1\}$ .

Esta convergencia ya ha sido establecida para la sucesión  $\{Y_N^1([Nt]); 0 \leq t \leq 1\}$  para  $N=1, 2, \dots$ :

"El  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N \left[ Y_N^1([Nt_1]) \leq x_1, \dots, Y_N^1([Nt_k]) \leq x_k \right]$  existe y es la distribución conjunta de  $\{y(t); 0 \leq t \leq 1\}$ ".

Pero dado que  $|Y_N^1([Nt]) - y_N^1(t)| \leq N^{-1/2}$  para cada  $i=1, 2, \dots, d$  con probabilidad uno, es claro que también tenemos la convergencia de las distribuciones finito-dimensionales de  $\{y_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

## Variaciones y generalizaciones del proceso clásico de Ehrenfest

### Modelo básico.-

Suponemos  $N$  bolas que están distribuidas en  $M$  urnas, con  $n_k(t)$  bolas en la urna  $k$  en el tiempo  $t$ ,  $k=1,2,\dots,M$ . Es decir,  $n(t)=(n_1(t),\dots,n_M(t))$  es un proceso estocástico multivariante, donde para cada  $t$ , los  $n_k(t)$  son valores enteros no negativos y verifican

$$\sum_{k=1}^M n_k(t) = N$$

Las bolas se van a mover entre las urnas de acuerdo con la siguiente regla: la probabilidad de que una bola se traslade de la urna  $k$  a la urna  $l \neq k$  durante el intervalo de tiempo  $(t, t+\Delta t)$  es  $n_k \lambda_k p_{kl} \Delta t + O(\Delta t)$ , ( $1 \leq k, l \leq M$ ) y la probabilidad de más de una transición durante  $(t, t+\Delta t)$  es de orden  $O(\Delta t)$ .

Se supone  $\lambda_k > 0$  constante y la matriz de probabilidades de transición irreducible  $P=(p_{kl})$  con  $p_{kk}=0$  para todo  $k$ . Entonces, bajo estas suposiciones el proceso aleatorio

$$(n_1(t), \dots, n_M(t))$$

es una cadena de Markov  $M$ -variante en tiempo continuo.

Vamos a estudiar la convergencia de estos procesos, adecuadamente normalizados, a los procesos multivariantes de Ornstein-Uhlenbeck en el sentido de convergencia débil de medidas de probabilidad.

Se tienen los siguientes resultados

### Teorema.-

"Supuesto que  $n(0)=(m_1, \dots, m_M)$ , la distribución de  $n(t)=(n_1(t), \dots, n_M(t))$  es la de la suma de  $M$  variables aleatorias multinomiales independientes con parámetros

$$\{m_k; p_{k1}(t), \dots, p_{kM}(t)\} \quad k=1, 2, \dots, M$$

donde  $p_{kl}(t) = (e^{Qt})_{kl}$  con  $Q = \Lambda(P-I)$  y  $\Lambda_{kl} = \delta_{kl} \lambda_k$ .

Este resultado se puede expresar de forma diferente que será útil más tarde:

Claramente  $Q$ , así definida, es la matriz de las intensidades de transición de un proceso de Markov  $Z'(t)$  que toma valores entre los estados  $1, 2, \dots, M$ . Supongamos el proceso que se obtendría a partir de  $Z'(t)$  reemplazando el estado  $k$  por el vector unitario  $k$ -ésimo  $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , de modo que dicho proceso tomaría sus valores en los vectores unitarios  $M$ -dimensionales.

Sean  $\{Z_{kl}(t); k=1, 2, \dots, M; l=1, \dots, m_k\}$   $N$  procesos de Markov independientes de ese tipo con  $Z_{kl}(0) = e_k$ .

Sea

$$Z(t) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^{m_k} Z_{kl}(t)$$

Entonces, se tiene

Teorema. -

El proceso  $\{Z(t); t \geq 0\}$  y  $\{n(t); t \geq 0\}$  tienen la misma distribución.

NOTA.

El proceso  $Z_{kl}$  tiene matriz de probabilidades de transición  $e^{Qt}$  y dicho proceso tiene un número de estados finito y sólo una clase comunicante. Por tanto, existe un único vector de probabilidades  $p = (p_1, \dots, p_M)'$  que cumple

$$p' e^{Qt} = p'$$

Por tanto se concluye que la versión estacionaria de nuestro modelo, que denotamos por  $\bar{n}(t) = (\bar{n}_1(t), \dots, \bar{n}_M(t))$  tiene una distribución

multinomial con parámetros

$$(N; p_1, \dots, p_M)$$

Resultados de convergencia debil. -

La convergencia debil de una sucesión  $\{X_N(t)\}$   $n=1,2,\dots$  a  $X(t)$  implica que  $g(X_N(\cdot)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X(\cdot))$  para cualquier funcional  $g$  que sea continuo en un cierto espacio topológico de funciones. <sup>(4)</sup>

Si para cada  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  se tiene

$$(X_N(t_1), \dots, X_N(t_n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X(t_1), \dots, X(t_n))$$

decimos que las distribuciones finito-dimensionales (f.d.d.) de  $\{X_N(t)\}$  convergen a las f.d.d. de  $\{X(t)\}$ .

La convergencia debil es más fuerte que la convergencia de las f.d.d..

.....  
(4) Usamos como espacio de funciones básico el producto  $k$  veces del espacio  $D[0,1]$  con la topología  $J_1$  de Skorokhod (1956). Esta topología es lo suficientemente grande para hacer continuos funcionales tales como

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} X_{Nk}(t) \qquad \int_0^1 X_N(t) dt$$

Supongamos, ahora

$$X_N(t) = N^{-1/2}(n^{(N)}(t) - Np)$$

$$\bar{X}_N(t) = N^{-1/2}(\bar{n}^{(N)}(t) - Np)$$

donde  $\{n^{(N)}(t)\}$  es el proceso no estacionario definido anteriormente y  $\{\bar{n}^{(N)}(t)\}$  el proceso estacionario correspondiente.

Suponemos que

$$n^{(N)}(0) = Np + N^{1/2}x_0$$

donde  $x_0$  es un vector arbitrario, no aleatorio con  $\sum_{k=1}^M x_{ok} = 0$ .

Sea  $\Pi$  una matriz diagonal con  $\Pi_{kk} = p_k$ . Se tienen los siguientes resultados:

Lema 1. -

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , las f.d.d. de  $\{X_N(t)\}$  convergen a las del proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\{X(t)\}$  con

$$EX(t) = e^{Q't} x_0 \quad t \geq 0 \quad (1.4)$$

$$EX(t)X'(t+s) - EX(t)EX'(t+s) = \Pi e^{Qs} - e^{Qt} \Pi e^{Q(s+t)} \quad s, t \geq 0 \quad (1.5)$$

Lema 2. -

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , las f.d.d. de  $\{\bar{X}_N(t)\}$  convergen a las del proceso de Ornstein-Uhlenbeck M-variante  $\{\bar{X}(t); t \geq 0\}$  con

$$E\bar{X}(t)\bar{X}'(t+s) = (\Pi - pp') e^{Qs} \quad s \geq 0 \quad (1.6)$$

Teorema 1. -

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , la sucesión  $\{X_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  converge débilmente al proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\{X(t); 0 \leq t \leq 1\}$  con media y covarianza dadas por (1.4) y (1.5) respectivamente.

Teorema 2. -

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , la sucesión  $\{\bar{X}_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  converge débilmente al proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\{\bar{X}(t); 0 \leq t \leq 1\}$  con media cero y covarianza dada por (1.6).

Extensión de resultados de convergencia débil a clases de procesos discretos en el tiempo. -

Supongamos  $N$  bolas distribuidas en  $M$  urnas. Si en el tiempo  $i$  la distribución de las  $N$  bolas en las  $M$  urnas viene dada por el vector  $(n_1, \dots, n_M)$ , entonces la distribución en el tiempo  $i+1$  se obtiene eligiendo una bola de la urna  $k$ -ésima con probabilidad  $n_k/N$  y colocándola en la urna  $l$ -ésima con probabilidad  $\bar{p}_{kl}$ , donde  $\bar{P}=(\bar{p}_{kl})$  es una matriz de probabilidad. Suponemos que  $\bar{p}_{kk} < 1$  para cada  $k$ , y que  $\bar{P}$  es irreducible.

Tomamos una distribución inicial arbitraria, sea  $M_N(i)$  el estado de la cadena en el tiempo  $i$ , y sea  $\{Y(t); t \geq 0\}$  un proceso de Poisson independiente con intensidad 1.

Consideramos

$$n^{(N)}(t) = M_N(Y(Nt)) \quad (1.7)$$

Entonces, es fácil ver que  $n^{(N)}(t)$  es un proceso de Markov en tiempo continuo con intensidad total fuera del estado  $(n_1, \dots, n_M)$  [es decir, la probabilidad de salir del estado  $(n_1, \dots, n_M)$ ] dada por

$$N(1 - \frac{n_1}{N} \bar{p}_{11} - \dots - \frac{n_M}{N} \bar{p}_{MM}) = \sum_k n_k (1 - \bar{p}_{kk})$$

y probabilidades de transición para una bola que se mueve de la urna  $k$ -ésima a la  $l$ -ésima dadas por

$$p_{kl} = \begin{cases} \frac{\bar{p}_{kl}}{1 - \bar{p}_{kk}} & \text{si } k \neq l \\ 0 & \text{si } k = l \end{cases} \quad (1.8)$$

De aquí, se deduce que  $n^{(N)}(t)$  es un proceso del tipo dado al comienzo de este apartado con  $p_{kl}$  dado por (1.8) y

$$\lambda_k = 1 - \bar{p}_{kk}$$

y se cumple el siguiente resultado

Lema. -

La distribución estacionaria de  $\{M_N(i); i=0,1,\dots\}$  es la misma que la de  $\{n^{(N)}(t); t \geq 0\}$

Vamos a expresar la relación (1.7) incluyendo los elementos  $\omega$  del espacio de probabilidad básico

$$n^{(N)}(t, \omega) = M_N(Y(Nt, \omega), \omega) \quad (1.9)$$

Las trayectorias del proceso  $Y$  son funciones paso (o escalonadas), monótonas crecientes y, por tanto, existe un proceso inverso  $\{V(t); t \geq 0\}$  definido por

$$V(t, \omega) = \inf\{s, Y(s, \omega) \geq t\}$$

Podemos escribir (1.9) como

$$n^{(N)}\left(\frac{1}{N} V(t, \omega), \omega\right) = M_N(t, \omega)$$

donde ahora las trayectorias muestrales del proceso  $\{M_N(t); t \geq 0\}$  son funciones paso que son constantes sobre intervalos  $(i-1, i]$  y la distribución de  $\{M_N(t); t=1,2,\dots\}$  es la misma que la de la cadena en tiempo discreto  $\{M_N(i); i=1,2,\dots\}$ . Obviamente, la normalización adecuada del proceso  $M_N(t)$  es

$$X'_N(t) = N^{-1/2} (M_N(Nt) - Np) = N^{-1/2} (n^{(N)}\left(\frac{1}{N} V(Nt)\right) - Np) \quad 0 \leq t \leq 1$$



donde el vector  $p$  es la solución de

$$p' e^Q = p'$$

Ahora,  $X'_N(t)$  difiere de  $X_N(t)$  por el cambio aleatorio de tiempo

$$\phi_N: t \rightarrow \frac{1}{N} V(Nt)$$

Suponemos  $M_N(0) = Np + N^{-1/2} x_0$ , y se obtienen los siguientes teoremas

Teorema 1. -

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , la sucesión  $\{X'_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  converge débilmente al proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\{X(t); 0 \leq t \leq 1\}$  con media y covarianza dadas por (1.4) y (1.5), respectivamente.

Si  $\{\bar{M}_N(i)\}$  es estacionario, tomamos

$$\bar{X}'_N(t) = N^{-1/2} (\bar{M}_N[Nt] - Np)$$

Teorema 2. -

Cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\{\bar{X}'_N(t); 0 \leq t \leq 1\}$  converge débilmente a  $\{\bar{X}(t)\}$  donde  $\bar{X}(t)$  es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con media cero y covarianza dada por (1.6).

Caso particular: Modelo de urnas de Iglehart. -

Supongamos un modelo de urnas en tiempo discreto en el que cada bola tiene la misma probabilidad de ser extraída y se coloca en la urna  $k$ -ésima con probabilidad  $p_k$  independientemente de la urna de la que se obtuvo. Este modelo es un caso particular de la cadena en tiempo discreto  $\{M_N(i)\}$  con

$$\bar{p}_{kl} = p_l$$

El vector  $p_0$  de probabilidad de la distribución de equilibrio es la

solución de

$$p'_0 \bar{P} = p'_0$$

y su solución es  $p'_0 = p'$ , donde  $p' = (p_1, \dots, p_M)$ .

$$\text{Sea } M_N(0) = Np + N^{1/2}x_0 \quad \text{y} \quad \sum_k x_{ok} = 0.$$

Por el Teorema 1, la sucesión  $N^{-1/2}(M_N([Nt]) - Np)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , converge débilmente al proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $\{X(t); 0 \leq t \leq 1\}$  con media y covarianza dadas por (1.4) y (1.5).

De aquí

$$EX(t) = \exp(Q't)x_0 = \exp((\bar{P}-I)t)x_0 = \exp(-t)x_0$$

ya que  $\bar{P}^k = P$  para todo entero positivo  $k$ , y

$$\exp(\bar{P}t) = (I - \bar{P}) + \exp(t)\bar{P} \quad \text{y} \quad \bar{P}'x_0 = 0$$

También

$$\text{cov}X(t) = \Pi - \exp((\bar{P}' - I)t)\Pi \exp((\bar{P} - I)t) = (1 - \exp(-2t))\Pi(I - \bar{P})$$

lo cual se deduce fácilmente del hecho de que

$$\bar{P}' \Pi \bar{P} = \bar{P}' p p' = \Pi \bar{P}$$

( $\Pi$  es la matriz diagonal con elementos  $\Pi_{kk} = p_k$ )

El Teorema 2 nos proporciona un resultado similar para la sucesión correspondiente de cadenas estacionarias. El proceso límite tiene momentos

$$\bar{E}X(t) = 0 \quad \bar{E}X(t)\bar{X}(t+s) = \exp(-s)(\Pi - pp').$$

**CAPITULO II**

**MODELO DE ECOLOGIA**

## Introducción

La radio-telemetría es uno de los métodos más utilizados para estudiar movimientos de animales. El procedimiento habitual es el siguiente: se captura el animal, se le incorpora un radio transmisor y, posteriormente, se deja en libertad.

Dado que la señal emitida por el radio transmisor es continua, se espera obtener una eficiencia muestral máxima tomando una secuencia de posiciones con una frecuencia muestral relativamente alta.

Sin embargo en estudios de "home range" (en general, la región más pequeña que "responde" del 95% de la utilización del animal de su habitat), el análisis estadístico de datos radio-telemétricos plantea problemas debido a la falta de independencia de las observaciones sucesivas en el muestreo.

Dunn & Gipson (1977) propusieron el proceso de difusión de Ornstein-Uhlenbeck multivariante (MOU) como el modelo apropiado para dichos estudios debido a sus propiedades: es continuo-muestral c.s. (como la trayectoria del animal), estacionario (que corresponde a un "home range" estable), con una tendencia central (a diferencia del movimiento Browniano) y, siendo Markoviano, tiene en cuenta la posibilidad de correlación entre sucesivas observaciones.

### El proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante

Supongamos  $m$  ( $m \geq 1$ ) animales moviéndose en una determinada región, y representamos las posiciones observadas de dichos animales en el tiempo  $t$  mediante un vector  $p$ -dimensional,  $p=2m$ .

$$z'(t) = [z'_1(t), z'_2(t), \dots, z'_m(t)]$$

donde

$$z'_i(t) = [z_{i1}(t), z_{i2}(t)] \quad i=1, 2, \dots, m$$

indica las dos coordenadas del  $i$ -ésimo animal en el tiempo  $t$ .

El procedimiento de muestreo será el siguiente:

Se observa en el tiempo  $t_0$  la posición de los  $m$  animales y, a continuación, se estudia la evolución de los mismos mediante observaciones repetidas. Estas observaciones forman una "hoja" de datos. A menudo, se dispone de varias de estas "hojas", separadas una de otra por intervalos suficientemente grandes de tiempo como para asegurar su independencia.

Supongamos  $b$  "hojas" de datos, cada una de ellas con  $n_i+1$  ( $i=1, 2, \dots, b$ ) observaciones

$$\text{HOJA 1} \quad z_{10}, z_{11}, \dots, z_{1n_1}$$

$$\text{HOJA 2} \quad z_{20}, z_{21}, \dots, z_{2n_2}$$

.....

$$\text{HOJA } b \quad z_{b0}, z_{b1}, \dots, z_{bn_b}$$

Hay que distinguir entre la observación inicial de cada "hoja"  $z_{j0}$  ( $j=1, \dots, b$ ), que es independiente de cada observación inicial de las otras "hojas", debido a la separación temporal, y el resto, que, muy probablemente, dependen cada una de la anterior.

Notemos también que una vez iniciada una "hoja", el muestreo se realiza a intervalos regulares de tiempo.

Vamos a imponer hipótesis a nuestro modelo. En principio, suponemos que

$$z(t) \sim N_p(\mu, A) \quad (2.1)$$

es decir, la distribución marginal de cualquier conjunto en particular de coordenadas  $z(t)$  es normal multivariante con vector media

$$\mu' = [\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m]$$

donde

$$\mu'_i = [\mu_{i1}, \mu_{i2}] \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

y matriz de covarianza

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1m} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{m1} & \Lambda_{m2} & \dots & \Lambda_{mm} \end{bmatrix}$$

donde

$$\text{cov}[z_i(t), z_j(t)] = \Lambda_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, m)$$

son matrices de covarianza de dimensi3n 2 x 2.

En particular, se tiene

$$z_i(t) \sim \mathcal{N}_2(\mu_i, \Lambda_{ii}) \quad (2.2)$$

es decir, la posici3n de cada animal  $i$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ) en el tiempo  $t$  sigue una distribuci3n normal bivariante con media  $\mu_i$  y matriz de covarianza  $\Lambda_{ii}$ .

Para tener en cuenta la falta de independecia entre sucesivas observaciones, una vez que una "hoja" de datos se ha iniciado, suponemos que  $z(t)$  es un proceso de Markov.

Y, por 3ltimo, si imponemos que  $z(t)$  debe ser continuo-muestral c.s. y estacionario (que como vimos en la introducci3n son requerimientos f3sicos de nuestro modelo), entonces, por definici3n,  $z(t)$  debe ser una traslaci3n ( $\mu \neq 0$ ) del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante definido en el Capitulo anterior. Por tanto, la distribuci3n condicionada del proceso en el tiempo  $s+t$ , una vez conocido en el tiempo  $s$ , es normal multivariante. Es decir

$$z(s+t)/z(s) \sim N(\mu + e^{Bt} [z(s) - \mu], \Phi(t)) \quad (2.3)$$

donde

$$\Phi(t) = \Lambda - e^{Bt} \Lambda e^{B't}$$

con  $\Lambda$  y la matriz de covarianza infinitesimal  $-(B\Lambda + \Lambda B')$  definidas positivas (requerimientos necesarios de las ecuaciones de Fokker-Planck), y además, las partes reales de todas las raíces características de  $B$  deben ser negativas de modo que  $e^{Bt} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

A las expresiones (2.1) y (2.3) nos referiremos como distribución de equilibrio y distribución condicionada, respectivamente, del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante.

NOTAS. -

1) La media condicionada de (2.3) tiende a la media de (2.1), lo cual nos proporciona el requisito de una tendencia centralizante de un "home range".

2) La matriz de covarianza tiende de igual forma a la de la distribución de equilibrio.

3)  $\text{cov} [z(s), z(s+t)] = \Lambda e^{B't}$ , es decir, la covarianza entre dos observaciones sucesivas sólo depende del tiempo transcurrido.

Pasando al límite

$$\text{cov} [z(s), Z(s+t)] \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

de lo que se deduce que la dependencia entre observaciones sucesivas, medida por su covarianza, tiende a cero a medida que transcurre el tiempo.

Invarianza del modelo. -

Es importante notar la invarianza del modelo que utilizaremos frente al sistema de coordenadas que usemos. Con ello no tenemos necesidad de

utilizar, ni de vernos obligados a buscar (en algunos casos no podremos ni siquiera conocerlo) el verdadero sistema de coordenadas en el cual los animales basan su movimiento.

Vamos a ver que si superimponemos un sistema de coordenadas rectangulares arbitrario  $x_1, x_2, \dots, x_p$  y observamos el proceso  $x(t)$  dado por la relación

$$x(t) = C [z(t) - a]$$

donde  $a$  y  $C$  representan los parámetros de alguna transformación lineal desconocida del sistema de coordenadas verdadero de los animales, con  $C$  no singular, entonces el proceso observado  $x(t)$  es también un proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante.

Si  $z(t) \sim N_p(\mu, \Lambda)$ , entonces  $x(t) \sim N(\gamma, \Omega)$ , donde  $\gamma = C(\mu - a)$  y  $\Omega = C\Lambda C'$ .

Calculemos, ahora, la matriz de covarianza

$$\text{cov}[x(s), x(s+t)] = CAe^{B't}C' = \Omega(C')^{-1}e^{B't}C'$$

y aplicando el desarrollo de la exponencial

$$\begin{aligned} (C')^{-1}e^{B't}C' &= (C')^{-1} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (B')^i \frac{t^i}{i!} \right] C' = \sum_{i=0}^{\infty} [(CBC^{-1})']^i \frac{t^i}{i!} = \\ &= e^{(CBC^{-1})'t} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{cov}[x(s), x(s+t)] = \Omega e^{(CBC^{-1})'t}$$

que, en efecto, tiene la forma de la matriz de covarianza de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante,

Antes de pasar al estudio, mediante este modelo propuesto, de propiedades en el contexto biológico tales como "home range" de un animal,

interacción territorial, etc, vamos a dedicarnos al estudio de la estimación de los parámetros que determinan el modelo.

Inferencia

Como ya hemos citado, dispondremos de b "hojas" de datos de la siguiente forma

$$\underline{\text{HOJA 1}} \quad z_{10}, z_{11}, \dots, z_{1n_1}$$

$$\underline{\text{HOJA 2}} \quad z_{20}, z_{21}, \dots, z_{2n_2}$$

.....

.....

$$\underline{\text{HOJA b}} \quad z_{b0}, z_{b1}, \dots, z_{bn_b}$$

donde  $z_{ij}$  denota el j-ésimo conjunto de coordenadas de la i-ésima "hoja" de observaciones.

Se han hecho las siguientes suposiciones:

- 1) Cuando una "hoja" de observaciones se ha iniciado, las observaciones sucesivas (a intervalos regulares de tiempo de longitud t) se distribuyen según la distribución condicionada dada por (2.3).
- 2) Las "hojas" de datos están tomadas lo suficientemente separadas en el tiempo, de modo que sean independientes unas de otras.

A partir de estos datos, vamos a calcular los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos de la distribución dada por la expresión (2.3).

Tomamos

$$\Gamma = e^{-Bt} \quad (\text{para } t \text{ fijo})$$

$$\nu = (I - \Gamma)\mu$$



La función de verosimilitud es

$$\begin{aligned}
 L &= \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^{n_i} \text{f. de densidad condicionada de } z_{ij} \text{ dado } z_{i,j-1} + \\
 &\quad + \prod_{i=1}^b \text{f. de densidad de } z_{i0} = \\
 &= \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Phi|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_{ij} - \mu - e^{Bt} [z_{i,j-1} - \mu])' \Phi^{-1} \right. \\
 &\quad \left. (z_{ij} - \mu - e^{Bt} [z_{i,j-1} - \mu]) \right] + \\
 &\quad + \prod_{i=1}^b \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Lambda|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_{i0} - \mu)' \Lambda^{-1} (z_{i0} - \mu) \right] = \\
 &= \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Phi|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_{ij} - \mu - \Gamma z_{i,j-1} + \Gamma \mu)' \Phi^{-1} \right. \\
 &\quad \left. (z_{ij} - \mu - \Gamma z_{i,j-1} + \Gamma \mu) \right] + \\
 &\quad + \prod_{i=1}^b \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Lambda|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_{i0} - \mu)' \Lambda^{-1} (z_{i0} - \mu) \right] = \\
 &= \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Phi|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (z_{ij} - \nu - \Gamma z_{i,j-1})' \Phi^{-1} \right. \\
 &\quad \left. (z_{ij} - \nu - \Gamma z_{i,j-1}) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \prod_{i=1}^b \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Lambda|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (z_{i0} - \mu)' \Lambda^{-1} (z_{i0} - \mu)\right] = \\
& = \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^{n_1} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Phi|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} v_{ij}' \Phi^{-1} v_{ij}\right] + \\
& + \prod_{i=1}^b \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Lambda|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} v_{i0}' \Lambda^{-1} v_{i0}\right]
\end{aligned}$$

donde

$$v_{ij} = z_{ij} - \nu - \Gamma z_{ij-1}$$

$$v_{i0} = z_{i0} - \mu$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\ln L = & \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_1} \left[ -\frac{1}{2} p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Phi| - \frac{1}{2} v_{ij}' \Phi^{-1} v_{ij} \right] + \\
& + \sum_{i=1}^b \left[ -\frac{1}{2} p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Lambda| - \frac{1}{2} v_{i0}' \Lambda^{-1} v_{i0} \right]
\end{aligned}$$

es decir,

$$\ln L = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_1} g_{ij} + \sum_{i=1}^b g_{i0}$$

donde

$$g_{ij} = -\frac{1}{2} p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Phi| - \frac{1}{2} v_{ij}' \Phi^{-1} v_{ij}$$

$$g_{i0} = -\frac{1}{2} p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln|\Lambda| - \frac{1}{2} v_{i0}' \Lambda^{-1} v_{i0}$$

La obtención de los estimadores de máxima verosimilitud dependerá de las suposiciones sobre la distribución de  $z_{i0}$ . Vamos a distinguir dos casos:

A) Suponemos que  $z_{i0}$  es una constante conocida. Esto supone que la

distribución inicial de los animales es decidida por nosotros. En este caso  $g_{10}=0$ , y siguiendo a Anderson (1971) obtenemos los siguientes estimadores

$$\hat{\Gamma} = \left[ \sum \sum z_{1j} z'_{1j-1} - \frac{1}{n} \left( \sum \sum z_{1j} \right) \left( \sum \sum z_{1j-1} \right)' \right] \times$$

$$\left[ \sum \sum z_{1j-1} z'_{1j-1} - \frac{1}{n} \left( \sum \sum z_{1j-1} \right) \left( \sum \sum z_{1j-1} \right)' \right]^{-1}$$

$$\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum \sum \left( z_{1j} - \hat{\Gamma} z_{1j-1} \right)$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{n} \sum \sum \left( z_{1j} - \hat{\nu} - \hat{\Gamma} z_{1j-1} \right) \left( z_{1j} - \hat{\nu} - \hat{\Gamma} z_{1j-1} \right)'$$

donde las sumas son en  $i=1,2,\dots,b$ ;  $j=1,2,\dots,n_i$ ; y  $n = \sum_{i=1}^b n_i$  es el número total de observaciones sucesivas.

Dado que

$$\Phi = \Lambda - e^{Bt} \Lambda e^{B't}$$

$$\Gamma = e^{Bt}$$

se tiene

$$\Phi = \Lambda - \Gamma \Lambda \Gamma'$$

Aplicando el lema de Neudecker [ $\text{vec}(\Gamma \Lambda \Gamma') = (\Gamma \otimes \Gamma) \text{vec} \Lambda$ , donde  $\text{vec}(\cdot)$  denota la representación en vector columna y  $\otimes$  el producto de Kronecker de matrices] se tiene

$$\text{vec } \Phi = \text{vec } \Lambda - (\Gamma \otimes \Gamma) \text{vec } \Lambda$$

$$\text{vec } \Phi (I - (\Gamma \otimes \Gamma)) \text{vec } \Lambda$$

$$\text{vec } \hat{\Lambda} = (I - (\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma}))^{-1} \text{vec } \hat{\Phi}$$

Como  $\nu = (I - \Gamma) \mu$ , se tiene

$$\hat{\mu} = (I - \hat{\Gamma})^{-1} \hat{\nu}$$

y como  $\Gamma = e^{Bt}$ ,

$$\hat{B} = \frac{1}{t} \ln \hat{\Gamma}$$

En Apèndice I presentamos un programa de ordenador que lleva a cabo todas esas operaciones.

En Apèndice II hacemos un estudio del logarìtmo de una matriz.

B) Lo usual no es colocar los animales, sino observar donde se encuentran en el momento de iniciar el muestreo. (El colocar a los animales supondria mucho esfuerzo de recaptura).

El caso más frecuente es aquel en que la observación inicial de cada hoja se distribuye segun la distribución de equilibrio de la población. Entonces:

$$g_{10} = -\frac{1}{2} p \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Lambda| - \frac{1}{2} v_{10}' \Lambda^{-1} v_{10}$$

con  $v_{10} = z_{10} - \mu$ .

En este caso, el método de máxima verosimilitud conduce a las siguientes ecuaciones de verosimilitud

$$\Lambda^{-1} \sum_{i=1}^b v_{i0} + (I - \Gamma') \Phi^{-1} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} = 0$$

$$n\Gamma\Lambda + \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} (z_{1j-1} - \mu)' - \left[ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} v_{ij}' \right] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda = 0$$

$$\Lambda^{-1} \left[ \sum_{i=1}^b v_{i0} v_{i0}' - b\Lambda \right] \Lambda^{-1} + \Phi^{-1} \left[ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} v_{ij}' - n\Phi \right] \Phi^{-1} -$$

$$- \Gamma' \Phi^{-1} \left[ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} v_{ij} v_{ij}' - n\Phi \right] \Phi^{-1} \Gamma = 0$$

donde  $n = \sum_{i=1}^b n_i$ .

(Para la obtención de esas ecuaciones, ver Gonzalez Carmona (1985), Tesis Doctoral, Universidad de Granada)

Estas ecuaciones deben resolverse en cada caso mediante iteraciones sucesivas por métodos de cálculo numérico.

Debido a la aparente intratabilidad de esas ecuaciones es tentador volver al uso de los estimadores previamente mencionados, pero está demostrado [ver Dunn (1977)] que se pierde considerable información usando tal estrategia.

Dunn & Gipson proponen para este caso B) un procedimiento mixto de estimación que es el siguiente:

Dado que la observación inicial de cada hoja no proporciona información sobre  $\Gamma$ , se toma como estimador de  $\Gamma$  el del caso anterior, es decir,

$$\hat{\Gamma} = \left[ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij} z'_{ij-1} - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij} \right) \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij-1} \right)' \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij-1} z'_{ij-1} - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij-1} \right) \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij-1} \right)' \right]^{-1}$$

y, por tanto

$$\hat{B} = \frac{1}{t} \ln \Gamma$$

Calculamos a partir de las observaciones iniciales

$$\hat{\mu}_I = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b z_{i0}$$

$$\hat{\Lambda}_I = (b-1)^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^b z_{i0} z'_{i0} - \frac{1}{b} \left( \sum_{i=1}^b z_{i0} \right) \left( \sum_{i=1}^b z_{i0} \right)' \right\}$$

y a partir de las observaciones sucesivas, igual que en el caso anterior

$$\hat{\mu}_S = (I - \hat{\Gamma})^{-1} \hat{\nu}$$

$$\text{vec } \hat{\Lambda}_S = [I - (\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma})]^{-1} \text{vec } \hat{\Phi}$$

con

$$\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \hat{\Gamma} z_{ij-1})$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \hat{\nu} - \hat{\Gamma} z_{ij-1})(z_{ij} - \hat{\nu} - \hat{\Gamma} z_{ij-1})'$$

Vamos a obtener estimadores ponderados a partir de dichos estimadores. Para ello vamos a utilizar algunas cajas de la matriz de informaci3n.

La matriz de informaci3n asociada a las observaciones iniciales de cada hoja con respecto al vector de par3metros

$$[\mu', \text{vec}(\Gamma)', \text{vec}(\Lambda)']$$

es

$$F_I = \begin{bmatrix} F_{I\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{I\Lambda} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } F_{I\mu} = \Lambda^{-1} \text{ y } F_{I\Lambda} = \frac{1}{2} T(\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} T'$$

y la matriz de informaci3n asociada a las observaciones sucesivas viene dada por

$$F_S = \begin{bmatrix} F_{S\mu} & 0 & 0 \\ 0 & F_{S\Gamma} & F_{S\Gamma}' \\ 0 & F_{S\Gamma} & F_{S\Lambda} \end{bmatrix}$$

con

$$F_{S\mu} = (I - \Gamma') \Phi^{-1} (I - \Gamma)$$

$$F_{S\Gamma} = \Lambda \otimes \Phi^{-1} + (\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1}) + (\Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1})_{(p)}$$

$$F_{SJ} = -T[I - (\Gamma \otimes \Gamma)]' (\Phi \otimes \Phi)^{-1} (\Gamma \Lambda \otimes I)$$

$$F_{SA} = \frac{1}{2} T[I - (\Gamma \otimes \Gamma)]' (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [I - (\Gamma \otimes \Gamma)] T'$$

El símbolo  $A_{(p)}$  indica una permutación p-cíclica de las filas de la matriz A como definieron Tracy & Dwyer (1969), mientras que T es una matriz de dimensión  $p(p+1)/2 \times p^2$  compuesta por ceros y unos, que es la derivada de  $\text{vec} \Lambda$  con respecto a sus elementos. (En el Apéndice se presenta un programa de ordenador que calcula dicha matriz T)

El estimador ponderado que se propone es

$$\text{vec}(\hat{\Lambda}) = (b F_{IA} + n F_{SA})^{-1} \left[ b F_{IA} \text{vec}(\hat{\Lambda}_I) + n F_{SA} \text{vec}(\hat{\Lambda}_S) \right]$$

mediante el cual, por iteraciones sucesivas, se calcula el estimador de  $\Lambda$ . (Por  $\text{vec}(\hat{\Lambda})$  representamos por columnas la parte triangular superior de  $\hat{\Lambda}$ ).

Por último, vamos a dar este método iterativo más desglosado

1°) A partir de  $\hat{\Lambda}_I$  y  $\hat{\Lambda}_S$  tomamos un primer estimador de  $\Lambda$ , y lo notamos  $\hat{\Lambda}^{(1)}$ .

Proponemos

$$\hat{\Lambda}^{(1)} = (b+n)^{-1} [b\hat{\Lambda}_I + n\hat{\Lambda}_S]$$

2°) Calculamos

$$\hat{\Phi}^{(j)} = \hat{\Lambda}^{(j)} - \hat{\Gamma} \hat{\Lambda}^{(j)} \hat{\Gamma}'$$

$$\hat{F}_{IA}^{(j)} = \frac{1}{2} T(\hat{\Lambda}^{(j)} \otimes \hat{\Lambda}^{(j)})^{-1} T'$$

$$\hat{F}_{SA}^{(j)} = \frac{1}{2} T[I - (\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma})]' (\hat{\Phi}^{(j)} \otimes \hat{\Phi}^{(j)})^{-1} [I - (\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma})] T'$$

$j=1, 2, \dots$

$$3^\circ) \text{vec}(\hat{\Lambda}^{(j+1)}) = (b\hat{F}_{I\Lambda}^{(j)} + n\hat{F}_{S\Lambda}^{(j)})^{-1} [b\hat{F}_{I\Lambda}^{(j)} \text{vec}(\hat{\Lambda}_I) + n\hat{F}_{S\Lambda}^{(j)} \text{vec}(\hat{\Lambda}_S)]$$

A partir de aquí, volveríamos al paso 2, hasta que el método converja.

Una vez obtenidos los estimadores  $\hat{\Lambda}$  y  $\hat{\Phi}$ , se calcula

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= (b\hat{F}_{I\mu} + n\hat{F}_{S\mu})^{-1} (b\hat{F}_{I\mu} \hat{\mu}_I + n\hat{F}_{S\mu} \hat{\mu}_S) \\ &= (b\hat{\Lambda}^{-1} + n\hat{F}_{S\mu})^{-1} (b\hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mu}_I + n\hat{F}_{S\mu} \hat{\mu}_S) \end{aligned}$$

Finalmente, la matriz de información para la muestra total será

$$F_T = b F_I + n F_S$$

Vamos a ver una aplicación práctica del algoritmo dado y cómo la primera estimación de  $\Lambda$  que proponemos en el paso 1° es bastante próxima a la estimación final.

Los datos que vamos a utilizar son los de un coyote macho de cinco años equipado con un transmisor en la primavera de 1970 (Gipson (1972)). Se tomó un intervalo muestral de  $t=15$  minutos,  $b=9$  observaciones iniciales y  $n=151$  observaciones sucesivas, obteniéndose las siguientes estimaciones:

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.9478 & 0.0416 \\ -0.0059 & 0.9690 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.3568 & 0.2896 \\ -0.0410 & -0.2089 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mu}'_I = [7.691 \quad 2.252]$$

$$\hat{\mu}'_S = [7.762 \quad 1.840]$$

$$\hat{\Lambda}_I = \begin{bmatrix} 1.0209 & -0.2401 \\ -0.2401 & 0.4129 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Lambda}_S = \begin{bmatrix} 0.4248 & 0.1529 \\ 0.1529 & 0.3473 \end{bmatrix}$$

con los que Dunn & Gipson llegan en seis iteraciones a

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.4526 & 0.1361 \\ 0.1361 & 0.3585 \end{bmatrix}$$

Nuestra primera estimación propuesta da lugar a

$$\hat{\Lambda}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.45833 & 0.130793 \\ 0.130793 & 0.35099 \end{bmatrix}$$

y a partir de ella

$$\hat{\Lambda}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.450356 & 0.135044 \\ 0.135044 & 0.357339 \end{bmatrix}$$

que es ya bastante próxima a la estimación final.

#### "Home range" de cada animal

Segun Jennrich & Turner (1969) el "home range" de un animal consiste en la región más pequeña que tiene una probabilidad específica de contener la localización del animal en un tiempo determinado  $t$ .

A partir de la expresión (2.2), para una probabilidad  $1-\alpha$ , tal "región de confianza" para el  $i$ -ésimo animal consiste en las coordenadas bidimensionales  $z$  que verifiquen

$$(z-\mu_i)' \Lambda_{ii}^{-1} (z-\mu_i) \leq \chi_{2,1-\alpha}^2 \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.4)$$

donde  $\chi_{2,1-\alpha}^2$  es el valor de una chi-cuadrado con 2 grados de libertad que deja a la izquierda una probabilidad  $1-\alpha$ .

Cada una de las  $m$  regiones definidas por dicha expresión es elíptica con centro  $\mu_1$  y área dada por

$$A_1 = \pi |\Lambda_{11}|^{1/2} \chi_{2,1-\alpha}^2$$

A su vez, dada la localización de los animales en el tiempo  $s$ ,  $z(s)$ , un estimador puntual de las coordenadas esperadas de los animales en el tiempo  $s+t$  viene dado por la media de la distribución condicionada (2.3)

$$\mu(s+t/s) = \mu + e^{Bt} [z(s) - \mu]$$

Y una región de confianza, al nivel  $1-\alpha$ , para el  $i$ -ésimo animal consiste en las coordenadas bivariantes  $z$  que verifiquen

$$\{z - [\mu(s+t/s)]_1\}' [\Phi]_{11}^{-1} \{z - [\mu(s+t/s)]_1\} \leq \chi_{2,1-\alpha}^2$$

donde  $[\mu(s+t/s)]_1$  y  $[\Phi]_{11}$  son particiones bidimensionales de  $\mu(s+t/s)$  y  $\Phi$ , respectivamente, correspondientes al  $i$ -ésimo animal.

(Para el cálculo de exponenciales de matrices, ver Gonzalez Carmona (1985), Tesis Doctoral, Universidad de Granada).

Vamos a hacer un estudio del centro, forma, orientación y tamaño de un elipsoide general de la forma

$$(x-\mu)' \Sigma^{-1} (x-\mu) = c$$

en  $E^p$ , el cual nos englobaría los dos casos anteriores.

Dicho elipsoide tiene por centro  $\mu$ , su forma y orientación están determinados por  $\Sigma$ , y su tamaño por  $c$ . El eje principal del elipsoide tendrá por coordenadas aquellas que maximicen su media longitud al cuadrado

$$(x-\mu)' (x-\mu)$$



sujeto a la restricción

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=c$$

Usando el multiplicador de Lagrange podemos concluir que  $\mathbf{x}$  debe maximizar la expresión

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})-\lambda(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$$

Derivando esta expresión con respecto a (las coordenadas de)  $\mathbf{x}$  e igualando (sus derivadas parciales) a cero, deducimos que las coordenadas del primer eje principal verifican

$$(\mathbf{I}-\lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=0$$

o equivalentemente

$$(\boldsymbol{\Sigma}-\lambda \mathbf{I})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=0$$

De aquí se deduce que la longitud al cuadrado del eje principal del elipsoide es igual a

$$4(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=4\lambda_1(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=4\lambda_1 c$$

donde  $\lambda_1$  es la raíz característica mayor de  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

Las coordenadas de  $\mathbf{x}$  que dan el eje principal son proporcionales al vector característico correspondiente a  $\lambda_1$ . Así, la posición del eje principal del elipsoide viene dada por la dirección del vector característico normalizado correspondiente a la raíz característica mayor de  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

El segundo eje tiene la orientación dada por el vector característico normalizado correspondiente a la segunda raíz característica mayor de  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\lambda_2$ , y la longitud al cuadrado del segundo eje vendrá dada por  $4\lambda_2 c$ .

Tomando las siguientes raíces características en orden decreciente se irán calculando los sucesivos ejes.

NOTAS. -

- En nuestro modelo dicho elipsoide será una elipse (dimensión 2) y, por tanto, sólo tendrá dos ejes.

- Si las raíces características son distintas, los vectores característicos son ortogonales y los ejes están determinados de forma única.

- Si dos raíces características de  $\Sigma$  son iguales, el elipsoide es circular en el plano generado por los vectores característicos correspondientes.

En nuestro modelo, si las dos raíces características son iguales tendremos un círculo en el plano generado por los vectores característicos.

Ejemplo. -

Usando los datos de Jeselnik, que observó los movimientos de un zorro gris macho en la primavera de 1979 en el Parque Nacional de Investigaciones del Medio Ambiente del río Savannah y obtuvo 30 hojas de datos, cada una consistente en 4 observaciones hechas con un intervalo de 30 minutos, se obtienen las siguientes estimaciones:

$$\hat{\mu} = [2.2872 \quad 2.0224] \quad (\text{Km})$$

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.11595 & -0.03732 \\ -0.03732 & 0.11243 \end{bmatrix} \quad (\text{Km}^2)$$

$$\hat{B} = -10^{-2} \begin{bmatrix} 0.66057 & 0.08032 \\ 0.09107 & 0.67296 \end{bmatrix}$$

Una región de confianza al 95% para el instante inicial vendrá dada

por

$$(\mathbf{x}-\hat{\boldsymbol{\mu}})' \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} (\mathbf{x}-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \leq \chi_{(2),1-\alpha}^2 \quad \alpha = 0.05$$

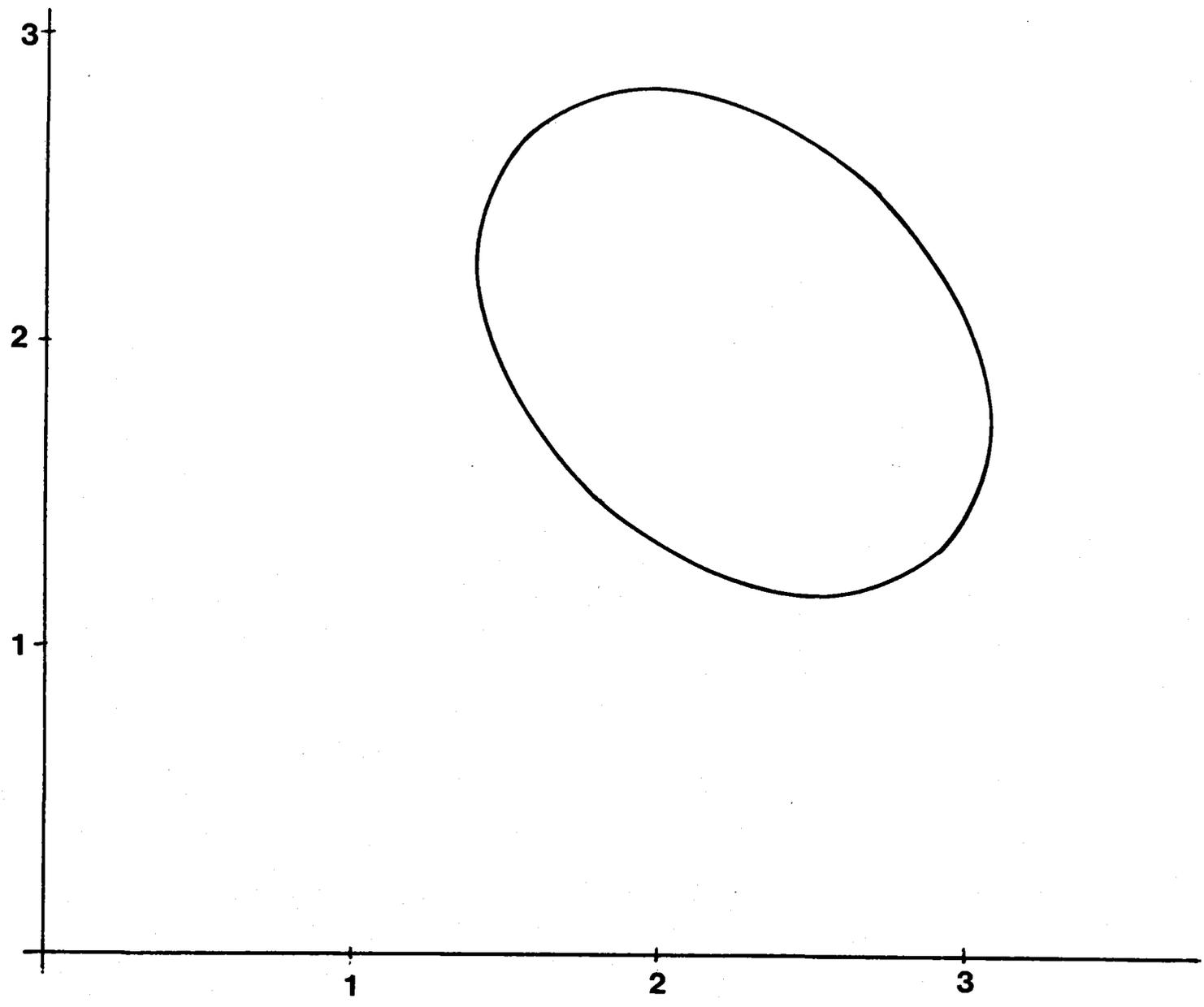
Dicha elipse tiene las siguientes características:

CENTRO [2.2872, 2.0224]

EJES

Pincipal	Dirección	(0.723569, -0.690251)
	Longitud	1.90556
Secundario	Dirección	(0.690251, 0.723569)
	Longitud	1.35676

Su representación gráfica es



## Interacción territorial

Distinguiremos dos tipos de interacción territorial entre cada par de animales:

### Interacción estática.-

Este tipo de interacción refleja el hecho de que los "home range" de dos animales puedan solaparse y su ocurrencia dependerá de las particiones hechas en el vector  $\mu$ , de las cajas en la diagonal principal de la matriz particionada  $\Lambda$  y del valor tomado para  $\alpha$ .

Para observar este tipo de interacción bastará calcular los "home range" de cada animal mediante las elipses ya estudiadas y comprobar el grado de solapamiento.

Sin embargo, vamos a definir un coeficiente que va a dar un valor numérico que medirá ese grado de solapamiento de forma normalizada, y de este modo se podrá comparar la interacción estática de cualesquiera dos pares distintos de animales.

Dados dos animales cualesquiera  $i, j$ , sea  $\epsilon_i$  la elipse dada por (4) para el animal  $i$  y  $\epsilon_j$  para el  $j$ . Definimos el Coficiente de Interacción Estática ( o de solapamiento de "home range") entre los animales  $i, j$  como

$$C.I.E. (i, j) = \frac{\text{Area}(\epsilon_i \cap \epsilon_j)}{\text{Min} \{ \text{Area}(\epsilon_i), \text{Area}(\epsilon_j) \}}$$

$$i, j=1, 2, \dots, m; i \neq j.$$

Claramente, este coeficiente toma valores comprendidos entre 0 y 1.

El valor 0 significa que las dos elipses no tienen intersección, es decir, el solapamiento es nulo.

Para poder comparar a dos pares de animales con C.I.E. nulo se podría estudiar la distancia entre las elipses, pero éste es un problema que no





CENTRO [2.960, 3.366]

EJES

Principal	Dirección	(0.8016255, -0.59782)
	Longitud	2.017011733
Secundario	Dirección	(0.59782, 0.801625)
	Longitud	0.885191315

Elipse para el animal 2

Tiene la forma

$$[x-2.938, y-3.362] \begin{bmatrix} 0.1012 & -0.0464 \\ -0.0464 & 0.0769 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x-2.938 \\ y-3.362 \end{bmatrix} = 5.99$$

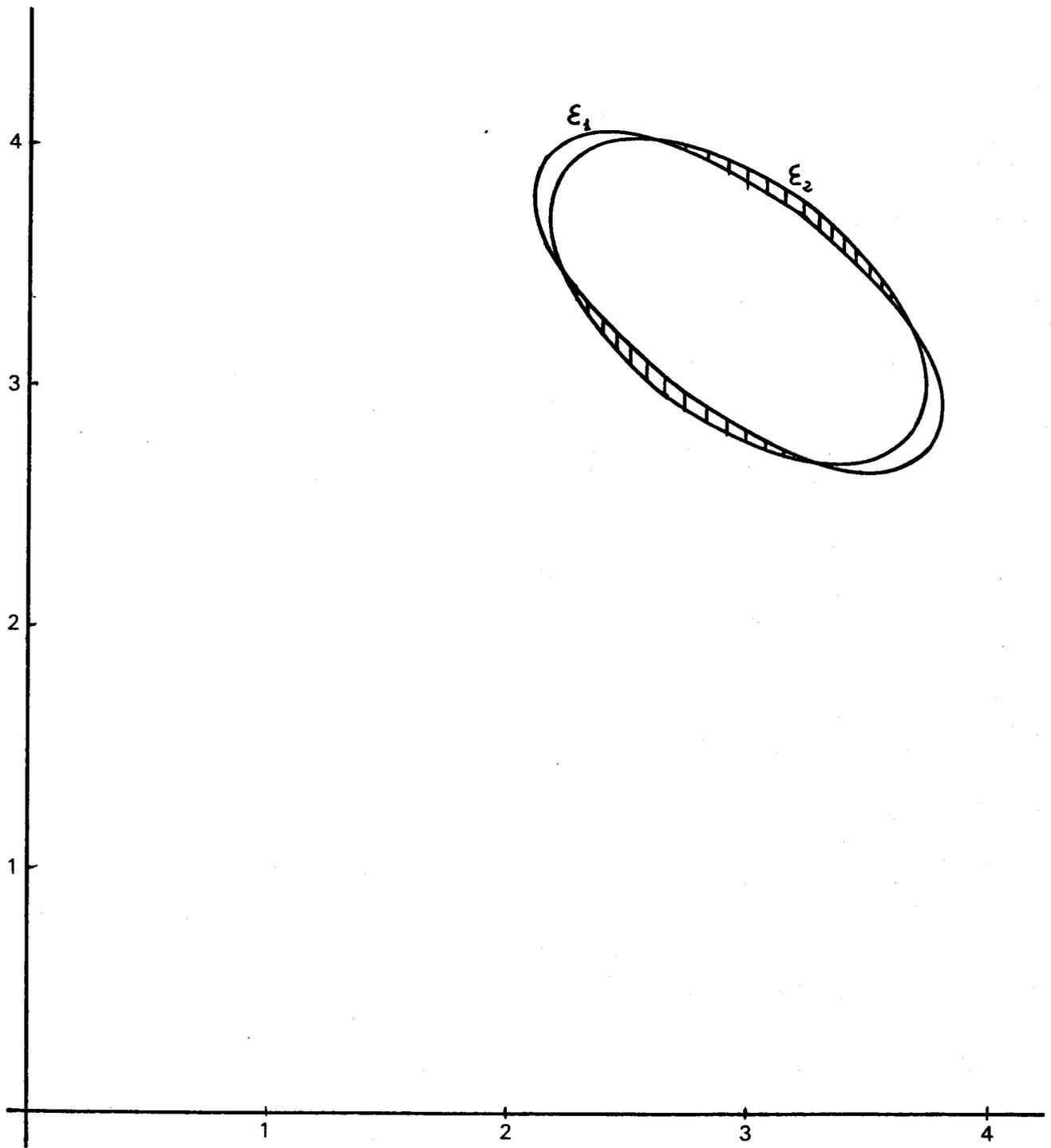
y las siguientes características

CENTRO [2.938, 3.362]

EJES

Principal	Dirección	(0.7916164, -0.611018)
	Longitud	1.811867741
Secundario	Dirección	(0.611018, 0.791616)
	Longitud	0.992175016

La representación gráfica de ambas elipses es la siguiente:



Tendremos que calcular, en primer lugar, las áreas de las dos elipses.

$$\text{Area}(\varepsilon_1) = \pi (2.017011733/2) (0.885191315/2) = 1.407554074$$

$$\text{Area}(\varepsilon_2) = \pi (1.811867741/2) (0.992175016/2) = 1.411902349$$

y, en segundo lugar, el área de la intersección de las dos elipses. Fijémonos en que dicha área no es más que el área de  $\varepsilon_2$  menos las áreas de las zonas rayadas. Por tanto nuestro objetivo será calcular dichas áreas.

Para ello, vamos a expresar  $\varepsilon_1$  de forma canónica.

En primer lugar, le restamos el centro para llevarla al origen de coordenadas y luego hacemos el cambio de variables asociado al cambio de base ortonormal que diagonaliza la forma cuadrática asociada a la elipse.

El cambio global es el siguiente:

$$x = 0.801625139 x' + 0.597826604 y' + 2.960$$

$$y = -0.597827012 x' + 0.801625444 y' + 3.366$$

resultando, al aplicarlo, las siguientes ecuaciones de las elipses:

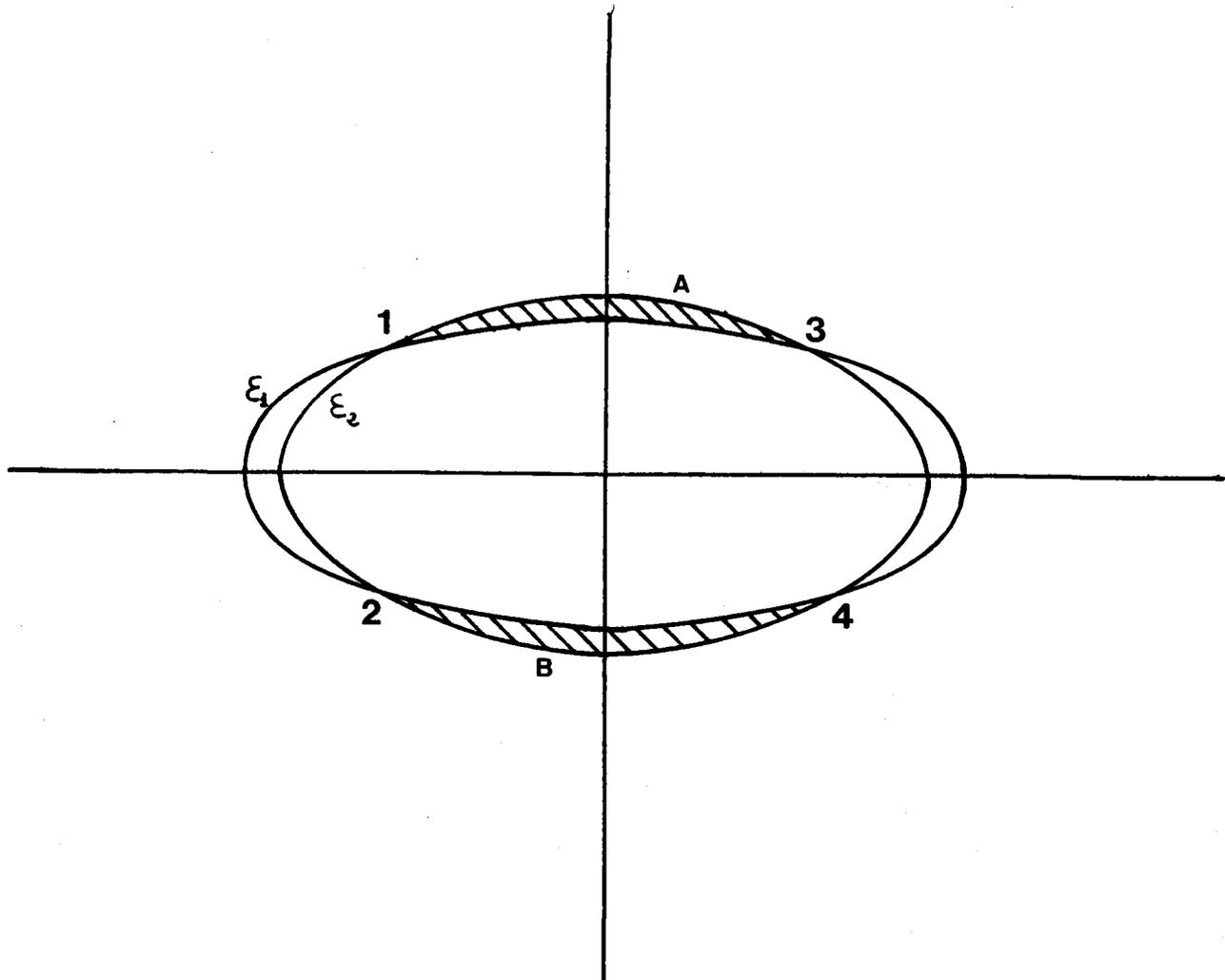
Para  $\varepsilon_1$

$$\frac{x'^2}{1.017084081} + \frac{y'^2}{0.195890916} = 1$$

Para  $\varepsilon_2$

$$\begin{aligned} & -0.031225267 x'^2 + 0.001305418 x' + 0.136988084 y'^2 + \\ & + 0.004530311 y' + 0.003176318 x'y' = 0.030949128 \end{aligned}$$

La representación gráfica, ahora, es



Las áreas de las zonas rayadas se pueden calcular como las integrales de determinadas funciones entre los puntos de intersección de las dos elipses.

Calculamos dichos puntos aplicando el Metodo de Newton-Raphson de resolución aproximada de ecuaciones obteniendo los siguientes puntos

- 1) (-0.495187253, 0.385621098)
- 2) (-0.627710771, -0.346523998)
- 3) ( 0.306577598, 0.421693662)
- 4) (0.615412505, -0.350687197)

Calculamos las áreas de las zonas rayadas aplicando la Fòrmula de Simpson para Integración Numèrica, obteniendo

$$\text{Area}(A) = 0.04666$$

$$\text{Area}(B) = 0.10905$$

Y, por tanto, el area de la intersección de las dos elipses vale  $\text{Area}(\epsilon_2) = 0.04666 + 0.10905 = 1.256192349$ .

Y, por último, el Coeficiente de Interacción Estática para dichos animales valdrá

$$\text{C.I.E.}(1,2) = \frac{1.256184489}{1.407554074} = 0.892459133$$

lo cual indica que el grado de solapamiento entre los territorios de los dos animales es bastante grande.

Interacción dinámica. -

La existencia de interacción dinámica implica el hecho de que los movimientos de los animales estén correlados.

Un contraste completo se realiza en dos etapas:

$$H_0^{(1)}: \Phi_{12} (= \Phi_{21}') = 0$$

$$H_0^{(2)}: \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0 \quad \text{dado } \Phi_{12} = 0$$

Este último se descompone a su vez en dos:

$$H_0^{(2a)}: \Gamma_{12} = 0$$

$$H_0^{(2b)}: \Gamma_{21} = 0$$

$H_0^{(1)}$  equivale a contrastar la independencia de las posiciones de los animales en el tiempo  $s+t$ , dadas las posiciones en el tiempo  $s$ .

$H_0^{(2a)}$  equivale a contrastar que la posición del primer animal en el tiempo  $s+t$  no depende de la posición del segundo animal en el tiempo  $s$ . Y

$H_0^{(2b)}$  equivale a contrastar que la posición del segundo animal en el tiempo  $s+t$  no depende de la del primer animal en el tiempo  $s$ .

Hay que hacer notar que los tiempos  $s$  y  $s+t$  se considerarán fijos con el fin de poder utilizar tests multivariantes en distribuciones normales multivariantes asociadas al Ornstein-Uhlenbeck, de tal manera que en otros dos tiempos cualesquiera cambian las leyes normales en  $\mu$  y  $\Sigma$ .

Para el primer contraste utilizaremos un test de independencia de dos conjuntos de variables y para el segundo un test para la matriz de un modelo lineal de la forma

$$Y = ( X_1, X_2 ) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + E_0$$

.....

Vamos a estudiar cada uno de ellos con más detalle.

---


$$H_0^{(1)}: \Phi_{12} (= \Phi_{21}') = 0$$


---

TESTS DE INDEPENDENCIA DE CONJUNTOS DE VARIABLES.

Supongamos una variable aleatoria p-dimensional, con una distribución conjunta normal, particionada en q subvectores. Queremos saber si esos q conjuntos de variables son mutuamente independientes, lo cual es equivalente a que cada variable de cada subvector esté incorrelada con cualquier variable de otro subvector.

Vamos a obtener el test de razón de verosimilitudes para contrastar la independencia de conjuntos de variables.

Sea

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

(En nuestro modelo X sería z(s+t),  $\mu$  corresponde a  $\mu + e^{Bt} [z(s) - \mu]$  y  $\Sigma$  a  $\Phi(t)$ , pero utilizaremos esa notación por comodidad).

Particionamos X en q subvectores con  $p_1, p_2, \dots, p_q$  componentes respectivamente



$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ \vdots \\ X^{(q)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

El vector de medias  $\mu$  y la matriz de covarianza  $\Sigma$  estarán particionadas de forma similar

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \\ \vdots \\ \mu^{(q)} \end{bmatrix} \quad (2.6) \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \dots & \Sigma_{1q} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \dots & \Sigma_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma_{q1} & \Sigma_{q2} & \dots & \Sigma_{qq} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La hipótesis nula que queremos contrastar es que los subvectores  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(q)}$  son mutuamente independientes, es decir, que la densidad de  $X$  se puede expresar como el producto de las densidades de  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(q)}$ .

$$H : f(x/\mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^q f(x^{(i)}/\mu^{(i)}, \Sigma_{ii})$$

lo cual es equivalente a

$$H : \Sigma_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

donde

$$\Sigma_{ij} = E [X^{(i)} - \mu^{(i)}][X^{(j)} - \mu^{(j)}]'$$

o alternativamente

$$H : \Sigma = \Sigma_0$$

donde

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{qq} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Dada una muestra  $x_1, x_2, \dots, x_N$  de  $N$  observaciones de  $X$ , el criterio de razón de verosimilitudes es

$$\lambda = \frac{\max_{\mu, \Sigma_0} L(\mu, \Sigma_0)}{\max_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)}$$

donde

$$L(\mu, \Sigma) = \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_\alpha - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_\alpha - \mu) \right]$$

y  $L(\mu, \Sigma_0)$  es igual a  $L(\mu, \Sigma)$  con  $\Sigma_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$  y el máximo se toma con respecto a todos los vectores  $\mu$  y  $\Sigma$  y  $\Sigma_0$  definidas positivas.

Se obtiene que

$$\max_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{pN/2} |\Sigma_\Omega|^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} pN \right\}$$

donde

$$\Sigma_\Omega = \frac{1}{N} A = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{x}_\alpha - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_\alpha - \bar{\mathbf{x}})' \quad (2.9)$$

Bajo la hipótesis nula

$$L(\mu, \Sigma_0) = \prod_{i=1}^q L_1(\mu^{(i)}, \Sigma_{11})$$

donde

$$\begin{aligned} L_1(\mu^{(1)}, \Sigma_{11}) &= \\ &= \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{p_1/2} |\Sigma_{11}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_\alpha^{(1)} - \mu^{(1)})' \Sigma_{11}^{-1} (\mathbf{x}_\alpha^{(1)} - \mu^{(1)}) \right\} \end{aligned}$$

Claramente

$$\begin{aligned} \max_{\mu, \Sigma_0} L(\mu, \Sigma_0) &= \prod_{i=1}^q \max_{\mu^{(i)}, \Sigma_{11}} L_1(\mu^{(i)}, \Sigma_{11}) = \\ &= \prod_{i=1}^q \frac{1}{(2\pi)^{p_1 N/2} |\Sigma_{11w}|^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} p_1 N\right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{pN/2} \prod_{i=1}^q |\Sigma_{11w}|^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} p N\right\} \end{aligned}$$

donde

$$\Sigma_{11w} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{x}_\alpha^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})(\mathbf{x}_\alpha^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})'$$

Si particionamos A y  $\Sigma_\Omega$  como  $\Sigma$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qq} \end{bmatrix} \quad \Sigma_\Omega = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \dots & \Sigma_{1q} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \dots & \Sigma_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma_{q1} & \Sigma_{q2} & \dots & \Sigma_{qq} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

se tiene que  $\Sigma_{11w} = \Sigma_{11} = \frac{1}{N} A_{11}$ .

El criterio de razón de verosimilitud es

$$\lambda = \frac{\max_{\mu, \Sigma_0} L(\mu, \Sigma_0)}{\max_{\mu, \Sigma} L(\mu, \Sigma)} = \frac{|\Sigma_\Omega|^{N/2}}{\prod_{i=1}^q |\Sigma_{11}|^{N/2}} = \frac{|A|^{N/2}}{\prod_{i=1}^q |A_{11}|^{N/2}} \quad (2.11)$$

y la región crítica del test de razón de verosimilitudes

$$\lambda \leq \lambda(\epsilon) \quad (2.12)$$

donde  $\lambda(\epsilon)$  es un número tal que la probabilidad de (2.12) sea  $\epsilon$  cuando  $\Sigma = \Sigma_0$ .

Sea

$$V = \frac{|A|}{\prod_{i=1}^q |A_{i1}|} \quad (2.13)$$

entonces  $\lambda = V^{N/2}$  es una función monótona creciente de  $V$  y la región crítica dada es equivalente a

$$V \leq V(\epsilon) \quad (2.14)$$

Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema. -

Sea  $x_1, \dots, x_N$  una muestra de  $N$  observaciones extraídas de una  $N(\mu, \Sigma)$ , donde  $x_\alpha, \mu$  y  $\Sigma$  están particionadas en  $p_1, \dots, p_q$  filas (y columnas en el caso de  $\Sigma$ ) como indicamos en (2.5), (2.6) y (2.7). El criterio de razón de verosimilitudes de que los  $q$  conjuntos de componentes son mutuamente independientes está dado por (2.11), donde  $A$  está definida por (2.9) y particionada según (2.10). El test de razón de verosimilitudes está dado por (2.12) y, equivalentemente por (2.14), donde  $V$  está definido por (2.13) y  $\lambda(\epsilon)$  o  $V(\epsilon)$  se eligen para obtener el nivel de significación.

Propiedad de invarianza del criterio. -

Este criterio dado tiene una cierta propiedad de invarianza. Sea  $C_1$  una matriz arbitraria, no singular, de orden  $p_1$ , y sea

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & C_q \end{bmatrix}$$

Sea  $x_\alpha^* = C x_\alpha$ . Entonces, el criterio para la independencia en

términos de  $\mathbf{x}_\alpha^*$  es idéntico al criterio en términos de  $\mathbf{x}_\alpha$ . Sea  $A^* = \sum_\alpha (\mathbf{x}_\alpha^* - \bar{\mathbf{x}}^*)(\mathbf{x}_\alpha^* - \bar{\mathbf{x}}^*)'$  particionada en submatrices  $A_{1j}^*$ . Entonces

$$\begin{aligned} A_{1j}^* &= \sum_\alpha (\mathbf{x}_\alpha^{*(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{*(1)})(\mathbf{x}_\alpha^{*(j)} - \bar{\mathbf{x}}^{*(j)})' = \\ &= C_1 \sum_\alpha (\mathbf{x}_\alpha^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})(\mathbf{x}_\alpha^{(j)} - \bar{\mathbf{x}}^{(j)})' C_j' = C_1 A_{1j} C_j' \end{aligned}$$

y  $A^* = C A C'$ . Así

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{|A^*|}{\prod |A_{11}^*|} = \frac{|C A C'|}{\prod |C_1 A_{11} C_1'|} = \frac{|C| |A| |C'|}{\prod |C_1| |A_{11}| |C_1'|} = \\ &= \frac{|A|}{\prod |A_{11}|} = V \end{aligned}$$

ya que  $|C| = \prod |C_1|$ .

Por tanto, el test es invariante con respecto a transformaciones lineales en cada conjunto.

Además, Narain (1950) demostró que el test basado en  $V$  es estrictamente insesgado, esto es, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula es mayor que el nivel de significación si la hipótesis no es cierta [ver también Daly (1940)].

#### Distribuciones del criterio.-

Para poder calcular los puntos de significación  $V(\epsilon)$  debemos conocer la distribución de  $V$  cuando la hipótesis nula es cierta.

En algunos casos especiales, tales como  $q=2$ ,  $q=p$  o  $p_1=p_2=\dots=p_q=2$  (en nuestro modelo nos interesará  $q=2$ ) se obtiene la distribución exacta de  $V$  como producto de variables aleatorias independientes.

El momento de orden  $h$  de  $V$  es

$$\begin{aligned}
 E V^h &= \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i) + h\right] \prod_{i=1}^q \left\{ \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j)\right] \right\}}{\prod_{i=1}^p \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right] \prod_{i=1}^q \left\{ \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j) + h\right] \right\}} = \\
 &= \prod_{i=p_1+1}^p \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i) + h\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]} \prod_{i=2}^q \left\{ \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j) + h\right]} \right\} = \\
 &= \prod_{i=2}^q \left[ \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-\bar{p}_i-j) + h\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-\bar{p}_i-j)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j) + h\right]} \right]
 \end{aligned}$$

donde  $\bar{p}_i = p_1 + \dots + p_{i-1}$ .

Multiplicando y dividiendo por  $\Gamma\left[\frac{1}{2}\bar{p}_i\right]$  se tiene

$$\begin{aligned}
 E V^h &= \prod_{i=2}^q \left\{ \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-\bar{p}_i-j) + h\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}\bar{p}_i\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-\bar{p}_i-j)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}\bar{p}_i\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j) + h\right]} \right\} \\
 &= \prod_{i=2}^q \left\{ \prod_{j=1}^{p_i} B^{-1}\left[\frac{1}{2}(n+1-\bar{p}_i-j), \frac{1}{2}\bar{p}_i\right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \int_0^1 x^{(1/2)(n+1-\bar{p}_i-j)+h-1} (1-x)^{(1/2)\bar{p}_i-1} dx \right\}
 \end{aligned}$$

ya que  $B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$ .

Por tanto,  $V$  está distribuido como  $\prod_{i=2}^q \left\{ \prod_{j=1}^{p_i} X_{ij} \right\}$ , donde las  $X_{ij}$  son independientes y  $X_{ij}$  tiene densidad

$$\beta\left[x; \frac{1}{2}(n+1-\bar{p}_i-j), \frac{1}{2}\bar{p}_i\right]$$

Si los  $p_i$  son pares, por ejemplo  $p_i = 2r_i$ ,  $i > 1$ , entonces usando la fórmula de duplicación [  $\Gamma(\alpha+1/2) \Gamma(\alpha+1) = \sqrt{\pi} \Gamma(2\alpha+1) 2^{-2\alpha}$  ] para la función gamma podemos reducir el momento de orden  $h$  de  $V$  a

$$E V^h = \prod_{i=2}^q \left\{ \prod_{k=1}^{r_i} \frac{\Gamma(n+1-\bar{p}_i-2k+2h) \Gamma(n+1-2k)}{\Gamma(n+1-\bar{p}_i-2k) \Gamma(n+1-2k+2h)} \right\} =$$

$$= \prod_{i=2}^q \left\{ \prod_{k=1}^{r_i} B^{-1}(n+1-\bar{p}_i-2k, \bar{p}_i) \int_0^1 x^{n+1-\bar{p}_i-2k+2h-1} (1-x)^{\bar{p}_i-1} dx \right\}$$

y entonces  $V$  se distribuye como  $\prod_{i=2}^q \left\{ \prod_{k=1}^{r_i} Y_{ik}^2 \right\}$  donde las  $Y_{ik}$  son independientes, e  $Y_{ik}$  tiene densidad

$$\beta(y; n+1-\bar{p}_i-2k, \bar{p}_i)$$

#### Caso particular $q=2$

En este caso

$$E V^h = \prod_{i=p_2+1}^p \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i) + h\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]} \right\}_{j=1}^{p_1} \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-j) + h\right]} \right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{p_1} \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-p_2+1-i) + h\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-p_2+1-i)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i) + h\right]} \right\}$$

#### Distribucion asintotica del criterio de razon de verosimilitudes.-

Aunque la distribución exacta de  $V$  es complicada, Wilks y otros autores han obtenido buenas aproximaciones en términos de funciones

tabuladas. En particular, Box (1949) demostrò que

$$\chi^2 = - \frac{N-1}{C} \ln V$$

se distribuye aproximadamente como una chi-cuadrado con  $f$  grados de libertad cuando la hipótesis nula de independencia es cierta, donde

$$C^{-1} = 1 - \frac{1}{12 f(N-1)} (2 \Sigma_3 + 3 \Sigma_2)$$

$$f = \frac{1}{2} \Sigma_2$$

$$\Sigma_s = \left[ \sum_{i=1}^k p_i \right]^s - \sum_{i=1}^k p_i^s = p^s - \sum_{i=1}^k p_i^s \quad s=1,2$$

Sin embargo, la aproximación asintótica dada por Box no es suficiente para alcanzar la precisión deseada en algunas situaciones prácticas.

Siguiendo el método de Box se obtiene

$$\Pr \left\{ -m \ln V \leq v \right\} = \Pr \left\{ \chi_f^2 \leq v \right\} + \frac{\gamma_2}{m^2} \left[ \Pr \left\{ \chi_{f+4}^2 \leq v \right\} - \Pr \left\{ \chi_f^2 \leq v \right\} \right] + O(m^{-3})$$

donde

$$m = N - \frac{3}{2} - \frac{p^3 - \sum p_i^3}{3(p^2 - \sum p_i^2)}$$

$$f = \frac{1}{2} \left[ p(p+1) - \sum p_i(p_i+1) \right] = \frac{1}{2} (p^2 - \sum p_i^2)$$

$$\gamma_2 = \frac{p^4 - \sum p_i^4}{48} - \frac{5(p^2 - \sum p_i^2)}{96} - \frac{(p^3 - \sum p_i^3)^2}{72(p^2 - \sum p_i^2)}$$

En particular, si  $q = 2$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
& \Pr \left\{ -m \log V \leq z \right\} = \Pr \left\{ \chi_{p_1 p_2}^2 \leq z \right\} + \\
& + \frac{\gamma_2}{m^2} \left[ \Pr \left\{ \chi_{p_1 p_2 + 4}^2 \leq z \right\} - \Pr \left\{ \chi_{p_1 p_2}^2 \leq z \right\} \right] + \\
& + \frac{1}{m^4} \left[ \gamma_4 \left[ \Pr \left\{ \chi_{p_1 p_2 + 8}^2 \leq z \right\} - \Pr \left\{ \chi_{p_1 p_2}^2 \leq z \right\} \right] - \right. \\
& \left. - \gamma_2^2 \left[ \Pr \left\{ \chi_{p_1 p_2 + 4}^2 \leq z \right\} - \Pr \left\{ \chi_{p_1 p_2}^2 \leq z \right\} \right] \right] + R_5^V
\end{aligned}$$

donde

$$\gamma_2 = \frac{p_1 p_2 (p_1^2 + p_2^2 - 5)}{48}$$

$$m = N - 1 - \frac{1}{2} (p_1 + p_2 + 1)$$

$$\gamma_4 = \frac{\gamma_2^2}{2} + \frac{p_1 p_2}{1920} \left[ 3p_1^4 + 3p_2^4 + 10p_1^2 p_2^2 - 50(p_1^2 + p_2^2) + 159 \right]$$

y  $R_5^V$  es de orden  $m^{-5}$ .

J. C. Lee, T. C. Chang and P. R. Krishnaiah (1976) obtuvieron términos hasta el orden  $O(n^{-15})$  aplicando el método de Box.

Lee et al. (1977) aproximaron la distribución de  $V^{1/4}$  con la distribución tipo I de Pearson. Una comparación de los valores obtenidos por la aproximación de Lee, Chang and Krishnaiah (LCK) con los correspondientes valores obtenidos usando un desarrollo de Box hasta el orden  $n^{-13}$  viene dado en Krishnaiah & Lee (1980).

---


$$H_0^{(2)} : \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$$


---

MODELO LINEAL

Este contraste se descompone a su vez en

$$H_0^{(2a)} : \Gamma_{12} = 0$$

$$H_0^{(2b)} : \Gamma_{21} = 0$$

---


$$H_0^{(2a)} : \Gamma_{12} = 0$$


---

El modelo de predicción autorregresivo para el primer animal se puede escribir como:

$$z_1(s+t) = \alpha_1 + \Gamma_{11} z_1(s) + \Gamma_{12} z_2(s) \quad (2.15)$$

y, por tanto, para este contraste (2a) utilizaremos un modelo lineal del tipo

$$Y = (X_1 \quad X_2) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + E_0 \quad (2.16)$$

o, equivalentemente

$$Y = X B + E_0$$

donde Y corresponde a  $z_1(s+t)$ ,  $X_1$  a  $z_1(s)$  y  $X_2$  a  $z_2(s)$ .

El contraste que queremos efectuar es

$$H_0 : B_2 = 0$$

o equivalentemente

$$H_0 : C B = 0 \quad (\text{con } C \text{ apropiado})$$

La notación a utilizar sería

$$Z_{1,-}^n(t)$$

donde

$n = 1, 2, \dots, N$  (  $N$ , tamaño de la muestra )

$i = 1, 2$  ( nos referiremos al animal )

- pondremos NS o EO refiriendonos a las coordenadas del animal.

$t$  tiempo

Con esta notación expresamos (2.16) como

$$\begin{bmatrix} z_{1NS}^1(s+t) & z_{1EO}^1(s+t) \\ z_{1NS}^2(s+t) & z_{1EO}^2(s+t) \\ \vdots & \vdots \\ z_{1NS}^N(s+t) & z_{1EO}^N(s+t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & z_{1NS}^1(s) & z_{1EO}^1(s) & z_{2NS}^1(s) & z_{2EO}^1(s) \\ 1 & z_{1NS}^2(s) & z_{1EO}^2(s) & z_{2NS}^2(s) & z_{2EO}^2(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{1NS}^N(s) & z_{1EO}^N(s) & z_{2NS}^N(s) & z_{2EO}^N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \end{bmatrix} + E_0$$

donde

$$Y = \begin{bmatrix} z_{1NS}^1(s+t) & z_{1EO}^1(s+t) \\ z_{1NS}^2(s+t) & z_{1EO}^2(s+t) \\ \vdots & \vdots \\ z_{1NS}^N(s+t) & z_{1EO}^N(s+t) \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & z_{1NS}^1(s) & z_{1EO}^1(s) \\ 1 & z_{1NS}^2(s) & z_{1EO}^2(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{1NS}^N(s) & z_{1EO}^N(s) \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} z_{2NS}^1(s) & z_{2EO}^1(s) \\ z_{2NS}^2(s) & z_{2EO}^2(s) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ z_{2NS}^N(s) & z_{2EO}^N(s) \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \beta_{31} & \beta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \end{bmatrix}$$

que corresponde con (15) con

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{02} \end{bmatrix} \quad \Gamma_{11} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \quad \Gamma_{12} = \begin{bmatrix} \beta_{31} & \beta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \end{bmatrix}$$

Por comodidad, seguiremos utilizando la notación de la ecuación (16) y el contraste que queremos realizar es

$$H_0 : B_2 = 0 \quad (\text{equivalente a } C B = 0)$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r(C) = 2$$

Aplicando el 2° Teorema de Gauss-Markov multivariante, se tiene que,

datos  $Q_h$  y  $Q_e$  por

$$Q_h = Y' Q X_2 (X_2' Q X_2)^{-1} X_2' Q Y$$

$$\text{donde } Q = I_N - X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1'$$

$$Q_e = Y' [I_N - X (X' X)^{-1} X'] Y$$

cualquier criterio de los siguientes (basados en las raíces de  $|Q_h - \lambda Q_e| = 0$ ) puede ser aplicado al contraste propuesto.

La hipótesis nula  $H_0 : B_2 = 0$  se rechaza al nivel de significación  $\alpha$  si:

(a) Wilks

$$\Lambda = \frac{|Q_e|}{|Q_e + Q_h|} = \prod_{i=1}^s (1 + \lambda_i)^{-1} < U^{\alpha}(p, k+1, N-k-1)$$

(b) Roy

$$\phi_s = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} > \phi^{\alpha}(s, m, n)$$

(c) Lawley-Hotelling

$$U^{(s)} = \frac{T_0^2}{N-k-1} = \sum_{i=1}^s \lambda_i > U_0^{\alpha}(s, m, n)$$

(d) Pillai

$$V^{(s)} = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} > V^{\alpha}(s, m, n)$$

donde  $\lambda_i$  son las raíces de  $|Q_h - \lambda Q_e| = 0$ ,  $s = 2$ ,  $m = 1$ ,  $n = (N-8)/2$ ,  $k = 4$  y  $p = 2$ .

( Las tablas para dichas distribuciones pueden verse en Timm (1975) )

$$H_0 : \Gamma_{21} = 0$$


---

El modelo de predicción autoregresivo para el segundo animal se puede escribir como

$$z_2(s+t) = \alpha_2 + \Gamma_{21} z_1(s) + \Gamma_{22} z_2(s)$$

El contraste que queremos efectuar es

$$H_0 : \Gamma_{21} = 0$$

Y, el test que usaremos será análogo al caso anterior sin más que tomar

$$Y = \begin{bmatrix} z_{2NS}^1(s+t) & z_{2EO}^1(s+t) \\ z_{2NS}^2(s+t) & z_{2EO}^2(s+t) \\ \vdots & \vdots \\ z_{2NS}^N(s+t) & z_{2EO}^N(s+t) \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & z_{2NS}^1(s) & z_{2EO}^1(s) \\ 1 & z_{2NS}^2(s) & z_{2EO}^2(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{2NS}^N(s) & z_{2EO}^N(s) \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} z_{1NS}^1(s) & z_{1EO}^1(s) \\ z_{1NS}^2(s) & z_{1EO}^2(s) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ z_{1NS}^N(s) & z_{1EO}^N(s) \end{bmatrix}$$

CAPITULO III

TIEMPOS DE PRIMER PASO



## Introducción

Sea  $\{W_0(t), t \geq 0\}$  el proceso de Wiener estandar tal que

$$1) P [W_0(0) = 0] = 1$$

$$11) E [W_0(t)] = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0$$

$$111) \text{Cov} [W_0(s), W_0(t)] = \min(s, t)$$

Es decir,  $W_0(t) \sim N(0, t)$ .

Para este proceso se conocen las siguientes probabilidades

$$P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) \geq b \right] = 2 P [W_0(T) \geq b] = 2 \Psi (bT^{-1/2}) \quad (3.1)$$

donde

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} \exp(-u^2/2) du$$

y

$$\begin{aligned} P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) - at \geq b \right] &= \\ &= \Psi \left[ (aT+b)T^{-1/2} \right] + \exp(-2ab) \Phi \left[ (aT-b)T^{-1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde

$$\Phi(x) = 1 - \Psi(x)$$

a partir de las cuales pueden calcularse las densidades de los tiempos de primer paso a través de una barrera constante y una barrera lineal.

La primera igualdad se puede encontrar en Doob (1953) y la segunda en Shepp (1966). Además, bastaría con demostrar la segunda puesto que la primera no es más que un caso particular con  $a=0$ .

Es de especial interés el cálculo de la probabilidad

$$P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) - f(t) \geq b \right]$$

para una amplia clase de funciones  $f(t)$  diferenciables en  $(0, T)$ , lo cual es una generalización de (3.1) y (3.2).

Durbin (1971) dió una ecuación integral cuya solución es la probabilidad deseada. Sin embargo, esa ecuación integral no puede ser resuelta analíticamente y de aquí que presentara un método numérico aproximado.

Más tarde, Smith (1972) introdujo algunas nuevas técnicas para obtener una aproximación para dicha probabilidad.

Pero fueron Park and Paranjape (1974) quienes dieron una expresión explícita para la solución de una ecuación integral que verifica esa probabilidad.

### Resultado.

Para cada  $T > 0$ , sea  $f(t)$  continua en  $[0, T]$ , diferenciable en  $(0, T)$ , y verificando  $|f'(t)| \leq C/t^p$  ( $p < 1/2$ ) para alguna constante  $C$ . Entonces, la probabilidad

$$P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) - f(t) \geq b \right] \equiv F(T)$$

es uno si  $f(0) + b \leq 0$ , y en otro caso viene dada como la única solución continua de la ecuación integral

$$F(T) = 2 \Psi \left[ (f(T) + b) T^{-1/2} \right] - 2 \int_0^T F(t) M(T, t) dt$$

donde

$$M(z, t) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{[f(z) - f(t)](z-t)^{-1/2}} \exp(-u^2/2) du & (0 \leq z < t \leq T) \\ 0 & (0 \leq z \leq t \leq T) \end{cases}$$

Además, para  $f(0) + b > 0$

$$P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) - f(t) \geq b \right] = h(T) + \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \int_0^T K_n(T, t) h(t) dt$$

donde

$$h(T) = 2 \Psi \left[ (f(T)+b)T^{-1/2} \right] - 4 \int_0^T M(T,t) \Psi \left[ (f(t)+b)t^{-1/2} \right] dt$$

$$K_1(T,t) = \int_t^T M(T,z) M(z,t) dz$$

$$K_{n+1}(T,t) = \int_t^T K_n(T,z) K_1(z,t) dz$$

Nota.- En algunos casos especiales de  $f(t)$  la ecuación integral del teorema se puede resolver más directamente. En los casos  $f(t) = b$  y  $f(t) = at+b$  se obtienen las probabilidades ya dadas.

En un estudio posterior Ricciardi, Sacerdote y Sato (1984) probaron que para un proceso de difusión la función de densidad de tiempo de primer paso a través de una función continua en el tiempo y con derivada acotada verifica una ecuación integral de Volterra de 2° clase cuyo núcleo y término del lado derecho son "probability currents".

Para el caso del proceso de Wiener estándar esta ecuación se puede resolver no sólo para la clase de barreras ya introducidas por Park and Paranjape (1974) sino también para toda barrera del tipo  $S(t) = a + b t^{1/p}$  ( $p \geq 2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ).

#### Obtención de la ecuación integral.-

Sea  $\{X(t), t \geq t_0; t_0 \in \mathbb{R}\}$  un proceso de difusión unidimensional definido sobre un intervalo  $I$  tal que  $P[X(t_0)=x_0]$  y sea  $S(t)$  una función del tiempo. Supondremos que para  $t > t_0$ ,  $S(t)$  es continua y tiene derivada acotada, y además que  $\lim_{t \rightarrow t_0} S(t) > x_0$ .

Sean

$$\frac{\partial}{\partial x} P \{ X(t) \leq x / X(t_0) = x_0 \} = f(x, t/x_0, t_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P \{ X(t) \leq x / X(t_0) = x_0; X(\phi) < S(\phi) \text{ para todo } \phi < t \} =$$

$$= f_a(x, t/x_0, t_0)$$

$$\inf \{ t : X(t) > S(t) / X(t_0) = x_0 \} = T$$

$$g[S(t), t/x_0, t_0] = \frac{\partial}{\partial t} P [T \leq t]$$

es decir,  $f$  es la función de densidad de probabilidad de transición de  $X(t)$ ;  $f_a$  es la función de densidad de probabilidad de transición de  $X(t)$  en presencia de una barrera absorbente en  $x=S(t)$  y  $g$  es la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso de  $X(t)$  a través de la barrera  $S(t)$ .

Suponiendo que  $S(t)$  satisface las suposiciones antes mencionadas para  $t > t_0$  se puede probar que

$$f(x, t/x_0, t_0) = f_a(x, t/x_0, t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^t d\tau f(x, t/S(\tau), \tau) g[S(\tau), \tau/x_0, t_0] \quad x \leq S(t)$$

Denotando por  $A_1(x, t)$  y  $A_2(x, t)$  la tendencia y varianza infinitesimal de  $X(t)$ ,  $f$  y  $f_a$  son soluciones del par de ecuaciones de difusión

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [A_1(x, t) \varphi] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_2(x, t) \varphi] = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + A_1(x_0, t_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{1}{2} A_2(x_0, t_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} = 0$$

y tales que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t/x_0, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f_a(x, t/x_0, t_0) = \delta(x-x_0)$$

Entonces, para todos  $z, w \in I$  y  $u, v \geq t_0$ , con  $u < v$  la "probability current"

$$j(z, u/w, v) \equiv A_1(z, u)f(z, u/w, v) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [A_2(y, u)f(y, u/w, v)] \right\}_{y=z}$$

verifica la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial f(z, u/w, v)}{\partial u} + \frac{\partial j(z, u/w, v)}{\partial z} = 0$$

Lema. -

Sea  $S(t)$  continua para cada  $t > t_0$ , tal que  $S'(t) = dS/dt$  existe para  $t > t_0$  y sea  $x_0 \equiv X(t_0) < \lim_{t \rightarrow t_0} S(t)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \lim_{\tau \rightarrow t} \int_{-\infty}^{S(t)} dx f(x, t/S(\tau), \tau) \right\} g[S(t), t/x_0, t_0] = \\ & = j(S(t), t/x_0, t_0) - \int_{t_0}^t d\tau j(S(t), t/S(\tau), \tau) g[S(\tau), \tau/x_0, t_0] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Teorema 1. -

Sea  $S(t)$  diferenciable para todo  $t > t_0$ , y  $\lim_{t \rightarrow t_0} S(t) > X(t_0) = x_0$ .

Entonces

$$\begin{aligned} g[S(t), t/x_0, t_0] &= 2j(S(t), t/x_0, t_0) - \\ &- 2 \int_{t_0}^t d\tau g[S(\tau), \tau/x_0, t_0] j(S(t), t/S(\tau), \tau) \end{aligned} \quad (3.4)$$

La demostración de este teorema se hace tomando el caso del proceso de Wiener para el cual la ecuación (3.3) nos lleva a (3.4) ya que

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \int_{-\infty}^{S(t)} dx f_w(x, t/S(\tau), \tau) = \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

donde  $f_w$  es la función de densidad de probabilidad de transición del Wiener  $\{W(t); t \geq t_0\}$  tal que

$$i) P \{W(t_0) = x_0\} = 1$$

$$ii) E [W(t)] = x_0$$

$$iii) E \{[W(t)-x_0][W(t')-x_0]\} = \min(t, t')$$

Y dado que todo proceso de difusión converge al proceso de Wiener al tomar límites cuando los intervalos de tiempo tienden a cero, la ecuación (3.5) es válida para cualquier proceso de difusión en las hipótesis del teorema, y, por tanto, de aquí se deduce la ecuación (3.4) a partir de (3.3) para todo proceso de difusión.

Notemos que (3.4) es una ecuación integral de Volterra de 2° clase y su solución puede ser construida mediante técnicas conocidas.

Función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso Wiener.

Nos vamos a referir al proceso de Wiener, pero por simplicidad de notación omitiremos el subíndice  $w$ . Se tomará también el tiempo inicial  $t_0$  igual a cero.

Teorema 2

Para cada  $t > 0$  sea  $S(t)$  continua, diferenciable y tal que  $|dS/dt| \leq Ct^{-\alpha}$  con  $\alpha < 1/2$  y  $C$  una constante y supongamos que  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = W(0) = x_0$ . Entonces, se cumple la igualdad (3.4) y  $g[S(t), t/x_0]$ , su única solución de clase  $L_2$ , viene dada por

$$g[S(t), t/x_0] = 2j(S(t), t/x_0) -$$

$$4 \int_0^t d\tau j(S(t), t/S(\tau), \tau) j(S(\tau), \tau/x_0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \int_0^t d\tau j_n(S(t), t/S(\tau), \tau) \times$$

$$\times \left\{ 2j(S(\tau), \tau/x_0) - 4 \int_0^\tau d\theta j(S(\tau), \tau/S(\theta), \theta) j(S(\theta), \theta/x_0) \right\}$$

donde

$$j_n(S(t), t/S(\tau), \tau) = \int_\tau^t d\theta j_1(S(\theta), \theta/S(\tau), \tau) j_{n-1}(S(t), t/S(\theta), \theta)$$

$$n=2, 3, \dots$$

$$j_1(S(t), t/S(\tau), \tau) = \int_\tau^t d\theta j(S(\theta), \theta/S(\tau), \tau) j(S(t), t/S(\theta), \theta)$$

Pero, aunque la clase de barreras, dada por Park and Paranjape (1974), para la cual este teorema está probado es bastante amplia, no incluye barreras tales como  $t^{1/3}$ .

El siguiente teorema da la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para tales barreras.

### Teorema 3

Sea  $S(t) = a + b t^{1/p}$ , con  $a, b, p \in \mathbb{R}$ ,  $a > W(0) = x_0$  y  $p > 2$ . Entonces, la ecuación (4) admite una única solución de clase  $L_2$ .

Con vistas a desarrollar la cuestión ya mencionada en la introducción de obtener la función de densidad de tiempo de primer paso para procesos obtenidos como transformación del Wiener, o bien, a partir de las funciones de densidad de tiempos de primer paso de procesos transformados del Wiener a través de barreras para las cuales sean conocidas, obtener

las funciones de densidad de tiempo de primer paso para el Wiener a través de las barreras transformadas, vamos a dar el siguiente teorema.

Teorema 4

Sea  $\{X'(t'); t' \geq t'_0\}$  un proceso de difusión definido sobre un intervalo  $I_{x'}$ , tal que  $P[X'(t'_0) = x'_0] = 1$ , y sea  $W(t)$  el proceso de Wiener estandar con  $E[W(t)] = x_0, E[W(t) - x_0 | W(s) = x_0] = \min(t, s)$  y tal que  $P\{W(t_0) = x_0\} = 1$ .

Además, sea la transformación

$$\begin{aligned} x &= \psi(t', x') & x_0 &= \psi(t'_0, x'_0) \\ t &= \varphi(t') & t_0 &= \varphi(t'_0) \end{aligned}$$

$$f(x, t/x_0, t_0) = \left[ \frac{\partial \psi(t', x')}{\partial x'} \right]^{-1} f'(x', t'/x'_0, t'_0)$$

donde  $f$  y  $f'$  son las funciones de densidad de transición de  $W(t)$  y  $X'(t')$ , respectivamente.

Entonces, si  $\frac{d\varphi(t')}{dt'} \neq 0$

$$g[S(t), t/x_0, t_0] = \left[ \frac{d\varphi(t')}{dt'} \right]^{-1} g'[S'(t'), t'/x'_0, t'_0] \quad (3.6)$$

donde

$$S(t) = \psi\{\varphi^{-1}(t), S'[\varphi^{-1}(t)]\} \quad (3.7)$$

Nota 1.-

Mediante la transformación dada y (3.6) la función de densidad de tiempo de primer paso para un proceso de difusión  $X'(t')$  a través de la barrera  $S'(t') = \psi^{-1}\{t', S(\varphi(t'))\}$  se puede obtener inmediatamente en términos, si es conocida, de la función de densidad de tiempo de primer paso de  $W(t)$  a través de la barrera  $S(t)$ .

Nota 2. -

Si  $g'[S'(t'), t'/x'_0, t'_0]$  es conocido para algun proceso de difusi3n, entonces podremos conocer la funci3n de densidad de tiempo de primer paso para el Wiener a trav3s de la barrera  $S(t)$ , aunque esa barrera no sea del tipo dado en los teoremas.

### Transformaciones al proceso Wiener

Antes de estudiar aplicaciones concretas de este teorema, vamos a ver condiciones necesarias y suficientes para que un proceso de difusi3n unidimensional se pueda transformar en el proceso de Wiener.

Sea  $X'(t')$  un proceso de difusi3n unidimensional definido en un intervalo finito o infinito  $I$ , y sea  $f'$  su funci3n de densidad de transici3n. Suponemos que dicha funci3n verifica la ecuaci3n de Kolmogorov

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} + b(t', x') \frac{\partial f'}{\partial x'} + a(t', x') \frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2} = 0 \quad (3.8)$$

donde

$$a(t', x') = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t'} \int_I dy' (y' - x')^2 f'(y', t' + \Delta t' / x', t')$$

$$b(t', x') = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t'} \int_I dy' (y' - x') f'(y', t' + \Delta t' / x', t')$$

son 1/2 de la varianza infinitesimal y la tendencia, respectivamente.

Supondremos que ambas admiten derivadas segundas respecto de  $x'$  continuas.

Sea  $W(t)$  el proceso de Wiener estandar ya definido y supongamos la transformaci3n

$$x = \psi(t', x') \quad t = \varphi(t') \quad (3.9)$$

que lleva la ecuación (3.8) en una ecuación del tipo de Kolmogorov para  $W(t)$ . Es decir, sin más que tomar

$$f'(y', \tau'/x', t') = \frac{\partial \psi(\tau', y')}{\partial y'} f(y, \tau/x, t)$$

la ecuación (3.8) queda

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (3.10)$$

Es de interés, entonces, determinar la transformación más general del tipo (3.9) que exista. Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 5.

Sean  $c_1(t')$  y  $c_2(t')$  funciones arbitrarias que dependen solamente del tiempo. Entonces, si y solo si

$$b(t', x') = \frac{1}{2} \frac{\partial a(t', x')}{\partial x'} + \frac{[a(t', x')]^{1/2}}{2} \left\{ c_1(t') + \int_{z'}^{x'} dy' \frac{c_2(t') a(t', y') + \frac{\partial}{\partial t'} a(t', y')}{[a(t', y')]^{3/2}} \right\}$$

existe una transformación del tipo (3.9) que cambia la ecuación (3.8) en (3.10). Esta transformación viene dada por

$$\psi(t', x') = (k_1)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{t'_0}^{t'} d\tau' c_2(\tau') \right] \int_{z'}^{x'} \frac{dy'}{[a(t', y')]^{1/2}} - \frac{(k_1)^{1/2}}{2} \int_{t'_2}^{t'} d\tau' c_1(\tau') \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{t'_0}^{\tau'} d\theta' c_2(\theta') \right] + k_2 \quad (3.11a)$$

$$\varphi(t') = k_1 \int_{t'_1}^{t'} dt' \exp \left[ - \int_{t'_0}^{t'} d\vartheta' c_2(\vartheta') \right] + k_3 \quad (3.11b)$$

donde  $z' \in I$ ,  $t'_1 \in [0, \infty)$  y las  $k_i$ ,  $i=1,2,3$ , son constantes arbitrarias con la única restricción de que  $k_1 > 0$ .

Este teorema proporciona una caracterización del proceso de difusión, descrito por una ecuación de Kolmogorov, que se puede deducir a partir del proceso de Wiener. Esta caracterización es una simple relación entre la tendencia y la varianza infinitesimal del proceso. Si esa relación es válida, la transformación (3.11) cambia la ecuación (3.8) en (3.10) via la relación entre las funciones de densidad.

Nota. -

Para cada  $t'$  la transformación  $x = \psi(t', x')$  dada por (3.11a) es uno a uno.

Un estudio más detallado de estas transformaciones, y las funciones  $c_1$  y  $c_2$  puede verse en Ricciardi (1976) y Cherkasov (1957).

## Aplicaciones

Como aplicaciones del Teorema 4 se tienen:

A) Obtención de la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso de Wiener a través de transformaciones de barreras, para las cuales es conocida la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para algún proceso de difusión transformado del Wiener.

Veamos primero, para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck la transformación que lo lleva al Wiener

$$\begin{aligned}x &\equiv \psi(t', x') = \sqrt{2} x' e^{t'} & x_0 &\equiv \psi(t'_0, x'_0) = \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0} \\t &\equiv \varphi(t') = \frac{1}{2} e^{2t'} & t_0 &\equiv \varphi(t'_0) = \frac{1}{2} e^{2t'_0}\end{aligned}$$

y, por tanto

$$f(x, t/x_0, t_0) = \sqrt{2} e^{t'} f'(x', t'/x'_0, t'_0)$$

Para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck se puede obtener la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso a través de una barrera constante.

### Teorema

Sea  $\{X'(t'); t' \geq t'_0\}$  el proceso de Ornstein-Uhlenbeck tal que  $P\{X'(t'_0) = x'_0\} = 1$   $\left[ X(t') \sim \mathcal{N}\left(x'_0 \exp[-(t'-t'_0)], \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp[-2(t'-t'_0)]\right) \right]$  y sea  $S' > x'_0$  una constante. Entonces la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso  $g'[S', t'/x'_0, t'_0]$  viene dada por la ecuación (3.4).

Y puesto que

$$S(t) = \psi\{\varphi^{-1}(t), S'[\varphi^{-1}(t)]\}$$

tomando  $S'(t') = a/2$ .  $a \neq 0$ , se tiene

$$S(t) = \psi \{ \varphi^{-1}(t), a/2 \} = \sqrt{2} \frac{a}{2} (2t)^{1/2} = a\sqrt{t}$$

ya que

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \ln 2t = \ln (2t)^{1/2}$$

Por tanto, se puede obtener la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso de Wiener  $\{W(t); t \geq t_0\}$  a través de una barrera del tipo  $a\sqrt{t}$  por medio de

$$g[a\sqrt{t}, t/x_0, t_0] = \frac{1}{2t} g' \left[ a/2, (1/2) \ln(2t) - \frac{x_0}{2\sqrt{t_0}}, (1/2) \ln(2t_0) \right]$$

B) Obtención de la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para procesos transformados del Wiener a través de barreras transformadas, basándonos en la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso de Wiener a través de barreras particulares, para las cuales dichas funciones son conocidas.

Nos vamos a centrar en el caso de barreras constantes y lineales, y por tanto lo primero que tendremos que hacer es calcular las funciones de densidad de tiempo de primer paso para el Wiener estandar  $\{W(t); t \geq t_0\}$  tal que  $P\{X(t_0) = x_0\} = 1$ .

Para el proceso de Wiener estandar  $\{W_0(t); t \geq 0\}$  tal que  $P\{W_0(0) = 0\} = 1$  son conocidas

$$P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) \geq b \right] \quad \text{y} \quad P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) - at \geq b \right]$$

y a partir de éstas, calculamos las funciones de densidad respectivas.



Barrera constante "b".

$$F(T) = P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} W_0(t) \geq b \right] = 2 P [W(T) \geq b] = 2 \psi(bT^{-1/2})$$

donde

$$\psi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_x^{\infty} \exp(-u^2/2) du$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} g(t) &= (g[b, t/0, 0]) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ 2 \psi(bt^{-1/2}) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ 2(2\pi)^{-1/2} \int_{bt^{-1/2}}^{\infty} \exp(-u^2/2) du \right] = \\ &= (2\pi)^{-1/2} b t^{-3/2} \exp(-b^2/2t) \end{aligned}$$

Barrera lineal "at+b"

$$F(T) = \psi \left[ (aT+b)T^{-1/2} \right] + \exp(-2ab) \Phi \left[ (aT-b)T^{-1/2} \right]$$

donde

$$\Phi(x) = 1 - \psi(x)$$

$$\begin{aligned} g(t) &= (g[at+b, t/0, 0]) = \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{(at+b)t^{-1/2}} \exp(-u^2/2) du \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \exp(-2ab) (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{(at-b)t^{-1/2}} \exp(-u^2/2) du \right\} = \end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-1/2} b t^{-3/2} \exp [-(at+b)^2/2t]$$

Consideramos ahora el proceso de Wiener estandar  $\{W(t); t \geq t_0\}$  tal que  $P\{W(t_0)=x_0\} = 1$  con  $t_0 \neq 0$ ,  $x_0 \neq 0$ , (es decir,  $W(t) \sim N(x_0, t-t_0)$ ) y vamos a calcular las funciones de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso a través de una barrera constante y lineal, para luego poder aplicar el teorema.

Barrera constante "b".

Vamos a hacerlo en dos pasos, suponemos primero  $x_0=0$  y  $t_0 \neq 0$  y luego el caso general  $x_0 \neq 0$  y  $t_0 \neq 0$ .

- Si  $x_0=0$  y  $t_0 \neq 0$ ,  $W(t) \sim N(0, t-t_0)$

$$\begin{aligned} P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} W(t) \geq b \right] &= P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T-t_0} W(t+t_0) \geq b \right] = \\ &= P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T-t_0} Y(t) \geq b \right] = \left[ \text{donde } Y(t) \sim N(0, t), \text{ caso conocido} \right] = \\ &= 2 \psi [b(T-t_0)^{-1/2}] \end{aligned}$$

- Si  $t_0 \neq 0$  y  $x_0 \neq 0$   $W(t) \sim N(x_0, t-t_0)$

$$\begin{aligned} P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} W(t) \geq b \right] &= P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} W(t) - x_0 \geq b - x_0 \right] = \\ &= P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} \tilde{W}(t) \geq b - x_0 \right] = \left[ \begin{array}{l} \tilde{W}(t) = W(t) - x_0 \sim N(0, t-t_0), \\ \text{caso ya conocido} \end{array} \right] \\ &= 2 \psi \left[ (b-x_0)(T-t_0)^{-1/2} \right] \end{aligned}$$

Calculemos, ahora, la función de densidad

$$\begin{aligned}
 g[b, t/x_0, t_0] &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 2 \psi \left[ (b-x_0)(t-t_0)^{-1/2} \right] \right\} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ 2 (2\pi)^{-1/2} \int_{(b-x_0)(t-t_0)^{-1/2}}^{\infty} \exp(-u^2/2) du \right] = \\
 &= (2\pi)^{-1/2} (b-x_0)(t-t_0)^{-3/2} \exp \left\{ - (b-x_0)^2/2(t-t_0) \right\}
 \end{aligned}$$

Barrera lineal "at+b"

- Supongamos el caso  $x_0=0$  y  $t_0 \neq 0$ ,  $W(t) \sim N(0, t-t_0)$

$$P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} W(t)-at \geq b \right] = P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} \tilde{W}(t) \geq b \right] =$$

$$\left[ \text{donde } \tilde{W}(t) = W(t)-at \sim N(-at, t-t_0) \right]$$

$$= P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T-t_0} \tilde{W}(t+t_0) \geq b \right] = P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T-t_0} \tilde{Y}(t) \geq b \right] =$$

$\left[ \tilde{W}(t+t_0) = W(t+t_0)-a(t+t_0), \text{ y como } W(t+t_0) \sim N(0, t), \text{ entonces} \right.$

$$\left. \tilde{W}(t+t_0) \sim N(-a(t+t_0), t) \right]$$

$\left[ \tilde{Y}(t)=W(t+t_0), \text{ es decir, } \tilde{Y}(t)=Y(t)-a(t+t_0) \text{ donde } Y(t)=W(t+t_0) \right]$

$$= P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T-t_0} Y(t)-a(t+t_0) \geq b \right] = P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T-t_0} Y(t)-at \geq b-at_0 \right]$$

(lo cual es ya conocido, basta cambiar  $T$  por  $T-t_0$  y  $b$  por  $b+at_0$ )

$$= \psi \left[ (aT+b)(T-t_0)^{-1/2} \right] + \exp \left[ -2a(b+at_0) \right] \Phi \left[ (aT-b-2at_0)(T-t_0)^{-1/2} \right]$$

Por tanto, la función de densidad es

$$\begin{aligned}
 g[at+b, t/0, t_0] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \psi \left[ (at+b)(t-t_0)^{-1/2} \right] + \right. \\
 &+ \exp[-2a(b+at_0)] \Phi \left[ (at-b-2at_0)(t-t_0)^{-1/2} \right] \left. \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (2\pi)^{-1/2} \int_{(at+b)(t-t_0)^{-1/2}}^{\infty} \exp(-u^2/2) du + \right. \\
 &+ \exp[-2a(b+at_0)] (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{(at-b-2at_0)(t-t_0)^{-1/2}} \exp(-u^2/2) du \left. \right\} = \\
 &= (2\pi)^{-1/2} (t-t_0)^{-3/2} (b+at_0) \exp \{ -(at+b)^2/2(t-t_0) \}
 \end{aligned}$$

- Pasamos al caso general:  $t_0 \neq 0$  y  $x_0 \neq 0$   $W(t) \sim N(x_0, t-t_0)$

$$\begin{aligned}
 P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} W(t) - at \geq b \right] &= P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} W(t) - x_0 - at \geq b - x_0 \right] = \\
 &= P \left[ \sup_{t_0 \leq t \leq T} \tilde{W}(t) - at \geq b - x_0 \right] =
 \end{aligned}$$

[y dado que  $\tilde{W}(t) = W(t) - x_0 \sim N(0, t-t_0)$ , basta cambiar en el caso anterior  $b$  por  $b-x_0$ ]

$$= (2\pi)^{-1/2} (t-t_0)^{-3/2} (b-x_0+at_0) \exp \{ -(at+b-x_0)^2/2(t-t_0) \}$$

Vamos, por último, a ver algunas aplicaciones

## PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK.

La transformación al proceso Wiener, como ya hemos visto, es

$$x = \psi(t', x') = \sqrt{2} x' e^{t'} \quad x_0 = \psi(t'_0, x'_0) = \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0}$$

$$t = \varphi(t') = \frac{1}{2} e^{2t'} \quad t_0 = \varphi(t'_0) = \frac{1}{2} e^{2t'_0}$$

$$f(x, t/x_0, t_0) = \sqrt{2} e^{t'} f'(x', t'/x'_0, t'_0)$$

Además

$$t' = \varphi^{-1}(t) = \frac{1}{2} \ln 2t$$

$$x' = \psi^{-1}(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{t}}$$

Vamos a ver cómo se transforman las barreras constantes y lineales mediante esa transformación.

Tomando

$$S(t) = 2a$$

$$S'(t') = \psi^{-1}(t', 2a) = 2a/2\sqrt{t'} = a/\sqrt{t'}$$

Tomando

$$S(t) = 4at$$

$$\begin{aligned} S'(t') &= \psi^{-1}\{t', S[\varphi(t')]\} = \psi^{-1}\{t', 4a\varphi(t')\} = \\ &= \psi^{-1}\{t', 4a \frac{1}{2} e^{2t'}\} = \psi^{-1}\{t', 2a e^{2t'}\} = \\ &= 2a e^{2t'} / 2\sqrt{t'} = a e^{2t'} / \sqrt{t'} \end{aligned}$$

Tomando

$$S(t) = 4at + 2b$$

$$\begin{aligned} S'(t') &= \psi^{-1}\{t', S[\varphi(t')]\} = \psi^{-1}\{t', 4a\varphi(t') + 2b\} = \\ &= \psi^{-1}\{t', 4a \frac{1}{2} e^{2t'} + 2b\} = \psi^{-1}\{t', 2a e^{2t'} + 2b\} = \end{aligned}$$

$$= (2a e^{2t'} + 2b) / 2\sqrt{t'} = (a e^{2t'} + b) / \sqrt{t'}$$

Calculo de la función de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck a través de las siguientes barreras:

Barrera  $a/\sqrt{t'}$

Aplicando la ecuación (3.6) del Teorema 4, se tiene

$$g'[a/\sqrt{t'}, t'/x'_0, t'_0] = e^{2t'} g[2a, (1/2)e^{2t'} / \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0}, (1/2)e^{2t'_0}]$$

Como la función de densidad de tiempo de primer paso del Wiener a través de una barrera constante es conocida, basta sustituir en su expresión  $b$  por  $2a$ ,  $t$  por  $(1/2)e^{2t'}$ ,  $x_0$  por  $\sqrt{2} x'_0 e^{t'_0}$ , y  $t_0$  por  $(1/2)e^{2t'_0}$ . Se obtiene

$$g'[a/\sqrt{t'}, t'/x'_0, t'_0] = \frac{2(2a - \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0})}{\sqrt{\pi} (e^{2t'} - e^{2t'_0})^{3/2}} e^{2t'} \exp \left\{ - \frac{(2a - \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0})^2}{e^{2t'} - e^{2t'_0}} \right\}$$

Barrera  $a e^{2t'} / \sqrt{t'}$

$$g'[a e^{2t'} / \sqrt{t'}, t'/x'_0, t'_0] = e^{2t'} g[4at, t/x_0, t_0]$$

$$\text{con } t = (1/2)e^{2t'}$$

$$x_0 = \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0}$$

$$t_0 = (1/2) e^{2t'_0}$$

y sustituyendo queda

$$g'[a e^{2t'} / \sqrt{t'}, t'/x'_0, t'_0] =$$

$$\frac{2(2a e^{2t'_0} - \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0})}{\sqrt{\pi} (e^{2t'_0} - e^{2t'_0})^{3/2}} e^{2t'} \exp \left\{ - \frac{(2a e^{2t'} - \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0})^2}{(e^{2t'} - e^{2t'_0})} \right\}$$

Barrera  $(a e^{2t'} + b)/\sqrt{t'}$

$$g'[(a e^{2t'} + b)/\sqrt{t'}, t'/x'_0, t'_0] = e^{2t'} g[4at+b, t/x_0, t_0]$$

con  $t, x_0$  y  $t_0$  iguales que en el caso anterior, y sustituyendo queda

$$g'[(a e^{2t'} + b)/\sqrt{t'}, t'/x'_0, t'_0] =$$

$$= \frac{2(2b - \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0} + 2a e^{2t'_0})}{\sqrt{\pi} (e^{2t'} - e^{2t'_0})^{3/2}} e^{2t'} \exp \left\{ - \frac{(2a e^{2t'} + 2b - \sqrt{2} x'_0 e^{t'_0})^2}{(e^{2t'} - e^{2t'_0})} \right\}$$

#### PROCESO LOGARITMICO-NORMAL.

Si denotamos por  $X'(t')$  al proceso Log-normal, la transformación que lo lleva al Wiener es la siguiente

$$x = \psi(t', x') = \log x' \quad x_0 = \psi(t'_0, x'_0) = \log x'_0$$

$$t = \varphi(t') = t' \quad t_0 = \varphi(t'_0) = t'_0$$

Por tanto, aplicando el Teorema 4, podemos calcular la función de densidad de tiempo de primer paso del proceso Log-normal a través de algunas barreras concretas.

Tomando

$$S(t) = \log b$$

$$\begin{aligned} S'(t') &= \psi^{-1}\{t', S[\varphi(t')]\} = \psi^{-1}\{t', \log b\} \\ &= e^{\log b} = b \end{aligned}$$

Tomando

$$S(t) = b t + \log a$$

$$\begin{aligned} S'(t') &= \psi^{-1}\{t', S[\varphi(t')]\} = \psi^{-1}\{t', b t' + \log a\} = \\ &= e^{b t' + \log a} = a e^{b t'} \end{aligned}$$

Calculo de la funcion de densidad de probabilidad de tiempo de primer paso para el proceso log-normal a través de las siguientes barreras:

Barrera constante "b"

$$g'[b, t'/x'_0, t'_0] = g[\log b, t/x_0, t_0]$$

$$\text{con } t = t'$$

$$x_0 = \log x'_0$$

$$t_0 = t'_0$$

y sustituyendo queda

$$g'[b, t'/x'_0, t'_0] = (2\pi)^{-1/2} \frac{\log(b/x'_0)}{(t' - t'_0)^{3/2}} \exp \left\{ - \frac{(\log(b/x'_0))^2}{2(t' - t'_0)} \right\}$$

Barrera a e<sup>b t'</sup>

$$g'[a e^{b t'}, t'/x'_0, t'_0] = g[b t + \log a, t/x_0, t_0]$$

con  $t$ ,  $x_0$  y  $t_0$  iguales que en el caso anterior, y sustituyendo queda

$$g'[a e^{b t'}, t'/x'_0, t'_0] =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \frac{\log(a/x'_0) + b t'_0}{(t' - t'_0)^{-3/2}} \exp \left\{ - \frac{(b t' + \log(a/x'_0))^2}{2(t' - t'_0)} \right\}$$

.....

Un estudio posterior irà dirigido a ampliar estos resultados al caso bidimensional, debiendo obtener la transformaci3n que nos lleva al Wiener bidimensional y calculando anteriormente las funciones de densidad de tiempos de primer paso de dicho proceso a trav3s de "barreras bidimensionales" constantes y lineales.

APENDICE I

PROGRAMAS DE ORDENADOR

C INFERENCIA EN EL MODELO DE ECOLOGIA PARA EL CASO  
C  
C A) (Distribucion inicial elegida por nosotros) Y  
C  
C PARA UN MAXIMO DE 10 HOJAS DE DATOS, 2 ANIMALES  
C  
C Y 10 OBSERVACIONES SUCESIVAS EN CADA HOJA DE DATOS.  
C

```

INTEGER N,IA,IDGT,IER
INTEGER B1,N1(0:10),M(0:10)
DIMENSION Z(4,110),B(4),C(4),A1(4,4)
DIMENSION H(4,4),G(4,4),CC(4,4),T(4,4)
DIMENSION WKAREA(8),GA1(4,4),BA1(16,16)
DIMENSION FI(4,4),BA(16,16)
DIMENSION ZE(4),ZEL(4),V(4),VE(16),DELTA(16),U(4)
PRINT*,"NUMERO MAXIMO DE HOJAS DE DATOS = 10"
PRINT*,"NUMERO DE HOJAS DE DATOS ="
READ (*,*) B1
PRINT*,"NUMERO MAXIMO DE ANIMALES = 2"
PRINT*,"NUMERO DE ANIMALES ="
READ (*,*) I6
I7=I6*2
N1(0)=0
PRINT*,"NUMERO MAXIMO DE CADA N(I) = 10"
DO 1 I=1,B1
PRINT*,"N(",I,") ="
READ (*,*) N1(I)

```

1 CONTINUE

```

M(0)=0
DO 11 I=1,B1
M(I)=0

```

11 CONTINUE

```

DO 2 K=1,B1
DO 2 L=1,K
M(K)=M(K)+N1(L)

```

2 CONTINUE

```

DO 3 I=1,I7
DO 3 J=1,M(B1)+B1
PRINT*,"Z(",I,","",J,") ="
READ (*,*) Z(I,J)

```

3 CONTINUE

C Los datos se introducen de la siguiente forma: Cada  
C columna es un elemento de una hoja de datos, es decir,  
C un vector 2m dimensional, donde m es el numero  
C de animales, y todos los elementos de todas las ho-  
C jas se situan uno a continuacion del otro.

```

DO 12 I4=1,I7
DO 12 J4=1,I7
H(I4,J4)=0.0

```

12 CONTINUE

```

DO 4 K=1,B1
DO 4 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
DO 70 I=1,I7
B(I)=Z(I,J)
C(I)=Z(I,J-1)

```

70 CONTINUE

```

CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
DO 5 I=1,I7
DO 5 J1=1,I7

```



```

      H(I,J1)=H(I,J1)+A1(I,J1)
5  CONTINUE
4  CONTINUE
      DO 21 I=1,I7
      B(I)=0.0
      C(I)=0.0
21 CONTINUE
      DO 6 K=1,B1
      DO 6 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
      DO 71 I=1,I7
      B(I)=B(I)+Z(I,J)
      C(I)=C(I)+Z(I,J-1)
71 CONTINUE
6  CONTINUE
      CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
      DO 7 I=1,I7
      DO 7 J1=1,I7
      H(I,J1)=H(I,J1)-A1(I,J1)/M(B1)
7  CONTINUE
      DO 13 I=1,I7
      DO 13 J1=1,I7
      G(I,J1)=0.0
13 CONTINUE
      DO 8 K=1,B1
      DO 8 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
      DO 72 I=1,I7
      B(I)=Z(I,J-1)
      C(I)=B(I)
72 CONTINUE
      CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
      DO 9 I=1,I7
      DO 9 J1=1,I7
      G(I,J1)=G(I,J1)+A1(I,J1)
9  CONTINUE
8  CONTINUE
      DO 22 I=1,I7
      B(I)=0.0
      C(I)=0.0
22 CONTINUE
      DO 10 K=1,B1
      DO 10 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
      DO 73 I=1,I7
      B(I)=B(I)+Z(I,J-1)
      C(I)=B(I)
73 CONTINUE
10 CONTINUE
      CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
      DO 14 I=1,I7
      DO 14 J1=1,I7
      G(I,J1)=G(I,J1)-A1(I,J1)/M(B1)
14 CONTINUE
      N=I7
      IA=I7
      IDGT=3
      CALL LINV1F(G,N,IA,T,IDGT,WKAREA,IER)
      IF (IER .EQ. 129) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300
      ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN

```

```

                PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
                GO TO 300
                END IF
                CALL PROMAT(H,T,I7,I7,I7,CC)
                PRINT*,"ESTIMACION DE LA MATRIZ GAMMA"
                DO 31 I=1,I7
                DO 31 J=1,I7
                PRINT*,"Elemento ",I,J," = ",CC(I,J)
31 CONTINUE
                DO 15 I=1,I7
                V(I)=0.0
15 CONTINUE
                DO 112 K=1,B1
                DO 112 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
                DO 74 I=1,I7
                ZE(I)=Z(I,J-1)
74 CONTINUE
                CALL PROMATVEC(CC,ZE,I7,ZE1)
                DO 113 I=1,I7
                V(I)=V(I)+(Z(I,J)-ZE1(I))
113 CONTINUE
112 CONTINUE
                DO 114 I=1,I7
                V(I)=V(I)/M(B1)
114 CONTINUE
                PRINT*,"ESTIMACION DEL VECTOR V"
                DO 32 I=1,I7
                PRINT*,"V(",I,") = ",V(I)
32 CONTINUE
                DO 33 I=1,I7
                DO 33 J1=1,I7
                FI(I,J1)=0.0
33 CONTINUE
                DO 115 K=1,B1
                DO 115 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
                DO 75 I=1,I7
                ZE(I)=Z(I,J-1)
75 CONTINUE
                CALL PROMATVEC(CC,ZE,I7,ZE1)
                DO 116 I=1,I7
                B(I)=Z(I,J)-V(I)-ZE1(I)
                C(I)=B(I)
116 CONTINUE
                CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
                DO 117 I=1,I7
                DO 117 J1=1,I7
                FI(I,J1)=FI(I,J1)+A1(I,J1)
117 CONTINUE
115 CONTINUE
                DO 18 I=1,I7
                DO 18 J1=1,I7
                FI(I,J1)=FI(I,J1)/M(B1)
18 CONTINUE
                PRINT*,"ESTIMACION DE LA MATRIZ FI"
                DO 34 I=1,I7
                DO 34 J=1,I7
                PRINT*,"Elemento ",I,J," = ",FI(I,J)
34 CONTINUE
                CALL PROKRO(CC,I7,BA)

```

```

DO 19 I=1,I7*I7
DO 19 J=1,I7*I7
IF (I .EQ. J) THEN
      BA(I,J)=1-BA(I,J)
ELSE
      BA(I,J)=-BA(I,J)
END IF
19 CONTINUE
N=I7*I7
IA=I7*I7
CALL LINV1F(BA,N,IA,BAL,IDGT,WKAREA,IER)
IF (IER .EQ. 129) THEN
  PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
  GO TO 300
ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
  PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
  GO TO 300
END IF
  CALL VEC(FI,I7,VE)
CALL PROMATVEC(BAL,VE,I7*I7,DELTA)
PRINT*, "ESTIMACION DEL VEC DE DELTA"
DO 35 I=1,I7*I7
PRINT*, "VEC.DELTA(",I,") = ",DELTA(I)
35 CONTINUE
DO 36 I=1,I7
DO 36 J=1,I7
IF (I .EQ. J) THEN
  CC(I,J)=1-CC(I,J)
ELSE
  CC(I,J)=-CC(I,J)
END IF
36 CONTINUE
N=I7
IA=I7
CALL LINV1F(CC,N,IA,GAL,IDGT,WKAREA,IER)
IF (IER .EQ. 129) THEN
  PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
  GO TO 300
ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
  PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
  GO TO 300
END IF
202 CALL PROMATVEC(GAL,V,I7,U)
PRINT*, "ESTIMACION DEL VECTOR U"
DO 37 I=1,I7
PRINT*, "U(",I,") = ",U(I)
37 CONTINUE
300 END

```

C INFERENCIA EN EL MODELO DE ECOLOGIA PARA LOS CASOS  
C  
C A) Y B). ANTES DE COMPILAR Y COLECCIONAR EL PROGRAMA  
C  
C HABRA QUE DIMENSIONAR LAS MATRICES CON VALORES NUME-  
C  
C RICOS DE X, Y y Z.  
C

```

INTEGER N,IA, IDGT, IER, I77, B1, I6, I7, J1
INTEGER N1(0:X), M(0:X)
DIMENSION B(2*Y), C(2*Y), ZE(2*Y), ZE1(2*Y)
DIMENSION V(2*Y), U(2*Y), WKAREA(8*Y**2)
DIMENSION VE(4*Y**2), DELTA(4*Y**2), GA1(2*Y, 2*Y)
DIMENSION Z(2*Y, X*(Z+1)), H(2*Y, 2*Y), A1(2*Y, 2*Y), G(2*Y, 2*Y)
DIMENSION T1(2*Y, 2*Y), CC(2*Y, 2*Y), DD(2*Y, 2*Y)
DIMENSION FI(2*Y, 2*Y), BA(4*Y**2, 4*Y**2), BA1(4*Y**2, 4*Y**2)
DIMENSION UI(2*Y)
DIMENSION DII(2*Y*(2*Y+1)/2), DSS(2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION D1(2*Y*(2*Y+1)/2), DS(2*Y, 2*Y)
DIMENSION D11(2*Y, 2*Y)
DIMENSION T(2*Y*(2*Y+1)/2, 2*Y*2*Y)
DIMENSION TT(2*Y*2*Y, 2*Y*(2*Y+1)/2)
      DIMENSION BA2(2*Y*(2*Y+1)/2, 2*Y*2*Y)
DIMENSION FID1(2*Y*(2*Y+1)/2, 2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION FSD1(2*Y*(2*Y+1)/2, 2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION BB(2*Y*2*Y, 2*Y*2*Y)
DIMENSION BB1(2*Y*2*Y, 2*Y*2*Y)
DIMENSION BAA(2*Y*2*Y, 2*Y*2*Y)
DIMENSION FP(2*Y*(2*Y+1)/2, 2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION FP1(2*Y*(2*Y+1)/2, 2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION DIIP(2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION DSSP(2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION DP(2*Y*(2*Y+1)/2)
DIMENSION D2(2*Y*(2*Y+1)/2)
PRINT*, "CASO A (Distribucion inicial decidida por nosotros). Pulsa 1"
PRINT*, "CASO B (Distribucion inicial de equilibrio). Pulsa 2"
READ(*, *) I77
PRINT*, "NUMERO DE HOJAS DE DATOS = X"
PRINT*, "NUMERO DE HOJAS DE DATOS = "
READ(*, *) B1
PRINT*, "NUMERO MAXIMO DE ANIMALES = Y"
PRINT*, "NUMERO DE ANIMALES = "
READ(*, *) I6
I7=I6*2
N1(0)=0
PRINT*, "NUMERO MAXIMO DE CADA N(I) = Z"
DO 1 I=1, B1
PRINT*, "N( ", I, ") = "
READ(*, *) N1(I)
1 CONTINUE
M(0)=0
DO 11 I=1, B1
M(I)=0
11 CONTINUE
DO 2 K=1, B1
DO 2 L=1, K
M(K)=M(K)+N1(L)
2 CONTINUE
DO 3 I=1, I7

```

```

DO 3 J=1,M(B1)+B1
PRINT*,"Z(",I,",",J,") = "
READ(*,*) Z(I,J)
3 CONTINUE
C LOS DATOS SE INTRODUCEN DE LA SIGUIENTE FORMA: CADA
C COLUMNA ES UN ELEMENTO DE UNA HOJA DE DATOS, ES DE-
C CIR, UN VECTOR 2M DIMENSIONAL, DONDE M ES EL NUMERO
C DE ANIMALES, Y TODOS LOS ELEMENTOS DE TODAS LAS HO-
C JAS SE SITUAN UNO A CONTINUACION DEL OTRO.
DO 12 I4=1,I7
DO 12 J4=1,I7
H(I4,J4)=0.0
12 CONTINUE
DO 4 K=1,B1
DO 4 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
DO 70 I=1,I7
B(I)=Z(I,J)
C(I)=Z(I,J-1)
70 CONTINUE
CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
DO 5 I=1,I7
DO 5 J1=1,I7
H(I,J1)=H(I,J1)+A1(I,J1)
5 CONTINUE
4 CONTINUE
DO 21 I=1,I7
B(I)=0.0
C(I)=0.0
21 CONTINUE
DO 6 K=1,B1
DO 6 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
DO 71 I=1,I7
B(I)=B(I)+Z(I,J)
C(I)=C(I)+Z(I,J-1)
71 CONTINUE
6 CONTINUE
CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
DO 7 I=1,I7
DO 7 J1=1,I7
H(I,J1)=H(I,J1)-A1(I,J1)/M(B1)
7 CONTINUE
DO 13 I=1,I7
DO 13 J1=1,I7
G(I,J1)=0.0
13 CONTINUE
DO 8 K=1,B1
DO 8 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
DO 72 I=1,I7
B(I)=Z(I,J-1)
C(I)=B(I)
72 CONTINUE
CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
DO 9 I=1,I7
DO 9 J1=1,I7
G(I,J1)=G(I,J1)+A1(I,J1)
9 CONTINUE
8 CONTINUE
DO 22 I=1,I7
B(I)=0.0

```

```

      C(I)=0.0
22  CONTINUE
      DO 10 K=1,B1
      DO 10 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
      DO 73 I=1,I7
      B(I)=B(I)+Z(I,J-1)
      C(I)=B(I)
73  CONTINUE
10  CONTINUE
      CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
      DO 14 I=1,I7
      DO 14 J1=1,I7
      G(I,J1)=G(I,J1)-A1(I,J1)/M(B1)
14  CONTINUE
      N=I7
      IA=I7
      IDGT=3
      CALL LINVIF(G,N,IA,T1,IDGT,WKAREA,IER)
      IF (IER .EQ. 129) THEN
          PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
          GO TO 300
      ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
          PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
          GO TO 300

      END IF
      CALL PROMAT(H,T1,I7,I7,I7,CC)
      DO 15 I=1,I7
      V(I)=0.0
15  CONTINUE
      DO 112 K=1,B1
      DO 112 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
      DO 74 I=1,I7
      ZE(I)=Z(I,J-1)
74  CONTINUE
      CALL PROMATVEC(CC,ZE,I7,ZE1)
      DO 113 I=1,I7
      V(I)=V(I)+(Z(I,J)-ZE1(I))
113  CONTINUE
112  CONTINUE
      DO 114 I=1,I7
      V(I)=V(I)/M(B1)
114  CONTINUE
      DO 33 I=1,I7
      DO 33 J1=1,I7
      FI(I,J1)=0.0
33  CONTINUE
      DO 115 K=1,B1
      DO 115 J=M(K-1)+K+1,M(K)+K
      DO 75 I=1,I7
      ZE(I)=Z(I,J-1)
75  CONTINUE
      CALL PROMATVEC(CC,ZE,I7,ZE1)
      DO 116 I=1,I7
      B(I)=Z(I,J)-V(I)-ZE1(I)
      C(I)=B(I)
116  CONTINUE
      CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
      DO 117 I=1,I7
      DO 117 J1=1,I7

```

```

    FI(I,J1)=FI(I,J1)+A1(I,J1)
117     CONTINUE
115     CONTINUE
    DO 18 I=1,I7
    DO 18 J1=1,I7
    FI(I,J1)=FI(I,J1)/M(B1)
18 CONTINUE
    CALL PROKRO(CC,I7,BA)
    DO 19 I=1,I7*I7
    DO 19 J=1,I7*I7
    IF (I .EQ. J) THEN
        BB(I,J)=1-BA(I,J)
    ELSE
        BB(I,J)=-BA(I,J)
    END IF
19 CONTINUE
    N=I7*I7
    IA=I7*I7
    CALL LINVIF(BB,N,IA,BAL,IDGT,WKAREA,IER)
    IF (IER .EQ. 129) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300
    ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300
    END IF
    CALL VEC(FI,I7,VE)
    CALL PROMATVEC(BAL,VE,I7*I7,DELTA)
    DO 36 I=1,I7
    DO 36 J=1,I7
    IF (I .EQ. J) THEN
        DD(I,J)=1-CC(I,J)
    ELSE
        DD(I,J)=-CC(I,J)
    END IF
36 CONTINUE
    N=I7
    IA=I7
    CALL LINVIF(DD,N,IA,GAL,IDGT,WKAREA,IER)
    IF (IER .EQ. 129) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300
    ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300
    END IF
    CALL PROMATVEC(GAL,V,I7,U)
    PRINT*, "ESTIMACION DE LA MATRIZ GAMMA"
    DO 31 I=1,I7
    DO 31 J=1,I7
    PRINT*, "ELEMENTO ",I,J," = ",CC(I,J)
31 CONTINUE
    IF I77=1 THEN
        PRINT*, "ESTIMACION DEL VECTOR V"
        DO 32 I=1,I7
        PRINT*, "V(",I,") = ",V(I)
32 CONTINUE
        PRINT*, "ESTIMACION DE LA MATRIZ FI"
        DO 34 I=1,I7

```

```

DO 34 J=1,I7
PRINT*,"ELEMENTO  ",I,J," = ",FI(I,J)
34 CONTINUE
PRINT*,"ESTIMACION DEL VEC DE DELTA"
DO 35 I=1,I7*I7
PRINT*,"VEC DELTA(",I,") = ",DELTA(I)
35 CONTINUE
PRINT*,"ESTIMACION DEL VECTOR U"
DO 37 I=1,I7
PRINT*,"U(",I,") = ",U(I)
37 CONTINUE
ELSE
DO 41 I=1,I7
ZE(I)=0.0
41 CONTINUE
DO 42 I=1,I7
DO 42 J=1,B1
ZE(I)=ZE(I)+Z(I,M(J-1)+J)
42 CONTINUE
DO 43 I=1,I7
UI(I)=ZE(I)/B1
43 CONTINUE
C ESTIMACION DEL VECTOR U INICIAL = UI
DO 50 I=1,I7
DO 50 J=1,I7
H(I,J)=0.0
50 CONTINUE
DO 44 J=1,B1
DO 45 I=1,I7
B(I)=Z(I,M(J-1)+J)
C(I)=B(I)
45 CONTINUE
CALL PROVEC(B,C,I7,A1)
DO 46 I=1,I7
DO 46 J=1,I7
H(I,J)=H(I,J)+A1(I,J)
46 CONTINUE
44 CONTINUE
CALL PROVEC(ZE,ZE,I7,A1)
DO 47 I=1,I7
DO 47 J=1,I7
H(I,J)=(H(I,J)-A1(I,J)/B1)/(B1-1)
47 CONTINUE
CALL VEC2(H,I7,DII)
CALL INVEC1(DELTA,I7,DS)
CALL VEC2(DS,I7,DSS)
DO 120 I=1,I7*(I7+1)/2
D1(I)=(B1*DII(I)+(M(B1)+B1)*DSS(I))/(B1+M(B1)+B1)
DO 120 I=1,I7
DO 120 J=1,I7
DD(I,J)=CC(J,I)
120 CONTINUE
500 CALL INVEC2(D1,I7,D11)
CALL PROMAT(CC,D11,I7,I7,I7,G)
CALL PROMAT(G,DD,I7,I7,I7,A1)
DO 121 I=1,I7
DO 121 J=1,I7
FI(I,J)=D11(I,J)-A1(I,J)
121 CONTINUE

```

```

      CALL PROKRO(D11,I7,BA)
      N=I7*I7
      IA=I7*I7
      CALL LINVIF(BA,N,IA,BA1,IDGT,WKAREA,IER)
      IF (IER.EQ. 129) THEN
          PRINT*, "ERROR EN LA SUBRUTINA"
          GO TO 300
      ELSE IF (IER.EQ. 34) THEN
          PRINT*, "ERROR EN LA SUBRUTINA"
          GO TO 300
      END IF
      I13=1
      I14=I7*(I7+1)/2
      DO 122 III=1,I14
      DO 122 JJJ=1,I7*I7
      T(III,JJJ)=0
122      CONTINUE
      DO 123 J=1,I7
      DO 123 K=J,I7
      J1=I7*(J-1)+K
      J2=I7*(K-1)+J
      T(I13,J1)=1
      T(I13,J2)=1
      IF (I13.EQ. I14) THEN
          GO TO 400
      ELSE
          I13=I13+1
      END IF
123      CONTINUE
400      DO 124 I=1,I14
      DO 124 J=1,I7*I7
      TT(I,J)=T(J,I)
124      CONTINUE
      CALL PROMAT(T,BA1,I14,I7*I7,I7*I7,BA2)
      CALL PROMAT(BA2,TT,I14,I7*I7,I14,FID1)
      DO 125 I=1,I14
      DO 125 J=1,I14
      FID1(I,J)=FID1(I,J)/2
125      CONTINUE
      CALL PROKRO(FI,I7,BA)
      N=I7*I7
      IA=I7*I7
      CALL LINVIF(BA,N,IA,BA1,IDGT,WKAREA,IER)
      IF (IER.EQ. 129) THEN
          PRINT*, "ERROR EN LA SUBRUTINA"
          GO TO 300
      ELSE IF (IER.EQ. 34) THEN
          PRINT*, "ERROR EN LA SUBRUTINA"
          GO TO 300
      END IF
      DO 126 I=1,I7*I7
      DO 126 J=1,I7*I7
      BB1(I,J)=BB(J,I)
126      CONTINUE
      CALL PROMAT(BB1,BA1,I7*I7,I7*I7,I7*I7,BA)
      CALL PROMAT(BA,BB,I7*I7,I7*I7,I7*I7,BAA)
      CALL PROMAT(T,BAA,I14,I7*I7,I7*I7,BA2)
      CALL PROMAT(BA2,TT,I14,I7*I7,I14,FSD1)
      DO 127 I=1,I14

```

```

DO 127 J=1,I14
FSD1(I,J)=FSD1(I,J)/2
127 CONTINUE
DO 128 I=1,I14
DO 128 J=1,I14
FP(I,J)=B1*FID1(I,J)+(M(B1)+B1)*FSD1(I,J)
128 CONTINUE
N=I7*(I7+1)/2
IA=I7*(I7+1)/2
CALL LINVIF(FP,N,IA,FP1,IDGT,WKAREA,IER)
IF (IER .EQ. 134) THEN
PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
GO TO 300
ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
GO TO 300
END IF
CALL PROMATVEC(FID1,DII,I7*(I7+1)/2,DIIP)
CALL PROMATVEC(FSD1,DSS,I7*(I7+1)/2,DSSP)
DO 129 I=1,I14
DP(I)=B1*DIIP(I)+(M(B1)+B1)*DSSP(I)
129 CONTINUE
CALL PROMATVEC(FP1,DP,I14,D2)
DO 130 I=1,I14
IF((D1(I)-D2(I)) .GT. 0.0001) THEN
DO 131 J=1,I14
D1(J)=D2(J)
131 CONTINUE
GO TO 500
END IF
130 CONTINUE
PRINT*,"ESTIMACION DEL VEC' DE DELTA "
DO 132 I=1,I14
PRINT*,"VEC' DELTA(",I,") = ",D2(I)
132 CONTINUE
CALL PROMAT(CC,D2,I7,I7,I7,G)
CALL PROMAT(G,DD,I7,I7,I7,A1)
DO 133 I=1,I7
DO 133 J=1,I7
FI(I,J)=D2(I,J)-A1(I,J)
133 CONTINUE
PRINT*,"ESTIMACION DE LA MATRIZ FI "
DO 150 I=1,I7
DO 150 J=1,I7
PRINT*,"FI(",I,"",J,") = ",FI(I,J)
150 CONTINUE
N=I7
IA=I7
CALL LINVIF(D2,N,IA,GAL,IDGT,WKAREA,IER)
IF (IER .EQ. 129) THEN
PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
GO TO 300
ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
GO TO 300
END IF
CALL LINVIF(FI,N,IA,H,IDGT,WKAREA,IER)
IF (IER .EQ. 129) THEN
PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"

```

```

        GO TO 300
ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300

END IF
DO 134 I=1,I7
DO 134 J=1,I7
G(I,J)=DD(J,I)
134    CONTINUE
CALL PROMAT(G,H,I7,I7,I7,A1)
CALL PROMAT(A1,DD,I7,I7,I7,G)
DO 135 I=1,I7
DO 135 J=1,I7
H(I,J)=B1*GAL(I,J)+(M(B1)+B1)*G(I,J)
135    CONTINUE
CALL LINV1F(H,N,IA,A1,IDGT,WKAREA,IER)
IF (IER .EQ. 129) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300
ELSE IF (IER .EQ. 34) THEN
        PRINT*, "ERROR EN LA SUBROUTINA"
        GO TO 300

END IF
CALL PROMATVEC(GAL,UI,I7,B)
CALL PROMATVEC(G,U,I7,C)
DO 136 I=1,I7
ZE(I)=B1*B(I)+(M(B1)+B1)*C(I)
136    CONTINUE
CALL PROMATVEC(A1,ZE,I7,B)
PRINT*, "ESTIMACION DEL VECTOR U "
DO 137 I=1,I7
PRINT*, "U(",I,") = ",B(I)
137    CONTINUE
END IF
300    END

```

```
C  SUBROUTINA PARA EL CALCULO DEL VEC DE UNA MATRIZ
C
  SUBROUTINE VEC(AAA,I7,BBB)
  DIMENSION AAA(I7,I7),BBB(I7*I7)
  DO 10 KK=0,I7-1
  DO 10 II=1,I7
  BBB(KK*I7+II)=AAA(II, KK+1)
10  CONTINUE
  RETURN
  END
```

C SUBROUTINA PARA EL PRODUCTO DE DOS VECTORES  
C

```
      SUBROUTINE PROVEC(B,C,I7,A1)
      DIMENSION B(I7),C(I7),A1(I7,I7)
      DO 10 I1=1,I7
      DO 10 J1=1,I7
      A1(I1,J1)=B(I1)*C(J1)
10      CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C  SUBROUTINA PARA EL PRODUCTO DE DOS MATRICES
C
SUBROUTINE PROMAT(AA,BB,I9,I99,I999,EE)
DIMENSION AA(I9,I99),BB(I99,I999),EE(I9,I999)
DO 31 II=1,I9
DO 31 JJ=1,I999
EE(II,JJ)=0.0
31 CONTINUE
DO 10 II=1,I9
DO 10 JJ=1,I999
DO 10 KK=1,I99
EE(II,JJ)=EE(II,JJ)+AA(II,KK)*BB(KK,JJ)
10 CONTINUE
RETURN
END
```



```
C SUBROUTINA PARA EL PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR
C UN VECTOR
C
SUBROUTINE PROMATVEC(A1,B2,I11,C1)
DIMENSION A1(I11,I11),B2(I11),C1(I11)
DO 10 II=1,I11
C1(II)=0.0
10 CONTINUE
DO 11 II=1,I11
DO 11 JJ=1,I11
C1(II)=C1(II)+A1(II,JJ)*B2(JJ)
11 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C  SUBROUTINA PARA EL PRODUCTO DE KRONECKER DE UNA
C  MATRIZ POR SI MISMA
C
  SUBROUTINE PROKRO(AA,I7,BA)
  DIMENSION AA(I7,I7),BA(I7*I7,I7*I7)
  DO 10 KK=0,I7-1
  DO 10 LL=0,I7-1
  DO 10 II=1,I7
  DO 10 JJ=1,I7
  BA(KK*I7+II,LL*I7+JJ)=AA(KK+1,LL+1)*AA(II,JJ)
10 CONTINUE
  RETURN
  END
```

```
C  SUBROUTINA PARA LA REPRESENTACION POR COLUMNAS DE LA
C
C  PARTE TRIANGULAR SUPERIOR DE UNA MATRIZ.
C
  SUBROUTINE VEC2(AA,I7,BB)
  DIMENSION AA(I7,I7),BB((I7*(I7+1))/2)
  DO 10 J=1,I7
  DO 10 I=1,J
  BB(J*(J-1)/2+I)=AA(I,J)
10 CONTINUE
  RETURN
  END
```

```
C  SUBROUTINA PARA LA REPRESENTACION MATRICIAL DEL VEC
C
  SUBROUTINE INVEC1(BB,I7,AA)
  DIMENSION BB(I7*I7),AA(I7,I7)
  DO 10 KK=1,I7
  DO 10 II=1,I7
  AA(KK,II)=BB(I7*(II-1)+KK)
10 CONTINUE
  RETURN
  END
```

```
C  SUBROUTINA PARA LA REPRESENTACION MATRICIAL DEL VEC2
C
  SUBROUTINE INVEC2(BB,I7,AA)
  DIMENSION BB((I7*(I7+1))/2),AA(I7,I7)
  DO 10 J=1,I7
  DO 10 I=1,J
  AA(I,J)=BB(J*(J-1)/2+I)
10 CONTINUE
  DO 20 J=1,I7-1
  DO 20 I=J+1,I7
  AA(I,J)=AA(J,I)
20 CONTINUE
  RETURN
  END
```

C Este programa calcula el centro y la direccion y  
C longitud de los ejes de una elipse dada por la  
C ecuacion (2.4).

```
DIMENSION D(2,2),U(2)
PRINT*, "VALORES DE LA MATRIZ DELTA "
DO 1 I=1,2
DO 1 J=1,2
PRINT*, "D(",I,"",",J,"")= "
READ(*,*) D(I,J)
1 CONTINUE
PRINT*, "VALORES DEL VECTOR U "
DO 2 I=1,2
PRINT*, "U(",I,"")= "
READ(*,*) U(I)
2 CONTINUE
PRINT*, "VALOR DE C "
READ(*,*) C
F=D(1,1)*D(2,2)-D(1,2)*D(2,1)
A=(D(1,1)+D(2,2))**2-4*F
B=(D(1,1)+D(2,2)+SQRT(A))/2
B1=(D(1,1)+D(2,2)-SQRT(A))/2
X=-(D(1,1)-B)/D(1,2)
Y=-(D(1,1)-B1)/D(1,2)
D1=SQRT(4*B*C)
D2=SQRT(4*B1*C)
Z1=SQRT(1+(X*X))
Z2=SQRT(1+(Y*Y))
PRINT*, "CENTRO DE LA ELIPSE "
PRINT*, U(1),U(2)
PRINT*, "EJES DE LA ELIPSE "
PRINT*, "DIRECCION ",1/Z1,"",",X/Z1
PRINT*, "LONGITUD ",D1
PRINT*, "DIRECCION ",1/Z2,"",",Y/Z2
PRINT*, "LONGITUD ",D2
END
```

```

C ESTE PROGRAMA CALCULA LA DERIVADA DEL VEC DE
C DE UNA MATRIZ DE DIMENSION P X P CON RESPECTO
C A SUS ELEMENTOS.
  INTEGER N
  INTEGER T(55,100)
  PRINT*,"TAMA\O P (MAXIMO 10) "
  READ(*,*) N
  I1=N*(N+1)/2
  I=1
  DO 11 III=1,I1
  DO 11 JJJ=1,N*N
  T(III,JJJ)=0
11 CONTINUE
  DO 1 J=1,N
  DO 1 K=J,N
  J1=N*(J-1)+K
  J2=N*(K-1)+J
  T(I,J1)=1
  T(I,J2)=1
  IF (I .EQ. I1) THEN
  GO TO 20
  ELSE
  I=I+1
  END IF
 1 CONTINUE
20 DO 2 II=1,I1
  DO 2 JJ=1,N*N
  PRINT*,"T(",II,",",",JJ,") = ",T(II,JJ)
 2 CONTINUE
  END

```

APENDICE II

LOGARITMO DE UNA MATRIZ

Sea B una matriz no singular de dimension  $n \times n$ . Entonces, existe una matriz A de dimension  $n \times n$ , a la que llamaremos logaritmo de B, que verifica

$$e^A = B$$

Vamos a ver como se calcularia dicho logaritmo.

Si C es similar a B, es decir, existe una matriz no singular T de modo que  $T^{-1}BT = C$ , y si  $\exp \hat{A} = C$ , entonces

$$B = TCT^{-1} = T e^{\hat{A}} T^{-1} = \exp (T\hat{A}T^{-1}) \quad (A.1)$$

y asi  $T\hat{A}T^{-1}$  es un logaritmo de B.

Por tanto, para calcular el logaritmo de una matriz, basta con conocer el logaritmo de matrices en forma canonica.

Asi, si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son los autovalores distintos de la matriz B, con multiplicidades  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , entonces

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k \end{bmatrix}$$

donde

$$(C_j - \lambda_j I_{n_j})^{n_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, k)$$

Por tanto, podemos escribir

$$C_j = \lambda_j \left( I_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} Z_j \right) \quad (A.2)$$

donde

$$Z_j^{n_j} = 0$$

Usando el desarrollo en series de potencias

$$\log (1 + x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} x^p \quad |x| < 1$$

escribimos

$$\begin{aligned}
 A_j &= \log C_j = I_{n_j} \log \lambda_j + \log \left( I_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} Z_j \right) = \\
 &= I_{n_j} \log \lambda_j + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left[ \frac{Z_j}{\lambda_j} \right]^p = \\
 &= I_{n_j} \log \lambda_j + \sum_{p=1}^{n_j-1} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left[ \frac{Z_j}{\lambda_j} \right]^p \quad (A.3) \\
 & \quad j = 1, 2, \dots, k
 \end{aligned}$$

ya que  $Z_j^{n_j} = 0$ .

Notemos que, dado que B es no singular,  $\lambda_j \neq 0$ ,  $j=1,2,\dots,k$ , y por tanto  $\log \lambda_j$  esta definido.

Ademas, se tiene que

$$\exp(A_j) = C_j \quad (j=1,\dots,k)$$

Por tanto, si escribimos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \exp(A) &= \begin{bmatrix} \exp A_1 & & & \\ & \exp A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \exp A_k \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & C_k \end{bmatrix} = C
 \end{aligned}$$

y una vez calculado el logaritmo de C, se puede calcular el de cualquier

matriz B similar a C por la expresion dada por(1).

Expresiones explicitas para el logaritmo de una matriz real de dimension 2 x 2 en forma canonica.

Una matriz real no singular de dimension 2 x 2 es similar a una de las siguientes matrices reales

$$(i) \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \lambda \neq 0, \mu \neq 0$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda \neq 0$$

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \beta \neq 0$$

Caso (i)

$$\log \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log \lambda & 0 \\ 0 & \log \mu \end{bmatrix}$$

Caso (ii)

Llamamos  $C_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  y hacemos la descomposicion (A.2)

$$C_1 = \lambda \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

y, por tanto,

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z_1^2 = 0$$

Aplicando la expresion (A.3), se tiene

$$\log C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \log \lambda + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left( \frac{Z_1}{\lambda} \right)^p =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \log \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1/\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log \lambda & 1/\lambda \\ 0 & \log \lambda \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\log \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log \lambda & 1/\lambda \\ 0 & \log \lambda \end{bmatrix}$$

### Caso (iii)

Tomamos

$$A = \begin{bmatrix} \log (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} & -\tan^{-1}(\beta/\alpha) \\ -\tan^{-1}(\beta/\alpha) & \log (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \end{bmatrix} = A_1 + A_2$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} \log (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & \log (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\tan^{-1}(\beta/\alpha) \\ -\tan^{-1}(\beta/\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que se cumple  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ , se tiene que  $\exp(A) = \exp(A_1) \exp(A_2)$ .

$$\exp(A_1) = \begin{bmatrix} (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \end{bmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y puesto que

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\exp(A_2) = \begin{bmatrix} \cos(\tan^{-1}(\beta/\alpha)) & \text{sen}(\tan^{-1}(\beta/\alpha)) \\ -\text{sen}(\tan^{-1}(\beta/\alpha)) & \cos(\tan^{-1}(\beta/\alpha)) \end{bmatrix}$$

Y dado que  $\cos(\tan^{-1}(\beta/\alpha)) = \alpha/(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$

$$\text{sen}(\tan^{-1}(\beta/\alpha)) = \beta/(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$$

se tiene

$$\exp(A_2) = \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Así

$$\exp(A) = \exp(A_1)\exp(A_2) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Y, por tanto

$$\log \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} & -\tan^{-1}(\beta/\alpha) \\ -\tan^{-1}(\beta/\alpha) & \log(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \end{bmatrix}$$

**BIBLIOGRAFIA**



- AITCHINSON, J. & BROWN, J. A. C. (1969). The lognormal distribution. Ed Cambridge.
- ANDERSON, T. W. (1971). "The Statistical Analysis of Time Series", Wiley, New York.
- ANDERSON, T. W. (1958). An introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley.
- BILLINGSLEY, P. (1968). Convergence of probability measures. Wiley, New York.
- BOX, G. E. P. (1949). "A general distribution theory for a class of likelihood criteria", *Biometrika*, Vol. 36, 317-346.
- BRAUER, F. & NOHEL, J. A. (1969) Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. Ed. W. A. Benjamin. Inc. New York, Amsterdam.
- BREIMAN, L. (1968). Probability. Ed. Addison.
- CHERKASOV, I. D. (1957). "On the transformations of the diffusion process to a Wiener process", *Theory Probab. Its Appl.* 2, 373-377.
- CHUNG, K. L. (1967). Markov chains with stationary transition probabilities, Springer-Verlag. - COX, D. R. & MILLER, H.D. (1965), The theory of stochastic processes, Prentice-Hall.
- DALY, J. F. (1940). "On the unbiased character of likelihood-ratio tests for independence in normal systems", *Ann. Math. Stat.*, 11, 1-32.
- DOOB, J. L. (1953), Stochastic Processes, John Wiley & Sons.
- DUNN, J. E. & GIPSON, P. S. (1977). "Analysis of Radio Telemetry

Data in Studies of Home Range". *Biometrics* 33, 85-101.

- DUNN, J. E. & BRISBIN, L. Jr. (1985). "Characterizations of the Multivariate Ornstein-Uhlenbeck Diffusion Process in the context of Home Range Analysis". *Statistical Theory and Data Analysis*, 181-205. Elsevier, Holland.

- DURBIN, J. (1971). "Boundary-crossing probabilities for the Brownian motion and Poisson processes and techniques for computing the power of the Kolmogorov-Smirnov test", *J. Appl. Prob.*, 8, 431-453.

- DWYER, P. S. (1967). "Some applications of matrix derivatives in multivariate analysis". *Journal of the American Statistical Association* 62, 607-625.

- GASCA, M. (1976). *Calculo Numérico*. U.N.E.D.

- GIPSON, P. S. (1972). "The taxonomy, reproductive biology, food habits, and range of wild *Canis* (Canidae) in Arkansas. Ph.D. dissertation, Department of Zoology, University of Arkansas.

- GIRI, N. C. (1977). *Multivariate Statistical Inference*, Academic Press.

- GREEN, C. D. (1969). *Integral Equations Methods*. Ed. Nelson.

- IGLEHART, D. L. (1968). "Limit Theorems for the Multi-urn Ehrenfest Model". *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 39, No 3, 864-876.

- JENNRICH, R. I. & TURNER, F. B. (1969). "Measures of non-circular home range", *Journal of Theoretical Biology* 22, 227-237.

- JESELNIK, D. L., *Comparative Analyses of Movements, Behavior and*

Habitat Utilization of Free-Ranging Gray Foxes. M. S. Thesis. University of Georgia.

- KAC, M. (1947). "Random walk and the theory of Brownian motion", Amer. Math. Monthly 54, 369-391.

- KARLIN, S. & MCGREGOR, J. L. (1965). "Ehrenfest urn models", J. Appl. Prob. 2, 352-376.

- KRASNOV, M., KISELIOV, A., MAKARENKO, G. (1970) Ecuaciones Integrales. Ed. Mir, Moscu.

- KRISHNAIAH, P. R. & LEE, J. C. (1980). "Likelihood Ratio Tests for Mean Vectors and Covariance Matrices". Handbook of Statistics, Vol. 1, 513-570. North-Holland.

- LEE, J. C., CHANG, T. C. & KRISNAIAH, P. R. (1976). "On the distribution of the likelihood ratio test statistic for compound symmetry", S. African Statist. J.

- LEE, J. C., CHANG, T. C. & KRISNAIAH, P. R. (1977). "Approximations to the distributions of the likelihood ratio statistics for testing certain structures on the Covariance matrices of real multivariate normal populations". Multivariate Analysis-IV, 105-118. North-Holland.

- MORRISON, D. F. (1967). Multivariate Statistical Methods. McGraw-Hill Series in Probability and Statistics.

- NARAIN, R. D. (1950). "On the completely unbiased character of tests of independence in multivariate normal systems", Ann. Math. Stat., 21, 293-298.

- NEUDECKER, H. (1969). "Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products", Journal of the American Statistical Association 64, 953-963.
- PARK, C. & PARANJAPE, S. R. (1974). "Probabilities of Wiener Paths crossing differentiable curves", Pacific Journal of Mathematics, Vol 53, No 2, 579-583.
- PETROVSKI, I. (1971) Lecciones de Teoria de las Ecuaciones Integrales. Ed. Mir, Moscu.
- RICCIARDI, L. M. (1976). "On the Transformation of Diffusion Processes into the Wiener Process", Journal of Mathematical Analysis and Applications 54, 185-199.
- RICCIARDI, L. M., SACERDOTE, L., SATO, S. (1984). "On an integral equation for first-passage-time probability densities", J. Appl. Prob. 21, 302-314.
- SCHACH, S. (1971). "Weak Convergence Results for a class of Multivariate Markov Processes", The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, No 2, 451-465.
- SHEPP, L. A. (1966). "Radon-Nikodym derivatives of Gaussian measures", Ann. Math. Stat. 37, 321-354.
- SKOROKHOD, A. V. (1956). "Limit theorems for stochastic processes". Theor. Probability Appl. 1, 261-290.
- SMITH, C. S. (1972). "A note on boundary-crossing probabilities for the Brownian motion", J. Appl. Prob. 9, 857-861.

- TIMM, N. H. (1975). Multivariate Analysis with Application in Education and Psychology. Ed. Wadsworth Pub. Comp.

- TRACY, D. S. & DWYER, P. S. (1969). "Multivariate maxima and minima with matrix derivatives", Journal of the American Statistical Association 64, 1576-1594.

- VAN KAMPEN (1981). Stochastic processes in Physics and Chemistry. Ed. North Holland.