

Superficies  
con  
curvatura media constante

Manuel María Ritoré Cortés

T  
15  
5

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha ..12-5-94.....
ENTRADA NUM. ...728.....

Superficies  
con  
curvatura media constante

Manuel María Ritoré Cortés

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Prof. Antonio Ros Mulero, Catedrático del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

Vº. Bº. El Director:



Aspirante al Grado de Doctor:



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 59664795
Nº Copia 21214384

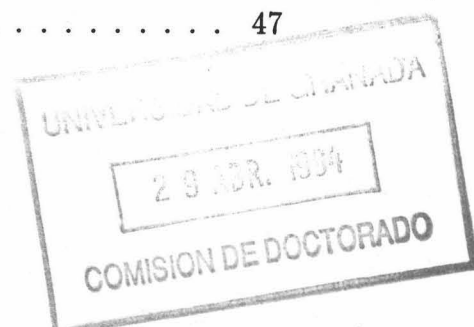
*A Mercedes,  
con todo mi cariño.  
A mis padres.*

Agradezco sinceramente a Antonio Ros su ayuda y su apoyo constantes.

Quisiera también expresar mi reconocimiento a Francisco López, Francisco Urbano, Sebastián Montiel y Joaquín Pérez por su ayuda, así como al resto de los miembros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada por su buena acogida.

# Índice

Introducción	i
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1 Generalidades . . . . .	1
1.2 Fórmulas de variación del área y del volumen . . . . .	3
1.3 Aplicaciones de Gauss . . . . .	7
1.4 La representación de Weierstrass . . . . .	8
1.5 La ecuación sinh-Gordon. . . . .	11
1.6 El problema isoperimétrico . . . . .	13
Capítulo 2. Superficies estables	15
2.1 Preliminares . . . . .	15
2.2 Superficies estables en variedades con curvatura de Ricci no negativa	18
2.3 Estabilidad en variedades con curvatura constante . . . . .	26
2.4 Estabilidad en variedades elípticas . . . . .	29
2.5 Estabilidad en variedades completas y llanas . . . . .	34
2.6 Comentarios . . . . .	36
Capítulo 3. Superficies minimales con índice uno	37
3.1 Preliminares . . . . .	37
3.2 Resultados previos . . . . .	39
3.3 Superficies minimales compactas . . . . .	43
3.4 Superficies minimales no compactas . . . . .	44
3.5 Comentarios . . . . .	47



Capítulo 4. Compacidad de superficies estables y embebidas	49
4.1 Preliminares . . . . .	50
4.2 Cotas locales uniformes del área y un resultado de convergencia . .	53
4.3 Superficies minimales con índice uno . . . . .	62
4.4 Superficies estables . . . . .	66
4.5 Comentarios . . . . .	70
Capítulo 5. Superficies estables con aplicación de Gauss	73
5.1 Preliminares . . . . .	73
5.2 Convergencia de inmersiones . . . . .	76
5.3 Compacidad de las aplicaciones de Gauss . . . . .	79
5.4 Comentarios . . . . .	86
Capítulo 6. Ejemplos de superficies con curvatura media constante	87
6.1 Superficies de Riemann . . . . .	87
6.2 Construcción de aplicaciones armónicas . . . . .	92
6.3 Inmersiones asociadas . . . . .	100
6.4 Límites de las familias $\Sigma_i$ . . . . .	104
6.5 Caracterización de los ejemplos . . . . .	108
6.6 Comentarios . . . . .	115
Bibliografía	117

## Introducción

Clásicamente el estudio de las superficies minimales y con curvatura media constante en el espacio euclídeo tridimensional ha sido uno de los problemas más importantes de la geometría diferencial.

Las superficies minimales son las superficies de menor área limitadas por un contorno dado. Su estudio se inicia desde el mismo momento del nacimiento del cálculo de variaciones, y fueron caracterizadas por Lagrange en 1760 como las superficies en las que la curvatura media es siempre cero. Estas superficies se corresponden intuitivamente, de acuerdo con el modelo físico descrito por Plateau, con las formas que adoptan las películas de jabón que se pueden construir con un borde de alambre de forma arbitraria.

Una superficie con curvatura media constante admite una interpretación física. Podemos relacionar la diferencia  $p$  de las presiones entre las dos caras de una superficie con la curvatura media  $H$  por medio de la ecuación de Laplace:  $p = TH$ , donde  $T$  denota la tensión superficial. Si la tensión superficial es constante, afirmar que la curvatura media tiene que ser nula equivale a decir que por ambas caras de la superficie tenemos la misma presión. Si la diferencia de presiones  $p$  no es nula pero es constante obtenemos una superficie con curvatura media constante que no es minimal.

De este modo las superficies con curvatura media constante aparecen en experimentos físicos como superficies de separación de dos fluidos no miscibles bajo ciertas condiciones óptimas [TAHH]. En biología se ha observado que son modelos aceptables de esqueletos de ciertos microorganismos, y que existen seres unicelulares cuya forma se corresponde con las posibles superficies de revolución con curvatura media constante.

Desde el punto de vista variacional las superficies con curvatura media constante son los puntos críticos del funcional área para aquellas variaciones de la superficie que dejan fijo el volumen *encerrado* por esta.

Analíticamente dichas superficies son aquellas que localmente son grafos de

funciones  $u(x, y)$  de dos variables que satisfacen la ecuación semilineal elíptica:

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 2H(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2},$$

donde  $H$  es la curvatura media de la superficie, que es igual a cero en el caso minimal.

Las superficies minimales y con curvatura media constante constituyen actualmente un campo muy activo de investigación. Para abordar su estudio se emplean técnicas procedentes del análisis complejo, de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, de la teoría geométrica de la medida, así como técnicas propias de geometría riemanniana.

Las principales líneas de investigación en las que se trabaja actualmente son el estudio de las propiedades topológicas de las superficies minimales y con curvatura media constante sin autointersecciones propiamente en el espacio Euclídeo tridimensional, la construcción de ejemplos y las propiedades variacionales que presentan dichas superficies.

El carácter variacional de las superficies con curvatura media constante motiva la siguiente definición: si  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión isométrica con curvatura media constante de una superficie en una variedad Riemanniana tridimensional, diremos que es *estable* si es un mínimo del área para cualquier variación de la superficie que conserve el volumen "encerrado" por  $M$ . Analíticamente, esta condición se traduce en la desigualdad:

$$\int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA \geq 0,$$

para toda función diferenciable  $u$  en  $M$  con soporte compacto y tal que  $\int_M u dA = 0$ . En la anterior fórmula,  $\text{Ric}(\nu)$  es la curvatura de Ricci en la dirección de un vector  $\nu$  unitario y normal a la inmersión y  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de la inmersión.

Los mejores resultados obtenidos hasta ahora se han conseguido cuando la curvatura de Ricci de la variedad ambiente es no negativa, ya que en este caso la función  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es no negativa. Si la superficie  $M$  es compacta y orientable, utilizando métodos de geometría algebraica que proporcionan aplicaciones con energía ( $\int |\nabla u|^2$ ) que depende del género de la superficie, se ha conseguido probar [Fr, Y], ver teorema 2.6, que:

*Si  $M \subset N$  es una superficie orientable, compacta y estable, entonces*

*género*( $M$ )  $\leq 5$ . Además, si *género*( $M$ ) = 4, 5, entonces la inmersión es minimal.

Cuando la superficie  $M$  es no compacta y tiene área infinita, Silveira [S] ha demostrado que la estabilidad implica que  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es idénticamente cero y, en particular, la superficie  $M$  es totalmente geodésica. Esta situación se da cuando  $M$  es una superficie completa no compacta en una variedad con curvatura de Ricci no negativa [Fr].

Por otra parte, cuando la variedad ambiente tiene curvatura constante, las únicas inmersiones posibles de esferas con curvatura media constante son totalmente umbilicales, y estas inmersiones son siempre estables. En el capítulo 2 damos una relación entre la estabilidad y las regiones con signo de la curvatura de Gauss, ver teorema 2.13, por medio de soluciones de la ecuación *senh*-Gordon, ver el capítulo 1

*Si  $M \subset N(c)$  es una superficie estable, compacta y orientable inmersa con curvatura media  $H$  en una variedad orientable con curvatura constante, y  $c + H^2 > 0$ , entonces la región  $K < 0$  es conexa y en cada componente conexa de la región  $K > 0$  hay un punto umbílico al menos.*

En particular, cuando  $M$  es un toro, obtenemos como consecuencia, ver corolario 2.14:

*Los toros estables en variedades con curvatura constante son llanos.*

Cuando podemos deducir que en una variedad riemanniana con curvatura constante no hay superficies estables compactas con género mayor que uno, el resultado anterior junto con la observación de que las esferas inmersas son estables proporciona una clasificación de las superficies estables. Por ejemplo, si la curvatura de la variedad ambiente es 1, utilizando métodos de geometría conforme (estimaciones de  $\int H^2$ ), ver [LY] o el teorema 2.16, obtenemos en el corolario 2.17 que:

*Las únicas superficies estables en  $\mathbb{R}P^3$  son esferas geodésicas, un revestimiento de dos hojas de un plano proyectivo totalmente geodésico, y tubos llanos de ciertos radios alrededor de geodésicas cerradas.*

En la variedad llana  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , donde  $S_\theta$  es el subgrupo generado por un movimiento



helicoidal, el principio de reflexión de Alexandrov [A,KKS] permite concluir que las únicas superficies compactas sin autointersecciones con curvatura media constante tienen género menor que uno. En este caso también obtenemos:

*Las únicas superficies estables y sin autointersecciones en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$  son esferas geodésicas y tubos alrededor de geodésicas cerradas.*

Los problemas isoperimétricos se plantean como un conjunto especialmente interesante de problemas globales en geometría Riemanniana. Uno de ellos consiste en encontrar, para una variedad Riemanniana  $N$ , y cualquier valor  $0 < V < \text{vol}(N)$  las superficies compactas sin autointersecciones de mínima área que encierran un volumen  $V$ . Si la variedad es compacta y de dimensión tres, dicho problema siempre admite una solución regular, compacta y sin autointersecciones a causa del resultado de existencia de Almgren [Alm] y del teorema de regularidad de Taylor [T]. Dicha solución tiene curvatura media constante y es estable. El resultado es también cierto en el caso de que  $N$  sea una variedad llana.

Para superficies completas con curvatura constante y simplemente conexas, el problema fue resuelto por Schmidt [S]. En el espacio producto  $S^2(1) \times \mathbb{R}$  ha sido resuelto por Pedrosa [Pe]. Como aplicación de nuestros resultados de clasificación para superficies estables con curvatura media constante, resolvemos el problema isoperimétrico en el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^3(1)$  y en variedades llanas con grupo fundamental cíclico. En particular, obtenemos que:

*Si  $M \subset \mathbb{R}P^3$  es una superficie que divide a  $\mathbb{R}P^3$  en dos regiones de igual volumen, entonces  $\text{área}(M) \geq \pi^2$  y la igualdad se da si y sólo si  $M$  es el toro de Clifford.*

Cuando el género de la superficie estable  $M$  es mayor que uno no se tiene aún ningún resultado de clasificación. No se conoce ningún ejemplo de superficie estable de género dos. M. Ross [Ro] ha probado que las clásicas superficies minimales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de Schwarz con género tres son estables, y ha observado que superficies minimales y con curvatura media constante próximas a estas deben ser también estables, lo que sugiere la existencia de un gran número de superficies estables. Tampoco se conocen ejemplos de superficies estables de géneros cuatro y cinco.

En el capítulo 4 probamos un resultado de compacidad para superficies estables con curvatura media constante y género mayor o igual que dos. Concretamente,

ver teorema 4.14:

*Sea  $M_n \subset \mathbb{R}^3$  una sucesión de superficies conexas y sin autointersecciones invariantes por grupos  $G_n$  discretos de isometrías tales que  $M_n/G_n \subset \mathbb{R}^3/G_n$  es una superficie estable compacta de género mayor o igual que dos. Podemos entonces extraer entonces una subsucesión de las superficies convergente a una superficie  $M$  y de los grupos a un grupo  $G$  tales que  $M/G$  es estable en  $\mathbb{R}^3/G$ .*

En la demostración de este resultado utilizamos un resultado, teorema 4.11, de compacidad para sucesiones de superficies a partir de cotas locales de área y cotas uniformes de la norma de la segunda forma fundamental. La cota uniforme de la segunda forma fundamental se obtiene a partir de la hipótesis de estabilidad. La cota local del área se obtiene a partir de un resultado, teorema 4.5, de existencia de semientornos tubulares análogo al clásico teorema de Blaschke para superficies convexas en  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizando las mismas técnicas podemos demostrar un teorema similar de compacidad para superficies minimales con índice uno sin autointersecciones en toros llanos tridimensionales, ver teorema 4.12:

*Sea  $M_n \subset \mathbb{R}^3$  una sucesión de superficies minimales sin autointersecciones invariantes por grupos  $\Gamma_n$  discretos de traslaciones tales que  $M_n/\Gamma_n \subset \mathbb{R}^3/\Gamma_n$  es una superficie compacta de índice uno. Podemos entonces extraer entonces una subsucesión de las superficies convergente a una superficie  $M$  y de los grupos a un grupo  $\Gamma$  tales que  $M/\Gamma$  es compacta y con índice uno en  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ .*

Como corolario de nuestro resultado de compacidad para superficies estables obtenemos en particular:

*No existen superficies estables compactas de género mayor que uno en el producto  $T^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $T^2$  es un toro llano bidimensional de área uno y radio de inyectividad pequeño.*

En particular, se obtiene que para estas variedades no hay soluciones del problema isoperimétrico distintas de bolas geodésicas, entornos tubulares de geodésicas y bandas acotadas por toros totalmente geodésicos paralelos.

En el capítulo 5 se demuestra un resultado de compacidad similar al del capítulo 2 para inmersiones estables que poseen aplicación de Gauss. La herramienta básica es un resultado de compacidad [Wo] para aplicaciones armónicas con energía uniformemente acotada basado en métodos de Gromov [Gr]. Puesto que las aplicaciones de Gauss de superficies con curvatura media constante son aplicaciones armónicas, y su energía puede acotarse uniformemente por una constante que solo depende del género de la superficie nuestro resultado es consecuencia, aunque no inmediata, de los anteriores.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de superficies minimales orientables y completas sin autointersecciones con índice uno en variedades llanas, completas y orientables. Los métodos utilizados en su estudio son similares a los empleados en el estudio de las superficies estables. Para superficies compactas conseguimos probar:

*Sea  $M \subset N$  es una superficie minimal compacta orientable sin autointersecciones con índice uno en un cociente orientable de  $\mathbb{R}^3$ . Si el género de  $M$  es cuatro o cinco, o  $M$  es una superficie hiperelíptica de género tres, entonces  $N$  es un toro llano tridimensional.*

La clasificación de superficies completas ofrece las siguientes posibilidades:

*Si  $M$  es una superficie minimal completa y orientable sin autointersecciones con índice uno en una variedad llana, completa y orientable, entonces se tienen las siguientes posibilidades:*

- (i)  *$M$  es una catenoide en  $\mathbb{R}^3$ ,*
- (ii)  *$M$  es una superficie de Scherk simple o doblemente periódica en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos de traslaciones,*
- (iii)  *$M$  es un helicoides con curvatura total mayor que  $-4\pi$  en un cociente helicoidal de  $\mathbb{R}^3$ ,*
- (iv)  *$M$  es un toro con dos finales en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un grupo que contiene movimientos helicoidales.*

En el capítulo 3 se dan ejemplos de la última posibilidad.

Los primeros ejemplos de superficies con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  fueron producidos experimentalmente por Plateau, quien encontró seis tipos distintos de superficies de revolución con curvatura media constante, incluyendo una

superficie minimal. Posteriormente, Delaunay [De] demostró en 1841 que la lista de superficies de revolución dada por Plateau era completa. M. do Carmo y Dajczer [dCD] observaron que la familia asociada a las superficies de Delaunay proporciona ejemplos de superficies con curvatura media constante invariantes por un grupo uniparamétrico de movimientos helicoidales de  $\mathbb{R}^3$ . Las posibles superficies con curvatura media constante que admiten un grupo uniparamétrico de isometrías intrínsecas han sido clasificadas por B. Smyth [Sm] por medio del estudio de soluciones que dependen de un parámetro de la ecuación sinh-Gordon. En 1970, H.B. Lawson [L] obtuvo ejemplos de superficies sin autointersecciones con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  resolviendo un problema de Plateau en la esfera  $S^3$  y aplicando un principio de dualidad para superficies inmersas con curvatura media constante en variedades con curvatura constante. Asimismo, H. Karcher [Kar] y K. Große Brauckmann [GB] han obtenido nuevos ejemplos de superficies con curvatura media constante por este método.

En 1984, H. Wente [We] demostró la existencia de toros inmersos con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  por medio del estudio de soluciones doblemente periódicas de la ecuación sinh-Gordon en  $\mathbb{R}^2$ . Posteriormente, Abresch [A] simplificó la construcción de Wente, y Pinkall y Sterling [PS] clasificaron todos los toros con curvatura media constante inmersos en  $\mathbb{R}^3$ . En 1990-91, Kapouleas [K1,K2] construyó un gran número de superficies con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  de género  $g \neq 1$  con  $n \geq 2$  finales, y de superficies compactas con género  $g \geq 3$ .

El capítulo 6 está dedicado a ejemplos de superficies con curvatura media constante obtenidos por un método diferente a todos los anteriores. Sobre ciertas superficies de Riemann compactas con simetrías, construimos aplicaciones armónicas simétricas a la esfera  $S^2$ , que posteriormente integramos para obtener inmersiones minimales y con curvatura media constante. Los ejemplos obtenidos forman familias diferenciables e incluyen, por ejemplo, la clásica superficie minimal  $\mathcal{P}$  de Schwarz de género tres y las piezas de género dos de una de las superficies de Lawson. Todas las superficies que obtenemos son compactas en cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones y no tienen autointersecciones. Además, obtenemos la siguiente caracterización de dichas superficies:

*Toda superficie sin autointersecciones con curvatura media constante en un cociente  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto  $\Gamma$  de traslaciones generado por vectores ortogonales que sea simétrica con respecto a tres superficies totalmente geodésicas que se cortan ortogonalmente y tal que las coordenadas de su aplicación de Gauss tengan sólo dos*

*regiones nodales, es una de las superficies construidas como ejemplos.*

En particular, todas las posibles las superficies estables simétricas y las fronteras de los posibles dominios isoperimétricos están en nuestra familia de ejemplos.

## Capítulo 1

# Preliminares

### 1.1 Generalidades

En este apartado precisaremos la notación y algunas definiciones fundamentales.

Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana que, en general, supondremos conexa y completa. Denotaremos por  $K$ ,  $dA$  y  $\Delta$  la curvatura de Gauss, la medida y el Laplaciano asociados a la métrica Riemanniana  $ds^2$ .

Consideremos una inmersión isométrica  $\psi : (M, ds^2) \rightarrow N$ , donde  $N$  es una variedad Riemanniana  $N$  de dimensión tres. Denotaremos indistintamente por  $g$  o  $\langle, \rangle$  a la métrica de  $N$ . Sean  $\nabla$  y  $\widetilde{\nabla}$  las conexiones asociadas a las métricas de  $M$  y  $N$ , respectivamente. Si  $\nu$  es un campo vectorial unitario y normal a la inmersión, entonces, para todo par de campos  $X$  e  $Y$  tangentes a  $M$  se verifica la ecuación de Gauss:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \nu, \quad (1.1)$$

donde  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de  $\psi$ . El endomorfismo de Weingarten  $A$  de  $T_p M$  se define como  $A(x) = -\widetilde{\nabla}_x \nu$  para todo  $x \in T_p M$ . Los valores propios  $k_1$  y  $k_2$  del endomorfismo de Weingarten son las curvaturas principales de la inmersión. El cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental  $\sigma$  es  $|\sigma|^2 = k_1^2 + k_2^2$ . La curvatura media  $H$  de la inmersión es  $(k_1 + k_2)/2$ .

**Definición.** Una inmersión  $\psi$  tiene curvatura media constante si la curvatura media es una función constante en  $M$ .

Una inmersión  $\psi$  es *minimal* si la curvatura media es idénticamente nula en  $M$ .

Denotaremos por  $\mathbb{R}^n$  al espacio euclídeo de dimensión  $n$ ; por  $S^n(r)$  a la esfera de radio  $r > 0$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y por  $\mathbb{H}^n$  al espacio hiperbólico de dimensión  $n$  y curvatura constante  $-1$ . A veces escribiremos  $S^n$  en lugar de  $S^n(1)$ .

Sobre la variedad  $N$ ,  $\text{Ric}$  denotará la curvatura de Ricci y  $S$  su curvatura escalar, normalizadas de modo que sobre  $S^3$  valgan, respectivamente, 2 y 4.

El primer resultado básico que utilizaremos sobre superficies riemannianas orientadas es el hecho de que sobre cada una de ellas existe una única estructura de superficie de Riemann (variedad analítica compleja de dimensión uno) compatible con la estructura riemanniana. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

**Teorema 1.1.** *Sea  $(M, ds^2)$  una superficie riemanniana. Entonces, para todo  $p \in M$ , existe un abierto coordenado  $(U, (x, y))$  centrado en  $p$  tal que si  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  son los campos coordenados, se tiene:*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \right|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial y} \right|^2 = \lambda^2$$

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0,$$

donde  $\lambda$  es una función diferenciable positiva en  $U$ .

A un entorno de este tipo lo llamaremos *carta isoterma* o *entorno isotermo* centrado en  $p$ .

Si  $M$  es una superficie orientada, entonces la colección de todas las cartas isotermas en  $M$  cuya orientación es compatible con la de la superficie induce una estructura de superficie de Riemann sobre  $M$ .

Es importante hacer notar que la estructura de superficie de Riemann inducida por una métrica riemanniana  $ds^2$  es la misma que la inducida por cualquier otra métrica  $ds_1^2$  en  $M$  conforme a  $ds^2$ , es decir, tal que existe una función  $u \in C^\infty(M)$  con  $ds_1^2 = e^{2u} ds^2$ . Recíprocamente, puede probarse que, dada una superficie de Riemann  $M$ , existe una métrica riemanniana  $ds^2$  en  $M$  que soporta tal estructura conforme. Dicha métrica puede elegirse completa y con curvatura constante como consecuencia del teorema de uniformización para superficies de Riemann [FK,Fo].

**Definición.** Sea  $M$  una superficie de Riemann. Diremos que una inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  en una variedad riemanniana  $N$  es *conforme* si la métrica inducida en  $M$  por  $\psi$  tiene asociada la estructura conforme de  $M$ .

**Definición.** Sea  $M$  una superficie de Riemann. Diremos que una aplicación  $\psi : M \rightarrow N$  en una variedad riemanniana  $N$  es una *inmersión conforme ramificada* si es una inmersión salvo en un conjunto discreto de puntos donde se anula la diferencial  $d\psi$ .

El siguiente resultado relaciona el laplaciano de las funciones coordenadas de una inmersión de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con la curvatura media de la inmersión.

**Teorema 1.2.** Sean  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión conforme, y  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  son las funciones coordenadas de la inmersión. Entonces, para toda carta isoterma  $(U, (x, y))$  tal que  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ , se tiene:

$$\Delta_0 \psi_k = 2\lambda^2 H \phi_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

donde  $\Delta_0$  es el Laplaciano asociado a la métrica  $|dz|^2$ ,  $H$  es la curvatura media de la inmersión, y  $\phi$  es el vector normal a la inmersión.

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos que la inmersión  $\psi$  es minimal si y sólo si las coordenadas  $\psi_k$ , con  $k = 1, 2, 3$  son funciones armónicas.

## 1.2 Fórmulas de variación del área y del volumen

Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica de una superficie Riemanniana en una variedad Riemanniana de dimensión tres, y supongamos que existe un campo vectorial  $\nu$  unitario y normal a la inmersión. Una *variación* de  $\psi$  es una aplicación diferenciable  $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow N$  tal que, si  $\Psi_t(x) = \Psi(t, x)$ , entonces  $\Psi_0 = \psi$ . El *campo variacional* asociado a  $\Psi$  es el campo vectorial a lo largo de  $\psi$  dado por  $X(p) = d\Psi_{(0,p)}(\frac{\partial}{\partial t})$ . Diremos que una variación es *normal* si el campo variacional  $X$  es proporcional en cada punto al campo normal a la inmersión. Si  $X$  tiene soporte compacto diremos que la variación  $\Psi$  tiene soporte compacto. Para una variación de este tipo y valores pequeños de  $t$ , se tiene que  $\Psi_t$  es una inmersión de  $M$  en  $N$ . En este caso, definimos:

$$A(t) = \int_M dA_t, \quad (1.2)$$

$$V(t) = - \int_M \Psi^*(dN), \quad (1.3)$$



donde  $dA_t$  es el elemento de área asociado a la inmersión  $\Psi_t$ , y  $dN$  es la forma de volumen de  $N$ .  $A(t)$  es el *funcional área*, que mide en cada instante  $t$  el área de  $M$  con la métrica inducida por la inmersión  $\Psi_t$ . La función  $V(t)$  es el *volumen orientado*, que mide el volumen encerrado entre las inmersiones  $\Psi_0$  y  $\Psi_t$ . Se tiene entonces:

**Proposición 1.3 (Primera fórmula de variación del área, [BdCE,Si]).** *Sea  $\Psi$  una variación de  $\psi$  con campo variacional  $X$  de soporte compacto en  $M$ . Entonces  $A$  es una función diferenciable en 0 y:*

$$A'(0) = -2 \int_M H u \, dA, \quad (1.4)$$

donde  $u = \langle X, \nu \rangle$  y  $H$  es la curvatura media de  $\psi$ .

**Proposición 1.4 (Primera fórmula de variación del volumen, [BdCE]).** *Sea  $\Psi$  una variación de  $\psi$  con campo variacional  $X$  de soporte compacto en  $M$ . Entonces  $V$  es una función diferenciable en 0 y:*

$$V'(0) = - \int_M u \, dA, \quad (1.5)$$

donde  $u = \langle X, \nu \rangle$ .

De ambos resultados se sigue inmediatamente que:

**Teorema 1.5.**

- (i) *Una inmersión  $\psi$  es minimal si y sólo si es un punto crítico del funcional área para cualquier variación  $\Psi$  de  $\psi$  con soporte compacto.*
- (ii) *Una inmersión  $\psi$  tiene curvatura media constante si y sólo si es un punto crítico del funcional área para cualquier variación  $\Psi$  de  $\psi$  con soporte compacto que sea punto crítico del volumen orientado.*

Si se desean estudiar propiedades de estabilidad de superficies minimales o con curvatura media constante es necesario calcular la segunda derivada del área de las posibles variaciones de la inmersión.

**Proposición 1.6** (Segunda fórmula de variación del área, [BdCE,Si]).  
 Supongamos que  $\psi$  es una inmersión con curvatura media constante y  $\Psi$  es una variación normal con campo variacional  $X$  de soporte compacto en  $M$ . Entonces:

$$A''(0) - 2H V''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA, \quad (1.6)$$

donde  $u = \langle X, \nu \rangle$ ,  $\text{Ric}(\nu)$  es la curvatura de Ricci del vector normal  $\nu$  a la inmersión, y  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental  $\sigma$  de la inmersión.

**Definición.** Diremos que una variación  $\Psi$  de  $\psi$  conserva el volumen orientado o simplemente que conserva el volumen si  $V(t)$  es constante para  $t$  suficientemente pequeño.

A partir de la segunda fórmula de variación del área, obtenemos:

**Teorema 1.7.** Si  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión minimal y  $\Psi$  es una variación normal cualquiera de  $\psi$  con campo variacional  $X$  de soporte compacto, entonces:

$$A''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA, \quad (1.7)$$

con  $u = \langle X, \nu \rangle$ .

**Teorema 1.8.** Si  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión con curvatura media constante y  $\Psi$  es una variación normal de  $\psi$  que conserva el volumen con campo variacional  $X$  de soporte compacto, entonces:

$$A''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA, \quad (1.8)$$

con  $u = \langle X, \nu \rangle$ .

Si consideramos sobre  $M$  el operador de Schrödinger  $\Delta + q$ , con  $q = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ , tenemos que  $I(u) = A''(0)$  es la forma cuadrática asociada a  $L$  en el espacio  $C_0^\infty(M)$ , a la que llamaremos la *forma índice* de la inmersión. Si  $\Omega$  es un abierto

relativamente compacto contenido en  $M$ , la forma cuadrática  $I$  es continua con respecto a la norma de Sobolev:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_M u^2 + \int_M |\nabla u|^2,$$

y extiende por tanto al espacio  $H_0^1(\Omega)$  (completado de  $C_0^\infty(\Omega)$  con la norma de Sobolev).

**Definición.** Diremos que una inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  de una superficie orientada en una variedad riemanniana orientada de dimensión tres es *estable* si tiene curvatura media constante y:

$$\int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA \geq 0, \quad (1.9)$$

para toda función  $u \in H^1(M)$  con soporte compacto tal que  $\int_M u dA = 0$ .

En la definición anterior,  $H^1(M)$  es el completado de  $C_0^\infty(M)$  con respecto a la norma de Sobolev. Como consecuencia de la segunda fórmula de variación del área y de los resultados de [BdCE] se tiene:

**Teorema 1.9.** *Una inmersión con curvatura media constante es estable si y solo si es un mínimo del área para todas las variaciones de la inmersión que conservan el volumen.*

**Definición.** Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica,  $\Omega \subset M$  un abierto relativamente compacto. El *índice de  $\Omega$* ,  $\text{Ind}(\Omega)$ , es el número de valores propios negativos del operador  $\Delta + \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  en  $H_0^1(\Omega)$ , es decir, el índice del operador  $\Delta + \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  en  $\Omega$ .

**Definición.** El *índice de  $M$* ,  $\text{Ind}(M)$ , es el supremo de los índices de  $\Omega$ , donde  $\Omega$  es un abierto relativamente compacto en  $M$ .

El índice de  $M$  puede no ser finito. Las inmersiones minimales con índice cero son mínimos del área para cualquier variación de la superficie con soporte compacto. Si una inmersión con curvatura media constante es estable, entonces su índice es necesariamente cero o uno. A lo largo de este trabajo veremos que una inmersión con curvatura media constante e índice uno no es necesariamente estable.

### 1.3 Aplicaciones de Gauss

Sea  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  es una aplicación diferenciable entre dos variedades Riemannianas. La energía de  $\phi$ ,  $E(\phi)$ , se define por:

$$E(\phi) = \int_M |\nabla\phi|^2 dA, \quad (1.10)$$

donde  $|\nabla\phi|^2(p) = \sum_{i=1}^n |d\phi(e_i)|^2$ , con  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base ortonormal de  $T_pM$ . El campo de tensión de la aplicación  $\phi$  viene dado por  $\tau(\phi)(p) = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} d\phi(E_i)$ , donde  $E_i$  es un campo ortonormal local paralelo en  $p$ .

**Definición.** Una aplicación entre dos variedades riemannianas  $\phi : M \rightarrow N$  es *armónica* si  $\tau(\phi) = 0$ .

La relación entre las aplicaciones armónicas y las inmersiones con curvatura media constante viene dada por el siguiente resultado:

**Teorema 1.10 ([RV]).** *Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión isométrica de una superficie riemanniana  $M$  con aplicación de Gauss  $\phi : M \rightarrow S^2$ . Entonces la curvatura media de  $\psi$  es constante si y sólo si  $\phi$  es una aplicación armónica.*

Para las aplicaciones armónicas  $\phi : M \rightarrow S^2$ , la ecuación  $\tau(\phi) = 0$  se transforma en:

$$\Delta\phi_i + |\nabla\phi|^2 \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

donde  $\phi_i$  son las coordenadas de la aplicación  $\phi : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Es fácil ver que la energía de una aplicación definida sobre una superficie riemanniana  $M$  es invariante por cambios conformes de la métrica de la superficie, de modo que si la superficie es orientable, la energía solo depende de la estructura de superficie de Riemann de  $M$ . La ecuación de Euler es también invariante por cambios conformes de la métrica de la superficie.

Si  $\phi : M \rightarrow S^2$  es una aplicación armónica y  $g$  es la proyección estereográfica de  $\phi$ , entonces la ecuación (1.11) se traduce en:

$$d'd''g - \frac{2\bar{g}}{1+|g|^2} d'g d''g = 0, \quad (1.12)$$

donde  $d'$  y  $d''$  son las proyecciones holomorfa y antiholomorfa de la diferencial  $d$  en la superficie de Riemann  $M$ . Si  $(U, z)$  es una carta isoterma en  $M$ , entonces localmente  $d'f = f_z dz$  y  $d''f = f_{\bar{z}} d\bar{z}$ .

## 1.4 La representación de Weierstrass

La clásica representación de Weierstrass para superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$  permite reconstruir una inmersión minimal a partir de su aplicación de Gauss y de una 1-forma holomorfa en la superficie de Riemann subyacente. En este apartado, extendemos dicha representación a las superficies con curvatura media constante no nula y a los cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones.

Supongamos que  $M$  es una superficie de Riemann,  $\Gamma$  un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión conforme con curvatura media constante  $H$ ,  $\phi : M \rightarrow S^2$  la aplicación de Gauss, que es una aplicación armónica,  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss, y  $\alpha$  la diferencial de Hopf asociada a la inmersión. Por definición,  $\alpha$  es la diferencial cuadrática compleja  $\sigma^{2,0} = 4\sigma(\partial_z, \partial_z) dz^2$ , donde  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de la inmersión. Si la variedad ambiente tiene curvatura constante, como es nuestro caso, y  $\psi$  tiene curvatura media constante, entonces la diferencial de Hopf es una diferencial cuadrática holomorfa. Los ceros de  $\alpha$  son los puntos umbílicos de la inmersión. Para estas inmersiones, tenemos la siguiente representación:

**Teorema 1.11 ([HO]).** *Si  $\psi$  tiene curvatura media constante, entonces:*

$$d'\psi = (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega, \quad (1.13)$$

donde  $\omega$  es una 1-forma compleja diferenciable de tipo  $(1,0)$  en  $M$  tal que  $\alpha = -4\omega \otimes d'g$ . Además:

$$\psi = \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega, \quad (1.14)$$

y la métrica inducida en  $M$  por la inmersión es:

$$ds^2 = \left( \frac{|\omega|(1 + |g|^2)}{2} \right)^2. \quad (1.15)$$

En consecuencia, podemos recuperar la inmersión a partir del conocimiento de la aplicación de Gauss y de la diferencial de Hopf. Los dos siguientes resultados enuncian este hecho para superficies con curvatura media constante no nula y para superficies minimales. Existe una diferencia fundamental entre ambos tipos de inmersiones: en el caso de curvatura media constante no nula, la aplicación de Gauss determina la diferencial de Hopf y, por tanto, determina completamente la inmersión. En el caso minimal, sabemos que existen superficies minimales no congruentes con la misma aplicación de Gauss [O]. En consecuencia, la aplicación de Gauss no determina la inmersión. En el artículo de Hofmann y Ossermann [HO] se estudia con detalle esta cuestión.

Para superficies con curvatura media constante no nula tenemos:

**Teorema 1.12** ([Chen,Ke,Ga]). Sean  $M$  una superficie de Riemann,  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación que verifica la ecuación:

$$d'd''g - \frac{2\bar{g}}{1+|g|^2}d'gd''g = 0,$$

y tal que  $d''g$  no es idénticamente 0. Para cada  $H \neq 0$ , consideremos la 1-forma de tipo  $(1,0)$   $\omega = -2\overline{d''g}/(H(1+|g|^2)^2)$ , la 1-forma vectorial

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega,$$

y el morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} H^1(M, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{R}^3 \\ \gamma &\mapsto \text{Re} \int_{\gamma} \Phi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Sea  $\Gamma = \text{Per}(H^1(M, \mathbb{Z}))$ . Fijado  $p \in M$ , sea  $\gamma$  una curva que une  $p$  y  $q$ , para todo  $q \in M$ .

Si  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^3$ , entonces la aplicación  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  dada por:

$$\psi(q) = \text{Re} \int_{\gamma} \Phi = \text{Re} \int_{\gamma} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega, \quad (1.17)$$

es una inmersión conforme ramificada con curvatura media constante  $H$  de  $M$  en la variedad cociente  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  tal que  $g$  es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss.

Además, la inmersión  $\psi$  está libre de puntos de ramificación si y sólo si  $d''g$  nunca se anula.

Para superficies minimales tenemos:

**Teorema 1.13.** Sean  $M$  una superficie de Riemann,  $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una función meromorfa y  $\omega$  una 1-forma holomorfa en  $M$ . Definimos la 1-forma vectorial meromorfa:

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega, \quad (1.18)$$

y el morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} H^1(M, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{R}^3 \\ \gamma &\mapsto \text{Re} \int_{\gamma} \Phi. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Sea  $\Gamma = \text{Per}(H^1(M, \mathbb{Z}))$ . Fijado  $p \in M$ , para cada  $q \in M$ , sea  $\gamma$  una curva que une  $p$  y  $q$ . Definimos la aplicación  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  por:

$$\psi(q) = \text{Re} \int_{\gamma} \Phi = \text{Re} \int_{\gamma} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega. \quad (1.20)$$

Entonces  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es una inmersión conforme, minimal y ramificada de  $M$  en la variedad cociente  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  tal que  $g$  es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss.

Además, la inmersión  $\psi$  está libre de puntos de ramificación si y solo si en cada cero de  $\omega$ , la aplicación  $g$  posee un polo de orden doble.

**Definición.** Diremos que una superficie riemanniana  $M$  tiene *curvatura total finita* si  $\int_M |K| dA < \infty$ .

Si  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es una inmersión minimal de una superficie completa y orientable, entonces la curvatura de Gauss de  $M$  es siempre no positiva, de modo que  $M$  tiene curvatura total finita si y sólo si  $\int_M K > -\infty$ .

Como consecuencia de un resultado de Huber [Hu] se tiene:

**Teorema 1.14** ([O,MeR1,MeR2]). Sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión minimal con curvatura total finita de una superficie completa y orientable  $M$  en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto de traslaciones  $\Gamma$ .

Entonces  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ .

Además, la aplicación de Gauss  $g$  y la 1-forma de Weierstrass  $\omega$  extienden de forma meromorfa a  $\overline{M}$ .

A los puntos de  $\overline{M} \setminus M$  se les denomina  *finales*  de la inmersión.

## 1.5 La ecuación sinh-Gordon.

Como hemos visto en el apartado anterior, la aplicación de Gauss permite reconstruir una inmersión con curvatura media constante no nula. En esta sección veremos que también es posible recuperar la inmersión a partir de la diferencial de Hopf  $\alpha$  y de una solución de un operador diferencial elíptico.

Sean  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana orientable,  $(N(c), g)$  una variedad Riemanniana de dimensión tres y curvatura constante  $c$ ,  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$ ,  $\sigma$  la segunda forma fundamental de  $\psi$  y  $P \subseteq M$  el conjunto de puntos umbílicos. Entonces la ecuación de Codazzi-Mainardi es equivalente a que  $\alpha = \sigma^{2,0}$ , que viene dada en coordenadas locales isoterma por  $4\sigma(\partial_z, \partial_z) dz^2$ , sea holomorfa en  $M$ . Se tiene además que  $p \in M$  es un punto umbílico de  $\psi$  si y solo si  $\alpha_p = 0$ . En particular,  $P$  es un conjunto discreto en  $M$ .

Asociados a una inmersión isométrica con curvatura media constante en una variedad con curvatura constante, podemos encontrar una diferencial cuadrática holomorfa (la diferencial de Hopf), y una función diferenciable salvo en un conjunto finito de puntos que es solución de un operador elíptico.

**Teorema 1.15.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N(c)$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$  no totalmente umbilical. Supongamos que  $c + H^2 > 0$  y que  $b^2 = 4(c + H^2)$ ,  $P$  el conjunto de puntos umbílicos de la inmersión, y  $ds_0^2$  la métrica llana ramificada  $b|\alpha|$ . Si*

$$ds^2 = \exp(2w)/b^2 ds_0^2, \quad \text{en } M \setminus P,$$

entonces  $w$  verifica la ecuación:

$$\Delta_0 w + \sinh(w) \cosh(w) = 0, \quad \text{en } M \setminus P. \quad (1.21)$$



Además:

$$\begin{aligned}k_1 &= H + b \exp(-2w)/2, \\k_2 &= H - b \exp(-2w)/2, \\K &= (1 - \exp(-4w)) b^2/4.\end{aligned}$$

El siguiente resultado demuestra que es posible construir una inmersión a partir de una diferencial cuadrática holomorfa y una solución de la ecuación *senh*-Gordon cuyas singularidades están relacionadas con los ceros de  $\alpha$ .

**Teorema 1.16.** *Sea  $M$  una superficie de Riemann simplemente conexa,  $\alpha$  una diferencial cuadrática holomorfa en  $M$ ,  $P$  el conjunto aislado de ceros de  $\alpha$ ,  $b$  un número real positivo,  $ds_0^2$  la métrica llana  $b|\alpha|^2$  en  $M \setminus P$ . Sea  $w$  una solución de la ecuación:*

$$\Delta_0 w + \sinh(w) \cosh(w) = 0, \quad \text{en } M \setminus P,$$

tal que  $w$  es asintótica a  $-\frac{k}{2} \log |z|$  en un entorno de un cero de  $\alpha$  de orden  $k$ .

Entonces, para cada  $c, H \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , tales que  $b^2 = 4(c + H^2)$ , existe una inmersión conforme  $\psi_\theta : M \rightarrow N(c)$  con curvatura media constante  $H$  y diferencial de Hopf  $e^{i\theta} \alpha$  tal que la métrica inducida por la inmersión es:

$$ds^2 = b |\alpha|. \tag{1.22}$$

A partir de este resultado es fácil demostrar el siguiente principio de dualidad para superficies con curvatura media constante en variedades con curvatura constante.

**Teorema 1.17.** *Sean  $M$  una superficie simplemente conexa,  $N(c_0)$  una variedad completa simplemente conexa con curvatura constante  $c_0$ , y  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$ , existe entonces una familia de inmersiones:*

$$\psi_{c,\theta} : M \rightarrow N^3(c), \quad \text{con } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

con curvatura media constante  $H$  siempre que  $c_0 + H^2 = c + H^2$ .

## 1.6 El problema isoperimétrico

Dada una variedad Riemanniana  $N$  de dimensión tres, nos planteamos el problema de encontrar, de entre todos los abiertos relativamente compactos  $\Omega \subset N$  que encierran un volumen dado, aquellos cuya frontera  $\partial\Omega$  es una superficie diferenciable con área mínima. A tales conjuntos los denominaremos *dominios isoperimétricos*.

De entre todas las superficies compactas que encierran un volumen dado en una variedad riemanniana  $N$  compacta o llana y completa, existe una de mínima área por los resultados de [Alm]. Dicha superficie es un conjunto  $(M, \varepsilon, \delta)$ -minimal. A este tipo de conjuntos se aplica el teorema de regularidad de Taylor, que establece que las únicas singularidades de la superficie son curvas donde tres hojas de la superficie se encuentren formando ángulos iguales, o puntos donde cuatro de dichas curvas se encuentran. Puesto que nuestra superficie separa la variedad en dos regiones, deducimos que es diferenciable. Por tanto:

**Teorema 1.18** ([Alm,T]). *Sea  $N$  es una variedad tridimensional compacta y orientable o llana, orientable y completa.*

*Entonces existen soluciones del problema isoperimétrico para todo valor  $V \in (0, \text{vol}(N))$ , y cualquier solución del problema isoperimétrico es diferenciable.*

La información que nos ofrece la solución del problema isoperimétrico en una variedad Riemanniana  $N$  puede resumirse por medio de la función:

$$A(V) = \inf\{\text{Area}(\partial\Omega); \Omega \subset N \text{ es abierto con borde regular y } \text{Vol}(\Omega) = V\},$$

a la que llamaremos el *perfil isoperimétrico* de  $N$ . Las propiedades del perfil isoperimétrico son las siguientes:

**Teorema 1.19.** *Si  $(N, g)$  es una variedad Riemanniana de dimensión tres, entonces:*

- (i) *El perfil isoperimétrico  $A$  es continuo.*
- (ii) *Si  $A$  es diferenciable en  $V$ , y  $\Omega$  es una región isoperimétrica que encierra un volumen  $V$ , entonces  $A'(v) = 2H(\partial\Omega)$ .*
- (iii) *Las derivadas laterales existen en cada punto.*
- (iv) *La derivada segunda existe en el sentido de las distribuciones y es mayor o igual que cero.*

- (v) *Si  $N$  es compacta, el perfil isoperimétrico es simétrico respecto de  $\text{vol}(N)/2$ .*
- (vi) *Si  $N$  es no compacta, el perfil isoperimétrico es no decreciente.*

**Nota.** La curvatura media  $H$  del apartado (ii) se calcula con respecto al normal interior, que apunta hacia la región de volumen  $V$ .

La solución del problema isoperimétrico en  $\mathbb{R}^3$  fue obtenida por medio de la observación (principio de simetrización de Steiner) de que todo dominio isoperimétrico es simétrico respecto de un plano paralelo a cualquier plano dado. Esto implica que los únicos dominios isoperimétricos son bolas euclídeas. Una extensión del principio de simetrización de Steiner debida a Hsiang [Hs] prueba el siguiente resultado:

**Teorema 1.20.** *Sean  $\Gamma$  un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$  generado por vectores ortogonales, y  $\Omega \subset \mathbb{R}^3/\Gamma$  un dominio isoperimétrico. Entonces:*

- (i) *Si  $\text{rango}(\Gamma) = 1$ , entonces  $\Omega$  es invariante por un grupo uniparamétrico de giros.*
- (ii) *Si  $\text{rango}(\Gamma) = 2$  o  $3$ , entonces  $\Omega$  es simétrica respecto de tres superficies totalmente geodésicas que se cortan ortogonalmente.*

## Capítulo 2

# Superficies estables

En este capítulo estudiamos superficies estables en variedades de dimensión tres. La primera parte del capítulo esta dedicada a la recopilación de los resultados ya conocidos. En la segunda sección estudiamos las superficies estables en variedades con curvatura de Ricci no negativa y obtenemos restricciones sobre el tipo topológico de la superficie. Estudiamos asimismo superficies compactas estables de géneros cuatro y cinco y demostramos que el operador de Schrödinger asociado a la segunda variación del área está determinado por una aplicación antiholomorfa de la superficie en la esfera  $S^2$ . Asimismo, obtenemos en este caso restricciones sobre la variedad ambiente cuando esta sea llana. En la tercera sección estudiamos superficies estables en variedades con curvatura constante y obtenemos que cualquier toro estable debe ser llano y, por tanto, un tubo alrededor de una geodésica cerrada. Las dos últimas secciones están dedicadas a la clasificación de las superficies estables en variedades elípticas y llanas. En particular, obtenemos resultados para el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^3(1)$  y para las variedades llanas con grupo fundamental cíclico. Se dan también aplicaciones al problema isoperimétrico.

## 2.1 Preliminares

Recordemos que una inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  de una superficie orientable en una variedad Riemanniana de dimensión tres es *estable* si tiene curvatura media constante y:

$$\int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA \geq 0, \quad (2.1)$$

para toda función  $u \in H^1(M)$  con soporte compacto tal que  $\int_M u dA = 0$ .

Es especialmente interesante estudiar el problema de estabilidad cuando la curvatura de Ricci de la variedad ambiente es mayor o igual que cero, puesto que

en este caso la función  $q = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es no negativa y la condición de estabilidad es mucho más restrictiva. De hecho, en el caso de que la variedad ambiente sea el espacio hipérbolico  $\mathbb{H}^3$ , Silveira [S] ha demostrado que existe al menos una familia uniparamétrica de superficies estables, no compactas y no totalmente umbilicales embebidas en  $\mathbb{H}^3(1)$  con curvatura media  $H < 1$ .

Recordemos que si la inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  es estable, el índice del operador  $\Delta + q$  es finito e igual a cero o uno. Este tipo de operadores ha sido por Fischer-Colbrie [FC], quien ha probado el siguiente resultado, ver también [LR]:

**Teorema 2.1.** *Sea  $M$  una superficie completa,  $q \geq 0$  una función diferenciable en  $M$ . Supongamos que el operador  $\Delta + (q - K)$  tiene índice finito.*

*Entonces:*

- (i)  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ .
- (ii) Si  $q \geq c > 0$ , entonces  $M$  es compacta.

Si la curvatura de Ricci de la variedad ambiente es mayor o igual que cero, entonces la curvatura escalar  $S$  es también mayor o igual que cero, y se tiene que:

$$\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 = S + \frac{1}{2} |\sigma|^2 - K,$$

de modo que el operador asociado a la segunda variación del área es del tipo considerado en el teorema 2.1. Aplicando dicho resultado obtenemos:

**Teorema 2.2.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión estable de una superficie orientable y completa en una variedad riemanniana orientable de dimensión tres y curvatura de Ricci no negativa. Entonces:*

- (i)  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ .
- (ii) Si la curvatura media  $H$  es mayor que cero, entonces  $M$  es compacta.
- (iii) Si la curvatura escalar  $S$  verifica  $S \geq c > 0$ , entonces  $M$  es compacta.

El caso no compacto ha sido estudiado por Silveira [S], quien ha obtenido el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión estable de una superficie  $M$  conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ , en una variedad riemanniana orientable de dimensión tres y curvatura de Ricci no negativa. Supongamos que el área de  $M$  es infinita.*

*Entonces la inmersión es totalmente geodésica y  $\text{Ric}(\nu) \equiv 0$  a lo largo de la inmersión.*

Imponiendo más restricciones a la variedad ambiente  $N$  se han conseguido mejores resultados:

**Teorema 2.4.** *Sea  $M \subset N$  una superficie completa, orientable y estable inmersa en una variedad orientable compacta  $N$  de dimensión tres con curvatura de Ricci positiva.*

*Entonces  $M$  es compacta y conexa y  $\text{género}(M) \leq 3$ .*

**Teorema 2.5.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una superficie completa, orientable y estable inmersa en una variedad completa y orientable de dimensión tres  $N$  con curvatura de Ricci no negativa, radio de inyectividad positivo y curvaturas seccionales acotadas superiormente, entonces, o bien:*

- (i)  *$\psi$  es totalmente geodésica, o bien*
- (ii)  *$M$  es compacta y conexa y  $\text{género}(M) \leq 5$ .*

*Además, si el género de  $M$  es cuatro o cinco, entonces  $\psi$  es una inmersión minimal.*

La compacidad en el teorema 2.4 se sigue del teorema 2.2, y en el teorema 2.5 de los resultados de Frensel [Fr], y Silveira [S]. La conexión de  $M$  es fácil de probar en ambos casos porque de otro modo podríamos contruir una función localmente constante no idénticamente cero con media nula contradiciendo la desigualdad (2.1). La estimación del género en los teoremas 2.4 y 2.5 fue obtenida por El Soufi e Ilias [EI], Frensel [Fr] y Yau [Y], ver también la demostración del teorema 2.6. Además, si  $M$  es no compacta, entonces  $M$  es una superficie minimal con índice cero y  $M$  es conformemente equivalente al plano  $\mathbb{C}$  o al cilindro  $\mathbb{C}^*$ , ver [FCS].

## 2.2 Superficies estables en variedades con curvatura de Ricci no negativa

Estamos interesados en la clasificación de superficies estables en variedades de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa ( $\text{Ric} \geq 0$ ). A partir de los teoremas 2.2 y 2.3 vemos que sólo queda por estudiar el caso de una inmersión minimal estable  $\psi : M \rightarrow N$  de una superficie orientable no compacta con área finita.

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 2.6.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica estable de una superficie completa orientable con área finita en una variedad orientable con curvatura de Ricci no negativa.*

*Entonces  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$  de género  $g$  menos  $r$  puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ , y se tiene:*

- (i) *Si  $\text{género}(\bar{M}) = 0, 1$ , entonces  $r \leq 3$ .*
- (ii) *Si  $\text{género}(\bar{M}) = 2, 3$ , entonces  $r \leq 1$ .*
- (iii) *Si  $\text{género}(\bar{M}) = 4, 5$ , entonces  $r = 0$ .*

*Además, si  $M$  es no compacta, entonces  $\psi$  es una inmersión minimal.*

Antes de demostrar el teorema 2.6 necesitamos probar unos resultados previos.

**Lema 2.7.** *Sea  $M$  una superficie completa y orientable conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . Sea  $q \geq 0$  una función diferenciable. Supongamos que el operador  $\Delta + q$  tiene índice finito.*

*Entonces  $q \in L_1(M)$ .*

*Demostración:* Llamemos  $L$  al operador  $\Delta + q$  de índice finito. Fischer-Colbrie [FC] ha demostrado que  $L$  es estable en el exterior de un conjunto compacto  $C \subset M$ . Podemos suponer que  $C$  es la unión de  $k$  discos conformes  $D_i \subset \bar{M}$ ,  $i = 1, \dots, k$  centrados en los puntos  $p_i$ .

Sea  $\varphi$  una función diferenciable en  $\bar{M}$  con soporte contenido en  $\bigcup_{i=1}^k D_i$  e igual

a 1 en un entorno de los puntos  $p_i$ . Sea  $u_\delta$  la función definida por:

$$u_\delta = \begin{cases} 0, & |z_i| \leq \delta^2, \\ \frac{\log(|z_i|/\delta^2)}{\log(1/\delta^2)}, & \delta^2 \leq |z_i| \leq \delta, \\ 1, & \delta \leq |z_i|, \end{cases}$$

e igual a 1 en  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i$ . Por la estabilidad de  $L$ , se tiene que  $\int_M q \varphi u_\delta \leq \int_M |\nabla(\varphi u_\delta)|^2$ . Tomando límites cuando  $\delta$  tiende a 0, se tiene que:

$$\int_\Omega q dA \leq \int |\nabla \varphi|^2 dA < \infty,$$

y, por tanto,  $q \in L_1(M)$ . □

**Lema 2.8.** *Sea  $M$  una superficie completa y orientable conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . Sea  $q \geq 0$  una función diferenciable. Supongamos que para toda  $u \in H^1(M)$  con soporte compacto tal que  $\int_M u = 0$  se verifica*

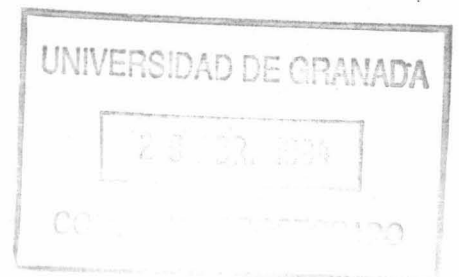
$$\int_M q u^2 dA \leq \int_M |\nabla u|^2 dA.$$

*Entonces la desigualdad anterior se verifica para toda función  $u \in H^1(\overline{M}) \cap L_\infty(\overline{M})$  tal que  $\int_M u dA = 0$ .*

*Demostración:* En el enunciado del teorema, el espacio  $H^1(\overline{M})$  es el espacio de Sobolev asociado a cualquier métrica riemanniana en  $\overline{M}$  compatible con su estructura conforme. Recordemos que en una variedad riemanniana compacta, los espacios de Sobolev asociados a distintas métricas riemannianas son linealmente isomorfos con normas de Sobolev equivalentes.

Sea  $u \in H^1(\overline{M}) \cap L_\infty(\overline{M})$ , y sean  $v_\varepsilon \in H^1(\overline{M})$  tales que:

- (i)  $\text{sop}(v_\varepsilon)$  es compacto contenido en  $M$ ,
- (ii)  $v_\varepsilon \leq 1$  y  $v_\varepsilon \rightarrow 1$  puntualmente en  $M$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,
- (iii)  $\int_{\overline{M}} |\nabla v_\varepsilon|^2 \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .





Entonces  $v_\varepsilon u^+$  y  $v_\varepsilon u^-$  tienen soporte compacto contenido en  $M$  y convergen respectivamente a  $u^+$ ,  $u^-$  en  $H^1(\overline{M})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si  $\{\lambda_\varepsilon\}_\varepsilon$  es el conjunto de números reales definido por  $\lambda_\varepsilon \int v_\varepsilon u^+ dA = \int v_\varepsilon u^- dA$ , y llamamos  $u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-$ , entonces se tiene que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = 1$ ,  $\int_M u_\varepsilon = 0$ , y  $u_\varepsilon$  converge en  $H^1(\overline{M})$  a  $u$ . Puesto que el soporte de  $u_\varepsilon$  es compacto se tiene que:

$$\int_M q u_\varepsilon^2 \leq \int_M |\nabla u_\varepsilon|^2.$$

Tomando límites cuando  $\varepsilon$  tiende a 0 obtenemos, por una parte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M q u_\varepsilon^2 = \int_M q u^2,$$

aplicando el teorema de la convergencia dominada, ya que  $q u_\varepsilon^2$  converge puntualmente a  $q u^2$  y  $|q u_\varepsilon^2| \leq \|u\|_\infty q \in L_1(M)$ , ya que  $q \in L_1(M)$ .

Por otra parte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M |\bar{\nabla} u_\varepsilon|^2 = \int_M |\bar{\nabla} u|^2 = \int_M |\nabla u|^2.$$

La primera y la última igualdades por ser la integral de Dirichlet un invariante conforme. La segunda por la convergencia de  $u_\varepsilon$  a  $u$  en  $H^1(\overline{M})$ . □

Por último, necesitaremos el siguiente lema, que es una extensión de un resultado debido a Hersch [Her]. Puede consultarse también [LY].

**Lema 2.9.** Sean  $(M, ds^2)$  una superficie riemanniana,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible y positiva tal que  $0 < \int_M f dA < \infty$ . Sea  $\phi : M \rightarrow S^2$  una función medible tal que  $\phi^{-1}(p)$  tiene medida nula en  $M$  para todo  $p \in S^2$ .

Entonces existe una transformación de Möbius  $F : S^2 \rightarrow S^2$  tal que  $\int_M f(F \circ \phi) dA = 0$ .

*Demostración:* Sea  $B^3 = \{g \in \mathbb{R}^3; |g| < 1\}$ . Definimos  $F : B^3 \times S^2 \rightarrow S^2$  por:

$$F(g, p) = \frac{p + (\mu \langle p, g \rangle + \lambda) g}{\lambda(\langle p, g \rangle + 1)},$$

donde  $\lambda = \sqrt{(1 - |g|^2)^{-1}}$  y  $\mu = (\lambda - 1) |g|^{-2}$ .

Para cada  $g \in B^3$ ,  $F_g = F(g, -)$  es una transformación conforme de  $S^2$ . Además, si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $B^3$  tal que  $g_n \rightarrow g \in S^2$ , entonces la sucesión de transformaciones de Möbius  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $F_n = F(g_n, -)$  converge puntualmente en  $S^2 \setminus \{-g\}$  a la función  $F_g(p) = g$  definida para todo  $p \in S^2 \setminus \{-g\}$ .

Definimos  $\Phi : \overline{B^3} \rightarrow \overline{B^3}$  por:

$$\Phi(g) = \left[ \int_M f dA \right]^{-1} \left[ \int_M f(F_g \circ \phi) dA \right].$$

Como  $f \geq 0$ , se tiene que  $(\int_M f dA) |\Phi(g)| \leq \int_M |f(F_g \circ \phi)| dA = \int_M f dA$ . Por tanto,  $|\Phi(g)| \leq 1$  y  $\Phi$  está bien definida.

Además, por el teorema de la convergencia dominada,  $\Phi$  es continua en  $\overline{B^3}$ . Si  $p \in S^2$ , entonces  $F_p \circ \phi(q) = p$  para casi todo  $q \in M$ , ya que  $\phi^{-1}(-p)$  tiene medida nula en  $M$ , por lo que se deduce:

$$\Phi(p) = \left[ \int_M f dA \right]^{-1} \left[ \int_M fp dA \right] = p.$$

Así pues,  $\Phi$  restringida a  $\partial \overline{B^3}$  es la identidad en  $\partial \overline{B^3}$  y, por un razonamiento elemental de topología  $\Phi$  es sobreyectiva. En particular, existe  $g \in B^3$  tal que:

$$\int_M f(F_g \circ \phi) dA = 0,$$

lo que prueba el lema. □

El lema anterior se aplicará especialmente en el caso de que  $M$  sea una superficie con área finita y la función  $f$  sea idénticamente uno.

*Demostración: teorema 2.6:* Por el teorema 2.1  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . Sea  $\phi : \overline{M} \rightarrow S^2$  una aplicación holomorfa. Puesto que  $M$  tiene área finita, aplicando el lema 2.9, podemos suponer que  $\phi$  tiene media nula componiendo  $\phi$  con una transformación de Möbius. Cada componente  $\phi_i$  de la aplicación  $\phi$  es una función diferenciable en la superficie compacta  $\overline{M}$  y, por tanto, está en  $H^1(\overline{M}) \cap L_\infty(\overline{M})$ . Aplicando el lema 2.8 tenemos que:

$$\sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla \phi_i|^2 dA \geq \sum_{i=1}^3 \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) \phi_i^2 dA,$$

y, por tanto:

$$\int_M |\nabla \phi|^2 dA \geq \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2), dA. \quad (2.2)$$

Teniendo en cuenta que  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es igual a  $\text{Ric}(e_1) + \text{Ric}(e_2) + 4H^2 - 2K$ , donde  $e_1, e_2$  son campos locales tangentes a  $M$ ,  $K$  es la curvatura de Gauss de la métrica de  $M$ , y  $H$  es la curvatura media de  $\psi$ , transformamos la desigualdad (2.2) en:

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla \phi|^2 dA &\geq \int_M \{\text{Ric}(e_1) + \text{Ric}(e_2) + 4H^2 - 2K\} dA \\ &\geq - \int_M 2K dA \geq 4\pi(r - \chi(\overline{M})) = 4\pi(r - 2 - 2g), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde en la última línea hemos aplicado la desigualdad de Cohn-Vossen  $\int_M K \leq 2\pi\chi(M)$ .

Teniendo en cuenta que  $\int_M |\nabla \phi|^2 = 8\pi \text{grado}(\phi)$ , y que podemos elegir la aplicación holomorfa  $\phi : M \rightarrow S^2$  de grado  $1 + [(1 + g)/2]$ , ver [GH], obtenemos que:

$$0 \leq \left(4 + 2 \left[\frac{1+g}{2}\right] - 2g - r\right), \quad (2.4)$$

y se sigue que las únicas posibilidades para  $g$  y  $r$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{si } g = 0, 1 &\text{ entonces } r \leq 4, \\ \text{si } g = 2, 3 &\text{ entonces } r \leq 2, \\ \text{si } g = 4, 5 &\text{ entonces } r = 0, \end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación (ii) del teorema 2.6

Si se da la igualdad en la ecuación (2.4) se da también la igualdad en la desigualdad (2.3) y obtenemos que  $\text{Ric}(e_1) = \text{Ric}(e_2) = 0$ , que  $H = 0$ , y que  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 = -2K$ . Al mismo tiempo obtenemos la igualdad en la desigualdad (2.2) y, por tanto:

$$\int_M \{|\nabla \phi_i|^2 + 2K \phi_i^2\} dA = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Puesto que  $\int_M \{|\nabla u|^2 + 2K u^2\} \geq 0$  para toda función  $u$  diferenciable en  $M$  tal que  $\int_M u dA = 0$ , derivando la función  $I(\phi_i + tu)$  en  $t = 0$  obtenemos que:

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I(\phi_i + tu) = \int_M \{\langle \nabla \phi_i, \nabla u \rangle + 2K \phi_i u\} dA = \int_M -u(\Delta \phi_i - 2K \phi_i) dA = 0,$$

para toda función  $u$  diferenciable en  $M$  tal que  $\int_M u dA = 0$ . Se sigue que  $\Delta\phi_i - 2K\phi_i$  es constante. Por otra parte, como  $\phi$  es una función holomorfa, sus coordenadas verifican las ecuaciones  $\Delta\phi_i + |\nabla\phi|^2\phi_i = 0$ . Combinado ambas ecuaciones en forma vectorial se sigue que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$  y que  $\Delta\phi_i - 2K\phi_i = 0$ .

En consecuencia, las funciones  $\phi_i$  son soluciones de la ecuación  $\Delta + (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) = 0$ .

Si  $M$  es no compacta, se sigue del trabajo de Fischer-Colbrie [FC] que una solución positiva  $u$  de dicha ecuación en un entorno de un final de  $M$  determina una métrica  $u^2 ds^2$  completa en el final y con curvatura de Gauss no negativa, con  $ds^2$  la métrica en  $M$  inducida por la inmersión. Una métrica de este tipo debe tener área infinita, ver [Wu]. Sin embargo, las métricas  $\phi_i^2 ds^2$  no pueden tener área infinita puesto que  $ds^2$  tiene área finita y  $\phi_i^2$  es una función acotada. Por tanto, no puede darse la igualdad en el caso no compacto en la desigualdad (2.4) y se sigue que las únicas posibilidades para  $g$  y  $r$  son las enunciadas en el teorema.  $\square$

En el caso de que  $M$  sea una superficie compacta de género cuatro o cinco, podemos reducir el problema a uno equivalente al que obtenemos en una variedad llana.

**Teorema 2.10.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica estable de una superficie riemanniana compacta de género cuatro o cinco o de una superficie hipereĺiptica de género tres en una variedad orientable de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa.*

*Existe entonces una inmersión isométrica minimal multivaluada  $\bar{\psi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  con aplicación de Gauss  $\phi$  de modo que las métricas inducidas por ambas inmersiones coinciden y además  $|\nabla\phi|^2 = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ .*

En consecuencia, los problemas de estabilidad para ambas inmersiones coinciden, ya que si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una inmersión minimal y  $\phi$  es su aplicación de Gauss, entonces  $|\sigma|^2 = |\nabla\phi|^2$ .

*Demostración:* Si  $\phi : M \rightarrow S^2$  es una función holomorfa con media nula y grado  $g - 1$ , la demostración del teorema 2.6 prueba que las componentes de  $\phi$  verifican la ecuación  $\Delta\phi_i + (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2)\phi_i = 0$ . Además se prueba que  $\psi$  es minimal y

que:

$$\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 = -2K = |\nabla\phi|^2. \quad (2.5)$$

En cualquier caso se tiene que  $\text{grado}(\phi) = g - 1$ , y podemos encontrar una 1-forma holomorfa  $\omega$  en  $M$  con ceros de orden doble en los polos de  $\phi$  por el teorema de Riemann-Roch [Fo] de modo que el par  $(\phi, \omega)$  induce una inmersión  $\bar{\psi}$  minimal conforme no ramificada, sin finales, y multivaluada en  $\mathbb{R}^3$ , con aplicación de Gauss  $\phi$ . Podemos elegir dicha inmersión de modo que exista un punto  $p \in M$  tal que  $K(p) = K'(p) \neq 0$ , donde  $K'$  es la curvatura de Gauss de la métrica inducida por  $\bar{\psi}$ .

Sean  $g$  la métrica inducida en  $M$  por la inmersión  $\psi$  y  $g'$  la métrica inducida por la inmersión  $\bar{\psi}$ . Las métricas  $g$  y  $g'$  son conformes, de modo que existe  $u \in C^\infty(M)$  tal que  $g' = e^{2u}g$ . La relación que existe entre las curvaturas de Gauss de dos métricas conformes es:

$$\Delta_g u = K - K'e^{2u}. \quad (2.6)$$

Por ser  $\phi$  la aplicación de Gauss de una inmersión minimal a  $\mathbb{R}^3$  se verifica que  $|\nabla\phi|_{g'}^2 = -2K'$ . Teniendo en cuenta (2.5) se sigue que  $K = K'e^{2u}$ . Sustituyendo en la ecuación (2.6) obtenemos que  $\Delta_g u = 0$  y  $u$  es una función armónica en una superficie compacta y, por tanto, es constante. Puesto que  $K(p) = K'(p) \neq 0$ , se sigue de la igualdad  $K = K'e^{2u}$  que  $u(p) = 0$  y, por ser  $u$  constante,  $u \equiv 0$ . Esto prueba que  $g = g'$ .

□

En todos los resultados anteriores hemos utilizado que  $M$  es conformemente equivalente a una superficie compacta punteada. El siguiente resultado nos proporciona restricciones sobre superficies estables sin esta hipótesis.

**Teorema 2.11.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica estable de una superficie riemanniana completa y orientable en una variedad orientable de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa. Supongamos que  $M$  es no compacta y que  $q = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 \not\equiv 0$ .*

Entonces:

$$\int_M r^\alpha < +\infty, \quad \text{para todo } \alpha < 2,$$

donde  $r$  es la distancia en  $M$  a un punto fijo  $p \in M$ .

*Demostración:* Basta demostrar la desigualdad  $\int_M r^{\alpha_n} < +\infty$  para los elementos de la sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por recurrencia por medio de  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_{n+1} = (1/2)\alpha_n + 1$ . Puesto que  $\alpha_n \rightarrow 2$  y  $\alpha_n < 2$ , y se tiene que:

$$\int_r^\alpha \leq \int_{\{r \leq 1\}} r^\alpha + \int_M r^\beta, \quad \text{si } \alpha < \beta,$$

se sigue el resultado.

Demostraremos la desigualdad  $\int_M r^{\alpha_n} < \infty$  por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  la finitud de la integral es consecuencia de que el área de  $M$  es finita por el teorema 2.3.

Supongamos por inducción que  $\int_M r^{\alpha_k} < \infty$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Probaremos por contradicción que  $\int_M r^{\alpha_n} < \infty$ . Supongamos que  $\int_M r^{\alpha_n} = \infty$ .

Para  $0 < a < b$ , consideremos la función  $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a-1 \\ a-x, & a-1 \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ x-b, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0, & b \leq x. \end{cases}$$

Como  $r^{\alpha_n} \in H_{loc}^1(M)$  y  $\varphi_{a,b}$  es de clase  $C^1$  a trozos en  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n} \in H^1 M$ , tiene soporte compacto y:

$$|\nabla(\varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n})| = \begin{cases} 0, & r \leq a-1, \\ \alpha_n r^{(1/2)\alpha_n-1}, & a-1 \leq r \leq b \\ 0, & b \leq r. \end{cases}$$

Fijado  $a$ , la función  $b \mapsto \int_M \varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n}$  es continua, ya que si  $b_k \rightarrow b$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces  $|b_k| \leq c$  para algún  $c \in \mathbb{R}$ . Como  $\varphi_{a,b_k} \rightarrow \varphi_{a,b}$  puntualmente cuando  $k \rightarrow \infty$ , además  $|\varphi_{a,b_k}| \leq |\varphi_{a,c}| \leq \frac{c-a}{2} \chi_{\{r \leq c\}}$ , y  $\int_M \frac{c-a}{2} \chi_{\{r \leq c\}}$  es integrable, aplicando el teorema de la convergencia dominada obtenemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_M (\varphi_{a,b_k} \circ r^{\alpha_n}) = \int_M (\varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n})$ . Teniendo esto en cuenta y el hecho de que  $\int_M r^{\alpha_n} = \infty$ , podemos elegir  $b$  de modo que  $\int_M \varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n} = 0$ ; en este caso, por la condición de estabilidad:

$$\int_{\{r^{\alpha_n} \leq a-1\}} q \leq \int_M q(\varphi_{a,b} r^{\alpha_n})^2 \leq \int_M |\nabla \varphi_{a,b} r^{\alpha_n}|^2 \leq \int_{\{a-1 \leq r^{\alpha_n}\}} \alpha_n^2 r^{\alpha_n-1}.$$

Puesto que  $r^{\alpha_n-1}$  es una función integrable por hipótesis de inducción, pasando al límite cuando  $a \rightarrow \infty$  en las desigualdades anteriores, obtenemos que  $\int_M q = 0$ , lo que implica que  $q \equiv 0$ , con lo que obtenemos una contradicción que prueba el teorema.  $\square$

### 2.3 Estabilidad en variedades con curvatura constante

El teorema 2.4 se aplica especialmente en el caso de que la variedad  $N$  tenga curvatura constante 1, y el teorema 2.5 cuando la variedad ambiente  $N$  sea llana.

En este tipo de ambientes ha sido demostrado por Barbosa y do Carmo [BdC], Barbosa, do Carmo y Eschenburg [BdCE], El Soufi e Ilias [EI] y Heintze [H] el siguiente resultado:

**Teorema 2.12.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N(c)$  una inmersión isométrica estable de una superficie compacta y orientable en una variedad orientable, completa y simplemente conexa con curvatura constante  $c$ .*

*Entonces el género de  $M$  es cero y  $\psi$  es una inmersión totalmente umbilical.*

Puesto que estamos estudiando estabilidad cuando la curvatura de Ricci de la variedad ambiente sea mayor o igual que cero, nos restringiremos a los casos de curvatura constante uno o cero. Llamaremos *elípticas* a las variedades completas de dimensión tres y curvatura constante uno.

Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana compacta y orientable y  $N(c)$  una variedad Riemanniana tridimensional completa con curvatura seccional constante  $c$ . Si  $\psi : M \rightarrow N(c)$  es una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$  y segunda forma fundamental  $\sigma$ , podemos considerar en  $M$  la diferencial de Hopf  $\sigma^{2,0}$ . Recordemos que  $\sigma^{2,0}$  es una diferencial cuadrática holomorfa en  $M$  tal que, si  $(U, z)$ , con  $z = x + iy$ , es un entorno isotermo en  $M$ , entonces:

$$\sigma^{2,0} = 4\sigma(\partial_z, \partial_z) dz^2 = \{\sigma(\partial_x, \partial_x) - \sigma(\partial_y, \partial_y) - 2i\sigma(\partial_x, \partial_y)\} dz^2.$$

Se sigue entonces que  $\sigma^{2,0}(p) = 0$  si y solo si  $p$  es un punto umbílico de la inmersión y que, o bien todos los puntos son umbílicos, o bien los puntos umbílicos son aislados. Supongamos que  $b^2 = 4(c + H^2) > 0$ . Entonces en un punto umbílico  $p$  de  $M$  la curvatura de Gauss viene dada por  $K(p) = b^2/4$  y, por tanto, el caso totalmente umbilical corresponde a  $\text{género}(M) = 0$ . Si  $M$  es una superficie de género  $g > 0$ , el número de puntos umbílicos, contados con multiplicidad, es  $4g - 4$  y, en particular, los toros con curvatura media constante no tienen puntos umbílicos. Si denotamos por  $P$  el conjunto finito de puntos umbílicos de  $\psi$ , podemos considerar en  $M \setminus P$  la métrica llana  $ds_0^2 = b|\sigma^{2,0}|$ , que es conforme a  $ds^2$ . Si  $w$  es la función en  $M \setminus P$  definida por  $ds^2 = (\exp(2w)/b^2) ds_0^2$ , entonces:

$$\Delta_0 w + \sinh(w) \cosh(w) = 0, \tag{2.7}$$

donde  $\Delta_0$  es el Laplaciano de la métrica llana  $ds_0^2$ . Más aún, si denotamos por  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , las curvaturas principales de  $\psi$ , entonces:

$$\begin{aligned} k_i &= H \pm (b/2) \exp(-2w), \quad i = 1, 2, \text{ y} \\ K &= (b^2/4)(1 - \exp(-4w)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

de modo que  $K \equiv 0$  si y solo si  $w \equiv 0$ . Véase [Ei], [H] y [L].

Cuando el espacio ambiente es  $N(c)$ , usando la ecuación de Gauss, la forma índice puede escribirse:

$$I(f) = \int_M \{|\nabla f|^2 - (b^2 - 2K) f^2\} dA, \quad (2.9)$$

para toda  $f \in C^\infty(M)$ .

Como  $w$  satisface la ecuación  $\text{senh}$ -Gordon (2.7) y en los puntos umbílicos  $w$  tiende a  $+\infty$ , si  $w \not\equiv 0$  sus ceros vienen dados por un conjunto finito de círculos inmersos de clase  $C^1$ , ver [Chg].

Ahora probaremos que la estabilidad implica una restricción sobre los conjuntos nodales de  $w$ .

**Teorema 2.13.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N^3(c)$  una inmersión con curvatura media constante  $H$  de una superficie compacta orientable en una variedad Riemanniana orientada completa con curvatura constante  $c$ . Sea  $K$  la curvatura de Gauss de  $M$ . Supongamos que  $b^2 = 4(c + H^2) > 0$ .*

*Si  $K \not\equiv 0$  y  $\psi$  es estable, entonces el conjunto abierto  $\{p \in M \mid K(p) < 0\}$  es conexo y cada componente conexa de  $\{p \in M \mid K(p) > 0\}$  debe contener un punto umbílico al menos.*

*Demostración:* Si  $f$  es una función con soporte compacto en  $M \setminus P$  entonces, como en el complemento del conjunto de puntos umbílicos tenemos por (2.8) que  $b^2 - 2K = b^2 \cosh(2w) \exp(-2w) = b^2 (\cosh^2 w + \text{senh}^2 w) \exp(-2w)$ , la forma índice (2.9) puede escribirse:

$$I(f) = \int_M \{|\nabla_0 f|^2 - (\cosh^2 w + \text{senh}^2 w) f^2\} dA_0, \quad (2.10)$$

donde el módulo del gradiente de  $f$  y la medida se toman con respecto a la métrica llana  $ds_0^2$ .



Sea  $\Omega$  una componente conexa de  $\{p \in M \mid K(p) \neq 0\}$  sin puntos umbílicos. Como  $\text{signo}(K) = \text{signo}(w)$ , la función  $f$  en  $M$  definida por:

$$f = \begin{cases} \sinh(w), & \text{en } \Omega \\ 0, & \text{en } M \setminus \Omega, \end{cases}$$

está en el espacio de Sobolev  $H^1(M)$ . Más aún, los puntos umbílicos no pertenecen a la frontera de  $\Omega$  porque la curvatura de Gauss es positiva en los puntos umbílicos y cero en la frontera de  $\Omega$ . Por tanto  $f$  tiene soporte compacto en  $M \setminus P$ . Integrando por partes y utilizando (2.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_0 f|^2 dA_0 &= \int_M \langle \nabla_0 f, \nabla_0 \sinh(w) \rangle dA_0 \\ &= - \int_M f \Delta_0 \sinh(w) dA_0 \\ &= - \int_\Omega \sinh(w) \Delta_0 \sinh(w) dA_0 \\ &= - \int_\Omega \left\{ \sinh(w) \left[ \sinh(w) |\nabla_0 w|^2 + \cosh(w) \Delta_0 w \right] \right\} dA_0 \\ &= \int_\Omega \sinh^2(w) \left\{ \cosh^2 w - |\nabla_0 w|^2 \right\} dA_0. \end{aligned}$$

De esta última igualdad y (2.10) tenemos que:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_\Omega \left\{ \sinh^2 w (\cosh^2 w - |\nabla_0 w|^2) \right. \\ &\quad \left. - (\cosh^2 w + \sinh^2 w) \sinh^2 w \right\} dA_0 = \\ &= - \int_\Omega \sinh^2 w (\sinh^2 w + |\nabla_0 w|^2) dA_0 < 0. \end{aligned}$$

Si pudiéramos encontrar dos componentes conexas de  $\{p \in M \mid K(p) \neq 0\}$  sin puntos umbílicos, obtendríamos dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  en  $H^1(M)$  con soportes disjuntos y tales que  $I(f_i) < 0$ ,  $i = 1, 2$ . Una cierta combinación lineal de ambas funciones proporcionaría otra función  $f$  con media nula y tal que  $I(f) < 0$ , lo que es imposible por la estabilidad de  $\psi$ . El teorema se sigue directamente porque el conjunto  $\{p \in M \mid K(p) < 0\}$  es no vacío por el teorema de Gauss-Bonnet, y no contiene puntos umbílicos.

□

Si género( $M$ ) = 1 obtenemos la siguiente conclusión, *sin restricciones* sobre los valores de  $c$  y  $H$ .

**Corolario 2.14.** *Sea  $\psi : (M, ds^2) \rightarrow N^3(c)$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$ . Si  $M$  es un toro y  $\psi$  es estable, entonces la métrica  $ds^2$  es llana.*

*Demostración:* Supongamos en primer lugar que  $b^2 = 4(c + H^2) > 0$ . Como  $M$  no tiene puntos umbílicos concluimos usando el teorema 2.13 que el conjunto  $\{p \in M \mid K(p) > 0\}$  es vacío. El resultado se sigue del teorema de Gauss–Bonnet.

Si  $c + H^2 \leq 0$ , se sigue de la ecuación de Gauss que la curvatura de  $M$  es menor o igual que cero y, por el teorema de Gauss–Bonnet, debe ser idénticamente cero. □

Es conocido que una superficie llana inmersa con curvatura media constante en  $N(0)$  es localmente congruente a un plano o a un cilindro circular recto en  $\mathbb{R}^3$ , en  $N(1)$  a un toro de Clifford, esto es, a un producto de círculos en  $S^3(1)$  y en  $\mathbb{H}^3(-1)$  a una horosfera o a un tubo alrededor de una geodésica. Además, el operador asociado a la segunda variación del área en este caso es de la forma  $\Delta + 4(c + H^2)$ , con  $c$  la curvatura seccional de la variedad ambiente y  $H$  la curvatura media de la inmersión, de modo que el problema de estabilidad se reduce a calcular los valores propios del laplaciano de un toro que sean menores que  $4(c + H^2)$ .

## 2.4 Estabilidad en variedades elípticas

Toda variedad tridimensional completa  $N(1)$  con curvatura constante  $c = 1$  determina un revestimiento Riemanniano finito  $\Pi : S^3(1) \rightarrow N(1)$  de la esfera unidad  $S^3(1)$  con su métrica canónica en  $N(1)$ . En particular, el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^3(1)$  determina un revestimiento de dos hojas. En esta sección obtendremos información sobre superficies estables compactas con curvatura media constante en  $N(1)$  cuando el número de hojas de  $\Pi$  es pequeño.

Necesitaremos el siguiente resultado:

**Teorema 2.15.** *Si  $\psi : M \rightarrow N(1)$  es una inmersión de una superficie compacta y orientable, entonces:*

$$\int_M (1 + H^2) dA \geq 4\pi, \quad (2.11)$$

*y la igualdad se da si y solo si  $M$  es una esfera umbilical.*

Más aún, si:

$$\int_M (1 + H^2) dA \leq 8\pi, \quad (2.12)$$

entonces la inmersión  $\psi$  es un embebimiento.

Para demostrar la primera parte del teorema ver [Ch]. La segunda afirmación se prueba en [LY] si  $\int_M (1 + H^2) dA < 8\pi$ . Cuando  $\int_M (1 + H^2) dA = 8\pi$  el resultado se debe esencialmente a Kusner, [K]. Puesto que no está explícitamente probado en [K], explicamos brevemente la demostración. Si  $\psi$  no es un embebimiento, entonces existe un punto  $p \in S^3(1)$  tal que  $\psi^{-1}(p)$  contiene exactamente dos puntos, ver [LY]. Tomando proyección estereográfica desde el punto  $p$ , transformamos la inmersión  $\psi$  en una superficie minimal completa con curvatura total finita en  $\mathbb{R}^3$  y dos finales planos embebidos, ver [K]. Pero se sigue de [K] que una superficie de este tipo debe ser embebida y, por tanto, sus finales deben ser paralelos. En consecuencia, la función lineal ortogonal a los finales es una función armónica acotada y, por tanto, constante. El resultado se sigue de esta contradicción.

Una superficie compacta de género cero inmersa con curvatura media constante en un espacio elíptico es totalmente umbilical y, por tanto, es estable. Si el género de la superficie es uno el problema de estabilidad está resuelto por el teorema 2.13. Por el teorema 2.4 queda por estudiar el problema de estabilidad cuando el género de la superficie es dos o tres. Algunos de nuestros argumentos son similares a los utilizados en [EI], [LY], [MR] y [Y].

**Teorema 2.16.** *Sea  $\psi : M \rightarrow S^3(1)$  una inmersión estable con curvatura media constante  $H$  de una superficie orientable compacta de género mayor que uno en un espacio elíptico orientado. Entonces:*

- (i)  $(1 + H^2) \text{área}(M) \leq 2\pi$ .
- (ii)  $k \geq 3$ .
- (iii) Si  $k = 3$  o  $4$ , la inmersión  $\psi$  es un embebimiento y el morfismo inducido entre los grupos fundamentales  $\psi_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N(1))$  es sobreyectivo.

*Demostración:* Sea  $g$  el género de  $M$ . Es un hecho conocido (ver [GH, p. 261]) que existe una función meromorfa no constante  $\phi : M \rightarrow S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

$$\text{grado}(\phi) \leq 1 + \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor, \quad (2.13)$$

donde  $[x]$  es el mayor número entero menor o igual que  $x$ . Componiendo  $\phi$  con un difeomorfismo conforme de la esfera de Riemann  $S^2$  podemos suponer, ver [LY] o el lema 2.9, que:

$$\int_M \phi \, dA = 0.$$

Utilizando esta función vectorial como función test en la forma índice (2.9) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 \leq I(\phi) &= \int_M \{|\nabla\phi|^2 - (b^2 - 2K)\} \, dA = \\ &= 8\pi \text{grado}(\phi) - 4 \int_M (1 + H^2) \, dA + 8\pi(1 - g), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que  $\phi$  es una aplicación conforme y el teorema de Gauss-Bonnet. Estimando el grado de  $\phi$  por (2.13) obtenemos:

$$\int_M (1 + H^2) \, dA \leq 2\pi \left( 2 - g + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right). \quad (2.14)$$

Si  $g \geq 4$ , el término de la derecha de la desigualdad anterior es no positivo y esta contradicción prueba la afirmación (i) del teorema 2.4. Si  $g = 2, 3$  obtenemos la afirmación (i) de nuestro teorema.

Sea  $\bar{M}$  la imagen inversa de  $M$  por medio de la aplicación  $\Pi : S^3(1) \rightarrow N(1)$ . La superficie  $\bar{M}$  no es necesariamente conexa. Asociada a esta superficie tenemos definida de forma natural una inmersión isométrica  $\bar{\psi} : \bar{M} \rightarrow S^3(1)$  y un revestimiento Riemanniano de  $k$  hojas  $\bar{M} \rightarrow M$ . Como  $\bar{\psi}$  es localmente congruente a  $\psi$  la nueva inmersión tiene también curvatura media constante  $H$ . Utilizando la afirmación (i) tenemos que:

$$\int_{\bar{M}} (1 + H^2) \, d\bar{A} = k \int_M (1 + H^2) \, dA \leq 2k\pi. \quad (2.15)$$

Si  $k \leq 2$ , entonces  $\bar{\psi}$  debería verificar la igualdad en (2.11). Pero claramente  $\text{género}(\bar{M}) \geq g > 1$ , y esta contradicción prueba (ii).

Ahora probaremos (iii). Supongamos que  $k \leq 4$ . De (2.11) concluimos que:

$$4\pi (\text{componentes de } \bar{M}) \leq \int_{\bar{M}} (1 + H^2) \, d\bar{A} \leq 2k\pi \leq 8\pi. \quad (2.16)$$

Se sigue entonces que  $\bar{M}$  es conexo: de otro modo  $\bar{M}$  tendría precisamente dos componentes conexas, por el teorema 2.15, cada una de las cuales debería ser una

esfera umbilical en  $S^3(1)$ , y esto es imposible porque  $\text{género}(M) > 0$ . Este hecho es equivalente a la sobreyectividad de la aplicación  $\psi_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N(1))$ . De (2.12) y (2.16) concluimos también que la inmersión  $\psi$  es un embebimiento.  $\square$

Como consecuencia de los resultados anteriores podemos ahora enunciar la solución completa del problema global de estabilidad en el espacio proyectivo real de dimensión tres. Este espacio elíptico es el único cociente de la esfera  $S^3(1)$  con dos hojas.

**Corolario 2.17.** *Sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}P^3(1)$  una superficie orientable completa inmersa con curvatura media constante en el espacio proyectivo real. Si la inmersión es estable, entonces o bien:*

- (i)  *$M$  es una superficie compacta de género cero y  $\psi$  es una esfera geodésica embebida o un revestimiento de dos hojas de un plano proyectivo totalmente geodésico, o bien*
- (ii)  *$M$  es una superficie compacta de género uno y  $\psi$  es un tubo llano embebido de radio  $r$ , con  $\pi/6 \leq r \leq \pi/3$ , alrededor de una geodésica.*

*Demostración:* Por el teorema 2.4 sabemos que  $M$  es compacta y conexa y que su género es menor o igual que tres. Por el teorema 2.16 sabemos que el género de  $M$  no puede ser dos o tres.

Si  $\text{género}(M) = 0$  entonces  $\psi$  es una inmersión totalmente umbilical y hemos probado (i).

Si  $\text{género}(M) = 1$  entonces, por el corolario 2.14,  $M$  es un toro llano. Es conocido que una inmersión de este tipo debe ser un revestimiento Riemanniano finito de un tubo de radio  $r$ , con  $0 < r < \pi/2$ , alrededor de una geodésica en  $\mathbb{R}P^3(1)$ . Utilizando (2.14) y (2.15) para  $g = 1$  y  $k = 2$  deducimos que  $\psi$  es un embebimiento.

Si  $\bar{T}$  es un tubo de radio  $r$ , con  $0 < r < \pi/2$ , alrededor de una geodésica en  $S^3(1)$ , entonces  $\bar{T}$  es congruente al embebimiento canónico del toro de Clifford  $S^1(\cos(r)) \times S^1(\sin(r)) \subset S^3(1) \subset \mathbb{R}^4$ , y el operador de Jacobi de esta superficie es  $\Delta + 1/\cos^2 r + 1/\sin^2 r$ . Obtenemos fácilmente que el correspondiente tubo embebido en  $\mathbb{R}P^3(1)$  viene dado desde un punto de vista intrínseco por  $T = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es el retículo en  $\mathbb{R}^2$  generado por los vectores  $(2\pi \cos(r), 0)$  y

$(\pi \cos(r), \pi \sin(r))$ . Como los valores propios del Laplaciano de  $T$  son:

$$\left\{ \frac{m^2}{\cos^2(r)} + \frac{(2n+m)^2}{\sin^2(r)}; n, m \in \mathbb{Z} \right\},$$

el tubo  $T$  es estable si y solo si:

$$\cos(r), \sin(r) \geq 1/2,$$

o, equivalentemente:

$$\pi/6 \leq r \leq \pi/3.$$

□

Como consecuencia de este resultado podemos describir el perfil isoperimétrico de  $\mathbb{R}P^3(1)$ . Sea  $f(V)$  la función que proporciona el perfil isoperimétrico de la esfera  $S^3(1)$ , esto es, para cualquier  $V \in (0, 2\pi^2)$ , la función  $f(V)$  denota el área de la esfera geodésica en  $S^3(1)$  que encierra un volumen  $V$ . Denotemos por  $g(V)$  a la función  $2V^{1/2}(\pi^2 - V)^{1/2}$ . Resolver la ecuación  $f(V) = g(V)$  en el intervalo  $[\pi^2/4, \pi^2/2]$  es equivalente a encontrar los puntos fijos de la función calculable  $f^{-1} \circ g$  en dicho intervalo. Un cálculo directo demuestra que  $|(f^{-1} \circ g)'| < 1$ , de modo que existe al menos un punto fijo de  $f^{-1} \circ g$  (ya que  $f(\pi^2/4) < g(\pi^2/4)$  y  $f(\pi^2/2) > g(\pi^2/2)$ ); entonces  $f^{-1} \circ g([\pi^2/4, \pi^2/2]) \subset [\pi^2/4, \pi^2/2]$  y concluimos, por el teorema del punto fijo de Banach, que existe exactamente una solución de  $f(V) = g(V)$  en  $(\pi^2/4, \pi^2/2)$ . Denotamos esta solución por  $\mu$ . Aproximadamente  $\mu \cong 4.1432835$ . Tenemos entonces lo siguiente:

**Teorema 2.18.** *El perfil isoperimétrico de  $\mathbb{R}P^3(1)$  viene dado por:*

$$A(V) = \begin{cases} f(V), & \text{si } 0 < V \leq \mu \\ 2V^{1/2}(\pi^2 - V)^{1/2}, & \text{si } \mu \leq V \leq \pi^2 - \mu \\ f(\pi^2 + V), & \text{si } \pi^2 - \mu \leq V < \pi^2. \end{cases}$$

*En el primer caso la solución del problema isoperimétrico es una bola geodésica, en el segundo la solución es un entorno tubular de una geodésica, y en el último caso es el exterior de una bola geodésica.*

En particular, a partir del conocimiento del perfil isoperimétrico, podemos probar:

**Corolario 2.19.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}P^3$  una superficie embebida que divide a  $\mathbb{R}P^3$  en dos regiones de igual volumen.*

*Entonces  $\text{área}(M) \geq \pi^2$  y la igualdad se da si y solo si  $M$  es el toro de Clifford.*

## 2.5 Estabilidad en variedades completas y llanas

Consideramos ahora la variedad llana  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , donde  $S_\theta$  es el subgrupo de isometrías del espacio euclídeo generado por el movimiento helicoidal:

$$(x, y, x) \longmapsto (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z + \lambda),$$

con  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $\lambda > 0$ . Queremos encontrar los embebimientos  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/S_\theta$  de superficies estables compactas. Puesto que no existen superficies totalmente geodésicas en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , el teorema 2.5 nos dice que  $M$  debe ser una superficie conexa. Por otra parte, si  $\bar{M}$  es una componente conexa de la imagen inversa de  $M$  en el revestimiento universal  $\mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , y  $\bar{\psi} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es el correspondiente embebimiento propio con curvatura media constante, entonces, o bien  $\bar{M}$  es una superficie compacta y, por el teorema de reflexión de Alexandrov [A],  $\bar{\psi}$  es totalmente umbilical, o bien  $\bar{\psi}$  es un embebimiento propio simplemente periódico contenido en el interior de un cilindro circular recto y, por los resultados de Korevaar, Kusner y Solomon, [KKS, theorem 2.10],  $\bar{M}$  es una superficie de revolución embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto,  $M$  debe ser un toro y, por el corolario 2.14, es un cociente de un cilindro circular recto cuyo eje ha de ser el del movimiento helicoidal. Con este resultado y unos cálculos sencillos, obtenemos que:

**Teorema 2.20.** *El perfil isoperimétrico de  $\mathbb{R}^3/S_\theta$  viene dado por:*

$$A(V) = \begin{cases} (4\pi)^{1/3}(3V)^{2/3}, & \text{si } 0 < V \leq \frac{4\pi\lambda^3}{3^4} \\ (4\pi\lambda V)^{1/2}, & \text{si } \frac{4\pi\lambda^3}{3^4} \leq V. \end{cases}$$

*En el primer caso el dominio de mínima área que encierra un volumen  $V$  es la bola geodésica y en el segundo la solución es el dominio encerrado por el toro embebido  $(S^1(a) \times \mathbb{R})/S_\theta$ , para valores adecuados de  $a$ .*

Veamos por último una pequeña mejora del teorema 2.5 en el caso de que la variedad ambiente  $N$  sea completa y llana, y la superficie  $M$  esté embebida en  $N$ .

Recordemos que el teorema 2.5 asegura que una inmersión estable  $\psi : M \rightarrow N$  debe ser totalmente geodésica, o que  $M$  debe ser compacta y conexa con  $\text{género}(M) \leq 5$ . Nosotros probamos:

**Teorema 2.21.** *Sea  $M$  una superficie estable embebida en  $N$ . Si el género de  $M$  es cuatro o cinco, o  $M$  es una superficie de Riemann hiperelíptica de género tres, entonces  $N$  es un toro llano tridimensional.*

*Demostración:* La demostración del teorema 2.6 prueba la existencia de una aplicación antiholomorfa  $\phi : M \rightarrow S^2$  de grado  $g-1$  en  $M$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$  cuando  $M$  tiene género cuatro o cinco o  $M$  es hiperelíptica de género tres. Además,  $M$  debe ser una superficie minimal.

Sea  $\widetilde{M}$  la imagen inversa de  $M$  por la aplicación recubridora  $\mathbb{R}^3 \rightarrow N$ . La superficie  $\widetilde{M}$  es embebida y, por el teorema del semiespacio de Hofmann y Meeks [HM], es conexa. Sea  $\nu : M \rightarrow S^2$  la aplicación de Gauss de  $\widetilde{M}$ , y sea  $\tilde{\phi}$  el levantamiento de  $\phi$  a  $\widetilde{M}$ .

Tenemos entonces que  $\nu$  y  $\tilde{\phi}$  son aplicaciones antiholomorfas que verifican  $|\nabla\nu|^2 = |\nabla\tilde{\phi}|^2 = -2\widetilde{K}$ . Se demuestra entonces como en [Ro2], que existe una isometría  $A$  de  $S^2$  tal que  $\nu = A(\tilde{\phi})$ . Supongamos que  $p \in \widetilde{M}$  y que  $f$  es una transformación del recubrimiento  $\mathbb{R}^3 \rightarrow N$ . Puesto que  $\widetilde{M}$  es invariante por  $f$  y  $\tilde{\phi}$  es un levantamiento de  $\phi$  se tiene que  $\tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(f(p))$ . Por otra parte, puesto que  $f$  es la restricción a  $\widetilde{M}$  de una isometría de  $\mathbb{R}^3$  que conserva la aplicación de Gauss  $\nu$  obtenemos que  $\nu(f(p)) = u(\nu(p))$ , donde  $u$  es la parte lineal de  $f$ . Por tanto:

$$(A \circ \tilde{\phi})(p) = \nu(p) = u^{-1}(\nu(f(p))) = u^{-1}((A \circ (\tilde{\phi} \circ f))(p)) = u^{-1}(A(\tilde{\phi}(f(p)))).$$

Puesto que esta igualdad es válida para todo  $p \in \widetilde{M}$  y  $\phi$  no es constante, obtenemos que  $u$  es la identidad y  $f$  es una traslación. Se sigue que el grupo de transformaciones del revestimiento  $\mathbb{R}^3 \rightarrow N$  consta únicamente de traslaciones y, puesto que  $M$  es una superficie minimal compacta en  $N$ , la variedad  $N$  debe ser un toro llano tridimensional.

□



## 2.6 Comentarios

Parece no existir una generalización del teorema 2.5 a variedades generales con curvatura de Ricci no negativa. El mejor resultado que hemos obtenido hasta este momento es el teorema 2.6.

Los teoremas 2.10 y 2.21 son similares en el sentido de que a partir de una condición en la estructura conforme de la superficie estable se obtienen restricciones sobre la variedad ambiente.

No se conocen hasta el momento ejemplos de superficies estables de género dos, aunque de los argumentos expuestos por Frankel [F] parece natural pensar que el espacio dodecaédrico de Poincaré, un espacio elíptico recubierto 120 veces por la esfera  $S^3$ , contiene una escisión de Heegard minimal de género dos, que podría ser estable.

Tampoco se conocen hasta ahora ejemplos de superficies estables con género cuatro o cinco. En virtud de los teoremas 2.10 y 2.21 los ejemplos de tales superficies deben buscarse en toros llanos trisimensionales.

Ejemplos de superficies minimales hiperelípticas de género tres y estables han sido encontrados por M. Ross [Ro].

## Capítulo 3

# Superficies minimales con índice uno

En este capítulo estudiamos superficies minimales con índice uno orientables y completas embebidas en variedades llanas, completas y orientables. En la primera sección presentamos los resultados básicos ya conocidos. En la segunda probamos unos resultados preliminares que utilizaremos posteriormente. La tercera sección está dedicada al estudio de superficies minimales compactas con índice uno en la que obtenemos resultados similares a los teoremas 2.10 y 2.21 para superficies estables. La última sección está dedicada al estudio de las superficies minimales no compactas con índice uno. El principal resultado es el teorema de clasificación 3.10.

### 3.1 Preliminares

Supongamos que  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión minimal de una superficie orientable en una variedad orientable de dimensión tres. Recordemos que la segunda fórmula de variación del área de una variación normal  $u\nu$ , con  $u \in C^\infty(M)$ , viene dada por:

$$A''(u) = \int_M \{ |\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2)u^2 \} dA$$

Recordemos también que el índice de la inmersión minimal  $\psi$  se define como el supremo de los índices del operador  $\Delta + \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  sobre los dominios relativamente compactos de  $M$ .

Las superficies minimales de índice cero son mínimos del área para cualquier variación de la superficie y son llamadas a veces superficies minimales estables, aunque en este trabajo hemos reservado este nombre para las inmersiones con curvatura media constante que son mínimos del área para las variaciones que conservan el volumen. Las superficies minimales de índice cero han sido estudiadas



por D. Fischer-Colbrie y R. Schoen en el caso de que la curvatura escalar de la variedad ambiente  $N$  sea no negativa. En particular, cuando la curvatura de Ricci es no negativa, obtienen el siguiente resultado:

**Teorema 3.1 ([FC,FCS]).** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión minimal de índice cero de una superficie orientable completa en una variedad riemanniana orientada de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa.*

*Entonces  $\psi$  es totalmente geodésica y  $\text{Ric}(\nu) \equiv 0$  a lo largo de la inmersión.*

Este resultado puede verse como una extensión del siguiente de do Carmo y Peng [dCP] para el caso  $N = \mathbb{R}^3$ :

**Teorema 3.2.** *Las únicas superficies minimales completas de índice cero en  $\mathbb{R}^3$  son los planos.*

Las superficies minimales de índice uno aparecen en métodos de tipo minimax como los de Pitts [P], Pitts y Rubinstein [PR] y Hass, Pitts y Ribinstein [HPR]. Para este tipo de superficies se pueden aplicar los resultados de Fischer-Colbrie [FC] sobre superficies minimales de índice finito, ver teorema 2.1.

Cuando la superficie minimal tenga aplicación de Gauss  $\phi$ , se tiene que  $|\nabla\phi|^2 = |\sigma|^2 = -2K$ , de modo que el operador asociado a la segunda variación del área se transforma en  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ . En este caso, Fischer-Colbrie [FC] ha probado:

**Teorema 3.3.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa y orientable inmersa con índice finito en una variedad orientable. Supongamos que existe una aplicación conforme o anticonforme  $\phi : M \rightarrow S^2$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ .*

*Entonces el índice de  $M$  coincide con el índice del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en la compactificación conforme  $\overline{M}$  de  $M$ .*

Hacemos notar que el índice del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es invariante por cambios conformes de la métrica de la superficie  $\overline{M}$ .

Los operadores del tipo  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ , con  $\phi : M \rightarrow S^2$  una aplicación anticonforme definida sobre una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  han sido estudiados por Montiel y Ros, quienes han probado:

**Teorema 3.4** ([MR]). *Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta,  $\phi : M \rightarrow S^2$  una aplicación anticonforme. Supongamos que el operador elíptico  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  tiene índice uno.*

*Entonces:*

- (i) *Si  $\eta : M \rightarrow S^2$  es una aplicación anticonforme, entonces  $\text{grado}(\phi) \leq \text{grado}(\eta)$ . Si se da la igualdad, entonces existe una transformación de Möbius  $A$  tal que  $\eta = A(\phi)$ .*
- (ii) *Si  $\text{género}(M) = 1$ , entonces el índice de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es mayor que uno.*

## 3.2 Resultados previos

**Teorema 3.5.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa y orientable con índice uno inmersa en una variedad orientada tridimensional con curvatura de Ricci no negativa.*

*Entonces  $M$  es conforme a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$  de género  $g$  menos  $r$  puntos. Además  $g \leq 5$  y se tiene:*

- (i) *Si  $g = 0, 1$ , entonces  $r \leq 4$ ,*
- (ii) *si  $g = 2, 3$ , entonces  $r \leq 2$ ,*
- (iii) *si  $g = 4, 5$ , entonces  $r = 0$ .*

*Más aún, si se da la igualdad en la columna de la derecha y  $M$  es compacta o  $M$  es una superficie embebida en una variedad llana y completa, entonces existe una aplicación anticonforme  $\phi : M \rightarrow S^2$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$ .*

*Demostración:* Consideremos en primer lugar el caso compacto. Sea  $u$  la primera función propia del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en  $M$ . Como  $M$  tiene índice uno, se sigue de la caracterización variacional de los valores propios que  $\int_M \{|\nabla v|^2 + 2Kv^2\} \geq 0$  para toda función diferenciable  $v$  ortogonal en  $L_2(M)$  a  $u$ .

Sea  $\phi : M \rightarrow S^2$  una aplicación anticonforme de grado menor o igual que  $1 + \lfloor \frac{1+g}{2} \rfloor$  en  $M$ , ver [GH]. Aplicando el lema 2.9 podemos encontrar una transformación de Möbius  $F$  de  $S^2$  tal que  $\int_M (F \circ \phi)u \, dA = 0$ . Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} 8\pi \text{grado}(F \circ \phi) &= \int_M |\nabla\phi|^2 \, dA \\ &\geq \sum_{i=1}^3 \int_M -2K \phi_i^2 \, dA = \int_M -2K = 4\pi(2g - 2), \end{aligned}$$

y, puesto que  $\text{grado}(F \circ \phi) = \text{grado}(\phi) \leq 1 + [\frac{1+g}{2}]$ , deducimos que  $g \leq 5$ . Si  $g = 4, 5$ , obtenemos la igualdad en todas las desigualdades anteriores. En particular, obtenemos que:

$$\int_M \{|\nabla \phi_i|^2 + 2K\phi_i^2\} dA = 0.$$

Si  $v$  es una función ortogonal  $L_2$  a  $u$ , se tiene que  $\phi_i + tv$  es ortogonal  $L_2$  a  $u$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto,  $I(\phi_i + tv) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y es igual a cero en  $t = 0$ . Derivando dicha función y evaluando en  $t = 0$ , obtenemos que:

$$0 = \int_M \{\langle \phi_i, v \rangle + 2K\phi_i v\} dA = \int_M -v(\Delta \phi_i - 2K\phi_i) dA,$$

para toda función  $v$  diferenciable y ortogonal  $L_2$  a  $u$ . Por tanto,  $\Delta \phi_i - 2K\phi_i$  es proporcional a  $u$  para  $i = 1, 2, 3$ , y existe un vector  $c \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\Delta \phi - 2K\phi = cu$ . Como  $\phi$  es una aplicación no constante, se sigue que  $c = 0$  y que  $\Delta \phi - 2K\phi = 0$ . Como  $\phi$  verifica la ecuación  $\Delta \phi + |\nabla \phi|^2 = 0$ , deducimos que  $|\nabla \phi|^2 = -2K$ .

Si  $M$  es una superficie no compacta, sabemos por el teorema 2.1 que  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  de género  $g$  menos un número finito de puntos  $p_1, \dots, p_r$ . Como  $M$  tiene índice uno, el trabajo de Fischer-Colbrie [FC] nos garantiza la existencia de una función  $u$  en  $L_2(M)$  tal que  $\Delta u + (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2)u + \lambda_1 u = 0$ , con  $\lambda_1 < 0$ , y tal que  $I(v) \geq 0$  para toda función  $v$  diferenciable con soporte compacto que sea ortogonal  $L_2$  a la función  $u$ . Por construcción,  $u$  es diferenciable y positiva.

Sea  $\phi : \overline{M} \rightarrow S^2$  una función anticonforme en  $\overline{M}$  de grado menor o igual que  $1 + [\frac{1+g}{2}]$ . Consideremos una sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones diferenciables con soporte compacto contenido en  $M$  tales que:

- (i)  $0 \leq v_n \leq 1$ , y  $v_n \nearrow 1$  puntualmente,
- (ii)  $\int_M |\nabla v_n|^2 \rightarrow 0$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , usando el lema 2.9 podemos encontrar una transformación de Möbius  $F_n$  tal que:

$$\int_M (F_n \circ \phi) v_n u dA = 0.$$

Como  $(F_n \circ \phi) v_n$  es ortogonal  $L_2$  a  $u$ , obtenemos que:

$$0 \leq I((F_n \circ \phi)v_n) = \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_M |\nabla (F_n \circ \phi_i) v_n|^2 \right\} - \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) v_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 v_n^2 + |\nabla v_n|^2 (F_n \circ \phi_i)^2 + 2 \langle \nabla(F_n \circ \phi_i), \nabla v_n \rangle \right\} - \int_M (\text{Ric}(\nu) - |\sigma|^2) v_n^2.$$

Puesto que  $|(F_n \circ \phi_i)| \leq 1$ ,  $|v_n| \leq 1$  y  $\langle \nabla(F_n \circ \phi_i), \nabla v_n \rangle \leq |\nabla(F_n \circ \phi_i)| |\nabla v_n|$ , el primer sumando es menor o igual que:

$$\sum_{i=1}^3 \int_M \{ |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 + |\nabla v_n|^2 + \sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)| |\nabla v_n| \}. \quad (3.1)$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos que  $\sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 = 8\pi \text{grado}(\phi)$  y que  $\int_M |\nabla v_n|^2 \rightarrow 0$ . Por la desigualdad de Schwarz:

$$\int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)| |\nabla v_n| \leq \left( \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 \right)^{1/2} \left( \int_M |\nabla v_n|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Además, por el teorema de la convergencia monótona:

$$\int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) v_n^2 \rightarrow \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2).$$

De modo que obtenemos a partir de (3.1) que:

$$0 \leq 8\pi \text{grado}(\phi) - \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2),$$

y, por tanto:

$$0 \leq 8\pi \text{grado}(\phi) - \int_M (\text{Ric}(e_1) + \text{Ric}(e_2) - 2K) \leq 8\pi \text{grado}(\phi) - \int_M 2K,$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal local en  $M$ . Por la desigualdad de Cohn-Vossen  $\int_M K \leq 2\pi(2 - 2g - r)$ , tenemos que:

$$0 \leq 4\pi \left( 4 + 2 \left[ \frac{1+g}{2} \right] - 2g - r \right). \quad (3.2)$$

De modo que las únicas posibilidades para  $g$  y  $r$  son las enunciadas en el teorema.

Si se da la igualdad, en particular se obtiene la igualdad  $\int_M K = 2\pi(2 - 2g - r)$  en la desigualdad de Cohn-Vossen. Si  $M$  es embebida en una variedad llana  $N$  y se da la igualdad en dicha desigualdad, es conocido a partir de los resultados de

clasificación de superficies minimales embebidas [MeR1,MeR2] que los finales de  $M$  deben ser de tipo Scherk. En este caso, la imagen inversa de  $M$  a  $\mathbb{R}^3$  tiene una aplicación de Gauss  $\nu$ , y la métrica ramificada  $\nu^*ds^2$ , donde  $ds^2$  es la métrica canónica de la esfera, se proyecta a  $M$  y extiende a una métrica ramificada  $ds_0^2$  en  $\overline{M}$ . Dicha métrica tiene área finita y es conforme a la métrica de  $M$ . En dicha métrica, el operador segunda variación del área se escribe  $\Delta_0 + 2$ . Podemos entonces trabajar con dicha métrica como en el caso compacto [LR] y deducir que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$ .

□

**Proposición 3.6.** *Si  $M$  es una superficie minimal orientable embebida en una variedad completa, llana y orientable  $N$  y existe en  $M$  una aplicación  $\phi : M \rightarrow S^2$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$ , entonces  $N$  es un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo de traslaciones y  $\phi$  es, salvo composición con isometrías de  $\mathbb{R}^3$ , la aplicación de Gauss de  $M$ .*

*Demostración:* Similar a la del teorema 2.21.

□

En la demostración del teorema 3.10 necesitaremos el siguiente resultado:

**Proposición 3.7.** *Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta de género tres,  $\phi : M \rightarrow S^2$  una aplicación anticonforme no constante. Supongamos que el índice de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es uno.*

*Entonces  $\text{grado}(\phi) = 2$  y  $M$  es una superficie hiperelíptica.*

*Demostración:* En una superficie de Riemann compacta de género tres siempre existe una aplicación anticonforme de grado menor o igual que tres, ver [GH]. Por el apartado (i) del teorema 3.4 deducimos que si el índice del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es uno, entonces el grado de  $\phi$  es dos o tres. Supongamos que el grado de  $\phi$  es tres. Probaremos que existen dos aplicaciones meromorfas en  $M$  de grado tres que no pueden relacionarse por medio de una transformación de Möbius. Aplicando de nuevo el apartado (i) del teorema 3.4 llegaremos a contradicción.

Sean  $\omega$  y  $\alpha$  1-formas holomorfas en  $M$  sin ceros comunes. Entonces  $f = \frac{\omega}{\alpha}$  es una aplicación meromorfa  $M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  de grado cuatro. Si  $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$  es un valor regular para  $f$ , entonces  $f - a$  tiene cuatro ceros simples. Sea  $\omega_1 = \omega - a$ , y sean

$p_1, \dots, p_4$  los ceros de  $\omega_1$ . Podemos encontrar 1-formas holomorfas  $\omega_2$  y  $\omega_3$  con un cero en  $p_2$  y  $p_3$ , respectivamente. El único cero común de  $\omega_1$  y  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , es  $p_i$ , ya que, en caso contrario,  $\frac{\omega_1}{\omega_i}$  sería una función meromorfa no constante de grado menor o igual que dos y, aplicando de nuevo el apartado (i) del teorema 3.4 llegamos a contradicción.

Es fácil ver entonces que  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  es una base de 1-formas holomorfas en  $M$ .

Las funciones meromorfas  $f = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  y  $g = \frac{\omega_3}{\omega_1}$  tienen grado menor o igual que tres, y es igual a tres por ser el operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  de índice uno. Por el apartado (i) de 3.4, existe una transformación de Möbius  $A = \frac{az+b}{cz+d}$  tal que:

$$f = A(g) = \frac{ag + b}{cg + d},$$

y, por tanto:

$$c\omega_2 \otimes \omega_3 + d\omega_1 \otimes \omega_2 - a\omega_1 \otimes \omega_3 - b\omega_1 \otimes \omega_1 = 0.$$

Evaluando en  $p_1$ , que no es cero de  $\omega_2$  ni de  $\omega_3$  obtenemos que  $c = 0$  y, por tanto, que  $\omega_1 \otimes (-b\omega_1 + d\omega_2 - a\omega_3) = 0$ . Esto implica que  $a = b = d = 0$  porque  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  son linealmente independientes. Por tanto, llegamos a una contradicción que prueba que  $f$  y  $g$  no están relacionados por una transformación de Möbius. Por tanto, el índice del operador asociado a una aplicación anticonforme de grado tres no puede ser uno.

□

### 3.3 Superficies minimales compactas

**Teorema 3.8.** *Sea  $M$  una superficie minimal compacta y orientable con índice uno embebida en una variedad orientable  $N$  de dimensión tres completa y llana. Supongamos que  $M$  tiene género cuatro o cinco o bien es una superficie hiperelíptica de género tres.*

*Entonces la variedad  $N$  es un toro llano tridimensional.*

*Demostración:* En una superficie de Riemann de este tipo podemos encontrar una aplicación anticonforme  $\phi : M \rightarrow S^2$  de grado  $g - 1$ , que podemos suponer es



ortogonal  $L_2$  a la primera función propia del operador  $\Delta - 2K$ . Utilizándola como función test en la forma índice obtenemos que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$  y concluimos aplicando la proposición 3.6. □

**Teorema 3.9.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión minimal con índice uno de una superficie compacta de género cuatro o cinco o de una superficie hiperelíptica de género tres en una variedad orientable de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa.*

*Existe entonces una inmersión isométrica minimal multivaluada  $\bar{\psi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  con aplicación de Gauss  $\phi$  de modo que las métricas inducidas por ambas inmersiones coinciden y tal que  $|\nabla\phi|^2 = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ .*

*Demostración:* Similar a la del teorema 2.10 □

### 3.4 Superficies minimales no compactas

En este apartado estudiamos superficies minimales no compactas y embebidas con índice uno en variedades llanas. Ejemplos conocidos de tales superficies son la catenoide en  $\mathbb{R}^3$ , ver [LR], las superficies simple y doblemente periódicas de Scherk de género cero con cuatro finales y curvatura total  $-4\pi$  [MeR1,MeR2], y los helicoides con curvatura total mayor o igual que  $-4\pi$ , ver [So].

Si consideramos dos piezas de género cero de la superficie de Scherk simplemente periódica obtenemos una superficie minimal embebida de género uno con cuatro finales y curvatura total  $-8\pi$  cuya representación de Weierstrass viene dada por:

$$w^2 = (z - e^{i\theta})(z + e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(z + e^{-i\theta}), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$g(z, w) = z, \quad \omega(z, w) = \frac{dz}{w^2}.$$

Dicha superficie es invariante por un movimiento helicoidal  $S$  que consiste en una rotación  $R$  de ángulo  $\pi$  y una traslación  $T$  en la dirección del eje del movimiento helicoidal. Las restricciones de tales isometrías a  $M$  vienen dadas, respectivamente,

por  $\sigma(z, w) = (-z, -w)$ ,  $\sigma_1(z, w) = (-z, w)$  y  $\theta(z, w) = (z, -w)$ . Las involuciones anticonformes  $h_1(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$  y  $h_2(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w})$  son isometrías intrínsecas que preservan la curvatura de Gauss. La superficie  $M/\sigma$  es una superficie minimal embebida en  $\mathbb{R}^3/S$ . Llamaremos  $\phi$  a su aplicación de Gauss.

Podemos calcular el índice de  $M/\sigma$  como el número de valores propios negativos del operador  $\Delta_\phi + 2$  cuyos subespacios de funciones propias son invariantes por  $\sigma$ . Veamos que no existe una función propia distinta de la primera que sea simétrica y con valor propio negativo.

Es bien conocido, ver [Sou], que las funciones de valor propio negativo mayor que el primero son antisimétricas con respecto de la involución  $\theta$ . Pero tales funciones son necesariamente simétricas con respecto a  $h_1$  y  $h_2$  y, por tanto, son antisimétricas respecto de  $\sigma = \sigma_1 \circ \theta = (h_1 \circ h_2) \circ \theta$ . Se sigue entonces que el índice de  $M/\sigma$  es uno.

El principal resultado de clasificación es el siguiente:

**Teorema 3.10.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa, orientable y no compacta con índice uno embebida en una variedad orientable  $N$  de dimensión tres completa y llana.*

*Se tienen las siguientes posibilidades:*

- (i)  $M$  es una catenoide en  $\mathbb{R}^3$ ,
- (ii)  $M$  es un helicoide con curvatura total mayor que  $-4\pi$  en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ ,
- (iii)  $M$  es una superficie de Scherk de género cero, cuatro finales y curvatura total  $-4\pi$  en  $\mathbb{R}^3/T_v$ ,
- (iv)  $M$  es una superficie de Scherk de género cero, cuatro finales y curvatura total  $-4\pi$  en  $T^2 \times \mathbb{R}$ ,
- (v)  $M$  es un toro con dos finales tipo Scherk y curvatura total  $-4\pi$  en una variedad de tipo  $\mathcal{K}$ ,
- (vi)  $M$  es un toro con dos finales y curvatura total en el intervalo  $[-4\pi, -8\pi]$  en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , con  $\theta \in (0, \pi)$ .

*Demostración:* Si  $N = \mathbb{R}^3$  es conocido que  $M$  debe ser una catenoide, ver [LR]. Si  $N$  no es simplemente conexo, entonces  $M$  debe tener un número par de finales, ver [MeR2, th.8]. De esta observación y el teorema 3.5 tenemos que:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } g = 0, 1 & \text{entonces } r = 2, 4, \\ \text{si } g = 2, 3 & \text{entonces } r = 2. \end{array}$$

Si  $g = 2$  o  $3$  entonces la forma índice viene dada por la forma cuadrática asociada al operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ , donde  $\phi$  es una aplicación anticonforme  $M \rightarrow S^2$  y  $|\nabla\phi|^2 = -2K$  por el teorema 3.5. En este caso,  $M$  debe estar embebida en una variedad del tipo  $\mathbb{R}^3/T_v$  o  $T^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $T_v$  es el subgrupo generado por la traslación en la dirección del vector  $v \neq 0$ , y  $T^2$  es un toro llano tridimensional. En el caso  $g = 3$  la aplicación anticonforme  $\phi$  tiene grado tres y llegamos a contradicción a partir de la proposición 3.7. Si  $g = 2$  entonces  $M$  no puede estar en  $T^2 \times \mathbb{R}$  porque una superficie propiamente embebida y orientable en  $T^2 \times \mathbb{R}$  debe tener al menos cuatro finales por el trabajo de Meeks y Rosenberg [MeR2]. Por tanto  $M$  debe estar en  $\mathbb{R}^3/T_v$  y, puesto que  $16\pi = \int_M K = 2\pi\chi(M)$ , concluimos que los dos finales de  $M$  son de tipo Scherk, pero una superficie de este tipo levantaría a  $\mathbb{R}^3$  como una superficie propiamente embebida contenida en un semiespacio de  $\mathbb{R}^3$ , lo que contradice el teorema del semiespacio de Hoffman y Mekks [HM1].

El caso  $g = 1$  y  $r = 4$  no es posible por el teorema 3.4.

Si  $g = 0$  y  $r = 4$  entonces  $M$  es embebida en  $T \times \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^3/T_v$  y tiene curvatura total  $-4\pi$ . Se sigue del trabajo de Hofmann y Meeks [HM] y Meeks y Rosenberg [MeR1] que  $M$  debe ser una superficie de Scherk, que ya hemos visto que tienen índice uno.

Si  $g = 0$  y  $r = 2$  entonces  $M$  no puede estar en una variedad llana recubierta por  $T \times \mathbb{R}$ , porque la imagen inversa de  $M$  en  $T \times \mathbb{R}$  sería una superficie minimal propiamente embebida con solo dos finales, lo que no es posible, ver [MeR1]. Por tanto  $M$  debe estar en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , con  $0 < \theta \leq 2\pi$  y, por el trabajo de Meeks y Rosenberg [MeR2],  $M$  debe ser un helicoides. Además, por el teorema 3.5, tenemos que  $\int_M |K| \leq 4\pi$ .

La única posibilidad que queda es  $g = 1$  y  $r = 2$ . En este caso se tiene que  $\int_M |K| < 8\pi$  a partir del teorema 3.5 y, como antes,  $M$  no puede tener aplicación de Gauss. Si  $M$  está en una variedad de tipo  $\mathcal{K}$  entonces  $M$  puede levantarse como un toro con cuatro finales en  $T^2 \times \mathbb{R}$  con curvatura total  $-8\pi$  y se sigue (vi). Si  $M$  está en algún cociente helicoidal de  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\int_M |K| = 2\pi(\chi(M) - W(M)) \leq -4\pi$  y se sigue (v).

□

Como consecuencia del teorema 3.10, obtenemos, para cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones:

**Corolario 3.11.**

- (i) Una superficie minimal orientable propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3/T_v$ , donde  $T_v$  es el subgrupo generado por una traslación no trivial en la dirección del vector  $v$ , tiene índice uno si y sólo si  $M$  es un helicoido o está en la familia uniparamétrica de superficies de Scherk simplemente periódicas.
- (ii) Una superficie minimal orientable propiamente embebida en  $T^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $T^2$  es un toro llano bidimensional, tiene índice uno si y sólo si  $M$  es una superficie de Scherk orientable doblemente periódica. Además, en este caso, el retículo que determina el cociente  $T^2 \times \mathbb{R}$  está generado por vectores de la misma longitud.

### 3.5 Comentarios

Ejemplos de superficies minimales compactas con índice uno han sido encontrados por M. Ross [Ro], quien ha probado que las clásicas superficies minimales de Schwartz  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de género tres, así como el giroide de A. Schoen [Kar] tienen índice uno; de hecho, demuestra que estas superficies son estables, pero esto implica que su índice es uno. También demuestra que superficies minimales próximas en retículos próximos deben ser también estables. En el capítulo 4 se prueba que el espacio de superficies minimales con índice uno en toros llanos es compacto.

Hasta ahora, no se conoce la existencia de superficies minimales de índices cuatro o cinco en toros llanos de dimensión tres.

El ejemplo previo al teorema 3.10 prueba que existen toros minimales con dos finales e índice uno en variedades llanas.

Sin embargo, los cocientes de superficies de Scherk doblemente periódicas en variedades de tipo  $\mathcal{K}$  no tienen índice uno. Consideremos las superficies de Scherk doblemente periódicas cuya representación de Weierstrass es:

$$w^2 = (z - e^{i\theta})(z + e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(z + e^{-i\theta}), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$g(z, w) = z, \quad \omega(z, w) = \frac{idz}{w^2}.$$

Cada una de estas superficies es invariante por un movimiento helicoidal  $S$  consistente en una rotación  $R$  de ángulo  $\pi$  seguida de una traslación  $T$  en la dirección del eje del movimiento helicoidal, cuya restricción a  $M$  viene dada por  $\sigma(z, w) = (1/z, -w/z)$ . La tercera coordenada de la aplicación de Gauss  $\phi$  es  $\phi_3 = (-1 + |z|^2)/(1 + |z|^2)$ , que es una función propia de valor propio cero del

operador asociado a la segunda variación del área  $\Delta_\phi + 2$  que es antiinvariante por  $\sigma$ . El conjunto nodal de  $\phi_3$  tiene cuatro componentes  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , tales que  $\sigma(\Omega_1) = \Omega_2$  y  $\sigma(\Omega_3) = \Omega_4$ . Llamemos  $u_1$  y  $u_3$  a las restricciones de  $\phi_3$  a  $\Omega_1$  y  $\Omega_3$ , respectivamente. Si el índice de  $M/\sigma$  es uno, entonces el segundo valor propio del operador  $\Delta_\phi + 2$  es mayor o igual que cero. Las funciones  $u_1$  y  $u_3$  se pueden proyectar a  $M/\sigma$  y, puesto que sus soportes son disjuntos, una combinación lineal  $u$  de ambas es ortogonal a la primera función propia. Esto implica que  $u$  es una función propia del operador  $\Delta_\phi + 2$  cuyo valor propio es 0. Pero  $u$  no puede ser una función diferenciable, puesto que su levantamiento a  $M$  es una función simétrica con respecto a  $\sigma$  que coincide en  $\Omega_1$  con un múltiplo de  $\phi_3$ . Por continuación única, ambas funciones coinciden en  $M$ , lo que es imposible, ya que  $\phi_3$  es antisimétrica con respecto a  $\sigma$ .

Las superficies helicoidales obtenidas por Karcher a partir de las superficies de Scherk [Kar2] pueden considerarse como toros con dos finales helicoidales en un cociente adecuado de  $\mathbb{R}^3$  por un movimiento helicoidal. Sin embargo, no sabemos si su índice es uno.

## Capítulo 4

# Compacidad de superficies estables y embebidas

Recordemos que el teorema 2.5 demuestra que una inmersión estable de una superficie completa y orientable  $M$  en una variedad llana, completa y orientable debe ser totalmente geodésica, o bien la superficie  $M$  debe ser compacta y conexa y el género de  $M$  debe ser menor o igual que cinco. Por tanto, las únicas superficies estables no compactas son cocientes de planos de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $M$  es una superficie compacta de género cero, entonces es totalmente umbilical y estable. Si el género de  $M$  es uno, se prueba en el corolario 2.14 que  $M$  debe ser llana y, por tanto, un tubo alrededor de una geodésica cerrada en la variedad ambiente.

En este capítulo continuamos con el estudio de las superficies estables en variedades llanas, completas y orientables. Cuando el género de la superficie  $M$  es mayor que uno no debemos esperar una caracterización geométrica tan sencilla como en los casos de género más bajo. M. Ross [Ro] ha probado que las clásicas superficies  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de Schwarz de género tres son estables, así como todas las superficies minimales próximas a estas en una cierta familia. Hasta ahora no conocemos ejemplos de superficies estables con género dos, cuatro o cinco.

Continuando con este estudio, demostramos un resultado de compacidad para superficies estables embebidas de género mayor que uno en variedades llanas, completas y orientables. Concretamente, si  $M_k \subset N_k$  es una sucesión es estas condiciones, y la aplicación entre grupos fundamentales es sobreyectiva, entonces podemos extraer una subsucesión convergente tanto de las superficies como de las variedades ambiente a una superficie estable embebida en la variedad límite. Cuando las variedades ambiente son  $T_k^2 \times \mathbb{R}$ , entonces probamos que la aplicación entre grupos fundamentales siempre es sobreyectiva y, por tanto, podemos aplicar el resultado anterior.

Fijando el ambiente  $N$ , podemos suprimir la hipótesis sobre el grupo funda-

mental para concluir que una subsucesión de las superficies converge, bien a una superficie estable orientable embebida o bien a una superficie minimal no orientable embebida que minimiza el área para cualquier variación. En particular, deducimos que existe un número finito de clases de homotopía de superficies estables compactas y embebidas en  $N$ .

Como consecuencia de estos resultados, damos aplicaciones al problema isoperimétrico en variedades llanas.

## 4.1 Preliminares

En este capítulo utilizaremos un conocido resultado de convergencia para una sucesión de superficies propiamente embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  que puede encontrarse, por ejemplo, en [KKS] o [W].

**Teorema 4.1.** *Sea  $M_n \subset \mathbb{R}^3$  una sucesión de superficies propiamente embebidas con curvatura media constante tales que  $|\sigma_n| < C$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y satisfacen cotas locales uniformes de área.*

*Entonces, o bien la sucesión  $M_n$  no tiene puntos de acumulación, o bien podemos extraer una subsucesión convergente en la topología  $C^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a una superficie propiamente embebida con curvatura media constante  $M$ .*

Decimos que una sucesión de superficies  $M_n$  sin borde satisface *cotas locales uniformes de área* si existe un radio  $r$  tal que, para toda bola  $B_r$ , se tiene que  $\text{area}(M_n \cap B_r) < C$ , con  $C$  independiente de  $n$ .

La convergencia  $C^k$  significa que, en un entorno en  $\mathbb{R}^3$  de cada punto  $p \in M$  y para  $n$  suficientemente grande, cada  $M_n$  es un grafo sobre un disco fijo  $D \subset T_p M$  y los grafos de  $M_n$  convergen en la topología usual  $C^k$  de funciones al grafo de  $M$ .

El límite de una sucesión de superficies embebidas solo puede tener autointersecciones tangenciales. Diremos que una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *débilmente embebida* si solamente presenta autointersecciones tangenciales.

Toda variedad completa y llana es un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto  $G$  del grupo  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  de isometrías afines de  $\mathbb{R}^3$  actuando propia y discontinuamente en  $\mathbb{R}^3$ . Estamos interesados en variedades orientables y, puesto que este hecho es equivalente a que todas las isometrías de  $G$  conserven la orientación, consideramos el conjunto  $\mathcal{G}$  de subgrupos discretos de isometrías que actúan propia

y discontinuamente en  $\mathbb{R}^3$  que conservan la orientación. Para todo  $G \in \mathcal{G}$  denotaremos por  $\Gamma(G)$  al subgrupo de traslaciones de  $G$  y por  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G)$  al radio de inyectividad de la variedad cociente  $\mathbb{R}^3/G$ . El siguiente lema se sigue directamente de los resultados de Wolf [Wolf].

**Lema 4.2.**

- (i) *If  $G \in \mathcal{G}$  entonces el subgrupo  $\Gamma(G)$  is un grupo abeliano libre sin torsión, normal en  $G$ , y tal que  $\text{rango}(\Gamma(G)) \leq 3$ . El grupo  $G$  es cíclico si solo si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 0, 1$ . Si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 2, 3$  entonces  $\text{orden}(G/\Gamma(G)) \leq 6$ .*
- (ii) *El conjunto  $\{G \in \mathcal{G} : \text{rango}(\Gamma(G)) \geq 2\}$  contiene un número finito de clases afines de conjugación.*
- (iii) *Sean  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}, G \in \mathcal{G}$  tales que  $G_n \rightarrow G$ , i.e.,  $G$  es el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión en  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$ . Si  $\text{rango}(\Gamma(G_n)) \geq 2$  entonces  $\Gamma(G_n) \rightarrow \Gamma(G)$  y  $\text{rango}(\Gamma(G)) \leq \liminf \text{rango}(\Gamma(G_n))$ .*
- (iv) *Sea  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  contenida en una clase afín de conjugación en  $\mathcal{G}$ , y  $G \in \mathcal{G}$  el límite de la sucesión  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = \text{rango}(\Gamma(G_n))$ , entonces  $G$  está en la misma clase afín de conjugación que los elementos de  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Por tanto, existe una sucesión de transformaciones afines de  $\mathbb{R}^3$  que convergen a la identidad que inducen difeomorfismos entre  $\mathbb{R}^3/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$ .*
- (v) *Sea  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$  tal que  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n)$  está acotado inferiormente por una constante positiva. Entonces podemos extraer una subsucesión convergente a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$ .*

Describiremos brevemente los subgrupos  $G \in \mathcal{G}$  salvo conjugación afín, es decir, los posibles tipos de variedades llanas y completas afinmente difeomorfas [Wolf].

Si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 0, 1$  entonces  $G = \{\text{Id}\}$  o  $G = S_\theta$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$ , donde  $S_\theta$  es el subgrupo generado por un movimiento helicoidal compuesto de una rotación de ángulo  $\theta$  seguido de una traslación no trivial en la dirección del eje de rotación. Hacemos notar que en este caso las posibles clases afines de conjugación están parametrizadas por  $\theta$ .

Si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 2$ , entonces existen dos clases afines de conjugación: o bien  $G$  está generado por dos traslaciones independientes y el cociente  $\mathbb{R}^3/G$  es el producto riemanniano  $T^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $T^2$  es un toro llano bidimensional, o  $G$  está generado por un movimiento helicoidal de ángulo  $\pi$  y una traslación ortogonal al eje del movimiento helicoidal. Denotaremos esta clase de variedades cociente por



$\mathcal{K}$ . Cada variedad en  $\mathcal{K}$  admite un revestimiento de dos hojas por una variedad  $T^2 \times \mathbb{R}$ .

Las variedades anteriores describen todos los tipos de variedades afinmente difeomorfas no compactas.

Finalmente, si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 3$ , entonces o bien  $G$  contiene solamente traslaciones y  $\mathbb{R}^3/G$  es un toro llano tridimensional o  $G$  contiene movimientos helicoidales con ángulo distinto de cero y  $\mathbb{R}^3/\Gamma(G) \rightarrow \mathbb{R}^3/G$  es un revestimiento riemanniano con seis hojas como máximo. Este tipo de grupos determina cinco clases afines diferentes de difeomorfismos.

Ahora daremos unas restricciones a la existencia de superficies compactas con curvatura media constante embebidas en variedades llanas, completas y orientables no compactas de dimensión tres, que se obtienen a partir del principio de reflexión de Alexandrov [A]

**Teorema 4.3.**

- (i) *La única superficie compacta y conexa embebida con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  es la esfera totalmente umbilical.*
- (ii) *Las únicas superficies compactas y conexas embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$  son cocientes de superficies de Delaunay invariantes por  $S_\theta$ .*
- (iii) *Cualquier superficie compacta no totalmente geodésica embebida con curvatura media constante en  $T^2 \times \mathbb{R}$  es orientable y simétrica con respecto a un toro totalmente geodésico.*

Fijando el género de la superficie obtenemos otro tipo de restricciones. Diremos que una superficie  $M$  embebida en una variedad llana  $N_1$  de dimensión tres levanta a otra variedad llana  $N_2$  si existe un revestimiento riemanniano  $\Pi : N_2 \rightarrow N_1$  y un embebimiento isométrico  $i : M \rightarrow N_2$  tal que  $\Pi \circ i$  coincide con la inclusión  $M \rightarrow N_1$ . Esto es equivalente a que  $i_*(\pi_1(M)) \subset \Pi_*(\pi_1(N_2))$ .

**Teorema 4.4.** *Sea  $M$  una superficie compacta y orientable no totalmente geodésica embebida con curvatura media constante en una variedad llana, completa y orientable  $N$  de dimensión tres. Entonces:*

- (i) *Si el género de  $M$  es cero, entonces  $M$  levanta como una esfera totalmente umbilical a  $\mathbb{R}^3$ .*

- (ii) Si el género de  $M$  es uno, entonces  $M$  levanta a un cociente de una superficie de Delaunay en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ .

*Demostración:* En el caso de género cero  $M$  puede levantarse a  $\mathbb{R}^3$  y concluimos el resultado del teorema de Alexandrov [Al]. Supongamos que el género de  $M$  es uno. Entonces  $M$  no puede ser una superficie minimal, ya que entonces sería totalmente geodésica. Por el lema 4.7, que demostraremos en la siguiente sección, la superficie  $M$  separa a la variedad  $N$ . Denotemos por  $\Gamma$  la clausura de la componente de  $N \setminus M$  hacia la que apunta el vector curvatura media. Sabemos por los resultados de Meeks, Simon y Yau [MSY] que  $\Omega$  es un toro macizo. Como la inclusión  $i : M \rightarrow N$  factoriza a través de  $\Omega$  y la inclusión  $M \rightarrow \Omega$  induce un morfismo sobreyectivo entre los grupos fundamentales, concluimos que  $i_*(\pi_1(M))$  coincide con la imagen del morfismo  $\pi_1(\Omega) \rightarrow \pi_1(N)$  y, por tanto,  $i_*(\pi_1(M))$  tiene un generador. Se sigue que  $i_*(\pi_1(M))$  es un subgrupo cíclico, que es no trivial, porque entonces  $M$  levantaría como una esfera totalmente umbilical a  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto  $M$  levanta a  $\mathbb{R}^3/S_\theta$  y (ii) es consecuencia del apartado (ii) del teorema 4.3. □

## 4.2 Cotas locales uniformes del área y un resultado de convergencia

Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  un superficie propiamente embebida no necesariamente conexa que es invariante por un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$ . El cociente  $M/G$  es una superficie riemanniana propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3/G$ . Supondremos que  $M/G$  es orientable, lo que es equivalente a que todos los elementos de  $G$  conserven la orientación al restringirlos a  $M$ . Elegimos una orientación de  $M/G$  y consideramos en  $M$  el levantamiento de esta orientación, que determina una aplicación de Gauss  $\nu : M \rightarrow S^2$  que es equivariante por  $G$ .

El hecho de que  $M/G$  separe a  $\mathbb{R}^3/G$  es equivalente a que  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  sea la unión disjunta de dos conjuntos  $G$ -invariantes. Cada uno de estos conjuntos, que no son necesariamente conexos, tiene a  $M$  como frontera, y el vector normal  $\nu$ , equivariante por  $G$ , apunta hacia una de las componentes.

Puesto que  $M$  es la imagen inversa de  $M/G$  por el revestimiento  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ , la superficie  $M$  es conexa si y solo si el morfismo inducido entre los grupos fundamentales  $\pi_1(M/G) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3/G)$  inducido por la inclusión es sobreyectivo.

Comenzamos esta sección con una generalización de un resultado válido para superficies convexas. Un clásico teorema de Blaschke garantiza que una esfera de radio  $R > 0$  puede “rodar” por el interior de una superficie convexa cuyas curvaturas principales sean menores que  $1/R$  y por el exterior de una superficie convexa cuyas curvaturas principales sean mayores que  $R$ . Si reemplazamos la hipótesis de convexidad de la superficie por la de no negatividad de la curvatura media obtenemos un resultado análogo al del teorema de Blaschke en la cara de la superficie hacia la que apunta el vector curvatura media.

**Teorema 4.5 (Teorema de Blaschke para curvatura media no negativa).** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie embebida no totalmente geodésica, invariante por un grupo  $G \in \mathcal{G}$  tal que  $M/G$  es una superficie orientable compacta y conexa que separa a  $\mathbb{R}^3/G$ . Sea  $\nu : M \rightarrow S^2$  el vector normal  $G$ -equivariante. Supongamos que la curvatura media es no negativa. Si denotamos por*

$$c = c(M) = 1 / \max \{ \text{curvaturas principales positivas de } M \}.$$

y por  $F : M \times [0, c) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a la aplicación normal exponencial dada por:

$$(p, t) \in M \times [0, c) \longmapsto p + t\nu(p).$$

Entonces tenemos que  $F$  es un difeomorfismo local inyectivo.

*Demostración:* Denotemos por  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  a la inclusión. Es claro de la definición de  $c$  y de la compacidad de  $M/G$  que  $0 < c < \infty$ , que  $F$  es un difeomorfismo local y que la restricción de  $F$  a  $M \times [0, \varepsilon)$  es inyectiva para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.

Para  $0 \leq t < c$  la superficie paralela determinada por  $\psi_t = F(-, t) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene curvatura media dada por:

$$2H_t = \frac{k_1}{1 - tk_1} + \frac{k_2}{1 - tk_2} = \frac{2H - 2tK}{(1 - tk_1)(1 - tk_2)},$$

donde  $k_i$ ,  $H$  y  $K$  son las curvaturas principales, la curvatura media y la curvatura de Gauss de  $\psi$ .

Como  $H^2 \geq K$  y la igualdad solo se da en los puntos umbílicos, se tiene que:

$$2H_t \geq \frac{2H(1 - tH)}{(1 - tk_1)(1 - tk_2)} \geq 0.$$

Más aún,  $H_t = 0$  en algún punto implica que el punto es llano para el embebimiento  $\psi$ .

Sea  $t_0 = \sup\{t > 0; F : M \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ es inyectiva}\}$ . Vamos a probar el teorema razonando por contradicción. Supongamos que  $t_0 < c$ . Entonces existen dos puntos distintos en  $M \times [0, t_0]$  con la misma imagen por  $F$ . Estos puntos están necesariamente en la frontera de  $M \times [0, t_0]$ , y no pueden estar ambos en  $M \times \{0\}$  porque  $\psi$  es un embebimiento. Estudiamos ahora las restantes posibilidades.

Si  $F(p, t_0) = F(q, t_0)$  para  $p$  y  $q$  distintos, entonces la inmersión  $\psi_{t_0}$  tiene un contacto tangencial en esos puntos. Como el vector normal a una inmersión coincide con el de sus superficies paralelas, concluimos que  $\nu(p)$  y  $\nu(q)$  son proporcionales. Si  $\nu(p) = \nu(q)$  entonces se sigue de la definición de  $F$  que  $\psi(p) = \psi(q)$ , lo que no es posible porque  $\psi$  es un embebimiento. Por tanto  $\nu(p) = -\nu(q)$  y, como  $H_{t_0} \geq 0$ , una aplicación del principio del máximo, [Sc], demuestra que existen entornos de  $p$  y  $q$  en  $M$  con  $H_{t_0} \equiv 0$  que tienen la misma imagen por la inmersión  $\psi_{t_0}$ . Esto implica que  $\psi$  es totalmente geodésica en estos entornos y, por un argumento de conexión en  $M/G$  y la ser  $M$  una superficie  $G$ -invariante, tenemos que  $\sigma \equiv 0$  en  $M$ , lo que contradice nuestras hipótesis sobre  $M$ .

Si  $F(p, 0) = F(q, t_0)$  para dos puntos arbitrarios en  $M$ , entonces las inmersiones  $\psi$  y  $\psi_{t_0}$  tienen un contacto en esos puntos y, por tanto, los vectores normales a  $\psi$  en  $p$ ,  $\nu(p)$ , y a  $\psi_{t_0}$  en  $q$ ,  $\nu(q)$ , son proporcionales. El segmento  $t \mapsto q + t\nu(q)$ , con  $t \in [0, t_0]$ , corta a  $M$  ortogonalmente en sus puntos extremos  $q$  y  $p$ , no corta a  $M$  en su interior, y deja a  $q$  en la dirección de  $\nu(q)$ . Puesto que  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  es la unión de dos conjuntos abiertos  $G$ -invariantes, se sigue que este segmento está contenido en la región  $G$ -invariante de  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  hacia la que apunta el normal  $\nu$ . En particular,  $\nu(p) = -\nu(q)$ . Se sigue entonces de la expresión de  $F$  que  $F(p, \frac{t_0}{2}) = F(q, \frac{t_0}{2})$ , lo que no es posible por la definición de  $t_0$ .

□

**Corolario 4.6.** *Con las mismas hipótesis del teorema 4.5, si  $\text{género}(M/G) \neq 1$  y  $G$  no es cíclico entonces  $\text{iny}(R^3/G) \geq c(M)/6$ .*

*Demostración:* Como  $G$  no es cíclico tenemos que  $\text{orden}(G/\Gamma(G)) \leq 6$  por el lema 4.2 y concluimos que  $M/\Gamma(G)$  es una superficie compacta de género distinto de uno. Como la aplicación de Gauss  $\nu$  de  $M$  se puede inducir en el cociente  $M/\Gamma(G)$ , se sigue del teorema de Gauss-Bonnet que  $\nu$  es sobreyectiva. Sean ahora  $v \in \Gamma(G) \setminus \{0\}$ , y  $p \in M$  tal que el vector normal  $\nu(p)$  es  $v/|v|$ . Como  $M$  es invariante

por la traslación de vector  $v$ , tenemos que  $q = p + v$  está en  $M$  y, por tanto,  $F(p, |v|) = F(q, 0)$ . Se sigue entonces del teorema 4.3 que  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/\Gamma(G)) \geq c$ . En consecuencia  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G) \geq \frac{c}{d}$ , donde  $d \leq 6$  es el número de hojas del revestimiento  $\mathbb{R}^3/\Gamma(G) \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ , lo que demuestra el corolario. □

Queremos aplicar el teorema 4.3 cuando la curvatura media de  $M$  sea constante. En este caso la hipótesis de separación se sigue de las otras hipótesis como se demuestra en el siguiente lema:

**Lema 4.7.** *Una superficie orientable, compacta y conexa, no totalmente geodésica, embebida con curvatura media constante en una variedad llana, completa y orientable de dimensión tres separa a la variedad ambiente en dos componentes conexas.*

*Demostración:* Sea  $\mathbb{R}^3/G$ , con  $G \in \mathcal{G}$ , una variedad llana, completa y orientable de dimensión tres, y  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3/G$  una superficie orientable, compacta y conexa, no totalmente geodésica, embebida con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3/G$ . Sea  $M$  la imagen inversa de  $\widetilde{M}$  por la aplicación  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ .

Supongamos que  $\mathbb{R}^3/G \setminus \widetilde{M}$  es conexo. Existe entonces una curva cerrada simple  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3/G$  que corta ortogonalmente a  $\widetilde{M}$  en un único punto, de modo que el número de intersección  $\#(\widetilde{M} \cap \gamma)$  de  $\gamma$  y  $\widetilde{M}$  es  $\pm 1$ .

La curva  $\gamma$  no puede ser homótopa, en  $\mathbb{R}^3/G$ , a una curva contenida en  $\widetilde{M}$ , ya que entonces  $\#(\widetilde{M} \cap \gamma) = 0$ . En particular, el morfismo entre los grupos fundamentales inducido por la inclusión  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3/G$  no puede ser sobreyectivo. Se sigue que  $M$  no es conexa. Además, si  $\alpha$  es un levantamiento de  $\gamma$  a  $\mathbb{R}^3$  cuyo origen está en una componente conexa  $M_1$  de  $M$ , su extremo está en otra componente conexa  $M_2$  de  $M$ .

Como  $M_1, M_2$  son superficies propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , separan a  $\mathbb{R}^3$ . Existe una componente conexa de  $\mathbb{R}^3 \setminus (M_1 \cup M_2)$  cuya frontera es  $M_1 \cup M_2$ . La curva  $\alpha$  menos sus puntos extremos está contenida en  $\Omega$  ya que sólo corta a  $M$  en dichos puntos. Como  $\widetilde{M}$  es orientable, la orientación inducida en  $M$  determina una aplicación de Gauss  $\nu$  que es  $G$ -equivariante y podemos suponer, por medio de un cambio de orientación si es necesario, que  $\alpha'(0) = \nu(\alpha(0))$ . Utilizando que  $\nu$  es  $G$ -equivariante, obtenemos que  $\alpha'(\ell) = \nu(\alpha(0))$  y, por tanto, el vector normal  $\nu$  apunta hacia  $\Omega$  en  $M_1$  y fuera de  $\Omega$  en  $M_2$ .

Sean  $p_1 \in M_1$ ,  $p_2 \in M_2$  puntos de mínima distancia, que existen por la periodicidad de las superficies y la compacidad de  $\widetilde{M}$ . La geodésica minimizante que une  $p_1$  y  $p_2$  está contenida en  $\Omega$  y las superficies  $M_2$  y  $(p_2 - p_1) + M_1$  se cortan tangencialmente en  $p_2$  con el mismo vector normal y la misma curvatura media constante. Se sigue del principio del máximo que  $M_2 = (p_2 - p_1) + M_1$  y, por tanto, los pares de puntos  $q \in M_1$ ,  $q' = q + (p_2 - p_1)$  son puntos de mínima distancia. Por tanto, los vectores normales a  $M_1$  y  $M_2$  son proporcionales a  $p_2 - p_1$  y concluimos que  $M_1$  y  $M_2$  son planos paralelos en  $\mathbb{R}^3$ . Esto contradice nuestras hipótesis sobre  $M$  y prueba el lema.

□

Para superficies minimales obtenemos un resultado aún mejor.

**Corolario 4.8 (Teorema de Blaschke para superficies minimales).** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal embebida no totalmente geodésica invariante por un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$  tal que  $M/G$  es una superficie compacta y orientable.*

*Entonces  $M$  tiene un entorno tubular embebido de radio:*

$$c = c(M) = 1 / \max \{ \text{curvaturas principales positivas de } M \},$$

*es decir, la aplicación exponencial normal  $F : M \times (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un difeomorfismo local inyectivo.*

*Demostración:* Por ser  $M$  minimal y  $M/G$  compacta, concluimos utilizando el principio del máximo que  $M$  es conexa y, por tanto, que  $M/G$  es conexa. La orientabilidad de  $M/G$  y la conexión de  $M$  implican que  $M/G$  separa a  $\mathbb{R}^3/G$ . Por tanto, si  $\nu : M \rightarrow S^2$  es una aplicación de Gauss  $G$ -equivariante, tanto  $\nu$  como  $-\nu$  están en las hipótesis del teorema 4.3 y, puesto que los “semientornos tubulares” están contenidos en diferentes componentes  $G$ -invariantes de  $\mathbb{R}^3 \setminus M$ , la demostración se concluye.

□

**Teorema 4.9 (Cotas locales del área).** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie embebida no totalmente geodésica con curvatura media no negativa invariante por un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$  tal que  $M/G$  es una superficie compacta orientable que separa a  $\mathbb{R}^3/G$ . Supongamos que la segunda forma fundamental de  $M$  es uniformemente acotada,  $|\sigma| < C$ .*

Entonces, para todo  $R$  tal que  $0 < R < \frac{1}{C}$ , tenemos que:

$$\text{área}(M_R) \leq 36\pi R^2,$$

donde  $M_R = M \cap B_R$ , y  $B_R$  es una bola euclídea de radio  $R$ .

*Demostración:* Consideremos la aplicación exponencial normal  $F : M \times [0, c(M)) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que es un difeomorfismo local inyectivo por el teorema 4.5. Se sigue fácilmente que  $\frac{R}{2} < c(M)$  y, por tanto,  $F$  aplica  $M_R \times [0, \frac{R}{2})$  inyectivamente sobre una región  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^3$ . Por la fórmula de cambio de variables

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^{R/2} \left\{ \int_{M_R} (1 - tk_1)(1 - tk_2) dA \right\} dt,$$

donde  $k_i$  son las curvaturas principales de  $M$  y  $(1 - tk_1)(1 - tk_2)$  es el Jacobiano de la aplicación  $F$ . Puesto que  $0 \leq t \leq \frac{R}{2}$  y  $k_1, k_2 \leq C$  tenemos que el volumen de  $\Omega$  es mayor o igual que:

$$\int_0^{R/2} \left\{ \int_{M_R} \left(1 - \frac{R}{2}C\right)^2 dA \right\} dt.$$

Como  $\frac{R}{2}C \leq \frac{1}{2}$ , la última integral es menor o igual que:

$$\int_0^{R/2} \int_{M_R} \frac{1}{4} dA = \frac{R}{8} \text{área}(M_R),$$

y concluimos que  $\text{vol}(\Omega) \geq \frac{R}{8} \text{área}(M_R)$ .

El teorema se sigue del hecho de que  $\Omega$  está contenida en una bola euclídea de radio  $\frac{3}{2}R$  y, por tanto,  $\text{vol}(\Omega) \leq \frac{9}{2}\pi R^3$ . Para comprobar esto, tomamos  $p \in \Omega$ . Entonces  $d(p, M_R) < \frac{R}{2}$  y la distancia entre el centro de  $B_R$  y  $p$  es menor que  $\frac{3}{2}R$ .  $\square$

**Nota.** Utilizando la misma idea podemos estimar el volumen de la región  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^3/G \setminus M/G$  que es la proyección de la región  $G$ -invariante de  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  hacia la que apunta el vector curvatura media, y obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &\geq \int_0^{c(M)} \left\{ \int_{M/G} (1 - tk_1)(1 - tk_2) dA \right\} dt = \\ &= c(M) \text{área}(M/G) - c(M)^2 \int_{M/G} H dA + \frac{c(M)^3}{3} 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Recordemos que el lema 4.2 y el teorema 4.3 implican que si una variedad llana  $\mathbb{R}^3/G$ , con  $G \in \mathcal{G}$ , admite una superficie compacta y orientable embebida con curvatura media constante y género mayor que uno, entonces  $\text{rango}(\Gamma(G)) \geq 2$ , es decir,  $G$  no es cíclico. En particular, tales grupos  $G$  determinan un número finito de clases afines de conjugación. Antes de demostrar el principal resultado de convergencia necesitaremos el siguiente lema:

**Lema 4.10.** *Sea  $\mathcal{A}$  una clase afín de conjugación de subgrupos en  $\mathcal{G}$ . Consideremos una sucesión  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de superficies conexas embebidas en  $\mathbb{R}^3$  tales que la superficie  $M_n$  es  $G_n$ -invariante para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $M_n/G_n$  son superficies compactas. Supongamos que  $G_n \rightarrow G \in \mathcal{G}$  y que  $M_n$  converge a una superficie propiamente inmersa  $M$  que es invariante por  $G$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $M/G$  es compacta.*

*Entonces  $G \in \mathcal{A}$  y  $\mathbb{R}^3/G_n$  es afínmente difeomorfo a  $\mathbb{R}^3/G$ .*

*Demostración:* Llamemos  $\Gamma$  a  $\Gamma(G)$ . Por el lema 4.2 tenemos que  $\Gamma(G_n) \rightarrow \Gamma$  y, puesto que  $\text{orden}(G_n/\Gamma(G_n)) \leq 6$ , se sigue que  $\text{orden}(G/\Gamma(G)) \leq 6$  y, por tanto,  $M/\Gamma$  es compacta.

De nuevo por el lema 4.2 es suficiente probar que  $\text{rango}(\Gamma) = \text{rango}(\Gamma_n)$ . Supongamos, razonando por contradicción, que  $\text{rango}(\Gamma) < \text{rango}(\Gamma_n)$ .

Sea  $\{w^i\}_{i \in I}$  un base de  $\Gamma$  y  $V$  el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  generado por  $\{w^i\}_{i \in I}$ . Tenemos que  $\dim(V) < \text{rango}(\Gamma(G_n)) \leq 3$ . Tomemos vectores  $w_n^i \in \Gamma(G_n)$  que converjan a los vectores  $w^i$  y llamemos  $V_n$  al espacio vectorial generado por  $\{w_n^i\}_{i \in I}$ . Estos vectores generan un subgrupo discreto  $\Gamma'_n$  tal que  $V_n/\Gamma'_n$  es compacto. Sea  $S_n(r)$ , con  $r > 0$ , la esfera centrada en el origen de radio  $r$  en el subespacio  $V_n^\perp$  ortogonal a  $V_n$ . Supongamos que  $M$  contiene el origen de  $\mathbb{R}^3$ . Puesto que  $\text{rango}(\Gamma(G_n)) > \dim(V_n)$ , tenemos que  $\Gamma(G_n) \not\subset V_n$  y, por ser  $M_n$  conexo y  $\Gamma(G_n)$ -invariante, concluimos que las superficies  $M_n$  cortan a  $S_n(r) \times V_n$  para todo  $r > 0$ .

Moviendo estos puntos por medio de los vectores en  $\Gamma'_n$  y utilizando la compacidad de  $V_n/\Gamma'_n$  y que  $\Gamma'_n \rightarrow \Gamma$ , obtenemos que la superficie  $M$  corta a  $S(r) \times V$  para todo  $r > 0$ , donde  $S(r)$  es la esfera de radio  $r$  en  $V^\perp$ . Entonces  $M/\Gamma$  corta a todas las superficies  $S(r) \times (V/\Gamma)$  y, por tanto, es necesariamente no compacta. Esta contradicción prueba el lema.

□

El principal resultado de convergencia de esta sección es:



**Teorema 4.11.** *Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies embebidas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante invariantes por subgrupos discretos  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ , donde  $\mathcal{A}$  es una clase afín de conjugación en  $\mathcal{G}$  cuyos elementos no son cíclicos. Supongamos que  $M_n/G_n$  son superficies compactas conexas con género mayor que uno y segundas formas fundamentales uniformemente acotadas,  $|\sigma| < C$ .*

*Entonces podemos extraer una subsucesión de  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$  y, si la sucesión  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene un punto de acumulación, entonces podemos extraer una subsucesión convergente en la topología  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , a una superficie  $G$ -invariante propia y débilmente embebida  $M$  con curvatura media constante. Además:*

- (i) *Si la multiplicidad de  $M$  es mayor que uno entonces  $M$  es una superficie minimal con multiplicidad dos.*
- (ii) *Si  $M/G$  es compacta y las superficies  $M_n$  son conexas entonces la multiplicidad de  $M$  es uno,  $M_n/G_n$  son afínmente difeomorfas a  $M/G$  para  $n$  suficientemente grande, y  $\mathbb{R}^3/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$  son afínmente difeomorfas.*
- (iii) *Si todas las superficies  $M_n$  son minimales entonces  $M$  es embebida con multiplicidad uno.*

*Demostración:* Sabemos por el teorema 4.9 que si  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en las condiciones del teorema, la estimación uniforme de la curvatura  $|\sigma_n| < C$  implica un cota local uniforme del área para la sucesión. Podemos entonces extraer una subsucesión convergente de  $M_n$  a una superficie con curvatura media constante  $M$  que está débilmente embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Puesto que los radios de inyectividad  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n)$  son mayores que  $\frac{1}{6C}$  por el corolario 4.6, podemos también extraer una subsucesión convergente de los subgrupos  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$ , por el lema 4.2.

Sea  $p \in M$ . Como  $M$  es límite de superficies embebidas, solo puede tener autointersecciones tangenciales, por tanto, la intersección de  $M$  con una bola  $B$  de radio suficientemente pequeño centrado en  $p$  es la unión de uno o varios grafos que se cortan tangencialmente en  $p$ . Cada uno de estos grafos es el límite de una o varias componentes de  $M_n \cap B$ . Como todas las superficies  $M_n$  admiten por el teorema 4.5 un "semientorno tubular" de radio  $1/C$  en la región del complemento de la superficie hacia la que apunta el vector normal, entonces  $M_n \cap B$  tiene como máximo dos componentes conexas. A partir de la convergencia  $C^k$  de  $M_n$  a la superficie  $M$  deducimos que  $M \cap B$  consiste en, o bien dos hojas distintas que se cortan tangencialmente en  $p$  (por el principio del máximo esto solamente ocurre

cuando la superficie límite  $M$  no es minimal), o  $M \cap B$  es embebida y es el límite de una o dos componentes de  $M_n \cap B$ . Si  $M \cap B$  es el límite de dos componentes de  $M_n \cap B$ , estas inducen en  $M \cap B$  vectores normales opuestos y, por tanto, la curvatura media de  $M \cap B$  debe ser invariante por un cambio del normal, i.e., la superficie límite  $M$  es minimal. Esto prueba (i).

Ahora probamos (ii). Supongamos, razonando por contradicción, que la multiplicidad de  $M/G$  es dos. Por (i) la superficie  $M/G$  es minimal. Por el lema 4.10 tenemos que la variedad límite  $\mathbb{R}^3/G$  es afínmente difeomorfa a  $\mathbb{R}^3/G_n$  y, por tanto, por el lema 4.2, podemos encontrar una sucesión de transformaciones afines de  $\mathbb{R}^3$  que convergen a la identidad, e inducen difeomorfismos  $f_n : \mathbb{R}^3/G_n \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ . Para  $n$  suficientemente grande, utilizando la compacidad de las superficies  $M_n/G_n$  y  $M/G$ , obtenemos revestimientos de dos hojas  $\Pi_n : M_n/G_n \rightarrow M/G$  que inducen sobre los puntos de  $M/G$  orientaciones opuestas, lo que implica que  $M/G$  es no orientable, y tales que las dos aplicaciones:

$$\begin{aligned} M_n/G_n &\xrightarrow{\Pi_n} M/G \rightarrow \mathbb{R}^3/G \\ M_n/G_n &\rightarrow \mathbb{R}^3/G_n \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^3/G \end{aligned}$$

determinan el mismo morfismo entre los grupos fundamentales. La segunda aplicación induce un morfismo sobreyectivo entre los grupos fundamentales de  $M_n/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$  por hipótesis. La primera es topológicamente equivalente a la composición de la proyección del revestimiento de orientación de dos hojas de  $M/G$  con el embebimiento  $M/G \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ , que nunca induce un morfismo sobreyectivo entre los grupos fundamentales (en caso contrario, tomando imagen inversa a  $\mathbb{R}^3$ , obtendríamos que el revestimiento de orientación de dos hojas de  $M$  sería conexo, lo que es imposible porque  $M$  es propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ ). Esta contradicción prueba que la multiplicidad de  $M$  es uno. Puesto que  $M_n/G_n \rightarrow M/G$  con multiplicidad uno y todas las superficies son compactas, se sigue fácilmente que  $M_n/G_n$  y  $M/G$  son difeomorfas. Esto completa la demostración de (ii).

Si todas las superficies  $M_n$  son minimales, el corolario 4.8 demuestra que existe un entorno tubular de radio  $1/C$  para cada  $M_n$  y, por tanto,  $M \cap B$  es embebida y es el límite de una sucesión de componentes de  $M_n \cap B$ , lo que prueba (iii).

□

**Nota.** Los argumentos en la demostración de (ii) demuestran lo siguiente: si  $G \in \mathcal{A}$  y la superficie límite  $M/G$  es compacta con multiplicidad dos, entonces

$M/G$  es una superficie minimal no orientable. Por supuesto, en este caso las superficies  $M_n$  son no conexas.

Hacemos notar que, en general, para los límites obtenidos en el anterior teorema, ni el tipo topológico de las superficies  $M_n/G_n$  ni la clase afín de difeomorfismo de las variedades ambiente  $\mathbb{R}^3/G_n$  se conserva en el paso al límite.

### 4.3 Superficies minimales con índice uno

El propósito de este apartado es probar la compacidad del espacio de superficies minimales embebidas triplemente periódicas que inducen superficies minimales embebidas con índice uno en un toro llano no necesariamente fijo. Para superficies minimales simple y doblemente periódicas este resultado de compacidad no es cierto. En otras variedades llanas el problema continua abierto. Recordemos que las únicas superficies minimales compactas y embebidas con índice uno que no están contenidas en un toro llano tridimensional tienen género dos o son de género tres y no hiperelípticas por el teorema 3.8. Las posibles restantes superficies compactas orientables y embebidas con índice uno, es decir, superficies de géneros cuatro o cinco y superficies de género tres hiperelípticas, deben estar embebidas en un toro llano tridimensional.

**Teorema 4.12 (Compacidad del espacio de superficies minimales con índice uno).** *Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  invariantes por retículos (i.e., subgrupos discretos de traslaciones de rango tres en  $\mathbb{R}^3$ )  $\Gamma_n$  normalizados de modo que el radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$  sea uno. Supongamos que  $M_n/\Gamma_n$  es una superficie compacta orientable con índice uno en  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$ . Entonces:*

- (i) *Podemos extraer una subsucesión convergente de  $\Gamma_n$  a un retículo  $\Gamma$ .*
- (ii) *Podemos extraer una subsucesión, que denotaremos igual, de  $M_n$  convergente en la topología  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , a una superficie minimal  $M$  triplemente periódica y embebida  $\Gamma$ -invariante con índice uno. En particular, las superficies  $M_n/\Gamma_n$  y  $M/\Gamma$  son difeomorfas y  $M_n/\Gamma_n \rightarrow M/\Gamma$ .*

*Demostración:* Las superficies compactas  $M_n/\Gamma_n$  son no llanas por tener índice uno, y son necesariamente conexas. Como el tipo topológico de  $M_n/\Gamma_n$  es menor

o igual que cinco, podemos suponer que su género es constante. Es bien conocido que su género debe ser mayor o igual que tres.

Probaremos en primer lugar que  $|\sigma_n| < C$  para alguna constante  $C > 0$ . Si no, existiría una sucesión  $p_n \in M_n$  tal que  $\lambda_n = \max_{p_n \in M_n} |\sigma_n| = |\sigma_n|(p_n) \rightarrow \infty$ . Trasladando los puntos  $p_n$  al origen y expandiendo las superficies  $M_n$  por medio de una homotecia de razón  $\lambda_n$  obtenemos una sucesión de superficies minimales embebidas  $\widetilde{M}_n$  tales que  $|\widetilde{\sigma}_n|(0) = 1$  y  $|\widetilde{\sigma}_n| \leq 1$ . Por el teorema 4.11, una subsucesión de  $\widetilde{M}_n$ , que denotaremos igual, converge en la topología  $C^k$  a una superficie minimal propiamente embebida y no llana  $\widetilde{M}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Por nuestra hipótesis sobre el radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$  (que coincide con la mínima longitud de los vectores no nulos de  $\Gamma_n$ ), se sigue que el único punto de acumulación de los retículos  $\lambda_n\Gamma_n$  es el vector 0.

Como  $\widetilde{M}$  no es totalmente geodésica, debe ser conexa. Las regiones compactas de  $\widetilde{M}$  se pueden aproximar uniformemente por regiones en  $\widetilde{M}_n/\lambda_n\Gamma_n$ , y, por tanto, el índice de la superficie  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$  es menor o igual que uno. Como  $\text{Ind}(\widetilde{M}) = 0$  implicaría que  $\widetilde{M}$  es totalmente geodésica, concluimos que  $\text{Ind}(\widetilde{M}) = 1$ . Por tanto  $\widetilde{M}$  es la catenoide, [LR]. Puesto que  $\text{género}(M_n/\Gamma_n) \geq 3$ , se sigue que la curvatura total de  $M_n/\Gamma_n$  es menor o igual que  $-8\pi$ . Como la curvatura total de  $\widetilde{M}$  es  $-4\pi$ , contradecimos la afirmación 4.1 y concluimos que  $|\sigma_n|$  es uniformemente acotada.

**Afirmación 4.1.** *La curvatura total de  $M_n/\Gamma_n$  es la misma que la de  $\widetilde{M}$ .*

La superficie  $\widetilde{M}$  es conformemente la esfera de Riemann  $\Sigma$  menos dos puntos  $p_1, p_2$  y, por tanto,  $\widetilde{M} = \Sigma \setminus \{p_1, p_2\}$ . Sean  $(D_i, z_i)$  discos conformes en  $\Sigma$  centrados en  $p_i$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$  y sea  $\Omega(\varepsilon)$  el dominio acotado  $\Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^2 \{z_i \in D_i; |z_i| < \varepsilon\}$ . Podemos elegir  $\varepsilon$  suficientemente pequeño de modo que  $\text{Ind}(\Omega(\varepsilon)) = 1$ . Consideramos sobre el dominio acotado  $\Omega(\varepsilon^2)$ , que contiene a  $\Omega(\varepsilon)$ , la función  $u_\varepsilon$  definida por:

$$u_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{en } \Omega(\varepsilon), \\ \frac{\log(|z_i|/\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}, & \text{en } z_i \in D_i, \varepsilon^2 \leq |z_i| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la energía de  $u_\varepsilon$  tiende a 0.

Como  $\Omega(\varepsilon^2)$  se puede aproximar uniformemente por regiones en  $\widetilde{M}_n/\lambda_n\Gamma_n$  y tanto el índice de  $I$  como la integral de Dirichlet son invariantes por homotecias, podemos encontrar sobre las superficies  $M_n/\Gamma_n$ , para  $n$  suficientemente grande que depende de  $\varepsilon$ , un dominio  $A_n$ , un subdominio  $A'_n \subset A_n$  y una función  $u_n$  definida en  $A_n$  tal que  $u_n = 0$  en  $A'_n$ ,  $u_n = 1$  en  $\partial A_n$  tales que, después de

aplicar una homotecia de razón  $\lambda_n$ , los objetos  $A_n$ ,  $A'_n$  y  $u_n$  estén uniformemente próximos a  $\Omega(\varepsilon^2)$ ,  $\Omega(\varepsilon)$  y  $u_\varepsilon$ , respectivamente. Más aún, podemos suponer que  $\text{Ind}(A'_n) = 1$ , y que la energía total de  $u_\varepsilon$  es  $O_1(\varepsilon)$ , donde  $O_i(\varepsilon)$  denotará una función convergente a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La función  $u_n$  se puede extender en  $M_n/\Gamma_n$  por 1 fuera de  $A_n$  para obtener una función Lipschitziana  $v_n$  con soporte contenido en el complemento de  $A_n$ . Como los índices de  $M_n/\Gamma_n$  y  $A'_n$  son uno, concluimos que  $\text{Ind}(M_n/\Gamma_n - A'_n) = 0$ . En particular, puesto que  $\text{supp}(v_n)$  está contenido en  $M_n/\Gamma_n - A'_n$ , la forma índice aplicada a  $v_n$  debe ser no negativa y, por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{M_n/\Gamma_n} \{|\nabla v_n|^2 + 2K_n v_n^2\} \\ &\leq \int_{M_n/\Gamma_n} |\nabla u_n|^2 + 2 \int_{\{v_n \equiv 1\}} K_n \\ &= O_1(\varepsilon) + 2 \int_{M_n/\Gamma_n} K_n - 2 \int_{A_n} K_n, \end{aligned}$$

donde  $K_n$  es la curvatura de Gauss de  $M_n$ . Como la curvatura total finita de  $\widetilde{M}$  está próxima a la de  $\Omega(\varepsilon^2)$ , tenemos que  $\int_{\widetilde{M}} \widetilde{K} = \int_{A_n} K_n + O_2(\varepsilon)$ , donde  $\widetilde{K}$  es la curvatura de Gauss de  $\widetilde{M}$ . Combinando esta fórmula con la desigualdad anterior, concluimos que:

$$\int_{M_n/\Gamma_n} |K_n| \leq \int_{\widetilde{M}} |\widetilde{K}| + O_3(\varepsilon).$$

Como las dos integrales en la desigualdad anterior son independientes de  $n$  y  $\varepsilon$ , se sigue que:

$$\int_{M_n/\Gamma_n} |K_n| \leq \int_{\widetilde{M}} |\widetilde{K}|.$$

La desigualdad opuesta se sigue de la semicontinuidad inferior de la curvatura total absoluta para la topología  $C^k$ , con  $k \geq 2$ . De este modo probamos la afirmación.

Por nuestra normalización, los retículos  $\Gamma_n$  no contienen vectores no nulos con longitud menor que uno y, por tanto, una subsucesión, que denotaremos igual, converge en el grupo euclídeo  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  a un subgrupo discreto  $\Gamma$  de traslaciones, ver el lema 4.2. Más aún,  $\Gamma \neq \{0\}$  porque cada  $\Gamma_n$  contiene vectores con longitud uno. Podemos elegir un sistema de generadores  $\{w_n^1, w_n^2, w_n^3\}$  de  $\Gamma_n$  para cada  $n$  tal que existe un subconjunto  $I \subset \{1, 2, 3\}$  y subsucesiones de  $\{w_n^i\}$  que convergen a  $w^i$  cuando  $i \in I$  y tal que  $\{w^i\}_{i \in I}$  son generadores de  $\Gamma$ . El conjunto  $I$  es no

vacío porque  $\Gamma \neq \{0\}$ . Ahora vamos a probar, razonando por contradicción, que  $\Gamma$  es un retículo en  $\mathbb{R}^3$ , i.e., que  $\text{rango}(\Gamma) = 3$ .

Supongamos que  $I \neq \{1, 2, 3\}$ . Trasladando adecuadamente las superficies  $M_n$  podemos suponer que todas las superficies  $M_n$  contienen el origen y que  $\max_{p \in M_n} |\sigma_n| = |\sigma_n|(0)$ . Hacemos notar que, por el corolario 4.6,  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/\Gamma_n) \geq \frac{c(M_n)}{6} \geq \frac{1}{6 \max |\sigma_n|}$ . Como  $|\sigma_n|$  es uniformemente acotado, una subsucesión de  $M_n$  converge por el teorema 4.11 en la topología  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , a una superficie minimal no llana propiamente embebida  $M$ , que es invariante por  $\Gamma$ . Más aún, como el índice es claramente semicontinuo para la topología  $C^k$ , concluimos que el índice de  $M/\Gamma$  es menor o igual que uno y, como  $M$  es no llano, tenemos que  $\text{Ind}(M/\Gamma) = 1$ .

Finalmente, como estamos suponiendo que  $\text{rango}(\Gamma) = 1, 2$ , concluimos por el corolario 3.11 que la curvatura total de  $M/\Gamma$  es  $-4\pi$ . Sin embargo, razonando como en la afirmación 4.1, probamos que la curvatura total de  $M_n/\Gamma_n$  coincide con la de  $M/\Gamma$ , lo que no es posible porque  $\text{género}(M_n/\Gamma_n) \geq 3$ . Esta contradicción prueba que  $\Gamma$  es un retículo. En particular,  $M/\Gamma$  es una superficie minimal compacta en el toro llano tridimensional  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  con el mismo tipo topológico de  $M_n/\Gamma_n$ , y  $M_n/\Gamma_n$  converge uniformemente  $C^k$ , para  $k \geq 2$ , a  $M/\Gamma$  por el teorema 4.11. □

**Nota.** Como consecuencia del teorema, obtenemos que la normalización del radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$  puede ser reemplazada por otras normalizaciones de invariantes geométricos de los toros ambientes o de las superficies. En particular, obtenemos el mismo resultado de compacidad fijando, o bien el área de las superficies o el volumen de los toros.

Ahora identificamos toros llanos homotéticos y consideramos el espacio de moduli. Entonces obtenemos:

**Corolario 4.13.** *El conjunto de toros llanos tridimensionales que admiten superficies minimales orientables y embebidas con índice uno es un subconjunto compacto del espacio de moduli.*

*Demostración:* Supongamos que no es cierto. Sea  $M_n/\Gamma_n \subset T_n^3 = \mathbb{R}^3/\Gamma_n$  una sucesión de superficies minimales orientables y embebidas con índice uno en toros

llanos tridimensionales  $T_n^3$  normalizados de tal modo que  $\text{iny}(T_n^3) = 1$ . Por el teorema 4.12 una subsucesión de  $T_n^3$  converge a un toro  $T^3$ .

□

Como el anterior espacio de moduli es no compacto, se sigue que la “mayoría” de los toros llanos tridimensionales no admiten superficies minimales orientables y embebidas con índice uno.

#### 4.4 Superficies estables

El propósito de este apartado es probar la compacidad del espacio de superficies conexas embebidas con curvatura media constante invariantes por un subgrupo discreto de isometrías de  $\mathbb{R}^3$  que inducen superficies orientables y estables en  $M/G$  de género mayor que uno. Recordemos que los resultados del capítulo 2 implican que una superficie de género cero es totalmente umbilical y estable y que los toros estables son necesariamente llanos. Para superficies de género mayor que uno no se conoce ningún resultado de clasificación, aunque los ejemplos de M. Ross [Ro] demuestran que no es razonable esperar un resultado de clasificación similar al obtenido en géneros cero o uno.

Ahora probamos el principal resultado de esta sección. Denotamos por  $\mathcal{A}$  una clase afín de conjugación en  $\mathcal{G}$  cuyos elementos no son subgrupos cíclicos. Recordemos que solo hay un número finito de dichas clases.

##### **Teorema 4.14 (Compacidad del espacio de superficies estables).**

*Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies conexas embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  y  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{A}$  normalizada de modo que  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n) = 1$ . Supongamos que  $M_n$  es invariante por  $G_n$  y tal que las superficies  $M_n/G_n$  son compactas, orientables y estables en  $\mathbb{R}^3/G_n$  con género fijo mayor que uno.*

*Entonces:*

- (i) *podemos extraer una subsucesión convergente de  $G_n$ , que denotaremos igual, a un subgrupo  $G \in \mathcal{A}$ , i.e.,  $\mathbb{R}^3/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$  son afínmente difeomorfos.*
- (ii) *Podemos extraer una subsucesión de  $M_n$ , que denotaremos igual, que converge, salvo traslaciones en  $\mathbb{R}^3$ , en la topología  $C^k$  a una superficie  $M$*

*conexa propia y débilmente embebida con curvatura media constante y  $G$ -invariante, con multiplicidad uno, en  $\mathbb{R}^3$  y tal que  $M/G$  es una superficie compacta estable en  $M_n/G_n$ .*

*Demostración:* Veamos primero que existe una constante  $C > 0$  tal que  $|\sigma_n| < C$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si no, existiría una sucesión  $p_n \in M_n$  tal que  $\lambda_n = \max_{p \in M_n} |\sigma_n| = |\sigma_n|(p_n) \rightarrow \infty$ . Trasladando los puntos  $p_n$  al origen, expandiendo las superficies  $M_n$  por medio de una homotecia de razón  $\lambda_n$  y pasando a una subsucesión si es preciso, obtenemos una sucesión de superficies propiamente embebidas con curvatura media constante  $\widetilde{M}_n$  que convergen en la topología  $C^k$  a una superficie propia y débilmente embebida con curvatura media constante no totalmente geodésica  $\widetilde{M}$  por el teorema 4.11. La superficie  $\widetilde{M}$  es orientable: de hecho, si  $\widetilde{M}$  fuera no orientable, su multiplicidad debería ser dos (en caso contrario, por el teorema 4.11  $\widetilde{M}$  tendría multiplicidad uno y en este caso la orientabilidad de  $\widetilde{M}_n/\lambda_n G_n$  implica la de  $\widetilde{M}$ ) y, de nuevo por el teorema 4.11,  $\widetilde{M}$  sería una superficie minimal propiamente inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , lo que es imposible. Como  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n) = 1$ , se sigue que el único punto de acumulación de la sucesión de subgrupos  $\{\lambda_n G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en el grupo de isometrías  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  es la identidad. Entonces regiones compactas en  $\widetilde{M}$  se pueden aproximar uniformemente por regiones en  $\widetilde{M}_n/\lambda_n G_n$  y, como la estabilidad se conserva por la convergencia  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , concluimos que  $\widetilde{M}$  es una superficie estable en  $\mathbb{R}^3$  y, por los resultados del capítulo 2, concluimos que  $\widetilde{M}$  es una esfera umbilical. Aplicando el lema 4.10 a las superficies  $\widetilde{M}_n$  y a los grupos  $\lambda_n G_n$  concluimos que la superficie  $\widetilde{M}$  es no compacta. Esta contradicción prueba que la sucesión  $|\sigma_n|$  es uniformemente acotada.

A partir de la normalización  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n) = 1$  se sigue que, pasando a una subsucesión, los subgrupos  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$ . Por el corolario 4.6, obtenemos que  $1 = \text{inj}(\mathbb{R}^3/G_n) \geq \frac{c(M)}{6} \geq \frac{1}{\max |\sigma_n|}$ . En consecuencia, trasladando adecuadamente las superficies  $M_n$  en  $\mathbb{R}^3$ , podemos suponer que una subsucesión de  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una superficie  $M$  propia y débilmente embebida con curvatura media constante no totalmente geodésica que es  $G$ -invariante. Afirmamos que  $M/G$  es compacta: de hecho, si  $M/G$  es orientable, entonces es estable y por tanto, es compacta por el teorema 2.4. Si  $M/G$  es no orientable, entonces su multiplicidad debe ser dos (en caso contrario, por el teorema 4.11  $M/G$  tendría multiplicidad uno y, como antes, la orientabilidad de  $M_n/G_n$  implicaría la de  $M/G$ ). Más aún, el revestimiento de orientación de dos hojas es estable y, por tanto, compacto y se sigue que  $M/G$  es compacta. Esto prueba nuestra afirmación.



Finalmente, concluimos de (ii) en el teorema 4.11 que  $G \in \mathcal{A}$ , que  $M_n/G_n$  y  $M/G$  son difeomorfos y que  $M_n/G_n \rightarrow M/G$  con multiplicidad uno.

□

**Nota.** No hay compacidad para el espacio de superficies estables embebidas de género uno. De hecho, si consideramos el cociente  $\mathbb{R}^3/T_v$ , donde  $T_v$  es el subgrupo generado por una traslación no trivial, los tubos alrededor de una geodésica cerrada en  $\mathbb{R}^3/T_v$  son superficies estables embebidas cuando el radio es suficientemente grande. Pero estos tubos, trasladados adecuadamente, convergen a un cilindro totalmente geodésico.

Hemos necesitado la conexión de las superficies  $M_n$  en el teorema anterior para probar la compacidad de las variedades ambiente  $\mathbb{R}^3/G_n$  y para asegurar que la superficie límite tiene multiplicidad uno. Si suprimimos estas hipótesis y tomamos las variedades ambientes en un conjunto compacto, utilizando los mismos argumentos, obtenemos un resultado similar. En particular, fijando la variedad ambiente, obtenemos:

**Teorema 4.15.** *Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  y  $G \in \mathcal{G}$  tal que las superficies  $M_n$  son invariantes por  $G$ . Supongamos que  $M_n/G$  son compactas, orientables y estables en  $\mathbb{R}^3/G$  con género  $(M_n/G) \geq 2$ .*

*Entonces podemos extraer una subsucesión convergente de  $M_n$ , que denotaremos igual, a una superficie propia y débilmente embebida con curvatura media constante  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que, o bien:*

- (i)  *$M/G$  una superficie estable y orientable difeomorfa a  $M_n/G$  para  $n$  suficientemente grande, o:*
- (ii)  *$M/G$  es una superficie minimal compacta con multiplicidad dos cuyo revestimiento de orientación es estable y difeomorfo a  $M_n/G$  para  $n$  suficientemente grande.*

La hipótesis en el teorema 4.14 sobre la conexión de las superficies  $M_n$ , que es equivalente a que la aplicación inducida por la inclusión  $M_n/G_n \subset \mathbb{R}^3/G_n$  entre los grupos fundamentales sea sobreyectiva, es siempre cierta si todas las superficies son no llanas y minimales. El siguiente lema nos proporciona otra situación en la que este resultado es cierto:

**Lema 4.16.** *Si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie propiamente embebida con curvatura media constante e invariante por un subgrupo de rango dos  $\Gamma$  de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$  y tal que  $M/\Gamma$  es una superficie compacta y conexa con género mayor que uno, entonces  $M$  es conexa.*

*Demostración:* Sea  $V$  el plano determinado por  $\Gamma$  y  $T$  el toro  $V/\Gamma$ . Por el principio de reflexión de Alexandrov podemos suponer que la superficie  $M/\Gamma$  es simétrica con respecto al toro totalmente geodésico  $T \times \{0\} \subset T \times \mathbb{R}$  y que es la unión de dos grafos sobre  $T \times \{0\}$ . Sea  $\psi : M/\Gamma \rightarrow T \times \mathbb{R}$  la inclusión y  $\Gamma' = \psi_*(\pi_1(M/\Gamma))$ . Entonces  $\text{rango}(\Gamma')$  debe ser dos: si no,  $M/\Gamma$  podría levantarse a  $\mathbb{R}^3/\Gamma'$  y, por tanto,  $\text{género}(M/\Gamma) = 0, 1$ . Sea  $T' = V/\Gamma'$ . El grupo  $\Gamma/\Gamma'$  es finito y tenemos un revestimiento riemanniano finito  $T' \times \mathbb{R} \rightarrow T \times \mathbb{R}$  tal que la imagen inversa de  $M/\Gamma$  es una colección finita de superficies conexas disjuntas  $M_1, \dots, M_k$  congruentes por traslaciones de  $\Gamma$  y cada una de ellas congruente a  $M/\Gamma$ . Si llamamos  $\Pi : T' \times \mathbb{R} \rightarrow T' \times \{0\}$  a la proyección sobre  $T'$  tenemos que todos los subconjuntos  $\Pi(M_i)$  son disjuntos. Más aún, los embebimientos  $\psi_i : M_i \rightarrow T' \times \mathbb{R}$  inducen, entre los grupos fundamentales, una aplicación sobreyectiva  $\psi_{i*} : \pi_1(M_i) \rightarrow \pi_1(T')$ .

La conexión de  $M$  es equivalente a la igualdad  $\Gamma' = \Gamma$ . Supongamos, razonando por contradicción, que  $\Gamma' \neq \Gamma$  y, por tanto, que  $k \geq 2$ . Puesto que el grupo fundamental de  $T' \times \mathbb{R}$  es abeliano, y  $\psi_{i*}$  es sobreyectiva, deducimos que el morfismo inducido por  $\psi_i$  entre los primeros grupos de homología es también sobreyectivo para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  y, puesto que  $\Pi$  induce un isomorfismo en homología, tenemos que  $\Pi \circ \psi_i$  induce entre los grupos de homología  $H_1(M_i, \mathbb{Z})$  y  $H_1(T', \mathbb{Z})$  una aplicación sobreyectiva. Entonces podemos tomar  $\alpha, \beta$  ciclos en  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente, tales que  $\Pi(\psi_1(\alpha))$  y  $\Pi(\psi_2(\beta))$  son representantes de una base  $H_1(T', \mathbb{Z})$ . Pero los últimos dos ciclos son disjuntos, lo que es imposible, porque el número de intersección de una base del primer grupo de homología de un toro de dimensión dos debe ser  $\pm 1$ . Esta contradicción prueba que  $M$  es conexo.

□

Identificamos variedades tridimensionales llanas, completas no compactas y orientables cuando sean homotéticas y consideramos el espacio de moduli. Obtenemos:

**Corolario 4.17.** *El conjunto de variedades de dimensión tres llanas, completas no compactas y orientables que admiten superficies orientables, estables y embebidas*

con género mayor que uno es compacto en el espacio de moduli.

*Demostración:* Sea  $M_n/G_n \subset \mathbb{R}^3/G_n$  una sucesión en las condiciones del corolario. Como  $\text{género}(M_n/G_n) \geq 2$  tenemos que  $\text{rango}(\Gamma(G_n)) \geq 2$  y, como  $\mathbb{R}^3/G_n$  es no compacto concluimos que  $\text{rango}(\Gamma(G_n)) = 2$ . Tenemos dos clases afines de difeomorfismo distintas en  $\mathbb{R}^3/G_n$  y podemos suponer, pasando a una subsucesión, que todas las variedades  $\mathbb{R}^3/G_n$  son del mismo tipo.

Si  $\mathbb{R}^3/G_n = T_n^2 \times \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $T_n^2$  es un toro llano bidimensional, entonces el lema 4.16 nos permite utilizar el teorema 4.14 para completar la demostración. Si todas las variedades  $\mathbb{R}^3/G_n$  están en la clase  $\mathcal{K}$  y, para una subsucesión, los morfismos inducidos entre los grupos fundamentales por las inclusiones son sobreyectivos, entonces concluimos de nuevo por el teorema 4.14 la existencia del límite.

Si  $\mathbb{R}^3/G_n \in \mathcal{K}$ , pero los morfismos inducidos entre los grupos fundamentales por las inclusiones no son sobreyectivos, consideramos revestimientos de dos hojas  $T_n^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3/G_n$ . Por el lema 4.16 la imagen inversa de  $M_n/G_n$  en  $T_n^2 \times \mathbb{R}$  no es conexa y, por tanto,  $M_n/G_n$  levanta a  $T_n^2 \times \mathbb{R}$ . Podemos extraer entonces una subsucesión convergente de  $T_n^2 \times \mathbb{R}$  y, por tanto, de  $\mathbb{R}^3/G_n$ . □

Como el anterior espacio de moduli no es compacto se sigue del corolario 4.17 y de los resultados del capítulo 2 que para la mayoría de las variedades de dimensión tres completas, llanas y orientables, las únicas superficies estables, compactas y orientables tienen género menor o igual que uno y, por los resultados del capítulo 2, son esferas totalmente umbilicales o toros llanos. En particular, los dominios isoperimétricos en la mayoría de estas variedades son bolas geodésicas, entornos tubulares de geodésicas cerradas y entornos tubulares de toros totalmente geodésicos.

## 4.5 Comentarios

Los resultados de compacidad que hemos probado demuestran que los espacios de superficies estables y superficies minimales con índice uno son pequeños en cierto sentido. Por ejemplo, se puede deducir de nuestros resultados que el número de clases de homotopía de superficies estables y minimales con índice uno en una

variedad completa y llana es finito. Hasta ahora, no se conocen resultados de existencia ni de superficies minimales con índice uno de género cuatro o cinco en toros llanos ni de superficies estables con género dos.

Los métodos que hemos usado no pueden utilizarse para probar la compacidad del espacio de superficies con curvatura media constante e índice uno. El estudio del comportamiento de la familia doblemente periódica de superficies embebidas con curvatura media constante  $\Sigma_2$  que se hará en el capítulo 6 parece sugerir que este espacio no es compacto en general.



## Capítulo 5

# Superficies estables con aplicación de Gauss

En este capítulo estudiamos propiedades de compacidad de superficies estables en cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones. Tales superficies poseen siempre aplicación de Gauss. La condición de estabilidad proporciona una cota uniforme de la energía de la aplicación de Gauss, lo que permite aplicar ciertos resultados de compacidad para aplicaciones armónicas con energía uniformemente acotada [Gr, Wo]. En nuestro caso podemos mejorar ligeramente dichos resultados para obtener a partir de la convergencia de las aplicaciones de Gauss la convergencia de las inmersiones. Los resultados que obtenemos son similares a los del capítulo 4.

## 5.1 Preliminares

Supongamos que  $M$  es una superficie compacta orientable de género mayor o igual que dos. Sea  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes en  $M$ , y  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de métricas hiperbólicas con curvatura de Gauss  $-1$  asociadas a las estructuras conformes. Si las longitudes de las geodésicas no homótopas a cero de las métricas hiperbólicas  $\nu_n$  están acotadas inferiormente por una constante positiva, existe una sucesión  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de difeomorfismos de  $M$  tal que una subsucesión de las métricas  $\{\sigma_n^* \nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una métrica hiperbólica  $\nu$ , ver los trabajos de Mumford [Mu] y de Tomi y Tromba [TT]. Si dichas longitudes no están acotadas inferiormente, existe una sucesión  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de difeomorfismos de  $M$  y una colección finita de curvas cerradas simples no homótopas a cero  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , que son geodésicas para las métricas hiperbólicas  $\sigma_n^* \nu_n$ , tales que las longitudes  $\ell_n(\gamma_i) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $i = 1, \dots, k$  y una subsucesión de  $\{\sigma_n^* \nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en compactos de  $M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$  a una métrica hiperbólica completa  $\nu_\infty$  en  $M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$ . Si  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$  son las componentes conexas de  $M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$  y

$J_\infty$  es la estructura conforme asociada a la métrica  $\nu_\infty$ , se tiene que cada abierto  $(\Omega_i, J_\infty)$ , es conforme a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}_i$  menos un número finito de puntos  $X_i \subset \bar{M}_i$ , ver el trabajo de Abikoff [Ab]. Denotaremos por  $M_i$  a la superficie  $\bar{M}_i \setminus X_i$ , y por  $f_i : \Omega_i \rightarrow M_i$  a un difeomorfismo conforme.

Supongamos que  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es una inmersión isométrica con curvatura media constante, donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$  y que  $\phi : M \rightarrow S^2$  es la aplicación de Gauss. La forma índice depende solo de  $\phi$ , y puede escribirse:

$$I(u) = \int_M \{|\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2\} dA. \quad (5.1)$$

Es conocido que la condición de estabilidad implica la siguiente restricción sobre la energía total de las aplicaciones de Gauss:

**Lema 5.1.** *Si  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es una inmersión isométrica estable con curvatura media constante, la energía de la aplicación de Gauss está acotada por una constante que sólo depende del género de la superficie.*

*Demostración:* Si el género de  $M$  es  $g$ , podemos encontrar una aplicación holomorfa  $\eta = (\eta_i) : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  de grado  $1 + [(1 + g)/2]$  ([GH]) y media nula ([LY]). Por estabilidad, tenemos:

$$0 \leq \sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla \eta_i|^2 - |\nabla \phi|^2 \eta_i^2,$$

y, por tanto, se tiene que  $E(\phi) \leq E(\eta) = 8\pi(1 + [(1 + g)/2])$ .

□

El lema 5.1 implica que las aplicaciones de Gauss de superficies compactas estables tienen energía uniformemente acotada. En estas condiciones, si suponemos que  $\phi_n : M \rightarrow S^2$  es una sucesión de aplicaciones armónicas con  $E_n(\phi_n) \leq A$ , es conocido el siguiente resultado, ver [SaU2]:

**Teorema 5.2.** *Si  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de aplicaciones  $J_n$ -armónicas con energía uniformemente acotada, entonces:*

- (i) Existe un conjunto finito  $X \subset M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$  tal que una subsucesión de las aplicaciones  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en compactos de  $M \setminus (\cup_{i=1}^k \gamma_i \cup X)$  a una aplicación armónica  $\phi$ .
- (ii) En cada punto  $p \in X$ , podemos construir una aplicación holomorfa  $\phi_p : S^2 \rightarrow S^2$  con energía acotada y no constante.
- (iii)  $E(\phi) + \sum_{p \in X} E(\phi_p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n(\phi_n)$ .

La demostración de (i) se sigue de nuestra reparametrización y del teorema 2.3 de [SaU2].

Veamos que ocurre en los puntos de  $X$ . Seguimos la demostración de Wolfson [Wo], ver también el artículo de Ros [Ros]. Si  $p \in X$ , sea  $\Omega$  un abierto simplemente conexo tal que  $\Omega \cap X = \{p\}$ . Sea  $z_n : \Omega \rightarrow D$  una sucesión de aplicaciones biyectivas holomorfas para la estructura  $J_n$  tal que  $z_n \rightarrow z_\infty$ , con  $z_\infty$  holomorfa para la estructura  $J_\infty$ . Sea  $\phi'_n = \phi_n \circ z_n^{-1}$ . Tenemos que  $\phi'_n$  es una sucesión de aplicaciones armónicas en  $D$  con energía acotada que converge uniformemente en compactos de  $D \setminus \{0\}$ , pero no converge en  $D$  a una aplicación armónica  $\phi$ . Existe entonces una sucesión  $p_n \in D$  tal que  $p_n \rightarrow 0$  y  $|\nabla \phi_n|_c^2(p_n) = \sup_D |\nabla \phi_n|_c^2 \rightarrow \infty$ , donde el módulo y el gradiente se miden con respecto a la métrica hiperbólica del disco unidad  $D$ :

$$ds_c^2 = \left( \frac{2}{1 - |z|^2} \right)^2 |dz|^2.$$

Componiendo con la isometría  $z \mapsto (z - p_n)/(1 - \bar{p}_n z)$  de la métrica  $ds_c^2$  podemos suponer que  $p_n = 0$  para todo  $n$ . Sea  $R_n = 2 |\nabla \phi'_n|_c(0)$ . En términos de la métrica euclídea del disco podemos escribir:

$$|\nabla \phi'_n|_e(0) = R_n \rightarrow \infty, \quad |\nabla \phi'_n|_e(z) \leq \frac{R_n}{1 - |z|^2},$$

para todo  $z \in D$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos una nueva sucesión de aplicaciones armónicas  $\phi''_n : D(R_n^{1/2}) \rightarrow S^2$  por medio de  $\phi''_n(z) = \phi'_n(z/R_n)$ . Entonces  $|\nabla \phi''_n|_e$  es uniformemente acotado en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$  y, tomando una subsucesión, podemos suponer que  $\{\phi''_n\}$  converge a una aplicación  $\phi_p : \mathbb{C} \rightarrow S^2$  armónica. Por las propiedades de  $\phi''_n$  tenemos que  $\phi_p$  satisface:

$$|\nabla \phi_p|_e(0) = 1, \quad |\nabla \phi_p|_e \leq 1.$$

Además,  $\phi_p$  tiene energía acotada, de modo que, por el teorema 3.6 de [SaU], extiende a una aplicación armónica, que denotaremos igual,  $\phi_p : S^2 \rightarrow S^2$  con energía acotada y no constante.



Por último, tenemos que (iii) se obtiene directamente de (i) y (ii).

## 5.2 Convergencia de inmersiones

Sea  $M$  una superficie compacta,  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes en  $M$ .  $\Omega \subset M$  un conjunto abierto. Supongamos que las estructuras conformes  $J_n$  convergen uniformemente sobre compactos de  $\Omega$  a una estructura conforme  $J$ . Sea  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de diferenciales cuadráticas holomorfas para las estructuras conformes  $J_n$ . Se tiene entonces:

**Proposición 5.3.** *Podemos encontrar una sucesión de números reales positivos  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que una subsucesión de  $\{\lambda_n \alpha_n\}$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a una diferencial cuadrática holomorfa no nula  $\alpha$  en  $\Omega$ .*

*Demostración:* En primer lugar vamos a construir una sucesión auxiliar  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones  $J_n$ -meromorfas que convergen en  $\Omega$  salvo un número finito de puntos a una función  $J$ -meromorfa no constante  $h$ .

Elegimos un punto  $p \in \Omega$  que no sea punto de Weierstrass para ninguna de las estructuras conformes  $J_n$ . Sea  $h_n : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una sucesión de funciones meromorfas para las estructuras conformes  $J_n$  con un único polo en  $p$  de orden  $\text{género}(M) + 1$ . Sea  $p_0 \in \Omega$  distinto de  $p$ . Podemos suponer que  $h_n$  tiene un cero en  $p_0$  sustituyendo  $h_n$  por  $h_n - h_n(p_0)$ . Sea ahora  $p_1 \in \Omega$  un punto que no sea cero ni punto de acumulación de los ceros de  $h_n$ . Podemos suponer que  $h_n(p_1) = 1$  sustituyendo  $h_n$  por  $h_n/h_n(p_1)$ .

Puesto que  $h_n$  es armónica y  $E_n(h_n) \leq 8\pi \text{grado}(h_n) = 8\pi(\text{género}(M) + 1)$ , aplicando el teorema 5.2, obtenemos un conjunto finito  $X \subset \Omega$  y una subsucesión de  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que seguiremos denotando igual, que converge uniformemente en compactos de  $\Omega \setminus X$  a una función  $J$ -meromorfa  $h$ . Afirmamos que  $h$  es una función meromorfa no constante: de hecho si  $p_1 \notin X$  por el lema 5.4, ya que en un entorno de  $p_1$  suficientemente pequeño no hay ceros ni polos de  $h_n$ . Si  $p_0 \in X$ , puesto que en un entorno de  $p_0$  se omite el valor  $\infty$ , de nuevo por el lema 5.4 se tiene que  $h \equiv \infty$  en un entorno de  $p_0$ , por tanto,  $h \equiv \infty$  en  $\Omega$ , lo que es imposible, ya que  $h(p_1) = 1$ . Entonces  $p_0 \notin X$ , y  $h(p_0) = 0$ , de lo que se deduce que  $h$  no es constante en  $\Omega$ .

Ahora probamos el enunciado de la proposición. Sea  $f_n = \alpha_n / (d'_{J_n} h_n)^2$ . Tenemos que  $f_n : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es una sucesión de aplicaciones  $J_n$ -meromorfas con grado acotado por  $(4g - 4) + 2(g + 2)$ , ya que dicho grado es acotado por la suma de los órdenes de los ceros de  $\alpha_n$  y de los polos de  $(d'_{J_n} h_n)^2$ . Si  $q \in \Omega$  no es límite de ceros ni de polos de  $f_n$  y elegimos  $\lambda_n > 0$  tal que  $\lambda_n |f_n(q)| = 1$ , tenemos, por el teorema 5.2, que una subsucesión de  $\lambda_n f_n$ , que denotaremos igual, converge salvo en un conjunto finito  $X'$  a una aplicación  $J$ -meromorfa  $f$  que no es idénticamente cero ni infinito, ya que  $q \notin X$  por el lema 5.4.

Tenemos entonces que  $\lambda_n \alpha_n = (\lambda_n f_n)(d'_{J_n} h_n)^2$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega \setminus (X \cup X')$  a una diferencial cuadrática  $J$ -holomorfa no nula  $\alpha$ . Como todas las diferenciales  $\alpha_n$  son holomorfas, se sigue que la convergencia  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  extiende a los puntos de  $X \cup X'$  por el lema 5.4.

□

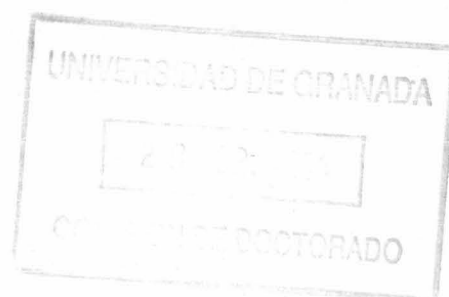
**Lema 5.4.** Sean  $D$  el disco unidad en  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $D^* = D \setminus \{0\}$ ,  $h_n : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una sucesión de funciones meromorfas que convergen a una función meromorfa  $h$  uniformemente en compactos de  $D^*$ , pero no en  $D$ .

Si  $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} h_n(D)$  entonces  $h_n \rightarrow a$  uniformemente en compactos de  $D^*$ . En particular,  $h_n$  contiene todos los valores de  $\overline{\mathbb{C}}$  excepto uno como máximo.

*Demostración:* Podemos suponer, componiendo con transformaciones de Möbius, que  $a = \infty$ . Entonces tenemos que  $h_n : M \rightarrow \mathbb{C}$  es una sucesión de funciones holomorfas. Como  $h_n \rightarrow h$  tenemos que, o bien  $h$  es holomorfa o bien  $h \equiv \infty$  en  $D^*$ . Si  $h$  es holomorfa, y  $D(\varepsilon)$  es un disco pequeño contenido en  $D$ , como  $h_n \rightarrow h$  en  $\partial D(\varepsilon)$ , se tiene, por el principio del módulo máximo, que  $\{|h_n|\}$  es uniformemente acotado en  $D(\varepsilon)$ , y y que  $h_n \rightarrow h$  en  $D$ , lo que no es posible. Por tanto,  $h \equiv \infty$  y hemos probado el lema.

□

Supongamos ahora que  $\psi_n : (M, J_n) \rightarrow \mathbb{R}^3 / \Gamma_n$  es una sucesión de inmersiones conformes con curvatura media constante,  $\phi_n : M \rightarrow S^2$  es la sucesión de aplicaciones de Gauss,  $g_n$  es la proyección estereográfica de las aplicaciones de Gauss y  $ds_n^2$  las métricas en  $\Omega$  inducidas por las inmersiones. Supongamos, como antes, que  $J_n \rightarrow J$  en  $\Omega$ .



**Teorema 5.5.** *Si  $\phi_n$  converge uniformemente  $C^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , en compactos de  $M$  a una aplicación armónica  $\phi$  no constante, se tiene:*

- (i) *existe una sucesión de números reales positivos  $\{\lambda_n\}$  tal que  $\lambda_n \psi_n$  converge a una inmersión multivaluada  $J$ -conforme  $\psi$  con curvatura media constante y aplicación de Gauss  $\phi$ .*
- (ii) *Si todas las inmersiones  $\psi_n$  están libres de puntos de ramificación, también lo está  $\psi$ .*
- (iii) *Si  $ds^2$  es la métrica inducida por la inmersión  $\psi$  entonces una subsucesión de  $\{\lambda_n ds_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a  $ds^2$ .*

*Demostración:* (i) Si  $\phi$  no es antiholomorfa, entonces  $\phi_n$  no es antiholomorfa a partir de un índice suficientemente grande. Por tanto  $g_n$  no es meromorfa y, como  $g$  es no constante, tenemos que  $d''_{J_n} g_n \neq 0$ . Entonces:

$$H_n d\psi_n = -\Re \left( H_n(1 - g_n^2, i(1 + g_n^2), 2g_n) \frac{-2\overline{d''_{J_n} g_n}}{H_n(1 + |g_n|^2)} \right),$$

converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a:

$$d\psi = -\Re \left( (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \frac{-2\overline{d''_J g}}{(1 + |g|^2)} \right).$$

En el caso de que  $\phi$  sea antiholomorfa, aplicamos la proposición anterior a las diferenciales de Hopf  $\alpha_n$  y encontramos una sucesión de números reales positivos  $\lambda_n$  tales que  $\lambda_n \alpha_n$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a una diferencial cuadrática  $J$ -holomorfa  $\alpha$ . Como  $\phi$  es no constante y  $g$  es meromorfa, tenemos que  $d'_J g \perp \equiv 0$  y:

$$\lambda_n d\psi_n = -\Re \left( (1 - g_n^2, i(1 + g_n^2), 2g_n) \frac{\lambda_n \alpha_n}{d'_{J_n} g_n} \right),$$

converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a:

$$d\psi = -\Re \left( (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \frac{\alpha}{d'_J g} \right),$$

- (ii) Se sigue inmediatamente de (i).

(iii) Los puntos de ramificación de las inmersiones  $\lambda_n \psi_n$  se corresponden con los ceros de las 1-formas complejas de tipo  $(1, 0)$   $\omega_n = \lambda_n \alpha_n / d'_{J_n} g_n$ . Si  $p \in \Omega$ , y  $\Omega'$  es un abierto simplemente conexo que contiene a  $p$ , y  $z_n, z$  son aplicaciones holomorfas biyectivas de  $(\Omega', J_n), (\Omega', J)$ , respectivamente, en el disco unidad  $D \subset \mathbb{C}$  tales que  $z_n(p) = 0, z(p) = 0$  y  $z_n \rightarrow z$  en  $C^\infty(\Omega, D)$ . Para estudiar la ramificación de las inmersiones en  $p$ , basta considerar la ramificación de las inmersiones  $\psi_n \circ z_n^{-1}, \psi \circ z^{-1}$  en 0. Sean  $\omega_n, \omega$  las 1-formas de Weierstrass de las inmersiones  $\psi_n \circ z_n^{-1}, \psi \circ z^{-1}$ . Por los resultados de [EW] o [SY], los ceros de dichas 1-formas son aislados. Si  $\gamma$  es una curva diferenciable simple contenida en  $D$  que rodea a 0 y no contiene ceros de  $\omega_n$  ni de  $\omega$ .

Como localmente  $\omega_n = f_n dw$ , y  $\psi_n$  no tiene puntos de ramificación, tenemos que  $f_n$  no tiene ceros en ningún punto. Como  $\omega_n \rightarrow \omega$  y  $z_n \rightarrow z$  uniformemente en  $D$ , tenemos que  $d(\log f_n) = df_n/f_n \rightarrow df/f$  en  $\gamma$ . Integrando  $d(\log f_n)$  en  $\gamma$  y pasando al límite obtenemos que  $\psi$  no tiene punto de ramificación en  $p$ . □

### 5.3 Compacidad de las aplicaciones de Gauss

Basándonos en el teorema (5.2), podemos demostrar el siguiente resultado para aplicaciones de Gauss asociadas a inmersiones estables con curvatura media constante:

**Teorema 5.6.** *Sea  $\psi_n : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_n$  una sucesión de inmersiones isométricas estables no ramificadas de una superficie orientable compacta de género mayor o igual que dos en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto de traslaciones  $\Gamma_n$ .*

*Entonces podemos encontrar una sucesión de difeomorfismos  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:*

- (i) *Una subsucesión de las estructuras conformes  $\{\sigma_n^* J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una estructura conforme  $J$  en  $M$ .*
- (ii) *Una subsucesión de las aplicaciones de Gauss  $\{\sigma_n^* \phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una aplicación armónica  $\phi : M \rightarrow S^2$ .*

**Corolario 5.7.** *En particular, el espacio de estructuras conformes que admiten inmersiones conformes estables con curvatura media constante es compacto.*

**Nota.** En el caso género( $M$ ) = 0, se tiene siempre que  $M \cong S^2$  y que  $\phi$  es la identidad, ya que cualquier inmersión de curvatura media constante de una esfera es totalmente umbilical. Dichas inmersiones son todas estables.

En el caso de género( $M$ ) = 1 no se tiene compacidad. Para todo  $R > 0$ , sea  $T_R$  el toro cociente de  $\mathbb{R}^2$  por los vectores  $(2\pi R, 0)$ ,  $(0, 2\pi)$ ,  $v$  el vector de  $\mathbb{R}^3$   $(0, 0, 2\pi)$ , y  $\psi_R : T_R \rightarrow \mathbb{R}^3 / \langle v \rangle$  la inmersión isométrica de curvatura media constante dada por:

$$\psi_R(x, y) = (R \cos(x/R), R \operatorname{sen}(x/R), y).$$

La aplicación de Gauss de dichas inmersiones es:

$$\phi_R(x, y) = (\cos(x/R), \operatorname{sen}(x/R), 0).$$

El operador de Jacobi de dichas inmersiones es  $\Delta + 1/R^2$ . La inmersión  $\psi_R$  es estable si y solo si  $R \geq 1$ . La energía de las aplicaciones de Gauss es:

$$E_R(\phi_R) = \int_0^{2\pi R} \int_0^1 \frac{1}{R^2} dx dy = \frac{2\pi}{R} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

Si suprimimos de  $T_R$  una pequeña banda cerrada de anchura  $\varepsilon R$  alrededor de la recta  $y = 2\pi R$ , la imagen del abierto que obtenemos es conforme por la aplicación  $z \mapsto \exp(z - \pi R)$  al anillo  $\{z \in \mathbb{C}; \exp((-\pi + \varepsilon)R) < |z| < \exp((\pi - \varepsilon)R)\}$ , y la aplicación de Gauss sobre este anillo es:

$$\phi_R(w) = (\cos(\pi + \log |w|/R), \operatorname{sen}(\pi + \log |w|/R), 0).$$

De modo que las estructuras conformes de los toros convergen a una esfera y las aplicaciones de Gauss convergen a la aplicación constante  $\psi(w) = (-1, 0, 0)$ .

*Demostración:* Reparametrizando las inmersiones, podemos suponer que existe un conjunto finito  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , eventualmente vacío, de curvas cerradas simples en  $M$ , tales que  $J_n \rightarrow J_\infty$  uniformemente  $C^k$  en compactos de  $M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$ . Aplicando el lema 5.1 y el teorema 5.2, obtenemos un conjunto finito  $X \subset M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$ , tal que una subsucesión de las aplicaciones de Gauss  $\phi_n$ , que seguiremos denotando igual, converge uniformemente en compactos de  $M \setminus (\cup_{i=1}^k \gamma_i \cup X)$  a una aplicación armónica  $\phi$ .

Para concluir la demostración del teorema solo necesitamos probar que el conjunto de curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  es vacío, lo que implica la compacidad de las estructuras conformes, y que el conjunto de puntos  $X$  es vacío, lo que implica la compacidad de la sucesión  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Probamos esto, razonando por contradicción, demostrando que los siguientes tres casos no son posibles.

**Caso 1.** El conjunto  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  es no vacío y  $\phi$  no es constante en alguna componente conexa  $\Omega_i$ .

La superficie  $(\Omega_i \setminus X, J)$  es una superficie de Riemann compacta  $\bar{\Omega}_i$  menos un número finito de puntos. Denotamos por  $\phi$  la límite de la sucesión  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\Omega_i$  que extiende a una aplicación armónica en  $\bar{\Omega}_i$ .

**Afirmación 5.1.**  $E_n(\phi_n|_{M \setminus \Omega_i}) \rightarrow 0$ .

*Demostración:* (de la afirmación).

Elegimos en cada punto  $p \in \bar{\Omega}_i \setminus \Omega_i$  un disco punteado  $J$ -conforme  $(D_p^*, z)$  centrado en  $p$ . Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño definimos:

$$u_\varepsilon = \begin{cases} 0, & (M \setminus \Omega_i) \cup (\cup_p D_p(\varepsilon^2)), \\ \log(|z|/\varepsilon^2)/\log(1/\varepsilon), & \varepsilon^2 \leq |z| \leq \varepsilon, \\ 1, & \Omega_i \setminus \cup_p D_p(\varepsilon), \end{cases}$$

$$v_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \Omega_i \setminus \cup_p D_p(\varepsilon^2), \\ \log(|z|/\varepsilon^2)/\log(\varepsilon), & \varepsilon^3 \leq |z| \leq \varepsilon^2, \\ 1, & (M \setminus \Omega_i) \cup (\cup_p D_p(\varepsilon^3)). \end{cases}$$

Las funciones  $u_\varepsilon$  y  $v_\varepsilon$  tienen soportes disjuntos y tenemos que  $\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 dA$  y  $\int_M |\nabla v_\varepsilon|^2 dA$  converge a 0 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Podemos tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño de modo que  $\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 - |\nabla \phi|^2 u_\varepsilon^2 dA < 0$ . Como  $J_n \rightarrow J$ ,  $\phi_n \rightarrow \phi$  y  $dA_n \rightarrow dA$  en  $\text{sop}(u_\varepsilon) \subset \Omega_i \setminus X$ , obtenemos por continuidad que  $I_n(u_\varepsilon) < 0$  para  $n$  suficientemente grande. Se sigue entonces de la estabilidad que  $I_n(v_\varepsilon) \geq 0$  ya que, en caso contrario, podríamos encontrar una combinación lineal  $u_\varepsilon$  y  $v_\varepsilon$  con media cero y negativa para la forma índice  $I_n$ . Entonces obtenemos:

$$\int_{M \setminus \Omega_i} |\nabla \phi_n|_n^2 dA_n \leq \int_M |\nabla \phi_n|_n^2 v_\varepsilon^2 dA_n \leq \int_M |\nabla v_\varepsilon|_n^2 dA_n.$$

Como  $\text{sop} |\nabla v_\varepsilon|_n^2$  está contenido en  $\Omega_i$ , tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  en las desigualdades anteriores

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{M \setminus \Omega_i} |\nabla \phi_n|_n^2 dA_n \leq \int_M |\nabla v_\varepsilon|^2 dA,$$

y como el término de la derecha tiende a cero se sigue la afirmación.  $\square$

Como  $\text{grado}(\phi) = \int_{\Omega_i} \text{Jac}(\phi) dA$  y  $\int_{M \setminus \Omega_i} |\text{Jac}(\phi_n)| dA_n \leq \frac{1}{2} E_n(\phi_n|_{M \setminus \Omega_i})$  tenemos que  $1 - \text{género}(M) = \text{grado}(\phi_n) \rightarrow \text{grado}(\phi)$  y como las inmersiones no tienen ramificación se sigue del teorema de Gauss-Bonnet que  $\text{grado}(\phi_n) = 1 - \text{género}(M)$  y, por tanto,  $\text{grado}(\phi) = 1 - \text{género}(M)$ . Como  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  es no vacío  $\text{género}(\bar{\Omega}_i) < \text{género}(M)$  y por los resultados de Eells y Wood, [EW], tenemos que  $\phi$  es anticonforme. Supongamos que  $\phi$  no toma el valor  $(0, 0, 1)$  en  $\bar{\Omega}_i \setminus \Omega_i$ . Por el teorema 5.5 existe una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos tal que una subsucesión de las inmersiones  $\{\lambda_n \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen a una inmersión minimal multivaluada sin puntos de ramificación  $\psi$  con aplicación de Gauss  $\phi$  no constante. La 1-forma de Weierstrass asociada a  $\psi$  tiene  $2 \text{género}(M) - 2$  ceros en  $\bar{\Omega}_i$ ; en los polos de la proyección estereográfica de  $\phi$  porque  $\psi$  está libre de puntos de ramificación.

Por tanto, como  $\#\text{ceros}(\omega) - \#\text{polos}(\omega)$  es  $2 \text{género}(\bar{\Omega}_i) - 2$ , obtenemos que  $\omega$  tiene polos en algún punto de  $\bar{\Omega}_i \setminus \Omega_i$  y esto prueba que  $\Omega_i$  tiene área infinita con respecto a la métrica inducida por  $\psi$ . Aplicando los resultados de Silveira [S] la inmersión  $\psi$  no sería estable contradiciendo la afirmación 5.2. De este modo probamos el caso 1.

**Afirmación 5.2.** *La inmersión multivaluada  $\psi : \Omega_i \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3$  es estable.*

*Demostración: (de la afirmación).* Si  $\psi$  no fuese estable podríamos encontrar una función diferenciable  $u$  con soporte compacto en  $\Omega = \Omega_i \setminus X$  tal que  $\int_{\Omega} u dA = 0$  y  $\int_{\Omega} \{|\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2\} dA < 0$ , con  $dA$  la medida asociada a la métrica inducida por la inmersión  $\psi$ . Si  $u = u^+ - u^-$  entonces  $\mu_n = (\int_{\Omega} u^- dA_n) / (\int_{\Omega} u^+ dA_n) \rightarrow 1$ , donde  $dA_n$  es la medida en  $M$  inducida por inmersión  $\lambda_n \psi_n$  y:

$$\int_{\text{sop}(u)} \{|\nabla u_n|_n^2 - |\nabla \phi_n|_n^2 u_n^2\} dA_n \rightarrow \int_{\text{sop}(u)} \{|\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2\} dA < 0,$$

y, por tanto, para  $n$  grande  $I_n(u_n) < 0$ , y llegamos a contradicción, ya que  $\psi_n$  y, en consecuencia,  $\lambda_n \psi_n$  son inmersiones estables. □

**Caso 2.** *El conjunto de puntos  $X$  es no vacío.*

Si  $p \in X$ , podemos obtener por el teorema 5.2 una aplicación holomorfa no constante  $\phi_p : S^2 \rightarrow S^2$ . Aplicando un argumento similar al de la afirmación 5.1 concluimos que  $E_n(\phi_n) \rightarrow E(\phi_p)$  y, por tanto, que  $\text{grado}(\phi_n) \rightarrow \text{grado}(\phi_p)$ .

Entonces existe una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos tales que una subsucesión de  $\{\lambda_n \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge localmente a una inmersión minimal multi-valuada de  $S^2 \setminus \{\infty\}$  con un final al menos y área infinita como antes y llegamos a contradicción como en la afirmación 5.2.

**Caso 3.** *El conjunto de curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  no es vacío, el límite de la sucesión  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es constante en cada componente de  $M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$  y  $X$  es vacío.*

Como:

$$E_n(\phi_n) \geq 2 \int_M |\text{Jac}(\phi_n)| \geq 8\pi(\text{género}(M) - 1), \quad (5.2)$$

las energías  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  no pueden tender a cero.

Como  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada inferiormente por una constante positiva y  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente  $C^k$  a una aplicación constante existe al menos una geodésica hiperbólica  $\gamma \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  tal que  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada inferiormente por una constante positiva en entornos de  $\gamma$  para  $n$  dependiendo del entorno. Sea  $C$  un entorno anular de  $\gamma$  tal que  $(C \setminus \gamma, J)$  es conforme a dos discos punteados  $D_1$  y  $D_2$  con coordenadas locales  $z_1$  y  $z_2$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y  $u_\varepsilon$  la función lipschitziana:

$$u_\varepsilon = \begin{cases} 1, & |z_i| \leq \varepsilon^2, \\ \log(|z_i|/\varepsilon)/\log(\varepsilon), & \varepsilon^2 \leq |z_i| \leq \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \leq |z_i| \end{cases}$$

extendida por cero a todo  $M$ .

Entonces la función  $u_\varepsilon$  verifica  $I_n(u_\varepsilon) < 0$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y  $n$  grande. Además,  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiende a cero fuera de cualquier entorno de  $\gamma_i$ : si no podríamos encontrar una función lipschitziana no negativa  $v$  similar a  $u_\varepsilon$  tal que  $\text{sop}(u_\varepsilon) \cap \text{sop}(v)$  es vacío y  $I_n(v) < 0$  para  $n$  grande.

Fijamos ahora  $\varepsilon > 0$  y llamamos  $C(\varepsilon) = \gamma \cup \{\cup_{i=1,2} \{0 < |z_i| \leq \varepsilon\}\} \subset C$ . Si  $\eta_n : (C, J_n) \rightarrow S^2$  es una aplicación holomorfa inyectiva entonces utilizando un argumento de Li y Yau [LY] podemos suponer, componiendo  $\eta_n$  con una transformación de Möbius de  $S^2$  que  $\int_{C(\varepsilon)} \eta_n u_\varepsilon ds_n^2 = 0$ . Por estabilidad:

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_n(\eta_n u_\varepsilon) \\ &= \int_{C(\varepsilon)} |\nabla \eta_n u_\varepsilon|_n^2 - |\nabla \phi_n|_n^2 \eta_n^2 u_\varepsilon^2 \\ &\leq E_n(u_\varepsilon) + E_n(\eta_n) + E_n(u_\varepsilon)E_n(\eta_n) - \int_{C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2. \end{aligned}$$



Como  $E_n(\eta_n) \leq 8\pi$  tenemos que:

$$\int_{C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 \leq 8\pi + E_n(u_\varepsilon)(1 + 8\pi),$$

De esta desigualdad y (5.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} 8\pi \leq E_n(\phi_n) &\leq \int_{M \setminus C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 + \int_{C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 \\ &\leq \int_{M \setminus C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 + 8\pi + E_n(u_\varepsilon)(1 + 8\pi), \end{aligned}$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos que el término de la derecha en la desigualdad anterior converge a:

$$8\pi + E(u_\varepsilon)(1 + 8\pi),$$

y como  $E(u_\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se sigue que  $E_n(\phi_n) \rightarrow 8\pi$ . Entonces concluimos de (5.2) que el caso 3 no es posible si  $\text{género}(M) \geq 3$ .

Para terminar estudiamos el caso de una superficie de género dos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos la aplicación diferenciable a trozos  $\bar{\phi}_n : S^2 \rightarrow S^2$  por:

$$\bar{\phi}_n(z) = \begin{cases} \phi_n(\eta_n^{-1}(z)), & x \in \eta_n(C_n) \\ h_n(z), & x \notin \eta_n(C_n), \end{cases}$$

Donde  $\eta_n$  es una aplicación holomorfa inyectiva de  $(C, J_n)$  a  $S^2$  elegida de modo que las regiones  $\eta_n(C)$  recubran toda la esfera menos dos puntos,  $C_n$  es una sucesión de subanillos de  $C$  tal que las regiones  $\eta_n(C_n)$  también cubren toda la esfera menos dos puntos y la energía de las curvas de la frontera  $\phi_n(\partial C_n)$  converge a cero (esto puede hacerse porque si  $\phi : C = \{r_1 < |z| < r_2\} \rightarrow S^2$  es una aplicación diferenciable, uno puede acotar la longitud de alguna curva  $\phi(re^{i\theta})$ , con  $r_1 < r < r_2$  por  $E(\phi)/\text{módulo}(C)$ ), y  $h_n$  es la función  $h_n(re^{i\theta}) = r\bar{\phi}_n(e^{i\theta})$ . Hacemos notar que las energías de las aplicaciones  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienden a cero cuando  $n$  converge a infinito.

De este modo obtenemos que  $\text{grado}(\bar{\phi}_n) = \text{grado}(\phi_n) = -1$  y, por el lema 5.8, componiendo si es necesario con una transformación de Möbius, podemos suponer que  $\int_{S^2} \bar{\phi}_n = 0$ .

Como  $E(\bar{\phi}_n)$  (calculada con la métrica usual de  $S^2$ ) está acotada podemos extraer una subsucesión fuertemente convergente en  $L_2$  cuyos gradientes son débilmente convergentes en  $L_2$  a una aplicación  $\bar{\phi}$  en el espacio de Sobolev  $H^1(S^2, S^2)$ .

De  $\int_{S^2} \bar{\phi}_n = 0$  se sigue que  $\int_{S^2} \bar{\phi} = 0$  y por tanto  $\bar{\phi}$  es no constante.

Como  $E(\bar{\phi}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(\bar{\phi}_n) = 8\pi$ ,  $\bar{\phi}$  tiene media cero y  $|\bar{\phi}| \equiv 1$  obtenemos que las coordenadas de  $\bar{\phi}$  son primeras funciones propias del Laplaciano de  $S^2$  y, por tanto, existe una transformación ortogonal  $A$  tal que  $A(p) = \bar{\phi}(p)$  para todo  $p \in S^2$  y  $E(\bar{\phi}) = 8\pi$ .

Las regiones  $S^2 \setminus \eta_n(C)$  son la unión de dos discos  $D(p_n, r_n)$ ,  $D(q_n, s_n)$ . Pasando a una subsucesión podemos suponer que  $p_n \rightarrow p$ ,  $q_n \rightarrow q$ ,  $r_n \rightarrow r$ ,  $s_n \rightarrow s$ . Afirmamos que  $r, s = 0$ : de hecho, si  $r > 0$  tenemos que  $D(p, r/2) \subset D(p_n, r_n) \subset S^2 \setminus \eta_n(C)$  para  $n$  grande. Entonces  $E(\bar{\phi}_n|_{D(p, r/2)})$  converge a cero, y por tanto  $E(\bar{\phi}|_{D(p, r/2)}) = 0$  y se tiene que  $\bar{\phi}|_{D(p, r/2)}$  es constante, lo que no es posible ya que  $\bar{\phi}(p) = A(p)$  en  $S^2$ .

Puesto que en los anillos  $S^2 \setminus \eta_n(C)$  las aplicaciones  $\bar{\phi}_n$  son reparametrizaciones de  $\phi_n$  hemos probado que en un entorno de  $\gamma$  las aplicaciones  $\phi_n$  convergen a una aplicación anticonforme con grado  $-1$  en la esfera  $S^2$ . Utilizando el teorema 5.5 obtenemos que, reescalando, una subsucesión de las inmersiones  $\psi_n$  converge a una inmersión minimal  $\psi$  de una esfera punteada que tiene necesariamente al menos un final. Razonando como en la afirmación 5.2 concluimos que esta inmersión debería ser estable, lo que contradice los resultados de Silveira [S]. Esto demuestra que el caso 3 tampoco es posible. □

**Lema 5.8.** Si  $\phi : S^2 \rightarrow S^2$  es una aplicación continua de grado no nulo, existe una transformación de Möbius  $F$  tal que:

$$\int_{S^2} \phi \circ F = 0.$$

*Demostración:* Si  $D^3$  es la bola unidad abierta en  $\mathbb{R}^3$ , para cada  $g \in D^3$ , sea  $F_g : S^2 \rightarrow S^2$  la aplicación dada por:

$$F_g(p) = \frac{p + (\mu \langle p, g \rangle - \lambda)g}{\lambda(1 - \langle p, g \rangle)}, \quad p \in S^2,$$

con  $\lambda = 1/(1 - |g|^2)^{1/2}$ ,  $\mu = (\lambda - 1)/|g|^2$  si  $g \neq 0$ ,  $F_0 = \text{Id}_{S^2}$ . Entonces  $F_g$  es un difeomorfismo conforme de  $S^2$  y:

$$F_g^* ds^2 = \frac{1 - |g|^2}{(1 - \langle p, g \rangle)^2} ds^2,$$

donde  $ds^2$  es la métrica canónica de  $S^2$ . Definimos una aplicación  $H : D^3 \rightarrow \overline{D^3}$  por:

$$H(g) = \frac{1}{\text{area}(F_g^* ds^2)} \int_{S^2} \phi(F_g^* ds^2).$$

$H$  puede extenderse a una aplicación continua  $\overline{D^3} \rightarrow \overline{D^3}$ , ya que si  $g_n \in D^3$  y  $g_n \rightarrow g \in S^2$ , se tiene que las medidas  $F_{g_n}^* ds^2 / \text{area}(F_{g_n}^* ds^2)$  convergen a la medida de Dirac  $\delta(g)$ . Se tiene entonces que  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(g_n) = \phi(g)$ .

Si  $H(g) \neq 0$  para todo  $g \in \overline{D^3}$ , la aplicación  $g \mapsto H(g) / |H(g)|$  envía  $\overline{D^3}$  to  $S^2$ , y la composición de  $\phi$  con esta aplicación es una aplicación continua  $S^2 \rightarrow S^2$  de grado no nulo. Esto implica que el morfismo inducido  $H_2(S^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(S^2, \mathbb{Z})$  es no nulo, pero este morfismo es composición  $H_2(S^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\overline{D^3}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(S^2, \mathbb{Z})$ , y puesto que  $H_2(\overline{D^3}, \mathbb{Z}) = 0$  llegamos a contradicción. Por tanto, existe  $g \in \overline{D^3}$  tal que  $H(g) = 0$ .  $g$  no puede pertenecer a  $S^2$ , de modo que  $g \in D^3$ .  $H(g) = 0$  implica que

$$0 = \int_{S^2} \phi(F_g^* ds^2) = \int_{S^2} \phi \circ (F_g)^{-1} ds^2.$$

□

El teorema 2.10 nos garantiza que el problema de estabilidad para una inmersión minimal de una superficie compacta de género cuatro o cinco en una variedad con curvatura de Ricci no negativa es equivalente a un problema de estabilidad de una superficie minimal multivaluada en  $\mathbb{R}^3$ . Combinando este resultado con el teorema de compacidad que acabamos de probar, obtenemos:

**Teorema 5.9.** *Si  $\psi_k : M \rightarrow N_k$  es una sucesión de inmersiones isométricas estables con curvatura media constante en variedades con curvatura de Ricci no negativa, podemos extraer, salvo reparametrización, una subsucesión convergente de las estructuras conformes y una subsucesión convergente de métricas homotéticas a las métricas inducidas por las inmersiones  $\psi_n$ .*

## 5.4 Comentarios

Los resultados que hemos obtenido se pueden aplicar también a superficies minimales con índice uno para obtener resultados similares a los del capítulo 4.

## Capítulo 6

# Ejemplos de superficies con curvatura media constante

En este capítulo construimos superficies embebidas con curvatura media constante en cocientes de la forma  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de traslaciones generado por vectores ortogonales. En la primera sección obtenemos las superficies diferenciables que parametrizarán las inmersiones que construiremos. En la segunda sección definimos las aplicaciones armónicas que serán las aplicaciones de Gauss de las inmersiones, y estudiamos propiedades de diferenciabilidad de las aplicaciones con respecto a las estructuras conformes. En la siguiente sección construimos las inmersiones y probamos que son embebimientos. En el cuarto apartado estudiamos los límites de los embebimientos construidos en la sección anterior. Por último, damos una caracterización geométrica de los ejemplos construidos.

### 6.1 Superficies de Riemann

En esta sección vamos a construir las superficies que parametrizarán las aplicaciones de Gauss y las inmersiones con curvatura media constante que construiremos posteriormente.

Denotaremos por  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ , respectivamente, a las superficies de Riemann de los polinomios:

$$\begin{aligned}w^2 &= (z^2 + 1)(z^2 + (1/2)^2), \\w^2 &= (z^2 + 1)(z^2 + (1/2)^2)(z^2 + 2^2), \\w^2 &= (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2), \quad \text{con } a = (1/2)e^{i\pi/4}.\end{aligned}$$

En el primero y segundo caso, consideramos las aplicaciones sobre  $M_i$  dadas por:

$$\begin{aligned} u_1(z, w) &= (-\bar{z}, \bar{w}), \\ u_2(z, w) &= (-\bar{z}, -\bar{w}), \\ u_3(z, w) &= (\bar{z}, \bar{w}). \end{aligned}$$

En el último caso, las aplicaciones:

$$\begin{aligned} u_1(z, w) &= (-\bar{z}, \bar{w}), \\ u_2(z, w) &= (\bar{z}, \bar{w}), \\ u_3(z, w) &= (1/\bar{z}, \bar{w}/\bar{z}^4). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

**Proposición 6.1.** *Las aplicaciones  $u_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , definidas en  $M_g$ , son difeomorfismos involutivos de  $M_g$  tales que:*

- (i)  $u_i$  y  $u_j$  conmutan si  $i \neq j$ .
- (ii) El conjunto de puntos fijos de  $u_i$  es no vacío y separa a la superficie en dos componentes conexas.
- (iii)  $M_g \setminus \bigcup \{u_i(p) = p\}$  tiene ocho componentes conexas. La frontera de cada una de ellas está formada por  $3 + g$  curvas diferenciables que se cortan transversalmente. Además, dos cualesquiera de ellas se transforman una en otra por medio de una composición de difeomorfismos  $u_i$ .

Sean  $\Omega_i^\pm$  las componentes conexas del complemento del conjunto de puntos fijos de  $u_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Dichas componentes quedan unívocamente determinadas si imponemos que la región  $\bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$  se corresponda una componente conexa cualquiera de la región  $\text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0$  en los casos de géneros uno y dos, y con la región  $\text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0, |z| > 1$  en el caso de género tres. La frontera de cada una de dichas regiones está representada en la figura 6.1.

Los siguientes lemas nos proporcionan bases de homología que servirán para calcular los períodos de las superficies que construiremos:

Consideremos en  $M_1$  las curvas dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (it, w(it)), & w > 0, & t \in [-a, a], \\ \alpha_2(t) &= (-it, w(-it)), & w < 0, & t \in [-a, a], \\ \alpha_3(t) &= (it, w(it)), & w > 0, & t \in [1, a], \\ \alpha_4(t) &= (-it, w(-it)), & w < 0, & t \in [1, a]. \end{aligned}$$

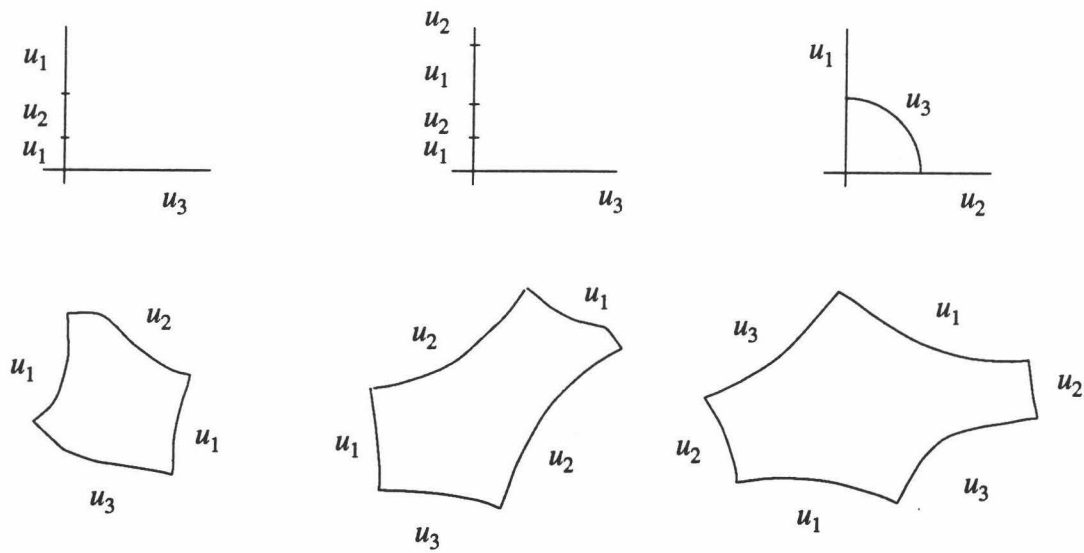


Figura 6.1. Región  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$

Se tiene entonces:

**Lema 6.2.** *Las curvas  $\gamma_1 = \alpha_1 \cup \alpha_2$ ,  $\gamma_2 = \alpha_3 \cup \alpha_4$ , forman una base de homología en  $M_1$  tal que:*

$$u_3^* \gamma_1 = -\gamma_1, \quad u_2^* \gamma_1 = -\gamma_1, \quad u_1^* \gamma_2 = -\gamma_2.$$

Consideremos en  $M_2$  las curvas:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (it, w(it)), & w > 0, & \quad t \in [-a, a], \\ \alpha_2(t) &= (-it, w(-it)), & w < 0, & \quad t \in [-a, a], \\ \alpha_3(t) &= (it, w(it)), & iw > 0, & \quad t \in [a, 1], \\ \alpha_4(t) &= (-it, w(-it)), & iw < 0, & \quad t \in [a, 1], \\ \alpha_5(t) &= (it, w(it)), & w > 0, & \quad t \in [1, b], \\ \alpha_6(t) &= (-it, w(-it)), & w < 0, & \quad t \in [1, b], \\ \alpha_7(t) &= (it, w(it)), & iw > 0, & \quad t \in [b, \infty] \cup [-\infty, -b], \\ \alpha_8(t) &= (-it, w(-it)), & iw < 0, & \quad t \in [b, \infty] \cup [-\infty, -b]. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

**Lema 6.3.** *Las curvas  $\gamma_1 = \alpha_1 \cup \alpha_2$ ,  $\gamma_2 = \alpha_3 \cup \alpha_4$ ,  $\gamma_3 = \alpha_5 \cup \alpha_6$ ,  $\gamma_4 = \alpha_7 \cup \alpha_8$ , forman una base de homología en  $M_2$  tal que:*

$$\begin{aligned} u_2^* \gamma_1 &= -\gamma_1, & u_3^* \gamma_1 &= -\gamma_1, \\ u_1^* \gamma_2 &= -\gamma_2, & u_2^* \gamma_3 &= -\gamma_3, \\ u_1^* \gamma_4 &= -\gamma_4, & u_3^* \gamma_4 &= -\gamma_4. \end{aligned}$$

Por último, consideremos en  $M_3$  las curvas dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} (t, w(t)), & t \in [-\infty, -1], \\ (e^{int}, w(e^{int})), & t \in [-1, 1] \\ (t, w(t)), & t \in [1, \infty], \end{cases} \\ \gamma_3 &= \begin{cases} (it, w(it)), & t \in [-\infty, -1], \\ (e^{int/2}, w(e^{int/2})), & t \in [-1, 1], \\ (it, w(it)), & t \in [1, \infty], \end{cases} \\ \gamma_5 &= \begin{cases} (-it, w(-it)), & t \in [-\infty, 0], \\ (t, w(t)), & t \in [0, \infty], \end{cases} \\ \gamma_2(t) &= (e^{it}, w(e^{it})), \quad t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_4(t) &= (t, w(t)), \quad t \in [-\infty, \infty], \\ \gamma_6(t) &= (it, w(it)), \quad t \in [-\infty, \infty], \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

**Lema 6.4.** *Las curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_6$  forman una base de homología en  $M_3$  tal que:*

$$\begin{aligned} u_1^* \gamma_1 &= -\gamma_1, & u_2^* \gamma_3 &= -\gamma_3, & u_3^* \gamma_5 &= -\gamma_5, \\ u_1^* \gamma_2 &= -\gamma_2, & u_1^* \gamma_4 &= -\gamma_4, & u_2^* \gamma_6 &= -\gamma_6, \\ u_2^* \gamma_2 &= -\gamma_2, & u_3^* \gamma_4 &= -\gamma_4, & u_3^* \gamma_6 &= -\gamma_6, \end{aligned}$$

Sobre las superficies diferenciables  $M_g$ ,  $g = 1, 2, 3$ , vamos a considerar las estructuras conformes  $J$  tales que las aplicaciones  $u_i$  son anticonformes. Esto motiva la siguiente definición:

**Definición.** Llamaremos  $\Sigma_i$  al espacio de las estructuras conformes  $J$  sobre  $M_i$  tales que la aplicación  $u_i$  es  $J$ -anticonforme para  $i = 1, 2, 3$ .

En los casos de géneros uno y dos podemos calcular cuales son estas superficies:

**Lema 6.5.**

- (i) Para cada  $J \in \Sigma_1$ , se tiene que  $(M_1, J)$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio:

$$w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2), \quad \text{con } 0 < a < 1. \quad (6.1)$$

- (ii) Para cada  $J \in \Sigma_2$  se tiene que  $(M_2, J)$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio:

$$w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)(z^2 + b^2), \quad \text{con } 0 < a < 1 < b < \infty. \quad (6.2)$$

- (iii) Si  $J \in \Sigma_3$  es tal que  $(M, J)$  es una superficie hiperelíptica, entonces  $(M, J)$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio:

$$w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2), \quad (6.3)$$

con  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ ,  $\text{Re}(a)$ ,  $\text{Im}(a) > 0$ .

*Demostración:* (i) y (ii) se probarán en la demostración del teorema 6.18. Para ver (iii), sea  $g$  la involución hiperelíptica, y  $z : (M, J) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  la proyección hiperelíptica. Las involuciones  $u_i$  son aplicaciones anticonformes que conmutan con  $g$  y se proyectan a involuciones  $\bar{u}_i$  en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Las involuciones  $\bar{u}_i$  son todas distintas, ya que, en caso contrario,  $u_i$  o  $u_j$  sería la involución hiperelíptica, lo que es imposible. Podemos suponer entonces que  $\bar{u}_1(z) = -\bar{z}$ ,  $\bar{u}_2(z) = \bar{z}$  y  $\bar{u}_3(z) = 1/\bar{z}$ . Los puntos hiperelípticos no pueden ser fijos por ninguna de las involuciones  $\bar{u}_i$  y son permutados por  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_3$ . Se sigue entonces que los puntos hiperelípticos son  $\pm a$ ,  $\pm \bar{a}$ ,  $\pm 1/a$  y  $\pm 1/\bar{a}$ , con  $\text{Re}(a) > 0$ ,  $\text{Im}(a) > 0$ ,  $|a| < 1$  y la conclusión es inmediata.  $\square$

**Lema 6.6.** La superficie  $M$  es conforme a la superficie de Riemann que se obtiene como el único revestimiento normal de grado cuatro con ramificación de orden uno sobre seis puntos  $a_1 < \dots < a_6$  del eje real tal que la imagen del grupo fundamental de  $M$  menos los puntos de ramificación coincide con el núcleo del morfismo  $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\text{valores de ramificación}\}) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  definido por:

$$\begin{aligned} \gamma_1, \gamma_4 &\longmapsto (1, 0) \\ \gamma_2, \gamma_5 &\longmapsto (0, 1) \\ \gamma_3 &\longmapsto (1, 1), \end{aligned}$$

donde  $\gamma_i$  son lazos basados en el mismo punto que dan una vuelta alrededor de los puntos  $a_2 < \dots < a_6$ .



*Demostración:* Basta considerar el grupo  $G$  generado por los difeomorfismos  $g_j = u_{j+1} \circ u_{j+2}$ , con  $j \in \mathbb{Z}_3$ , y la superficie de riemann  $M/G$ . Se prueba entonces el lema como en la demostración del teorema 6.18. □

## 6.2 Construcción de aplicaciones armónicas

**Definición.** Sea  $\phi \in H^1(M, S^2)$ . Diremos que  $\phi$  es *simétrica* si  $\phi \circ u_i = A_i(\phi)$ , para todo  $i = 1, 2, 3$ , con  $A_i$  la reflexión respecto del  $i$ -ésimo plano coordenado de  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 6.7.** Sea  $J \in \Sigma_g$ , con  $g = 1, 2, 3$ . Existe una aplicación armónica simétrica  $\phi : M_g \rightarrow S^2$  tal que:

- (i)  $E(\phi) \leq E(\nu)$  para toda aplicación simétrica  $\nu : M_g \rightarrow S^2$ . Si se da la igualdad, entonces  $\nu$  se obtiene como composición de  $\phi$  con simetrías respecto de los planos  $A_i$ .
- (ii) O bien el conjunto nodal de  $\phi_i$  coincide con el conjunto de puntos fijos de  $u_i$ , o bien  $\phi_1 \equiv 0$ . Esta última posibilidad solo puede darse si el género de  $M_i$  es uno y  $\phi$  es la proyección de la aplicación de Gauss de un cilindro circular recto de  $\mathbb{R}^3$ .
- (iii) Si  $\nu : M_g \rightarrow S^2$  es una aplicación  $J$ -armónica tal que el conjunto nodal de  $\nu_i$  coincide con el conjunto de puntos fijos de  $u_i$ , entonces, salvo composición con simetrías  $A_i$ , se tiene que  $\nu = \phi$ .
- (iv)  $|\text{grado}(\phi)| = \text{género}(M_g) - 1$ .

*Demostración:* La existencia y regularidad de la aplicación se sigue del trabajo de Lemaire [Le]. Indicamos brevemente su demostración. Sea  $\phi_n \in H^1(M, S^2)$  una sucesión minimizante para la energía en la clase de las aplicaciones simétricas. Al menos siempre existe una aplicación simétrica en  $M$ : en el caso de que el género de  $M$  sea tres, basta considerar la aplicación  $z$ ; en los casos de géneros uno y dos, dicha aplicación se construirá en la proposición 6.15. Reemplazando  $\phi_n$  por la aplicación:

$$\left. \begin{aligned} (\phi_1, \phi_2, |\phi_3|), & \quad \text{en } \Omega_3^+, \\ (\phi_1, \phi_2, -|\phi_3|), & \quad \text{en } \Omega_3^-, \end{aligned} \right\}$$

y así sucesivamente, obtenemos una nueva sucesión minimizante de aplicaciones simétricas tales  $(\phi_n)_i \geq 0$  en  $\Omega_i^+$  y  $(\phi_n)_i \leq 0$  en  $\Omega_i^-$ . Puesto que  $E_J(\phi_n)$  es acotada, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente, que denotaremos igual, en  $H^1(M, S^2)$  a una aplicación  $\phi$ . Puesto que podemos suponer que dicha sucesión también converge en  $L_2(M, S^2)$  y que converge puntualmente, tenemos que  $\phi$  es una aplicación simétrica tal que  $(\phi)_i \geq 0$  en  $\Omega_i^+$  y  $(\phi)_i \leq 0$  en  $\Omega_i^-$  que minimiza la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.

Por tanto se sigue del trabajo de Lemaire [Le] que  $\phi$  es una aplicación armónica diferenciable que verifica la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\Delta\phi + |\nabla\phi|^2\phi = 0. \quad (6.4)$$

Como  $\phi_i \geq 0$  en  $\Omega_i^+$ , se sigue del principio del máximo para operadores elípticos que, o bien  $\phi_i > 0$  o  $\phi_i \equiv 0$  en  $\Omega_i^+$ . Si  $p$  es un punto fijo de  $g_i$  tenemos que  $\phi_i(p) = \pm 1$  y, por tanto, podemos suponer que  $\phi_i > 0$  en  $\Omega_i^+$  y, por simetría, tenemos que  $\phi_i < 0$  en  $\Omega_i^-$ . Cuando  $g \geq 2$  podemos siempre encontrar un punto en estas condiciones. Cuando  $g = 1$  podemos encontrar puntos fijos de  $g_2$  y de  $g_3$  y se tiene que  $\phi_2$  y  $\phi_3$  no son idénticamente cero. Sin embargo, puesto que no hay puntos fijos de  $g_1$  no podemos excluir la posibilidad  $\phi_1 \equiv 0$ . en este caso la imagen de  $\phi$  está contenida en el ecuador  $x_1 = 0$  de  $S^2$  y  $\phi$  debe ser la aplicación de Gauss de un cilindro circular recto de  $\mathbb{R}^3$ . Esto prueba (ii).

Ahora probamos (i). Si  $E(\phi) = E(\nu)$  para alguna aplicación simétrica  $\nu : M \rightarrow S^2$ , entonces el conjunto nodal de  $\nu_i$  está contenido en el conjunto nodal de  $\phi_i$ . Como  $\phi_i$  es positiva en  $\Omega_i^+$  y negativa en  $\Omega_i^-$ , es la primera función propia del problema de Dirichlet del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en los abiertos  $\Omega_i^+$  y  $\Omega_i^-$ , y tenemos, por la caracterización variacional del primer valor propio del problema de Dirichlet en  $\Omega_i^\pm$ , que  $\int_{\Omega_i^\pm} \{|\nabla\nu_i|^2 - |\nabla\phi|^2\nu_i^2\} \geq 0$ , y se tiene:

$$\int_M |\nabla\nu_i|^2 - |\nabla\phi|^2\nu_i^2 \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

sumando en  $i$  obtenemos que:

$$0 \leq \sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla\nu_i|^2 - |\nabla\phi|^2\nu_i^2 = \int_M \{|\nabla\nu|^2 - |\nabla\phi|^2\} = E(\nu) - E(\phi) = 0,$$

y, por tanto, la igualdad se da en (6.5). Entonces  $\nu_i$  es también una primera función propia de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en  $\Omega_i^+$ . Puesto que siempre hay un punto  $p \in \Omega_i^+$  fijo por  $g_i$ ,

para  $i = 2, 3$  tenemos que  $\nu_i = \pm\phi_i$  en  $\Omega_i^+$  para  $i = 2, 3$  y, por continuación única, en todo  $M$ . Esto implica que  $\phi_1 = \pm\nu_1$  y prueba la afirmación de unicidad en (i).

Para probar (iii), solo hay que tener en cuenta que las coordenadas de  $\nu_i$  son las primeras funciones propias del operador  $\Delta + |\nabla\nu|^2$  en  $\Omega_i^\pm$ , lo que implica como en la demostración del apartado (i) que  $E(\nu) \leq E(\phi)$  y, por tanto, que  $E(\nu) = E(\phi)$ .

Para probar (iv) consideremos el punto  $(-1, 0, 0) \in S^2$ . Los puntos en el conjunto  $\phi^{-1}\{(-1, 0, 0)\}$  son los puntos fijos comunes de  $u_2$  y  $u_3$ . Se sigue del principio del máximo en la frontera que  $(-1, 0, 0)$  es un valor regular de  $\phi$  y, de nuestra descripción de las superficies  $M_i$ , que  $\text{signo}(d\phi)_p = -1$  para todo  $p \in \phi^{-1}\{(-1, 0, 0)\}$ . Contando el número de puntos en  $\phi^{-1}\{(1, 0, 0)\}$ , ver figura 6.1, probamos (iv). □

**Definición.** La aplicación  $\phi$  dada por el teorema 6.7 está bien definida si imponemos la condición  $\phi_i < 0$  en  $\Omega_i^-$ . Denotaremos por  $\phi_J$  a la única aplicación armónica  $J$ -simétrica que es mínimo de la energía y verifica esta condición.

Con esta elección de  $\phi_J$  siempre se verifica:

**Lema 6.8.** *El grado de  $\phi_J$  es no positivo.*

**Proposición 6.9.** *Sea  $J \in \Sigma_g$ . Entonces  $\phi_J$  es antiholomorfa si y solo si  $g = 3$  y  $(M_3, J)$  es una superficie hiperelíptica. En este caso, la proyección hiperelíptica  $z$  puede tomarse como la proyección estereográfica de  $\phi$ .*

*Demostración:* Sea  $(M_g, J)$ , con  $J \in \Sigma_g$ . Si  $\phi$  es antiholomorfa, componiendo con una isometría de  $S^2$  que invierta la orientación, obtenemos una aplicación holomorfa a  $S^2$  de grado  $g - 1$ . Puesto que una aplicación holomorfa de grado cero es constante y no hay aplicaciones holomorfas de grado uno en superficies de Riemann de género dos, concluimos que  $g = 3$  y  $(M_3, J)$  es hiperelíptica.

Si  $(M_3, J)$  es hiperelíptica, entonces  $(M_3, J)$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2)$  y, claramente, la proyección hiperelíptica  $z$  verifica  $z \circ u_1 = -\bar{z}$ ,  $z \circ u_2 = \bar{z}$  y  $z \circ u_3 = 1/\bar{z}$ , donde  $u_1(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w})$ ,  $u_2(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$  y  $u_3(z, w) = (1/\bar{z}, \bar{w}/\bar{z}^4)$ . Esto implica que la composición de  $z$  con la proyección estereográfica es una aplicación anticonforme

$\phi : (M_3, J) \rightarrow S^2$  tal que las regiones nodales de las coordenadas de  $\phi$  son los complementos de las curvas de puntos fijos de  $u_i$ , y terminamos aplicando el apartado (iii) del teorema 6.7.

□

**Nota.** Simetrías adicionales. Sea  $\phi_J : M \rightarrow S^2$ . Si  $g : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo  $J$ -conforme o anticonforme y  $A$  es una isometría de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $E_J(A^{-1} \circ \phi \circ g) = E(\phi)$  y, si  $A^{-1} \circ \phi \circ g$  es una aplicación simétrica entonces  $A^{-1} \circ \phi \circ g$  es igual a  $\phi$  salvo composición con algunas aplicaciones  $A_i$  y, por tanto,  $g$  extiende a una simetría de la aplicación de Gauss.

Si consideramos la subfamilia  $w^2 = (z^2 + a^2)(z^2 + 1)(z^2 + (1/a)^2)$ , con  $0 < a < 1$ , entonces se puede comprobar fácilmente que:

$$u_4(z, w) = \left( \frac{1}{z}, \frac{\bar{w}}{z^3} \right)$$

$$u_5(z, w) = \left( \frac{1}{z}, -\frac{\bar{w}}{z^3} \right)$$

extienden a las simetrías  $A_4$  y  $A_5$  con respecto a los planos  $x_1 = x_2$  y  $x_1 = -x_2$ , respectivamente.

Nos proponemos ahora estudiar la dependencia diferenciable de las aplicaciones armónicas que hemos construido de las estructuras conformes. Para ello utilizaremos la siguiente extensión de un resultado de Eells y Lemaire.

Recordamos que, por definición, un campo vectorial  $V$  a lo largo de una aplicación  $\phi : M \rightarrow S^2$  es un campo de Jacobi (a lo largo de  $\phi$ ) si verifica la ecuación:

$$-J_\phi(V) = \text{traza } \nabla_\phi^2 V + \text{traza } R^{S^2}(V, d\phi) d\phi. \quad (6.6)$$

Por definición, el campo vectorial  $V$  a lo largo de  $\phi_0 : M_g \rightarrow S^2$  es *simétrico* si  $V \circ u_i = A_i(V)$  para  $i = 1, 2, 3$ .

**Teorema 6.10 ([EL]).** *Supongamos que  $\phi_0 : (M_i, g_0) \rightarrow S^2$  es una aplicación armónica diferenciable ( $= C^\infty$ ) y que no hay campos de Jacobi simétricos a lo largo de  $\phi_0$ .*

*Entonces, para  $k, r \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $g_0$  en  $\mathcal{M}_{sim}^{r, \alpha}$  y una única aplicación  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow C_{sim}^{r+2, \alpha}(M_i, S^2)$  de clase  $C^k$  tal que  $\Phi(g_0) = \phi_0$  y  $\Phi(g)$  es una aplicación armónica simétrica de  $(M_i, g)$  en  $S^2$ .*

Hemos denotado por  $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$  al espacio de métricas riemannianas en  $M_i$  simétricas con respecto a  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y por  $C_{sim}^{r,\alpha}(M_i, S^2)$  al espacio de aplicaciones simétricas de  $M_i$  en  $S^2$  cuyas diferenciales de orden menor o igual que  $r$  satisfacen una condición de Hölder con respecto a  $0 < \alpha < 1$ . El espacio  $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$  es un abierto de un espacio de Banach y  $C_{sim}^{r,\alpha}(M_i, S^2)$  es una variedad diferenciable modelada sobre un espacio de Banach.

Hacemos notar que  $\Sigma_i$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$  para todo  $r$  y  $\alpha$  por medio de la inclusión que envía cada estructura conforme  $J$  a la única métrica hiperbólica  $g_J$  con curvatura de Gauss constante  $-1$  que induce en  $M_i$  la estructura conforme  $J$ . Dicha métrica es siempre simétrica con respecto a  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Para aplicar este resultado necesitamos probar los dos siguientes lemas:

**Lema 6.11.** *Sea  $J \in \Sigma_g$  con  $g \geq 2$ . Entonces no hay campos de Jacobi simétricos a lo largo de  $\phi_J$ .*

*Demostración:* Si  $V = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\phi_J$ , entonces se tiene, por la ecuación (6.6), que  $\int_M \{|dV|^2 - |\nabla\phi|^2 |V|^2\} dA = 0$ , donde  $dA$  es el elemento de área asociado a cualquier métrica  $g$  compatible con la estructura conforme  $J$ ,  $|dV|^2 = \sum_{i,j} e_j(f_i)^2$  y  $\{e_1, e_2\}$  es una base  $g$ -ortonormal en  $T_p M$ . En consecuencia obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^3 \int_M \{|\nabla f_j|^2 - |\nabla\phi|^2 f_j^2\} dA = 0. \quad (6.7)$$

Si  $V$  es simétrico entonces  $f_i = 0$  en los puntos fijos de  $u_i$ . Esto implica, puesto que  $\phi_i$  es la primera función propia del problema de Dirichlet en  $\Omega_i^\pm$  con valor propio cero del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ , que

$$\int_{\Omega_i^\pm} \{|\nabla f_j|^2 - |\nabla\phi|^2 f_j^2\} dA \geq 0,$$

y, por la ecuación (6.7), la igualdad se da en la anterior desigualdad. Entonces  $f_i$  es también una primera función propia de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  con valor propio 0 para el problema de Dirichlet en  $\Omega_i^\pm$ . Deducimos que  $f_i = \lambda_i \phi_i$  para algún número real  $\lambda_i$  y, como  $V$  es tangente a  $S^2$ , tenemos que:

$$0 = \langle \phi, V \rangle = \lambda_1 \phi_1^2 + \lambda_2 \phi_2^2 + \lambda_3 \phi_3^2.$$

Tomando puntos en  $M$  fijos por  $g$ ; deducimos que  $\lambda_i = 0$  para todo  $i$  y, por tanto,  $V = 0$ .

□

**Lema 6.12.** *Supongamos que  $g \geq 2$ . Consideremos una aplicación diferenciable  $\Phi : U \subset \Sigma_g \rightarrow C_{sim}^{r+2,\alpha}(M_g, S^2)$ , donde  $U$  es un abierto conexo de  $J_0$  tal que  $\Phi(J_0) = \phi_{J_0}$ .*

*Entonces  $\Phi(J) = \phi_J$  para todo  $J \in U$ .*

*Demostración:* Probaremos que  $(\phi_J)_i > 0$  en  $\Omega_i^+$  para  $J \in U$ . Concluimos entonces aplicando el apartado (iii) del teorema 6.7.

Fijamos  $\Omega \subset \Omega_i^+$  abierto relativamente compacto tal que  $\bar{\Omega} \subset \Omega_i^+$ . Consideremos el conjunto:

$$A = \{J \in U; (\phi_J)_i > 0 \text{ en } \Omega\}.$$

El conjunto  $A$  es abierto y no vacío en  $U$ . Veamos que  $A$  es cerrado en  $U$ . Si  $J_n \in A$  y  $J_n \rightarrow J \in U$ , entonces  $(\phi_{J_n})_i > 0$  en  $\Omega$  y, por tanto,  $(\phi_J)_i \geq 0$  en  $\Omega$ . Si  $(\phi_J)_i(p) = 0$  para algún  $p \in \Omega$  entonces, como  $\phi_J$  es una aplicación simétrica que no puede ser idénticamente cero, una línea nodal de  $(\phi_J)_i$  pasa a través de  $p$  y se tiene que  $(\phi_J)_i$  cambia de signo en un entorno de  $p$ . Esto implica que  $(\phi_{J_n})_i$  cambia de signo en un entorno de  $p$  para  $n$  suficientemente grande, lo que nos lleva a contradicción. Como  $U$  es conexo, se tiene que  $(\phi_J)_i > 0$  en  $\Omega$  para todo  $J \in U$ . Como  $\Omega$  es arbitrario, se sigue que  $(\phi_J)_i > 0$  en  $\Omega_i^+$  para todo  $i = 1, 2, 3$  y  $J \in U$ , lo que prueba el lema por la observación al comienzo de la demostración.

□

De los lemas 6.11 y 6.12 y del teorema 6.10 se sigue la diferenciabilidad de la aplicación  $J \mapsto \phi_J$ :

**Teorema 6.13.** *Supongamos que  $g \geq 2$ . La aplicación  $\Sigma_g \rightarrow C_{sim}^{k,\alpha}(M_g, S^2)$  que envía  $J \in \Sigma_g$  a la aplicación  $\phi_J$  es diferenciable ( $= C^\infty$ ) para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , y  $0 < \alpha < 1$ .*

**Nota.** La misma demostración prueba que no hay campos de Jacobi simétricos cuando  $g = 1$  y la aplicación armónica  $\phi_J$  no está contenida en un ecuador de  $S^2$ . No obstante, si  $(\phi_J)_1 \equiv 0$ , consideramos la primera función propia  $u$  para el

problema de Dirichlet del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ , para una métrica simétrica compatible con la estructura conforme, en  $\Omega_1^-$  y la extendemos diferenciablemente a todo  $M_1$ . Los argumentos del lema 6.11 prueban que el espacio de campos de Jacobi simétricos a lo largo de  $\phi_J$  es de dimensión uno y está generado por  $d\phi_J(u \frac{\partial}{\partial x_1})$ . Por tanto, en el caso de género uno, si  $\phi_1 \equiv 0$ , no podemos garantizar la dependencia diferenciable de las aplicaciones  $\phi_J$ .

Consideremos la composición de la aplicación  $J \mapsto \phi_J$  con el funcional energía, y sea  $F(J) = E_J(\phi_J)$ . Entonces se tiene:

**Teorema 6.14.** *Sea  $g \geq 2$ . Los puntos críticos de  $F : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}$  son las estructuras conformes  $J$  para las que  $\phi_J$  es antiholomorfa.*

*Más aún,  $F : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  no tiene puntos críticos y los puntos críticos de  $F : \Sigma_3 \rightarrow \mathbb{R}$  son las estructuras conformes  $J \in \Sigma_3$  para las que  $(M, J)$  es hiperelíptica.*

*Demostración:* Sea  $J_0 \in \mathcal{V}_g$  y  $\phi_0 = \phi_{J_0}$ . Supongamos que  $dF_{J_0} = 0$ . Sea  $g_0$  una métrica simétrica en  $M$  que induce la estructura conforme  $J_0$ .

Consideremos una variación diferenciable  $g(t)$  de  $g_0$  por métricas simétricas de modo que el soporte de la variación este contenido en un abierto coordinado  $V$  simétrico contenido en el complemento de las curvas de puntos fijos de  $u_i$ . Cada  $g(t)$  induce una estructura conforme  $J(t)$  que está en  $\Sigma_g$ .

Por la definición de  $F$  tenemos que  $F(J(t)) \leq E_{J(t)}(\phi_0)$  y que  $F(J(0)) = E_{J(0)}(\phi_0)$ . Por tanto, las derivadas de dichas funciones coinciden en  $t = 0$  y tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= dF_{J_0}(J'(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(J(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_{J(t)}(\phi_0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_M |\nabla\phi_0|_t^2 dA_t \\ &= \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sum_{i,j} g^{ij}(t) \langle d\phi_0(e_i), d\phi_0(e_j) \rangle \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dA_0, \end{aligned}$$

donde  $|\nabla\phi_0|_t^2$  y  $dA_t$  son la densidad de energía y el elemento de área con respecto a la métrica riemanniana  $g(t)$ ,  $\{e_1, e_2\}$  es una  $g_0$  base ortonormal en  $V$ ,  $(g^{ij})$  es la matriz inversa de  $(g_{ij})$  y  $g_{ij}(t) = g_t(e_i, e_j)$ . Calculamos la anterior derivada y obtenemos:

$$\int_M \frac{1}{2} (g'_{11}(0) - g'_{22}(0)) \{ |d\phi_0(e_1)|^2 - |d\phi_0(e_2)|^2 \} (p) \\ - 2g'_{12}(0) \langle d\phi_0(e_1), d\phi_0(e_2) \rangle (p) dA_0.$$

Como  $g'_{11}(0) - g'_{22}(0)$  y  $g'_{12}(0)$  se pueden elegir arbitrariamente, obtenemos que  $|d\phi_0(e_1)|^2 - |d\phi_0(e_2)|^2$  y  $\langle d\phi_0(e_1), d\phi_0(e_2) \rangle$  son iguales a cero en  $V$ . Se sigue fácilmente por continuidad que  $\phi_0$  es conforme o anticonforme.  $\square$

Tenemos la siguiente cota para la energía de las aplicaciones de Gauss si  $g \leq 2$ :

**Proposición 6.15.**

- (i) Si  $J \in \Sigma_1$ , entonces  $0 < E_J(\phi_J) < 16\pi$ ,
- (ii) Si  $J \in \Sigma_2$ , entonces  $8\pi < E_J(\phi_J) < 24\pi$ .

*Demostración:* Usaremos la desigualdad:

$$E(\phi) \geq 2 \text{area}(\phi) = 2 \int_M |\text{Jac}(\phi)|, \quad (6.8)$$

ver [Le], donde la igualdad se da si y sólo si  $\phi$  es conforme o anticonforme. Puesto que la integral de la derecha en (6.8) está acotada inferiormente por  $\text{area}(S^2) \text{grado}(\phi) = 4\pi(g-1)$ , tenemos que  $E(\phi) \geq 8\pi(g-1)$ . Si la igualdad se da en desigualdad tenemos también la igualdad en (6.8) y esto implicaría que  $\phi$  es conforme o anticonforme, lo que no es posible por la proposición 6.9. Esto prueba la cota inferior.

Para obtener la cota superior consideremos las funciones meromorfas:

$$f(z, w) = \frac{i w}{(z-i)(z-ia)} \quad \text{en } w^2 = (z^2+1)(z^2+a^2), \\ f(z, w) = \frac{-i w}{(z-i)(z-ia)(z-ib)} \quad \text{en } w^2 = (z^2+1)(z^2+a^2)(z^2+b^2).$$



Hacemos notar que las primeras funciones tienen grado dos y las segundas grado tres, y verifican:

$$\begin{aligned} f \circ h_1 &= -\bar{f}, \\ f \circ h_2 &= \bar{f}, \\ f \circ h_3 &= \frac{1}{\bar{f}}. \end{aligned}$$

Por tanto, la composición con la inversa de la proyección estereográfica proporcionaría una aplicación simétrica anticonforme  $\eta$  cuya energía es  $16\pi$  en el primer caso y  $24\pi$  en el segundo. Esto prueba que  $E(\phi) \leq 16\pi$  en el caso de género uno y que  $E(\phi) \leq 24\pi$  en el caso de género dos. Si la igualdad se da en cualquiera de estas desigualdades, por el apartado (i) del teorema 6.7,  $\phi$  se obtendría de  $\eta$  por composición con alguna simetría de  $S^2$  y entonces  $\phi$  sería una aplicación conforme o anticonforme, lo que no es posible de nuevo por la proposición 6.9.

□

### 6.3 Inmersiones asociadas

**Teorema 6.16.** *Sea  $J \in \Sigma_g$ . Existe una única inmersión conforme, salvo homotecias,  $\psi_J : (M, J) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$  generado por vectores ortogonales, tal que las simetrías  $A_i$  de la aplicación de Gauss extienden a simetrías de  $\psi_J$ .*

*Además  $\text{rango}(\Gamma) = \text{género}(M_g)$ .*

*Demostración:* Supongamos en primer lugar que la aplicación  $\phi = \phi_J$  es armónica y no antiholomorfa. El teorema 1.12 nos garantiza que, si para  $H \neq 0$ , la imagen  $\Gamma$  de la aplicación  $H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\text{Re} \int_{\gamma} \Phi = \text{Re} \int_{\gamma} (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \text{Re} \int_{\gamma} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \frac{-2\overline{d''g}}{H(1 + |g|^2)^2},$$

es un subgrupo discreto de traslaciones, entonces existe una inmersión conforme y ramificada  $\psi_J : (M, J) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  con curvatura media constante  $H$ . La inmersión  $\psi_J$  es libre de puntos de ramificación porque estos son los ceros de  $(d\phi)^{1,0} = g_{\bar{z}} d\bar{z}$ , donde  $g$  es la proyección estereográfica de  $\phi$ , y el número de ceros de  $(d\phi)^{1,0}$ ,

contados con multiplicidad, es  $-\chi(M) + \text{grado}(\phi)\chi(S^2)$ , ver [EW], que es igual a cero en nuestro caso.

Tan sólo queda comprobar los períodos. Por el trabajo de Hoffman y Osserman [HO], se tiene que las simetrías de las aplicaciones de Gauss extienden a simetrías de la uno forma de Weierstrass  $\Phi$  y se tiene que  $u_i^*\Phi = A_i(\Phi)$ . Combinando el lema 6.2 con esta igualdad se tiene, para el caso de género uno, que:

$$\int_{\gamma_1} \Phi = (0, \int_{\gamma_1} \Phi_2, 0),$$

$$\int_{\gamma_2} \Phi = (0, 0, 0),$$

y  $\text{Re} \int_{\gamma_1} \Phi_2 \neq 0$ , ya que  $\psi(\gamma_1)$  es una curva plana en  $\mathbb{R}^3$  tal que la coordenada  $\phi_3$  del vector normal tiene signo.

En el caso de género dos, tenemos, por el lema 6.3 que:

$$\int_{\gamma_1} \Phi = \int_{\gamma_4} \Phi = (0, 0, 0),$$

$$\int_{\gamma_2} \Phi = (\int_{\gamma_2} \Phi_1, 0, 0),$$

$$\int_{\gamma_3} \Phi = (0, \int_{\gamma_3} \Phi_2, 0),$$

y, de nuevo,  $\text{Re} \int_{\gamma_2} \Phi_1 \neq 0$ ,  $\text{Re} \int_{\gamma_3} \Phi_2 \neq 0$ , ya que las curvas  $\psi(\gamma_2)$  y  $\psi(\gamma_3)$  son planas y el normal  $\phi_3$  tiene signo a lo largo de ellas.

En el caso de género tres, tenemos que:

$$\int_{\gamma_2} \Phi = \int_{\gamma_4} \Phi = \int_{\gamma_6} \Phi = (0, 0, 0),$$

$$\int_{\gamma_1} \Phi = (\int_{\gamma_1} \Phi_1, 0, 0),$$

$$\int_{\gamma_3} \Phi = (0, \int_{\gamma_3} \Phi_2, 0),$$

$$\int_{\gamma_5} \Phi = (0, 0, \int_{\gamma_5} \Phi_3),$$

y, de nuevo, las curvas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$  y  $\gamma_5$  dan períodos de la inmersión.

Como la aplicación de Gauss determina la inmersión [Ke,HO] hemos probado la unicidad en este caso.

Tratamos ahora el caso antiholomorfo. Sabemos que en este caso  $M$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2)$ , con  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ ,  $\operatorname{Re}(a)$ ,  $\operatorname{Im}(a) > 0$ , y que la proyección estereográfica de  $\phi$  es  $z$ . La 1-forma holomorfa  $\omega = dz/w$  induce una inmersión minimal multivaluada  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un retículo generado por vectores ortogonales, sin puntos de ramificación por medio de la representación de Weierstrass, ver [M]. A causa de las simetrías de la 1-forma de Weierstrass  $\Phi = ((1 - z^2), i(1 + z^2), 2z)\omega$ , obtenemos de [M] que  $\psi$  es una inmersión simétrica a  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un retículo de rango tres generado por vectores ortogonales.

Para ver la unicidad de  $\psi$  sólo tenemos que probar la de  $\omega$ . Hacemos notar que, puesto que los ceros de  $\omega$  están prescritos (deben estar en los ceros de  $z$  y con orden doble para evitar la ramificación de la inmersión), tenemos que cualquier uno-forma que dé una inmersión minimal de  $M$  con aplicación de Gauss  $z$  debe ser  $\lambda e^{i\theta}\omega$ , con  $\lambda > 0$  y  $\theta \in [0, \pi)$ , y podemos suponer que  $\lambda = 1$ . Para obtener una inmersión simétrica, la uno-forma de Weierstrass  $e^{i\theta}\Phi$  asociada al par  $(z, e^{i\theta}\omega)$  debe verificar  $h_i^*(e^{i\theta}\Phi) = \overline{A_i(e^{i\theta}\Phi)}$  y esto implicaría  $e^{2i\theta}h_i^*\Phi = \overline{A_i(\Phi)}$ . Como  $h_i^*\Phi = \overline{A_i(\Phi)}$ , deducimos que  $\theta = 0$ , lo que prueba la unicidad de  $\psi$ . □

**Teorema 6.17.** *La inmersión  $\psi_J$  construida en el teorema anterior es un embebimiento.*

*Demostración:* Sea  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^+$ . Es suficiente probar que  $\psi(\overline{\Omega})$  es embebida y que  $\psi(\Omega)$  es un grafo sobre los tres planos coordenados de  $\mathbb{R}^3$ . Esto implica que  $\psi(\overline{\Omega})$  está en un octante de  $\mathbb{R}^3$  determinado por planos ortogonales y, puesto que la inmersión se obtiene reflejando  $\psi(\overline{\Omega})$  por las simetrías con respecto a los tres planos coordenados, obtenemos que  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es un embebimiento.

Consideremos el campo vectorial  $X_j = \nabla\psi_j/|\nabla\psi_j|^2$  en  $M \setminus \{g_i(p) = p\}$ , que es ortogonal a  $h_j(p) = p$  y tangente a  $h_i(p) = p$  con  $j \neq i$  cuando está definido. Sea  $\varphi_i^j$  el grupo uniparamétrico local de difeomorfismos definido por  $X_j$  y  $p \in \Omega$ . Sea  $I$  el máximo intervalo alrededor de 0 sobre el que está definida la trayectoria  $\varphi_i^j(p)$  y contenida en  $\overline{\Omega}$ . Afirmamos que si  $a \in \overline{I} \setminus \operatorname{int}(I)$  entonces o bien  $a \in I$  y  $\varphi_a^j(p)$  está en una curva de puntos fijos de  $h_j$  en  $\overline{\Omega}$  o bien  $a \notin I$  y entonces  $\varphi_i^j(p)$  se acerca a un máximo o mínimo local de  $\psi_j$  cuando  $t \rightarrow a$ . Supongamos que  $t_n \rightarrow \partial I$ . Podemos suponer que  $\varphi_{t_n}^j(p) \rightarrow q \in \overline{\Omega}$ . El punto  $q$  no puede estar en  $\Omega$ , porque la trayectoria se extendería a un intervalo mayor. Si  $q \in \partial\Omega$  entonces  $q$  no

puede ser un punto fijo de exactamente una de las simetrías  $h_j$ , con  $j \neq i$ , porque las curvas de puntos fijos de  $h_j$  donde  $X_j$  está definido son curvas integrales de  $X_j$ . Por tanto las únicas posibilidades son  $h_j(q) = q$  o  $g_j(q) = q$ . Supongamos que  $g_j(q) = q$ . Puesto que la curvatura de Gauss de  $M$  en  $q$  no es cero, deducimos que el hessiano de  $\psi_j$  calculado en coordenadas locales no es degenerado en  $q$  y, por el lema de Morse,  $\psi_j$  tiene un máximo o un mínimo en  $q$  o un punto silla. Se puede descartar la posibilidad de un punto silla porque en este caso las curvas integrales de  $\nabla\psi_j$  en  $\Omega$ , que son reparametrizaciones de las curvas integrales de  $X_j$ , no se acercan a  $q$ . De estas observaciones se sigue la afirmación.

Hacemos notar que hay como mucho un máximo o un mínimo en  $\psi_j$  en  $\bar{\Omega}$  y la trayectoria  $\varphi_i^j(p)$  no pueden tender a estos puntos en los extremos del intervalo. En los extremos de  $I$  la trayectoria no puede estar en la misma curva de puntos fijos de  $h_j$  puesto que  $X_j$  es ortogonal a dicha curva y nunca es cero.

Llamemos  $C$  a la curva de la frontera de  $\Omega$  que consiste en puntos fijos de  $h_j$  que no son fijos por otra simetría  $h_i$ ,  $i \neq j$ . Puesto que para cada  $p \in \Omega$  la trayectoria  $\varphi_i^j(p)$  corta a  $C$ , de la discusión anterior deducimos que existe un intervalo  $J$  de números reales tal que

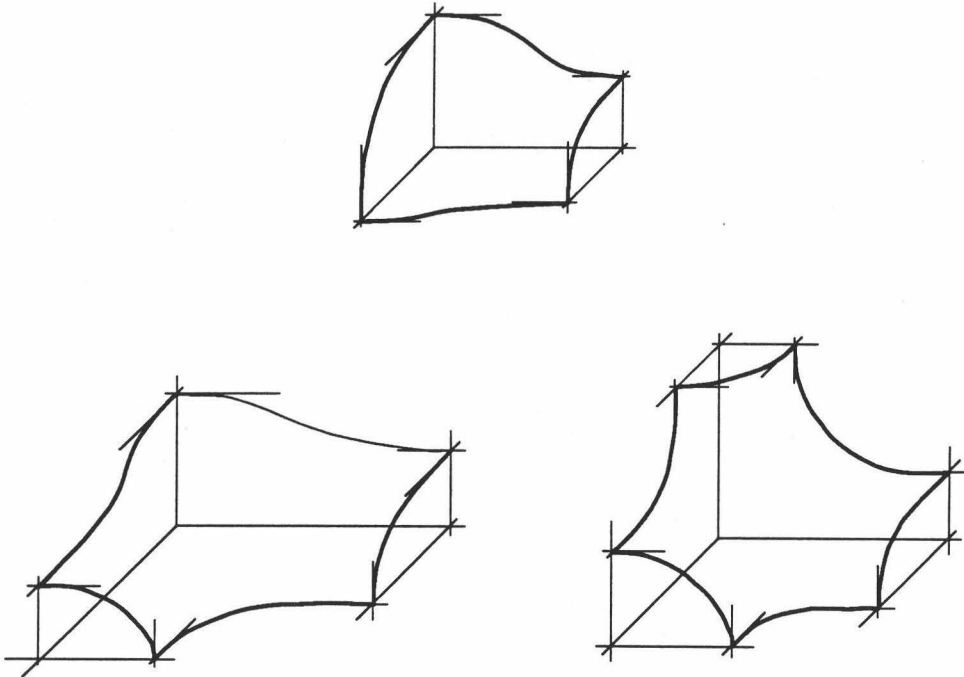
$$\bigcup_{t \in J} \varphi_i^j(C) = \bar{\Omega} \setminus \{h_j(p) = p; j \neq i\}.$$

Puesto que  $\psi_j(\varphi_i^j(p)) = \psi_j(p) + t$ , los cortes  $\Pi_j^t \cap \bar{\Omega} \setminus \{h_j(p) = p; j \neq i\}$ , donde  $\Pi_j^t$  son los planos  $x_j = t$ , son curvas conexas difeomorfas por  $\varphi_i^j$  a  $C$ . Estas curvas son grafos sobre los planos coordenados  $\Pi_i^0$ , con  $i \neq j$ , porque  $\phi_i \neq 0$  a lo largo del corte. Esto implica que  $\psi(\Omega)$  es embebida.

Para terminar la demostración probaremos que  $\psi(\partial\Omega)$  tiene una proyección inyectiva sobre cada plano coordenado  $\Pi_j^0$ . Pero es fácil ver que la proyección de  $\psi(\partial\Omega)$  sobre  $\Pi_j^0$  está en la frontera de la proyección de  $\psi(\Omega)$  sobre  $\Pi_j^0$  y esto implica que la proyección es inyectiva.

□

Una representación aproximada de las superficies  $\psi(\Omega)$ , con  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$ , viene dada en la figura 6.3:

Figura 6.2.  $\psi(\overline{\Omega})$ 

#### 6.4 Límites de las familias $\Sigma_i$

En esta sección discutiremos como se comportan las inmersiones  $\psi_J$  cuando  $J \in \Sigma_g$  diverge. Comenzaremos en primer lugar por la familia  $\Sigma_2$ .

El lema 6.5 nos da una representación de  $(M_2, J)$  como un revestimiento ramificado de dos hojas de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Una sucesión de estructuras conformes asociada a una sucesión de revestimientos diverge si los valores de ramificación  $a$  y  $b$  tienden a identificarse.

Discutiremos en detalle el caso  $a \rightarrow 0$  y  $b$  fijo. Para  $a > 0$  suficientemente pequeño, consideremos un disco  $D_{\varepsilon(a)} \subset \mathbb{C}$  centrado en 0 de radio  $\varepsilon(a)$  tal que  $a < \varepsilon(a) < 1$  y  $\varepsilon(a) \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow 0$ .

La aplicación  $w = (z - ia)/(z + ia)$  envía  $ia \rightarrow \infty$  y  $-ia \rightarrow 0$ , y la preimagen  $A_{\varepsilon(a)}$  de  $w(D_{\varepsilon(a)})$  por el revestimiento  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  dado por  $z \mapsto z^2$  es conforme a  $z^{-1}(D_{\varepsilon(a)})$ . Las simetrías  $u_i$  en  $M_2$  se transforman en las simetrías de  $\overline{\mathbb{C}}$  con respecto a los tres círculos ortogonales  $\text{Re}(z) = 0$ ,  $\text{Im}(z) = 0$  y  $|z| = 1$ . Además

$$\bigcup_{i=1}^3 A_{\varepsilon(a)} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{+1, -1\}.$$

Podemos considerar las aplicaciones armónicas  $\phi_a$  asociadas a las estructuras conformes de las superficies de Riemann de los polinomios  $w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)$  en  $A_{\varepsilon(a)}$  por medio de la aplicación  $w$ . Como  $E(\phi_a)$  es acotada por la proposición 6.15, podemos extraer por el teorema 5.2 una subsucesión convergente en compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\{+1, -1\} \cup X)$  a una aplicación armónica  $\phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus (\{+1, -1\} \cup X) \rightarrow S^2$ , donde  $X \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{+1, -1\}$  es un conjunto finito. El conjunto  $X$  es vacío, ya que si  $p \in X$ , entonces podemos suponer que  $(\phi_a)_i > 0$  para algún  $i$  y todo  $a < 1$ . Esto implica que la aplicación  $\phi_p$  que se obtiene como en la demostración del teorema 5.2 verifica  $(\phi_p)_i \geq 0$ , lo que implica que  $\phi_p$  es constante por ser una aplicación holomorfa  $\phi_p : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  cuya imagen está contenida en un hemisferio de  $S^2$ . La aplicación  $\phi$  extiende a una aplicación  $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  cuyo grado es  $-1$ , ya que el único punto donde  $\phi(p) = (0, 0, -1)$  es  $\infty$  y el Jacobiano de  $\phi$  en  $\infty$  cambia de signo.

Por el teorema 5.5 existe una sucesión de números reales  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{\lambda_n \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una superficie minimal  $\psi$  con aplicación de Gauss  $\phi$ . Por los resultados de Osserman [O],  $\psi$  debe ser una catenoide o una superficie de Enneper. Como  $\psi$  es límite de superficies embebidas, debe ser la catenoide.

Calculamos ahora el límite de las regiones  $z^{-1}(M \setminus D_{\varepsilon(a)})$  cuando  $\varepsilon(a) \rightarrow 0$  y obtenemos el toro  $T_b \equiv (z^2 + 1)(z^2 + b^2)$  con las tres simetrías  $(z, w) \mapsto (-\bar{z}, \bar{w})$ ,  $(z, w) \mapsto (-\bar{z}, -\bar{w})$  y  $(z, w) \mapsto (\bar{z}, \bar{w})$ . Las aplicaciones  $\phi_a$  en  $z^{-1}(M \setminus D_{\varepsilon(a)})$  son simétricas respecto de estas simetrías y las de los planos coordenados de  $\mathbb{R}^3$ , y convergen a una aplicación simétrica  $\phi : T_b \rightarrow S^2$ . Si  $\phi_i \neq 0$  entonces, reescalando las inmersiones, obtenemos convergencia a una superficie de Delaunay. Si  $\phi_1 \equiv 0$  tenemos convergencia a un toro llano.

El caso (ii) se puede tratar de forma similar.

Cuando  $a \rightarrow 1$  y  $b$  es fijo obtenemos que las regiones  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura 6.3 convergen a esferas y las aplicaciones armónicas límite tienen grado  $-1$ ,  $0$  y  $0$ , respectivamente. Las inmersiones, salvo homotecias, convergen de nuevo a una catenoide. El caso (iv) se puede tratar del mismo modo.

Cuando  $a \rightarrow 0$  y  $b \rightarrow 1$  obtenemos que las regiones  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en la figura 6.4 convergen a cinco esferas puesto que la región  $z^{-1}(D)$  no es conexa. Únicamente la aplicación límite correspondiente a la región  $B$  es una aplicación armónica no constante de grado  $-1$ . De nuevo obtenemos como límite una catenoide en este caso.

Cuando  $a \rightarrow 0$  y  $b \rightarrow \infty$  las regiones  $A$ ,  $B$  and  $C$  de la figura 6.5 convergen a

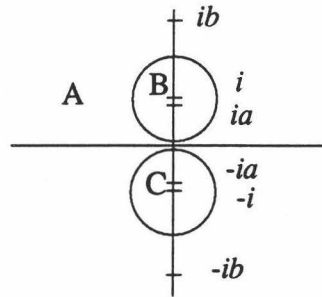


Figura 6.3.

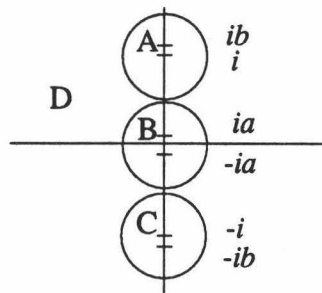


Figura 6.4.

esferas. Las aplicaciones límite tienen grado  $-1$ ,  $+1$  y  $-1$ , respectivamente, y, por tanto, las superficies límites son una esfera umbilical y dos catenoides.

Cuando  $a \rightarrow 1$  y  $b \rightarrow 1$  obtenemos que las regiones  $A$ ,  $B$  de la figura 6.6 convergen a dos toros y la región  $C$  converge a una esfera. Las aplicaciones armónicas límite sobre los toros son constantes y el límite sobre la esfera tiene grado  $-1$ . El límite en este caso es una catenoide y dos toros totalmente geodésicos.

Cuando  $a \rightarrow 1$  y  $b \rightarrow \infty$  tenemos que las regiones  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura 6.7 convergen a esferas y la región  $D$  converge a dos esferas. Tenemos que únicamente en  $C$  el límite es una aplicación no constante de grado  $-1$ , y de nuevo en el límite obtenemos una catenoide.

En el caso de la familia de género uno, sabemos que la inmersión  $\psi_J$  correspondiente a  $J \in \Sigma_1$  es o bien un tubo embebido alrededor de una geodésica cerrada o la pieza simplemente periódica más pequeña de un onduloide. Cada  $(M_1, J)$ , con  $J \in \Sigma_1$ , es la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)$ , con  $0 < a < 1$ . Cuando  $a \rightarrow 0$  la aplicación de mínima energía no puede ser la

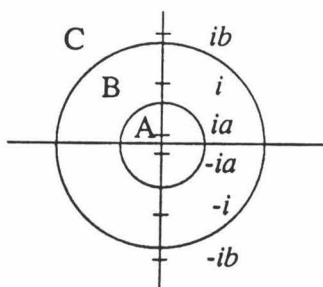


Figura 6.5.

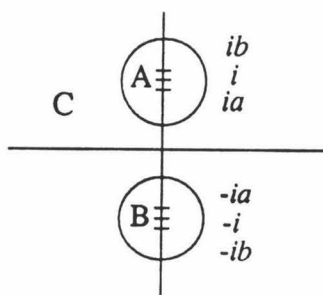


Figura 6.6.

aplicación de Gauss de un tubo alrededor de una geodésica cerrada y, por tanto, para  $a$  suficientemente pequeño, la inmersión asociada es un onduloide.

Los mismos argumentos que en el caso de género dos prueban que cuando  $a \rightarrow 0$  obtenemos como superficies límites una esfera totalmente umbilical y una catenoide.

Las superficies minimales de la familia son conformes a las superficies de Riemann de los polinomios  $w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2)$ . En este caso, podemos encontrar dos tipos de degeneración:

Si  $a \rightarrow e^{i\theta}$  es  $e^{i\theta}$  es distinto de  $\pm 1$  y  $\pm i$  entonces obtenemos en el límite dos superficies de Scherk simplemente periódicas cuya representación de Weierstrass viene dada por:

$$w^2 = (z - e^{i\theta})(z + e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(z + e^{-i\theta})$$

$$g(z, w) = z, \quad \omega(z, w) = \frac{dz}{w^2}.$$





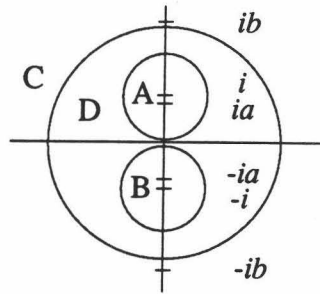


Figura 6.7.

Si  $a \rightarrow e^{i\theta}$  y el punto  $e^{i\theta}$  es igual a  $+1$ ,  $-1$ ,  $+i$  o  $-i$  obtenemos en el límite dos catenoides con finales en los puntos de  $\overline{\mathbb{C}}$  correspondientes a  $e^{i\theta}$  y  $-e^{i\theta}$ .

## 6.5 Caracterización de los ejemplos

**Teorema 6.18.** Sean  $\Gamma$  un retículo de  $\mathbb{R}^3$  generado por vectores paralelos a los vectores coordenados, y  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  un embebimiento con curvatura media constante de una superficie compacta y conexa y orientable, con género mayor que cero, en  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  con aplicación de Gauss  $\phi : M \rightarrow S^2$ . Supongamos que  $\psi$  verifica que  $A_i \circ \psi = \psi$ , donde  $A_i$  es una simetría respecto a una subvariedad totalmente geodésica paralela a la proyección del  $i$ -ésimo plano coordenado de  $\mathbb{R}^3$ , con  $i = 1, 2, 3$ , y que  $\phi_i(p) = 0$  si y solo si  $\psi(p)$  es un punto fijo de  $A_i$ .

Entonces, se tiene que:

- (i) género( $M$ )  $\leq 3$  y la estructura conforme  $J$  de  $M$  está en  $\Sigma_g$ .
- (ii) La aplicación de Gauss de  $\phi$  es mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.
- (iii) La inmersión  $\psi$  levanta a un revestimiento de  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , y el levantamiento coincide con la inmersión  $\psi_J$ .

*Demostración:* Llamemos  $u_i$  a la restricción de  $A_i$  a  $M$ . Entonces tenemos que  $\psi \circ u_i = A_i \circ \psi$  y que  $\phi \circ u_i = A_i \circ \phi$ . Por hipótesis  $\phi_i(p) = 0$  si y sólo si  $u_i(p) = p$ . Hacemos notar que  $u_i$  son involuciones anticonformes que conmutan con puntos fijos para la estructura de superficie de Riemann inducida por la métrica riemanniana de  $M$ .

Consideramos los subgrupos de transformaciones conformes de  $M$  dados por  $G_i = \{\text{Id}, g_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y  $G = \{\text{Id}, g_1, g_2, g_3\}$ , donde  $g_i = u_{i+1} \circ u_{i+2}$ , con  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Los puntos fijos de  $g_j$  son los puntos fijos comunes de  $u_{j+1}$  y  $u_{j+2}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_3$ .

Los cocientes  $M/G_i$  y  $M/G$  son superficies de Riemann con género  $\gamma_i$  y  $\gamma$ , respectivamente. Llamemos  $B_i$  al orden total de ramificación de la proyección  $M \rightarrow M/G_i$  y  $B$  al orden total de ramificación de  $M \rightarrow M/G$ . Puesto que el grado de cada proyección es el orden del subgrupo correspondiente, la fórmula de Riemann-Hurwitz demuestra que:

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= \text{orden}(G_i)(2\gamma_i - 2) + B_i, \\ 2g - 2 &= \text{orden}(G)(2\gamma - 2) + B. \end{aligned}$$

Los puntos de ramificación de  $M \rightarrow M/G_i$  son los puntos fijos comunes de  $u_{i+1}$  y  $u_{i+2}$ , y la ramificación de estos puntos es siempre uno; por tanto:

$$B_i = \#\{\text{puntos fijos comunes de } u_{i+1} \text{ y } u_{i+2}\}.$$

Los puntos de ramificación de  $M \rightarrow M/G$  son los puntos fijo comunes de dos involuciones diferentes  $u_i$  y el orden de ramificación es siempre uno. Por tanto:

$$B = \#\{\text{puntos fijos comunes de } u_j \text{ y } u_k; j \neq k\}.$$

Tenemos entonces que  $B = \sum_{i=1}^3 B_i$  y, sumando las primeras ecuaciones en  $i$ , y sustrayendo la última tenemos que:

$$g + 2\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3. \quad (6.9)$$

Denotaremos por  $\nabla\psi_j$  a los campos vectoriales en  $M$  inducidos por las coordenadas multivaluadas  $\psi_j$  de la inmersión  $\psi$ . Es fácil ver que:

- (i) Los ceros de  $\nabla\psi_j$  son aislados y coinciden con los puntos fijos de  $g_j$ . Estos puntos son máximos y mínimos locales y puntos de silla de  $\psi_j$ .
- (ii) El índice del campo vectorial  $\nabla\psi_j$  es igual a  $+1$  en los máximos y mínimos locales de  $\psi_j$  y  $-1$  en los puntos silla.
- (iii) El campo vectorial  $\nabla\psi_j$  induce un campo vectorial en  $M/G_j$  con índice  $+1$  en las imágenes de los puntos de índice  $+1$  y con índice cero  $0$  en las imágenes de los puntos de índice  $-1$ .

Para probar (i) hay que tener en cuenta que  $(\nabla\psi_j)_p = 0$  si y sólo si  $\phi(p) = (\dots, \overset{(i)}{\pm 1}, \dots)$  y esto es equivalente a  $g_j(p) = p$ . Entonces  $p$  es un punto crítico aislado de  $\psi_j$ , que no es degenerado porque la curvatura de Gauss no es cero en dichos puntos por una aplicación del principio del máximo. Por el lema de Morse  $\psi_j$  sólo puede tener en  $p$  o bien un máximo o mínimo local o bien un punto de silla.

(ii) se sigue de la anterior descripción de los puntos críticos de  $\psi_j$  y (iii) porque en un entorno de  $p$ , la aplicación  $M \rightarrow M/G_i$  se comporta como  $z \mapsto z^2$ .

En cualquier caso, tenemos que la proyección del campo  $\nabla\psi_j$  a  $M/G_j$  sólo tiene puntos de índice no negativo, de modo que  $\gamma_i \leq 1$ . Si  $g = \text{género}(M) = 2, 3$  entonces obtenemos de la ecuación (6.9) que  $\gamma = 0$ . Si  $g = 1$ , puesto que al menos dos curvas de puntos fijos de distintas involuciones  $u_i$  se intersecan, tenemos que  $M/G_i$  es conforme a  $S^2$  para algún  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Esto implica que la aplicación holomorfa  $M \rightarrow M/G_i$  tiene puntos de ramificación y, por tanto,  $\gamma_i$  debe ser 0 y, en consecuencia,  $\gamma = 0$ . De la ecuación (6.9) podemos suponer que:

$$\text{Si } g = 1 \text{ entonces } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 0, 0),$$

$$\text{si } g = 2 \text{ entonces } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 1, 0),$$

$$\text{si } g = 3 \text{ entonces } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 1, 1).$$

Si el género de  $M$  es uno o dos, la aplicación  $M \rightarrow M/G_3$  es una aplicación holomorfa a  $\overline{\mathbb{C}}$  que está ramificada sobre cuatro o seis puntos de  $M/G_3$  con ramificación de orden uno. Las involuciones  $u_1$  y  $u_2$  se proyectan a la misma involución anticonforme  $\bar{u}$  de  $M/G_3$  y  $u_3$  se proyecta a una involución  $\bar{v}$  distinta de  $\bar{u}$ . Tanto  $\bar{u}$  como  $\bar{v}$  tienen puntos fijos. Puesto que las involuciones  $u_i$  conmutan tenemos que  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  conmutan. Por tanto podemos suponer que  $\bar{u}(z) = -\bar{z}$  y que  $\bar{v}(z) = \bar{z}$ . Esto implica que los puntos de ramificación de  $M \rightarrow M/G_3$  están en el eje imaginario y son simétricos con respecto a  $z \mapsto \bar{z}$ . Podemos suponer que estos puntos son  $\pm i$  y  $\pm ia$ , y  $0 < a < 1$ , en el caso de género uno, y que son  $\pm i$ ,  $\pm ia$  y  $\pm ib$ , con  $0 < a < 1 < b < \infty$  en el caso de género dos, lo que implica que  $M$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)$  en el primer caso o a la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)$  en el segundo caso. De esta descripción se sigue inmediatamente, por resultados de teoría de revestimientos, que  $M$  es difeomorfo a  $M_g$ , con  $g = 1, 2$ , por medio de un difeomorfismo que preserve las involuciones  $u_i$ . Esto permite concluir que la estructura conforme de  $M$  pasa por el difeomorfismo  $M \rightarrow M_g$  a una estructura conforme en  $\Sigma_g$ .

En el caso de género tres, la aplicación  $M \rightarrow M/G$  es la composición  $M \rightarrow M/G_3 \rightarrow M/G$ . Las tres involuciones anticonformes  $u_i$  se proyectan a la misma involución anticonforme  $u$  en  $M/G$ , que es conforme a  $\overline{\mathbb{C}}$ . Podemos suponer que  $u(z) = \bar{z}$ . Puesto que la aplicación  $M \rightarrow M/G$  tiene grado cuatro, de la fórmula de Riemann–Hurwitz y el hecho de que cada par de puntos de ramificación se aplica en un único valor de ramificación, deducimos que existen seis puntos de ramificación en la línea de puntos fijos de  $\bar{h}$  y podemos suponer que estos son  $a_1 < \dots < a_6$ .

Consideremos el conjunto abierto  $\Omega \subset M$  donde las coordenadas de  $\phi$  son negativas. Tenemos que  $\Omega$  es una componente conexa de la preimagen por la aplicación  $z : M \rightarrow M/G$  de uno de los semiplanos donde  $\operatorname{Re}(z)$  no es cero y, por tanto,  $\Omega$  tiene una frontera diferenciable a trozos que consiste en seis curvas de puntos fijos de las involuciones  $u_i$ . Recordemos que los puntos fijos de  $g_i$  son puntos regulares de  $\phi$ . El grado de  $\phi$  es  $-2$  por el teorema de Gauss–Bonnet y, por tanto, en los vértices del polígono  $\partial\Omega$  hay exactamente dos puntos donde  $\phi$  toma los valores  $(\dots, -1, \dots)$  y no hay otros puntos donde  $\phi$  tome estos valores. Consideremos un punto  $p$  en  $\partial\Omega$  donde  $\phi(p) = (-1, 0, 0)$  y  $\{v, w\}$  una base orientada de vectores tangentes en  $p$  a las curvas de puntos fijos de  $u_i$ , con  $i \neq 1$ . Un cálculo directo del jacobiano de  $\phi$  en  $p$  implica que  $v$  es tangente a  $u_2(q) = q$  y que  $w$  es tangente a  $h_3(q) = q$ . Un argumento similar implica que si  $\phi(p) = (0, -1, 0)$  y  $\{v, w\}$  es una base orientada de vectores tangentes en  $p$  a las curvas de puntos fijos de  $u_i$ ,  $i \neq 2$ , entonces  $v$  es tangente a  $u_3$  y  $w$  es tangente a  $u_1$ , y si  $\phi(p) = (0, 0, -1)$  y  $\{v, w\}$  es una base orientada de vectores tangentes en  $p$  a las curvas de puntos fijos de  $u_i$ ,  $i \neq 3$ , entonces  $v$  es tangente a  $u_1$  y  $w$  es tangente a  $u_2$ . Esto implica que las curvas de puntos fijos están distribuidas como en la figura 6.8 y, por tanto, las curvas de puntos fijos se proyectan a los segmentos de la figura 6.9.

Llamemos  $S'$  a  $\overline{\mathbb{C}}$  menos los valores de ramificación y  $M'$  a  $z^{-1}(S')$ . Entonces la restricción  $z : M' \rightarrow S'$  es un revestimiento no ramificado normal (Galois) con grupo de transformaciones  $G$  y, por tanto,  $\pi_1(M')$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(S')$ . El grupo  $\pi_1(S')$  está generado por cinco lazos  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , con base en el mismo punto que rodean una vez a los puntos  $a_2 < \dots < a_6$ , respectivamente. Hacemos notar que  $\gamma_i^2$  levanta a una curva cerrada a uno de los toros  $M/G_j$  y, por tanto, levanta a una curva cerrada en  $M$ .

El grupo  $\pi_1(S')/\pi_1(M')$  tiene orden cuatro y, como los generadores  $\gamma_i$  de  $\pi_1(S')$  tienen orden dos, tenemos que  $\pi_1(S')/\pi_1(M')$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Consideramos, para  $i$  fijo, la aplicación:

$$M \longrightarrow M/G_i \longrightarrow M/G \cong \overline{\mathbb{C}},$$

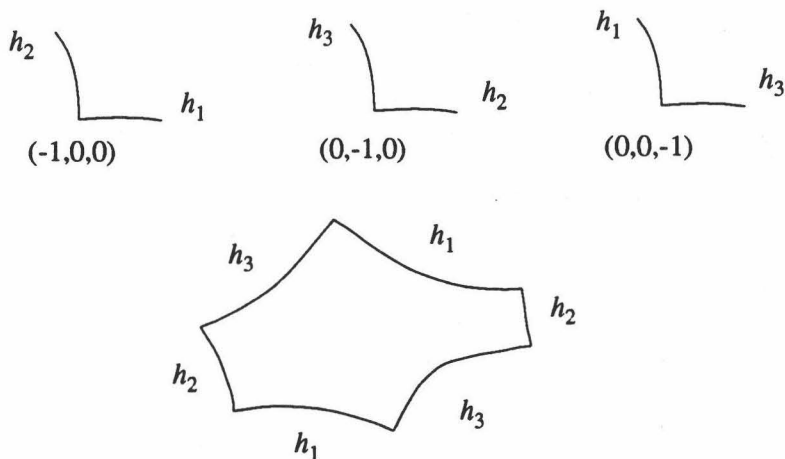


Figura 6.8.

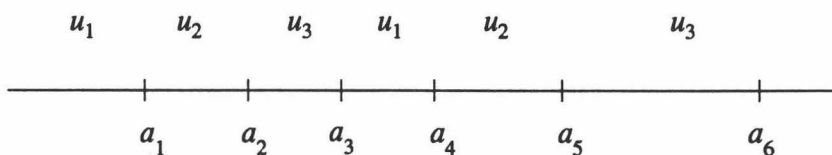


Figura 6.9.

y hacemos notar que los puntos de ramificación de  $M \rightarrow M/G_i$  son los puntos fijos de  $g_i$  y los valores de ramificación de  $M/G_i \rightarrow M/G$  son las imágenes de los puntos fijos de  $g_{i+1}$  y  $g_{i+2}$ . Esto implica que si  $\gamma^i$  es uno de los generadores  $\gamma_j$  de  $\pi_1(S')$  rodeando la imagen de un punto fijo de  $g_i$ , entonces  $\gamma^i$  levanta a una curva cerrada en  $M/G_i$  y si  $\gamma^k$  rodea la imagen de una punto fijo de  $g_k$ , con  $k \neq i$ , entonces  $\gamma^k$  no levanta a una curva cerrada en  $M/G_i$  y, por tanto  $\gamma^i * (\gamma^k)^{-1}$ , donde  $*$  denota la composición de arcos, no levanta a una curva cerrada en  $M/G_i$  y, obviamente, no puede levantar a una curva cerrada en  $M$ . Esto demuestra que  $\pi_1(M')$  debe ser el núcleo del morfismo:

$$\begin{aligned} \gamma_1, \gamma_4 &\longmapsto (1, 0), \\ \gamma_2, \gamma_5 &\longmapsto (0, 1), \\ \gamma_3 &\longmapsto (1, 1), \end{aligned}$$

y un argumento de teoría de revestimientos prueba que  $M$  es difeomorfo a  $M_3$ ,

por medio de un difeomorfismo que preserva las involuciones  $u_i$ . Esto permite concluir que la estructura conforme de  $M$  pasa por el difeomorfismo  $M \rightarrow M_3$  a una estructura conforme en  $\Sigma_3$ .

Estos argumentos demuestran el punto (i).

El apartado (ii) se sigue inmediatamente del punto (iii) del teorema 6.7.

El punto (iii) es inmediato, ya que si  $\Gamma'$  es la imagen por  $\psi$  del grupo fundamental de  $\pi_1(M)$ , entonces  $\psi$  levanta a  $\mathbb{R}^3/\Gamma'$  y, por el teorema 6.16,  $\psi$  es la inmersión asociada a la aplicación armónica  $\phi$ .

□

Para superficies estables simétricas obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 6.19.** *Sean  $\Gamma$  un retículo de  $\mathbb{R}^3$  generado por vectores paralelos a los vectores coordenados, y  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  un embebimiento estable no totalmente geodésico de una superficie compacta, con género mayor que cero, y orientable en  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  con aplicación de Gauss  $\phi : M \rightarrow S^2$ .*

*Entonces se tiene:*

- (i)  $\text{género}(M) \leq 3$  y la estructura conforme  $J$  de  $M$  está en  $\Sigma_g$ .
- (ii) La aplicación de Gauss de  $\phi$  es mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.
- (iii) La inmersión  $\psi$  levanta a un revestimiento de  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , y el levantamiento coincide con la inmersión  $\psi_J$ .

*Demostración:* La superficie  $M$  es conexa por el teorema 2.5, ya que no es totalmente geodésica. Sea  $u_i$  la restricción de  $A_i$  a  $M$ . Si el embebimiento es simétrico se tiene que  $u_i(p) = p$  implica que  $\phi_i(p) = 0$ . Sean  $\Omega_i^\pm$  las componentes conexas de  $M \setminus \{u_i(p) = p\}$ .

Si hay alguna componente  $\phi_i$  idénticamente cero, entonces  $\phi$  es la aplicación de Gauss de un tubo estable embebido alrededor de una geodésica cerrada. En este caso, se tiene que  $E(\phi) \leq E(\eta)$  para cualquier aplicación  $\eta : M \rightarrow S^2$  simétrica.

Por tanto, podemos suponer que ninguna componente  $\phi_i$  es idénticamente cero. Si hay un punto  $q \in \Omega_i^+$  tal que  $\phi_i(q) = 0$  entonces, como  $\phi_i$  es una función propia de valor propio cero para el problema de Dirichlet  $\Omega_i^+$  del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  que cambia de signo en  $\Omega_i^+$ , deducimos que la primera función propia  $u$  del problema

de Dirichlet en  $\Omega_i^+$  tiene valor propio negativo. Esto implica que:

$$\int_M |\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2 = \int_M -u(\Delta u + |\nabla \phi|^2 u) < 0$$

Entonces la función  $v$  definida en  $M$  por:

$$v = \begin{cases} u, & \text{on } \Omega_i^+, \\ -u \circ h_i, & \text{on } \Omega_i^-, \end{cases}$$

es una función diferenciable con media cero tal que  $\int_M \{|\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2\} < 0$ , lo que contradice la hipótesis de estabilidad y, por tanto,  $\phi_i$  no tiene ceros en  $\Omega_i^\pm$ . El teorema se sigue entonces del teorema 6.18. □

Puesto que las soluciones del problema isoperimétrico son superficies estables, podemos probar el siguiente resultado para dominios isoperimétricos en las variedades  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  que admiten tres simetrías ortogonales:

**Teorema 6.20.** *Sean  $\Gamma$  un retículo de  $\mathbb{R}^3$  generado por vectores paralelos a los vectores coordenados, y  $\Omega \subset \mathbb{R}^3/\Gamma$  un dominio isoperimétrico. Sea  $M = \partial\Omega$  y  $\phi : M \rightarrow S^2$  la aplicación de Gauss de  $M$ . Supongamos que el género de  $M$  es positivo.*

*Entonces se tiene:*

- (i) *género( $M$ )  $\leq 3$  y la estructura conforme  $J$  de  $M$  está en  $\Sigma_g$ .*
- (ii) *La aplicación de Gauss de  $\phi$  es mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.*
- (iii) *La inmersión  $\psi$  levanta a un revestimiento de  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , y el levantamiento coincide con la inmersión  $\psi_J$ .*

*Demostración:* La superficie  $M$  es simétrica con respecto a tres superficies totalmente geodésicas que se cortan ortogonalmente por el teorema de simetrización de Hsiang [Hs]. Puesto que las fronteras de dominios isoperimétricos son superficies estables concluimos aplicando el teorema 6.19. □

## 6.6 Comentarios

No todas las superficies que hemos construido en este capítulo son estables. Los teoremas de compacidad para superficies estables de los capítulos 4 y 5 lo prueban cuando el género de  $M$  es mayor que uno. Además, si un toro admite una inmersión como superficie de Delaunay, entonces su aplicación de Gauss es un mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas, y sabemos por los resultados del capítulo 2, que estas inmersiones no son estables.

Es posible que ninguna de las superficies que hemos construido en este capítulo sea solución del problema isoperimétrico.





## Bibliografía

- [Ab] W. Abikoff, "The real analytic theory of Teichmüller space", Lecture Notes on Mathematics, **820**, Springer-Verlag, 1976.
- [A] U. Abresch, "Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions", *J. reine u angew. Math.*, **374**, 169–192, 1987.
- [Al] A.D. Alexandrov, "Uniqueness theorems for surfaces in the large", I, *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, **11**, no. 19, 5–17, 1956.
- [Alm] F.J. Almgren, "Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints", *Mem A.M.S.*, **4**, 165, 1976.
- [BdC] J.L. Barbosa, M. do Carmo, "Stability of hypersurfaces with constant mean curvature", *Math. Z.*, **185**, 339–353, 1984.
- [BdCE] J.L. Barbosa, M. do Carmo, J. Eschenburg, "Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds", *Math. Z.*, **197**, 123–138, 1988.
- [dC] M. do Carmo, "Geometría diferencial de curvas y superficies", Alianza Universidad Textos, Madrid, 1990.
- [dCD] M. do Carmo, M. Dajczer, "Helicoidal surfaces with constant mean curvature", *Tōhoku Math. J.*, **34**, 425–435, 1982.
- [dCP] M. do Carmo, C.K. Peng, "Stable complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes", *Bull. A.M.S.*, **1**, 903–906, 1979.
- [Ch] B.Y. Chen, "Geometry of submanifolds", Marcel Dekker, New York, 1973.
- [Chen] W. H. Chen, "The generalized Weierstrass formula for surfaces in  $\mathbb{R}^3$ ", *Acta Math. Sinica*, **30**, 361–367, 1987. (MR 90f:53009 53A10).
- [Chg] S.Y. Cheng, "Eigenfunctions and nodal sets", *Comm. Math. Helv.*, **51**, 43–55, 1976.
- [CS] H.I. Choi, R. Schoen, "The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature", *Invent. Math.*, **81**, 387–394, 1985.

- [De] C. Delauney, "*Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*", J. Math. pures et appl. **1**, 309–320, 1841.
- [EL] J. Eells, L. Lemaire, "*Deformation of metrics and associated harmonic maps*", Geometry and Analysis, Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi, Springer-Verlag, 1981.
- [EW] J. Eells, J.C. Wood, "*Restrictions of harmonic maps of surfaces*", Topology, **15**, 263–266, 1976.
- [Ei] L.P. Eisenhart, "*Riemannian Geometry*", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1925.
- [EI] A. El Soufi, S. Ilias, "*Majoration de la seconde valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications*", J. of Func. Anal., **103**, 294–316, 1992.
- [FK] H.M. Farkas, I. Kra, "*Riemann Surfaces*", Lecture Notes on Mathematics, 71, Springer-Verlag, 1980.
- [FC] D. Fischer-Colbrie, "*On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*", Invent. Math., **82**, 121–132, 1985.
- [FCS] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen, "*The structure of complete stable minimal surfaces in three manifolds of non negative scalar curvature*", Comm. Pure Appl. Math., **33**, 199–211, 1980.
- [Fo] O. Forster, "*Lectures on Riemann Surfaces*", Lecture Notes on Mathematics, 81, Springer-Verlag, 1981.
- [F] T. Frankel, "*On the fundamental group of a compact minimal submanifold*", Ann. Math., **83**, 68–73, 1966.
- [Fr] K. Frensel, "*Stable complete surfaces with constant mean curvature*", Anais Acad. Bras. Cien., **60**, 115–117, 1988.
- [Ga] F. Gackstatter, "*H. Hopf's quadratic differential and a Weierstrass formula for general surfaces and surfaces of constant mean curvature*", Coll. de Phys., **23**, colloque C7, 1990.
- [GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, "*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*", 2nd ed., Springer-Verlag, 1983.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, "*Principles of Algebraic Geometry*", Pure and Applied Math., Wiley-Interscience series, 1978.
- [Gr] M. Gromov, "*Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*", Invent. Math., **82**, 307–347, 1985.

- [GB] K. Große Brauckmann, "New surfaces of constant mean curvature", *Math. Ann.*, **214**, 527–565, 1993.
- [HPR] J. Hass, J.T. Pitts, J.H. Rubinstein, "*Existence of unstable minimal surfaces in manifolds with homology and applications to triply periodic minimal surfaces*", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Volume Greene, 1992.
- [H] E. Heintze, "*Extrinsic upper bounds for  $\lambda_1$* ", *Math. Ann.*, **280**, 389–402, 1988.
- [Her] J. Hersch, "*Quatre propriétés isoperimétriques des membranes sphériques homogènes*", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **270**, 1645–1648, 1970.
- [HM] D. Hoffman, W.H. Meeks, "*Embedded minimal surfaces of finite topology*", *Ann. Math.*, **131**, 1–34, 1990.
- [HM1] D. Hoffman, W.H. Meeks, "*Limits of minimal surfaces and Scherk's second surface*", *Univ. Massachusetts*.
- [HM2] D. Hoffman, W.H. Meeks, "*The strong halfspace theorem for minimal surfaces*", *Invent. Math.*, **101**, 373–377, 1990.
- [HO] D. Hoffman, R. Osserman, "*The Gauss map of surfaces in  $\mathbb{R}^n$* ", *J. Diff. Geom.*, **18**, 733–754, 1983.
- [H] H. Hopf, "*Differential Geometry in the Large*", 2nd ed., *Lecture notes in Mathematics*, 1000, Springer-Verlag.
- [Hs] W.Y. Hsiang, "*Isoperimetric regions and soap bubbles*", *Diff. Geom.*, edited by B. Lawson and K. Tenenblat, *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics*, **52**, 229–240, Longman Sci. & Tech., 1991.
- [Hu] A. Huber, "*On subharmonic functions and differential geometry on the large*", *Comm. Math. Helv.*, **32**, 181–206, 1957.
- [K1] N. Kapouleas, "*Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three space*", *Ann. Math.*, **131**, 239–330, 1990.
- [K2] N. Kapouleas, "*Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*", *J. Diff. Geom.*, **33**, 683–715, 1991.
- [Kar] H. Karcher, "*The triply periodic minimal surfaces of Alan Schoen and their constant mean curvature companions*", *Manusc. Math.*, **64**, 291–357, 1989.
- [Kar1] H. Karcher, "*Construction of minimal surfaces*", *Univ. Bonn*, 1989.

- [Kar2] H. Karcher, "Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples, *Manusc. Math.*, **62**, 83–114, 1988.
- [Ke] K. Kenmotsu, "Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature", *Math. Ann.*, **245**, 89–99, 1979.
- [KKS] N.J. Korevaar, R. Kusner, B. Solomon, "The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature", *J. Diff. Geom.*, **30**, 465–503, 1989.
- [K] R. Kusner, "Conformal geometry and complete minimal surfaces", *Bull. A.M.S.*, **17**, 291–295, 1987.
- [L] H.B. Lawson, Jr., "Complete Minimal Surfaces in  $S^3$ ", *Ann. Math.*, **92**, 335–374, 1970.
- [Le] L. Lemaire, "Applications harmoniques de surfaces riemanniennes", *J. Diff. Geom.*, **13**, 51–78, 1978.
- [LY] P. Li, S.T. Yau, "A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces", *Invent. Math.*, **69**, 269–291, 1982.
- [LR] F.J. López, A. Ros, "Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces", *Comm. Math. Helv.*, **64**, 34–43, 1989.
- [M] W.H. Meeks, "The theory of triply periodic minimal surfaces", *Indiana Univ. Math J.*, **39**, no. 3, 877–936, 1990.
- [MeR] W.H. Meeks, H. Rosenberg, "The maximum principle at infinity for minimal surfaces in flat three manifolds", *Comm. Math. Helv.*, **65**, 255–270, 1990.
- [MeR1] W.H. Meeks, H. Rosenberg, "The global theory of doubly periodic minimal surfaces", *Invent. Math.*, **97**, 351–379, 1989.
- [MeR2] W.H. Meeks, H. Rosenberg, "The geometry of periodic minimal surfaces", *Comm. Math. Helv.*, **68**, 538–579, 1993.
- [MSY] W.H. Meeks, L. Simon, S.T. Yau, "Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature", *Ann. Math.*, **116**, 621–659, 1982.
- [MR] S. Montiel, A. Ros, "Schrödinger operators associated to a holomorphic map", *Proceedings Conference on Global Differential Geometry and Global Analysis, Berlin, 1990, Lecture Notes on Mathematics*, 1481, 147–174.

- [Mu] D. Mumford, "A remark on Mahler's compactness theorem", Proc. A.M.S., **28**, 289–294, 1971.
- [N] J.C.C. Nitsche, "Lectures on minimal surfaces", Vol. 1, Cambridge University Press.
- [O] R. Osserman, "A survey of minimal surfaces", Dover Publications, New York, 2nd edition, 1986.
- [Pa] B. Palmer, PhD Thesis, Standford, 1986.
- [Pa2] B. Palmer, "Index and stability of harmonic Gauss maps", (aparecerá en Math. Z.).
- [Pe] R. Pedrosa, "On the uniqueness of isoperimetric regions in cylindrical spaces", PhD Thesis, Berkeley, 1988.
- [PR] J. Pérez, A. Ros, "Some uniqueness and nonexistence theorems for embedded minimal surfaces", Math. Ann., **295**, 513–525, 1993.
- [PS] U. Pinkall, I. Sterling, "On the classification of constant mean curvature tori", Ann. Math., **130**, 407–451, 1989.
- [P] J.T. Pitts, "Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds", Mathematical Notes, **27**, Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [PR] J.T. Pitts, J.H. Rubinstein, "Equivariant minimax and minimal surfaces in geometric three-manifolds", Bull. A.M.S., **19**, 303–309, 1988.
- [R] M. Ritoré, "Complete orientable index one minimal surfaces embedded in complete orientable flat three manifolds", preprint, Univ. Granada, 1994.
- [R1] M. Ritoré, "Harmonic maps and examples of constant mean curvature surfaces", preprint, Univ. Granada, 1994.
- [R2] M. Ritoré, "Harmonic maps and stable periodic constant mean curvature surfaces", preprint, Univ. Granada, 1994.
- [RR] M. Ritoré, A. Ros, "Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms", Comm. Math. Helv., **67**, 293–305, 1992.
- [RR2] M. Ritoré, A. Ros, "Embedded index one minimal surfaces and stable constant mean curvature surfaces in flat three manifolds", preprint, Univ. Granada, 1994.
- [Ros] A. Ros, "The Gauss map of minimal surfaces", Univ. Granada.
- [Ro] M. Ross, "Schwarz's  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{D}$  surfaces are stable", Diff. Geom. App., **2**, 179–195, 1992.

- [Ro2] M. Ross, "Complete nonorientable minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ ", *Comm. Math. Helv.*, **67**, 64–76, 1992.
- [RV] E. Ruh, J. Vilms, "The tension field of the Gauss map", *Transactions A.M.S.*, **149**, 1970, 569–573.
- [SaU] J. Sacks, K. Uhlenbeck, "The existence of minimal immersions of 2-spheres", *Ann. Math.*, **113**, 1–24, 1981.
- [SaU2] J. Sacks, K. Uhlenbeck, "Minimal immersions of closed Riemann surfaces", *Transactions A.M.S.*, **271**, 639–652, 1982.
- [Sch] E. Schmidt, "Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl", *Math. Z.*, **49**, 1–109, 1943.
- [Sc] R. Schoen, "Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces", *J. Diff. Geom.*, **18**, 791–809, 1983.
- [Sm] B. Smyth, "The generalization of Delaunay's theorem to surfaces with continuous internal symmetry".
- [SY] R. Schoen, S.T. Yau, "On univalent harmonic maps between surfaces", *Invent. Math.*, **44**, 265–278, 1978.
- [SY2] R. Schoen, S.T. Yau, "Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature", *Ann. Math.*, **110**, 127–142, 1979.
- [S] A. da Silveira, "Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature", *Math. Ann.*, **277**, 629–638, 1987.
- [Si] L. Simon, "Lectures on geometric measure theory", *Proc. C.M.A.*, **3**, Australian Natl. U., 1983.
- [So] M. Soret, "Deformations des surfaces minimales", Thésé de Doctorat, Université Paris VII, 1993.
- [Sou] R. Souam, "Stabilité et unicité des surfaces minimales", Thésé de Doctorat, Université Paris VII, 1992.
- [Sp] M. Spivak, "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", vol. 4, 2 ed., Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
- [T] J.E. Taylor, "The structure of singularities in solutions to ellipsoidal problems with constraints in  $\mathbb{R}^3$ ", *Ann. Math.*, **103**, 541–546, 1976.
- [TAHH] E.L. Thomas, D.M. Anderson, C.S. Henkee, D. Hoffman, "Periodic area-minimizing surfaces in block copolymers", *Nature*, **334**, No. 6184, 598–601, 1988.

- [TT] F. Tomi, A. Tromba, "*A geometric proof of the Mumford compactness theorem*", Proc. of the DD7 Symposium on PDE, Lecture Notes on Mathematics, **1306**, 174–181, 1986.
- [We] H. Wente, "*Counterexample to a conjecture of H. Hopf*", Pac. J. Math. **121**, 193–243, 1986.
- [W] B. White, "*Curvature estimates and compactness theorems in 3-manifolds for surfaces that are stationary for parametric elliptic functionals*", Invent. Math., **88**, 243–256, 1987.
- [Wolf] J.A. Wolf, "Spaces of constant curvature", 1st ed., Publish or Perish, Inc., 1984.
- [Wo] J.G. Wolfson, "*Gromov's compactness of pseudo-holomorphic curves and symplectic geometry*", J. Diff. Geom., **28**, 383–405, 1988.
- [Wu] H. Wu, "*On the volume of a noncompact manifold*", Duke Math. J., **49**, 71–78, 1982.
- [Y] S.T. Yau, "*Nonlinear analysis in geometry*", L'enseignement Math., **33**, 109–158, 1987.