

~~F. PROU. 21/57~~
79/88

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 10-11-95
ENTRADA N.º 2735

Departamento de Física Aplicada

**DESARROLLO DE TÉCNICAS DE PROCESADO DE SEÑAL
MEDIANTE ESTADÍSTICA DE ÓRDENES SUPERIORES.
APLICACIÓN A LA DISCRIMINACIÓN DE
BLANCOS DE RADAR.**

**BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA**
N.º Documento 615056636
N.º Copia 616303854

**Diego Pablo Ruiz Padillo
TESIS DOCTORAL
Granada, 1995**

UNIVERSIDAD DE GRANADA
3 NOV. 1995
COMISION DE DOCTORADO

Dña. M^a del Carmen Carrión Pérez, Doctora en Ciencias Físicas y Profesora Titular del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, y

D. Juan Antonio Morente Chiquero, Doctor en Ciencias Físicas y Profesor Titular del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

MANIFIESTAN:

Que la presente Memoria titulada "Desarrollo de técnicas de procesado de señal mediante Estadística de Órdenes Superiores. Aplicación a la discriminación de blancos de radar", presentada por Diego Pablo Ruiz Padillo para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas, ha sido realizada bajo nuestra dirección en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Con esta fecha autorizamos la presentación de la misma.

Granada, 2 de Noviembre de 1995



Fdo: M^a del Carmen Carrión Pérez



Fdo: Juan A. Morente Chiquero

Memoria presentada por Diego Pablo Ruiz Padillo para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.



Fdo: Diego Pablo Ruiz Padillo



Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la "Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT)" de España, bajo el proyecto número TIC95-0465.

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. CUMULANTES Y MOMENTOS DE SEÑALES ALEATORIAS Y DETERMINISTAS	13
I-1. Introducción	15
I-2. Cumulantes y momentos de señales aleatorias	16
I.2.1. Definición de cumulantes y momentos	16
I.2.2. Momentos y cumulantes de algunas funciones de densidad de probabilidad (pdf's)	18
I.2.3. Relación entre momentos y cumulantes	21
I.2.4. Propiedades de los momentos y cumulantes	23
I.2.5. Momentos y cumulantes de procesos estacionarios	25
I.2.6. Ergodicidad y momentos	29
I-3. Poliespectros	31
I.3.1. Definición basada en la TF	31
I.3.2. Definición alternativa basada en la representación espectral de Cramer	33
I.3.3. Casos especiales de poliespectros	34
I.3.4. El espectro de cumulantes frente al de momentos	37
I.3.5. Función de coherencia de orden n	38
I.3.6. Proceso blanco de orden n	39
I-4. Propiedades de los Poliespectros de procesos estacionarios	40
I.4.1. Procesos Gaussianos	41
I.4.2. Cambios de fase lineal	41
I.4.3. Procesos Gaussianos y no Gaussianos a través de sistemas lineales .	42
(a) Cumulantes de salida de procesos lineales no Gaussianos	43
(b) Sistemas de fase mínima, máxima y mixta	46

I.4.4.	Sistemas no lineales operando bajo entrada aleatoria	49
(a)	Sistemas no lineales excitados por procesos sinusoidales	50
(b)	Acoplos cuadráticos de fase	52
(c)	Procesos Gaussianos aplicados a sistemas no lineales	54
(d)	Procesos lineales no Gaussianos frente a no lineales	55
I-5.	Momentos o correlaciones de señales deterministas	56
I.5.1.	Definición de momentos o correlaciones de señales deterministas energéticas	58
I.5.2.	Propiedades de los momentos de señales deterministas energéticas	58
I.5.3.	Casos especiales de correlaciones de alto orden	50
I.5.4.	Momentos o correlaciones cruzadas de señales energéticas	60
I.5.5.	Definición de los poliespectros de momentos de señales deterministas energéticas	61

**PRIMERA PARTE. ESTIMACION DE PARAMETROS DE EXPONENCIALES
COMPLEJAS AMORTIGUADAS.**

INTRODUCCIÓN A LA PRIMERA PARTE	65
--	-----------

CAPÍTULO II. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE EXPONENCIALES COMPLEJAS AMORTIGUADAS USANDO CORRELACIONES DE ALTO ORDEN. TEORÍA Y MÉTODO	69
--	-----------

II-1. Introducción	71
II-2. Revisión de métodos	75
(A) El método de Prony original y extendido	76

(B)	El método de Prony en estadística de tercer orden	80
(C)	El método de Kumaresan-Tufts (KT)	81
(D)	Generalización del metodo KT al dominio biespectral	86
(E)	El método de la matriz tipo CTOM (media de tercer orden restringida)	92
II-3.	Planteamiento del problema basándose en correlaciones de alto orden (HOC)	95
II-4.	Planteamiento basado en HOC. Número de datos infinito	97
II-5.	Planteamiento basado en HOC. Número de datos finito	100
II.5.1.	Estimador estándar sesgado o "biased"	101
II.5.2.	Estimador tipo covarianza	104
II.5.3.	Una definición alternativa del estimador tipo covarianza	108
II-6.	Planteamiento basado en HOC. Número finito de datos contaminados con ruido	109
II-7.	Extensión a correlaciones de cuarto orden	112
II-8.	Conclusiones	117

CAPÍTULO III. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE EXPONENCIALES COMPLEJAS AMORTIGUADAS USANDO CORRELACIONES DE ALTO ORDEN. ALGORITMO Y RESULTADOS

119

III-1.	Introducción	119
III-2.	Matrices de correlación de alto orden	121
III-3.	El problema de la identificabilidad	128
III-4.	Descripción del algoritmo	131
III-5.	Resultados de simulación	133
III-6.	Conclusiones	157

SEGUNDA PARTE. IDENTIFICACION DE PROCESOS MA.

INTRODUCCIÓN A LA SEGUNDA PARTE 163

**CAPÍTULO IV. IDENTIFICACIÓN DE PROCESOS MA. ECUACIONES
PROPUESTAS 169**

IV-1. Introducción 171

**IV-2. Revisión de métodos de identificación de procesos MA usando
cumulantes 174**

IV-3. Planteamiento del problema e hipótesis de partida 179

IV-4. Relaciones generales entre los poliespectros de órdenes k y k-1-ésimos 181

A. Primer conjunto de ecuaciones 182

B. Segundo conjunto de ecuaciones 184

C. Tercer conjunto de ecuaciones basadas en la última "slice"
horizontal ("slice q") 186

IV-5. Relaciones específicas entre el biespectro y el triespectro 194

a) Procesos no distribuidos simétricamente 194

b) Procesos distribuidos simétricamente 198

IV-6. Conclusiones 199

**CAPÍTULO V. IDENTIFICACIÓN DE PROCESOS MA. ALGORITMOS Y
RESULTADOS 201**

V-1. Introducción 203

V-2. Estimación de los coeficientes MA. Soluciones recursivas 204

V-3. Estimación de los coeficientes MA. Soluciones de mínimos cuadrados	207
a) Procesos no distribuidos simétricamente	208
b) Procesos distribuidos simétricamente	214
V-4. Selección del orden del modelo MA.	217
V-5. Resultados de simulación. Procesos no distribuidos simétricamente	220
V-6. Resultados de simulación. Procesos distribuidos simétricamente	243
V-7. Conclusiones	268
a) Procesos de excitación con función densidad de probabilidad no simétrica	269
b) Procesos de excitación con función densidad de probabilidad simétrica	270

TERCERA PARTE. DISCRIMINACION DE BLANCOS DE RADAR.

INTRODUCCIÓN A LA TERCERA PARTE	277
--	-----

CAPÍTULO VI. ESQUEMAS DE IDENTIFICACIÓN Y DISCRIMINACIÓN DE BLANCOS DE RADAR	283
---	-----

VI-1. Introducción	285
VI-2. Técnicas de polarización	287
VI-3. Técnicas basadas en la respuesta en frecuencia	288
a) Técnicas basadas en la medida de la respuesta en frecuencia a determinadas excitaciones	288
b) Técnicas basadas en la comparación de resonancias naturales	293

c) Técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes	294
VI-4. El pulso de extinción (E-pulso)	295
VI-5. Técnicas de optimización	298
VI-6. El filtro de aniquilación de resonancias (FAR)	299
VI.6.1 Síntesis analógica del FAR	303
VI.6.2 Síntesis digital del FAR	305

CAPÍTULO VII. MEJORA DE LA SEÑAL BASADA EN UN MODELADO RACIONAL Y DISEÑO DE UN FILTRO DE SUAVIZADO ÓPTIMO 307

VII-1. Introducción	309
VII-2. Modelado racional de la señal	310
VII-3. Formulación del problema de mejora de la señal	313
VII.3.1 Descomposición del problema original en varios subproblemas relacionados con cada uno de los conjuntos propios S_1 y S_2	314
VII.3.2 Búsqueda del conjunto solución a través de mapeos propios	314
VII.3.3 Formación del mapeo propio compuesto	315
VII.3.4 Algoritmo de búsqueda de la solución óptima	315
VII-4. Construcción del mapeo propio compuesto	316
VII.4.1 Mapeo propio de aproximación a rango fijo	317
VII.4.2 Mapeo propio de aproximación a matriz Toeplitz	318
VII-5. Algoritmo de mejora de la señal exponencial. Mejora por subsecuencias	321
VII-6. Elección del orden del modelo y estimación del número de modos presentes en la señal	325
VII.6.1 Elección del orden del modelo	326

VII.6.2	Estimación del número de modos presentes en la señal . . .	328
VII.6.3	Criterio robusto de detección del orden	330
VII-7.	Filtrado paso-baja de la señal reconstruida	334
VII-8.	Diseño de un filtro de suavizado óptimo	337
VII.8.1.	Características del filtro de suavizado óptimo	337
VII.8.2.	Diseño del FAR inverso. Métodos de extracción de resonancias	338
VII-9.	Algoritmo completo de mejora de la señal. Identificación mediante FAR de órdenes superiores	347
VII-10.	Conclusiones	350

CAPÍTULO VIII. APLICACIÓN DE LA TÉCNICA FAR AL HILO

CILÍNDRICO CONDUCTOR 351

VIII-1.	Introducción	353
VIII-2.	Campo eléctrico dispersado por un hilo conductor. Respuesta impulso del hilo	354
VIII-3.	Estudio de la capacidad de identificación del FAR	363
VIII.3.1	Síntesis de la respuesta impulso del hilo	363
VIII.3.2	Síntesis de los filtros de aniquilación de resonancias	366
VIII.3.3	Identificación mediante el FAR en función de la orientación del blanco	374
VIII.3.4	Identificación mediante el FAR en función del número de resonancias presentes en la respuesta impulso del blanco	376
VIII.3.5	Identificación mediante el FAR en función del periodo de muestreo	382

VIII-4. Identificación mediante el FAR cuando la respuesta del blanco este contaminada con ruido	387
VIII.4.1 Definición de parámetros	387
VIII.4.2 Identificación mediante el FAR	393
VIII.4.3 Identificación usando ventanas y filtros paso-baja	394
VIII.4.4 Identificación mediante el algoritmo de mejora de la señal SVD-Toeplitz y filtrado paso baja	409
VIII.4.5 Identificación mediante el algoritmo compuesto SVD-Toeplitz y Filtrado de suavizado óptimo-Filtrado paso-baja	423
VIII-5. Conclusiones	436

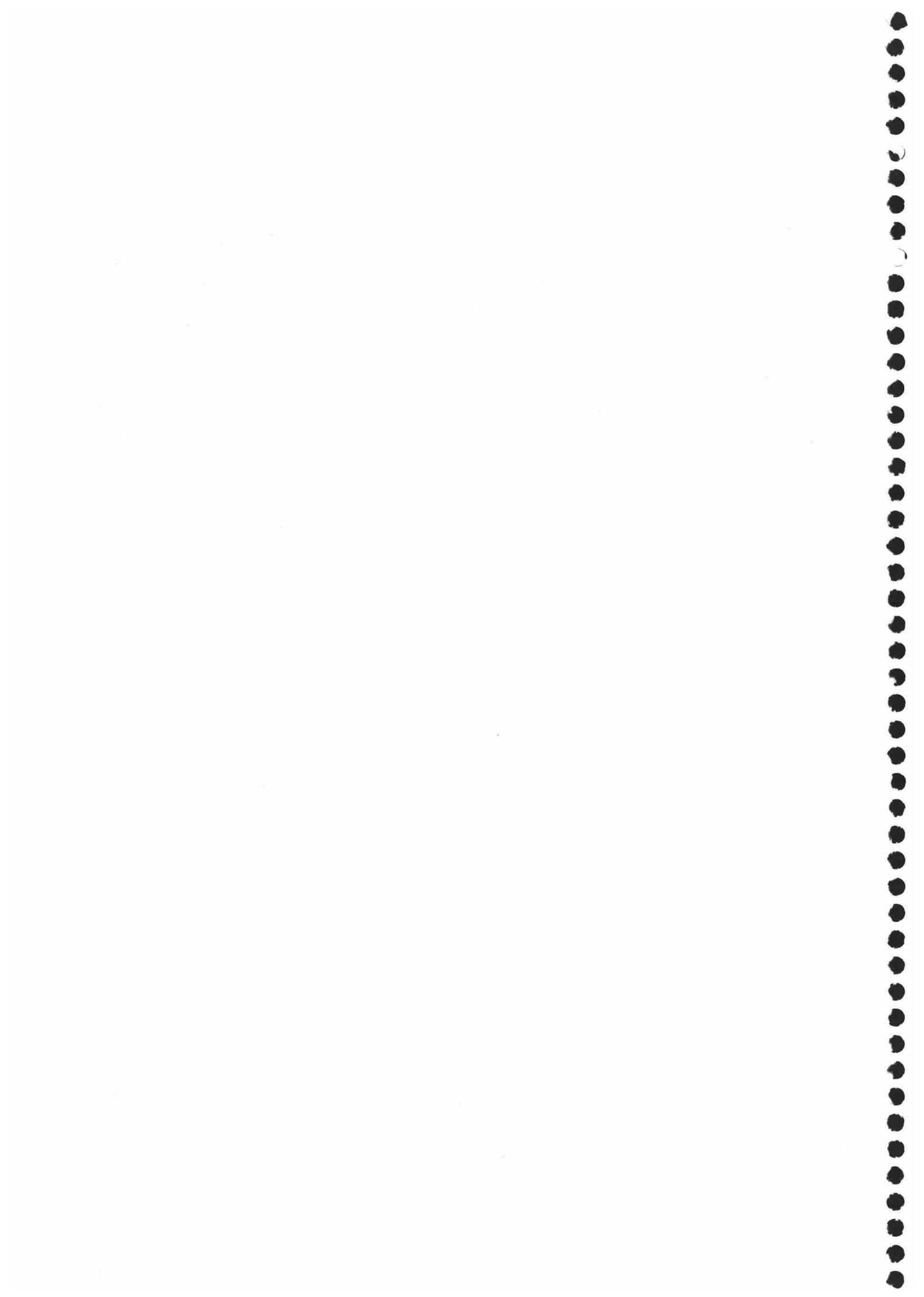
CAPÍTULO IX. COMPARACIÓN ENTRE EL FAR Y EL E-PULSO. EL FILTRO DE EXTINCIÓN. 439

IX-1. Introducción	441
IX-2. Diseño del pulso de extinción (E-pulso)	443
IX.2.1 Síntesis del E-pulso en el dominio del tiempo	443
IX.2.2 Síntesis del E-pulso en el dominio de la frecuencia	445
IX.2.3 Expansión del E-pulso en funciones base	447
IX.2.4 E-pulsos forzado y natural	449
IX-3. Síntesis alternativa del FAR	451
IX-4. Relación entre el FAR y el E-pulso	454
IX.4.1 FAR analógico y E-pulso	454
IX.4.2 FAR digital y E-pulso	455
IX.4.3 Discusión. Analogía entre las funciones base y las ventanas espectrales	458

IX-5. Diseño de un nuevo filtro FIR. El Filtro de Extinción.	464
IX-6. Discriminación en presencia de ruido coloreado	469
IX.6.1 Procedimiento de identificación de la señal de radar usando cumulantes	471
IX.6.2 Resultados de simulaciones	473
IX-5. Conclusiones	484
CONCLUSIONES	487
APÉNDICE A. EL MÉTODO DE EXPANSIÓN EN SINGULARIDADES	493
A-1. Introducción	495
A-2. El concepto de resonancias y de modos naturales	495
A-3. Solución de la ecuación integral mediante funciones de Green causales	498
A-4. Respuesta a una excitación de onda plana	501
A.4.1 Respuesta a una onda plana impulsiva	501
A.4.2 Respuesta temprana y tardía del blanco ("early-time" y "late-time")	506
A.4.3 Respuesta a una onda plana arbitraria	508
APÉNDICE B. TEORÍA CLÁSICA DE LA ESTIMACIÓN DE SEÑALES EN RUIDO	511
B-1. Introducción	513
B-2. Estimación de una señal desconocida en ruido aleatorio mediante	

promedio temporal	515
B-3. Estimación de una señal desconocida en ruido aleatorio mediante el uso de ventanas espectrales	519
B-4. Uso de filtros digitales paso-baja	524
B-5. Elección de los parámetros de los filtros digitales paso-baja y en las ventanas espectrales	529
BIBLIOGRAFÍA	533

INTRODUCCION



Aunque la Teoría de la Señal nace como disciplina científica con entidad propia a mediados de este siglo, impulsada por las necesidades en el campo de las comunicaciones, ha sido en las dos últimas décadas cuando ha experimentado un desarrollo vertiginoso. La causa de este enorme auge es doble. De una parte la expansión y abaratamiento de los equipos de computación y de otra la amplia aplicabilidad de la Teoría de la Señal en campos tan diversos como comunicaciones, astrofísica, geofísica, biomedicina, etc. Todo ello ha dado lugar al desarrollo de un gran cuerpo matemático-teórico que la sustenta y a la implementación de algoritmos cada vez más rápidos y eficaces que permiten abordar el objetivo final en cualquier problema de tratamiento de señal, esto es, procesar mediante computador un conjunto finito de datos y extraer de ellos la máxima información posible contenida en los mismos.

La importancia de la Teoría de la Señal ha sido tenida en cuenta en los últimos Planes de Investigación, tanto a nivel Nacional como Andaluz. Así, en el último Programa Nacional de Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones aparece un objetivo científico-técnico dedicado al análisis y procesado de señal.

La mayoría de las técnicas clásicas de procesado de señal se basan en extraer la información contenida en su estadística de segundo orden (función de autocorrelación), la cual sólo describe estadísticamente de forma completa a una señal si ésta es Gaussiana y de media conocida. Un ejemplo es el conocido espectro de potencia, que basándose en la estadística de segundo orden permite estimar como se distribuye la energía entre las distintas componentes armónicas, pero no proporciona ninguna información sobre la fase de los diferentes armónicos. Sin embargo, la mayor parte de las señales del mundo real no son Gaussianas. Por tanto, existen numerosas situaciones prácticas donde se hace necesaria la búsqueda de otras técnicas que superen las limitaciones inherentes a los

métodos basados exclusivamente en la estadística de segundo orden de la señal. En este contexto, la estadística de órdenes superiores ("Higher Order Statistics" (HOS)) basada en el cálculo de los cumulantes y momentos de alto orden y los espectros de órdenes superiores o poliespectros (biespectro, triespectro,...), aparecen como una herramienta esperanzadora para tratar problemas nuevos o para replantearse otros ya clásicos a la luz de estas nuevas técnicas.

Ya desde la mitad de los años 60, se pueden encontrar trabajos donde se desarrollan técnicas basadas en estadística de órdenes superiores [BRI65] [AKA66] [BRI67a] [BRI67b], así como múltiples aplicaciones en diversas áreas tales como análisis de datos solares [BRI67a] [BRI67b], mecánica de fluidos [LII76], geofísica [HIN68], oceanografía [HAS63], biomedicina [KOR68], telecomunicaciones [BEN80], tratamiento de voz e imágenes [WEL85], series económicas [HIN85a], física de plasmas [KIM80], radar [JOU90], etc. Sin embargo, ha sido en los últimos diez años cuando la comunidad científica dentro del campo del tratamiento digital de señales ha retomado estos conceptos [NIK87] [ROS83] [RAG85] [MEN91], dedicándose un gran esfuerzo investigador que ha motivado la celebración de cuatro "Workshop" internacionales, específicos sobre estadística de órdenes superiores que se celebran bianualmente desde 1989 en los continentes Europeo y Americano alternativamente. Paralelamente, todos los congresos y revistas de la especialidad han incluido secciones especiales y tópicos dedicados al análisis basado en estadística de órdenes superiores.

Los motivos para el uso de las técnicas de estadística de alto orden en el marco del tratamiento digital de señales son tres [NIK93a] [MEN91]. El primero es que permiten superar una de las restricciones más fuertes de las técnicas de eliminación de ruido, como es la de suponer que éste es blanco, lo que equivale a imponer su planitud espectral. Pues bien, las técnicas basadas en HOS permiten eliminar ruido Gaussiano de características

espectrales desconocidas, es decir, cualquier ruido Gaussiano coloreado. Ello se debe a que el biespectro de un proceso estadísticamente Gaussiano es teóricamente nulo. La segunda motivación es que permiten reconstruir tanto la amplitud como la fase de la respuesta de un sistema. Esta motivación se basa en el hecho de que los poliespectros preservan la fase de la señal. Se supera así, la imposición de fase mínima de los métodos de identificación de sistemas basados en estadística de segundo orden, permitiendo el uso de la estadística de órdenes superiores la reconstrucción de señales e identificación de sistemas de fase no mínima. Por último, las técnicas HOS permiten detectar y caracterizar no linealidades en series temporales. Concretamente, estas técnicas juegan un papel muy importante en la detección y caracterización del tipo de no linealidad de un sistema a partir de su respuesta.

Una gran familia de técnicas HOS la constituyen aquellas que se basan en considerar los datos disponibles como la salida de un sistema lineal cuya entrada sea un proceso estadísticamente Gaussiano. Dependiendo del tipo de sistema lineal que se considere oportuno para dichos datos, estas técnicas, que reciben el nombre de paramétricas, se dividen en tres tipos fundamentales: Técnicas "autoregressive" o AR, técnicas "moving-average" o MA y técnicas "autoregressive-moving average" ó ARMA [MAR87] [KAY88]. En las primeras, la función de transferencia del modelo presenta sólo polos en el plano Z , mientras que en las de modelación MA la función de transferencia se caracteriza por tener solamente ceros en el plano Z . Los modelos ARMA son el caso más general con polos y ceros en su función de transferencia.

Esta Memoria se centra en el estudio y desarrollo de técnicas de procesado de señales mediante estadística de órdenes superiores. El objetivo de nuestro estudio es triple, lo que nos ha llevado a dividir el núcleo central de la Memoria en tres partes. De una parte, y basándonos en la experiencia previa del grupo en este campo [CAR86], se ha

abordado el problema de la estimación de parámetros de exponenciales complejas amortiguadas contaminadas con ruido Gaussiano de características espectrales desconocidas. Este problema, que se desarrolla en la primera parte de la Memoria, se enfoca desde un punto de vista totalmente general. Para ello, se ha realizado un estudio teórico que justifica la existencia de una región en el plano de momentos ó en el espacio de las correlaciones de alto orden que permite recuperar los parámetros tanto en el caso de disponer de un número finito como infinito de datos. Ello nos ha permitido proponer un nuevo estimador, denominado estimador tipo covarianza, que mejora los resultados existentes en la bibliografía, reduciendo los errores deterministas asociados con una estimación imperfecta de las correlaciones de alto orden.

En la segunda parte de la Memoria, se aborda el problema de la identificación de procesos MA. Este estudio se enmarca dentro del plan de trabajo del grupo donde se ha desarrollado la Tesis Doctoral, y completa la experiencia del mismo, ya que en anteriores trabajos ya se ha tratado la identificación de sistemas de procesos AR mediante técnicas HOS [GAL94b]. Concretamente, en esta segunda parte de la Memoria, se proponen relaciones generales entre los poliespectros de órdenes k y/o $k-1$ ($k \geq 2$) que conducen a un conjunto de ecuaciones lineales que combinan los cumulantes de salida de órdenes k y $k-1$ del proceso con los coeficientes del sistema, ecuaciones que se mostrarán útiles para identificar un sistema lineal de fase no mínima excitado por una secuencia no gaussiana. Estas ecuaciones generalizan las usadas en métodos lineales existentes basados en mínimos cuadrados tales como el algoritmo del Giannakis-Mendel-Tugnait (GMT) [GIA89a] [TUG90] [TUG91] o aquellos propuestos en [NAN94] y [ZHA94], con la ventaja añadida de que el uso de la secuencia de autocorrelación de la señal es opcional en estas ecuaciones. Esta característica las convierte en especialmente útiles para estimar los coeficientes del sistema MA a partir de medidas de la señal contaminadas con ruido Gaussiano coloreado de espectro de energía desconocido. Las simulaciones numéricas

realizadas confirman las ventajas teóricas esperadas para los métodos propuestos y nos permiten establecer una comparación, tanto entre los métodos lineales propuestos como con otros publicados en la bibliografía. Asimismo se trata el problema de la estimación del orden del modelo, fundamental para una aplicación práctica de los métodos de estimación de parámetros, y se propone un algoritmo de selección del orden del modelo basado en estadística de órdenes superiores o cumulantes de la señal de salida.

Finalmente, nos hemos propuesto aplicar las técnicas de estimación de parámetros de exponenciales complejas amortiguadas (resonancias naturales complejas), desarrolladas en la primera parte de la Memoria, en el campo de la discriminación e identificación de blancos de radar. Este problema se plantea tanto en radares convencionales como en radares de subsuperficie [PET94]. Aunque no ha sido objeto de estudio en esta Memoria, es de destacar la importancia del segundo tipo de radares, ya que se han convertido recientemente en una alternativa interesante para la detección, localización e identificación de objetos y estructuras ocultas bajo la superficie terrestre (exploración de restos arqueológicos, localización de tuberías, determinación de niveles de agua, detección de túneles ocultos, etc).

En general, en todo esquema de identificación de un blanco de radar se precisa de la extracción de parámetros ligados con su geometría y composición, a partir del campo electromagnético dispersado. De esta forma la identificación se realiza comparando estos parámetros con los del conjunto de blancos patrón o blancos conocidos. Las experiencias realizadas sobre blancos conductores excitados por ondas electromagnéticas transitorias de amplio espectro [NIC72] [AND74], junto con el Método de Expansión de Singularidades (SEM) [BAU76] y el análisis de los resultados obtenidos mediante métodos numéricos [MIL80], han mostrado que la respuesta de un blanco conductor (intensidad o cargas inducidas en él, campo eléctrico dispersado, etc) se puede modelar

en el dominio del tiempo por una suma de exponenciales complejas amortiguadas cuyas frecuencias complejas se denominan resonancias naturales o polos del blanco. Estos parámetros sólo dependen de la geometría y características electromagnéticas del blanco y son independientes tanto de la orientación como de la excitación utilizada [ROT85b]. Esta cualidad de las resonancias naturales las hace de gran utilidad para la identificación del blanco.

La mayoría de las técnicas de identificación basadas en el concepto y propiedades de las resonancias naturales del blanco pueden dividirse en dos grandes grupos:

- A) Métodos de identificación basados en el cálculo de las frecuencias de resonancia del blanco y comparación con las de la librería de patrones.
- B) Métodos basados en el diseño de ondas discriminantes que al incidir sobre el blanco patrón produzcan una respuesta fácilmente identificable.

Entre los primeros cabe destacar el método de Prony [BLAR75], las técnicas basadas en la descomposición en valores singulares [KUM82] y el método de "Pencil de Matrices" [HUA90], mientras que en el segundo grupo los más importantes son la técnica del pulso de extinción (E-pulso) [ROT85a], técnicas de optimización [BAY90] y los filtros de aniquilación de resonancias (FAR) [MOR88].

El segundo grupo de técnicas presenta una serie de ventajas que se acentúan cuando la respuesta del blanco está contaminada con ruido, como ocurre en la mayoría de las situaciones prácticas. Este ruido puede generarse en el receptor, en la antena, o bien ser un eco contaminante que llega simultáneamente con la señal dispersada por el blanco a identificar. En esta tercera parte se estudia la técnica basada en el diseño de filtros de aniquilación de resonancias. El objetivo de estos filtros es aniquilar la respuesta del

blanco, es decir obtener la respuesta de mínima energía. El proceso de decisión se basa en elegir el blanco cuyo filtro asociado presente la salida con energía más pequeña. Una forma de garantizar que la respuesta del filtro sea nula fuera de un intervalo temporal dado es diseñar estos sistemas mediante filtros digitales de respuesta impulso finita.

La capacidad de identificación de esta técnica en su forma original propuesta por Morgan en 1988 [MOR88], se encuentra altamente afectada por la presencia de ruido contaminante. Con objeto de minimizar este importante problema, en esta parte de la Memoria se proponen etapas previas de análisis y procesado de señal que eliminen los problemas asociados con la técnica FAR y realcen la estructura básica de la señal constituida por una suma de exponenciales complejas amortiguadas, reduciendo al máximo el ruido presente. Este procesado previo se ha aplicado fundamentalmente a la identificación de hilos delgados conductores de diferente longitud. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto el aumento en la capacidad de identificación y discriminación introducida por el tratamiento previo de la señal frente a la técnica FAR original.

Junto a estas etapas previas, se propone como alternativa global al FAR un nuevo sistema digital de identificación, un filtro FIR que hemos denominado Filtro de Extinción que tiene la ventaja de no necesitar un tratamiento previo de los datos y cuya síntesis se ha hecho buscando la función de transferencia más adecuada al problema.

Terminaremos mostrando una interesante aplicación de las técnicas basadas en estadística de órdenes superiores a este problema. Cuando la respuesta dispersada del blanco está contaminada con ruido Gaussiano coloreado de espectro de potencia desconocido, cualquier sistema de discriminación tiende a identificar las regiones espectrales no nulas del ruido como componentes oscilatorias extra, lo que puede llevar

a la confusión al sistema. Se hace, pues, interesante usar cumulantes en lugar de datos en el proceso de identificación, ya que éstos son insensibles a cualquier tipo de ruido Gaussiano. Ello es posible, ya que el uso del estimador tipo covarianza propuesto en la primera parte de la Memoria implica utilizar una serie de regiones o "slices" del espacio de cumulantes que retienen la estructura de exponenciales complejas original de los datos. Al mantener dicha estructura, las secuencias de cumulantes en las "slices" adecuadas oscilan a las mismas frecuencias complejas que la señal dispersada del blanco, y por tanto es equivalente tratar con estas secuencias que con la onda original.

Como se ha indicado anteriormente, la Memoria se ha organizado en tres partes, que se completan con un primer capítulo en el que se introducen las definiciones y conceptos básicos de las técnicas de procesado de señal mediante estadística de órdenes superiores. La primera parte está constituida por los capítulos II y III. En el capítulo II se realiza un estudio teórico que permite proponer un nuevo estimador para la estimación de parámetros de exponenciales complejas amortiguadas. En el capítulo III se lleva a cabo una nueva formulación matricial que permite interpretar el nuevo estimador y se presentan los resultados obtenidos con el mismo.

La segunda parte consta de otros dos capítulos. En el capítulo IV se proponen un conjunto de ecuaciones que permiten abordar el problema de la identificación de procesos MA, y en el capítulo V se presentan los resultados obtenidos mediante algoritmos implementados a partir de dichas ecuaciones.

Por último, la tercera parte está constituida por cuatro capítulos. En el capítulo VI se introducen los fundamentos sobre los que se basa la técnica de los filtros de aniquilación de resonancias. En el capítulo VII se estudia un modelado de los datos compatible con la estructura de los mismos para mejorar la relación señal-ruido y se

propone un filtro de suavizado óptimo que enfatiza las regiones espectrales en las que están presentes los modos de la señal. Este filtro, junto con etapas de modelado de la señal, se aplica a la discriminación entre hilos delgados de longitudes diferentes en el capítulo VIII. Finalmente, en el capítulo IX se propone un nuevo filtro, el Filtro de Extinción y se aborda el problema de la discriminación en presencia de ruido coloreado. La Memoria se completa con dos apéndices. El Apéndice A se ha dedicado al método de expansión en singularidades (SEM) sobre el que se fundamenta la técnica de identificación, y el Apéndice B trata de la aplicación, junto con la técnica FAR, de los métodos clásicos de procesamiento de señal basados en ventanas espectrales y filtros digitales paso-baja.



CAPITULO I

CUMULANTES Y MOMENTOS DE SEÑALES ALEATORIAS Y
DETERMINISTAS



I-1. INTRODUCCION.

Durante los últimos años se ha producido un notable incremento en el interés por aplicar la estadística de órdenes superiores (HOS) a un amplio rango de problemas del procesado de señal y la teoría de sistemas. De hecho, hasta el año 1991 el número de artículos con resultados teóricos y nuevos algoritmos presentados a este respecto, no superaba la cifra de 200, número éste que en la actualidad ha aumentado considerablemente.

El objetivo del primer capítulo de esta Memoria es el de recopilar algunos de los conceptos y resultados fundamentales referentes al análisis HOS, haciendo especial hincapié en las definiciones de cumulantes, momentos y poliespectros de señales aleatorias y deterministas que se van a usar a lo largo de la Memoria.

El capítulo se estructura de la siguiente forma:

- En primer lugar en la sección I-2 se introducen las definiciones y propiedades más importantes de los momentos y cumulantes de un conjunto de variables aleatorias. Se hará especial énfasis en la relación entre cumulantes y momentos y en las propiedades que poseen en el caso muy común de procesos estacionarios.

- En la sección I-3 se introduce la definición de los espectros de cumulantes, también llamados poliespectros o espectros de alto orden. Casos especiales dentro de los poliespectros son entre otros, el espectro de potencia (orden 2), el biespectro (orden 3) y el triespectro (orden 4). Asimismo se discuten las razones de utilizar un espectro de cumulantes en vez del de momentos y se definen conceptos ampliamente usados en esta Memoria como el de proceso blanco de orden n .

- En la sección I-4 se presentan las propiedades de los poliespectros de procesos estacionarios, propiedades que van a permitir utilizarlos como un instrumento útil en la detección de no linealidades o para la identificación de sistemas MA ("Moving Average") de fase no mínima, tema que se trata en los capítulos IV y V. Por ello nos detendremos en esta última propiedad de los poliespectros, mostrando un ejemplo sencillo en el que tenemos distintos procesos con el mismo espectro de potencia pero distinto biespectro. Asimismo estudiaremos los sistemas no lineales operando bajo entrada aleatoria, introduciendo un problema de gran interés como es el de la detección de los acoplos cuadráticos de fase, posible mediante el uso del poliespectro de la señal.

- Por último en la sección I-5 se introducirán las definiciones de momentos o correlaciones de señales deterministas, centrándonos más específicamente en las señales deterministas energéticas que incluyen el caso de transitorios que tratamos en los capítulos II y III. Basándose en las definiciones de los momentos de señales energéticas estudiaremos sus propiedades y definiremos el poliestpectro de momentos, a diferencia del poliespectro de cumulantes que se usa para los procesos aleatorios.

I-2. CUMULANTES Y MOMENTOS DE SEÑALES ALEATORIAS.

I.2.1. Definición de cumulantes y momentos.

Dado un conjunto de n variables aleatorias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, sus momentos conjuntos de orden $r=k_1+k_2+\dots+k_n$ vienen dados por [PAPO84]

$$m_{k_1, \dots, k_n} \equiv \text{Mom}[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}] = E\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}\} = (-j)^r \frac{\partial^r \phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \dots \partial \omega_n^{k_n}}, \quad (1.1)$$

donde $E\{\cdot\}$ indica valor esperado, y $\phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ es su función característica conjunta definida por [PAPO84]

$$\phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E\{\exp j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)\}, \quad (1.2)$$

y cuyo logaritmo neperiano introduce una segunda función característica conjunta [PAPO84]

$$\Psi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \ln \phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad (1.3)$$

Los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de Ψ en torno al origen, se denominan cumulantes de orden r del conjunto de variables aleatorias, es decir [PAPO84] [ROS83] [ROS85] [SHI63]

$$c_{k_1, \dots, k_n} \equiv \text{Cum}[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}] = (-j)^r \frac{\partial^r \Psi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \dots \partial \omega_n^{k_n}} \quad (1.4)$$

De esta forma, los cumulantes conjuntos se pueden expresar en términos de los momentos conjuntos de las variables aleatorias. Por ejemplo, los momentos

$$\begin{aligned} m_{1..0} &= E\{x_1\} = m_1 ; m_{3..0} = E\{x_1^3\} = m_3 \\ m_{2..0} &= E\{x_1^2\} = m_2 ; m_{4..0} = E\{x_1^4\} = m_4 \end{aligned} \quad (1.5)$$

están relacionados con sus cumulantes correspondientes por

$$\begin{aligned}
 c_{1..0} &= m_1 = c_1 \\
 c_{2..0} &= m_2 - m_1^2 = c_2 \\
 c_{3..0} &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = c_3 \\
 c_{4..0} &= m_4 - 4m_3m_1 - 3m_2^2 + 12m_2m_1^2 - 6m_1^4 = c_4
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

relaciones estas que pueden comprobarse fácilmente sustituyendo

$$\phi(\omega_1) = 1 + j\omega_1 m_1 - \frac{\omega_1^2}{2!} m_2 + \dots + \frac{(j\omega_1)^k}{k!} m_k + \dots
 \tag{1.7}$$

en las ecuaciones (1.1), (1.3) y (1.4). Nótese además que si la variable aleatoria x_1 tiene media cero, es decir $m_1=0$, entonces $c_2=m_2$, $c_3=m_3$ y $c_4=m_4-3m_2^2$.

I.2.2. Momentos y cumulantes de las funciones de densidad de probabilidad (pdf) más usuales.

Como ejemplo de momentos y cumulantes, se muestran en esta sección algunos casos en los que la variable aleatoria x obedece a determinadas funciones de densidad de probabilidad (pdf)'s. En concreto, se consideran las siguientes pdf's:

-Uniforme:

$$p(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2c} \quad , |x| < c \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{array} \right\} .
 \tag{1.8}$$

-Gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) . \quad (1.9)$$

-Laplace:

$$p(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|) \quad (1.10)$$

-Exponencial:

$$p(x) = \exp(-\lambda x)u(x) . \quad (1.11)$$

donde $u(x)$ es la función escalón unidad.

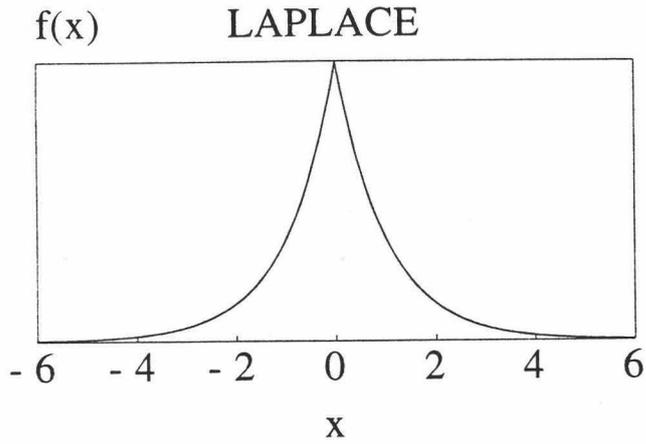
-Rayleigh:

$$p(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) \frac{x}{\alpha^2} u(x) . \quad (1.12)$$

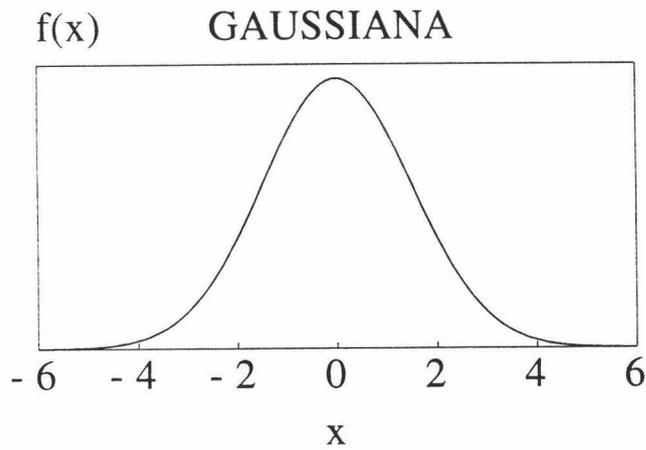
Las figuras 1.1 y 1.2 muestran estas pdf's, junto con sus momentos y cumulantes de orden n , con $n=1, 2, 3, 4$. Los primeros pueden generarse a partir de la siguiente expresión [PAPO84] [MEN91]

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx , \quad (1.13)$$

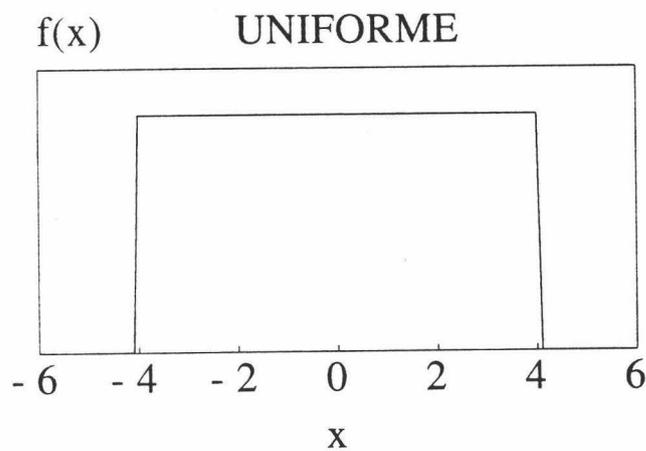
mientras que los segundos, c_n , pueden calcularse usando las relaciones (1.6). Como puede verse, para todas las pdf's simétricas, todos los momentos y cumulantes de orden par son nulos, y en particular, la distribución Gaussiana tiene todos los cumulantes de orden mayor que dos, idénticos a cero, cosa que no le ocurre a sus momentos.



n	m_n	c_n
1	0	0
2	2	2
3	0	0
4	24	12

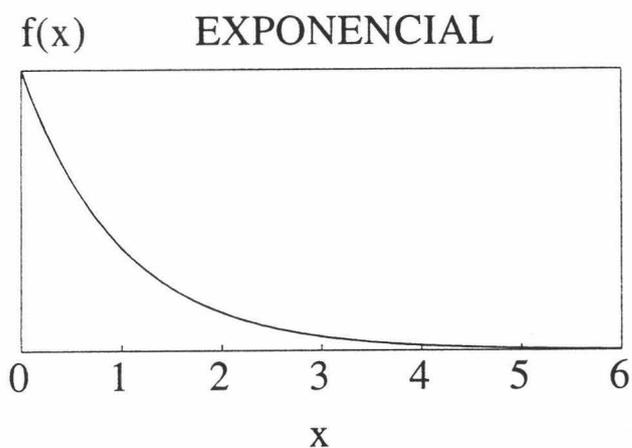


n	m_n	c_n
1	0	0
2	σ^2	σ^2
3	0	0
4	$3\sigma^4$	0

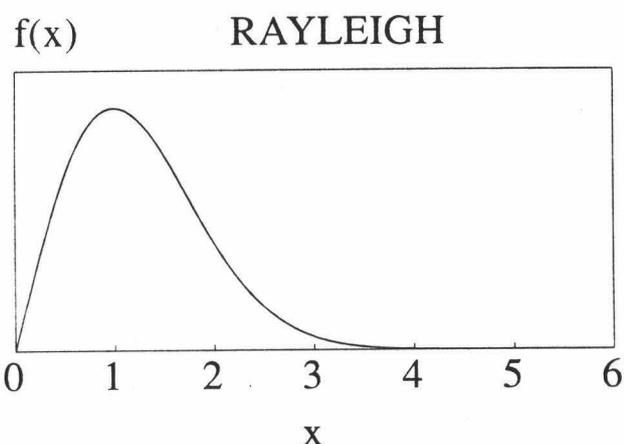


n	m_n	c_n
1	0	0
2	$c^2/3$	$c^2/3$
3	0	0
4	$c^4/5$	$-2c^4/15$

Figuras (1.1): Momentos y cumulantes para $n=1, 2, 3, 4$ de las pdf's Laplace, Gaussiana y Uniforme.



n	m _n	c _n
1	1/λ	1/λ
2	2/λ ²	1/λ ²
3	6/λ ³	2/λ ³
4	24/λ ⁴	6/λ ⁴



n	m _n	c _n
1	α(π/2) ^{1/2}	α(π/2) ^{1/2}
2	2α ²	(2-π/2)α ²
3	3λ ³ (π/2) ^{1/2}	-3α ³ π(π/2) ^{1/2}
4	8α ⁴	α ⁴ (12π-3π ² -8)/2

Figuras (1.2): Momentos y cumulantes para n=1, 2, 3, 4 de las pdf's Exponencial y Rayleigh.

1.2.3. Relación entre momentos y cumulantes.

La relación general entre los momentos de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y los cumulantes conjuntos $c_{11\dots 1}$ de orden $r=n$, está dada por [BRI65] [ROS85] [LEO59]

$$\text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \sum_p (-1)^{p-1} (p-1)! E\left\{ \prod_{i \in S_1} x_i \right\} E\left\{ \prod_{i \in S_2} x_i \right\} \dots E\left\{ \prod_{i \in S_p} x_i \right\} \quad , \quad (1.14)$$

donde la suma en p se extiende sobre todas las particiones (S_1, S_2, \dots, S_p) , $p=1, 2, \dots, n$ del conjunto de enteros $(1, 2, \dots, n)$. Así por ejemplo, el conjunto de enteros $(1,2,3)$ puede dividirse en:

$$\begin{aligned}
 p=1 \quad S_1 &= \{1,2,3\} \\
 p=2 \quad S_1 &= \{1\}, S_2 = \{2,3\} \\
 &S_1 = \{2\}, S_2 = \{1,3\} \\
 &S_1 = \{3\}, S_2 = \{1,2\} \\
 p=3 \quad S_1 &= \{1\}, S_2 = \{2\}, S_3 = \{3\},
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

y por tanto, la ecuación (1.15) conduce a que

$$\begin{aligned}
 \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_3] &= m_{111} - m_{100}m_{011} - \\
 &- m_{010}m_{101} - m_{001}m_{110} + 2m_{100}m_{010}m_{001}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Se puede comprobar asimismo que la expresión (1.16) es idéntica a c_3 de (1.6) para $x_1=x_2=x_3$. De igual modo, dadas cuatro variables aleatorias $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, las posibles particiones de los enteros $(1,2,3,4)$ mostradas en [NIK93b, tabla 2.1] conducen a la siguiente relación entre momentos y cumulantes de cuarto orden

$$\begin{aligned}
 \text{Cum}[x_1, x_2, x_3, x_4] &= m_{1111} - m_{1100}m_{0011} - m_{1010}m_{0101} - m_{1001}m_{0110} - \\
 &- m_{1000}m_{0111} - m_{0100}m_{1011} - m_{0010}m_{1101} - m_{0001}m_{1110} + 2m_{1100}m_{0010}m_{0001} \\
 &+ 2m_{1010}m_{0100}m_{0001} + 2m_{1001}m_{0100}m_{0010} + 2m_{0101}m_{1000}m_{0010} + \\
 &+ 2m_{0011}m_{1000}m_{0100} + 2m_{0110}m_{1000}m_{0001} - 6m_{1000}m_{0010}m_{0001}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

expresión ésta, que se reduce a c_4 de (1.6) cuando $x_1=x_2=x_3=x_4$. Por otro lado, si las variables aleatorias tienen media nula (esto es, $E\{x_i\}=0$, $i=1,2,3,4$), (1.17) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \text{Cum}[x_1, x_2, x_3, x_4] &= m_{1111} - m_{1100}m_{0011} - m_{1010}m_{0101} - \\
 &- m_{1010}m_{0101} - m_{1001}m_{0110}
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

De todo lo expuesto en esta sección, puede extraerse también como conclusión que el cálculo de los cumulantes conjuntos de orden n requiere conocer, en general, todos los momentos desde orden 1 hasta n .

I.2.4. Propiedades de los momentos y cumulantes.

Los momentos y cumulantes conjuntos de n variables aleatorias se caracterizan por las siguientes propiedades, fácilmente deducibles de las definiciones dadas en la sección (I.2.1) [BRI65] [BRI67] [ROS83] [SHI60] [SHI63] [ROS85] [SIN63] [RAO84]:

-P1: Si λ_i ($i=1, \dots, n$) son constantes, los cumulantes y momentos cumplen que

$$\begin{aligned} \text{Mom}[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] &= \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] \\ \text{Cum}[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] &= \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] \end{aligned} \quad (1.19)$$

-P2: Los cumulantes y momentos son funciones simétricas en sus argumentos, es decir

$$\begin{aligned} \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \text{Mom}[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] \\ \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \text{Cum}[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde (i_1, \dots, i_n) es cualquier permutación de $(1, \dots, n)$.

-P3: Si las variables aleatorias $\{x_1, \dots, x_n\}$ pueden dividirse en dos o más grupos que sean estadísticamente independientes, sus cumulantes de orden n son nulos, esto es, $\text{Cum}[x_1, \dots, x_n]=0$, mientras que en general sus momentos no lo son. Esta propiedad es una fácil conclusión de las propiedades de las funciones características conjuntas ϕ y ψ . Por ejemplo, si los dos grupos de variables independientes son $\{x_1, \dots, x_\lambda\}$ y $\{x_{\lambda+1}, \dots, x_n\}$, entonces su primera función característica conjunta (respecto de la cual se definen los momentos) cumplirá que $\phi(\omega_1, \dots, \omega_n) = \phi_1(\omega_1, \dots, \omega_\lambda) \phi_2(\omega_{\lambda+1}, \dots, \omega_n)$. Por el contrario, la segunda función característica conjunta (respecto de la cual se definen los cumulantes), cumplirá $\psi(\omega_1, \dots, \omega_n) = \psi_1(\omega_1, \dots, \omega_\lambda) + \psi_2(\omega_{\lambda+1}, \dots, \omega_n)$.

-P4: Si los conjuntos de variables aleatorias $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_n\}$ son estadísticamente independientes, entonces

$$\text{Cum}[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] = \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Cum}[y_1, y_2, \dots, y_n] \quad , \quad (1.21)$$

aunque en general

$$\text{Mom}[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] \neq \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Mom}[y_1, y_2, \dots, y_n] \quad . \quad (1.22)$$

No obstante, para las variables aleatorias $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \text{Cum}[x_1 + x_0, x_2, \dots, x_n] &= \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Cum}[x_0, x_2, \dots, x_n] \\ \text{Mom}[x_1 + x_0, x_2, \dots, x_n] &= \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Mom}[x_0, x_2, \dots, x_n] \end{aligned} \quad , \quad (1.23)$$

aún en el caso en que las variables x_1 y x_0 no sean estadísticamente independientes.

-P5: Los cumulantes permanecen inalterados frente a constantes aditivas, es decir

$$\text{Cum}[\alpha + x_1, \dots, x_n] = \text{Cum}[x_1, \dots, x_n] \quad , \quad (1.24)$$

donde α es una constante.

-P6: Si el conjunto de variables aleatorias $\{x_1, \dots, x_n\}$ es conjuntamente Gaussiano, toda la información acerca de su distribución está contenida en los momentos de orden $n \leq 2$. Por tanto, todos los momentos de orden $n > 2$ no proporcionan ninguna nueva información. Esto conduce además, a que todos los cumulantes conjuntos de orden $n > 2$ sean nulos para conjuntos de variables aleatorias con distribución de probabilidad Gaussiana.

I.2.5 Momentos y cumulantes de procesos estacionarios.

Consideremos ahora que $\{x_n\}$ $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, es un proceso aleatorio discreto, real y estacionario, cuyos momentos de hasta orden n existen y vienen dados por

$$\text{Mom}[x_n, x_{n+\tau_1}, x_{n+\tau_2}, \dots, x_{n+\tau_{n-1}}] = E\{x_n x_{n+\tau_1} \dots x_{n+\tau_{n-1}}\} \quad , \quad (1.25)$$

y los cuales, debido a la estacionariedad del proceso, dependen sólo de las diferencias de tiempo $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ ($\tau_i = 0, \pm 1, \dots$). De esta forma, podemos reescribir estos momentos como

$$m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \equiv E\{x_n x_{n+\tau_1} \dots x_{n+\tau_{n-1}}\} \quad . \quad (1.26)$$

De igual forma, los cumulantes de orden n de dicho proceso dependen sólo de $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, y pueden escribirse como

$$c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \equiv \text{Cum}[x_n, x_{n+\tau_1}, \dots, x_{n+\tau_{n-1}}] \quad (1.27)$$

Con estas premisas, consideremos los siguientes órdenes particulares:

-*Primer Orden:* En este caso la función

$$c_1^x = m_1^x = E\{x_n\} \quad (1.28)$$

representa la media del proceso x_n .

-*Segundo Orden:*

$$m_2^x(\tau_1) = E\{x_n x_{n+\tau_1}\} \quad (1.29)$$

es la secuencia de autocorrelación del proceso x_n , mientras que

$$c_2^x(\tau_1) = m_2^x(\tau_1) - (m_1^x)^2 = c_2^x(-\tau_1) \quad (1.30)$$

es su secuencia de covarianza [PAPO84]. Nótese que si el proceso tiene media nula, ambas secuencias coinciden, es decir, $m_2^x(\tau_1) = c_2^x(\tau_1)$.

-*Tercer Orden:* La secuencia de momentos de tercer orden es

$$m_3^x(\tau_1, \tau_2) = E\{x_n x_{n+\tau_1} x_{n+\tau_2}\} \quad (1.31)$$

que se relaciona con la de cumulantes de tercer orden a través de la expresión

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = m_3^x(\tau_1, \tau_2) - m_1^x [m_2^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + m_2^x(\tau_1 - \tau_2)] + 2(m_1^x)^3 \quad (1.32)$$

La deducción de esta última relación puede obtenerse fácilmente utilizando (1.16) y (1.27). Es interesante también resaltar en este punto dos cuestiones: 1) Como se deduce de (1.32), para conocer los cumulantes de tercer orden a partir de los momentos, es necesario conocer estos últimos desde orden 1 hasta orden 3. 2) Al igual que en segundo orden, si el proceso tiene media nula, momentos y cumulantes coinciden.

-*Cuarto Orden:* Utilizando las ecuaciones (1.17) y (1.27) se obtiene que

$$c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3 - \tau_1) - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2 - \tau_1) - m_1^x [m_3^x(\tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_1) + m_3^x(\tau_2, \tau_3) + m_3^x(\tau_2, \tau_4) + m_3^x(\tau_1, \tau_2)] + (m_2^x)^2 [m_1^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + m_2^x(\tau_3) + m_2^x(\tau_3 - \tau_1) + m_2^x(\tau_3 - \tau_2) + m_2^x(\tau_2 - \tau_1)] - 6(m_1^x)^4, \quad (1.33)$$

ecuación ésta que relaciona momentos y cumulantes de cuarto orden. En este caso, si el proceso es de media nula, (1.33) se reduce simplemente a

$$c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3 - \tau_1) - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2 - \tau_1) \quad (1.34)$$

Así pues, según se deduce de la expresión (1.34), cuando el proceso tiene media nula, para generar los cumulantes de cuarto orden es necesario conocer los momentos del mismo orden y la secuencia de autocorrelación del proceso.

Una relación muy útil entre momentos y cumulantes de un proceso estacionario, válida sólo para órdenes $n=3$ y $n=4$, es la siguiente [PAPO84] [MEN91]

$$c_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) - m_n^G(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \quad , \quad (1.35)$$

donde $m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ es la función momento de orden n de x_n , y $m_n^G(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ es la función momento de orden n de una señal estadísticamente Gaussiana equivalente, que tenga el mismo valor medio e igual secuencia de autocorrelación que x_n . De esta relación se ve fácilmente que si x_n es un proceso Gaussiano, $m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = m_n^G(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ y por consiguiente $c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = 0$. Notar también, que, aunque (1.35) sea sólo válida para $n=3,4$, $c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = 0$ para todo $n > 2$ en el caso en que x_n sea un proceso Gaussiano.

Junto con la media, medida ésta que caracteriza la estadística de primer orden del proceso, existen otras medidas importantes que representan su estadística de segundo, tercer y cuarto orden. Así, se definen la *varianza*, *el coeficiente de asimetría* y *la kurtosis* de x_n , como los cumulantes de segundo, tercer y cuarto orden, respectivamente, evaluados a retraso temporal cero, esto es

$$\begin{aligned} \text{-Varianza:} & \quad \gamma_2^x = c_2^x(0). \\ \text{-Coef. asimetría:} & \quad \gamma_3^x = c_3^x(0,0). \\ \text{-Kurtosis:} & \quad \gamma_4^x = c_4^x(0,0,0). \end{aligned}$$

Además, para un proceso de media nula, se cumple:

$$\begin{aligned} \gamma_2^x &= E\{x_n^2\} \\ \gamma_3^x &= E\{x_n^3\} \\ \gamma_4^x &= E\{x_n^4\} - 3[\gamma_2^x]^2 \end{aligned} \quad . \quad (1.36)$$

Como hemos visto, los cumulantes y momentos de orden n son funciones de $(n-1)$ argumentos (es decir, funciones $(n-1)$ dimensionales). Sin embargo, en aplicaciones concretas de los cumulantes dentro del procesado de señal, son muy útiles los subespacios en el espacio de cumulantes o momentos de una dimensión (1-D), comunmente denominados en la literatura como *1-D slices* [NIK93b] [MEN91]. Estos 1-D slices de cumulantes de orden n , pueden obtenerse dejando libres sólo $n-2$ de sus $n-1$ índices. De esta forma, son muchos los tipos de 1-D slices que pueden elegirse, destacando entre ellos los radiales, verticales, horizontales y diagonales. Estos últimos, que serán utilizados en capítulos posteriores, pueden generarse haciendo $\tau_i = \tau$ para $i=1, \dots, n-1$.

En este punto es interesante resaltar también otra cuestión adicional. Son muchas las situaciones en las cuales los cumulantes de tercer orden no son suficientes para resolver un problema concreto, y es necesario acudir a cumulantes de cuarto o mayor orden. Por ejemplo, si el proceso aleatorio responde a una estadística simétrica (tales como Gaussiana, uniforme y Laplace), sus cumulantes de tercer orden son nulos y es necesario acudir a estadísticas de mayor orden para así describirlo completamente y obtener información contenida en él. Además, existen algunos procesos que tienen cumulantes de tercer orden extremadamente pequeños y cumulantes de cuarto orden mucho mayores. En este caso convendrá, obviamente, utilizar estos últimos. Finalmente, existen aplicaciones (recuperación de armónicos y acoplos cúbicos de fase) en las que los cumulantes de tercer orden son nulos mientras que los de cuarto orden no [NIK93b] [MEN91].

I.2.6. Ergodicidad y momentos.

Un proceso x_n es ergódico si, con probabilidad uno, todos sus momentos pueden determinarse de una única realización del mismo. Dicho de otro modo, si los valores

esperados (o promedios conjuntos) pueden reemplazarse por promedios temporales, es decir

$$\begin{aligned}
 E\{x_n x_{n+\tau_1} \dots x_{n+\tau_{n-1}}\} &= \langle x_n \dots x_{n+\tau_{n-1}} \rangle = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+\tau_1} \dots x_{n+\tau_{n-1}} \quad , \quad (1.37)
 \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot \rangle$ es el operador "promedio temporal", el cual tiene las mismas propiedades que $E\{\cdot\}$ si el proceso es ergódico [SIN63]. De esta forma, lo que la ergodicidad indica, es que los promedios temporales de todas las posibles secuencias de muestras son iguales entre sí, e iguales al promedio conjunto. Claramente, un proceso puede ser ergódico para ciertos momentos de orden superior y no para otros [PAPO84].

Aunque no entraremos en discusiones acerca de los diferentes criterios de ergodicidad relativos a promedios temporales de los momentos de orden superior, puede hallarse amplia información a este respecto en [PAPO84] [SHI63]. No obstante, a largo de esta Memoria asumiremos que si el proceso es ergódico se cumplirá (1.37) para todo orden hasta n , lo que indica que los cumulantes de orden n existen y se pueden calcular mediante la expresión (1.15).

Por otro lado, en una situación práctica, en la que sólo dispongamos de una única realización de longitud finita de un proceso ergódico, x_n $n=-N, \dots, N$, no podremos calcular el límite de (1.37), con lo que llevaremos a cabo la estimación dada por

$$\langle x_n \dots x_{n+\tau_{n-1}} \rangle = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+\tau_1} \dots x_{n+\tau_{n-1}} \quad . \quad (1.38)$$

I-3. POLIESPECTROS

Los espectros de órdenes superiores, HOS (Higher-Order Spectra), también llamados poliespectros, no son más que una generalización a estadísticas de órdenes superiores del espectro de potencia clásico. Así, los poliespectros, básicamente, no son más que la Transformada de Fourier (TF) multidimensional de las estadísticas de órdenes superiores, caracterizadas como hemos visto en secciones previas, por cumulantes o momentos. Aunque, en general, pueden definirse los poliespectros, tanto en términos de cumulantes (espectros de cumulantes) como de momentos (espectros de momentos), el uso de unos u otros depende básicamente del tipo de señal bajo estudio. Así, como se comentará en la sección (I.3.4), en el caso de señales aleatorias, es conveniente usar espectros de cumulantes, mientras que si la señal es determinista, es mejor el uso de espectros de momentos.

Históricamente, el término "Poliespectro" es debido a Tukey y a Brillinger [BRI65], mientras que el de HOS es atribuible a Brillinger y Rossenblatt [BRI67a] y a Akaike [AKA66].

I.3.1. Definición basada en la TF.

El poliespectro de orden n , $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, de un proceso real y estrictamente estacionario, se define como la TF n -dimensional de su secuencia de cumulantes $c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$, es decir [NIK87] [MEN91] [NIK93a] [NIK93b]

$$C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{n-1} \tau_{n-1})} , \quad (1.39)$$

con $|\omega_i| \leq \pi$ para $i=1, \dots, n-1$ y $|\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}| \leq \pi$. Esta representación espectral para la función cumulante se debe originalmente a Kolmogorov [SHI60] [SHI63] [SIN63].

En primer lugar, es interesante remarcar que para que dicho poliespectro de orden n exista, se debe cumplir la condición suficiente de que la secuencia de cumulantes sea absolutamente sumable, es decir

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} |c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})| < \infty, \quad (1.40)$$

o bien, de forma equivalente, que [NIK93b]

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} (1 + |\tau_j|) |c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})| < \infty \quad (1.41)$$

para $j=1, \dots, n-1$.

Nótese que, en general, $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ es complejo, es decir

$$C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = |C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})| e^{j\psi_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})}, \quad (1.42)$$

y también periódico con periodo 2π en todas sus variables

$$C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = C_n^x(\omega_1 + 2\pi, \dots, \omega_{n-1} + 2\pi). \quad (1.43)$$

I.3.2. Definición alternativa basada en la Representación Espectral de Cramer.

El significado físico de los poliespectros se hace más evidente cuando estos se expresan en términos de las componentes $dZ(\omega)$ de la representación Fourier-Stieltjes de x_n (también llamada representación espectral de Cramer), dada por [ROS83] [ROS85] [CRA46]

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega n} dZ(\omega) \quad \forall n, \quad (1.44)$$

donde

$$E\{dZ(\omega)\} = 0$$

$$\text{Cum}[dZ(\omega_1), \dots, dZ(\omega_n)] = \quad (1.45)$$

$$= \begin{cases} C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} & \text{si } \omega_1 + \dots + \omega_n = 0 \\ 0 & \text{si } \omega_1 + \dots + \omega_n \neq 0 \end{cases}$$

Según esto, queda claro que el espectro de cumulantes de orden n representa la contribución del cumulante de n componentes de Fourier, la suma de cuyas frecuencias sea igual a cero. Nótese que, aunque el espectro de cumulantes de orden n es función de $n-1$ variables $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, hay que tener en cuenta que existe una variable oculta $\omega_n = -\omega_1 - \dots - \omega_{n-1}$ en (1.45) [ROS83].

I.3.3. Casos especiales de poliespectros.

Tanto el espectro de potencia, el biespectro, como el trispectro son casos especiales de espectros de cumulantes definidos por (1.39), es decir

-Espectro de Potencia [KAY81] [MAR87]: n=2

$$C_2^x(\omega) \equiv P(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_2^x(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad , \quad (1.46)$$

donde $|\omega| \leq \pi$ y $c_2^x(\tau)$ es la secuencia de covarianza de x_n dada en (1.30). Si además, x_n es un proceso de media nula, entonces $c_2^x(\tau)$ coincidirá con la secuencia de autocorrelación y (1.46) se conoce, en este caso particular, como identidad de Wiener-Khintchine [WHI83]. Por otro lado, de (1.30) y (1.46) se tiene que el espectro de potencia cumple las siguientes propiedades de simetría

$$\begin{aligned} C_2^x(\omega) &= C_2^x(-\omega) \\ C_2^x(\omega) &\geq 0 \end{aligned} \quad , \quad (1.47)$$

es decir, es una función real no negativa.

Según la representación espectral de Cramer, se tiene también, que si x_n es de media nula,

$$E\{dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)\} = \begin{cases} 2\pi P(\omega) d\omega & \text{si } \omega_1 = \omega_2 = \omega \\ 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases} \quad , \quad (1.48)$$

lo cual indica que el espectro de potencia $P(\omega)$ representa la contribución al producto medio, de dos componentes de Fourier cuyas frecuencias sean las mismas.

-Biespectro: $n=3$ [NIK87]

$$C_3^x(\omega_1, \omega_2) = B_x(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_3^x(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)}, \quad (1.49)$$

con $|\omega_i| \leq \pi$ para $i=1,2$ y $|\omega_1 + \omega_2| \leq \pi$, siendo $c_3^x(\tau_1, \tau_2)$ la secuencia de cumulantes de tercer orden dada por (1.32). Al igual que en el espectro de potencia, debido a las propiedades de los cumulantes y momentos de tercer orden y a la propia definición del biespectro, este último presenta importantes propiedades de simetría que serán analizadas más ampliamente en la sección I.4 de este capítulo.

En este caso, según la representación espectral de Cramer, y en el caso en que x_n sea de media nula [NIK87]

$$E\{dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ^*(\omega_3)\} = \begin{cases} B_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 & \text{si } \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \\ 0 & \text{si } \omega_1 + \omega_2 \neq \omega_3 \end{cases}, \quad (1.50)$$

es decir, $B_x(\omega_1, \omega_2)$ representa la contribución al producto medio de tres componentes de Fourier, donde una de ellas es igual a la suma de las otras dos.

-Triespectro [DAL89]: $n=4$

$$C_4^x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)}, \quad (1.51)$$

con $|\omega_i| \leq \pi$ para $i=1,2,3$ y $|\omega_1+\omega_2+\omega_3| \leq \pi$, siendo $c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ la secuencia de cumulantes de cuarto orden dada en (1.33). De la definición (1.33) de estos cumulantes, pueden derivarse una gran cantidad de propiedades de simetría del triespectro similares a las del biespectro. Por ejemplo, puesto que los momentos son funciones simétricas en sus argumentos, se tiene que

$$\begin{aligned} C_4^x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= C_4^x(\omega_2, \omega_1, \omega_3) = C_4^x(\omega_3, \omega_2, \omega_1) = \\ &= C_4^x(\omega_1, \omega_3, \omega_2) = C_4^x(\omega_2, \omega_3, \omega_1) = C_4^x(\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \text{etc} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Pflug y colaboradores [PFU92] establecieron que el triespectro de procesos reales cuenta exactamente, gracias a propiedades de este tipo, con 96 regiones de simetría.

En este punto, también es interesante hacer ver que las medidas de varianza, coeficiente de asimetría y kurtosis establecidas en la sección I.2.5, pueden extraerse mediante un simple proceso de transformación inversa de los espectros de cumulantes de orden dos, tres y cuatro, respectivamente. Para ello, vemos que la transformada inversa de Fourier de (1.39) conduce a

$$\begin{aligned} c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \cdot \\ &\cdot e^{j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_{n-1}\tau_{n-1})} d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Eligiendo $n=2,3,4$ y haciendo τ_i ($i=1, \dots, n-1$), se tiene que:

-Varianza

$$\gamma_2^x = c_2^x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_2^x(\omega) d\omega \quad . \quad (1.54)$$

-Coeficiente de asimetría (skewness)

$$\gamma_3^x = c_3^x(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_3^x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad . \quad (1.55)$$

-Kurtosis

$$\gamma_4^x = c_4^x(0,0,0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_4^x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad . \quad (1.56)$$

I.3.4. El espectro de cumulantes frente al de momentos.

En todo lo expuesto a lo largo de esta sección referente a los poliespectros de procesos aleatorios, nos hemos restringido a los espectros de cumulantes, en lugar de los definidos en términos de momentos. Llegado este punto, es interesante y necesario exponer ciertas razones acerca de por qué en el caso de señales aleatorias, son más útiles los espectros de cumulantes que los de momentos. De entre ellas, destacaremos brevemente las siguientes [NIK93b]:

-Si x_n es un proceso aleatorio estacionario y Gaussiano, todos los momentos de orden $n \geq 3$ no proporcionan información adicional relativa al proceso. Por consiguiente, es mejor tener una función que muestre este hecho de forma explícita. Los espectros de cumulantes proporcionan esto, ya que su valor para orden $n \geq 3$ en el caso de procesos Gaussianos es cero.

-Como ya se indicó en la propiedad P.4 de la sección (I.2.4), los cumulantes de dos procesos aleatorios estadísticamente independientes son iguales a la suma de los cumulantes de los procesos aleatorios individuales. Este hecho no es cierto, sin embargo, para momentos de alto orden.

-Al igual que la función covarianza de un ruido blanco es un impulso y su espectro de potencia es plano, los cumulantes de alto orden de un ruido blanco son funciones impulso multidimensionales y su poliespectro (en términos de cumulantes) es multidimensionalmente plano.

- Los cumulantes, a diferencia de los momentos, proporcionan una medida adecuada de la dependencia estadística en series temporales.

-Finalmente, Brillinger indicó que los requerimientos de ergodicidad se cumplen más fácilmente con cumulantes que con momentos [BRI65].

No obstante, a pesar de estas razones a favor de los poliespectros en términos de cumulantes, es importante hacer resaltar también dos cuestiones: a) Los momentos y espectros de momentos son muy útiles en el análisis y estudio de señales deterministas (transitorias y periódicas) [NIK93a] [NIK93b]. b) Tanto en el caso del espectro de potencia, como en el del bispectro, cuando el proceso es de media nula, los espectros de cumulantes y momentos coinciden.

I.3.5. Función de Coherencia de orden n.

En la Sección I.3.1. se ha introducido la definición del espectro de cumulantes de orden n, como una generalización del espectro de potencia a la estadística de orden n. En

la literatura del procesado de señal HOS se ha definido también una función que combina estas dos entidades completamente diferentes, como son $C_2^x(\omega)$ y $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. A dicho ente matemático se le denomina indistintamente como "Función normalizada de Cumulantes" o "Función de Coherencia de orden n", y se define como [NIK93b]

$$P_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \equiv \frac{C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})}{\sqrt{C_n^x(\omega_1)C_2^x(\omega_2) \dots C_2^x(\omega_{n-1})C_2^x(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})}}, \quad (1.57)$$

y cuyo módulo se denomina "Índice de Coherencia de Orden n". En el caso particular de $n=3$, el índice de coherencia se denomina también "índice de bicoherencia" o biespectro normalizado [RAG85] [HAS63] [HIN85a].

Como han mostrado diversos autores [RAG85] [HAS63] [KIM80] [HIN85a] [HUB81], este índice es muy útil para la detección y caracterización de no linealidades en series temporales, a través de relaciones de fase de componentes armónicas. También, dicho índice se hace muy recomendable en el estudio de la respuesta en fase de procesos lineales no Gaussianos, en los cuales los poliespectros pueden modelarse por el mismo filtro lineal.

I.3.6. Proceso blanco de orden n.

Es bien conocido que un proceso cuyo espectro de potencia es constante para todas las frecuencias, se denomina en la literatura del procesado de señal como "blanco". Sin embargo, esta definición se refiere solamente a las características espectrales (estadística de segundo orden) del proceso, existiendo por tanto, la posibilidad de considerar un proceso blanco en orden n. Para establecer esta definición consideremos que W_n es un

proceso estacionario no Gaussiano (para que de esta forma tenga espectros de cumulantes distintos de cero), y con media nula. Si su secuencia de cumulantes de orden n cumple que

$$c_n^w(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \gamma_n^w \delta(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad , \quad (1.58)$$

donde γ_n^w es una constante y $\delta(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ es la función delta de Kronecker de dimensión $(n-1)$, se dice que W_n es un proceso blanco de orden n [BRI65] [GIA89]. Nótese que para ello, debemos asumir que los cumulantes γ_n^w sean finitos y distintos de cero para $n \leq 2$. De acuerdo con (1.58) y con la definición de espectro de cumulantes, se tiene que

$$C_n^w(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \gamma_n^w \quad , \quad (1.59)$$

es decir, es plano para todas las frecuencias. De esta definición general, tendremos que un proceso blanco en segundo, tercer y cuarto orden, respectivamente, tendrá espectro, biespectro o triespectro dado, respectivamente, por

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \gamma_2^w \\ B_w(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_3^w \quad . \\ C_4^w(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \gamma_4^w \end{aligned} \quad (1.60)$$

I.4. PROPIEDADES DE LOS POLIESPECTROS DE PROCESOS ESTACIONARIOS.

Presentadas las definiciones y algunas propiedades básicas de cumulantes, momentos, y sus espectros de orden n asociados, esta sección se centra en las propiedades

más relevantes que poseen los poliespectro de señales aleatorias, propiedades que los van a convertir en una herramienta útil para tratar diversos problemas tales como la detección de no linealidades o la identificación de sistemas de fase no mínima.

I.4.1. Procesos Gaussianos.

Una importante propiedad de los espectros de orden mayor que dos o poliespectros, apuntada anteriormente en este capítulo, es que si x_n es un proceso estacionario Gaussiano, su poliespectro, definido en términos de sus cumulantes se anula [HUB81]. Esta propiedad es de enorme interés de cara a aplicar un análisis basado en estadística de órdenes superiores para la eliminación de ruidos contaminantes, que en la mayoría de los casos pueden suponerse en buena aproximación como procesos estadísticamente Gaussianos, a diferencia de los procesos de la señal portadores de la información. Además, es interesante remarcar que esta propiedad es válida sea cual sea el contenido espectral del proceso Gaussiano, lo que permite tratar de igual manera ruidos blancos y coloreados.

I.4.2. Cambios de fase lineal.

Dado un proceso x_n con espectro de potencia $P_x(\omega)$ y espectro de orden n $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, el proceso desplazado $y_n = x_n - D$, donde D es un número entero cualquiera, tiene el mismo espectro de potencia y poliespectro, es decir, $P_x(\omega) = P_y(\omega)$ y $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = C_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. De esta forma, tanto el espectro de alto orden como el espectro de potencia suprimen toda información acerca de una fase lineal. Sin embargo, mientras que el espectro de potencia suprime además toda información referente a la fase del proceso, los poliespectros no lo hacen [LII76] [LII82].

I.4.3. Procesos Gaussianos y no Gaussianos a través de sistemas lineales.

Un familiar punto de partida en muchos problemas del procesamiento de señal y la teoría de sistemas es el de un modelo de sistema lineal de entrada y salida únicas e invariante en el tiempo (LTI), tal y como se muestra en la figura 1.3. En dicho modelo, el proceso W_n se considera estacionario y blanco en segundo orden con varianza finita γ_2^w (en general, Gaussiano o no Gaussiano). En este modelo, $H(z)$ representa la función

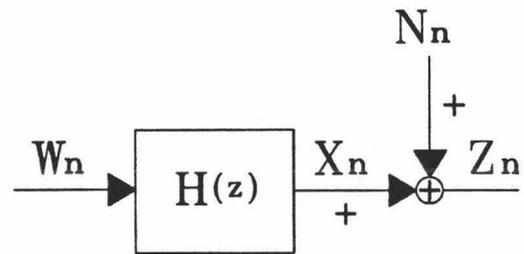


Figura (1.3): Esquema de sistema LTI alimentado por un proceso W_n .

de transferencia del sistema LTI que se considera causal y estable. Por otro lado, N_n es un ruido aditivo Gaussiano (blanco o coloreado), y W_n y N_n se consideran estadísticamente independientes. De esta forma, la entrada y la salida del sistema están relacionadas por

$$x_n = h_n * W_n , \tag{1.65}$$

donde * denota convolución, y h_n es la respuesta impulso del sistema. Dicha relación también puede expresarse en el dominio z o de la frecuencia como

$$\begin{aligned} X(z) &= H(z)V(z) \\ X(\omega) &= H(\omega)W(\omega) \end{aligned} , \tag{1.66}$$

con $z = \exp(j\omega T)$, siendo T el periodo de muestreo.

Bajo este esquema, es bien conocido que en el dominio de la estadística de segundo orden, la secuencia de autocorrelación de la salida no ruidosa, x_n , y la ruidosa, z_n , están relacionadas a través de [MEN91] [NIK93b] [PAPO84]

$$c_2^z(\tau) = c_2^x(\tau) + c_2^N(\tau) = \gamma_2^w \sum_{i=0}^{\infty} h_i h_{i+\tau} + c_2^N(\tau) \quad (1.67)$$

Por su parte, se tiene que el espectro de potencia de la señal ruidosa viene dado por [MEN91] [NIK93b]

$$\begin{aligned} C_2^z(z) &= \gamma_2^w H(z)H(z^{-1}) + C_2^N(z) \\ C_2^z(\omega) &= \gamma_2^w |H(\omega)|^2 + C_2^N(\omega) \end{aligned} \quad (1.68)$$

De estas expresiones es interesante hacer notar dos cuestiones importantes:

-En el espectro de potencia de la salida del sistema, influye tanto el modelo del sistema LTI, a través de su función de transferencia, como el espectro de potencia del ruido contaminante N_n . De esta forma $C_2^z(\omega)$ puede catalogarse como un espectro de potencia "ruidoso".

-De la ecuación (1.68) puede verse que, a través del espectro de potencia (o equivalentemente la autocorrelación), se pierde toda información acerca de la fase de $H(\omega)$. De esta forma, puede decirse que la autocorrelación y el espectro de potencia son "ciegos" a la fase.

(a) Cumulantes de salida de procesos lineales no Gaussianos.

Bajo el modelo de sistema LTI mostrado en la figura 1.3, Bartlett [BAR55] en 1995 y Brillinger y Rosenblatt en 1967 [BRI67a], mostraron que es posible generalizaar

las expresiones (1.67) y (1.68) desde el dominio de la estadística de segundo orden al de órdenes superiores. En particular, si W_n es un proceso no Gaussiano e idénticamente distribuido, es decir

$$c_n^w(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \begin{cases} \gamma_n^w & \tau_1 = \dots = \tau_{n-1} = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (1.69)$$

se tiene que [MEN91]

$$c_n^z(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \gamma_n^w \sum_{k=0}^{\infty} h_k h_{k+\tau_1} \dots h_{k+\tau_{n-1}}, \quad (1.70)$$

y

$$C_n^z(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \gamma_n^w H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i\right), \quad (1.71)$$

expresiones estas que como vemos no incorporan la contribución del ruido N_n , siempre que éste sea considerado como estadísticamente Gaussiano.

Un paso más en este proceso de generalización de (1.70) y (1.71) lo constituye el considerar que el proceso W_n que alimenta al sistema no es blanco en orden n , sino coloreado y con espectro de cumulantes dado por $C_n^w(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. Bajo este ambiente, se puede demostrar que [BRI67a] [MEN91]

$$C_n^z(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = C_n^w(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \cdot H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i\right). \quad (1.72)$$

Por otro lado, la generalización de (1.70) al caso de un proceso coloreado está dada en [MEN91], y básicamente consiste en una convolución de orden (n-1) entre las secuencias de cumulantes $c_n^w(\tau_1^{2x}, \dots, \tau_{n-1}^{2x})$ y $c_n^h(\tau_1^{2x}, \dots, \tau_{n-1}^{2x}) = \sum h_k h_{k+\tau_1} \dots h_{k+\tau_{n-1}}$.

En particular, en el caso más sencillo de la estadística de tercer orden, se tiene que el biespectro de la salida ruidosa del sistema, en el caso general de entrada no Gausiana coloreada, viene dado según (1.72) por

$$\mathbf{B}_z(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{B}_w(\omega_1, \omega_2) H(\omega_1) H(\omega_2) H^*(\omega_1 + \omega_2) \quad , \quad (1.73)$$

con módulo y fase dadas por

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_z(\omega_1, \omega_2)| &= |\mathbf{B}_w(\omega_1, \omega_2)| |H(\omega_1)| |H(\omega_2)| |H^*(\omega_1 + \omega_2)| \\ \psi_z(\omega_1, \omega_2) &= \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2) - \varphi(\omega_1 + \omega_2) + \psi_w(\omega_1, \omega_2) \quad , \end{aligned} \quad (1.74)$$

siendo $\varphi(\omega)$ la fase de $H(\omega)$. Si además la entrada del sistema es un proceso blanco en tercer orden, tal que $|\mathbf{B}_w(\omega_1, \omega_2)| = \gamma_3^w$ y $\psi_w(\omega_1, \omega_2) = 0$, se tiene que [NIK87]

$$\mathbf{B}_z(\omega_1, \omega_2) = \gamma_3^w H(\omega_1) H(\omega_2) H^*(\omega_1 + \omega_2) \quad . \quad (1.75)$$

Es interesante también remarcar que todas estas conclusiones son totalmente generales sea cual sea el tipo de modelo para $H(\omega)$, siempre que éste sea lineal, causal y exponencialmente estable, y los procesos W_n y N_n cumplan los requisitos estadísticos y poliespectrales remarcados para cada caso particular. De hecho, son muchos los modelos que de $H(\omega)$ han sido presentados en la literatura a lo largo del tiempo dependiendo especialmente de la aplicación y características de las señales aleatorias a considerar. En concreto, la expresión (1.75) para el biespectro del proceso z_n es la base de un tipo de

técnicas de estimación biespectral denominadas "Técnicas de modelación paramétrica" [NIK87] [NIK93a].

Otra cuestión importante que debemos remarcar en este momento, es que los sistemas lineales obtenidos para la modelación del espectro de potencia son, en general, diferentes de los utilizados para la modelación de los poliespectros [NIK87] [RAG85] [RAG86]. Es decir, si consideremos una función de transferencia $H(\omega)$ que ajuste el espectro de potencia, y otra, $T(\omega)$, que ajuste el poliespectro de orden dado de un mismo proceso, el modelo que describe este poliespectro es totalmente diferente del que describe el espectro de potencia. Esta característica muestra que el análisis basado en estadística de órdenes superiores puede jugar un importante papel en la identificación de procesos que involucran componentes Gaussianas y no Gaussianas.

(b) Sistemas de fase mínima, máxima y mixta.

El hecho de que la secuencia de cumulantes de un proceso no Gaussiano, a diferencia de la de autocorrelación, retenga la información sobre la fase (salvo, obviamente, términos de fase lineal), hace que los cumulantes de salida de los sistemas lineales sean extraordinariamente útiles en la identificación y caracterización de sistemas o procesos que, teniendo la misma respuesta en amplitud, sólo difieren en su respuesta en fase [NIK87] [GIA89] [LII84] [NIK86b].

En relación con la respuesta en fase de un sistema se distinguen tres tipos de sistemas básicos [NIK87]: a) *Sistemas de fase mínima*, caracterizados por que todos los ceros de $H(z)$ caen dentro del círculo unidad en el plano complejo z ; b) *Sistemas de fase máxima*, que presentan todos sus ceros fuera del círculo unidad; c) *Sistemas de fase mixta* que tienen ceros tanto dentro como fuera del círculo unidad. Es dentro de los dos últimos

tipos de sistemas, conjuntamente llamados como de fase no mínima, y que por otro lado son los más generales y comunes en aplicaciones concretas, donde el análisis poliespectral juega un importante papel frente al espectro de potencia clásico. Para demostrar este hecho, consideremos los siguientes tres sistemas (filtros) FIR (respuesta impulso infinita) de segundo orden, excitados por un proceso blanco en segundo y tercer orden ($E\{W_n W_{n+k}\} = Q\delta(k)$, $E\{W_n W_{n+k} W_{n+l}\} = \beta\delta(k,l)$), no Gaussiano y con media cero, caracterizado por [NIK87]

-Sistema de fase mínima

$$H_1(z) = (1 - az^{-1})(1 - bz^{-1}) \quad (1.82)$$

$$y_n^1 = W_n - (a+b)W_{n-1} + abW_{n-2}$$

donde $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$.

-Sistema de fase máxima

$$H_2(z) = (1 - az)(1 - bz) \quad (1.83)$$

$$y_n^2 = W_n - (a+b)W_{n+1} + abW_{n+2}$$

-Sistema de fase mixta

$$H_3(z) = (1 - az)(1 - bz^{-1}) \quad (1.84)$$

$$y_n^3 = -aW_{n+1} + (1+ab)W_n - bW_{n-1}$$

Puede comprobarse que las señales de salida de cada uno de los sistemas tienen idéntica secuencia de autocorrelación dada por [NIK87]

$$\begin{aligned}
c_2^y(\tau) &= E\{y_n^1 y_{n+\tau}^1\} = E\{y_n^2 y_{n+\tau}^2\} = E\{y_n^3 y_{n+\tau}^3\} \\
c_2^y(0) &= 1 + a^2 b^2 + (a+b)^2 \\
c_2^y(1) &= -(a+b)(1+ab) \\
c_2^y(2) &= ab ; c_2^y(\tau) = 0 \quad \tau \geq 3
\end{aligned}
\tag{1.85}$$

lo que implica que todos ellos tienen el mismo espectro de potencia, dado, según (1.69), por

$$P(\omega) = Q|H_1(z)|^2 = Q|H_2(z)|^2 = Q|H_3(z)|^2 \quad . \tag{1.86}$$

Este resultado, sin embargo, no es del todo sorprendente ya que el cuadrado de la magnitud de una función de transferencia FIR no reconoce un cero (z_0) de su inverso conjugado ($1/z_0^*$). De esta forma, los tres sistemas son espectralmente equivalentes, y por consiguiente es imposible discriminarlos mediante un análisis exclusivamente basado en el espectro de potencia.

Por otra parte, las tres señales de salida tienen diferentes cumulantes de orden n , y por tanto diferentes espectros de cumulantes. La tabla (I.1) muestra este hecho, mediante la secuencia de cumulantes de tercer orden de la salida de cada uno de los tres sistemas. Según esto, parece claro que mientras que el biespectro de la salida del sistema es capaz de "ver" el verdadero carácter de fase del sistema, el espectro de potencia los ve a todos ellos como si fuesen de fase mínima [NIK93a]. Esta propiedad de los poliespectros tiene además importantes implicaciones en aplicaciones de deconvolución en campos como geofísica [MAT84] y comunicaciones [BEN80] [NIK86a].

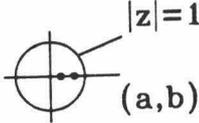
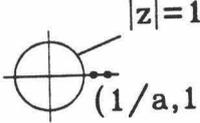
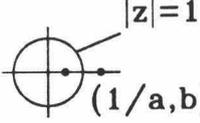
	Fase mínima	Fase máxima	Fase mixta
$H(z)$	$(1-az^{-1})(1-bz^{-1})$	$(1-az)(1-bz)$	$(1-az)(1-bz^{-1})$
y_n	$W_n-(a+b)W_{n-1}+abW_{n-2}$	$W_n-(a+b)W_{n+1}+abW_{n+2}$	$-aW_{n+1}+(1+ab)W_n-bW_{n-1}$
Localización de los ceros			
Cumulantes	$1-(a+b)^3+a^3b^3$ $(a+b)^2-(a+b)a^2b^2$ a^2b^2 $-(a+b)+ab(a+b)^2$ ab $-(a+b)ab$	$1-(a+b)^3+a^3b^3$ $-(a+b)^2+(a+b)^2ab$ ab $(a+b)^2-(a^2+b^2)^2$ a^2b^2 $-(a+b)ab$	$(1+ab)^3-a^3-b^3$ $-a(1+ab)^2+(1+ab)^2b$ $-a^2b$ $a^2(1+ab)-(1+ab)^2b$ $-a^2b$ $-(1+ab)ab$
Autocorrelaciones	$c_2(0)$ $c_2(1)$ $c_2(2)$		
	$1+a^2b^2+(a+b)^2$ $-(a+b)(1+ab)$ ab		

Tabla (I.1): Procesos de fase mínima, máxima y mixta con idéntico espectro de potencia pero distinto biespectro.

I.4.5. Sistemas no lineales operando bajo entrada aleatoria.

Como ya se comentó en la introducción de la presente Memoria, los poliespectros juegan un papel preponderante en la detección y cuantificación de no linealidades ocultas en señales estocásticas, originadas usualmente cuando un sistema no lineal opera bajo entrada aleatoria. Aunque para el caso de sistemas lineales excitados por señales aleatorias

se dispone, como hemos visto, de un amplio conjunto de relaciones generales (muchas de ellas basadas en criterios de autocorrelación), esto no es posible en el caso de sistemas no lineales arbitrarios. Es por ello por lo que clásicamente cada tipo de no linealidad se ha tratado como un caso especial. En este sentido, el análisis HOS viene a aportar una importante ayuda en la caracterización de los tipos de no linealidades [NIK87] [HIN85a] [HIN85b] [TIC82] [BEN82] [BLA64] [MAG54] [MAR86] [SUB67].

(a) Sistemas no lineales excitados por procesos sinusoidales.

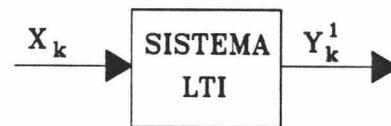
Consideremos un sistema LTI (lineal invariante en el tiempo) como se muestra en la figura (1.4)-a cuya entrada es [NIK87]

$$x_k = \sum_m A_m e^{j(\omega_m k + \phi_m)} \quad , \quad (1.87)$$

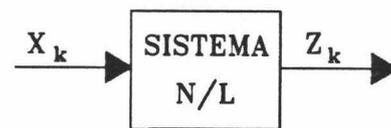
donde $\{\phi_m\}$ son variables aleatorias independientes, idéntica y uniformemente distribuidas sobre $(0, 2\pi)$. Bajo estas premisas, la salida del sistema LTI, y_k^1 , es

$$y_k^1 = \sum_m B_m e^{j(\omega_m k + \theta_m)} \quad , \quad (1.88)$$

la cual representa también una superposición de señales sinusoidales con las mismas frecuencias que las sinusoides de la entrada. Puede verificarse fácilmente que todos los



(a)



(b)

Figura (1.4): (a) Salida de un sistema LTI con entrada sinusoidal. (b) Salida de un sistema NL con entrada sinusoidal.

cumulantes de y_k^1 de orden mayor que dos son cero [NIK87]. De esta forma, un poliespectro cero de y_k^1 indicará que sólo existen mecanismos lineales en la generación de la señal de salida del sistema.

Si, por el contrario, como se muestra en la figura (4.2)-b, hacemos pasar el proceso x_k a través de un sistema no lineal (NL) como es un procesador de Volterra de orden N [SCH80], tenemos que la salida es

$$z_k = \sum_{i_1=0}^{M_1-1} h_1(i_1)x_{k-i_1} + \sum_{i_1=0}^{M_2-1} \sum_{i_2=0}^{M_2-1} h_{12}(i_1, i_2)x_{k-i_1}x_{k-i_2} + \dots + \sum_{i_1=0}^{M_{N-1}-1} \dots \sum_{i_N=0}^{M_{N-1}-1} h_{12\dots N}(i_1, \dots, i_N)x_{k-i_1} \dots x_{k-i_N} \quad (1.89)$$

que también puede expresarse como

$$z_k = \sum_{\lambda=1}^N y_k^\lambda \quad (1.90)$$

donde y_k^1 está dado por (1.88) y

$$y_k^2 = \sum_m \sum_n C_m C_n e^{j[(\omega_m + \omega_n)k + (\theta_m + \theta_n)]}$$

$$y_k^3 = \sum_m \sum_n \sum_l D_m D_n D_l e^{j[(\omega_m + \omega_n + \omega_l)k + (\theta_m + \theta_n + \theta_l)]} \quad (1.91)$$

$$\vdots$$

Es decir, las sinusoides de la salida están relacionadas en frecuencia y fase con las de

entrada [NIK87] [BRI65]. En este caso, un biespectro no nulo de z_k indicará la existencia del término y_k^2 en (1.90), mientras que un triespectro distinto de cero indicará la existencia del término y_k^3 , y por tanto, la presencia de una no linealidad cuadrática o cúbica, respectivamente, en el sistema. Así por tanto, las propiedades no lineales de los mecanismos que generan series temporales, pueden cuantificarse usando HOS debido a las relaciones de fase entre las componentes armónicas del proceso [BRI65].

(b) Acoplos cuadráticos de fase.

Son muchas las situaciones en las cuales, debido a la interacción entre dos componentes armónicas de una señal, se produce una contribución al espectro de potencia de una suma y/o diferencia de tales frecuencias. Este fenómeno, que como se ha comentado en el apartado anterior, puede deberse a no linealidades de segundo orden, causa ciertas relaciones de fase denominadas "acoplos cuadráticos de fase" [NIK87] [RAG85] [NIK93a] [KIM80] [RAG86] [RAG84]. En algunas aplicaciones concretas, es necesario determinar si un determinado pico en el espectro de potencia corresponde o no a un acoplo de fase. Sin embargo, debido a que el espectro de potencia suprime todas las relaciones de fase, este no nos puede proporcionar tal información, haciéndose imprescindible acudir al biespectro o al triespectro para detectar si es o no un acoplo cuadrático (cúbico) de fase. Este hecho puede mostrarse más fácilmente mediante el siguiente ejemplo concreto [NIK87] [RAG85]:

Consideremos el proceso sinusoidal

$$x_n = \sum_{i=1}^6 \cos(\lambda_i n + \phi_i) \quad , \quad (1.92)$$

donde $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $\lambda_5 > \lambda_4 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_6 = \lambda_4 + \lambda_5$, y ϕ_i son variables aleatorias independientes, uniformemente distribuidas sobre $(0, 2\pi)$ con $\phi_6 = \phi_4 + \phi_5$. De (1.92), mientras que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ por un lado, y $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ por otro, son posiciones relacionadas armónicamente, sólo la componente λ_6 es el resultado de un acoplo cuadrático de fase entre λ_4 y λ_5 ; además λ_3 es una componente armónica independiente. El espectro de potencia de x_n consiste básicamente en seis impulsos en λ_i ($i=1, \dots, 6$), tal y como se muestra en la figura (1.5)-a. A través de éste, sin embargo, no se puede determinar si un determinado pico corresponde realmente a un acoplo cuadrático de fase.

Por otro lado, puede comprobarse que la secuencia de cumulantes de x_n está dada por [RAG85]

$$\begin{aligned}
 c_3^x(\tau_1, \tau_2) = & \frac{1}{4} \{ \cos(\lambda_5 \tau_1 + \lambda_4 \tau_2) + \cos(\lambda_6 \tau_1 + \lambda_4 \tau_2) + \\
 & + \cos(\lambda_4 \tau_1 + \lambda_5 \tau_2) + \cos(\lambda_6 \tau_1 - \lambda_5 \tau_2) + \\
 & + \cos(\lambda_4 \tau_1 - \lambda_6 \tau_2) + \cos(\lambda_5 \tau_1 - \lambda_6 \tau_2) \}
 \end{aligned}
 \tag{1.93}$$

Es interesante ver como en (1.93) sólo aparecen las componentes que están acopladas en fase. Por tanto, el biespectro muestra un único impulso en (λ_5, λ_4) , indicando que solamente este par de frecuencias está acoplado en fase (ver figura (1.5)-b. Si no existe ningún acoplo cuadrático de fase, la secuencia de cumulantes de tercer orden, y por consiguiente el biespectro, serán nulos. De esta forma, el hecho de que sólo las componentes acopladas contribuyan a la secuencia de cumulantes del proceso es lo que hace que el biespectro sea una útil herramienta para la detección de acoplos cuadráticos de fase y su discriminación de aquellos que realmente no lo estén.

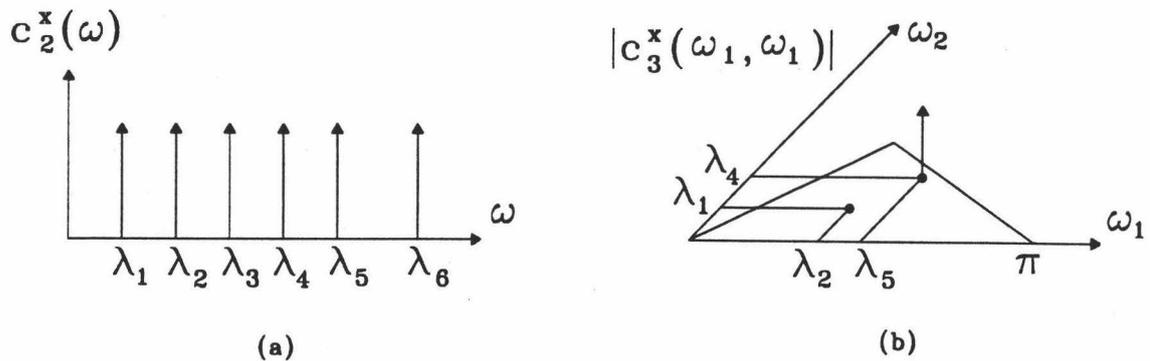


Figura (1.5): Acoplos cuadráticos de fase. (a) Espectro de potencia del proceso descrito en la ecuación (1.92). (b) Módulo de su biespectro.

(c) Procesos Gaussianos aplicados a sistemas no lineales.

Sea x_k un proceso Gaussiano, estacionario, con media cero, con secuencia de autocorrelación c_2^x y espectro de potencia $C_2^x(\omega)$. Sea además el proceso definido por

$$y_k = G[x_k] \quad , \quad (1.94)$$

donde $G[\cdot]$ es una función no lineal. Restringiéndonos por simplicidad al caso de estadística de tercer orden, asumamos que dicha función contiene alguna componente par, como por ejemplo de tipo cuadrático (ya que si $G[x]$ fuese una función impar, el biespectro de y_k es nulo [HUB81]):

$$y_k = x_k + \epsilon x_k^2 \quad , \quad (1.95)$$

donde ϵ es pequeño, de tal forma que ϵ^3 sea despreciable. Según esto, puede demostrarse que y_k tiene secuencia de autocorrelación y espectro de potencia [NIK87] [NIK93b]

$$\begin{aligned}
m_2^y(\tau) &= m_2^x(\tau) + 2\epsilon^2 [m_2^x(\tau)]^2 + \epsilon^2 [m_2^x(0)]^2 \\
P_y(\omega) &= P_x(\omega) + \epsilon^2 [m_2^x(0)]^2 \delta(\omega) + \\
&\quad + 2\epsilon^2 \int P_x(\lambda) P_x(\omega - \lambda) d\lambda
\end{aligned}
\tag{1.96}$$

mientras que su biespectro es

$$\begin{aligned}
B_y(\omega_1, \omega_2) &= 2\epsilon \{ P_x(\omega_1) P_x(\omega_2) + P_x(\omega_2) P_x(\omega_1 + \omega_2) \} + \\
&\quad + \epsilon m_2^x(0) \{ P_x(\omega_1) \delta(\omega_2) + \\
&\quad + P_x(\omega_2) \delta(\omega_1) + P_x(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \}
\end{aligned}
\tag{1.97}$$

Nótese que si $\epsilon=0$, entonces $P_y(\omega)=P_x(\omega)$ y $B_y(\omega_1, \omega_2)=0$. Además, conociendo el espectro de potencia del proceso Gaussiano de entrada y calculando el biespectro de la salida, podemos estimar el parámetro ϵ que caracteriza al sistema cuadrático, sin más que usar la ecuación (1.97). Por otro lado, junto a estos resultados, existen otros adicionales relativos a la identificación de sistemas cuadráticos por medio de entrada Gaussiana [52,55]. Para casos de identificación de sistemas con funciones $G[\cdot]$ más generales, existen también varios trabajos en la bibliografía [BRI65] [BEN82] [BRI70].

(d) Procesos lineales no Gaussianos frente a no lineales.

Existen algunas situaciones prácticas en las que es necesario discernir entre un proceso lineal no Gaussiano y un proceso lineal. Si se asume que en ambos casos los cumulantes de orden n del proceso son nulos, existe un buen test estadístico basado en

la función de coherencia de orden n definida en la sección (I.3.5) [RAO84] [HIN82]. En efecto, si el proceso no Gaussiano es lineal, su poliespectro está dado por (1.72) y su espectro de potencia por (1.68). De esta forma, la función de coherencia de orden n tiene la forma

$$\mathbf{P}_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \frac{\gamma_n^x}{(\gamma_2^x)^{n/2}} \cdot \frac{H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H^*(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})}{|H(\omega_1)| \dots |H(\omega_{n-1})| |H^*(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})|} \quad (1.98)$$

Por tanto, su módulo o índice de coherencia es

$$|\mathbf{P}_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})| = \frac{\gamma_n^x}{(\gamma_2^x)^{n/2}} \quad , \quad (1.99)$$

que como vemos, es constante en todas las frecuencias. Si el proceso lineal es Gaussiano, entonces $\gamma_n^x = 0 \quad \forall n > 2$ y $|\mathbf{P}_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})| = 0$. Por el contrario, si el valor del índice de coherencia de orden n depende de las frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, tendremos que el proceso y_n será no lineal. Ejemplos concretos en los que el índice de bicoherencia es dependiente de la frecuencia son entre otros los definidos por (1.89) y (1.95).

I-5. MOMENTOS O CORRELACIONES DE SEÑALES DETERMINISTAS.

En muchas aplicaciones del procesamiento de señal se conoce el valor de la señal en cada instante de tiempo de manera exacta. Estas aplicaciones incluyen el caso de señales

de duración finita cuyo valor es cero fuera del intervalo de duración de la señal. A esta clase de señales se le denomina señales deterministas, en contraste con las señales estocásticas (procesos aleatorios) cuyo valor no está determinado en cada instante de tiempo. En las secciones anteriores nos hemos detenido en las definiciones y propiedades de los cumulantes y poliespectros de las señales aleatorias. En esta sección nos vamos a centrar en las señales deterministas, definiendo los momentos o correlaciones de alto orden y el poliespectro de momentos. En señales de este tipo suelen considerarse sólo los momentos, ya que no hay ninguna ventaja evidente en usar cumulantes para el análisis de señales deterministas.

Entre las señales deterministas se suele distinguir entre señales energéticas y señales de potencia atendiendo a su contenido en energía y potencia media [NIK93b]. Se denominan señales energéticas a aquellas que poseen una energía finita y potencia media nula. Este caso corresponde a los transitorios deterministas, tales como las señales de duración finita, las señales con decaimiento exponencial o las sinusoides exponencialmente amortiguadas [GIA89b] [PAPA90] [RUI95]. Por otra parte, las señales deterministas de potencia tienen una potencia media no nula y energía infinita. En esta clase de señales se encuentran las señales periódicas tales como las señales sinusoidales [SWA91], y otras señales no periódicas como la función escalón.

Como en los capítulos II y III de esta Memoria vamos a estudiar el caso de la estimación de parámetros de señales sinusoidales exponencialmente amortiguadas, nos vamos a centrar en esta sección exclusivamente en las definiciones de momentos y poliespectro de momentos de las señales deterministas energéticas. Definiciones equivalentes para las señales de potencia pueden encontrarse en [NIK93b].

I.5.1. Definición de momentos o correlaciones de señales deterministas energéticas.

Consideremos una señal real energética $\{x(n)\}$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$, y supongamos que existen sus momentos o correlaciones múltiples. En este caso se definen los momentos o correlaciones de orden n -ésimo como funciones $n-1$ -dimensionales de la forma:

$$m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x(n+\tau_1) \dots x(n+\tau_{n-1}) \quad \tau_i=0,\pm 1,\pm 2 \dots \forall i \quad (1.89)$$

Estas correlaciones o momentos son medidas numéricas del grado de similitud entre una señal y un producto de versiones atrasadas o adelantadas de ella misma. De esta forma el valor de la función de correlación de orden n -ésimo en el origen $m_n^x(0, \dots, 0)$ es el producto escalar o energía cruzada entre $\{x(n)\}$ y $\{x^{n-1}(n)\}$.

I.5.2. Propiedades de los momentos de señales deterministas energéticas.

Algunas de las propiedades de los momentos de los procesos aleatorios estacionarios también se cumplen para los momentos de las señales deterministas energéticas [NIK93b]:

1) Si $x(n) = ax_1(n)$, siendo a una constante arbitraria se cumple que:

$$m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = a^n m_n^{x_1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (1.90)$$

2) Si $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, no se cumple en general

$$m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \neq m_n^{x_1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) + m_n^{x_2}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (1.91)$$

3) Los momentos son funciones simétricas en sus argumentos

$$m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = m_n^x(\tau_2, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) + m_n^x(\tau_{n-1}, \tau_2, \dots, \tau_1) \quad (1.92)$$

4) Si la señal $x(n)$ es par, es decir, $x(n) = x(-n)$, sus momentos de orden n -ésimo satisfacen la condición de simetría:

$$m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = m_n^x(-\tau_1, -\tau_2, \dots, -\tau_{n-1}) \quad (1.93)$$

I.5.3. Casos especiales de las correlaciones de alto orden.

A partir de la definición dada en (1.89) surgen varios casos especiales que introducimos a continuación por su uso frecuente en esta Memoria:

(a) Correlaciones de primer orden o valor medio.

Evalutando (1.89) para $n = 1$ obtenemos:

$$m_1^x \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \quad (1.94)$$

Tenemos asegurada la existencia de m_1^x porque la señal $x(n)$ es una señal energética.

(b) Correlaciones de segundo orden o secuencia de autocorrelación.

$$m_2^x(\tau_1) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x(n+\tau_1) \quad \tau_1 = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (1.95)$$

La secuencia de autocorrelación es par, es decir, $m_2^x(\theta_1) = m_2^x(-\theta_1)$.

(c) Correlaciones de tercer orden.

$$m_3^x(\tau_1, \tau_2) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x(n+\tau_1) x(n+\tau_2) \quad \tau_1, \tau_2 = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1.96)$$

Las correlaciones triples satisfacen las mismas condiciones de simetría en sus argumentos que los cumulantes de tercer orden de procesos aleatorios estacionarios. Nótese, además, que $m_3^x(0,0)$ es una medida del coeficiente de asimetría de la señal.

(c) Correlaciones de cuarto orden.

$$m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x(n+\tau_1) x(n+\tau_2) x(n+\tau_3) \quad (1.97)$$

$$\tau_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad \forall i$$

Es interesante notar que $m_4^x(0,0,\theta_3)$, $m_4^x(\theta_1,0,0)$, $m_4^x(0,\theta_2,0)$ y $m_4^x(\theta,\theta,\theta)$ corresponden a la correlación cruzada entre $\{x^3(n)\}$ y $\{x(n)\}$.

I.5.4. Momentos o correlaciones cruzadas de señales energéticas.

Supongamos que tenemos las señales energéticas $\{x_i(n)\}$, $i=1,2,\dots,k$. Se definen los momentos o correlaciones cruzadas de orden k [NIK93b] como:

$$m_{x_1 x_2 \dots x_k}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2(n+\tau_1) \dots x_k(n+\tau_{n-1}) \quad (1.98)$$

$$\tau_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad \forall i$$

En el caso particular de que $x_1(n) = y_1(n) + y_2(n)$, tenemos que:

$$m_{x_1 x_2 \dots x_k}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = m_{y_1 x_2 \dots x_k}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) + m_{y_2 x_2 \dots x_k}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (1.99)$$

Las correlaciones cruzadas entre dos o varias señales tienen la importante característica de que preservan el retraso temporal entre las señales, de forma que este parámetro puede estimarse a partir de las correlaciones cruzadas de las señales.

I.5.5. Definición de los poliespectros de momentos de señales deterministas energéticas.

El espectro de momentos de orden n-ésimo de $x(n)$ se puede definir como:

$$M_n^x(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) \doteq \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \dots + \omega_{n-1} \tau_{n-1})} \quad (1.100)$$

donde $|\omega_i| \leq \pi$ para $i=1, 2, \dots, n-1$ y $|\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}| \leq \pi$. A partir de la definición del espectro de momentos de las señales energéticas (1.100) podemos observar que es una función generalmente compleja, continua y periódica de periodo 2π . Este espectro de momentos puede expresarse fácilmente en términos de la transformada de Fourier de la señal energética. Para ello basta sustituir la expresión (1.81) en (1.100) para obtener:

$$M_n^x(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) = X(\omega_1) X(\omega_2) \dots X(\omega_{n-1}) X^*(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1}). \quad (1.101)$$

De esta forma, el espectro de momentos de orden n-ésimo puede obtenerse directamente a partir de la transformada de Fourier de la señal energética.

De forma análoga a la que ocurría en procesos aleatorios, hay tres casos especiales de interés por su uso frecuente. Estos incluyen los casos de $n=2$ (Espectro de energía), $n=3$ (Espectro de momentos de tercer orden o biespectro) y $n=4$ (Espectro de momentos de cuarto orden o Triespectro). Asimismo, y de manera similar al caso de las señales aleatorias estacionarias, podemos definir los espectros de momentos cruzados y las relaciones en un sistema LTI sin más que cambiar el espectro de cumulantes del proceso aleatorio estacionario por el espectro de momentos. Por ejemplo, se puede comprobar fácilmente que el espectro de momentos de orden n -ésimo $M_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ de la salida de un sistema lineal de función de transferencia $H(\omega)$ viene dado por

$$M_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H^*(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1}) M_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \quad (1.102)$$

siendo $M_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ el espectro de momentos de orden n -ésimo de la señal de entrada al sistema $\{x(n)\}$. Esta expresión es formalmente idéntica a (1.72) sin más que reemplazar el espectro de cumulantes del proceso estacionario por el espectro de momentos.

PRIMERA PARTE

ESTIMACION DE PARAMETROS DE EXPONENCIALES
COMPLEJAS AMORTIGUADAS



INTRODUCCION A LA PRIMERA PARTE.

En esta primera parte de la tesis nos vamos a ocupar de un problema que surge muy frecuentemente en el análisis de señales, como es el de la estimación de parámetros de señales sinusoidales amortiguadas. Este problema aparece en áreas muy diversas, por lo que ha generado una enorme cantidad de contribuciones en la literatura [ABA85] [BLAR75] [BLAR78] [GOM86] [KHO89] [HAN93] [HUA90] [HUA91] [KAY81] [KUM82] [KUM83] [MAR87] [PRO795] [PAPA90] [RUI94] [RUI95b] [TUF80] [TUF82a] [TUF86]. Uno de los campos en las que ha encontrado gran aplicabilidad es el diseño de sistemas de radar. Fue el desarrollo realizado por Carl Baum, del método de expansión en singularidades (SEM) [BAU76], el que proporcionó una metodología adecuada para describir la respuesta tardía o en el "late-time" de antenas u otros dispersores en términos de sus frecuencias naturales. Haremos un análisis de este método en la tercera parte de esta tesis, pero en esencia permite modelar la respuesta tardía de un objeto iluminado por un pulso electromagnético como una suma de exponenciales complejas. Ya que las frecuencias de oscilación complejas de la respuesta electromagnética son intrínsecas a la geometría del objeto, los polos extraídos de la porción del "late-time" de los campos dispersados pueden utilizarse para proporcionar un parámetro independiente del ángulo, útil para la discriminación de blancos de radar. Es también necesario destacar que este tipo de señales aparecen de forma natural en el estudio de la respuesta transitoria de un circuito eléctrico, aunque a diferencia del problema de "scattering" electromagnético el número de frecuencias de resonancia es finito.

Otro problema electromagnético en el que aparece un modelado de la señal como suma de sinusoides amortiguadas es en el problema de "scattering" inverso [BLAR75] [SAR81] [HUR87] [PEA80]. Para señales de alta frecuencia, muchos objetos se pueden

aproximar de forma adecuada por un conjunto de centros de "scattering" discretos, así el problema de "scattering" inverso se reduce a un problema de extracción de centros de "scattering". De esta forma un planteamiento más simple al problema del "scattering" inverso es estimar la respuesta dispersada del objeto en el dominio del tiempo (medidas de la RCS o sección recta radar), que se puede modelar como una suma de exponenciales complejas amortiguadas, y localizar los centros de "scattering" o frecuencias de esa respuesta temporal.

Junto a estas aplicaciones, la metodología de aproximar una función por una suma de exponenciales complejas ha encontrado utilidad en otras áreas del electromagnetismo. Por ejemplo, para una evaluación eficiente de las integrales de Sommerfeld, el kernel de Sommerfeld se aproxima por una suma de exponenciales complejas [SHU93] [MIL91]. La misma metodología se sigue en la síntesis de patrones de antenas [MIL91]. Otras áreas de aplicación son la extracción de parámetros "s" de circuitos de microondas integrados [SAR92], el análisis de propagación de señales sobre planos base perforados [KAH94], el cómputo de la impedancia de entrada de antenas de apertura [KAH93], el análisis de modos complejos en estructuras conductoras sin pérdidas [SAR94]; el procesado múltiple de señales transitorias [HUA92]; en problemas inverso de radares de apertura sintética [HUA93]; en problemas de imágenes de alta resolución de blancos móviles [HUA94] o en la determinación de la dirección de ondas radio [OUI88].

Aparte de los problemas electromagnéticos, el modelado de señales como una suma de exponenciales amortiguadas aparece frecuentemente en Acústica, Estadística de series temporales y en el Diseño de Circuitos. Referente al análisis de series temporales, un modelado satisfactorio de la serie es de importancia capital en el procesado de señales estocásticas. Los métodos de modelado se pueden clasificar en dos tipos, basados en la FFT y basados en un modelado paramétrico. Implícito en el procedimiento basado en la

FFT es que los datos se modelan bien por una suma de sinusoides y sus armónicos. Por otra parte, los métodos basados en un modelado racional son equivalentes a un modelado exponencial de la serie; ello es consecuencia directa de que la respuesta impulso de un sistema racional lineal y estable se compone de exponenciales amortiguadas. Esta conexión entre el modelado exponencial y los modelos racionales de las series temporales fue establecida en [KUM86] [CAD87].

En los capítulos II y III nos vamos a ocupar de la estimación de parámetros de exponenciales complejas amortiguadas a partir de un conjunto finito de datos usando correlaciones de alto orden. Desde un principio, las diferentes técnicas para estimar frecuencias complejas han intentado mejorar las características y extender la estimación de parámetros a todo tipo de casuística, especialmente cuando se dispone de un número pequeño de datos, cuando la relación señal-ruido (SNR) es baja, o cuando las frecuencias están cortamente espaciadas. El motivo para usar correlaciones o cumulantes de ordenes superiores es la capacidad de los cumulantes de suprimir cualquier ruido Gaussiano presente en la señal, independientemente de cual sea su contenido espectral. Este hecho permitió a Papadopoulos y Nikias [PAPA90] extender la aplicabilidad de las técnicas de estimación de parámetros al caso de ruido Gaussiano coloreado. En el capítulo II trataremos este problema y obtendremos las "slices" adecuadas para recuperar los parámetros en el caso de disponer de un número finito o infinito de datos. Este análisis nos permitirá solventar algunas deficiencias del método de Papadopoulos y Nikias [PAPA90] y proponer un nuevo tipo de estimador, denominado estimador tipo covarianza que reduce los errores deterministas asociados con una estimación imperfecta de las correlaciones de alto orden a partir de un número finito de datos y extiende el intervalo de "slices" útiles para estimar las frecuencias. Este estimador permite que las secuencias de correlación de tercer o cuarto orden sean modeladas por un modelo exponencial amortiguado en ciertas "slices" del espacio de momentos. Este resultado muestra una

conexión útil con los bien conocidos métodos basados en predicción lineal, tales como el método de norma mínima de Kumaresan y Tufts, el cual se puede aplicar seguidamente a la extracción de frecuencias y factores de amortiguamiento a partir de la secuencia de correlación unidimensional. En el capítulo III utilizaremos este estimador y los resultados teóricos del capítulo II para proponer varias matrices de correlaciones. La formulación matricial permitirá observar interesantes propiedades y una interpretación del nuevo estimador. Estas matrices se usarán en un algoritmo que recoge y aplica a nuestro problema los últimos resultados de identificabilidad y consistencia de sistemas lineales expuestos en [GIA92] [SWA92]. En este capítulo también llevaremos a cabo una comparación del método propuesto con otros existentes en la bibliografía a través de simulaciones, lo que nos permitirá llevar a cabo un análisis de las limitaciones y ventajas de los diferentes métodos.

CAPITULO II

**ESTIMACION DE PARAMETROS DE EXPONENCIALES
COMPLEJAS AMORTIGUADAS USANDO CORRELACIONES
DE ALTO ORDEN. TEORIA Y METODO.**



II-1. INTRODUCCION.

Consideremos que el conjunto de datos que constituyen la señal observada $x(n)$ puede representarse como una suma finita de M exponenciales complejas de la forma

$$x(n) = \sum_{m=1}^M a_m e^{s_m n} \quad (2.1)$$

donde Δt es el período de muestreo, y las constantes complejas son

$$a_m = d_m e^{j\theta_m} ; s_m = \sigma_m + j2\pi f_m \quad (2.2)$$

Los parámetros a_m se denominan en la literatura residuos, mientras que los parámetros s_m se conocen como polos, modos o resonancias complejas de la señal $x(n)$, con factor de amortiguamiento σ_m y frecuencia angular $\omega_m = 2\pi f_m$.

Como hemos comentado en la introducción a la primera parte, la estimación de los parámetros (esto es, polos y residuos) de señales sinusoidales exponencialmente amortiguadas a partir de un conjunto finito de muestras $x(n)$, $n = 0 \dots N-1$, es un problema que se presenta en diversos y múltiples campos prácticos, y el cual ha generado una enorme cantidad de contribuciones en la literatura. Desde sus orígenes, las diferentes técnicas desarrolladas para este propósito se han orientado hacia la mejora de las características de la estimación de los parámetros, especialmente cuando el número de datos es bajo, la relación señal-ruido (SNR) es baja, y existen polos con frecuencias muy próximas.

El ajustar un modelo de sinusoides exponencialmente amortiguadas a un conjunto

disponible de datos ruidosos, es básicamente un problema no lineal en las frecuencias. Una vez éstas han sido estimadas, el problema de estimación de los residuos se convierte en un problema lineal. Es pues, el problema de estimar las frecuencias el que ha focalizado la atención en la bibliografía. Existen dos planteamientos principales para tal fin: 1) Una estimación de los parámetros basada en métodos no lineales [KHO89] [KAY88] [TUF80] [ABA85]; y 2) Métodos de predicción lineal (LP) [MAR87] [PRO795] [BLAR78] [GOM99], combinados con métodos de análisis de autovalores (EA) [MAR87] [KUM82] [TUF82a] [KUM86] [TUF86]. Dentro del primer grupo tenemos los métodos de máxima verosimilitud (ML), basados en la maximización de una función altamente no lineal de parámetros desconocidos, que requiere el uso de un espacio M-dimensional [ABA85] [KAY88]. Igualmente, dentro de este grupo se enmarca el método de continuación basado en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales [KHO89]. Sin embargo, aunque estos métodos producen muy buenas estimaciones cuando el ruido presente es Gaussiano blanco y SNR es baja, son métodos bastante complejos tanto matemática como computacionalmente. Entre el segundo tipo de técnicas, la más antigua es el famoso método de Prony, el cual constituye una solución lineal del problema, que calcula los polos de la señal a partir de las raíces de una ecuación polinómica [MAR87]. En su forma original, el Método de Prony estaba restringido al uso de un número de muestras, N, igual a $2M$ [MAR87] [PRO795]. Versiones modernas del método hacen uso de la técnica de mínimos cuadrados para ajustar de forma aproximada un modelo exponencial para los casos en los que $N > 2M$ [MAR87] [BLAR78].

Una avance crucial para resolver el problema del ruido lo constituyeron los métodos de estimación basados en un análisis de autovalores. De entre ellos, el más popular es el Método de Kumaresan-Tufts (KT) [KUM82] [TUF82a] [KUM83], el cual se basa en aplicar el Método de Descomposición en Valores Singulares (SVD) [GOL83] a una matriz de datos ruidosos o a una matriz de autocorrelación. Mediante este

procedimiento se consigue dividir la información contenida en la matriz en dos subespacios de vectores: el subespacio de la señal (que contiene la información del proceso libre de ruido) y el subespacio del ruido. Según este planteamiento, el éxito del método reside en que los valores singulares de los autovectores principales (los cuales generan el subespacio de la señal) de la matriz de datos o autocorrelación, tienden a ser mayores que los valores singulares del subespacio ruido [MAR87].

El método Kumaresan y Tufts (KT) [KUM82] [TUF82b] reemplaza una matriz de datos por otra matriz de rango igual al número de sinusoides presentes en la señal. Posteriormente se obtiene la solución de norma mínima y a partir de ella las frecuencias de la señal. A través de múltiples experiencias, Kumaresan y Tufts demostraron que su método permite alcanzar un umbral de SNR mucho menor que el valor obtenido por los métodos de predicción lineal convencionales (i.e. Prony extendido) y que se comporta como la estimación de máxima verosimilitud cuando el ruido es Gaussiano y blanco.

Sin embargo, el método KT, está restringido y está formulado en casos en los que el ruido aditivo Gaussiano es blanco. Es por ello que en 1990, Papadopoulos y Nikias propusieron en [PAPA90] la generalización del método KT para trabajar en ambientes de ruido coloreado. La clave de tal generalización es el uso de la estadística de alto orden, en lugar de usar consideraciones basadas en la autocorrelación, que tal y como se comentó en el primer capítulo permite suprimir cualquier proceso Gaussiano (blanco o coloreado) añadido a la señal $x(n)$. En concreto, los autores de [PAPA90] proponen la construcción de una ecuación matricial apropiada que involucra momentos de tercer orden (TOM) o cumulantes de cuarto orden (versión FOC) en lugar de los datos ruidosos o autocorrelaciones. Una vez que se construye esta nueva matriz, se aplica el método KT para obtener una solución de norma mínima que asegura la separación de los polos de la señal y los polos extraños [KUM83]. Además, en [PAPA90] se propone calcular los

momentos de tercer orden o los cumulantes de cuarto orden usando el estimador tipo estándar, ampliamente utilizado anteriormente para la estimación del biespectro mediante modelación AR [GAL93a] [GAL94a] [GAL94b] [GAL94c].

El objetivo tanto de este capítulo como del siguientes es la estimación en ruido de parámetros de exponenciales complejas o sinusoides amortiguadas usando correlaciones de orden mayor que dos. Se debe llamar la atención a que este proceso aleatorio (señal determinista mas ruido aditivo) no es ni un proceso ergódico ni estacionario, por lo tanto las propiedades estadísticas no pueden determinarse a partir de una única realización. Hasta ahora, la investigación (e.g. [GIA89b] [SWA91]) se ha focalizado en la estimación de parámetros usando múltiples realizaciones de la señal o suponiendo que se dispone de un número suficiente de datos [PAPA90]. En el problema que nos vamos a plantear aquí usaremos un único registro de datos y un número relativamente pequeño de datos medidos, lo cual es típico de muchas situaciones practicas [CAR93] [GAL95b]. Mostraremos que cuando disponemos de una única realización y el numero de datos es reducido, los errores deterministas asociados con el uso del estimador sesgado estándar (estimador "biased" [BRI65] [ROS83] [NIK87] [RAG85] [NIK93a] [NIK93b] son considerablemente mayores que los errores aleatorios debidos al ruido. En este capítulo se propondrá el uso de un estimador tipo covarianza cuyas estimaciones solucionan el problema que se tenía con el estimador estándar y mantiene el mismo comportamiento con respecto a los datos ruidosos (con ruido blanco o coloreado) que los métodos basados en HOS incluso si el número de datos disponible es reducido.

El presente capítulo introduce en primer lugar con algunos resultados teóricos relativos a las estimaciones de correlaciones de alto orden para señales exponenciales amortiguadas usando diferentes estimadores. Discutiremos las "slices" permitidas en el plano de momentos, los posibles usos y limitaciones del estimador propuesto usando tanto

realizaciones múltiples como un único registro de datos en un ambiente ruidoso. El uso y disposición de estas correlaciones en matrices, la implementación en algoritmos, y los resultados numéricos se discutirán en el capítulo siguiente.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: en la sección II-2 daremos un breve repaso a los métodos de Kumaresan y Tufts (KT) y al método de Papadopoulos y Nikias que reformula el método KT al dominio de la estadística de tercer y cuarto orden. En la sección II-3 se introducen algunas definiciones preliminares y se establece el problema de identificación de parámetros a partir de una "slice" en el plano de momentos o en el espacio de la estadística de cuarto orden. En la sección II-4 discutiremos las "slices" permitidas por el estimador clásico cuando en número de datos es infinito. El caso práctico de un número finito de datos se estudia en la sección II-5, en el cual se realiza un estudio de las posibles "slices" útiles con el estimador estándar y se introduce un nuevo estimador que hemos denominado "estimador tipo covarianza" para la estimación de correlaciones de la señal, estimador que va a permitir conservar las "slices" útiles para estimar los parámetros de la señal exponencial en el caso de un número finito de datos. Este resultado permitirá superar el problema del modelado imperfecto de las correlaciones a que se enfrenta el estimador sesgado estándar cuando el número de datos es pequeño. Finalmente, en la sección II-6 discutimos el problema de la estimación de correlaciones de alto orden cuando la señal está contaminada con ruido aditivo y las diferencias que existirían en el problema cuando disponemos de varias realizaciones de la señal ruidosa.

II-2. REVISIÓN DE METODOS.

Para enmarcar el problema y las aportaciones de este capítulo, vamos a dar en esta sección un breve repaso a las ideas fundamentales de los métodos basados en la

predicción lineal. Empezaremos con el más antiguo de los métodos, el denominado método de Prony, luego comentaremos el método de Kumaresan y Tufts y posteriormente su extensión al dominio de la estadística de órdenes superiores llevada a cabo por Papadoupoulos y Nikias en 1990 [PAPA90].

A) El método de Prony original y extendido.

Supongamos que tenemos bajo consideración un conjunto de N datos $x(n)$ de una señal que puede modelarse como M sinusoides exponencialmente amortiguadas. El método de Prony modela dicho conjunto de N datos de $x(n)$ $n=1, \dots, N$ (ó equivalentemente $n=0, \dots, N-1$), mediante la siguiente función

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=1}^M a_m z_m^n \quad n=1, \dots, N \quad , \quad (2.3)$$

donde $z_m = \exp(s_m \Delta t)$. El cálculo de los parámetros a_m , s_m y M debe resolverse mediante la minimización del siguiente error cuadrático

$$\epsilon = \sum_{n=1}^N (x(n) - \hat{x}(n))^2 \quad . \quad (2.4)$$

Sin embargo, dicha minimización es un problema de mínimos cuadrados no lineal, cuya solución involucra un proceso iterativo en el cual se mejoran de forma sucesiva unas suposiciones iniciales sobre los parámetros [MAR87] [GOL83]. Una solución subóptima que no minimiza ϵ pero que proporciona en ambientes no ruidosos buenos resultados, la constituye el Método de Prony. Como ya se ha comentado en la introducción de este capítulo, dicho método resuelve dos conjuntos secuenciales de ecuaciones lineales con un

paso intermedio de extracción de las raíces de un polinomio que concentra la no linealidad del problema.

La clave del método es reconocer que (2.3) es la solución de la siguiente ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes [KAY81] [MAR87]

$$\hat{x}(n) = - \sum_{m=1}^M c_m \hat{x}(n-m) \quad , \quad (2.5)$$

definida para $M+1 \leq n \leq N-2M$, donde los parámetros c_m ($m=1, \dots, M$) están definidos mediante el polinomio

$$\phi(z) = \prod_{k=1}^M (z - z_k) = \sum_{i=0}^M c_i z^{M-i} \quad c_0 = 1 \quad , \quad (2.6)$$

y cuyas raíces son los polos de la señal, z_k , en el plano z . De esta forma, el Método de Prony para ajustar M exponenciales a un conjunto de $2M$ muestras puede resumirse en tres pasos: En el primero, se resuelve (2.5) usando $\hat{x}(n)=x(n)$ para obtener los coeficientes del polinomio, c_m . En el segundo, se calculan las raíces del polinomio (2.6) y a partir de ellas los polos de la señal, s_m . Finalmente, un tercer y último paso en el que se obtienen los residuos o amplitudes a_m de la forma en que se mostrará posteriormente.

El método de Prony extendido (formulado para la situación práctica en que $N > 2M$), define en primer lugar la diferencia entre los datos reales $x(n)$ y su aproximación \hat{x}_n como

$$x(n) = \hat{x}(n) + e(n) \quad , \quad (2.7)$$

que sustituida en (2.5) cumple que

$$x(n) = - \sum_{m=1}^M c_m x(n-m) + \sum_{m=0}^M c_m e(n-m) , \quad (2.8)$$

definido para $M+1 \leq n \leq N$. De esta forma, según (2.8), un modelo alternativo al de exponenciales complejas con ruido es el de un modelo ARMA con idénticos parámetros AR y MA excitado por un proceso ruidoso $e(n)$. Aunque, tal y como se ha indicado anteriormente, la verdadera estimación de mínimos cuadrados de los parámetros se obtiene minimizando

$$\epsilon = \sum_{n=M+1}^N [e(n)]^2 , \quad (2.9)$$

lo que conduce a un conjunto de ecuaciones no lineales difíciles de resolver en un caso general. El Método de Prony extendido constituye una alternativa a este problema, y define el proceso $\epsilon(n)$ como [MAR87] [BLAR78]

$$\epsilon(n) = \sum_{m=0}^M c_m e(n-m) \quad n=M+1, \dots, N , \quad (2.10)$$

de tal forma que

$$x(n) = - \sum_{m=1}^M c_m x(n-m) + \epsilon_n . \quad (2.11)$$

Por consiguiente, $\epsilon(n)$ representa el error de la aproximación de predicción lineal, a diferencia de $e(n)$ definido en (2.7) que representa el error de aproximación exponencial. Por otro lado, la expresión (2.11) es idéntica a la ecuación del error de predicción lineal hacia delante sin más que identificar cada c_m con un parámetro de predicción lineal. Según esto, en lugar de la ecuación (2.5), pueden elegirse los parámetros c_m como aquellos que minimizan el error cuadrático de predicción lineal definido como

$$Q = \sum_{n=M+1}^N [\epsilon(n)]^2, \quad (2.12)$$

en lugar de ϵ definido en (2.9). Es decir, dada la estrecha relación entre la teoría de predicción lineal y la estimación AR, el procedimiento de la estimación de parámetros del Método de Prony extendido se reduce a la estimación de los parámetros AR usando el método de la covarianza.

Por consiguiente, el Método de Prony extendido tiene como primer paso una estimación de los parámetros de un modelo AR de orden M propuesto para los datos disponibles $x(n)$. Obtenidos estos parámetros, se forma el polinomio (2.6), a partir del cual se obtienen sus raíces z_i de las cuales pueden obtenerse los polos de la señal como

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\Delta t} \text{Ln} |z_i| \\ \omega_i &= \frac{1}{\Delta t} \text{arctg} \left[\frac{\text{Im}(z_i)}{\text{Re}(z_i)} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

La última etapa del método, que además es común para todos los métodos presentados posteriormente a lo largo de este capítulo, consiste en el cálculo de los residuos. Ahora

bien, puesto que los polos z_i son ya conocidos, (2.3) se transforma en un sistema de ecuaciones lineales, sobre el cual se puede aplicar la técnica de mínimos cuadrados, lo que conduce a que los residuos a_i vienen dados por [KAY81] [MAR87]

$$\mathbf{A} = [\Phi^H \Phi]^{-1} \Phi^H \mathbf{X} \quad , \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{A} = [a_1, \dots, a_M]^T$, $\mathbf{X} = [x(1), \dots, x(n)]^T$ y Φ es la matriz tipo Vandermonde dada por [MAR87]

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.15)$$

B) El método de Prony en estadística de tercer orden.

El método de Prony descrito en el apartado A) puede extenderse fácilmente al dominio de la estadística de tercer orden. Para ello se eligen los parámetros c_m como aquellos que minimizan el conjunto de errores cuadráticos de predicción lineal definidos por

$$Q_1 = \sum_{n=M+1}^N [\epsilon(n)]^2 \quad x(n-1) \quad n=0,1,\dots,M \quad , \quad (2.16)$$

en lugar de Q definido en (2.12). Esta expresión del error, junto con la transformación de momentos a la línea diagonal del plano (m,n) , es análogo al que se obtiene para la

modelación AR mediante el método CTOM [NIK87] [RAG85] [RAG86]. Así, lo que se propone en esta sección es sustituir, dentro del primer paso del Método de Prony extendido, la etapa de estimación de los parámetros c_m mediante modelación AR usando el método de la covarianza (dominio de la estadística de segundo orden) por una etapa análoga de modelación AR usando el método CTOM (dominio de la estadística de tercer orden). Es por ello que a esta variante del Método de Prony, la denominaremos como el Método de Prony en estadística de tercer orden, o simplemente, "Método de Prony Biespectral". Las otras dos etapas del método biespectral son las mismas que en método de Prony extendido, esto es, extracción de las raíces del polinomio y cálculo de los residuos. Finalmente, la figura (2.1) ilustra gráficamente el diagrama de bloques del Método de Prony, tanto en el dominio de la estadística de segundo como de tercer orden.

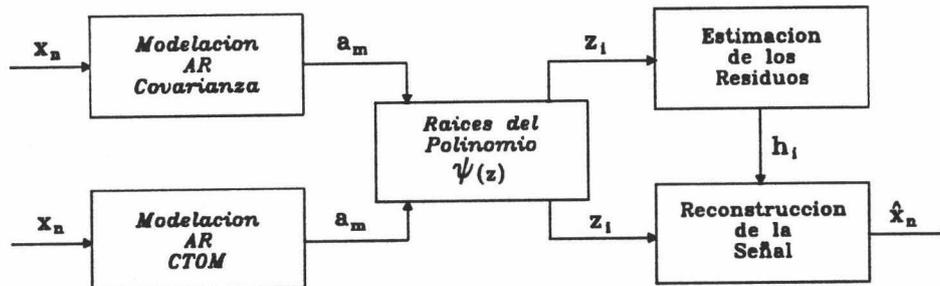


Figura (2.1): Diagrama de bloques del Método de Prony en estadística de segundo y tercer orden.

C) El método de Kumaresan-Tufts (KT).

En 1982, Kumaresan y Tufts mostraron que las técnicas basadas en la predicción lineal de mínimos cuadrados podían mejorarse considerablemente incorporando dos

modificaciones esenciales [KUM82]:

- 1) Aplicando una descomposición en valores singulares (SVD) a las ecuaciones de predicción lineal;
- 2) usando un valor K para el orden del filtro de predicción mayor que el número de exponenciales complejas M.

El método KT, pues, establece las siguientes ecuaciones de predicción lineal hacia atrás [KUM82] usando los datos complejos conjugados de la señal medida:

$$\begin{pmatrix} x^*(0) & x^*(1) & \dots & \dots & x^*(K) \\ x^*(1) & x^*(2) & \dots & \dots & x^*(K+1) \\ x^*(2) & x^*(3) & \dots & \dots & x^*(K+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^*(N-K-1) & x^*(N-K) & \dots & \dots & x^*(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

o en notación matricial

$$X \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

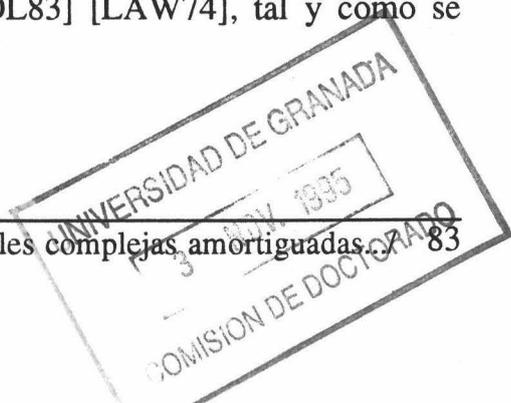
Estas ecuaciones han de resolverse para encontrar los coeficientes del polinomio $b(i)$ $i=1\dots K$: siendo K el orden de filtro del error de predicción, el cual ha de estar comprendido entre $M \leq K \leq N-M$. Kumaresan y Tufts [KUM83] mostraron que si se resuelve el anterior sistema para encontrar la solución de norma mínima, el polinomio del filtro del error de predicción

$$B(z) = 1 + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \dots + b(K)z^{-K} \quad (2.19)$$

tiene M ceros en $\exp\{-s_k^*\}$ $k=1,2,\dots,M$. Estos ceros del polinomio $B(z)$, comúnmente llamados como "ceros de la señal", tienen la propiedad de estar situados, si la señal está libre de ruido, fuera del círculo unidad en el plano z . Sin embargo el polinomio $B(z)$ tiene otros $K-M$ ceros llamados "ceros extraños". Kumaresan [KUM83] demostró que la localización de los ceros extraños depende de la elección que se haga del vector b de las infinitas soluciones que tiene la ecuación matricial (2.18). En concreto, demostró que si los coeficientes del vector b se elige de tal forma que $|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_L|^2$ es mínimo (es decir, b tiene norma euclídea mínima), los $K-M$ ceros extraños del polinomio $B(z)$ de grado K se localizan dentro del círculo unidad [KUM83]. Este hecho facilita la discriminación entre los M ceros de la señal y los $K-M$ ceros extraños.

Por otro lado, también existe la alternativa de usar los datos en dirección hacia delante, es decir, utilizar unas ecuaciones análogas a (2.18) pero de predicción lineal hacia delante. En este caso, el polinomio $B(z)$ formado ahora con los coeficientes de predicción hacia delante, presenta los M ceros de la señal en $\exp(b_k)$ ($k=1,\dots,M$), es decir, dentro del círculo unidad, junto con los $K-M$ ceros extraños, razón por la cual esta alternativa es menos recomendable.

Aunque los resultados anteriores sólo son estrictamente válidos en la situación ideal de datos no ruidosos, tal y como se ha mostrado a lo largo de los años estudiando numerosos ejemplos, la validez del método KT reside precisamente en que dichos resultados se siguen manteniendo en ambientes ruidosos relativamente moderados. Sin embargo, para obtener una mayor potencialidad de método en ambientes ruidosos, sus autores propusieron que los coeficientes de $B(z)$ deben calcularse de forma aproximada mediante el uso de una SVD truncada [KUM82] [GOL83] [LAW74], tal y como se explicará a continuación.



En presencia de ruido, si uno intenta resolver la ecuación (2.18) usando técnicas de mínimos cuadrados, tal y como lo hace el método de la covarianza, aparecen considerables perturbaciones introducidas por el vector b . La razón de esto es que para $K > M$, $K-M$ columnas de la matriz A tienden a ser dependientes, causando importantes problemas de inestabilidad en la técnica de mínimos cuadrados [KUM82] [KUM83] [KUM86]. Para aliviar estos problemas de mal acondicionamiento del problema, se puede usar la SVD de la matriz A , en lugar de hallar la solución de mínimos cuadrados. En concreto, en el método KT se propone como solución de (2.18) una solución truncada de SVD, haciendo cero los $K-M$ valores singulares de la matriz A más pequeños, es decir [KUM82]

$$\mathbf{b} = - \sum_{k=1}^M \lambda_k^{-1} [\mathbf{u}_k^H \mathbf{h}] \mathbf{v}_k, \quad (2.20)$$

donde λ_k , $k=1, \dots, K$ o $N-K$ (dependiendo del rango de A) son los valores singulares de A , \mathbf{v}_k ($k=1, \dots, K$) y \mathbf{u}_k ($k=1, \dots, N-K$) son los autovectores de las matrices $A^H A$ y $A A^H$, respectivamente y \mathbf{h} es el vector formado por la primera columna de la matriz A . De esta forma, el efecto del uso de la SVD truncada es incrementar la SNR de los datos previos a la obtención del vector solución \mathbf{b} . Por otro lado, en lo anteriormente expuesto se ha asumido que M es conocido. En un caso más general, este puede estimarse a partir del valor comparativo de los valores singulares de A . Así, en el caso no ruidoso, puesto que el rango de A es M , sólo los $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ primeros valores singulares son no nulos, y \mathbf{b} dada por (2.20) será la solución de norma mínima deseada. Si por el contrario, los datos están contaminados por ruido, no existirá ningún autovalor de A nulo, teniéndose que utilizar diversos criterios para la decisión del punto de truncamiento (esto es, del rango de A) a partir de los K valores singulares obtenidos [KON88].

Resumiendo, el método KT consiste básicamente en los siguientes pasos [KUM82]:

- 1) construcción del sistema de ecuaciones de predicción lineal hacia atrás dado en (2.18);
- 2) uso de la SVD para determinar los valores singulares de A y los autovectores de $A^H A$ y $A A^H$;
- 3) decisión sobre el rango de A ;
- 4) obtención de la solución SVD truncada de (2.18) mediante la ecuación (2.20);
- 5) construcción del polinomio $B(z)$ y obtención de sus raíces;
- 6) discriminación entre los ceros extraños y los ceros de la señal (aquellos de módulo mayor que la unidad);
- 7) cálculo de los residuos mediante el paso 3 del método de Prony.

Numerosas simulaciones del método KT han mostrado su enorme potencialidad sobre los métodos basados en mínimos cuadrados tales como el método de Prony, incluso en ambientes de ruido blanco de baja SNR [MAR87] [KUM82] [KUM83] [KUM86]. No obstante, su funcionamiento se ve considerablemente alterado cuando el ruido añadido no es espectralmente blanco sino coloreado. Es por ello, que dadas las prestaciones del análisis HOS en ambientes ruidosos, Papadopoulos y Nikiás propusieron en [PARA90] la generalización del método KT al dominio HOS, con el objetivo de poder tratar de forma análoga el caso de ruido coloreado. Las líneas básicas de tal generalización se exponen en la siguiente subsección. En este sentido es interesante también resaltar que respecto a lo que al método KT se refiere, las propiedades de la matriz de datos A definida en (2.18) son totalmente análogas a las de posibles matrices de autocorrelación, construidas a partir de estos. Quiere ello decir que el método KT tal y como se ha presentado en esta sección está correctamente enmarcado dentro del dominio de la estadística de segundo orden.

D) Generalización del método KT al dominio biespectral. (Papadopoulos y Nikias 1990 [PAPA90])

Dada la señal $x(n)$ de (2.1), existe un único conjunto de coeficientes complejos c_i ($i=1,\dots,K$) tales que [MAR87]

$$x(n) = \sum_{i=1}^M c_i x(n+i) \quad n > 0 \quad . \quad (2.21)$$

Multiplicando ambos miembros de esta expresión por $x^*(n+1) x^*(n+1)$, tomando valores esperados y teniendo en cuenta la definición de momentos de tercer orden, se obtiene que

$$\sum_{i=0}^M c_i R_x(k-i, k-i) = 0 \quad , \quad (2.22)$$

donde $R_x(\tau, \tau) = E\{x(n) x^*(n+\tau) x^*(n+\tau)\}$.

Supongamos ahora que construimos una versión sobredimensionada de (2.22) con el índice k elegido de tal forma que se construye el siguiente sistema de ecuaciones lineales de dimensión $(K+1)(K+1)$

$$R_x \hat{c} = 0 \quad (2.23)$$

donde

$$\hat{c} = (\hat{c}_K, \hat{c}_{K-1}, \dots, \hat{c}_0)^T \quad (2.24)$$

y R_x es la matriz de momentos de tercer orden con argumento positivo definida por

$$R_x = \begin{pmatrix} R_x(0,0) & R_x(1,1) & \dots & \dots & R_x(K,K) \\ R_x(1,1) & R_x(2,2) & \dots & \dots & R_x(K+1,K+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_x(K,K) & R_x(K+1,K+1) & \dots & \dots & R_x(2K,2K) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Sea también

$$A(m,v) = \sum_{l=1}^M a_l a_m^* a_v^* \left[\frac{1}{1 - e^{b_l + b_m^* + b_v^*}} \right] \quad (2.26)$$

$$v, m = 1, \dots, M$$

Según esto, y asumiendo conocida la secuencia de momentos de tercer orden, se puede demostrar que si $A(m,n) \neq 0$ y $b_l + b_q \neq b_v + b_m$ para todo l, q, v, m , la matriz R_x tiene rango $\hat{K} = M(M+1)/2$ y por tanto para cualquier vector \hat{c} tal que verifique (2.23) y $K \geq M(M+1)/2$, el polinomio

$$A(z) = \sum_{i=0}^K \hat{c}_{K-i} z^{-i} \quad (2.27)$$

tiene \hat{K} raíces en $\exp(-(b_m + b_v)^*)$ para $1 \leq m, v \leq M$, que están situadas fuera del círculo

unidad. Tanto la demostración de esta afirmación así como condiciones sobre los parámetros a_i para que se cumpla que $A(m,n) \neq 0$ para todo m,v , están dadas amplia y claramente en [PAPA90]. De esta forma, conocida la matriz de momentos R_x , se puede formar el sistema de ecuaciones (2.23), aplicarle el método KT para obtener los coeficientes de $A(z)$ y obtener las raíces de este polinomio. Sin embargo, estas raíces no coinciden exactamente con los ceros de la señal localizados en $\exp(-b_m^*)$. Es decir, la secuencia de momentos con argumento positivo $R_x(\tau,\tau)$ ($\tau=0,\dots,K$) no contiene exactamente los mismos polos que la señal $x(n)$, lo que hace inviable el uso del sistema de ecuaciones (2.23) para el objetivo final de la estimación de los parámetros de $x(n)$. Es por ello que en lugar de usar en (2.23) la matriz R_x definida por (2.25), se propone el uso de la siguiente matriz de momentos alternativa

$$R_x \doteq \begin{pmatrix} R_x^*(0,0) & R_x^*(-1,-1) & \dots & \dots & R_x^*(-K,-K) \\ R_x^*(-1,-1) & R_x^*(-2,-2) & \dots & \dots & R_x^*(-K-1,-K-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_x^*(-K,-K) & R_x^*(-K-1,-K-1) & \dots & \dots & R_x^*(-2K,-2K) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

que como vemos involucra sólo momentos con argumento negativo. En este caso, se define $A(l)$ como

$$A(l) = \sum_{m=1}^M \sum_{v=1}^M a_l^* a_m a_v \left[\frac{1}{1 - e^{b_l^* + b_m + b_v}} \right] \quad (2.29)$$

$$l=1,\dots,M$$

Al igual que en el caso anterior, asumiendo que la secuencia de momentos contenidos en

la matriz R_x de (2.28) es conocida, se puede demostrar [PAPA90] que si $A(1) \neq 0$ para todo valor de l , entonces R_x tiene rango $\hat{K}=M$ y por consiguiente para cualquier \hat{c} que cumpla (2.23) con (2.28) y $K > M$, el polinomio

$$A(z) = \sum_{i=0}^K \hat{c}_{K-i} z^{-i} \quad (2.30)$$

tiene $\hat{K}=M$ raíces en $\exp(-(b_m)^*)$ ($m=1, \dots, M$) fuera del círculo unidad. Respecto de los $K-M$ ceros extraños del polinomio $A(z)$ definido en (2.30), al igual que para el método KT expuesto en la sección anterior, si $K \geq M$ y \hat{c} es la solución de norma euclídea mínima del sistema lineal (2.23), dichos ceros se sitúan dentro del círculo unidad en el plano z [PAPA90] [KUM83]. De esta forma se consigue una fácil discriminación entre los ceros de la señal (fuera del círculo unidad) y los ceros extraños (dentro del círculo unidad).

La razón de usar momentos de tercer orden en vez de simplemente los datos de la señal o la función de autocorrelación aparece cuando trabajamos en ambiente ruidoso. Consideremos la señal $x(n)$ contaminada por ruido aditivo $w(n)$ de tal forma que

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (2.31)$$

donde el ruido $w(n)$ se supone de media cero, un proceso Gaussiano complejo blanco o coloreado, con partes real e imaginaria independientes e idénticamente distribuidas, e independientes de la señal. Según esto, la secuencia de momentos de tercer orden de $y(n)$ es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_y(\tau, \tau) &= \mathbf{R}_x(\tau, \tau) + \mathbf{R}_w(\tau, \tau) + \\
 &+ \mathbf{r}_{w^*w^*}(0)\hat{x} + 2\mathbf{r}_w(\tau)\hat{x}^* + \quad , \\
 &+ \mathbf{r}_{x^*x^*}(0)\hat{w} + 2\mathbf{r}_x(\tau)\hat{w}^*
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\mathbf{R}_x(\tau, \tau)$ y $\mathbf{R}_w(\tau, \tau)$ son las secuencias de momentos de tercer orden de $x(n)$ y $w(n)$, respectivamente, $r_x(\tau)$ y $r_w(\tau)$ son las secuencias de autocorrelación de $x(n)$ y $w(n)$, y

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{x^*x^*}(0) &= \mathbf{E}\{x_{n+\tau}^* x_{n+\tau}^*\} \\
 \mathbf{r}_{w^*w^*}(0) &= \mathbf{E}\{w_{n+\tau}^* w_{n+\tau}^*\}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

mientras que \hat{x} , $(\hat{x})^*$, \hat{w} y $(\hat{w})^*$ son los valores medios de la señal y el ruido, respectivamente.

Puesto que $w(n)$ es Gaussiano, $\mathbf{R}_w(\tau, \tau) = 0$. Además, ya que $\hat{y} = \hat{x} + \hat{w}$, se sigue que $\hat{y} = \hat{x}$. Por tanto si a la señal ruidosa observada, $y(n)$, le quitamos la media, es decir, $\hat{y} = 0$, la secuencia de autocorrelación del ruido no influirá (al menos teóricamente) en $\mathbf{R}_y(\tau, \tau)$. Por tanto, bajo estas suposiciones se verifica que

$$\mathbf{R}_y(\tau, \tau) = \mathbf{R}_x(\tau, \tau) \quad , \tag{2.34}$$

y por tanto el ruido no contribuye a la secuencia de momentos $\mathbf{R}_y(\tau, \tau)$ independientemente de su contenido espectral. Este hecho es la principal motivación del uso de una matriz de momentos de alto orden en lugar de una matriz de datos o autocorrelación como punto de partida del método KT.

Hasta ahora, el método presentado se basa en el conocimiento de la secuencia de momentos terceros sobre la diagonal. Sin embargo, en la práctica dichos momentos deben estimarse a partir de un número finito de muestras ruidosas $y(n)$, y es necesario usar un estimador de los momentos de tercer orden. Papadopoulos y Nikiás propusieron en [PAPA90] el uso del estimador estándar (es decir, análogo al usado en el método TOR para la modelación AR del biespectro [RAG86]). De esta forma el método completo puede sistematizarse en los siguientes pasos:

1) Se dividen los datos de $y(n)$ en M' registros de N muestras cada uno ($y^i(1), \dots, y^i(N)$ son las muestras del i -ésimo registro). Este paso es opcional.

2) Se elimina el valor medio de cada registro para obtener así una señal de media cero que se satisfaga (4.34).

3) Se estima la secuencia de momentos utilizada en la matriz (4.28) como

$$\mathbf{R}_y(-\tau, -\tau) = \frac{1}{M'} \sum_{i=1}^{M'} \mathbf{R}_y^i(-\tau, -\tau) \quad , \quad (2.35)$$

donde $\mathbf{R}_y^i(-\tau, -\tau)$ son los momentos de cada registro, los cuales se calculan usando un estimador estándar [PAPA90].

4) Se forman las matrices

$$[\mathbf{R}_y^c]_{ij} = [\mathbf{R}_y]_{i+1, j+1} \quad , \quad (2.36)$$

$$\mathbf{r}_y^c = (\mathbf{R}_y(-1, -1), \mathbf{R}_y(-2, -2), \dots, \mathbf{R}_y(-L, -L))^T$$

y la ecuación matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y^c \mathbf{a}' &= -\mathbf{r}_y^c \\ \mathbf{c}' &= (\hat{c}_{K-1}, \dots, \hat{c}_0)^T \end{aligned} \quad (2.37)$$

5) Se calcula la solución de SVD truncada a \hat{K}

$$\mathbf{c}' = -\sum_{m=1}^{\hat{K}} t_m^{-1} \mathbf{q}_m (\mathbf{p}_m)^H \mathbf{r}_y^c, \quad (2.38)$$

donde t_m ($m=1, \dots, \hat{K}$) son los valores singulares de \mathbf{R}_y^c , y \mathbf{q}_m y \mathbf{p}_m son los autovectores de $\mathbf{R}_y^c \mathbf{R}_y^c$ y $\mathbf{R}_y^c \mathbf{R}_y^{cH}$, respectivamente.

6) A partir del vector \mathbf{c}' se plantea el polinomio $A(z)$ del cual se obtienen sus raíces que proporcionan los polos de la señal en el plano z .

De forma similar, estos resultados se pueden extender a la "slice" diagonal de correlaciones de cuarto orden de la señal [PAPA90]. En este caso basta considerar correlaciones de cuarto orden, o cumulantes para ambiente ruidoso, en vez de momentos de tercer orden. Las ecuaciones y el algoritmo descrito anteriormente permanecen sin cambios sin mas que hacer las sustituciones señaladas.

E) El método de la matriz tipo CTOM (media de tercer orden restringida).

Recientemente se ha propuesto en [GAL95a] una alternativa al método de Papadopoulos y Nikias presentado en el apartado anterior, basada en el uso de un estimador del tipo usado en el método CTOM para la modelación AR del biespectro. Este

método aplica dicho estimador para la matriz de momentos R_y en lugar del estimador estándar o tipo TOR usado en [PAPA90]. Para su desarrollo consideremos por simplicidad de notación un solo registro con N muestras $y(1), \dots, y(N)$. Consideremos además

$$S_n(i,j) = x(n+i) (x(n-j))^* ; \quad i,j=0, \dots, K \quad , \quad (2.39)$$

que, teniendo en cuenta la definición de momentos de tercer orden, verifica que

$$E \{S_n(i,j)\} = R_x^*(-j-i, -j-i) \quad . \quad (2.40)$$

Por tanto, usando la ecuación (2.23), se cumple que

$$E \{F(n,i)\} = 0 \quad ; \quad i=0, \dots, K \quad , \quad (2.41)$$

donde

$$F(n,i) = S_n(i,0) + \sum_{j=1}^K \hat{c}_{L-j} S_n(i,j) \quad . \quad (2.42)$$

De las expresiones (2.42) y (2.39) puede verse que para cualquier valor de los índices i y K , podemos obtener $N-2K$ muestras de $F(n,i)$, esto es, para $n=K+1, \dots, N-K$ e $i=0, \dots, L$. De esta forma, para que se cumpla la ecuación (2.41) podemos hacer el valor medio de $F(n,i)$ igual a cero en lugar de tomar valores esperados, y extenderlo sobre $n=K+1$ hasta $n=N-K$, esto es

$$\frac{1}{N-2K} \sum_{n=K+1}^{N-K} F(n,i) = 0 \quad ; \quad i=0, \dots, K \quad , \quad (2.43)$$

lo que conduce a la siguiente ecuación matricial

$$Q\hat{a}=0 \quad , \quad (2.44)$$

donde la matriz Q de orden $(K+1) \times (K+1)$ es

$$Q = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \dots & q_{0K} \\ q_{10} & q_{11} & \dots & q_{1K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_{K0} & q_{K1} & \dots & q_{KK} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

con

$$q_{ij} = \sum_{n=K+1}^{N-K} x(n+j) (x(n-i))^* \quad . \quad (2.46)$$

De esta forma, una vez que se calculan estos elementos de la matriz Q, podemos obtener (usando un análisis basado en una SVD truncada a $\hat{K}=M$), la solución de norma euclídea mínima de la ecuación matricial (2.44) en lugar de (2.23). Por tanto, el estimador tipo CTOM propuesto de esta forma, sustituye el paso 3 del sumario indicado en la sección anterior por el uso de la matriz tipo CTOM de correlaciones de tercer orden dada por las expresiones (2.45) y (2.46). A partir de este paso, cambiando simplemente la matriz R_y por Q, el resto de los pasos son similares a los presentados para el método comentado en el apartado anterior.

II-3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA BASÁNDOSE EN CORRELACIONES DE ALTO ORDEN (HOC).

Consideremos la señal $x(n)$ dada por la ecuación (2.1). El problema que nos planteamos es la estimación de frecuencias, factores de amortiguamiento, y, cuando se desee, las amplitudes complejas a partir de un número finito de datos observados $x(n)$, $n = 1 \dots N$ usando un planteamiento basado en correlaciones de alto orden. El cálculo de las amplitudes complejas es inmediato cuando se disponen de las frecuencias y factores de amortiguamiento, por lo que nuestro objetivo es la estimación de estos parámetros de una "slice" unidimensional ("slice" de rango completo) de la secuencia de correlaciones de alto orden de la señal energética $x(n)$. Para el caso de tercer orden, la secuencia de correlación de tercer orden se define como [NIK93b]:

$$R_x(\tau_1, \tau_2) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n+\tau_1) x^*(n+\tau_2) \quad \tau_1, \tau_2 = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.47)$$

Las "slices" unidimensionales de las correlaciones de tercer orden pueden definirse como:

$$r_x(\tau) \doteq R_x(\tau, a\tau + b) \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.48)$$

donde a y b son la pendiente y la ordenada en el origen respectivamente de la recta en el plano de momentos $\tau_1 - \tau_2$.

Los parámetros de la señal podrían recuperarse a partir de una "slice" unidimensional ("slice" 1-D) en el plano de momentos siempre que la propia "slice" 1-D pueda modelarse como la suma de M exponenciales complejas amortiguadas oscilando con las mismas frecuencias y factores de amortiguamiento que la señal original. En tal

caso podríamos construir una matriz Hankel como la usada en (2.17) con correlaciones en vez de datos. Ya que la "slice" 1-D se comporta como una señal exponencial amortiguada, se pueden aplicar los resultados de la sección anterior para el método KT, y así identificar las frecuencias y los factores de amortiguamiento de la señal [RUI94] [RUI95a].

La cuestión central que se nos plantea es cuando la "slice" 1-D se puede modelar como la suma de M exponenciales amortiguadas. Para responder a esta cuestión hemos de distinguir dos casos para la señal determinista, el caso de disponer de un registro completo de todos los datos de la señal, y el caso de disponer de un número limitado y pequeño de datos medidos. En el primer caso el número de datos es muy grande de forma que la señal decadente prácticamente se ha anulado. Nos referiremos a este caso como el caso de número infinito de datos, que es la condición teórica a la que corresponde, aunque en la práctica signifique un número suficientemente grande de datos relativos a los coeficientes de amortiguamiento, y lo trataremos en la sección II-4. En el segundo caso el número de datos disponibles es reducido, de forma que nos vemos limitados a trabajar y a estimar los parámetros con ese número finito de datos (sección II-5). Este último caso es el que se presenta más frecuentemente en los casos prácticos, y como veremos el estimador estándar sesgado no permitirá una correcta estimación de parámetros, mientras que el estimador propuesto respetará la estructura teórica de las secuencias que se tratan de estimar.

En las dos siguientes secciones nos centraremos en el caso de tercer orden por simplicidad. Una extensión de todos los resultados de las secciones II-4, II-5 y II-6 al dominio de la estadística de cuarto orden se proporciona en la sección II-7.

II-4. PLANTEAMIENTO BASADO EN HOC. NUMERO DE DATOS INFINITO.

Supongamos que conocemos la señal energética en un intervalo temporal tan amplio como queramos. En este caso podemos construir la secuencia de correlaciones de tercer orden correcta sin errores deterministas. Si la señal energética se define como en la ecuación (2.1) con $n=0,1, \dots, \infty$, una "slice" unidimensional en el plano τ_1, τ_2 definida por la ecuación (2.48) resulta en:

$$r_x(\tau) = R_x(\tau, a\tau+b) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+a\tau+b) \quad \tau=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.49)$$

$$n_0 = \max\{0, -\tau, -a\tau-b\}$$

ya que $x(n)=0$ para $n<0$. Utilizando (2.1), la ecuación (2.49) se transforma en:

$$r_x(\tau) = \sum_{i,j,k=1}^M a_i a_j^* a_k^* e^{s_j^* \tau} e^{s_k^*(a\tau+b)} \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{(s_i+s_j^*+s_k^*)n} \quad (2.50)$$

y llevando a cabo la suma geométrica tenemos:

$$r_x(\tau) = \sum_{i,j,k=1}^M a_i a_j^* a_k^* e^{s_j^* \tau} e^{s_k^*(a\tau+b)} \frac{e^{(s_i+s_j^*+s_k^*)n_0}}{1-e^{s_i+s_j^*+s_k^*}} \quad (2.51)$$

Para obtener un modelo exponencial amortiguado de la secuencia $r(\tau)$, podemos variar τ desde 0 a ∞ o desde 0 a $-\infty$, apareciendo varios casos dependiendo del cuadrante particular al que la "slice" unidimensional pertenece en el plano de momentos. Estos casos se recogen en la siguiente proposición [RUI95a]:

Proposición 1.- Solamente las "slices" horizontales en los cuadrantes primero y cuarto y las "slices" diagonales en el tercer cuadrante permite que la estructura exponencial amortiguada original de los datos se mantenga también para la secuencia de momentos.

Demostración.- Vamos a distinguir cuatro casos dependiendo del cuadrante al que la "slice" unidimensional 1-D de correlaciones de tercer orden pertenece en el plano τ_1 - τ_2 :

Caso 1.- La "slice" 1-D pertenece al primer cuadrante.- En este caso, τ varía desde 0 a ∞ , la pendiente a es positiva ($a > 0$) (a negativo correspondería a una recta en el cuarto cuadrante con un cambio en el origen), y la ordenada en el origen b puede tomarse como positiva ya que un valor de $b < 0$ solo supondría un cambio en el origen de τ . Teniendo estos valores en cuenta, n_0 definida en (2.49) es igual a 0, de forma que la secuencia de correlación de tercer orden resulta ser:

$$r(\tau) = \sum_{i,j,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{s_j^* \tau} e^{s_k^* (a\tau + b)} \quad (2.52)$$

Para modelar $r(\tau)$ como sinusoides exponencialmente amortiguadas con las mismas frecuencias que la señal original, a debe elegirse igual a 0, (i.e. "slices" horizontales), de forma que la secuencia de momentos sería:

$$r(\tau) = \sum_{j=1}^M A(j) e^{s_j^* \tau} \quad A(j) = \sum_{i,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{s_k^* b} \quad (2.53)$$

Siempre que $A(j)$ sea no nula ($\neq 0$) para cualquier j , i.e. la "slice" 1-D sea una "slice" de rango completo, la secuencia de momentos $r(\tau)$ se comporta como la señal energética original.

Caso 2.- Segundo cuadrante.- En este caso $\tau=0,-1,\dots,-\infty$, $a \leq 0$ y $b \geq 0$. Ahora $n_0 = -\tau$, siendo la secuencia de momentos:

$$r(\tau) = \sum_{i,j,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^* e^{bs_k^*}}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{(s_j^* + as_k^*)\tau} e^{-(s_i + s_j^* + s_k^*)\tau} \quad (2.54)$$

En este caso, debido al último término exponencial en (2.54) no existe ninguna "slice" que pueda modelarse como una suma de exponenciales en este cuadrante.

Caso 3.- Tercer cuadrante.- En este caso $\tau=0,-1,\dots,-\infty$, $a \geq 0$, y $b \leq 0$. A diferencia de los casos anteriores, n_0 definida como el máximo de $\{0, -\tau, -a\tau - b\}$ puede tomar valores diferentes dependiendo del valor de hecho que tomen las pendientes:

Si $a > 1$, $-a\tau - b > -\tau$ y entonces $n_0 = -a\tau - b$

Si $a = 1$, $-\tau - b > -\tau$ y entonces $n_0 = -\tau - b$

Si $a < 1$, depende del valor de b . Para $\tau < b/(1-a)$, $n_0 = -\tau$.

Analizando las diferentes posibilidades, los siguientes resultados siguen fácilmente:

- si $a > 1$ o $a < 1$, no existe ninguna "slice" que pueda modelarse con el mismo modelo exponencial que los datos.
- si $a = 1$ ("slice" diagonal), la secuencia de correlación de tercer orden queda:

$$r(\tau) = \sum_{i=1}^M A(i) e^{s_i \tau} \quad A(i) \doteq \sum_{j,k=1}^M \frac{a_j a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{-b(s_i + s_j^* + s_k^*)} \quad (2.55)$$

Como puede observarse, la "slice" diagonal permite la obtención de los parámetros de la señal. Esta "slice" diagonal se usó por Papadopoulos y Nikias [PAPA90] con $b=0$ para

recobrar los parámetros de la señal, mostrando a través de una descomposición matricial que el rango de las matrices cuadradas construidas con estas correlaciones es igual al número de exponenciales. Para ello se asume que la "slice" es de rango completo. En nuestro caso hemos llegado a la misma conclusión pero para cualquier matriz rectangular de correlaciones, ya que estas correlaciones pueden considerarse como unos nuevos 'datos' a los cuales aplicar el método KT.

Caso 4. Cuarto cuadrante. En este caso $\tau=0,1,\dots,\infty$, $a \leq 0$, y $b \leq 0$ (como ocurría anteriormente, nótese que $a \geq 0$ puede considerarse como una recta en el primer cuadrante con un cambio de origen en el plano de momentos mientras que $b \geq 0$ correspondería a un cambio en el origen de τ). Entonces, $n_0 = -a\tau - b$ y la secuencia de correlación de tercer orden es:

$$r(\tau) = \sum_{i,j,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^* e^{s_k^* b}}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{(s_j^* - s_k^* a)\tau} \quad (2.56)$$

Ya que $a \leq 0$, a debe elegirse igual a 0 ("slice" horizontal) para asegurar un modelo exponencial con las mismas frecuencias. Este resultado es consistente con las propiedades de simetría de los momentos, ya que estas "slices" son equivalentes a "slices" con $a=1$ ("slices" diagonales), las cuales pertenecen al tercer cuadrante.

II-5. PLANTEAMIENTO BASADO EN HOC. NUMERO FINITO DE DATOS.

En la sección anterior nos hemos ocupado del caso en que conocemos o podemos construir exactamente las correlaciones de alto orden de la señal energética $x(n)$. Sin embargo, en la práctica sólo poseemos un subconjunto finito de datos muestreados de la

señal en un intervalo $n=0, \dots, N-1$. En este caso habrá errores "deterministas" asociados con la estimación imperfecta de las correlaciones [RUI94] [RUI95a]. Estos errores pueden eliminar la propiedad fundamental de las correlaciones de alto orden que permitía la estimación de los parámetros de la señal, es decir, que la secuencia de momentos debería modelarse como una suma de sinusoides exponencialmente amortiguadas incluso para el caso de longitud finita de datos.

Estos errores deterministas dependen del método usado para estimar las correlaciones. En esta sección vamos a analizar el estimador estándar sesgado o "biased", que ha sido usado extensivamente para la estimación de las correlaciones de alto orden, y proponemos un nuevo estimador que denominamos el estimador tipo covarianza. Este nos permitirá mantener la propiedad fundamental señalada anteriormente y extender el conjunto de las "slices" útiles para estimar los obtener los parámetros de la señal. Estas características hacen del estimador tipo covarianza más adecuado que el estimador estándar, especialmente cuando el número de datos disponibles es reducido.

II.5.1. Estimador estándar sesgado o "biased".

Supongamos que estamos interesados en estimar una secuencia de nm momentos a partir de N datos de la señal $x(n)$ $n=0, \dots, N-1$. El estimador estándar sesgado se define como [NIK87] [RAG85] [RAG86] [NIK93b]:

$$R_x(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=S_1}^{S_2} x(n) x^*(n+\tau_1) x^*(n+\tau_2) \quad (2.57)$$

$$S_1 = \max(0, -\tau_1, -\tau_2)$$

$$S_2 = \min(N-1, N-1-\tau_1, N-1-\tau_2)$$

Estamos interesados en usar una "slice" unidimensional de momentos para estimar los parámetros de la señal. Teniendo en cuenta la ecuación (2.1), la secuencia de momentos estimada mediante el estimador estándar será:

$$\hat{r}_x(\tau) = R_x(\tau, a\tau + b) = \frac{1}{N} \sum_{ijk}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{s_j^* \tau} e^{s_k^* (a\tau + b)} \quad (2.58)$$

$$e^{(s_i + s_j^* + s_k^*) S_1} \left(1 - e^{(s_i + s_j^* + s_k^*) (S_2 - S_1 + 1)} \right) \quad \tau = 0, \pm 1, \dots, \pm nm$$

Como puede observarse de la ecuación (2.58), cuando usamos este estimador aparece un acoplo entre las diferentes frecuencias, ya que S_1 y S_2 son funciones de τ . Esta situación puede invalidar el modelo de exponenciales amortiguadas para $r_x(\tau)$, haciendo de esta forma imposible obtener las frecuencias de la señal. Los resultados que obtenemos para los distintos casos que surgen dependiendo del cuadrante al que la "slice" pertenece cuando usamos este estimador vienen especificados en la siguiente proposición [RUI94]:

Proposición 2.- Si el estimador estándar sesgado (o el insesgado) se usa para estimar la secuencia de momentos a partir de N datos, sólo ciertas "slices" horizontales (a grandes valores del retardo) en el primer cuadrante permiten un modelado de $r_x(\tau)$ como una suma de exponenciales amortiguadas. En este caso, la recta diagonal o "slice" diagonal en el tercer cuadrante usada en [PAPA90] no sería válida.

Demostración: Analizando de nuevo cuando N es finito los tres casos posibles que aparecían con longitud de datos infinita, obtenemos los siguientes resultados:

(a) "Slices" horizontales en el primer cuadrante. En este caso, $S_1=0$ y $S_2=\min(N-1, N-1-\tau, N-1-b)$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.58) encontramos que:

$$\hat{r}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i,j,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{s_j^* \tau} e^{s_k^* b} \left(1 - e^{(s_i + s_j^* + s_k^*)(S_2 + 1)} \right) \quad \tau = 0, 1, \dots, nm \quad (2.59)$$

Como puede verse de la ecuación (2.59), a menos que $S_2 \neq S_2(\tau)$ aparecerían términos oscilatorios que vibran como la suma de tres frecuencias, de manera que la secuencia de momentos no conservaría la estructura de los datos. Si elegimos $b \geq nm$ (nm es el máximo valor de τ que vamos a computar) entonces $S_2 = N - 1 - b$, y S_2 resulta ser independiente de τ . Así, las "slices" horizontales con $b \geq nm$ retienen el modelo exponencial en la estimación de $r_x(\tau)$. Este caso se estudió y analizó en [RUI64]; y tiene el defecto de implicar grandes valores de τ en la estimación de momentos, siendo en consecuencia más sensible al ruido cuando el número de datos disponibles es reducido.

(b) "Slices" diagonales en el tercer cuadrante. En este caso $S_1 = -\tau - b$ y $S_2 = N - 1$, de manera que la secuencia de momentos estimada adopta la forma:

$$\hat{r}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i,j,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{-s_i \tau} e^{-b s_i - b s_j^*} \left(1 - e^{(s_i + s_j^* + s_k^*)(N + \tau + b)} \right) \quad (2.60)$$

$\tau = 0, -1, \dots, -nm$

La presencia del término entre paréntesis en (2.60) indica que la estimación de la secuencia de momentos de tercer orden contiene términos que oscilan como la suma de frecuencias de la señal original, siendo imposible extraer las frecuencias y los factores de amortiguamiento de la señal separándolas del resto. Cuando el número de datos aumenta, el término entre paréntesis llega a ser despreciable, y pueden por tanto obtenerse los parámetros de la señal.

c) "Slices" horizontales en el cuarto cuadrante. En esta situación, $S_1=-b$ y $S_2=N-1-\tau$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.58) puede observarse que la secuencia de momentos estimada vuelve a contener de nuevo términos que vibran como la suma de frecuencias de la señal, de forma que el rango de cualquier matriz formada con estas correlaciones será igual a $M(M+1)/2$, es decir, el número de términos exponenciales en la "slice" unidimensional estimada. Como ocurría en el caso de las "slices" diagonales en el tercer cuadrante, la secuencia de momentos estimada no retiene la estructura original de los datos.

II.5.2. Estimador tipo covarianza.

Con el objetivo de solucionar los problemas asociados con el número finito de datos en el estimador estándar, vamos a definir un nuevo estimador que denominamos estimador tipo covarianza. La causa de los errores de estimación eran las componentes oscilatorias que surgen en la secuencia de correlaciones estimadas, y para eliminarlas sería necesario hacer el término entre paréntesis en la ecuación (2.58) independiente de τ . Para lograr esto, es suficiente imponer $S_2-S_1+1=$ constante, de forma que la secuencia de correlaciones de tercer orden $r_x(\tau)$, $\tau=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm nm$ pueda modelarse como la suma de M exponenciales complejas amortiguadas. Imponiendo esta condición, podemos definir el estimador tipo covarianza como [RUI95a]:

$$\hat{R}_x(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x(n) x^*(n+\tau_1) x^*(n+\tau_2) \quad \begin{array}{l} \tau_1=0, \pm 1, \dots, \tau_{1\max} \\ \tau_2=0, \pm 1, \dots, \tau_{2\max} \end{array} \quad (2.61)$$

$$T_1 = \max(0, -\tau_1, -\tau_2)$$

$$T_2 = \min(N-1-\tau_{1\max}, N-1-\tau_{2\max}, N+\tau_{1\max}-\tau_1-1, N+\tau_{2\max}-\tau_2-1)$$

donde $\tau_{1\max}$ y $\tau_{2\max}$ son los máximos valores computados para τ_1 y τ_2 . Nótese que este

estimador satisface las condiciones de simetría que cumplen las correlaciones triples [MEN91]. Cuando usamos este estimador para estimar la secuencia de momentos en una "slice" unidimensional, obtenemos los siguientes resultados [RUI95a]:

Proposición 3. Usando el estimador tipo covarianza, todos los casos que obtuvimos con longitud de datos infinita permanecen válidos para conservar la estructura de los datos, es decir, podemos seguir usando con momentos estimados las "slices" horizontales en el primer y cuarto cuadrante y las "slices" diagonales en el tercer cuadrante. Ello nos permite que podamos usar el método KT con momentos estimados en vez de con datos para recuperar los parámetros de la señal.

Demostración: Podemos probar la Proposición 3 estudiando los diferentes casos que hemos analizado en otras proposiciones con el estimador tipo covarianza definido en (2.61):

(a) "Slices" horizontales en el primer cuadrante. ($a=0$). En este caso tenemos que $T_1=0$ y $T_2=N-1-\tau_{\max}$ o $T_2=N-1-b$ dependiendo de que $b \leq \tau_{\max}$ o $b \geq \tau_{\max}$ respectivamente, siendo $\tau_{\max}=nm$ el valor máximo de la coordenada τ que toman los momentos estimados. Teniendo en cuenta estos límites, se obtiene:

$$\hat{f}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{T_2} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b) = \sum_{j=1}^M A(j)e^{s_j^* \tau} \quad \tau=0,1,\dots,nm \quad (2.62)$$

$$A(j) = \frac{1}{N} \sum_{i,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{s_k^* b} \left(1 - e^{(s_i + s_j^* + s_k^*)(T_2+1)} \right)$$

Ya que $A(j)$ es ahora independiente de τ debido a que T_2 ha sido fijado, y siempre que la "slice" sea de rango completo, (i.e. $A(j) \neq 0, j=1 \dots M$), la secuencia de momentos

estimados sobre la "slice" horizontal conserva la estructura exponencial de la señal original.

(b) "Slices" diagonales en el tercer cuadrante. ($a=1$). En este caso $T_1=-\tau-b$ y $T_2=N+\tau_{\max}-\tau-1$ resultando en:

$$\hat{f}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\tau-b}^{N+\tau_{\max}-\tau-1} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+\tau+b) = \sum_{i=1}^M B(i)e^{-s_i\tau}$$

$$B(i) = \frac{1}{N} \sum_{j,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{-bs_j - bs_k^*} \left(1 - e^{(s_i + s_j^* + s_k^*)(N + \tau_{\max} + b)} \right) \quad (2.63)$$

$$\tau = 0, -1, \dots, -nm$$

Como ocurría anteriormente con $A(j)$, $B(i)$ es independiente de τ , de forma que la secuencia estimada no contiene términos que vibran a otras frecuencias distintas de las de los datos.

(c) "Slices" horizontal en el cuarto cuadrante. Aquí tenemos que $T_1=-b$ y $T_2=N-1-\tau_{\max}$, resultando en:

$$\hat{f}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=-b}^{N-1-\tau_{\max}} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b) = \sum_{j=1}^M C(j)e^{s_j^*\tau} \quad \tau=0,1,\dots,nm$$

$$C(j) = \frac{1}{N} \sum_{i,k=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k^*}} e^{s_k^*b} \left(1 - e^{(s_i + s_j^* + s_k^*)(N - \tau_{\max})} \right) \quad (2.64)$$

Ya que $C(j)$ no depende de τ (como podemos observar en (2.64)), las "slices" horizontales en el cuarto cuadrante siguen siendo válidas cuando usamos el estimador tipo covarianza.

A partir de los casos (a), (b), y (c) puede verse que la forma que adopta este estimador en cada cuadrante es:

$$\begin{aligned}
 \text{HS 1}^{\text{er}} \text{ cuadrante} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\tau_{\max}} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b) \quad b \leq \tau_{\max} \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-b} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b) \quad b \geq \tau_{\max} \end{array} \right. \quad (2.65) \\
 \text{DS 3}^{\text{er}} \text{ cuadrante} & \frac{1}{N} \sum_{n=-\tau-b}^{N-\tau_{\max}-\tau-1} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+\tau+b) \\
 \text{HS 4}^{\text{o}} \text{ cuadrante} & \frac{1}{N} \sum_{n=-b}^{N-1-\tau_{\max}} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b)
 \end{aligned}$$

Obsérvese que en todos los casos, el número de correlaciones es el mismo e igual a $N-nm-|b|$, de forma que la "slice" que contiene un mayor número de productos cruzados corresponde a el caso de $b=0$. c.q.d.

Como la proposición 3 establece, el uso del estimador tipo covarianza permite conservar la estructura original de los datos en la secuencia de momentos incluso cuando el número de datos es finito. A medida que se incremente el número de datos, los estimadores estándar y el propuesto tipo covarianza tienden a ser equivalentes, de forma que las propiedades asintóticas del estimador estándar pueden aplicarse al estimador tipo covarianza sin ningún tipo de modificación.

Además del planteamiento adoptado para definir el estimador tipo covarianza de mantener $S_2-S_1+1=\text{constante}$, podemos tomar un camino algo diferente. Si acotamos ambos límites por separado en la sumatoria (2.58) de tal forma que lleguen a ser independientes de τ se vuelven a cumplir las propiedades que buscábamos para este

estimador. Este planteamiento lleva a una forma diferente del estimador tipo covarianza que no introduce ningún caso nuevo y que es muy similar al definido previamente. En el siguiente apartado vamos a estudiar con más detalle la definición y propiedades de esta forma alternativa del estimador tipo covarianza.

II.5.3. Una definición alternativa del estimador tipo covarianza.

Si acotamos los límites de la sumatoria en la ecuación (2.58) por sus valores máximos y mínimos, podemos definir de una nueva forma el estimador tipo covarianza [RUI95c]:

$$\hat{R}_x(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x(n) x^*(n+\tau_1) x^*(n+\tau_2) \quad \begin{array}{l} \tau_1=0, \pm 1, \dots, \tau_{1\max} \\ \tau_2=0, \pm 1, \dots, \tau_{2\max} \end{array} \quad (2.66)$$

$$T_1 = \max_{\tau_1 \tau_2} (0, -\tau_1, -\tau_2)$$

$$T_2 = \min_{\tau_1 \tau_2} (N-1, N-1-\tau_1, N-1-\tau_2)$$

Cuando una "slice" unidimensional se estime por este procedimiento, la pendiente a debe elegirse igual a 0 ya que, a diferencia de la definición del apartado II.5.2, ninguno de los límites varia con τ . Entonces, sólo las "slices" horizontales serán posibles, llevando a la siguiente proposición:

Proposición 4.- Si la secuencia de momentos se estima de acuerdo con la expresión (2.66), las "slices" horizontales en cualquier cuadrante mantienen la misma estructura de exponenciales complejas de los datos. En este caso las "slices" diagonales no son posibles, rompiéndose por tanto las propiedades de simetría de los momentos [MEN91].

La demostración de esta proposición se deriva fácilmente a partir de la demostración de la proposición 3.

La forma que toma este estimador para cada cuadrante se muestra en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \text{HS cuadrante 1} & \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\tau_{\max}} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b) \\
 \text{HS cuadrante 2} & \quad \frac{1}{N} \sum_{n=-\tau_{\max}}^{N-1-b} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b) \\
 \text{HS cuadrante 3} & \quad \frac{1}{N} \sum_{n=-\tau_{\max}}^{N-1} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b) \\
 \text{HS cuadrante 4} & \quad \frac{1}{N} \sum_{n=-b}^{N-1-\tau_{\max}} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+b)
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

II-6. PLANTEAMIENTO BASADO EN HOC. NUMERO FINITO DE DATOS CONTAMINADOS CON RUIDO.

En cualquier caso práctico, la señal está contaminada con ruido aditivo. Supongamos que la secuencia de datos observados consiste de N muestras de M exponenciales complejas amortiguadas en ruido complejo Gaussiano:

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad n=0,1,\dots,N-1 \tag{2.68}$$

donde $x(n)$ se define como en la ecuación (2.1) y el ruido aditivo $w(n)$ es un proceso Gaussiano estacionario de media cero, blanco o coloreado, con partes reales e imaginarias independientes e idénticamente distribuidas, independientes de la señal. Asumiendo que tenemos disponible un número grande de realizaciones y definiendo la señal $y'(n)$ como:

$$y'(n) = x'(n) + w(n) \quad (2.69)$$

$$x'(n) = \sum_{i=1}^{M+1} a_i e^{s_i n}$$

$$s_{M+1} = 0 \quad a_{M+1} = -\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(n)$$

es decir, con la media eliminada, podemos construir la secuencia de cumulantes de tercer orden de $y'(n)$, definida como [MEN91]:

$$C_{y'}(n, \tau_1, \tau_2) = E \{ y'(n) y'^*(n+\tau_1) y'^*(n+\tau_2) \} \quad (2.70)$$

donde la secuencia de cumulantes $C_{y'}$ depende de n ya que el proceso no es estacionario. Teniendo en cuenta que la señal es independiente del ruido y que la secuencia de momentos de tercer orden de un proceso Gaussiano es cero, tenemos:

$$C_{y'}(n, \tau_1, \tau_2) = x'(n) x'^*(n+\tau_1) x'^*(n+\tau_2) \quad (2.71)$$

Si tomamos la suma sobre el índice n , obtenemos la secuencia de cumulantes en el espacio τ_1 - τ_2 que notamos como $c_{y'}(\tau_1, \tau_2)$:

$$c_{y'}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=\tau_1}^{\tau_2} x'(n) x'^*(n+\tau_1) x'^*(n+\tau_2) = \hat{R}_x(\tau_1, \tau_2) \quad (2.72)$$

donde T_1 y T_2 se definen como en (2.61). En este caso la secuencia de cumulantes τ_1 - τ_2 es equivalente a las correlaciones de tercer orden estimadas de la señal. Usando el estimador tipo covarianza nos aseguramos que podemos obtener los parámetros de la señal a partir de la "slice" unidimensional de momentos estimados, como se establece en la Proposición 3.

Cuando disponemos de una única realización, como ocurre en muchas situaciones practicas tal y como en discriminación de blancos de radar [CAR93], la secuencia de cumulantes de tercer orden τ_1 - τ_2 pasa a ser la secuencia de correlaciones de tercer orden de los datos ruidosos, la cual, teniendo en cuenta (2.69), resulta en [RUI95a]:

$$\begin{aligned} \hat{R}_y(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} y'(n)y'^*(n+\tau_1)y'^*(n+\tau_2) = \hat{R}_x(\tau_1, \tau_2) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x'(n)x'^*(n+\tau_1)w^*(n+\tau_2) + \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x'(n)w^*(n+\tau_1)x'^*(n+\tau_2) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x'(n)w^*(n+\tau_1)w^*(n+\tau_2) + \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} w(n)x'^*(n+\tau_1)x'^*(n+\tau_2) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} w(n)x'^*(n+\tau_1)w^*(n+\tau_2) + \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} w(n)w^*(n+\tau_1)x'^*(n+\tau_2) + \hat{R}_w(\tau_1, \tau_2) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Como puede observarse los momentos estimados de la señal medida incluye tanto los momentos de la señal exponencial como las correlaciones cruzadas entre la señal y el ruido, así como los momentos estimados de tercer orden del ruido. Estos términos son indeseables y se comportan como un "ruido" que perturba la secuencia de momentos. En este caso, cuando tenemos disponible una única realización, no puede evitarse la influencia del ruido en las correlaciones de tercer orden. De esta forma, existirán dos tipos de errores asociados con esta estimación; errores denominados "deterministas" debidos a

la longitud finita de los datos, y errores "estocásticos" debidos a la presencia de ruido aditivo Gaussiano. Sin embargo, a medida que la longitud de los registros de datos aumenta, se espera que los efectos de los errores deterministas decrezcan y, por tanto, para longitudes suficientemente grandes (dependiendo de los coeficientes de amortiguamiento) solo los errores estocásticos estén presentes en la estimación. Sin embargo, si combinamos esto con técnicas robustas tal y como la SVD para obtener los parámetros de la señal nos va a permitir obtener mejores resultados que cuando usamos estas técnicas simplemente con los datos, como veremos en el capítulo siguiente en los ejemplos de simulación.

De forma análoga, todos los resultados de esta sección pueden extenderse a correlaciones de alto orden sin cambios. En la sección II-7 plantaremos la extensión a correlaciones o cumulantes de cuarto orden, ya que este caso es particularmente útil como veremos en los resultados de simulación.

II-7. EXTENSIÓN A CORRELACIONES DE CUARTO ORDEN.

En esta sección vamos a tratar la extensión de los resultados obtenidos en las secciones II-4, II-5 y II-6 al caso de la estadística de cuarto orden [RUI95a]. Para ello vamos a estudiar los casos de longitud infinita y finita de datos y a expresar las proposiciones 1-3 para el caso de correlaciones de cuarto orden.

(1) *Longitud infinita de datos.*

Las correlaciones de cuarto orden de una señal energética se definen de la forma:

$$\mathbf{R}_x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n+\tau_1)x(n+\tau_2)x^*(n+\tau_3) \quad (2.74)$$

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3 = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

De forma análoga, una "slice" unidimensional en el espacio $(\tau_1-\tau_2-\tau_3)$ se define:

$$r_x(\tau) \doteq \mathbf{R}_x(\tau, a\tau+b, c\tau+d) \quad \tau=0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.75)$$

donde a y c son las pendientes y b y d las ordenadas en el origen de las rectas en el espacio de momentos $\tau_1-\tau_2-\tau_3$. Estamos interesados en mantener la misma estructura exponencial en la secuencia de correlaciones de cuarto orden que en la señal original. Para el caso de un número infinito de datos, es válida la siguiente proposición:

Proposición 5.- Siempre que $r_x(\tau)$ sea una "slice" de rango completo, solamente las siguientes "slices" retienen la estructura sinusoidal exponencialmente amortiguada de la señal original:

1) "Slices" horizontales en el primer y cuarto cuadrante:

$$r_x(\tau) = \mathbf{R}_x(\tau, b, d) \quad (2.76)$$

2) "Slices" diagonales en el tercer cuadrante:

$$r_x(\tau) = \mathbf{R}_x(\tau, \tau+b, \tau+d) \quad (2.77)$$

Demostración: La prueba de esta proposición sigue las mismas líneas que para el caso de tercer orden.

(2) *Longitud finita de datos*

En caso de que tengamos N muestras de la señal y estamos interesados en estimar nm correlaciones a partir de los datos, se verifica la siguiente proposición, que es la versión en cuarto orden de la proposición 2:

Proposición 6.- Con el estimador estándar sesgado definido como:

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{1}{N} \sum_{n=S_1}^{S_2} x(n)x^*(n+\tau_1)x(n+\tau_2)x^*(n+\tau_3) \\
 S_1 &= \max(0, -\tau_1, -\tau_2, -\tau_3) \\
 S_2 &= \min(N-1, N-1-\tau_1, N-1-\tau_2, N-1-\tau_3)
 \end{aligned}
 \tag{2.78}$$

la secuencia estimada de la "slice" unidimensional mantiene la estructura de la señal solamente para las "slices" horizontales en el primer cuadrante con b o d mayor que nm. Cuando la SNR es baja, esta estimación no es buena debido al gran valor de la coordenada o retardo τ usado en los estimadores de las correlaciones (recuérdese que tratamos con relaciones señales-ruido de pico).

La demostración se sigue fácilmente de la prueba de la proposición 2, teniendo en cuenta la siguiente ecuación obtenida a partir de (2.77) y la ecuación (2.1) para las estimaciones de las correlaciones de cuarto orden:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_x(\tau) = R_x(\tau, a\tau+b, c\tau+d) &= \frac{1}{N} \sum_{i,j,k,l=1}^M \frac{a_i a_j^* a_k a_l^*}{1 - e^{s_i + s_j^* + s_k + s_l^*}} e^{s_j^* \tau} e^{s_k(a\tau+b)} \\
 e^{s_l^*(c\tau+d)} e^{(s_i + s_j^* + s_k + s_l^*)S_1} &\left(1 - e^{(s_i + s_j^* + s_k + s_l^*)(S_2 - S_1 + 1)} \right) \quad \tau = 0, \pm 1, \dots, \pm nm
 \end{aligned}
 \tag{2.79}$$

Proposición 7.- El estimador tipo covarianza definido como:

$$\hat{R}_x(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x(n) x^*(n+\tau_1) x(n+\tau_2) x^*(n+\tau_3)$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0, \pm 1, \dots, \tau_{1\max} \\ \tau_2 &= 0, \pm 1, \dots, \tau_{2\max} \\ \tau_3 &= 0, \pm 1, \dots, \tau_{3\max} \end{aligned}$$

$$T_1 = \max(0, -\tau_1, -\tau_2, -\tau_3)$$

$$T_2 = \min(N-1-\tau_{1\max}, N-1-\tau_{2\max}, N-1-\tau_{3\max}, N+\tau_{1\max}-\tau_1-1, N+\tau_{2\max}-\tau_2-1, N+\tau_{3\max}-\tau_3-1)$$

(2.80)

donde $\tau_{1\max}$, $\tau_{2\max}$ y $\tau_{3\max}$ son los máximos valores de la coordenadas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente, permite que la estructura sinusoidal exponencialmente amortiguada se mantenga para la secuencia de correlación estimada en los mismos casos que con longitud de datos infinita (Proposición 5). Ello significa que los parámetros de la señal pueden obtenerse de la misma forma a partir de correlaciones de cuarto orden con un número finito de datos.

(3) *Longitud finita de datos contaminados con ruido.*

Supongamos que la señal medida consiste de M sinusoides amortiguadas contaminadas con ruido del tipo dado en la ecuación (2.68), donde $w(n)$ es un proceso Gaussiano complejo de media cero, con partes reales e imaginarias independientes e idénticamente distribuidas. Suponiendo un número suficientemente grande de realizaciones de este proceso, y definiendo $y'(n)$ como en la ecuación (2.69), la secuencia de cumulantes de cuarto orden de $y'(n)$ se define como [MEN91]:

$$\begin{aligned}
 C_{y'}(n, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= E \{y'(n)y'^*(n+\tau_1)y'(n+\tau_2)y'^*(n+\tau_3)\} \\
 &\quad - E \{y'(n)y'^*(n+\tau_1)\} E \{y'(n+\tau_2)y'^*(n+\tau_3)\} \\
 &\quad - E \{y'(n)y'(n+\tau_2)\} E \{y'^*(n+\tau_1)y'^*(n+\tau_3)\} \\
 &\quad - E \{y'(n)y'^*(n+\tau_3)\} E \{y'(n+\tau_2)y'^*(n+\tau_1)\}
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Teniendo en cuenta que la señal y el ruido son independientes y que los cumulantes de órdenes mayor que dos para un proceso Gaussiano son todos cero, tenemos:

$$C_{y'}(n, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = x'(n) x'^*(n+\tau_1) x'(n+\tau_2) x'^*(n+\tau_3) \tag{2.82}$$

Si tomamos la sumatoria sobre el índice n , la ecuación (2.82) se transforma en:

$$\begin{aligned}
 c_{y'}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\doteq \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} C_{y'}(n, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
 &= -\frac{2}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x'(n) x'^*(n+\tau_1) x'(n+\tau_2) x'^*(n+\tau_3) = -2 \hat{R}_x(\tau_1, \tau_2, \tau_3)
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

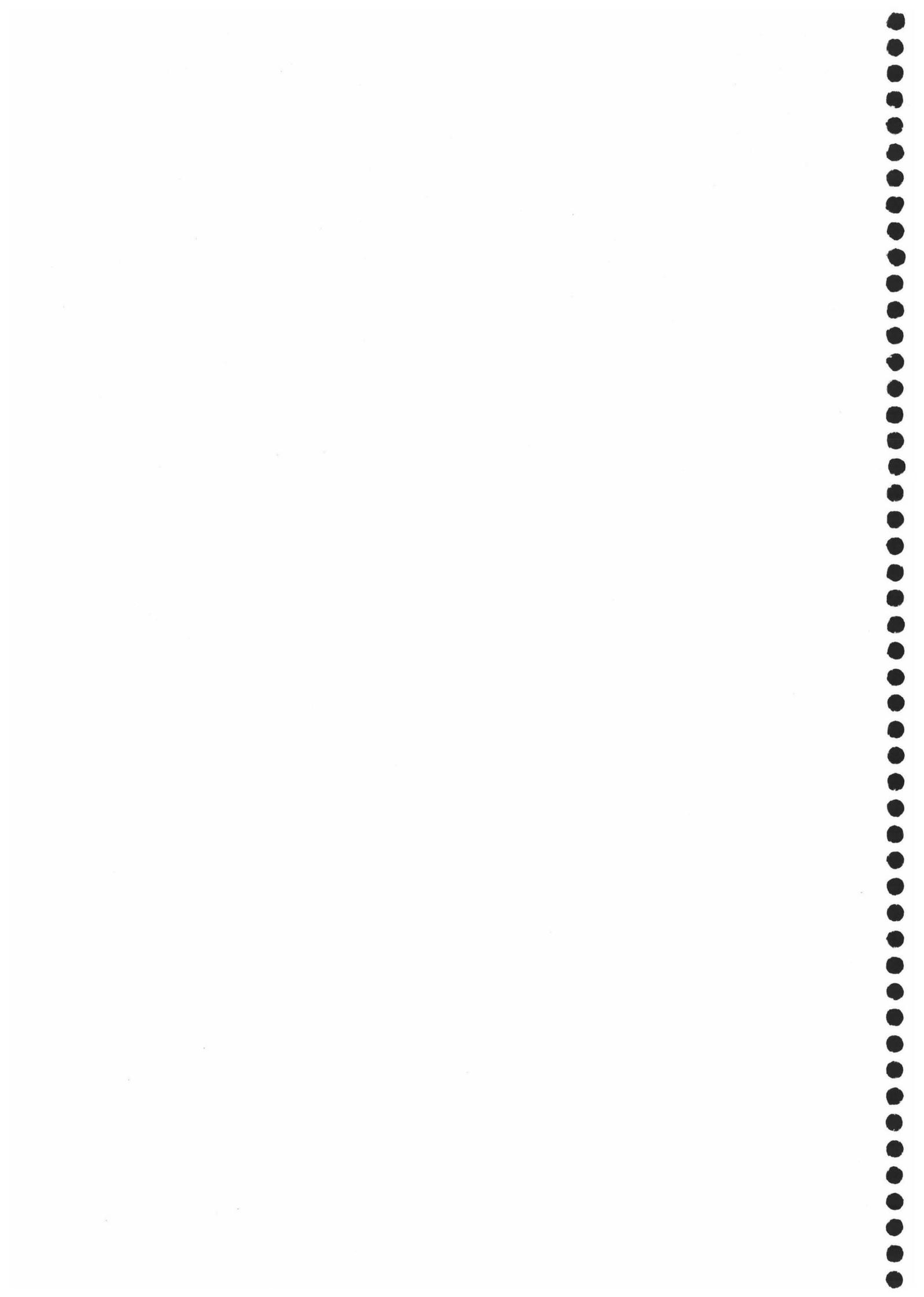
donde T_1 y T_2 se definen como en (2.80).

Podemos observar a partir de (2.83) que la secuencia de cumulantes de cuarto orden $c_{y'}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ es equivalente a la secuencia de correlaciones de cuarto orden estimadas de la señal, y ya que estas correlaciones estimadas se comportan como la señal original, los parámetros de la señal pueden extraerse a partir de ellas. En el caso señalado aquí, en el que tenemos disponible una única realización, los momentos de segundo y cuarto orden en (2.81) se estiman como correlaciones usando el estimador tipo covarianza.

En la expresión de la secuencia de cumulantes de cuarto orden aparecerían entonces correlaciones cruzadas entre la señal y las correlaciones del ruido. Estos términos se comportan como un "ruido" añadido a las correlaciones estimadas de cuarto orden de la señal. Incluso así, cuando la matriz de cumulantes estimada se combina con técnicas basadas en la descomposición de valores singulares, se obtienen mejores resultados que cuando únicamente se trabaja con los datos ruidosos, especialmente en el caso de ruido coloreado.

II-8. CONCLUSIONES.

En este capítulo se ha desarrollado un nuevo estimador de las correlaciones de ordenes superiores (el estimador tipo covarianza) con el propósito de la estimación de parámetros de sinusoides exponencialmente amortiguadas usando secuencias de correlaciones de alto orden. Este estimador reduce los errores deterministas asociados con el modelado imperfecto de la secuencia de correlación estimada con el estimador estándar, y tiene la propiedad de retener la estructura exponencial amortiguada en ciertas secuencias de correlaciones. Estas secuencias son las mismas que en el caso de longitud infinita de datos, de forma que el estimador tipo covarianza mantiene la misma propiedad con un número finito de datos. Cuando únicamente tenemos disponibles observaciones contaminadas con ruido, primeramente estimamos la secuencia de cumulantes para reducir los efectos del ruido Gaussiano, y después tomamos la sumatoria sobre la señal no estacionaria para obtener la secuencia de correlación unidimensional. Posteriormente podemos usar esta secuencia de correlaciones de alto orden con métodos basados en predicción lineal para extraer los parámetros de la señal, como haremos en el capítulo siguiente.





CAPITULO III

**ESTIMACION DE PARAMETROS DE EXPONENCIALES
COMPLEJAS AMORTIGUADAS USANDO CORRELACIONES
DE ALTO ORDEN. ALGORITMO Y RESULTADOS.**



III-1. INTRODUCCION

En el capítulo anterior hemos tratado el problema de como mantener el modelo de sinusoides exponencialmente amortiguadas para la secuencia de correlaciones de alto orden de esta clase de señales deterministas. Este objetivo se ha logrado mediante la introducción de un nuevo tipo de estimador, el estimador tipo covarianza [RUI95a] que soluciona el problema del modelado imperfecto asociado al estimador estándar sesgado o insesgado de los momentos [ROS83] [NIK87]. Junto a ello, en este capítulo se han establecido las "slices" posibles en el plano o espacio de momentos de manera que las correlaciones mantengan la estructura de los datos.

Una vez que se ha estimado la secuencia de correlaciones de tercer o cuarto orden el siguiente paso es extraer las frecuencias y factores de amortiguamiento. En este capítulo vamos a tratar el problema de la disposición de la secuencia de correlación de alto orden de la señal en matrices para resolver el problema lineal asociado mediante una solución de norma mínima usando la descomposición en valores singulares (SVD). El objetivo de este capítulo es, pues, introducir diferentes tipos de matrices de correlaciones o cumulantes, establecer el algoritmo para estimar los parámetros de la señal y corroborar los argumentos teóricos dados en el capítulo anterior mediante una evaluación cuantitativa del comportamiento tanto del estimador estándar sesgado como del estimador tipo covarianza.

Dentro de este capítulo propondremos un nuevo tipo de matriz basada en varias "slices" horizontales en el plano de momentos y se relacionan con otra matriz propuesta recientemente en la bibliografía. Este marco unificado nos permite obtener algunas propiedades y resultados interesantes considerando los diferentes tipos de matrices dentro

de un nuevo formalismo. Particularmente útil ha sido la relación obtenida entre las matrices tipo CTOM (media de tercer orden restringida) [RAG86] y las propuestas aquí usando el estimador tipo covarianza [RUI95a]. Dichas matrices surgen en la modelación paramétrica autoregresiva en el biespectro, y una versión modificada de ellas se utilizaron en [GAL95a] para el mismo problema que nos ocupa en este capítulo, es decir, la estimación de las frecuencias complejas. La relación obtenida entre este tipo de matrices, en principio independientes del estimador usado y las matrices construidas usando el estimador tipo covarianza proporciona un marco unificado que nos permite explicar las propiedades, especialmente en resolución en frecuencia, asociadas a este tipo de matrices.

Junto a este estudio de las matrices posibles para estimar los parámetros, expondremos su utilización en un algoritmo global consistente y lo aplicaremos a ejemplos de simulación estándar mediante simulaciones tipo Montecarlo. La consistencia de los algoritmos basados en estadística de órdenes superiores es un tema muy importante objeto de estudio en años recientes. En este capítulo extendemos los resultados de identificabilidad de sistemas lineales al problema objeto de nuestro estudio, y basándonos en estos resultados construiremos un algoritmo consistente de estimación de los parámetros de la señal independiente de cuál sea el estimador usado para las correlaciones de alto orden. Los resultados de simulación proporcionados por el algoritmo que usa el estimador tipo covarianza se comparan con los del método de Kumaresan-Tufts (KT) y el planteamiento basado en el estimador estándar sesgado. Esta comparación muestra la efectividad del estimador propuesto en el capítulo anterior en términos del sesgo ó "bias" y error cuadrático medio cuando las señales están contaminadas con ruido aditivo Gaussiano y se dispone de un único registro de datos de longitud reducida.

Este capítulo se ha organizado de la siguiente forma: en la sección III-2 se establecen los diferentes tipos de matrices útiles para estimar los parámetros. Esta sección

introduce una nueva matriz no Hankel usando "slices" horizontales en el plano o espacio de momentos, matriz que está relacionada íntimamente con la matriz tipo CTOM propuesta en [GA195a] para tratar este problema. En la sección III-3 establecemos el método de estimación de estos parámetros, discutiendo el problema de la identificabilidad usando una única "slice" unidimensional. La sección III-4 resume los pasos de un algoritmo consistente para estimar los parámetros de la señal. En la sección III-5 se proporcionan los resultados de simulación que demuestran la efectividad del estimador tipo covarianza cuando solamente esta disponible para su análisis un único registro de la señal con un número reducido de datos. En esta sección incluimos un estudio de los parámetros libres de configuración de los algoritmo y de la propia señal que se usa en este problema de estimación. Finalmente, se resumen los resultados principales obtenidos en la sección III-6.

III-2. MATRICES DE CORRELACIÓN DE ALTO ORDEN.

Supongamos que tenemos N muestras de una señal exponencial amortiguada definida como en el capítulo anterior y que reproducimos de nuevo aquí:

$$x(n) = \sum_{m=1}^M a_m e^{s_m n} \quad (3.1)$$

donde los números complejos a_m $m=1,2,\dots,M$ se las amplitudes complejas y $s_m = \sigma_m + j2\pi f_m$, $m=1,2,\dots,M$ son las frecuencias complejas. σ_m son los factores de amortiguamiento y f_m las frecuencias de los polos de la señal. De acuerdo con los resultados expuestos en la Proposición 2 del capítulo anterior, si la secuencia de correlación definida sobre una de las "slices" unidimensionales permitidas se estima usando el estimador tipo covarianza,

siempre que sea una "slice" de rango completo esta secuencia retendrá el modelo de exponenciales amortiguadas de los datos. De esta forma, ya que la secuencia de correlación puede modelarse de la misma forma que los datos, las siguientes matrices basadas en correlaciones de alto orden son posibles:

(1) *Matrices Hankel usando una única "slice".*

Usando la secuencia de momentos como si fuesen datos para el método de Kumaresan-Tufts [KUM82] [KUM86], obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_x^*(0) & \hat{f}_x^*(\pm 1) & \dots & \dots & \hat{f}_x^*(\tau_K) \\ \hat{f}_x^*(\pm 1) & \hat{f}_x^*(\pm 2) & \dots & \dots & \hat{f}_x^*(\tau_{K+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{f}_x^*(\tau_{\max} \mp K) & \hat{f}_x^*(\tau_{\max} \mp (K+1)) & \dots & \dots & \hat{f}_x^*(\tau_{\max}) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donde la secuencia de momentos estimada usando el estimador tipo covarianza se define como:

$$\hat{f}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=T_1}^{T_2} x(n)x^*(n+\tau)x^*(n+a\tau+b) \quad a=\{0,1\} \quad \tau=0,\pm 1,\dots,\tau_{\max} \quad (3.3)$$

donde T_1 y T_2 están definidos como en (2.61), b representa la "slice" específica utilizada para la estimación de los parámetros y a es la pendiente de la recta, de forma que $a=0$ representa una "slice" horizontal y $a=1$ es una "slice" diagonal. En caso de que elijamos una "slice" diagonal en el tercer cuadrante y $\tau_{\max}=2\tau_k$, obtenemos como caso particular el tipo de matriz usada por Papadopoulos y Nikias en [PAPA90] con el estimador

estándar sesgado. Nótese que, a diferencia del análisis efectuado en [PAPA90], la matriz propuesta aquí no tiene que ser necesariamente cuadrada. De esta forma el orden del filtro del error de predicción K no está relacionado con el máximo coeficiente de retardo de la secuencia de correlación de alto orden.

(2) *Matriz no Hankel usando $q+1$ "slices".*

Ya que cualquiera de las posibles secuencias de correlación unidimensionales estimadas con el estimador tipo covarianza preservan la estructura de los datos, podemos usar $q+1$ "slices" para construir una matriz $(q+1) \times (K+1)$ no Hankel, donde cada fila corresponde a una "slice" diferente. Si tomamos como ejemplo el caso de "slices" horizontales en el cuarto cuadrante, esta matriz adoptará la forma:

$$Q_x = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & \dots & r_{0K} \\ r_{10} & r_{11} & \dots & r_{1K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{q0} & r_{q1} & \dots & r_{qK} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

donde r_{ij} se define como:

$$r_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=i}^{N-K-1} x(n)x^*(n-i)x^*(n+j) = \hat{R}(\tau=j, b=-i) \quad \begin{matrix} j=0,1,\dots,K \\ i=0,1,\dots,q \end{matrix} \quad (3.5)$$

siendo $\tau_{\max} = K$ en (3.3). Como puede observarse en la matriz dada en (3.4) cada fila toma los datos de una "slice" diferente. En este punto es interesante notar que si queremos mantener el mismo número de correlaciones en cada fila, podemos acotar el índice inferior de la expresión (3.5), el cual es q . En este caso solamente las "slices" horizontales

serán posibles y cada elemento ij de la matriz será:

$$r_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=q}^{N-K-1} x(n)x^*(n-i)x^*(n+j) \quad \begin{matrix} j=0,1,\dots,K \\ i=0,1,\dots,q \end{matrix} \quad (3.6)$$

el cual corresponde a una estimación de momentos usando la forma alternativa del estimador tipo covarianza definido en la sección II-5 del capítulo anterior. La matriz resultante usando esta forma alternativa del estimador tipo covarianza es de hecho la matriz CTOM, dada por la ecuación (2.45). Para explicitar claramente esta relación, escribamos el estimador tipo covarianza de la siguiente forma, en vez de la dada en la ecuación (3.6):

$$r_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=q}^{N-K-1} x^2(n-i)x^*(n+j) \quad \begin{matrix} j=0,1,\dots,K \\ i=0,1,\dots,q \end{matrix} \quad (3.7)$$

expresión que es básicamente la misma, ya que se ha obtenido reemplazando $x(n)$ por $x(n-i)$. En otras palabras, al tomar la secuencia $r_x(\tau) = R_x(\tau,b,b)$, la matriz (3.4) llega a ser equivalente a la matriz CTOM de la ecuación (2.45), cuando $q=K$ y se usan datos que provienen únicamente de un cuadrante. Esta última imposición es necesaria en nuestro caso para mantener la estructura exponencial amortiguada. De hecho, esta es la forma de la matriz que se usó en [GAL95a] para la estimación de parámetros de señales exponencialmente amortiguadas.

Examinando con detalle esta matriz construida usando el estimador tipo covarianza, aparece claramente el por qué del nombre elegido para el estimador propuesto. Si descomponemos la matriz Q_x de la ecuación (3.4), y la matriz R_x definida en (3.2) pero estimando las correlaciones mediante el estimador estándar en la recta diagonal del tercer cuadrante, obtenemos:

$$Q_x = Y_2^T X_2 \quad R_x = Y_1^T X_1 \quad (3.8)$$

donde las matrices de datos Y_2 , Y_1 , X_2 y X_1 representan:

$$\begin{pmatrix} x^*(0) & \dots & x^*(K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*(q) & \dots & x^*(q+K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*(N-K-1) & \dots & x^*(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*(N-1) & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \downarrow \\ \\ \downarrow \\ \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} x^2(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^2(q) & \dots & x^2(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^2(N-K-1) & \dots & x^2(N-K-1-q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^2(N-1) & \dots & x^2(N-q-1) \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \downarrow \\ \\ \downarrow \\ \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix} \quad (3.10)$$

A través de esta descomposición observamos el truncamiento de las matrices de datos para evitar el ventaneo en el registro de datos que lleva a cabo el estimador tipo covarianza, ya que usa las matrices X_2 y Y_2 que no incluyen ningún elemento fuera del registro de datos. Con la matriz R_x ocurre lo contrario, ya que ésta sí utiliza datos fuera del registro, y que al ser desconocidos se toman como cero (ventaneo). Esta es una

característica que diferencia al método de la covarianza de predicción lineal respecto al método de la autocorrelación basado en el uso de estimadores estándar sesgados [MAR87]. Este método, basado en correlaciones de segundo orden, muestra también otra característica que lo diferencial del método de la autocorrelación, y es su relación específica con el método de Prony. Ello significa que puede usarse para extraer las frecuencias complejas de las sinusoides amortiguadas [MAR87]. Todas estas características son compartidas por las matrices formadas por correlaciones estimadas mediante el estimador tipo covarianza; en consecuencia el método de estimación de parámetros de la señal con este estimador puede considerarse como una generalización del método de la covarianza de predicción lineal al dominio de la estadística de órdenes superiores.

(3) *Matriz no Hankel usando una "slice".*

Con el objetivo de usar el número mayor posible de correlaciones en cada fila de la matriz (3.4) usando el estimador tipo covarianza, podemos imponer $\tau_{\max}=K$ para la primera fila, $\tau_{\max}=K+1$ para la segunda fila y así sucesivamente, donde τ_{\max} es el intervalo temporal máximo (coordenada τ) para cada fila. Usando como ejemplo el caso de "slices" horizontales en el cuarto cuadrante, una matriz no Hankel de orden $(q) \times (K+1)$ construida sobre una "slice" unidimensional será:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_x^1(0) & \hat{f}_x^1(1) & \dots & \dots & \hat{f}_x^1(K) \\ \hat{f}_x^2(1) & \hat{f}_x^2(2) & \dots & \dots & \hat{f}_x^2(K+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{f}_x^q(q-1) & \hat{f}_x^q(q) & \dots & \dots & \hat{f}_x^q(K+q-1) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

donde

$$\hat{r}_x^i(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=-b}^{N-(K+i)} x(n)x^*(n+b)x^*(n+j) \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,q \\ j=0,1,\dots,K \end{array} \quad (3.12)$$

expresión obtenida a partir de la ecuación (2.61) tomando como $\tau_{\max}=K+i-1$, siendo i el índice correspondiente a cada fila ($i=1\dots q$).

Debido a que se usa un número diferente de términos en cada fila para estimar la secuencia de momentos, la matriz no posee estructura Hankel, aunque para un número de datos N moderadamente elevado esta matriz tiende a ser equivalente a la matriz Hankel dada en (3.2). La posible ventaja de esta matriz al usar más términos para estimar las correlaciones puede verse atenuada por la pérdida de la estructura Hankel. Es un hecho bien conocido en la estimación de parámetros de señales sinusoidales que la presencia de una determinada estructura en las matrices de datos lleva a obtener mejores resultados si estos se comparan con los obtenidos mediante matrices que carecen de esas estructuras o simetrías. De hecho, los experimentos de simulación llevados a cabo en este capítulo muestran que las estimaciones obtenidas usando matrices tipo Hankel dadas en (3.2) exhiben un menor sesgo y proporcionan mejores resultados que los obtenidos usando las matrices no Hankel definidas en este apartado.

Cuando el registro de datos disponible esté contaminado con ruido aditivo, todas las matrices definidas siguen siendo válidas reemplazando correlaciones de tercer orden por momentos, es decir reemplazando en las ecuaciones (3.3), (3.5) y (3.12) $x(n)$ por $y'(n)$, siguiendo los resultados de la sección II-6. Nótese también que podemos usar estimadores insesgados en todos los casos reemplazando el término $1/N$ por el inverso del número de sumandos en el estimador tipo covarianza, i.e. $N-\tau_{\max}+|b|$.

III-3. EL PROBLEMA DE LA IDENTIFICABILIDAD.

Una cuestión interesante que surge cuando se trata de estimar parámetros mediante correlaciones de alto orden es si podemos estimar los parámetros de la señal usando solamente una única "slice" de momentos o correlaciones. Ello sería posible si la matriz construida usando esa "slice" particular tuviera rango M , es decir, el número de exponenciales presentes en los datos. En esta situación a esta "slice" se le denomina "slice" de rango completo. Por lo tanto, una determinada "slice" será una "slice" de rango completo cuando la secuencia de correlaciones contenga las mismas frecuencias de los datos, es decir, pueda modelarse como la suma de M exponenciales amortiguadas. En este caso una matriz de cualquier tipo de los anteriores construida usando esta "slice" tendrá rango M , tal y como establece el método KT [KUM82]. Papadopoulos y Nikias [PAPA90] establecieron condiciones suficientes sobre las amplitudes a_j 's y las frecuencias s_j 's basadas en las distribuciones de ceros de polinomios complejos que aseguran que expresiones del tipo (2.52), (2.53), o (2-54) del capítulo anterior se verifican, i.e. $A(i)$, $B(i)$ y $C(i)$ son no nulos para $\forall i=1, \dots, M$.

Recientemente, Giannakis, Swami y Mendel [SWA92] [GIA92] han tratado el problema de la identificabilidad de los parámetros AR de un modelo ARMA causal usando una única "slice". Teniendo en cuenta la formula de Brillinger-Rosenblatt [BRI67a], que establece que los cumulantes de un proceso estacionario que sea la salida de un sistema lineal estable pueden calcularse a partir de las correlaciones de alto orden de la respuesta impulso de dicho sistema, y ya que una señal sinusoidal exponencialmente amortiguada puede considerarse como la respuesta impulso de un sistema racional estable [OPP75], ambos problemas son equivalentes. Esto es, si la "slice" de correlaciones de una señal determinista o la "slice" de cumulantes de salida de un proceso ARMA puede modelarse como la suma de M sinusoides exponencialmente amortiguadas, estamos ante

una "slice" de rango completo. Este resultado para la secuencia de cumulantes de un proceso ARMA fue también obtenido en [SWA92] (Teorema 1). Lo realmente importante de esta sección, y que constituye una de las aportaciones de este capítulo, reside en relacionar el problema determinista no estacionario con el problema aleatorio estacionario, y aplicar los resultados previamente obtenidos en la bibliografía para la secuencia de cumulantes de un proceso aleatorio a la secuencia determinista de correlaciones de alto orden para luego recobrar mediante un algoritmo consistente los parámetros de la señal a partir de ella.

Considerando la discusión anterior, si en [SWA92] se establece la suficiencia de $M+1$ "slices" para asegurar la identificabilidad de la parte AR de un proceso ARMA causal, equivalentemente podemos establecer la suficiencia de un conjunto finito de "slices" para recuperar los parámetros de la señal. Considerando por simplicidad el caso de estadística de tercer orden tenemos la siguiente proposición adaptada de [SWA92]:

Proposición: El conjunto de "slices" de momentos de tercer orden $r_x(\tau, b)$, $b=0, \dots, M-1$ es suficiente para identificar los parámetros de la señal.

La proposición anterior establece un número de "slices" suficiente para identificar los parámetros de la señal, pero en algunas ocasiones puede que baste un número menor de "slices", por ejemplo si existe una "slice" de rango completo solamente es necesario una única "slice". En la práctica, el procedimiento a seguir sería el siguiente:

- Construir las matrices R_b , $b=0, 1, \dots, M-1$ de tipo 1 o 3 formadas por las "slices" unidimensionales $r_x(\tau, b)$. Si existe una "slice" de rango completo, la matriz correspondiente R_b será de rango M . En este caso la matriz de tipo 1 o 3 construida con esta "slice" sería válida.

- Si no existe una "slice" de rango completo, formamos entonces la matriz bloque de estructura Hankel o no $R=[R_0^T R_1^T \dots R_{M-1}^T]^T$. La proposición anterior asegura la identificabilidad a partir de este conjunto específico de "slices".

Un procedimiento similar a este se usó en [GIA89a] para la identificación de sistemas ARMA de fase no mínima. En este caso adoptamos y aplicamos este metodo para el caso de señales deterministas. Aunque nos refiramos siempre al caso de estadística de tercer orden, la extensión al caso de correlaciones de cuarto orden es directa siguiendo las mismas líneas. Este problema de identificabilidad no se presenta en la caso tratado en [11] de señales armónicas con fase aleatoria. Swami y Mendel [SWA91] tratan la estimación de parámetros de señales sinusoidales o armónicas con fase aleatoria usando múltiples realizaciones de la señal, en vez de una única como es nuestro caso. En [SWA91] se demuestra que la "slice" diagonal se comporta como la secuencia de autocorrelación, de forma que la identificabilidad usando únicamente esta "slice" está asegurada.

El procedimiento descrito anteriormente puede también extenderse a matrices no Hankel usando $q+1$ "slices" (matrices del tipo 2). Denotemos por $Q(0:k)$ una matriz de este tipo (ecuación (3.4)), la cual, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.4) y (3.5), puede escribirse como:

$$Q_x(0:K) = \begin{pmatrix} \hat{R}(0,0) & \hat{R}(1,0) & \dots & \hat{R}(K,0) \\ \hat{R}(0,1) & \hat{R}(1,1) & \dots & \hat{R}(K,1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{R}(0,q) & \hat{R}(1,q) & \dots & \hat{R}(K,q) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Si construimos las matrices no Hankel $Q_x(m:m+K)$ $m=0,1\dots M-1$, y ninguna de ellas tiene rango M , entonces tenemos asegurado que la matriz bloque $Q=[Q_x^T(0:K) Q_x^T(1:K+1) \dots$

$Q_x^T(M-1:M-1+K)]^T$ es de rango M. Este resultado es una consecuencia de la proposición anterior, ya que si reordenamos las filas de la matriz bloque Q se puede demostrar fácilmente que dicha matriz contiene todas las filas de la matriz bloque R, para la cual tenemos asegurado que es de rango M.

III-4. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO.

Una vez que hemos discutido el problema de la identificabilidad y hemos establecido los posibles tipos de matrices que podemos usar para estimar los parámetros de la señal, estamos en condiciones de formular los pasos de un algoritmo consistente para la estimación de parámetros de señales sinusoidales exponencialmente amortiguadas. Este algoritmo consta de cinco etapas, que vamos a describir sucintamente:

1) A partir de la secuencia de datos medidos contaminados con ruido aditivo $\{y(0) y(1)...y(N-1)\}$ de la forma

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad n=0,1,...N-1 \quad (3.14)$$

donde $x(n)$ se define en la ecuación (3.1) y el ruido aditivo $w(n)$ es un proceso Gaussiano complejo, estacionario, blanco o coloreado, de media cero, independiente e idénticamente distribuido, formamos la secuencia $\{y'(0) y'(1) ... y'(N-1)\}$ sustrayendo la media muestral a los datos.

2) Estimamos las correlaciones de tercer o cuarto orden de la señal $x(n)$ en la "slice" elegida. Para ello calculamos la secuencia de cumulantes de la señal $y'(n)$ definida usando el estimador tipo covarianza (ecuación (2.72)) con el conjunto de datos $\{y'(0) y'(1) ...$

$y'(N-1)$ }. En caso de que dispongamos de múltiples realizaciones de la señal, estimamos las correlaciones para cada realización y luego promediamos para obtener la secuencia de momentos resultante.

3) Con la secuencia de correlación estimada, construimos una matriz de cualquiera de los tipos anteriores (3.2), (3.4) o (3.11) como se describe en la sección III-2. Luego usamos un estimador del rango de la matriz [KON88] y establecemos dicho rango. Si la "slice" elegida es de rango completo, la matriz construida tendrá un rango efectivo M . En caso de que no lo sea, usamos los resultados de la sección anterior para obtener una matriz de rango M . En caso de que el número M de exponenciales de los datos no sea conocido, testeamos con diferentes matrices usando secuencias de momentos en el conjunto específico de "slices" especificado anteriormente, o usamos la matriz bloque Hankel R o la matriz bloque de estructura no Hankel Q .

4) Con cualquiera de las matrices usadas en la etapa 3), que denominaremos C , formamos el sistema lineal de ecuaciones:

$$C'_x \mathbf{b} = -c_x \quad (3.15)$$

donde C'_x es la matriz C sin la primera columna, c_x es dicha primera columna, y b es el filtro de predicción lineal hacia atrás. Luego calculamos la solución de mínimos cuadrados truncada de orden M de (3.15) siguiendo el método KT, la cual, expresada en términos de una descomposición en valores singulares es:

$$\mathbf{b} = -\sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{u}_i^H c_x}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \quad (3.16)$$

donde λ_i , \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i son los valores singulares y los vectores singulares izquierdo y derecho respectivamente. Ya que la secuencia de correlación se comporta como una secuencia exponencial, las mismas consideraciones sobre la elección del orden del filtro de predicción lineal siguen siendo validas para este caso.

5) Una vez que hemos estimado las frecuencias complejas, las amplitudes complejas pueden evaluarse fácilmente a partir de los datos medidos de la señal resolviendo un sistema de Vandermonde en el sentido de mínimos cuadrados [MAR87].

De forma análoga, los resultados tanto de esta sección como de la anterior formulados para momentos o correlaciones de tercer orden pueden extenderse a correlaciones de orden arbitrario. La extensión de correlaciones o cumulantes de cuarto orden es particularmente útil y es la que usaremos en los resultados numéricos de la sección siguiente.

III-5. RESULTADOS DE SIMULACION.

En esta sección nos proponemos aplicar los resultados teóricos obtenidos en las secciones anteriores a ejemplos concretos de simulación [RUI95a]. Nos proponemos demostrar a través de varias señales test la aplicabilidad y efectividad de usar el estimador tipo covarianza para estimar correlaciones o cumulantes de cuarto orden en el problema de extracción de parámetros de señales sinusoidales exponencialmente amortiguadas. Nos vamos a centrar particularmente en casos donde el número de datos es pequeño, o en resolver sinusoides amortiguadas de frecuencias muy cercanas entre si. Por consideraciones de brevedad los resultados mostrados aquí se refieren al caso de cumulantes de cuarto orden en vez de momentos de tercer orden, ya que en nuestras

simulaciones la estadística de cuarto orden muestra una clara superioridad comparada con el caso de tercer orden. De hecho estos resultados corroboran las observaciones y conclusiones mostradas en [PAPA90], y por ello no hemos creído necesario insistir mas en un estudio comparativo de tercer y cuarto orden.

En los ejemplos que siguen vamos a estudiar los efectos del nivel del ruido aditivo, de la separación en frecuencia de las sinusoides y de la sensibilidad a la forma espectral del ruido coloreado en las estimaciones de parametros usando el estimador tipo covarianza y el estimador estándar sesgado en la "slice" diagonal del espacio de cumulantes de cuarto orden, asumiendo que solo disponemos de una única realización de la señal. Asimismo, nos proponemos investigar los efectos de parámetros tales como la longitud del registro de datos, el orden del filtro del error de predicción o el periodo de muestreo de la señal. Con objeto de llevar una comparación con un método referencia, hemos empleado también el método KT usando matrices de las mismas dimensiones que las de los métodos basados en cumulantes. Como hemos comentado anteriormente sólo vamos a tratar el problema considerando una única realización, en caso de que dispusiéramos de más de una realización de la señal el promedio adicional llevado a cabo en las estimaciones de los cumulantes proporcionaría mejores resultados, pero el comportamiento relativo global permanecería inalterado. Teniendo esto en cuenta y por consideraciones de brevedad, los resultados que consideran múltiples realizaciones de la señal no los mostramos en esta Memoria. En todas las simulaciones que siguen hemos utilizado el lenguaje de programación FORTRAN77 así como la librería IMSL en un VAX 6000 del equipo informático de la Universidad de Granada.

Ejemplo 1: En primer lugar vamos a considerar un ejemplo ampliamente usado en la bibliografía [KUM82] [PAPA90] para testear el comportamiento de los algoritmos de estimación de parámetros de las señales de las que nos ocupamos en este capítulo. En este

primer ejemplo los datos de simulación vienen generados por la ecuación:

$$y(n) = a_1 e^{s_1 nT} + a_2 e^{s_2 nT} + w(nT) \quad n = 0 \dots N-1 \quad (3.17)$$

donde $s_1 = -0.2 + j2\pi 0.42$ y $s_2 = -0.1 + j2\pi 0.52$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Las fases iniciales son cero, así que cualquier "slice" es una "slice" de rango completo por la condición suficiente dada en [PAPA90]. El ruido $w(n)$ es un proceso Gaussiano complejo, i.i.d., con parte real e imaginaria independientes entre sí con varianza σ^2 cada una. La relación señal ruido (SNR) se define como $\log_{10}(1/2\sigma^2)$. Nótese que esta es una definición de SNR de pico, es decir, referida al mayor valor que toma la señal transitoria, de forma que las últimas muestras de la señal están fuertemente contaminadas con ruido. El ruido coloreado que vamos a usar se generó filtrando ruido Gaussiano blanco a través de un filtro FIR de respuesta impulso dada por $h = [0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.0, 0.0, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5]$. Este mismo filtro FIR fue usado por Papadopoulos y Nikias en [PAPA90] para generar el proceso Gaussiano coloreado.

Para cuantificar estadísticamente el comportamiento de los métodos usados en nuestras experiencias realizamos 500 ejecuciones independientes de la señal ruidosa en una simulación tipo Montecarlo, dejando inalterada la señal transitoria y generando independientes realizaciones del ruido usando semillas diferentes. Como parámetro que nos mida la bondad de las estimaciones computamos el error cuadrático medio (MSE) así como el sesgo o "bias" de los factores de amortiguamiento y las frecuencias. Como ocurre en los métodos basados en una solución de norma mínima, en las simulaciones se llega a un valor de la SNR por debajo de la cual la varianza crece vertiginosamente. A este valor de SNR se le denomina en la bibliografía valor umbral. En nuestras simulaciones diremos que tenemos un valor umbral cuando el sesgo o "bias" de las estimaciones es muy grande (un 100% del valor verdadero de los parámetros) o cuando obtenemos más

raíces del polinomio del filtro de error de predicción fuera del círculo unidad que el orden de la señal, lo que implicaría unos errores de estimación o una ruptura de los valores del MSE. Estos valores umbrales aparecen a bajas relaciones señal-ruido y constituyen una limitación práctica en el uso de estos métodos. Cuando se alcanza el valor umbral el correspondiente valor del MSE no se mostrará en las gráficas, por lo que la ausencia de valor a una determinada SNR significa que ese método ha alcanzado su nivel umbral.

En este ejemplo, usaremos N datos obtenidos a partir de la ecuación (3.17) para estimar nm muestras de la secuencia de cumulantes de cuarto orden en la recta diagonal del tercer cuadrante usando tanto el estimador tipo covarianza (y notaremos este método como *COV-FOC*) y el estimador estándar sesgado (que denominaremos método *BIA-FOC*). Con estos nm cumulantes estimados, construimos matrices Hankel usando una "slice" del tipo mostrado en la ecuación (3.2). Hemos elegido en nuestros experimentos este tipo de matrices ya que las estimaciones obtenidas usando matrices de estructura Hankel son las que exhiben un menor sesgo y proporcionan las mejores estimaciones. Los otros tipos de matrices descritos en la sección III-2 muestran un peor comportamiento en ambientes de baja relación señal-ruido, aunque los resultados obtenidos con las matrices de estructura no Hankel sobre q "slices" (3.4) muestran unas interesantes propiedades de resolución en frecuencia a valores de SNR moderadamente altas [GAL95a]. Junto a los métodos *COV-FOC* y *BIA-FOC* vamos a mostrar los resultados del método *KT* basado en matrices de datos. Para llevar a cabo una comparación ajena a factores tales como la longitud del filtro de error de predicción lineal, se usarán matrices de las mismas dimensiones que las utilizadas en los métodos basados en estadística de cuarto orden.

Antes de pasar a mostrar los resultados de la estimación de las frecuencias complejas de la señal (3.17), vamos a llevar a cabo un estudio de los parámetros de trabajo que aparecen en este problema, tales como el periodo de muestreo T de la señal,

el orden del filtro de error de predicción lineal K , y el número de datos N . Los resultados se muestran en las figuras (3.1)-a, (3.1)-b, (3.2)-a, (3.2)-b, (3.3)-a y (3.3)-b. En las figuras (3.1)-a y (3.1)-b el MSE de las frecuencias estimadas 0.42 y 0.52 se representa en función del orden del filtro del error de predicción a una SNR de 10 dB en ambiente de ruido blanco y coloreado respectivamente usando el estimador tipo covarianza. En este caso hemos estimado 25 cumulantes a partir de 30 datos de la señal contaminada con ruido (3.17) con $T=0.5$. Tal y como se apuntaba por otros autores, la existencia de una elección óptima del orden del filtro sobre un valor de 17 o 18 ($2N/3$) aparece claramente reflejada en estas gráficas. La elección del orden del filtro es importante a bajas SNR como se muestra en estas figuras. A mayores valores de SNR, el orden del filtro K es mucho menos crítico, apareciendo un amplio intervalo de posibles órdenes del filtro que se pueden elegir. Este comportamiento ratifica los resultados experimentales presentados en [KUM82].

Otro de los parámetros importantes que aparecen en este problema son el intervalo de muestreo y el número de datos disponibles para estimar la secuencia de cumulantes. Como se puede observar en las figuras (3.2) y (3.3), el estimador estándar de las correlaciones de alto orden es bastante sensible a la elección de estos parámetros. La razón hay que buscarla a partir de la ecuación (2.58) que nos da la secuencia estimada de correlaciones por el estimador estándar. Como muestra dicha ecuación, si el número de datos o el intervalo de muestreo decrecen, las componentes oscilatorias de la secuencia de correlaciones que vibran como la suma de frecuencias de la señal original aumentan progresivamente su importancia, haciendo cada vez más difícil extraer las frecuencias correctas de la secuencia de correlaciones, especialmente a elevados niveles de ruido. Esta situación se muestra para la primera frecuencia compleja en las figuras (3.2)-a y (3.2)-b para el caso del periodo de muestreo o en las figuras (3.3)-a y (3.3)-b para el caso del número de datos.

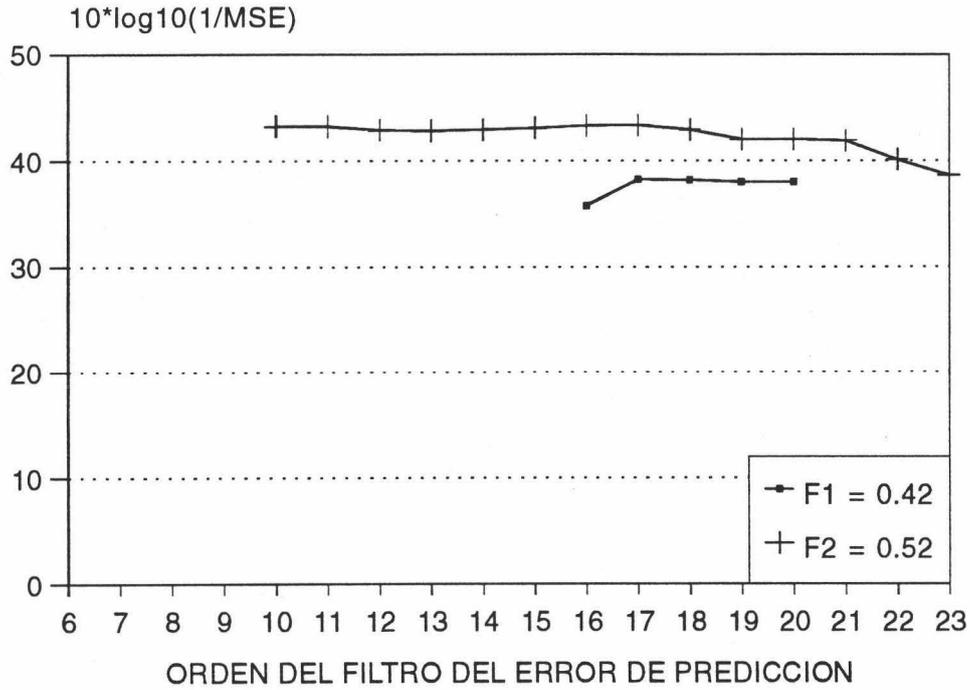


Figura (3.1)-a. MSE de las frecuencias estimadas frente al orden del filtro de error de predicción a una SNR = 10 dB de ruido blanco usando el estimador tipo covarianza.

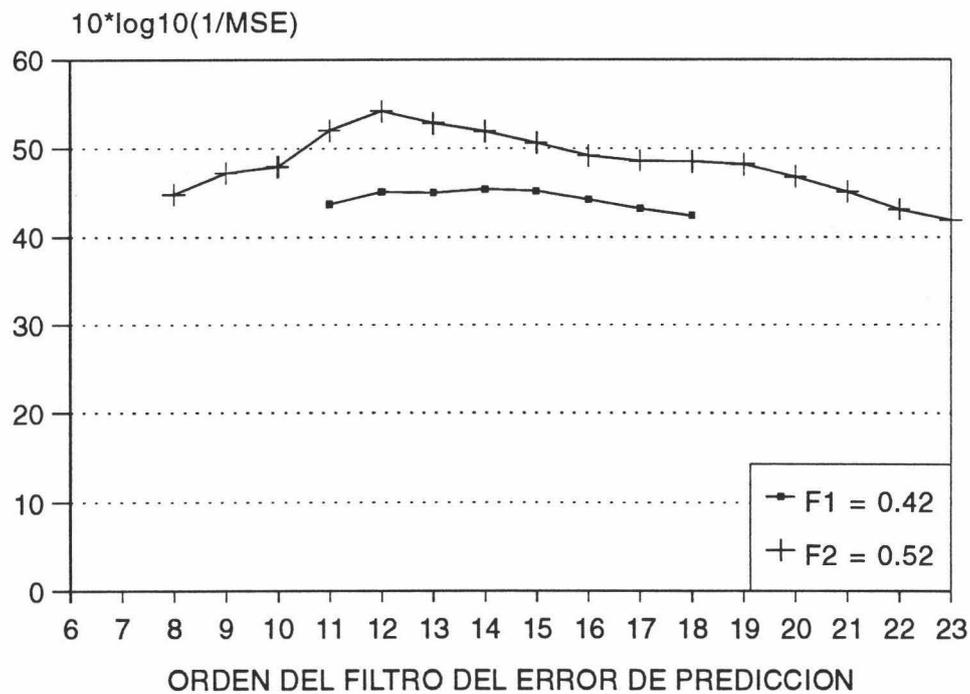


Figura (3.1)-b. MSE de los factores de amortiguamiento frente al orden del filtro de error de predicción a una SNR = 10 dB de ruido blanco usando el estimador tipo covarianza.

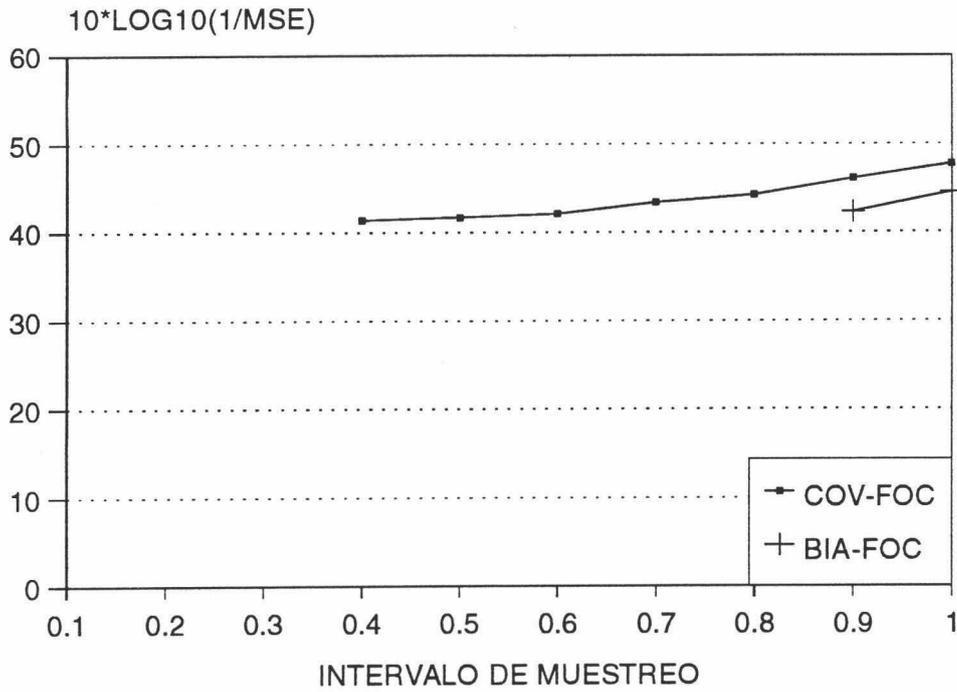


Figura (3.2)-a. MSE de la frecuencia 0.52 frente al intervalo de muestreo de la señal para SNR = 5 dB en ruido coloreado.

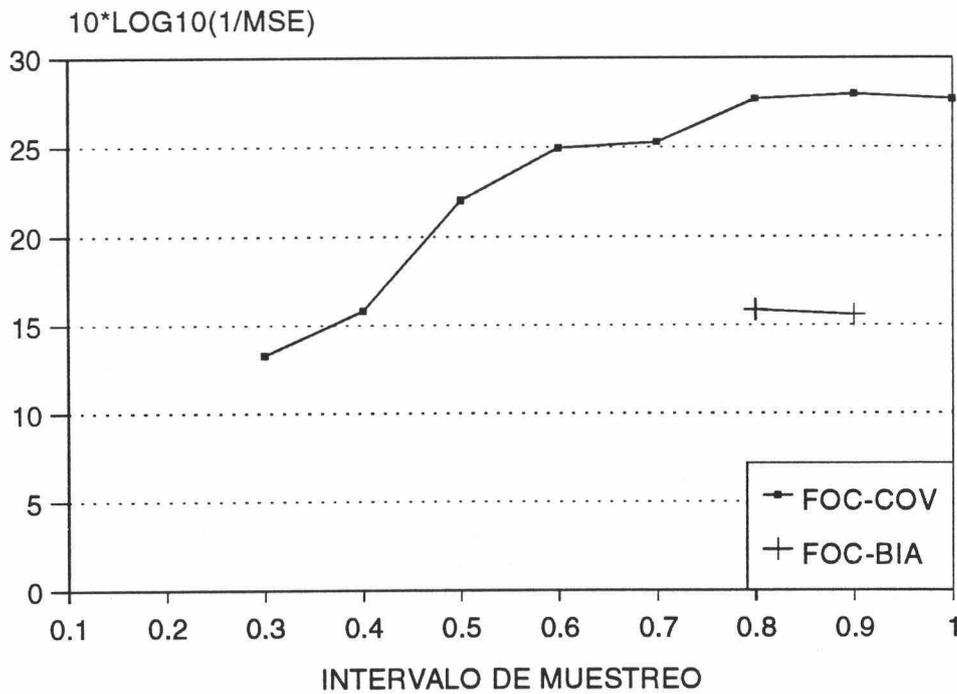


Figura (3.2)-b. MSE del factor de amortiguamiento 0.1 frente al intervalo de muestreo de la señal para una SNR = 5 dB en ruido coloreado.

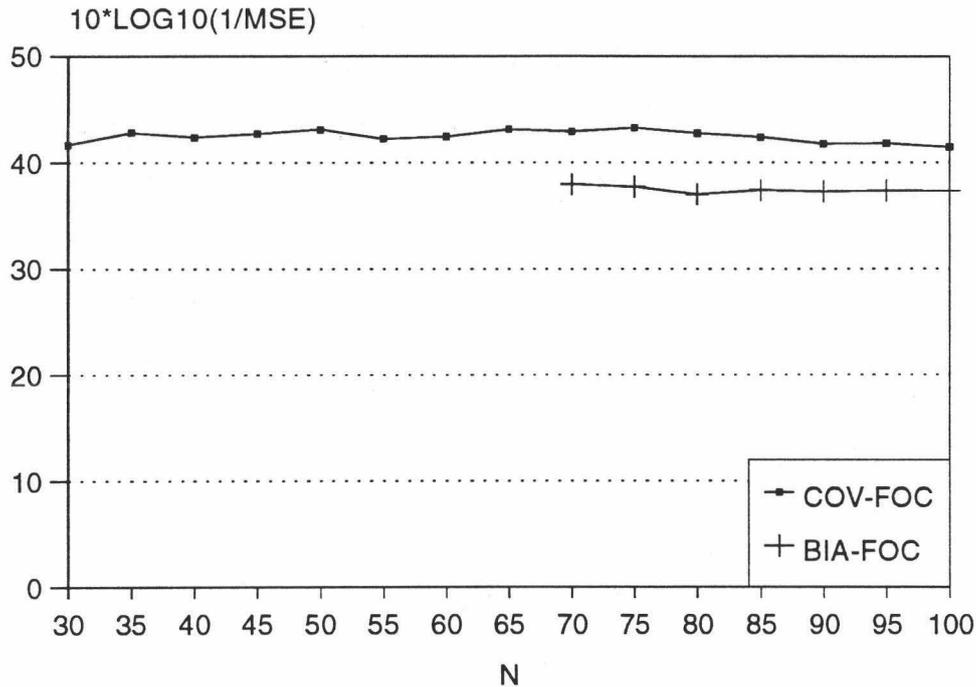


Figura (3.3)-a. MSE de la frecuencia 0.52 en función del número de datos usados para estimar la secuencia de cumulantes para SNR = 5 dB en ruido coloreado.

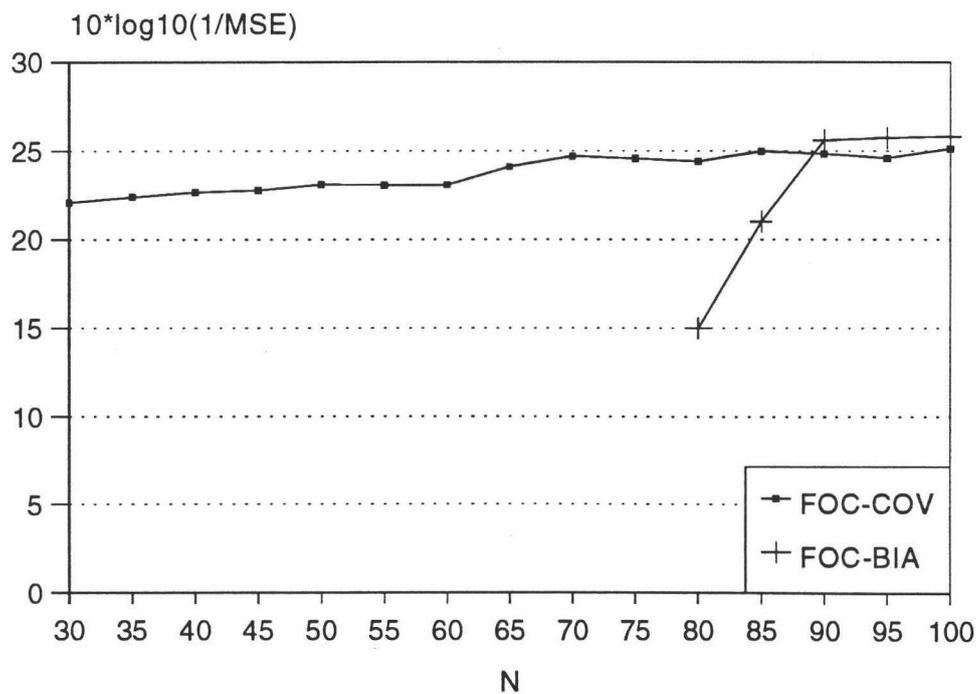


Figura (3.3)-b. MSE del factor de amortiguamiento 0.1 en función del número de datos usado para estimar la secuencia de cumulantes con SNR = 5 dB en ruido coloreado.

Es evidente a partir de estas figuras la incapacidad del método BIA-FOC para extraer los valores correctos de la frecuencia compleja $-0.1+j2\pi 0.52$ cuando el número de datos es menor de 70 ó el intervalo de muestreo es menor de 0.9.

Finalmente hemos llevado cabo un test para mostrar la capacidad de los cumulantes de cuarto orden para suprimir el ruido Gaussiano usando una única realización de la señal. El resultado se muestra en las figuras (3.4)-a y (3.4)-b para los casos de ruido blanco y coloreado. En esta experiencia calculamos separadamente a partir de la señal ruidosa tanto la secuencia de cumulantes de la señal libre de ruido como de la propia secuencia del ruido usando el estimador tipo covarianza para computar la SNR de salida. Puede observarse en esta figura que, independientemente del número de datos que forman la señal, el ruido está siendo suprimido de manera efectiva en el dominio de los cumulantes de cuarto orden hasta una SNR de -5 dB, ya que la secuencia de salida exhibe menos SNR que la secuencia de entrada. Además, la ventaja de usar cumulantes para mejorar la SNR efectiva de la señal se mantiene tanto para el caso de ruido blanco como de ruido coloreado, dada la similitud de las figuras (3.4)-a y (3.4)-b.

Una vez que hemos establecido la influencia de los parámetros de trabajo relacionados con este problema, nos vamos a concentrar en estudiar la capacidad de estimación de las frecuencias complejas de la señal en ambiente ruidoso de los métodos BIA-FOC, COV-FOC, y KT cuando la longitud del registro de datos es reducido ($N=30$). Con estos 30 datos estimamos una secuencia de 25 cumulantes de cuarto orden. Estos 25 cumulantes (o 25 datos para el método KT) son usados para construir una matriz Hankel con $K=17$, para posteriormente extraer las raíces del polinomio del filtro del error de predicción y estimar las frecuencias y factores de amortiguamiento. El intervalo de muestreo T fue elegido como 0.5.

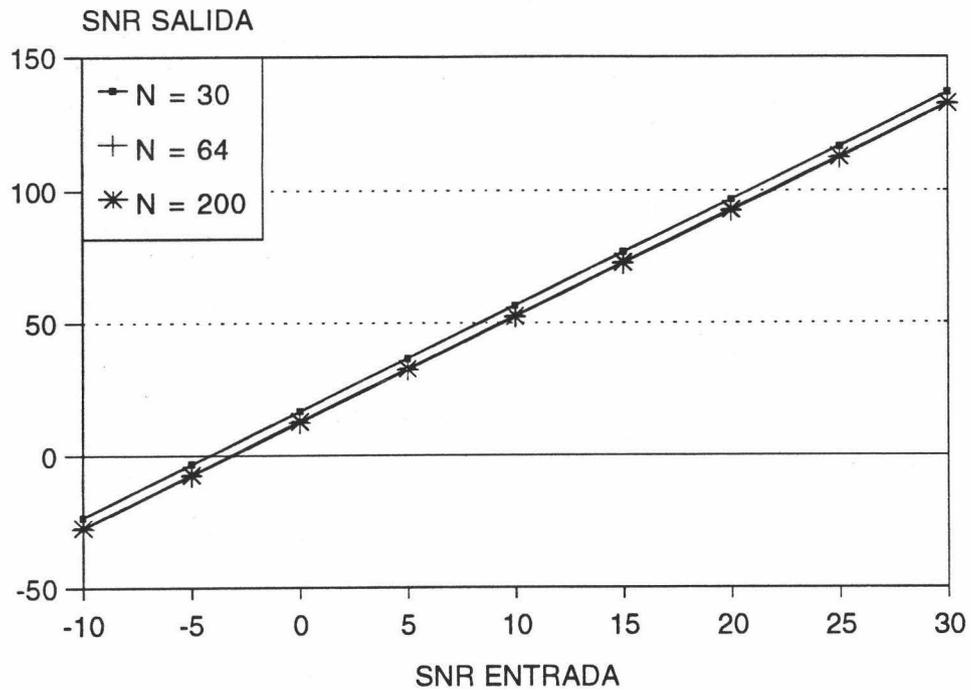


Figura (3.4)-a. Comportamiento de los cumulantes de cuarto orden de la señal contaminada con ruido Gaussiano blanco.

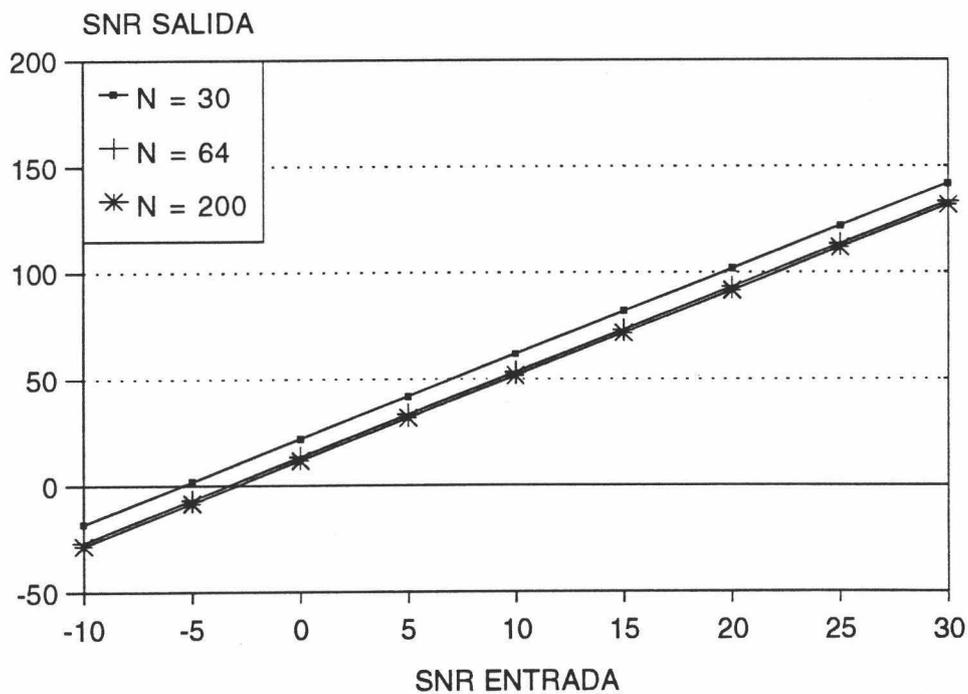


Figura (3.4)-b. Comportamiento de los cumulantes de cuarto orden de la señal contaminada con ruido Gaussiano coloreado.

Para cuantificar la capacidad de discriminación computamos para los métodos COV-FOC, BIA-FOC y KT el MSE y el sesgo o "bias" de las frecuencias y factores de amortiguamiento estimados en ruido aditivo blanco y coloreado a partir de 500 ejecuciones independientes. Los resultados para el "bias" se dan en las Tablas III.1 y III.2 para ruido blanco y coloreado respectivamente. El MSE para diferentes valores de la relación señal-ruido se representa en las figuras (3.5)-a, (3.5)-b, (3.5)-c, (3.5)-d para el caso de ruido blanco y (3.6)-a, (3.6)-b, (3.6)-c y (3.6)-d para el caso de ruido coloreado. A partir de las figuras (3.5)(a), (b), (c) y (d) se observa claramente que el método COV-FOC supera al método BIA-FOC, el cual muestra grandes errores de estimación en los parámetros, sobre todo en el factor de amortiguamiento -0.1 y en la frecuencia 0.52 . El método KT muestra un buen comportamiento en el caso de ruido blanco, pero el método COV-FOC lo mejora, especialmente con la frecuencia asociada con el mayor factor de amortiguamiento. Esta mejoría en las estimaciones del método COV-FOC sobre el método KT es mayor en el caso de ruido coloreado que se muestra en las figuras (3.6)(a), (b), (c) y (d), ya que el método KT está más afectado por el ruido y estima frecuencias espúreas debido a las componentes espectrales del ruido. En este caso el método BIA-FOC da mejores estimaciones que en caso de ruido blanco, pero los errores de modelado introducidos en la estimación de la secuencia de cumulantes afectan una vez más a los parámetros estimados, especialmente a la segunda frecuencia $(-0.1 + j2\pi 0.52)$.

En las Tablas III.1 y III.2 se muestra el sesgo de los factores de amortiguamiento y frecuencias obtenidos por los métodos COV-FOC, BIA-FOC, y KT en 500 ejecuciones independientes de ruido blanco o coloreado a diferentes valores de la relación señal-ruido. Estas tablas muestran claramente que el método BIA-FOC está afectado por un sesgo persistente en la segunda frecuencia debido al modelado imperfecto de la secuencia de cumulantes, que contiene varias componentes deterministas que contribuyen a los valores singulares de la matriz de coeficientes.

SNR (dB)		SESGO DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.2		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		-1.15E-3	-2.40E-3	-1.82E-2
25		-2.78E-3	-3.14E-3	-1.97E-2
20		-2.06E-2	-5.04E-3	-2.40E-2
15		-7.28E-2	-1.06E-2	-3.68E-2
10		*	-3.79E-2	*
5		*	*	*

SNR (dB)		SESGO DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.1		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		5.68E-4	1.05E-3	-5.55E-2
25		1.38E-3	1.44E-3	-5.52E-2
20		3.61E-3	2.53E-3	*
15		9.84E-3	1.44E-3	*
10		3.14E-2	1.59E-2	*
5		*	*	*

SNR (dB)		SESGO DE LA FRECUENCIA 0.42		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		5.51E-5	1.05E-4	9.64E-4
25		1.44E-4	9.49E-4	1.18E-3
20		3.43E-4	1.02E-3	1.77E-3
15		1.08E-3	1.17E-3	3.47E-3
10		*	1.70E-3	*
5		*	*	*

SNR (dB)		SESGO DE LA FRECUENCIA 0.52		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		-1.77E-5	-4.76E-4	9.11E-4
25		-3.45E-5	-5.10E-4	1.11E-3
20		-6.66E-4	-5.59E-4	*
15		-1.06E-3	-6.17E-4	*
10		5.48E-2	-7.78E-3	*
5		*	*	*

Tabla III.1. Sesgo o "bias" de los parámetros estimados en ruido blanco para 500 ejecuciones.

SNR (dB)		SESGO DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.2		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		-5.60E-4	-1.85E-3	-1.75E-2
25		-7.20E-4	-2.12E-3	-1.82E-2
20		-3.36E-3	-3.13E-3	-2.08E-2
15		-1.49E-2	-7.09E-3	-2.95E-2
10		*	-2.79E-2	-6.35E-2
5		*	*	*

SNR (dB)		SESGO DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.1		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		-2.41E-5	7.31E-4	-5.60E-2
25		3.06E-4	8.44E-4	-5.63E-2
20		1.73E-3	1.41E-3	-5.84E-2
15		8.09E-3	3.80E-3	-6.70E-2
10		6.16E-2	1.56E-2	*
5		*	6.95E-2	*

SNR (dB)		SESGO DE LA FRECUENCIA 0.42		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		3.61E-5	6.15E-5	8.93E-4
25		1.25E-4	7.67E-5	1.04E-3
20		4.27E-4	3.10E-4	1.53E-3
15		1.58E-3	6.38E-4	3.15E-3
10		*	4.39E-3	8.89E-3
5		*	*	*

SNR (dB)		SESGO DE LA FRECUENCIA 0.52		
		KT	COV-FOC	BIA-FOC
30		-1.57E-5	-4.89E-5	1.09E-4
25		-3.80E-5	-6.10E-5	1.21E-4
20		-1.00E-4	-1.03E-4	4.89E-3
15		-2.64E-4	-1.93E-4	-7.21E-3
10		3.19E-3	-3.34E-4	*
5		1.12E-2	-5.28E-3	*

Tabla III.2. Sesgo o "bias" de los parámetros estimados en ruido coloreado para 500 ejecuciones.

FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.2

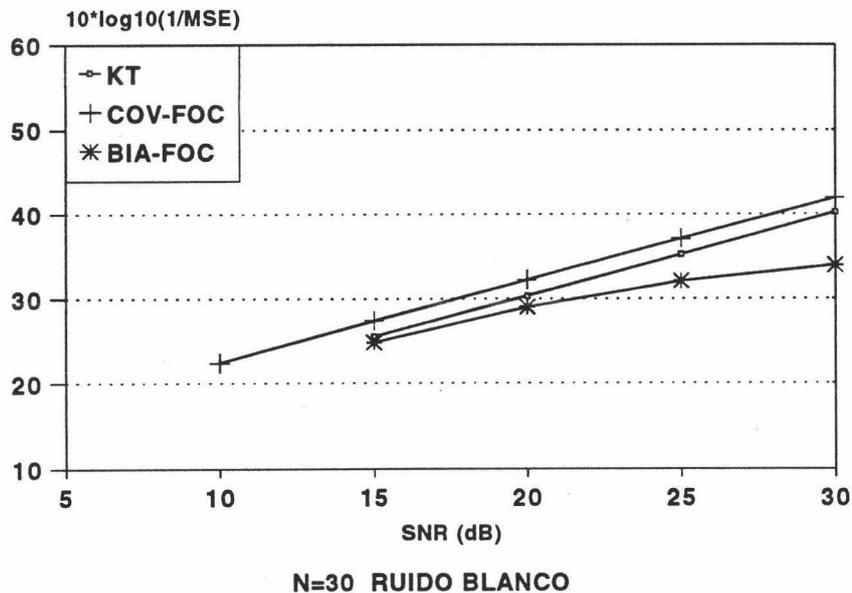


Figura (3.5)-a. MSE del factor de amortiguamiento -0.2 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano blanco.

FRECUENCIA 0.42

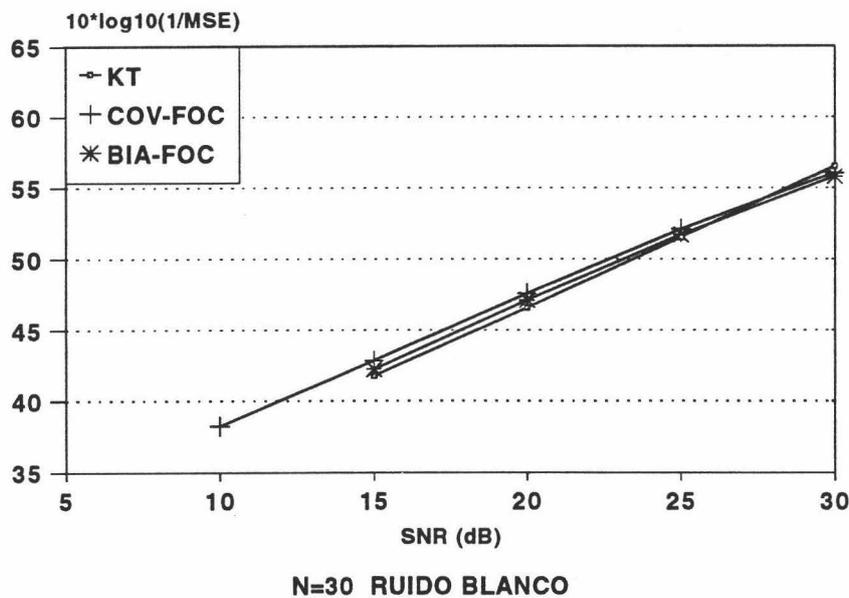


Figura (3.5)-b. MSE de la frecuencia 0.42 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano blanco.

FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.1

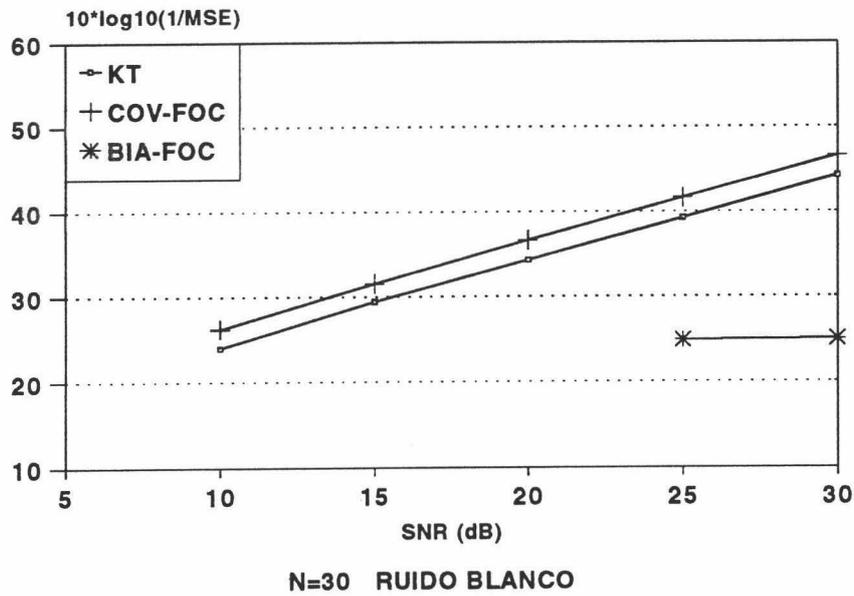


Figura (3.5)-c. MSE del factor de amortiguamiento -0.1 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano blanco.

FRECUENCIA 0.52

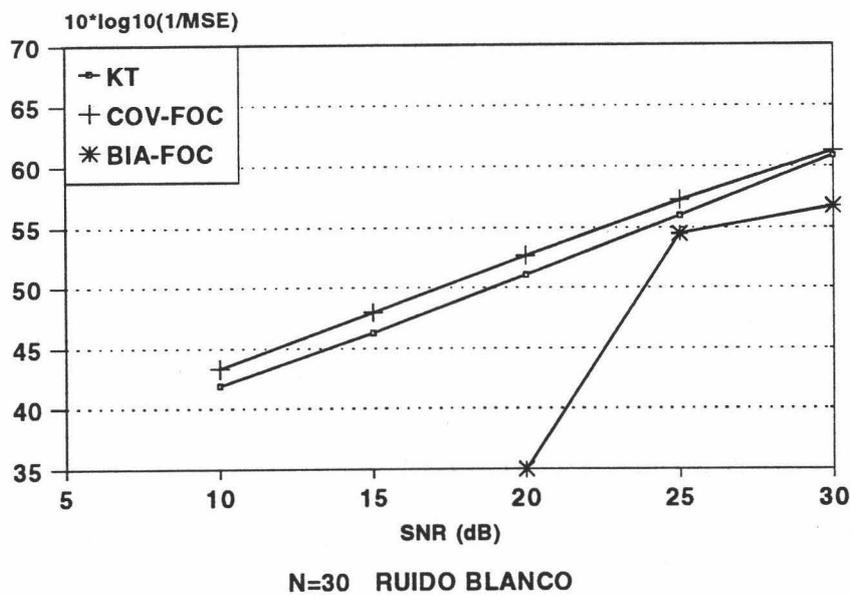


Figura (3.5)-d. MSE de la frecuencia 0.52 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano blanco.

FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.2

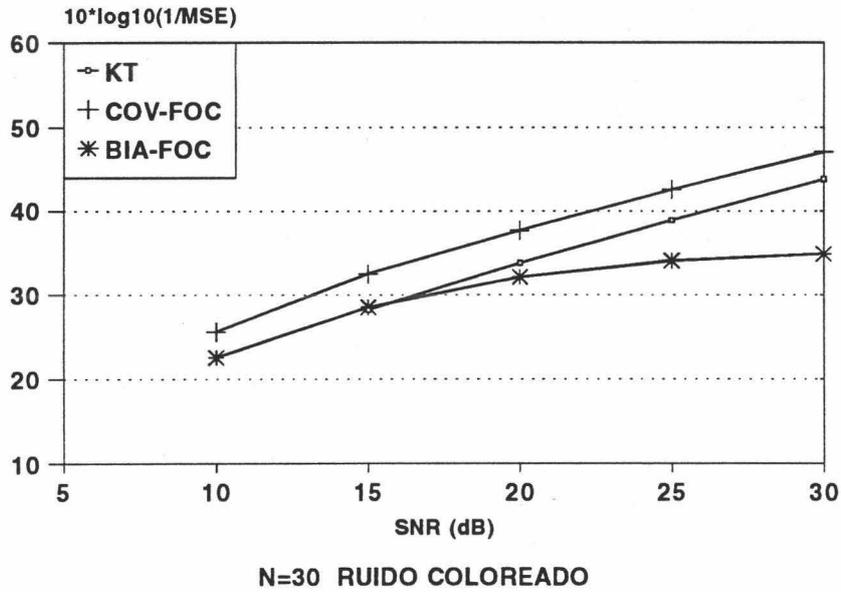


Figura (3.6)-a. MSE del factor de amortiguamiento -0.2 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano coloreado.

FRECUENCIA 0.42

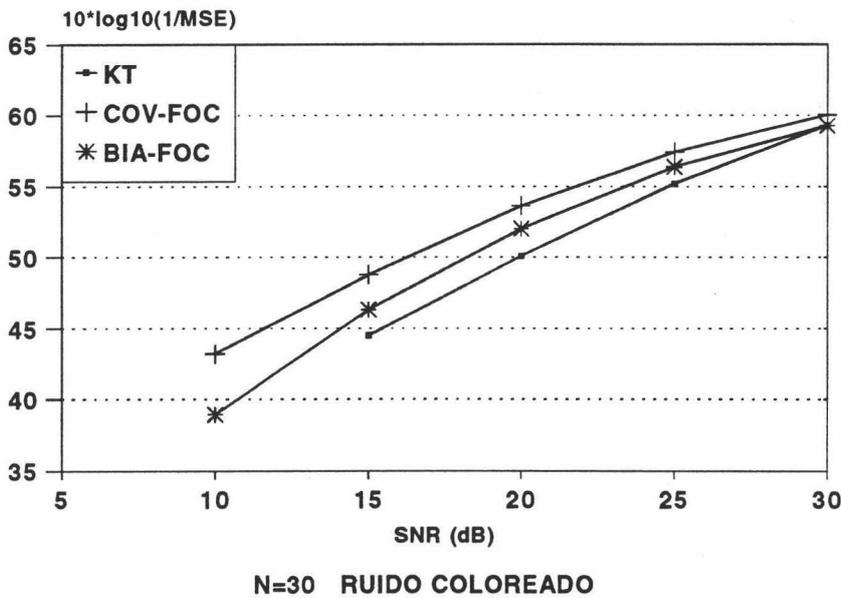


Figura (3.6)-b. MSE de la frecuencia 0.42 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano coloreado.

FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO -0.2

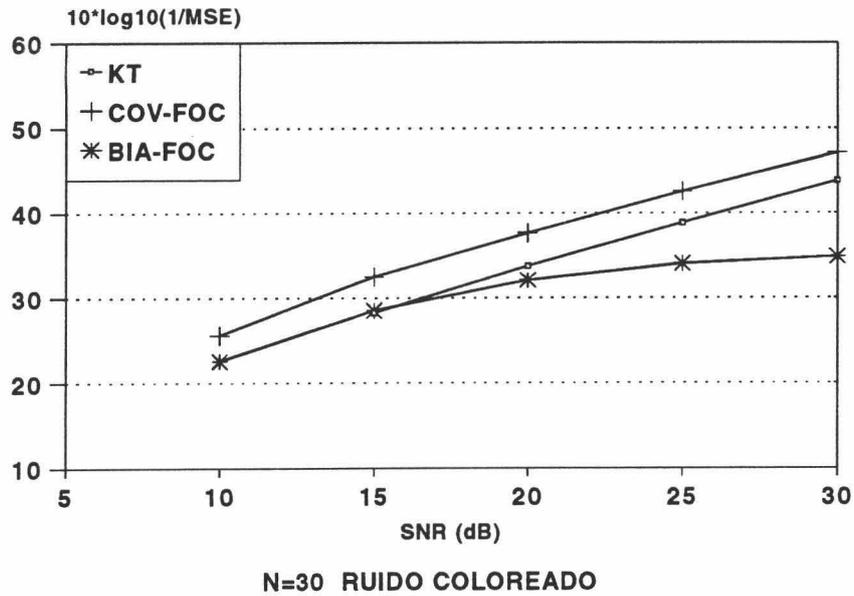


Figura (3.6)-c. MSE del factor de amortiguamiento -0.1 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano coloreado.

FRECUENCIA 0.52

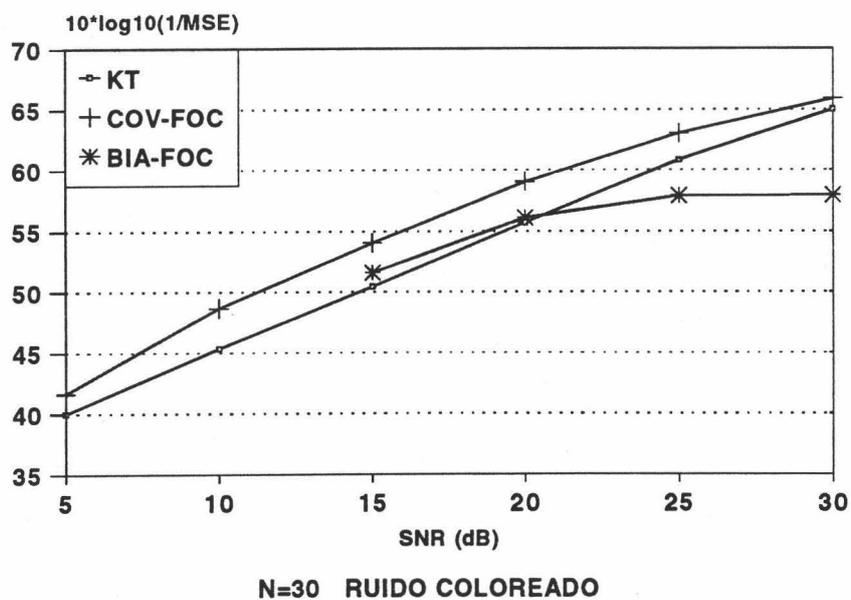


Figura (3.6)-d. MSE de la frecuencia 0.52 en función de la SNR en ambiente de ruido Gaussiano coloreado.

Como conclusión a partir de todos los resultados mostrados podemos afirmar que el método COV-FOC da las mejores estimaciones en términos de "bias" y MSE cuando operamos con un número de datos reducido. Este método muestra la ventaja de aplicar la estadística de órdenes superiores a este tipo de señales deterministas, incluso cuando la longitud del registro de datos es pequeña. A medida que el número de datos se incrementa, el método BIA-FOC va siendo progresivamente equivalente al método COV-FOC ya que los términos extra que aparecían por los errores de modelado son despreciables cuando aumenta N (véase ecuación (2.58)). Esta propiedad se ha confirmado en nuestras simulaciones cuando hemos usado un registro de 64 datos. En este caso aumenta la ventaja de los métodos basados en cumulantes sobre el método KT en el sentido de que se obtienen menores valores del MSE especialmente en el caso de ruido coloreado, aunque el valor umbral de SNR obtenido para el método COV-FOC permanece inalterado.

Ejemplo 2: En este segundo ejemplo vamos a centrar nuestro estudio en la resolución de sinusoides exponencialmente amortiguadas de frecuencias muy cercanas entre sí. Por ser las situaciones de más interés nos vamos a limitar al caso de que tengamos un único registro de datos con un número reducido de los mismos contaminados con ruido Gaussiano coloreado. El ruido coloreado se ha generado como en el ejemplo anterior. Para llevar a cabo esta experiencia la señal $y(n)$ se definen como en la ecuación (3.17) con $s_1 = -0.2 + j2\pi \cdot 0.5$ y $s_2 = -0.1 + j2\pi \cdot 0.52$. El orden del filtro se elige como 13 y el periodo de muestreo T como 0.5. La secuencia de cumulantes usada para estimar las frecuencias de la señal consiste de 25 cumulantes estimados a partir de 30 datos. En este ejemplo el número de exponenciales no se supone conocido a priori, y en consecuencia ha de ser estimado a partir de la SVD de la matriz Hankel de cumulantes. Los valores singulares de esta matriz para el caso de ausencia de ruido se muestran en la figura (3.7) para dos valores del número de datos $N = 30$ y $N = 64$.

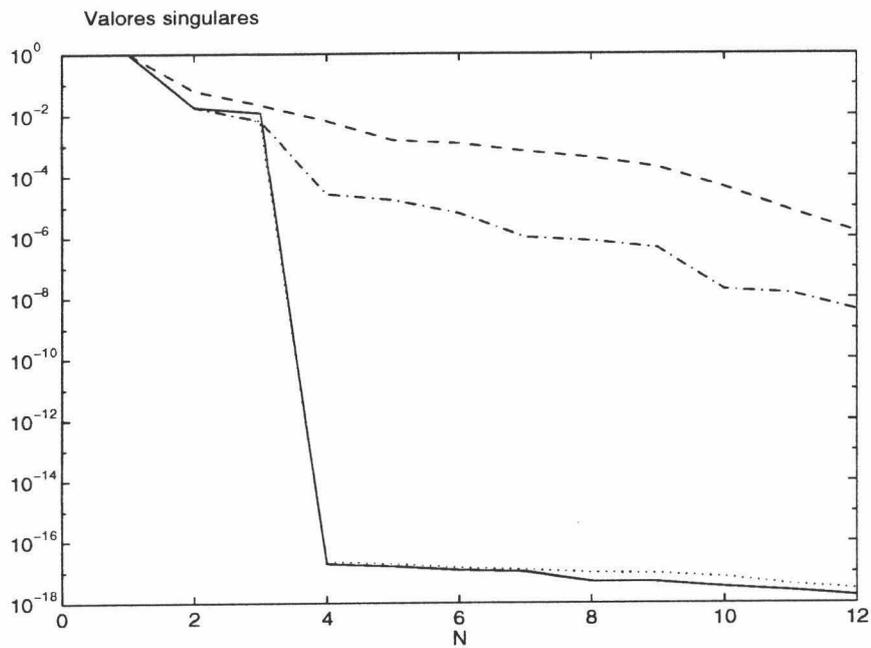


Figura (3.7). Valores singulares normalizados de la matriz de cumulantes (COV-FOC N=30 línea sólida, COV-FOC N=64 línea punteada, BIA-FOC B=30 línea rayada, BIA-FOC N=64 línea rayada-punteada).

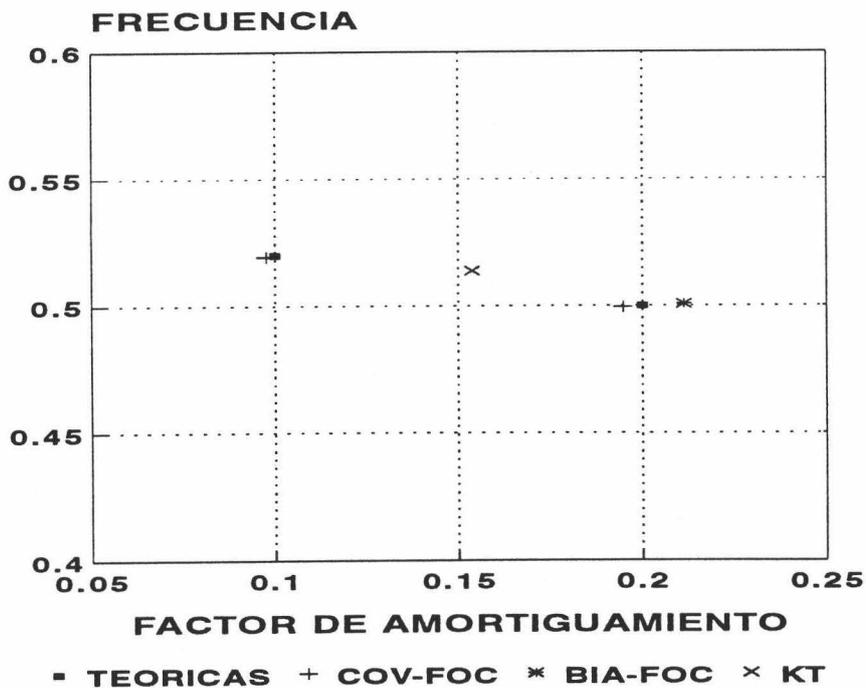


Figura (3.8). Frecuencias complejas de la señal en el plano s con una SNR = 35 dB en ruido Gaussiano coloreado.

A partir de esta figura se hace evidente que las matrices construidas a partir del método COV-FOC exhiben una ruptura clara en $M = 3$ (2 sinusoides mas el cero en el origen), mientras que el método BIA-FOC es incapaz de establecer el orden correcto ya que muestra un decrecimiento monótono en los valores singulares incluso en el caso de ausencia de ruido. La presencia de estos valores singulares de magnitud no nula a partir del orden de la señal es debido al modelado imperfecto de la secuencia de cumulantes de cuarto orden ya que estos valores singulares son indicativos de la presencia de componentes extra en dicha secuencia.

En la figura (3.8) se muestran las frecuencias complejas de la señal en el plano s estimadas usando los métodos COV-FOC, BIA-FOC y KT con la SNR establecida en 35 dB de ruido coloreado. El comportamiento de estos métodos aparece reflejado claramente en esta figura. El método COV-FOC es más adecuado para la resolución de sinusoides de frecuencias muy cercanas cuando hay disponibles un número pequeño de datos, mientras que tanto el método BIA-FOC como el KT fallan al resolver ambas sinusoides, estimando la presencia de tan solo una. Podría pensarse que el orden de la señal que buscamos lo aumentamos artificialmente en uno o dos órdenes en el método KT podríamos dar entrada mediante la SVD al subespacio que generan ambas sinusoides. Esto es cierto en parte, ya que en algunas ocasiones se pueden resolver las sinusoides pero en otras aparecerán frecuencias extra debido al ruido coloreado, ya que el método KT que en esencia usa la secuencia de correlación de segundo orden de la señal modela el espectro del ruido coloreado como nuevas componentes sinusoidales de la señal.

Ejemplo 3: En este ejemplo vamos a analizar el caso de señales reales. Para ello consideramos que la señal consta de una senoide exponencialmente amortiguada a la frecuencia 0.52 con factor de amortiguamiento -0.1. Los datos se generaron a partir de la ecuación (3.17) con $s_1 = -0.1 + j2\pi \cdot 0.52$ y $s_2 = -0.1 - j2\pi \cdot 0.52$. Consideramos la señal

contaminada con ruido Gaussiano coloreado obtenido filtrando ruido blanco por el filtro FIR del ejemplo 1. La frecuencia y el factor de amortiguamiento se estiman a partir de 25 cumulantes obtenidos a partir de 30 datos usando los métodos COV-FOC y BIA-FOC. Como parámetros de trabajo tomamos $K=13$ y $T=0.5$. La figuras (3.9) (a) (b) muestra los ceros del polinomio del filtro del error de predicción para 50 ejecuciones de la señal contaminada por ruido coloreado usando el método COV-FOC para valores de SNR de 15 dB y 5 dB respectivamente, mientras que las figuras (3.9) (c) (d) lo muestran para el método BIA-FOC.

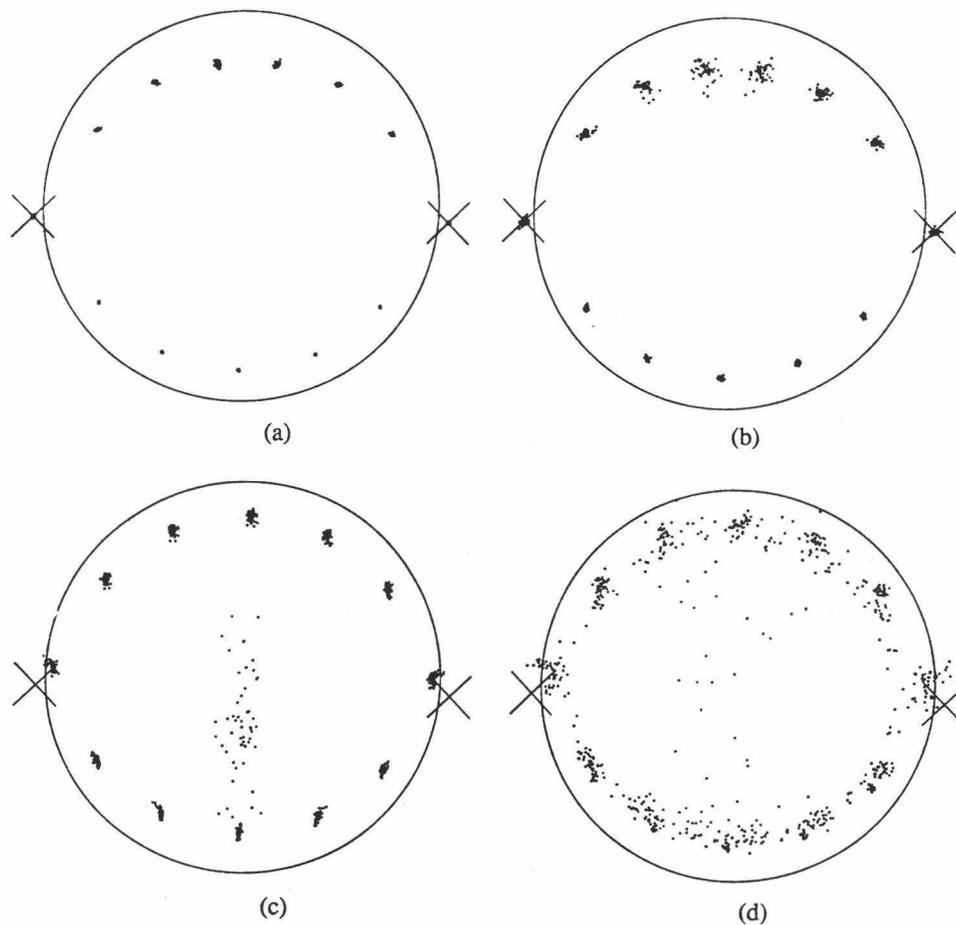


Figura (3.9). Ceros del polinomio del filtro de error de predicción para 50 ejecuciones del ejemplo 3. (a) COV-FOC SNR = 15 dB, (b) COV-FOC SNR = 5 dB, (c) BIA-FOC SNR = 15 dB, (d) BIA-FOC SNR=5 dB.

Estas figuras demuestran claramente que el método COV-FOC muestra un mejor comportamiento que el BIA-FOC en el caso de señales reales, estimando de manera precisa la frecuencia real. Por otra parte, el método BIA-FOC falla al recobrar la frecuencia de la señal. Ello se debe al hecho de que el método BIA-FOC está profundamente afectado por los errores deterministas en la estimación de la secuencia de correlaciones de cuarto orden para este ejemplo. Ya que las dos frecuencias son pares complejos conjugados aparecen varias componentes oscilatorias en dicha secuencia a frecuencias cercanas a cero (véase ecuación (2.58)) y los cumulantes estimados resultan fuertemente perturbados por este modelado imperfecto. Este comportamiento aparece claramente reflejado en las figuras (3.9) (c) y (d), en donde múltiples ceros aparecen cerca del eje real y un sesgo persistente altera las estimaciones.

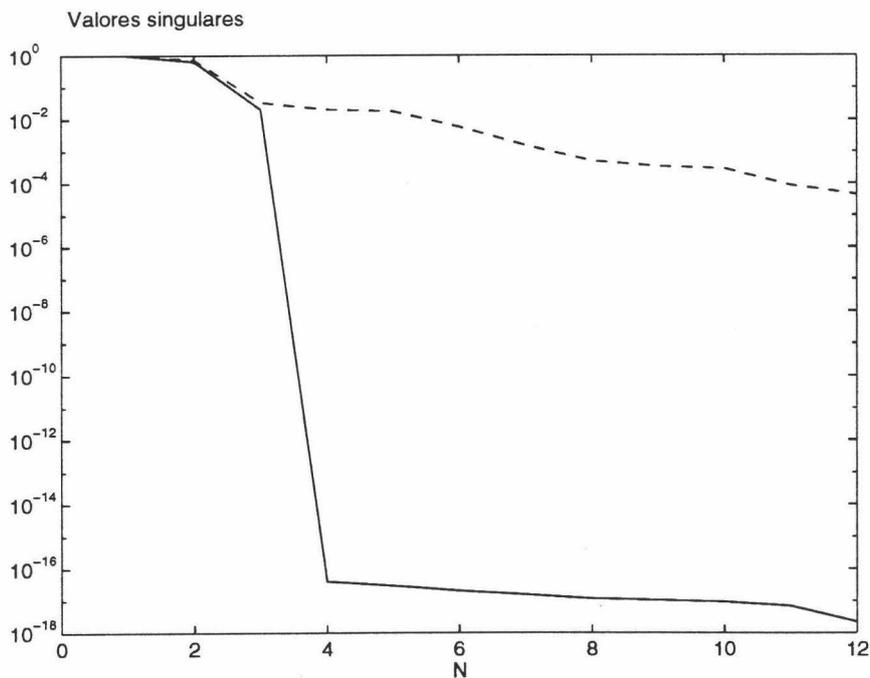


Figura (3.10). Valores singulares normalizados de la matriz de cumulantes de cuarto orden del ejemplo 3. (COV-FOC línea sólida, BIA-FOC línea rayada).

Por otra parte, la presencia de estas componentes deterministas en la secuencia de cumulantes estimados aparece claramente en la gráfica de los valores singulares de las matrices de cumulantes estimados sin ruido mostrados en la figura (3.10). En el caso del método BIA-FOC se observa un decrecimiento lento de los valores singulares, mientras que en el caso del método COV-FOC aparece un corte limpio en el orden 3, indicando la presencia de exactamente dos frecuencias. Este hecho facilita sustancialmente el uso de un criterio estadístico para decidir el rango efectivo de la matriz de cumulantes en caso de que no fuese previamente conocido.

Ejemplo 4: En este último ejemplo vamos a evaluar el comportamiento del método COV-FOC en un test de reconstrucción de la señal en el dominio del tiempo cuando un reducido número de datos está disponible. Para ello vamos a considerar una señal real que consta de dos sinusoides amortiguadas de amplitud unidad dadas por:

$$y(n) = e^{\sigma_1 nT} \cos(2\pi f_1 nT) + e^{\sigma_2 nT} \cos(2\pi f_2 nT) + w(nT) \quad n=0..N-1 \quad (3.18)$$

donde $\sigma_1=-0.2$, $f_1=0.42$, $\sigma_2=-0.1$, $f_2=0.52$, y $T=0.5$. El ruido $w(n)$ es Gaussiano coloreado generado como en el ejemplo. La secuencia de cumulantes consistió en 25 cumulantes estimados a partir de 30 datos usando el estimador tipo covarianza. Para efectuar una comparación entre la capacidad del método COV-FOC y KT de llevar a cabo la reconstrucción de esta señal cuando la longitud del registro de datos es pequeña, construimos matrices de datos o cumulantes con un orden del filtro de 13. Posteriormente computamos los factores de amortiguamiento y las frecuencias y luego evaluamos las amplitudes mediante un ajuste de mínimos cuadrados a los datos [MAR87] para cada realización de las 500 ejecuciones independientes de la señal. Las frecuencias y amplitudes estimadas se usan en una etapa posterior para reconstruir la señal.

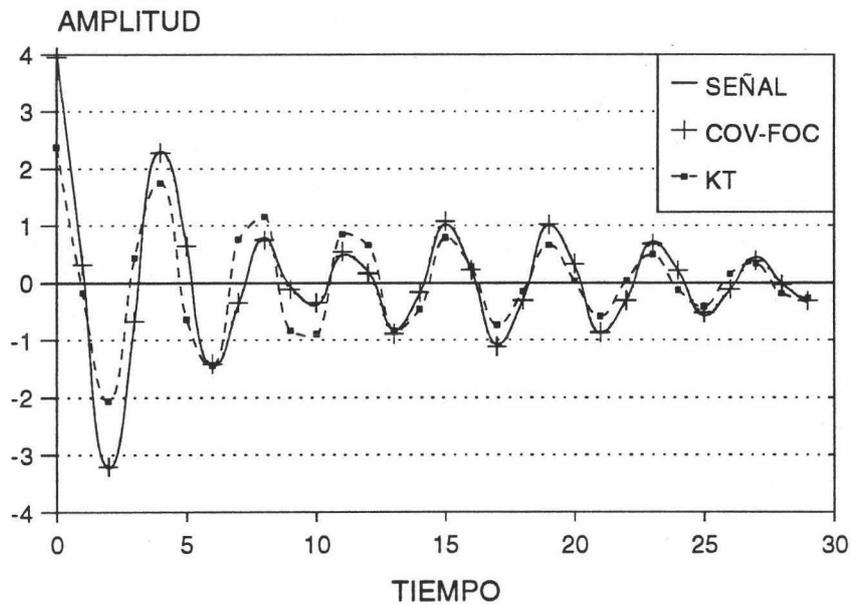


Figura (3.11). Señal transitoria original del ejemplo 4 y señales reconstruidas usando los métodos KT y COV-FOC a 10 dB de ruido coloreado.

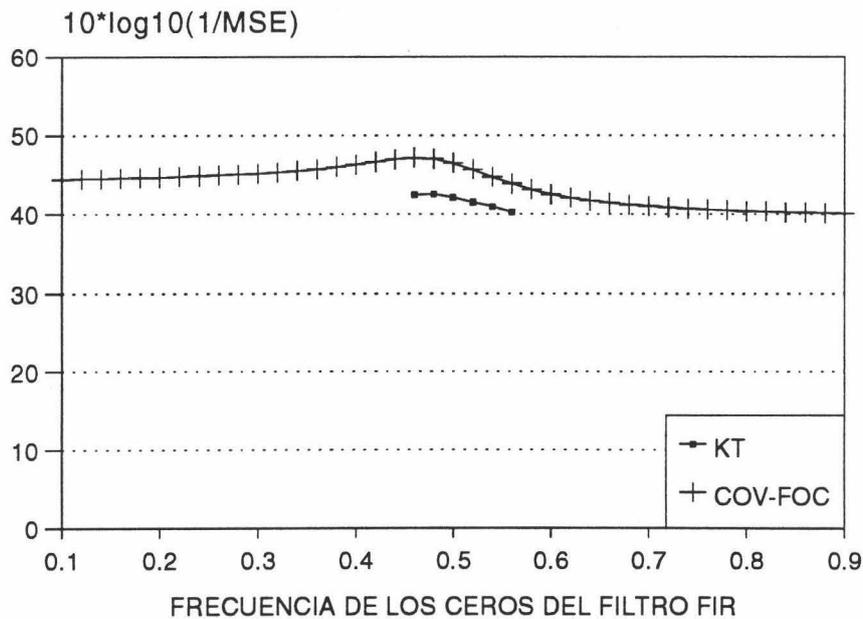


Figura (3.12). Influencia del espectro del ruido coloreado en las estimaciones de la frecuencia 0.42 a 5 dB de ruido coloreado usando los métodos KT y COV-FOC.

En la figura (3.11) tenemos representado el transitorio original y la señal reconstruida obtenida por los métodos COV-FOC y KT para un nivel de relación señal-ruido de 10 dB. Obsérvese que la señal estimada a partir del método COV-FOC muestra un buen acuerdo con la señal original, pero la estimada a partir del método KT está influenciada por la estimación imperfecta de la frecuencia del menor coeficiente de amortiguamiento debido al ruido coloreado. Este hecho demuestra la mejora en la SNR efectiva de la señal que lleva a cabo el método COV-FOC.

Por último, para mostrar la independencia del método COV-FOC con la secuencia de autocorrelación del ruido coloreado (o con el espectro de potencia particular del ruido usado), vamos a variar los coeficientes del filtro FIR usados en el ejemplo 1. Así, generamos nuevas secuencias de ruido Gaussiano coloreado filtrando ruido Gaussiano blanco a través de un filtro FIR de segundo orden cuyos ceros están localizados en diferentes frecuencias. Los resultados obtenidos para la frecuencia menos amortiguada con los métodos COV-FOC y KT se muestra en la figura (3.12). Para construir esta gráfica, hemos variado la frecuencia de los ceros del filtro FIR en el intervalo [0.1 0.9]. Nótese que el método COV-FOC estima esta frecuencia independientemente del espectro del ruido, mientras que el método KT únicamente estima esta frecuencia cuando los ceros del filtro FIR están localizados en el intervalo de frecuencia de la señal, es decir, cuando el espectro del ruido pierde las componentes en las bandas de frecuencia cercanas a las componentes de frecuencia de la señal.

III-6. CONCLUSIONES.

En esta última sección vamos a resumir las conclusiones más importantes obtenidas en este capítulo. Básicamente, el objetivo esencial ha sido aplicar el estimador tipo

covarianza propuesto en el capítulo anterior para la estimación de correlaciones de alto orden de señales sinusoidales exponencialmente amortiguadas a la extracción de frecuencias y factores de amortiguamiento. Ya que tenemos asegurado que las secuencias estimadas de correlaciones o cumulantes mantienen la misma estructura de los datos, podemos aplicar los métodos basados en la predicción lineal a estas secuencias en lugar de a los datos, con la ventaja añadida de que la secuencia de cumulantes de orden mayor que dos es insensible al ruido Gaussiano. Basándonos en esta propiedad hemos propuesto tres matrices de correlaciones de alto orden y hemos mostrado su relación con resultados previos. Particularmente interesantes desde un punto de vista teórico son las matrices de estructura no Hankel usando varias "slices" horizontales debido a su vinculación con el método de la covarianza de la predicción lineal.

También hemos discutido en este capítulo el problema de la identificabilidad a partir de una única "slice" unidimensional usando resultados recientes desarrollados para procesos ARMA causales. Ello nos ha permitido obtener un algoritmo consistente para extraer los parámetros de la señal. Este algoritmo ha sido aplicado usando la secuencia de cumulantes de cuarto orden al caso de disponer de un número de datos finito contaminados con ruido Gaussiano. A través de ejemplos de simulación se ha mostrado la mejora introducida por el estimador tipo covarianza, que reduce los errores deterministas asociados con el modelado imperfecto de la "slice" unidimensional. Estos errores deterministas llegan a ser importantes con el estimador estándar cuando el número de datos disponibles sea pequeño, llevando a una estimación imperfecta y a un sesgo persistente incluso en el caso de ausencia de ruido. Comparado con el método KT basado en datos, los resultados numéricos muestran un incremento de unos 5-10 dB en los valores umbrales de la SNR en el caso disponer de un número reducido de datos contaminados con ruido coloreado. Todos los resultados mostrados en la sección anterior se han restringido al caso de que una única realización de la señal esté disponible. Si

tenemos acceso a varias realizaciones, los resultados de simulación muestran una mejora adicional sobre el método KT.

Junto a la propia estimación de las frecuencias complejas de la señal, hemos estudiado mediante simulaciones la influencia de los parámetros de trabajo en las estimaciones, parámetros tales como el orden del filtro de error de predicción, intervalo de muestreo, número de datos y espectro del ruido. Como conclusión de estas simulaciones resulta evidente que existe una elección óptima para algunos de estos parámetros, elección que cobra una especial importancia para bajas SNR.

También hemos analizado la capacidad de resolución en frecuencia usando sinusoides amortiguadas de frecuencias muy cercanas entre sí. Se obtiene una mejora de 5 dB cuando estimamos las correlaciones de alto orden mediante el estimador tipo covarianza. Relacionado con la capacidad de resolución en frecuencia es de destacar las buenas características que presentan las matrices tipo CTOM. De hecho, son las propiedades de este estimador las que permiten explicar el buen comportamiento que muestran dichas matrices, como ya señalamos en la sección III-2.

Un tema interesante en el que se podría profundizar posteriormente sería el realizar un análisis de perturbaciones de las matrices propuestas en este capítulo siguiendo los resultados obtenidos en [RAO88], para así poder cuantificar teóricamente la precisión de las estimaciones.



SEGUNDA PARTE

IDENTIFICACION DE PROCESOS MA



INTRODUCCIÓN A LA SEGUNDA PARTE.

Como se comentó en el capítulo I, uno de los planteamientos más útiles y populares para la interpretación de las series temporales es la construcción de modelos paramétricos lineales del proceso físico subyacente excitados por un proceso aleatorio blanco. Si tuviésemos acceso tanto a la salida $z(n)$ como a la entrada $w(n)$ del sistema lineal LTI mostrado en la figura 1.3, es posible reconstruir la respuesta impulso del sistema $h(n)$, y en consecuencia, identificar el modelo a partir de la correlación cruzada entre las señales de entrada y salida del sistema a través de la ecuación:

$$r_{wz}(\tau) = E\{w(n)z(n+\tau)\} = \gamma_{2w} h(n) \quad (1)$$

Sin embargo en muchas aplicaciones y casos prácticos como por ejemplo en ecualización y deconvolución en sismología de reflexión, sólo se tiene acceso a la salida del sistema, por lo que la ecuación (1) no se puede aplicar. El problema que se planteó fue determinar dicha respuesta impulso o identificar el sistema usando solamente la señal de salida. Varios métodos surgieron entonces para identificar sistemas usando solo datos de medidas de la salida. La formulación del problema sería en este caso la siguiente: dado un conjunto finito de N medidas de la señal de salida $y(n)$, $n = 1, 2, \dots, N$, posiblemente contaminadas con ruido, estimar los parámetros de la función de transferencia del sistema lineal $H(z)$, estando $H(z)$ representado por:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{j=0}^q b(j)z^{-j}}{\sum_{i=0}^p a(i)z^{-i}} \quad (2)$$

Los parámetros que se han de identificar son $b(1), \dots, b(q)$, $a(1), \dots, a(p)$ siendo q y p los órdenes de la parte MA y AR del modelo, que habrán de ser estimados en un caso práctico.

En áreas como comunicaciones [BEN80] y sismología de reflexión [LII82] este problema surge frecuentemente. En comunicaciones, $v(n)$ es un mensaje, $h(n)$ es el canal e $y(n)$ es el mensaje distorsionado debido a la interferencia entre símbolos. Un modelo preciso del canal se necesita para restaurar el mensaje en el receptor. Este modelado se usa en muchas escenas de ecualización. En sismología, $v(n)$ es la secuencia de reflectividad de la Tierra (el mensaje de la Tierra), $h(n)$ es el tren de ondas de la fuente sísmica e $y(n)$ es el sismograma. Un modelo preciso de la onda fuente se necesita para estimar la secuencia de reflectividad de la Tierra a través de deconvolución.

La mayor parte de los resultados para llevar a cabo la identificación del sistema están basados en criterios de mínimos cuadrados que, en el caso gaussiano, son asintóticamente equivalentes a planteamientos de máxima verosimilitud. En el caso no gaussiano, estos procedimientos son soluciones de mínimos cuadrados pero no una solución de máxima verosimilitud. Es por ello que la literatura sobre las series temporales ha estado dominada por la hipótesis gaussiana o por técnicas de modelado de la autocorrelación [MAR87]. Estas técnicas tienen dos limitaciones básicas:

- 1) Si el proceso no es gaussiano, los modelos del espectro de potencia no capturarán toda la información que nos proporcionan los datos.
- 2) Los procesos no gaussianos que sean de fase no mínima serán identificados como de fase mínima por los modelos basados en la autocorrelación.

Idealmente el objetivo que se trata de conseguir es encontrar un modelo que reproduzca lo más exactamente posible los datos medidos. Ello se conseguiría si

conociéramos completamente la función densidad de probabilidad (p.d.f) porque la verosimilitud es proporcional a la probabilidad; pero, a menos que los datos sean gaussianos o condicionalmente gaussianos, es imposible determinar la función densidad de probabilidad de forma completa. La hipótesis gaussiana significa que la función densidad de probabilidad está completamente caracterizada por sus dos primeros momentos, por lo que usar un modelo gaussiano significa ajustar los datos por un función densidad de probabilidad de dos momentos. Si abandonamos el modelo gaussiano, en teoría necesitaríamos un número de momentos infinito para un buen ajuste de los datos. Cuando queremos determinar modelos basados en un conjunto de más de dos momentos aparecen de forma natural los cumulantes de la señal, y es que, en muchas aplicaciones, como en las anteriormente comentadas de comunicaciones y geofísica, los datos no siguen una distribución gaussiana. Ya que los métodos basados en la estadística de ordenes superiores no requieren el conocimiento de la función densidad de probabilidad no gaussiana, se convierten en una herramienta más atractiva en problemas prácticos de procesado de señal, ya que la distribución no gaussiana de los datos es generalmente desconocida o difícil de estimar.

Por lo anteriormente expuesto, hay cuatro motivaciones principales para usar y estimar los poliespectros usando un modelo paramétrico excitado por ruido blanco no gaussiano:

- 1) El uso de los cumulantes nos permite recobrar la información de la fase, y así identificar correctamente modelos de fase no mínima.
- 2) Además, los métodos basados en HOS nos permiten modelar aquellas situaciones prácticas donde surgen procesos no gaussianos.
- 3) Como los procesos gaussianos tienen cumulantes nulos para un orden mayor que dos, podremos eliminar cualquier ruido gaussiano de espectro de energía desconocido que contamine los datos.

4) El uso de un modelado paramétrico permite incrementar la capacidad de resolución de estimadores para resolver picos cercanos en el dominio poliespectral o aumentar la fiabilidad del modelado en aquellas situaciones en que los procesos no gaussianos son de hecho paramétricos o pueden ser bien aproximados por modelos paramétricos.

La identificabilidad de la función de transferencia $H(z)$ del sistema lineal a partir de medidas de la salida del sistema, dependerá de si el proceso de excitación $w(n)$ (figura 1.3) es o no gaussiano y de si el sistema es o no de fase mínima y se determina como sigue:

a) Si $w(n)$ es gaussiana y $H(z)$ es de fase mínima, los métodos basados en autocorrelación pueden identificar tanto la fase como la magnitud de $H(z)$ cuando éste sea de fase mínima. Si $H(z)$ es de fase no mínima, ningún método puede recobrar correctamente la fase de $H(z)$.

b) Si $w(n)$ es no gaussiana y $H(z)$ es de fase no mínima, los métodos basados en autocorrelación identificarán correctamente la magnitud de $H(z)$, pero no la fase. Si se conociese la distribución no gaussiana de $w(n)$ podrían obtenerse una estimación de máxima verosimilitud de los parámetros del modelo (2) resolviendo un sistema de ecuaciones no lineales. Por otra parte, los métodos basados en estadística de órdenes superiores pueden estimar tanto la magnitud como la fase de $H(z)$ sin conocer la distribución específica no gaussiana de la señal de excitación.

En los capítulos IV y V vamos a tratar la identificabilidad de procesos MA a partir de observaciones de la señal de salida usando estadística de órdenes superiores. En el capítulo IV se establecerán relaciones generales entre los poliespectros de ordenes k y/o $k-1$ ($k \geq 2$) de la señal de salida. Estas relaciones llevan a un conjunto de ecuaciones lineales que combinan los cumulantes de salida de órdenes k y $k-1$ del proceso con los

coeficientes del sistema, ecuaciones que se mostrarán útiles para identificar un sistema lineal de fase no mínima excitado por una secuencia no gaussiana. Estas ecuaciones generalizan las usadas en métodos lineales existentes basados en mínimos cuadrados tales como el algoritmo del Giannakis-Mendel-Tugnait (GMT) [GIA89a] [TIG90] [TUG91] o aquellos propuestos en [NAN94] y [ZHA94], con la ventaja añadida de que el uso la secuencia de autocorrelación de la señal es opcional en estas ecuaciones. Esta característica las convierte en especialmente útiles para estimar los coeficientes del sistema MA a partir de medidas de la señal contaminadas con ruido Gaussiano coloreado de espectro de energía desconocido. La implementación de estas ecuaciones en algoritmos para obtener los coeficientes MA se realiza en el capítulo V. En este capítulo se distinguirán entre sistemas MA excitados con procesos de función de densidad de probabilidad simétrica ó no. Para los primeros se usarán algoritmos que utilizan exclusivamente estadística de cuarto orden, y para los segundos se usarán algoritmos que combinen estadística de tercer y cuarto orden. También en este capítulo se tratará el problema de la estimación del orden del modelo, ya que tanto los métodos lineales propuestos como la mayoría de los existentes en la bibliografía requieren un conocimiento previo del orden. El criterio propuesto de selección del orden del modelo se basa solamente en estadística de ordenes superiores o cumulantes por lo que en principio no es sensible al ruido aditivo Gaussiano. Asimismo se presentarán en este capítulo los resultados de simulación obtenidos para los métodos propuestos de estimación de los coeficientes del modelo MA y los compararemos con otros métodos lineales basados en una estimación de mínimos cuadrados existentes en la bibliografía. Como podrá comprobarse por los resultados, las simulaciones numéricas confirman las ventajas teóricas esperadas de los métodos propuestos en ruido blanco y coloreado, y nos van a permitir establecer una comparación tanto entre los métodos lineales propuestos como con otros publicados en la bibliografía.



CAPITULO IV

IDENTIFICACION DE PROCESOS MA.
ECUACIONES PROPUESTAS.



IV-1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos IV y V abordamos el problema de la identificación de sistemas MA o todo ceros a partir de un conjunto de N datos de la señal de salida. La ecuación que describe un proceso MA de orden q , $x(n)$, es:

$$x(n) = \sum_{i=0}^q b(i) w(n-i), \quad (4.1)$$

Las razones que motivan el estudio de la identificación de parámetros de este tipo de modelos usando solamente medidas de la salida del sistema son las siguientes:

1) En muchos casos prácticos los datos recibidos o captados por un sensor o dispositivo de recepción de datos en N instantes consecutivos pueden ser considerados como la señal de salida de un sistema MA de fase no mínima excitado por una señal de entrada no gaussiana. Este problema es de considerable interés en geofísica, comunicaciones digitales y astronomía. Como se estableció en la introducción a esta segunda parte, solo métodos basados en estadística de órdenes superiores pueden obtener de forma precisa los parámetros del sistema.

2) En aquellos casos en los que un modelado ARMA de los datos sea el adecuado, todos los algoritmos que se desarrollen para identificar los parámetros del sistema MA de fase no mínima son aplicables de forma análoga para obtener los parámetros MA del sistema ARMA usando el método de las "series residuales" [GIA89a] [MEN91]. Este método consiste en estimar en primer lugar los parámetros AR del modelo a través de las ecuaciones normales [GIA90a] [NIK93b] o por cualquier algoritmo desarrollado para la identificación de sistemas AR [GAL94b], para posteriormente construir la serie temporal residual denotada como $\tilde{y}(n)$, igual a $y(n) - \hat{y}(n)$ donde

$$\hat{y}(n) = -\sum_{i=1}^p \hat{a}(i) y(n-i) \quad (4.2)$$

y $\hat{a}(i)$ son los parámetros AR estimados. Si asumimos que dichos parámetros constituyen una buena estimación de la parte AR del modelo ARMA, es fácil observar que:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{i=0}^q b(i) v(n-i) \quad (4.3)$$

es decir, la serie residual satisface un modelo MA de orden q con los mismos coeficientes que el modelo original. Aplicando seguidamente cualquier algoritmo para estimar los coeficientes de un modelo MA podremos obtener los coeficientes MA del proceso ARMA.

De forma análoga, la parte MA de un proceso ARMA puede obtenerse a través de los primeros q coeficientes de la respuesta impulso del sistema una vez estimados previamente los parámetros AR. Usando q slices unidimensionales y dicha respuesta impulso (algoritmo q -slice) puede obtenerse los coeficientes MA.

3) Siempre se puede reducir la estimación de parámetros de un sistema ARMA a la estimación de parámetros de sistemas MA a través del denominado "algoritmo MA doble" [GIA90a]. Este algoritmo, aplicable tanto a procesos ARMA causales como no causales, transforma el problema de estimar los parámetros AR y MA del modelo ARMA en la aplicación dos veces de los algoritmos de estimación de coeficientes MA a unas series temporales determinadas [MEN91]. Este procedimiento de conversión del problema de estimación de coeficientes ARMA al de la estimación de coeficientes de dos sistemas MA extiende considerablemente la aplicabilidad de los algoritmos desarrollados para el caso de sistemas MA puros los cuales son objeto de este capítulo y el siguiente.

En este capítulo estudiaremos, pues, los métodos de identificación de modelos MA. Comenzaremos en la sección IV-2 con una revisión de los distintos métodos existentes en la bibliografía, deteniéndonos más en los métodos lineales basados en la solución de mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones lineales, métodos en los que se encuadran las aportaciones de este capítulo. Posteriormente, en la sección IV-3 se plantea el problema que vamos a tratar y se introducen las hipótesis de trabajo. En la sección IV-4 se presentan varios conjuntos de ecuaciones lineales relacionando los cumulantes de orden arbitrario de la señal de salida y los parámetros del modelo para identificar un sistema lineal de fase no mínima excitado por una secuencia no gaussiana. Estas ecuaciones, que constituyen la aportación de este capítulo, se han obtenido a partir de relaciones generales entre los poliespectros de órdenes k y $k-1$ ($k > 2$) y proporcionan un marco general que combina cumulantes de ordenes $k-1$ y k -ésimo. Con ello se generalizan los métodos lineales existentes basados en mínimos cuadrados tales como el algoritmo del Giannakis-Mendel (GM) [GIA89a] [TUG90] [TUG91] o aquellos propuestos en [NAN94] y [ZHA94]. Además, a partir de estas relaciones podemos obtener nuevos conjuntos de ecuaciones útiles para recobrar los coeficientes del modelo MA. Ya que el uso de la secuencia de autocorrelación de la señal es opcional en estas ecuaciones, las relaciones propuestas serán útiles para estimar los coeficientes del sistema MA a partir de medidas de la señal contaminadas con ruido Gaussiano coloreado de espectro de energía desconocido. En la sección IV-5 se establecen a través de varias proposiciones las relaciones específicas entre cumulantes de tercer y cuarto orden, que serán útiles para implementar los algoritmos en el capítulo siguiente. Asimismo en esta sección se presentan las relaciones que usan solamente cumulantes de cuarto orden, ecuaciones que se mostrarán útiles en el caso de distribuciones no Gaussianas simétricamente distribuidas, las cuales tienen cumulantes de tercer orden nulos y por tanto necesitan el uso de cuarto orden. Ejemplo de este tipo de distribuciones son las distribuciones uniforme, de Laplace y la Bernoulli-gaussiana. La implementación de todos estos conjuntos de ecuaciones en

algoritmos se deja para el capítulo siguiente, en el que se propondrán varios métodos basados en el método de mínimos cuadrados a la vez que se propone un procedimiento para estimar el orden del modelo. Finalmente, en la sección IV-6 se resumen los resultados más importantes obtenidos en este capítulo.

IV-2. REVISIÓN DE MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN DE PROCESOS MA USANDO CUMULANTES.

Durante la última década ha habido un continuo interés en la identificación de sistemas MA de fase no mínima usando estadística de ordenes superiores. Varios métodos han surgido intentando explotar la información de la fase de las señales o la inmunidad teórica al ruido Gaussiano que proporciona el uso de cumulantes de la señal. Estos métodos pueden clasificarse en tres grandes categorías [MEN91]:

1) Soluciones recursivas o cerradas [SWA89] [GIA89a] [TUG90], que muestran la posibilidad de recuperar los coeficientes MA recursivamente, bien usando tanto correlaciones como la "slice" diagonal de cumulantes de tercer orden, o bien usando solamente cumulantes de tercer o cuarto orden en la fórmula $C(q,k)$ [GIA87]:

$$\begin{aligned} b(k) &= c_{3x}(q,k) / c_{3x}(q,0) & k=1\dots q \\ b(k) &= c_{4x}(q,k,0) / c_{4x}(q,0,0) & k=1\dots q \end{aligned} \tag{4.4}$$

En cualquier caso, este tipo de soluciones tienen una gran importancia teórica, ya que muestran la posibilidad de obtener los coeficientes del modelo de forma recursiva (no hay resultado equivalente en segundo orden). Sin embargo, su aplicabilidad es muy limitada debido a que los cumulantes han de ser estimados a partir de los datos, y la ecuación (4.4) no proporciona ningún tipo de filtrado que reduzca los efectos de los errores de estimación de los cumulantes.

2) Soluciones de optimización [LII82] [FRI89] [FRI90], basadas en la minimización de una función no lineal de los cumulantes de la señal en una región determinada y los parámetros del modelo. Ya que las funciones a minimizar son no lineales, la minimización se ha de hacer mediante algoritmos tales como el algoritmo de Newton-Gauss o el del gradiente descendente. Estos métodos suelen proporcionar las mejores soluciones, aunque necesitan una buena estimación previa de los coeficientes del modelo para inicializar el algoritmo, de lo contrario puede converger a un mínimo local. En cualquier caso, la convergencia a un mínimo global nunca está garantizada y generalmente suponen un gran gasto computacional.

3) Soluciones del algebra lineal, basadas en la solución de un sistema de ecuaciones que se consideran lineales en un conjunto de parámetros. Este tipo de soluciones ha generado un interés considerable debido a su simplicidad computacional y como buenas inicializaciones de algoritmos no lineales en las denominadas soluciones de optimización. Entre este tipo de soluciones destaca el denominado algoritmo de Giannakis y Mendel (algoritmo GM) [GIA89a] que usa estadística de segundo y tercer orden. En este algoritmo se combinan la slice diagonal de la secuencia de cumulantes de tercer orden y la secuencia de autocorrelación de la señal en la siguiente ecuación:

$$\sigma_w^2/\gamma_{3w} \sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}(\tau-i, \tau-i) = \sum_{i=0}^q b^2(i) r_y(\tau-i) \quad (4.5)$$

Esta ecuación se trata como un sistema lineal en $\epsilon b(i)$ y $b^2(i)$ ($i=1\dots q$), siendo $\epsilon' = \sigma_w^2/\gamma_{3w}$. Evaluando τ en (5.2) desde $\tau=-q\dots 2q$ se obtiene un sistema de $3q+1$ ecuaciones y $2q$ incógnitas que puede resolverse por mínimos cuadrados. Los coeficientes estimados del modelo MA se obtienen combinando $\epsilon' \hat{b}(i)/\epsilon'$ y $\hat{b}^2(i)$. Para ello se guarda el signo de $\hat{b}(i)$ y se toma como amplitud estimada la expresión $(\frac{1}{2} (\hat{b}(i))^2 + \hat{b}^2(i))^{1/2}$.

Por otra parte, Tugnait desarrolló otro método lineal denominado "método T" basado en la siguiente ecuación que relaciona correlaciones y "slices" de cumulantes de tercer orden fuera de la diagonal [TUG90,ecuación (10)]:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}(i-\tau, q) = \epsilon b(q) r_y(\tau) . \quad (4.6)$$

donde $\epsilon = \gamma_{3w} / \sigma_w^2$. Evaluando $\tau = -q \dots q$ en esta ecuación se obtiene un sistema de $2q+1$ ecuaciones y $q+1$ incógnitas ($\epsilon b(q) b(1) \dots b(q)$) que puede resolverse usando mínimos cuadrados. Cuando haya ruido Gaussiano blanco contaminando la señal se prescinde en la ecuación de los términos de $r_y(\tau=0)$.

Entre estos dos métodos lineales, el método GM da buenos resultados aunque presenta ciertas deficiencias. Cuando ruido blanco contamine la señal, se prescinde del término $r_y(0)$ y el sistema de ecuaciones dado por (4.5) se convierte en un sistema indeterminado, con más incógnitas que ecuaciones. Además, la división por ϵ' efectuada en $\hat{b}(i)/\epsilon'$ da lugar a un cierto mal condicionamiento del algoritmo que puede dar lugar a estimaciones erróneas si el valor obtenido de ϵ' es muy pequeño. Para aliviar estos problemas, Friedlander y Porat [FRI90] reparametrizaron la ecuación GM, tratando como incógnitas ($b(1) \dots b(q) \epsilon b^2(1) \dots \epsilon b^2(q)$), y Tugnait [TUG91] propuso aumentar estas ecuaciones con aquellas propuestas en el "método T", de forma que el par de ecuaciones resultante es de la forma:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}(i-\tau, 0) = \epsilon \sum_{i=0}^q b^2(i) r_y(i-\tau) \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}(i-\tau, q) = \epsilon b(q) r_y(\tau) , \quad (4.8)$$

Este método, denominado en la bibliografía "modificación al método GM reformulado", y que nosotros notaremos como GMT, ha demostrado su potencia [TUG91] en la determinación de parámetros de sistemas MA. Cuando no hay ruido contaminando la señal, evaluando $\tau = -q \dots 2q$ en (4.7) y $\tau = -q \dots q$ (4.8) se obtiene un sistema de $5q+2$ ecuaciones y $2q+1$ incógnitas ($b(1) \dots b(q)$ $\epsilon b(q)$ $\epsilon b^2(1) \dots \epsilon b^2(q)$). Cuando haya ruido blanco contaminando la señal, se prescinde de aquellas ecuaciones que contengan el término $r_y(0)$. Una posterior modificación a este método ha sido propuesta en [ALS93], en el que se evalúa la ecuación (4.7) no sólo sobre la "slice" diagonal, sino sobre toda la región de soporte para un modelo MA de orden q . Este procedimiento, al usar mucha más información de la estadística de la señal, mejora la estimación de parámetros del sistema comparada con el uso de las ecuaciones (4.7) y (4.8) que usan únicamente la "slice" diagonal de cumulantes de tercer orden.

Más recientemente se han propuesto métodos que usan sólo cumulantes de tercer orden sobre la última slice del dominio de soporte para un modelo MA(q) (slice q). Utilizando la relación $c_{3y}(q,i) = \gamma_{3w} b(i)b(q)$ para un modelo MA(q), se obtiene que:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}^2(q,k+i) = \gamma_{3w} b^2(q) c_{3y}(k,k) \quad |k| \leq q \quad (4.9)$$

Esta ecuación fue inicialmente sugerida en [SCA92] y finalmente implementada en [NAN94] en tres algoritmos. Estos tres algoritmos diferían en el número de incógnitas usadas al evaluar la ecuación (4.9) para $k = -q \dots q$. Del exhaustivo estudio llevado a cabo en [NAN94] se desprende que el mejor comportamiento surge cuando la ecuación (4.9) representa un conjunto de $2q+1$ ecuaciones y $q+1$ incógnitas ($b(1), b(2), \dots, b(q), \gamma_{3w} b^2(q)$). Al usar únicamente estadística de tercer orden, esta ecuación tiene la ventaja de ser teóricamente insensible a cualquier clase de ruido Gaussiano independientemente de su contenido espectral. Sin embargo, en las simulaciones presentadas en [NAN94] no aparece

estudiado este caso, limitándose a mostrar el caso de ruido Gaussiano blanco. La aplicación a ruido Gaussiano coloreado aparece en [ZHA94], donde la ecuación (4.9) se obtiene de una relación general para cumulantes de orden k -ésimo ($k > 3$). Los resultados de simulación presentados en [ZHA94] muestran la ventaja de este método sobre el GMT en ambientes de ruido coloreado.

Otro método lineal que no requiere el uso de la función de autocorrelación de la señal de salida es el método bicepstral propuesto por Pan y Nikias [PAN88]. Este método calcula, resolviendo por mínimos cuadrados una ecuación [PAN88] que implica los cumulantes de tercer orden de la señal, los coeficientes del cepstrum complejo. A partir de los valores del cepstrum se puede reconstruir la respuesta impulso de la señal, que en el caso de sistemas MA equivale a los coeficientes del modelo. Este método tiene la ventaja de no requerir una estimación previa del orden del modelo, aunque el método no es aplicable a señales de banda limitada (el cepstrum no está definido) o para señales distribuidas simétricamente.

Por último, otro método lineal ha sido propuesto recientemente por Fonollosa y Vidal [FON93]. Este método usa una combinación lineal causal de "slices" de cumulantes de órdenes diferentes para obtener la respuesta impulso del sistema. Las "slices" de cumulantes del sistema se agrupan en una ecuación matricial cuya solución de norma mínima permite obtener los coeficientes de la expansión lineal causal de "slices". A partir de estos coeficientes se obtiene la respuesta impulso del sistema. Este método tiene la ventaja de no necesitar un conocimiento a priori del orden del modelo siempre que se usen técnicas robustas como la descomposición en valores singulares (SVD) para obtener la solución de norma mínima. Además, dicho orden puede estimarse a partir del rango de la matriz de cumulantes mediante la SVD. Al combinar en una única matriz todas las "slices" de cumulantes de la señal de órdenes arbitrarios, este método puede usar toda la

información de la estadística de la señal de salida, al igual que hacía el método propuesto en [ALS93] para el caso de segundo y tercer orden.

IV-3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA E HIPÓTESIS DE PARTIDA.

Consideremos un proceso aleatorio ergódico, estacionario de orden k -ésimo, $x(t)$, que puede considerarse como la salida de un sistema lineal MA causal, invariante en el tiempo (LTI) (posiblemente de fase no mínima) con coeficientes $b(i)$, $i=0\dots q$. Por lo tanto, la serie temporal viene descrita por la siguiente ecuación:

$$x(n) = \sum_{i=0}^q b(i) w(n-i), \quad (4.10)$$

siendo q el orden del sistema MA y $w(n)$ el proceso aleatorio de excitación del modelo. Generalmente, la señal de salida está contaminada con ruido aditivo $v(n)$. En consecuencia, la señal observada o medida $y(n)$ viene especificada por la siguiente ecuación:

$$y(n) = x(n) + v(n). \quad (4.11)$$

El problema que nos proponemos abordar es determinar los parámetros del sistema, o respuesta impulso $b(i)$, $i=0\dots q$ a partir solamente de la señal de salida observada $y(n)$. Además, en el capítulo siguiente, trataremos de determinar el orden del modelo q usando un planteamiento basado en estadística de órdenes superiores.

En las derivaciones del resto del capítulo, asumimos las siguientes hipótesis de partida:

H1) La secuencia de excitación del modelo $w(n)$ no es accesible (la identificación se lleva a cabo usando únicamente la señal de salida), y es un proceso aleatorio no Gaussiano de media cero, independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.) con al menos $0 < \gamma_{kw} < \infty$ y $0 < \gamma_{k-1w} < \infty$, $k > 3$, ó $0 < \gamma_{kw} < \infty$, siendo γ_{kw} el cumulante de orden k -ésimo de la variable aleatoria $w(n)$.

H2) El ruido aditivo $v(n)$ es un proceso Gaussiano, independiente e idénticamente distribuido (blanco o coloreado), independiente de la señal de entrada $w(n)$, y en consecuencia de la salida $x(n)$.

H3) El sistema MA es causal e invariante en el tiempo, posiblemente de fase no mínima, con $b(q) \neq 0$ y $b(0) = 1$. La última condición fija la ambigüedad inherente en el factor de escala de la respuesta impulso del sistema.

Estas hipótesis, y entre ellas, que la serie temporal es no Gaussiana, son realistas como se estableció en la introducción a esta segunda parte. Debe también tenerse en cuenta que la hipótesis contenida en H1) de que el proceso aleatorio de excitación $w(n)$ es independiente e idénticamente distribuido es más fuerte de lo que se necesita para obtener las derivaciones posteriores, y que basta imponer que la señal de entrada tenga un poliespectro plano sobre el rango de frecuencia de la función de transferencia.

Para la serie de salida del sistema MA, los cumulantes de salida de orden k -ésimo puede denotarse como $c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$ debido a la estacionariedad del proceso aleatorio. Además, debido al hecho de que los cumulantes de orden k -ésimo, con $k > 2$, se anulan para un proceso Gaussiano, tal y como $v(n)$ (hipótesis H2), llegamos a que:

$$c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) = c_{kx}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) \quad k \geq 3. \quad (4.12)$$

Basándonos en esta observación podemos usar indistintamente c_{ky} y c_{kx} para denotar la secuencia de cumulantes de la salida del sistema. Precisamente es esta insensibilidad de los cumulantes de salida al ruido Gaussiano de función de autocorrelación desconocida que contamine la señal lo que hace atractivo el uso de estadística de órdenes superiores incluso para el caso de sistemas de fase mínima.

Por otra parte, teniendo en cuenta la hipótesis H1) para $w(n)$, los cumulantes de orden k -ésimo del proceso de excitación $c_{kw}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$ son $\gamma_{kw} \delta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$. Teniendo este hecho en cuenta, y bajo las hipótesis H1-H3, la secuencia de cumulantes de salida de orden k -ésimo pueden expresarse en términos de los coeficientes del sistema MA por la formula de Brillinger-Rosenblatt [BRI67a]:

$$c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) = \gamma_{kw} \sum_{i=0}^q b(i) b(i+\tau_1) \dots b(i+\tau_{k-1}). \quad (4.13)$$

Tomando la transformada Z de dimensión $k-1$, la ecuación (4.13) se transforma en:

$$C_{ky}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) = \gamma_{kw} B(z_1) B(z_2) \dots B(z_{k-1}) B((z_1 z_2 \dots z_{k-1})^{-1}), \quad (4.14)$$

donde $B(z)$ es la función de transferencia del sistema y $C_{ky}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1})$ es el poliespectro de orden k -ésimo.

IV-4. RELACIONES GENERALES ENTRE LOS POLIESPECTROS DE ORDENES k Y $k-1$ -ÉSIMOS.

Basándonos en las hipótesis de la sección IV-3, vamos a establecer una serie de ecuaciones generales que relacionen los poliespectros de dos órdenes consecutivos k y $k-1$

($k > 3$) para un proceso MA(q). Estas relaciones entre los cumulantes del proceso y los coeficientes del modelo MA podrán ser útiles para establecer un sistema de ecuaciones lineales de cuya solución de mínimos cuadrados podrán obtenerse los parámetros del modelo. Asimismo se encontrarán relaciones entre la "slice" q de cumulantes de orden arbitrario del proceso MA y sus coeficientes, ecuaciones que son útiles cuando se quiere recuperar los parámetros del sistema usando únicamente los cumulantes de orden k [RUI95b].

A. Primer conjunto de ecuaciones.

Consideremos la señal de salida $y(n)$ definida en la sección anterior en la ecuación (4-11), con γ_{kw} y γ_{k-1w} no nulos ($k > 3$), y las siguientes secuencias de cumulantes:

$$\begin{aligned} c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) \\ c_{k-1y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}) \delta(\tau_{k-1}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

definidas sobre el dominio de soporte de un sistema MA(q). Teniendo en cuenta la ecuación (4.14), la transformada Z de dimensión $k-1$ de las secuencias anteriores puede expresarse como:

$$C_{ky}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) = \gamma_{kw} B(z_1) B(z_2) \dots B(z_{k-1}) B((z_1 z_2 \dots z_{k-1})^{-1}) \quad (4.16)$$

$$C_{k-1y}(z_1, z_2, \dots, z_{k-2}) = \gamma_{k-1w} B(z_1) B(z_2) \dots B(z_{k-2}) B((z_1 z_2 \dots z_{k-2})^{-1}). \quad (4.17)$$

Combinando las ecuaciones (4.16) y (4.17), obtenemos la siguiente relación que liga los poliespectros de órdenes k y $k-1$ -ésimo:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{B}((z_1, z_2, \dots, z_{k-2})^{-1}) \mathbf{C}_{ky}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) = \\
 & = \frac{\gamma_{kw}}{\gamma_{k-1w}} \mathbf{B}(z_{k-1}) \mathbf{B}((z_1, z_2, \dots, z_{k-1})^{-1}) \mathbf{C}_{k-1y}(z_1, z_2, \dots, z_{k-2}).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

En el dominio del tiempo, la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^q \mathbf{b}(i) \mathbf{c}_{ky}(i-\tau_1, i-\tau_2, \dots, i-\tau_{k-2}, -\tau_{k-1}) = \\
 & = \epsilon \sum_{i=0}^q \mathbf{b}(i) \mathbf{b}(i-\tau_{k-1}) \mathbf{c}_{k-1y}(i-\tau_1, i-\tau_2, \dots, i-\tau_{k-2}),
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde $\epsilon = \gamma_{kw}/\gamma_{k-1w}$.

Resultado 1. Imponiendo $\tau_{k-1}=0$ y $\tau_{k-1}=-q$ en la ecuación (4.19), obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\tau_{k-1}=0 \Rightarrow \sum_{i=0}^q \mathbf{b}(i) \mathbf{c}_{ky}(i-\tau_1, i-\tau_2, \dots, 0) = \epsilon \sum_{i=0}^q \mathbf{b}^2(i) \mathbf{c}_{k-1y}(i-\tau_1, i-\tau_2, \dots, i-\tau_{k-2}) \tag{4.20}$$

$$\tau_{k-1}=-q \Rightarrow \sum_{i=0}^q \mathbf{b}(i) \mathbf{c}_{ky}(i-\tau_1, i-\tau_2, \dots, q) = \epsilon \mathbf{b}(q) \mathbf{c}_{k-1y}(-\tau_1, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2}). \tag{4.21}$$

Estas ecuaciones pueden considerarse como la generalización de la ecuaciones de GM (4.5) reparametrizada y de la ecuación lineal de Tugnait (4.6) al dominio de los cumulantes de órdenes k y $k-1$ -ésimo. En efecto, si imponemos $k=3$ en (4.20) y (4.21), y asumimos que no hay ningún tipo de ruido que contamine la salida del sistema, podemos reescribir, usando la notación estándar para la secuencia de autocorrelación $r_y(\tau)$

= $c_2(\tau)$, las ecuaciones anteriores como:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}(i-\tau, 0) = \epsilon \sum_{i=0}^q b^2(i) r_y(i-\tau) \quad (4.22)$$

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}(i-\tau, q) = \epsilon b(q) r_y(\tau) , \quad (4.23)$$

que coinciden con las ecuaciones (4.7) y (4.8) del denominado método GMT. El problema de estas ecuaciones es que son sensibles a la presencia de ruido Gaussiano de secuencia de autocorrelación desconocida, ya que usan la secuencia de autocorrelación de la salida del sistema. Cuando exista ruido Gaussiano coloreado contaminando la señal de salida sería útil usar únicamente cumulantes de ordenes superiores ($k > 2$), usando la propiedad de insensibilidad de los cumulantes a cualquier ruido Gaussiano, como haremos en la siguiente sección.

B. Segundo conjunto de ecuaciones.

Junto a la ecuación (4.19) puede obtenerse un conjunto de ecuaciones diferente que relacione la estadística de orden k y $k-1$ -ésimo. Para obtener este nuevo conjunto, consideremos las secuencias:

$$\begin{aligned} s_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) &= c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) \delta(\tau_k) \\ s_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) &= c_{k-1y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}) \delta(\tau_{k-1}) \delta(\tau_k - \tau_{k-2}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

En el dominio de la transformada Z de dimensión k , el poliespectro de orden k -ésimo de las secuencias anteriores resulta en:

$$\begin{aligned}
 S_1(z_1, z_2, \dots, z_k) &= C_{ky}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) = \gamma_{kw} B(z_1) B(z_2) \dots B(z_{k-1}) B((z_1 z_2 \dots z_{k-1})^{-1}) \\
 S_2(z_1, z_2, \dots, z_k) &= C_{k-1y}(z_1, z_2, \dots, z_{k-2}, z_k) = \\
 &= \gamma_{k-1w} B(z_1) B(z_2) \dots B(z_{k-3}) B(z_k z_{k-2}) B((z_1 z_2 \dots z_k)^{-1})
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Combinando las ecuaciones dadas en (4.25) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{k-1w} B(z_k z_{k-2}) B((z_1 z_2 \dots z_{k-1} z_k)^{-1}) C_{ky}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) &= \\
 = \gamma_{kw} B(z_{k-2}) B(z_{k-1}) B((z_1 z_2 \dots z_{k-1})^{-1}) C_{k-1y}(z_1, z_2, \dots, z_{k-2}, z_k).
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Tomando la transformada Z inversa de dimensión k en ambos miembros de (4.26), aparece la siguiente ecuación en el dominio del tiempo que relaciona las secuencias de cumulantes de órdenes k y k-1-ésimos con los parámetros del modelo:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{k-1w} \sum_{i=0}^q b(i) b(\tau_k + i) c_{ky}(\tau_1 + i, \tau_2 + i, \dots, \tau_{k-2} - \tau_k, \tau_{k-1}) &= \\
 \gamma_{kw} \sum_{i=0}^q b(i) b(\tau_{k-2} - \tau_k + i) b(\tau_{k-1} + i) c_{k-1y}(\tau_1 + i, \tau_2 + i, \dots, \tau_{k-3} + i, \tau_k)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Resultado 2. Los coeficientes del sistema MA pueden obtenerse a partir de la familia de ecuaciones que surge de (4.27) imponiendo $\tau_k = \tau_{k-2} = \tau_{k-1} = 0$ ó $\tau_k = \tau_{k-2} = q$ $\tau_{k-1} = 0$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \tau_k = \tau_{k-2} = \tau_{k-1} = 0 \quad \frac{\gamma_{k-1w}}{\gamma_{kw}} \sum_{i=0}^q b^2(i) c_{ky}(\tau_1 + i, \tau_2 + i, \dots, 0, 0) &= \\
 = \sum_{i=0}^q b^3(i) c_{k-1y}(\tau_1 + i, \tau_2 + i, \dots, \tau_{k-3} + i, 0)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \tau_k = \tau_{k-2} = q \quad \tau_{k-1} = 0 \quad \frac{\gamma_{k-1w}}{\gamma_{kw}} b(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, 0, 0) = \\ = \sum_{i=0}^q b^3(i) c_{k-1y}(\tau_1 + i, \tau_2 + i, \dots, \tau_{k-3} + i, q). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Este par de ecuaciones definido para órdenes $k > 2$ tiene, al igual que comentábamos en las ecuaciones del apartado anterior, la ventaja de ser insensible al ruido Gaussiano coloreado al usar únicamente cumulantes del proceso de salida.

C. Tercer conjunto de ecuaciones basadas en la última "slice" horizontal ("slice" q).

Varias ecuaciones pueden obtenerse a partir de la última "slice" horizontal de los cumulantes de órdenes k y $k-1$ -ésimo ó únicamente cumulantes de orden k -ésimo. Estas relaciones surgen de la formula de Brillinger-Rosenblatt (4.13) que relaciona los cumulantes de salida de un sistema MA excitado por una secuencia independiente e idénticamente distribuida no-Gaussiana con sus coeficientes. Ya que $b(i) = 0$ para $i > q$, evaluando el último argumento de los cumulantes de salida para $\tau = q$ ("slice" q) obtenemos un único término no nulo en la sumatoria dada por la formula de Brillinger-Rosenblatt, de forma que la última "slice" horizontal (multidimensional) para los cumulantes de órdenes k y $k-1$ -ésimo viene dada por

$$c_{ky}(\tau_1, \dots, \tau_{k-2}, q) = \gamma_{kw} b(0) b(\tau_1) \dots b(\tau_{k-2}) b(q) \quad (4.30)$$

$$c_{k-1y}(\tau_1, \dots, \tau_{k-3}, q) = \gamma_{k-1w} b(0) b(\tau_1) \dots b(\tau_{k-3}) b(q), \quad (4.31)$$

obtenida haciendo $\tau_{k-2} = q$ y $\tau_{k-1} = q$ respectivamente en la fórmula de Brillinger-Rosenblatt.

Nuestro interés es encontrar una relación entre las últimas "slices" horizontales de cumulantes de órdenes k y $k-1$ -ésimo (o equivalentemente cumulantes de órdenes k y $k+1$ -ésimo), o una relación entre la "slice" q de cumulantes de un orden dado. Para lograr este propósito, elevaremos la secuencia $c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$ a diferentes potencias y buscaremos una ecuación que la relacione con la misma "slice q " de cumulantes de orden k -ésimo o con la "slice" q de cumulantes de orden $k-1$ -ésimo $c_{k-1y}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$. Siguiendo este procedimiento hay muchas posibilidades y ecuaciones posibles, pero los siguientes resultados recogen los casos más útiles para las posteriores aplicaciones al caso práctico de tercer y cuarto orden:

Resultado 3. Casos de $c_{k-1}^{k-1}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$ y $c_{k-1}^{k-2}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$.

Las siguientes ecuaciones para la última "slice" horizontal de cumulantes de orden $k-1$ -ésimo son válidas:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{k-1y}^{k-1}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \frac{\gamma_{k-1w}^{k-1}}{\gamma_{kw}} b^{k-1}(\tau_2) \dots b^{k-1}(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1) \quad (4.32)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{k-1y}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \frac{\gamma_{k-1w}^{k-2}}{\gamma_{kw}} b^{k-2}(\tau_2) \dots b^{k-2}(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0)$$

Demostración.- Tomando la potencia $(k-1)$ -ésima en (4.31) obtenemos:

$$c_{k-1y}^{k-1}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{k-1w}^{k-1} b^{k-1}(\tau_1+i) b^{k-1}(\tau_2) \dots b^{k-1}(q) \quad 0 \leq \tau_1+i \leq q. \quad (4.33)$$

Multiplicando ambos miembros de (4.32) por $b(i)$ y sumando sobre el intervalo no nulo de $b(i)$ ($i=0 \dots q$) obtenemos:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{k-1y}^{k-1}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{k-1w}^{k-1} b^{k-1}(\tau_2) \dots b^{k-1}(q) \sum_{i=0}^q b(i) b^{k-1}(\tau_1+i). \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.13), la sumatoria del segundo miembro de (4.34) resulta ser la secuencia $c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1)/\gamma_{kw}$, lo cual nos permite obtener la primera ecuación en (4.31).

De forma similar podemos demostrar la segunda ecuación en (4.31). Si tomamos la potencia de orden $k-2$ en (4.31) y sustituimos τ_i por τ_{1+i} obtenemos:

$$c_{k-1y}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{k-1w}^{k-2} b^{k-2}(\tau_1+i) b^{k-2}(\tau_2) \dots b^{k-2}(q) \quad 0 \leq \tau_1+i \leq q. \quad (4.35)$$

Multiplicando ambos miembros por $b^2(i)$ y tomando la sumatoria desde $i=0$ a q tenemos:

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{k-1y}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{k-1w}^{k-2} b^{k-2}(\tau_2) \dots b^{k-2}(q) \sum_{i=0}^q b^2(i) b^{k-2}(\tau_1+i). \quad (4.36)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.13), la expresión anterior puede escribirse como:

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{k-1y}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{k-1w}^{k-2} b^{k-2}(\tau_2) \dots b^{k-2}(q) \frac{c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0)}{\gamma_{kw}}, \quad (4.37)$$

lo cual completa la demostración.

Resultado 4. Caso $c_k^{k-1}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$.

La "slice" q y la "slice" diagonal de la secuencia de cumulantes de orden k -ésimo están relacionados por la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{ky}^{k-1}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-2} b^{k-1}(\tau_2) \dots b^{k-1}(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1). \quad (4.38)$$

Demostración.- La demostración es similar a la del Resultado 3 y se omite por brevedad.

Resultado 5. Caso $c_k^{k-2}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$.

Dos ecuaciones que relacionan la "slice" q de la secuencia de cumulantes de orden k -ésimo con la "slice" diagonal de la secuencia c_{k-1y} o la "slice" 0 de la secuencia c_{ky} se verifican:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{ky}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-2}}{\gamma_{k-1w}} b^{k-2}(\tau_2) \dots b^{k-2}(q) c_{k-1y}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1) \quad (4.39)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{ky}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-3} b^{k-2}(\tau_2) \dots b^{k-2}(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0). \quad (4.40)$$

Demostración.- La demostración es análoga a la del Resultado 3.

Resultado 6. Caso $c_k^{k-3}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$.

El siguiente par de ecuaciones relaciona la potencia de orden $k-3$ de la "slice" q de la secuencia de cumulantes de orden k -ésimo con la secuencia de cumulantes de orden $k-1$ -ésimo c_{k-1} :

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_1+i, \tau_3, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-3}}{\gamma_{k-1w}} b^{k-3}(\tau_3) \dots b^{k-3}(q) c_{k-1y}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1) \quad (4.41)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-3}}{\gamma_{k-1w}} b^{k-3}(\tau_2) \dots b^{k-3}(q) c_{k-1y}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0)$$

De forma análoga obtenemos la siguiente ecuación que relaciona únicamente los cumulantes de orden k-ésimo:

$$\sum_{i=0}^q b^3(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}, q) = \gamma_{kw}^{k-4} b^{k-3}(\tau_2) \dots b^{k-3}(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0, 0) \quad (4.42)$$

Otra relación útil entre cumulantes de orden k-ésimo y orden 2k-4-ésimo aparece en la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_1+i, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-3}}{\gamma_{2k-4}} b^{k-3}(\tau_3) \dots b^{k-3}(q) c_{2k-4y}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0) \quad (4.43)$$

Demostración.- Demostraremos, a título de ejemplo las dos últimas relaciones dadas por las ecuaciones (4.42) y (4.43). La prueba de las ecuaciones restantes es similar y se omite por brevedad.

Para demostrar la primera ecuación, elevamos a la potencia (k-3)-ésima la relación (4.31):

$$c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-3} b^{k-3}(\tau_1+i) b^{k-3}(\tau_2) \dots b^{k-3}(q) \quad 0 \leq \tau_1+i \leq q. \quad (4.44)$$

Si multiplicamos ambos miembros de (4.44) por $b^3(i)$ y sumamos desde $i=0 \dots q$ obtenemos:

$$\sum_{i=0}^q b^3(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-3} b^{k-3}(\tau_2) \dots b^{k-3}(q) \sum_{i=0}^q b^3(i) b^{k-3}(\tau_1+i). \quad (4.45)$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Brillinger-Rosenblatt, la sumatoria del segundo miembro de (4.45) no es más que la secuencia $c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0, 0) / \gamma_{kw}$, con lo cual se obtiene la ecuación (4.42).

Análogamente se puede demostrar la ecuación (4.43). Para ello evaluamos la secuencia de cumulantes de orden k -ésimo $c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, q)$ para $\tau_1 = \tau_2 = \tau_1 + i$ y elevamos dicha secuencia, usando la expresión dada en (4.31), a la potencia de orden $k-3$:

$$c_{ky}^{k-3}(\tau_1 + i, \tau_1 + i, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-3} b^{k-3}(\tau_1 + i) b^{k-3}(\tau_1 + i) \dots b^{k-3}(q) \quad 0 \leq \tau_1 + i \leq q. \quad (4.46)$$

Multiplicando ambos miembros por $b^2(i)$ y sumamos desde $i=0$ a q obtenemos:

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1 + i, \tau_1 + i, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-3} b^{k-3}(\tau_3) \dots b^{k-3}(q) \sum_{i=0}^q b^2(i) b^{2k-6}(\tau_1 + i). \quad (4.47)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.13), la expresión anterior puede escribirse como:

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1 + i, \tau_1 + i, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-3} b^{k-3}(\tau_3) \dots b^{k-3}(q) \frac{c_{2k-4y}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0)}{\gamma_{2k-4w}}, \quad (4.48)$$

lo cual completa la demostración.

Comentario 1. Los resultados anteriores establecen un conjunto de ecuaciones que relacionan la "slice" q con otras "slices" de cumulantes de órdenes k ó $k-1$ -ésimo para un sistema $MA(q)$. Estas ecuaciones, junto a las obtenidas en las anteriores subsecciones, pueden utilizarse para obtener los parámetros del modelo MA . Sin embargo, el conjunto de ecuaciones que relaciona la "slice" q de la secuencias de cumulantes c_{ky} y c_{k-1y} es

mucho más amplio que el mostrado en los resultados 3-6. Los casos recogidos en estos resultados son aquellos que serán útiles para el caso de tercer y cuarto orden, que será el caso que permitirá una más fácil implementación. Como ejemplo de otras relaciones que impliquen la "slice" q de cumulantes de orden k están las siguientes:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{ky}^{k-1}(\tau_1+i, \tau_1+i, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-1}}{\gamma_{2k-1w}} b^{k-1}(\tau_3) \dots b^{k-1}(q) c_{2k-1y}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1) \quad (4.49)$$

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{ky}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_1+i, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-2}}{\gamma_{2k-3}} b^{k-2}(\tau_3) \dots b^{k-2}(q) c_{2k-3y}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1) \quad (4.50)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{ky}^{k-2}(\tau_1+i, \tau_1+i, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-2}}{\gamma_{2k-2}} b^{k-2}(\tau_3) \dots b^{k-2}(q) c_{2k-2y}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0) \quad (4.51)$$

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_1+i, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-3}}{\gamma_{2k-5}} b^{k-3}(\tau_3) \dots b^{k-3}(q) c_{2k-5y}(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1) \quad (4.52)$$

$$\sum_{i=0}^q b^3(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-3}}{\gamma_{kw}} b^{k-3}(\tau_2) \dots b^{k-3}(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0, 0) \quad (4.53)$$

$$\sum_{i=0}^q b^3(i) c_{ky}^{k-3}(\tau_1+i, \tau_1+i, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-3}}{\gamma_{2k-3w}} b^{k-3}(\tau_3) \dots b^{k-3}(q) c_{2k-3y}(\tau_1, \tau_1, \dots, 0, 0) \quad (4.54)$$

En general, tanto estas últimas ecuaciones como las expresadas en los resultados 3-6 pueden reescribirse de varias formas, elevando tanto los cumulantes como los parámetros

incógnitas a diferentes potencias. Por ejemplo, la ecuación dada en el resultado 4 puede reescribirse como:

$$\sum_{i=0}^q b^{l(i)} c_{ky}^{k-1}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \gamma_{kw}^{k-1-1} b^{k-1}(\tau_2) \dots b^{k-1}(q) c_{ky}(\tau_1, \tau_1/0, \dots, \tau_1/0), \quad (4.55)$$

donde el argumento de la secuencia de cumulantes de orden k del segundo miembro de (4.55) contiene $l-1$ ceros, y l toma valores en el intervalo $1 \dots k-1$. De la misma forma pueden obtenerse ecuaciones más generales de las que se deduzcan como casos particulares algunas expuestas en los resultados 3-6. Así, la ecuación

$$\sum_{i=0}^q b^{l(i)} c_{ky}^{k-m}(\tau_1+i, \tau_2, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-m}}{\gamma_{(k-m+1)w}} b^{k-m}(\tau_2) \dots b^{k-m}(q) c_{(k-m+1)y}(\tau_1, \tau_1/0, \dots, \tau_1/0), \quad (4.56)$$

generaliza las ecuaciones (4.32), (4.38)-(4.42) y (4.53). En (4.56) el argumento del cumulante de orden $k-m+l$ -ésimo contiene $l-1$ ceros, siendo l y m enteros, con $l=1 \dots k-1$ y $m=0 \dots k-1$, con $l < m$ para evitar casos equivalentes. De la misma forma la ecuación

$$\sum_{i=0}^q b^{l(i)} c_{ky}^{k-m}(\tau_1+i, \tau_1+i, \dots, q) = \frac{\gamma_{kw}^{k-m}}{\gamma_{(2k-2m+1)w}} b^{k-m}(\tau_3) \dots b^{k-m}(q) c_{(2k-2m+1)y}(\tau_1, \tau_1/0, \dots, \tau_1/0), \quad (4.57)$$

generaliza las ecuaciones (4.43) y (4.49)-(4.52). En (4.57) l y m toman los mismos valores que en (4.56), aunque $l < 2m$ para evitar casos equivalentes.

IV-5. RELACIONES ESPECIFICAS ENTRE EL BIESPECTRO Y EL TRIESPECTRO.

Todas las ecuaciones obtenidas en la sección IV-4 relacionan la secuencia de cumulantes de la señal de salida con los parámetros del sistema MA. Cuando la señal de salida está contaminada con ruido Gaussiano coloreado, las ecuaciones de la sección anterior serán útiles al implicar únicamente los cumulantes del proceso y no usar la secuencia de autocorrelación del sistema. Los cumulantes más simples de estimar son los de tercer y cuarto orden, es por ello que el procedimiento más útil para recobrar los coeficientes del sistema será aquel que use cumulantes de tercer y cuarto orden. En esta sección vamos a explicitar a partir de las relaciones generales anteriores el caso particular de tercer y cuarto orden.

a) Procesos no distribuidos simétricamente.

Cuando la señal de excitación sea un proceso no distribuido simétricamente, como por ejemplo una distribución exponencial o de Rayleigh, el biespectro de la señal de salida será no nulo y podemos usar relaciones que impliquen cumulantes de tercer orden. Las siguientes proposiciones recogen las ecuaciones que pueden aplicarse a este tipo de procesos, obtenidas particularizando al caso de tercer y cuarto orden las relaciones generales de la sección IV-4 [RUI95b]:

Proposición 1. Consideremos la señal de salida $y(n)$ definida en la ecuación (4.11). Bajo las hipótesis H1-H3 con k fijado a 4, se verifican las siguientes relaciones entre las secuencias de cumulantes de tercer y cuarto orden de la señal de salida:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}(\tau_1-i, \tau_2-i, l) = \epsilon \sum_{i=0}^q b^2(i) c_{3y}(\tau_1-i, l) \quad (4.58)$$

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}(i-\tau_1, i-\tau_2, q) = \epsilon b(q) c_{3y}(-\tau_1, -\tau_2) , \quad (4.59)$$

Estas ecuaciones se obtienen evaluando $k = 4$ en (4.21) y (4.22) y usando las propiedades de simetría de los cumulantes. En (4.58) y (4.59), $\epsilon = \gamma_4/\gamma_3$, y l toma valores en el intervalo desde $-q$ a q , representando l la "slice" específica utilizada.

Comentario 2. El conjunto de ecuaciones dados en (4.58) y (4.59) son insensibles al ruido Gaussiano aditivo de secuencia de autocorrelación desconocida, a diferencia de las ecuaciones (4.22) y (4.23) que usa el método GMT, el cual emplea información de segundo orden. Este hecho sugiere que mejores estimaciones de los parámetros pueden obtenerse con (4.58) y (4.59) cuando el ruido aditivo es Gaussiano coloreado. Por otra parte, otro hecho digno de tener en cuenta es que cuando la estadística real no se conoce, como ocurre en los casos prácticos, los cumulantes se han de estimar a partir de la secuencia de salida, y los cumulantes estimados de órdenes más altos presentan una mayor varianza que los de órdenes menores, por lo que el uso de las ecuaciones (4.22) y (4.23) es recomendable para señales gran fiabilidad (señales poco ruidosas). En el método GMT cuando el ruido aditivo es blanco, la secuencia de autocorrelación en $\tau=0$ puede eliminarse, pero cuando el ruido es coloreado, los parámetros estimados por dicho método están fuertemente afectadas por el ruido, y es en este caso cuando el uso de las ecuaciones (4.58) y (4.59) será útil.

Proposición 2.- Los cumulantes de salida de procesos MA obedecen, bajo las hipótesis H1-H3 con k fijado a 4, el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\gamma_{3w}}{\gamma_{4w}} \sum_{i=0}^q b^2(i) c_{4y}(\tau+i, 0, 0) = \sum_{i=0}^q b^3(i) c_{3y}(\tau+i, 0) \quad (4.60)$$

$$\frac{\gamma_{3w}}{\gamma_{4w}} b(q) c_{4y}(\tau, 0, 0) = \sum_{i=0}^q b^3(i) c_{3y}(\tau+i, q). \quad (4.61)$$

Comentario 3. El par de ecuaciones dadas por la Proposición 2 se obtiene imponiendo $k=4$ en las ecuaciones (4.28) y (4.29) y constituye una alternativa a las ecuaciones dadas por la Proposición 1. Pero, a diferencia de (4.58) y (4.59), éstas solamente hacen uso de la "slice" horizontal de los cumulantes de cuarto orden $c_{4y}(\tau, 0, 0)$ y las "slices" horizontales $c_{3y}(\tau, 0)$ y $c_{3y}(\tau, q)$ de cumulantes de tercer orden, mientras que (4.55) y (4.56) permiten un intervalo mayor de "slices" de cumulantes tanto de tercer como de cuarto orden. Otro hecho que debe tomarse en consideración es que cuando el par de ecuaciones (4.60) y (4.61) se trata como un sistema lineal con incógnitas $b^3(i)$ y $b^2(i)$, la respuesta impulso estimada del sistema se obtiene tomando la raíz cubica en la solución del sistema $b^3(i)$, lo cual puede hacer este procedimiento más sensible a errores en las secuencias de cumulantes estimados.

Proposición 3.- Bajo las hipótesis H1-H3, se verifican las siguientes relaciones que usan la "slice" q horizontal (multidimensional) de los cumulantes de salida de tercer y cuarto orden de un sistema MA(q):

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}^3(\tau+i, q) = \frac{\gamma_{3w}^3}{\gamma_{4w}} b^3(q) c_{4y}(\tau, \tau, \tau) \quad (4.62)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{3y}^2(\tau+i, q) = \frac{\gamma_{3w}^2}{\gamma_{4w}} b^2(q) c_{4y}(\tau, \tau, 0) \quad (4.63)$$

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}^2(\tau_1+i, \tau_2, q) = \frac{\gamma_{4w}^2}{\gamma_{3w}} b^2(\tau_2) b^2(q) c_{3y}(\tau_1, \tau_1) \quad (4.64)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{4y}(\tau_1+i, \tau_2, q) = \frac{\gamma_{4w}}{\gamma_{3w}} b(\tau_2) b(q) c_{3y}(\tau_1, 0) \quad (4.65)$$

Estas ecuaciones entre los cumulantes de tercer y cuarto orden se obtienen a partir de los resultados 3, 5 y 6 de la sección IV-4 imponiendo $k=4$. Específicamente, las ecuaciones (4.62) y (4.63) provienen del resultado 3, la ecuación (4.64) del resultado 5 y la ecuación (4.65) del resultado 6 haciendo $k=4$.

Proposición 4.- Para un proceso MA(q) bajo las hipótesis H1-H3 con $k=3$, se verifican las siguientes ecuaciones entre la "slice" q horizontal de los cumulantes de tercer orden y los coeficientes del sistema:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}^2(\tau+i, q) = \gamma_{3w} b^2(q) c_{3y}(\tau, \tau) \quad (4.66)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{3y}(\tau+i, q) = b(q) c_{3y}(\tau, 0). \quad (4.67)$$

La ecuación (4.66) proviene del resultado 4 y la ecuación (4.67) de la ecuación (4.40) del resultado 5 con k evaluado en 3. Nótese que (4.66) es idéntica a (4.9) usada en el método propuesto por A.K. Nandi [NAN94] y [ZHA94], y ha sido reobtenida aquí desde un planteamiento general.

b) Procesos distribuidos simétricamente.

Hay muchas distribuciones no Gaussianas de interés que aparecen en comunicaciones digitales o sismología que tienen cumulantes de cuarto orden no nulos pero cumulantes de tercer orden nulos. En estos casos el proceso aleatorio de excitación tiene una función densidad de probabilidad simétrica con $\gamma_{3w}=0$, como por ejemplo una distribución uniforme o de Laplace, y el biespectro de la señal de salida será nulo, por lo que sólo podemos usar relaciones que impliquen cumulantes de cuarto orden. La siguiente proposición recoge las ecuaciones que podemos usar cuando aparezcan este tipo de procesos de cumulantes de tercer orden nulos [RUI95d]:

Proposición 5.- Bajo las hipótesis H1-H3, con $k=4$, se verifican las siguientes ecuaciones entre la "slice" q horizontal de los cumulantes de salida de cuarto orden y los coeficientes de un sistema MA(q):

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}^3(\tau_1+i, \tau_2, q) = \gamma_{4w}^2 b^3(\tau_2) b^3(q) c_{4y}(\tau_1, \tau_1, \tau_1) \quad (4.68)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{4y}(\tau+i, \tau+i, q) = b(q) c_{4y}(\tau, \tau, 0) \quad (4.69)$$

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{4y}^2(\tau_1+i, \tau_2, q) = \gamma_{4w} b^2(\tau_2) b^2(q) c_{4y}(\tau_1, \tau_1, 0) \quad (4.70)$$

$$\sum_{i=0}^q b^3(i) c_{4y}(\tau_1+i, \tau_2, q) = b(\tau_2) b(q) c_{4y}(\tau_1, 0, 0). \quad (4.71)$$

La ecuación (4.68) proviene del resultado 4, la ecuación (4.69) de la relación (4.43) del resultado 6, la ecuación (4.70) se obtiene de la ecuación (4.40) del resultado 5 y la

ecuación (4.71) se obtiene evaluando (4.53) para $k=4$.

Comentario 6. Las relaciones dadas por las proposiciones 4 y 5 constituyen unos sistemas de ecuaciones que pueden usarse solas o en combinación con otras ecuaciones de las proposiciones anteriores para obtener los coeficientes del modelo MA. Ya que estas ecuaciones usan la estadística de la última "slice" horizontal de los cumulantes de tercer y/o cuarto orden, parece adecuado combinarlas con otras ecuaciones que usen un conjunto diferente de la estadística de la señal de salida. Un hecho que debe tenerse en cuenta cuando se trata de implementar estas ecuaciones en un algoritmo es que los cumulantes estimados de cuarto orden presentan mayor varianza que los de tercer orden, por lo que para procesos no distribuidos simétricamente conviene usar aquellas ecuaciones que exploten una mayor cantidad de términos relacionados con la estadística de tercer orden.

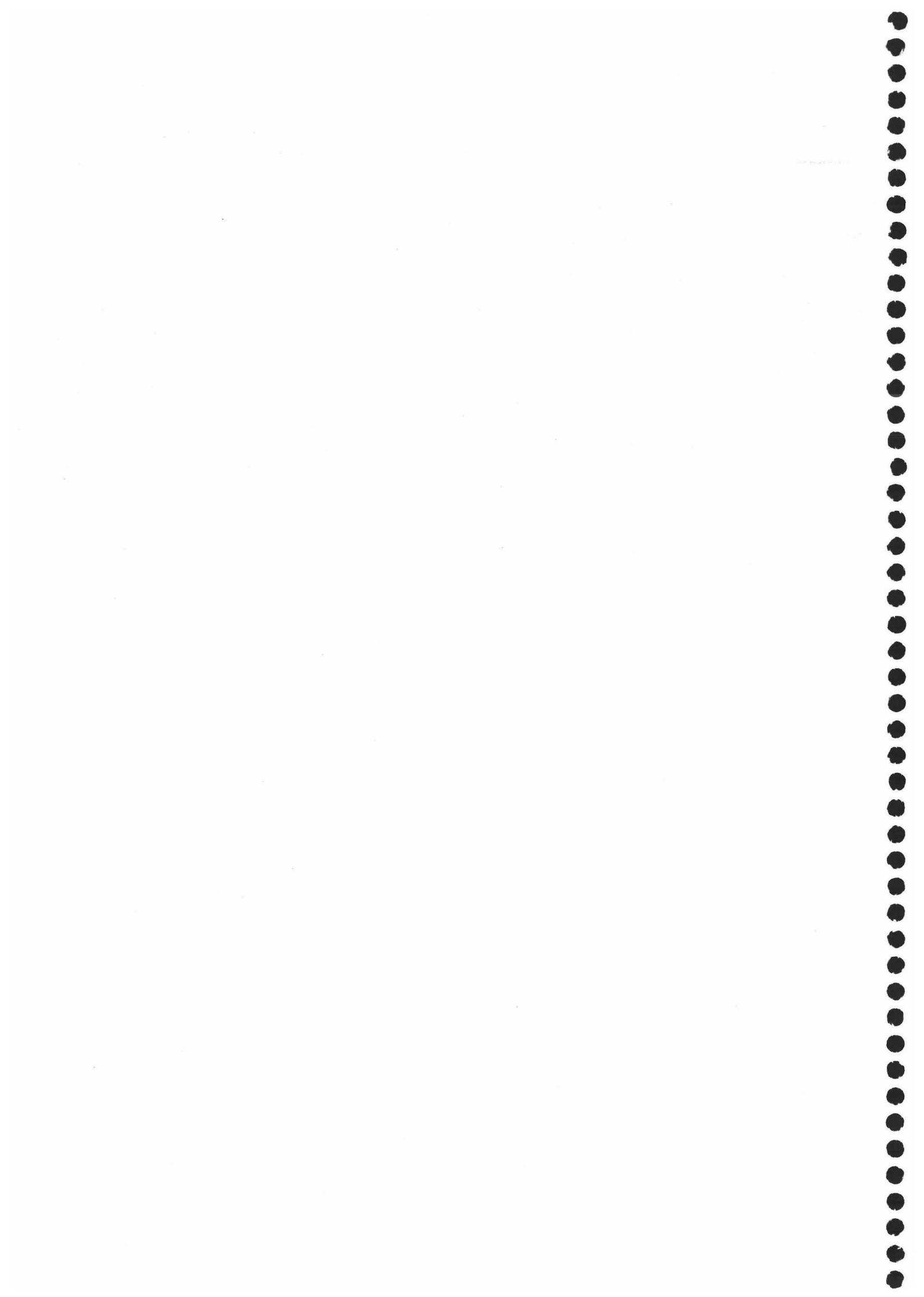
IV-6. CONCLUSIONES.

En este capítulo se han obtenido, a partir de unas relaciones generales entre los poliespectros de órdenes consecutivos arbitrarios, un conjunto de ecuaciones que relacionan los cumulantes del proceso de salida de un sistema MA con los coeficientes de dicho sistema. Estas relaciones implican tanto la "slice" q o última "slice" horizontal de la región de soporte de un sistema $MA(q)$, como otras "slices" multidimensionales en el espacio de cumulantes de orden arbitrario. La particularización de estas expresiones a los casos prácticos de tercer y cuarto orden da lugar a la obtención de sistemas de ecuaciones que han sido usados previamente en la bibliografía [GIA89a] [TUG90] [TUG91] [NAN94] [ZHA94] como a nuevas relaciones entre los cumulantes de tercer y cuarto orden que pueden ser útiles para obtener los coeficientes del sistema. Estas ecuaciones no implican la función de autocorrelación de los datos del proceso, por lo que

pueden ser útiles para recobrar los coeficientes del sistema cuando el proceso MA está contaminado con ruido Gaussiano coloreado de espectro de potencia desconocido. Las relaciones específicas entre la estadística de tercer y/o cuarto orden se recogen en las proposiciones 1-4, que serán el punto de partida para el establecimiento de algoritmos lineales basados en una solución de mínimos cuadrados en el capítulo siguiente.

CAPITULO V

IDENTIFICACION DE PROCESOS MA.
ALGORITMOS Y RESULTADOS.



V-1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se han obtenido nuevos conjuntos de ecuaciones lineales que relacionan los coeficientes de un sistema (MA) con los poliespectros de órdenes k y $k-1$ -ésimo de la señal de salida. Estas ecuaciones pueden usarse para identificar los parámetros del modelo MA de fase no mínima a partir de la estadística de la señal de salida. En este capítulo nos ocupamos primero de como combinar dichas ecuaciones en una serie de algoritmos para obtener los coeficientes MA. Posteriormente, trataremos el problema de la estimación del orden del modelo, ya que tanto los métodos lineales propuestos como la mayoría de los existentes en la bibliografía requieren un conocimiento previo del orden. Cuando éste no es conocido a priori, es necesario disponer de algún procedimiento que nos permita buenas estimaciones ya que son de importancia fundamental. El criterio propuesto de selección del orden del modelo se basa solamente en estadística de ordenes superiores o cumulantes, por lo que en principio no es sensible al ruido aditivo Gaussiano. Este criterio busca minimizar una función discreta evaluada sobre la hipotética última "slice" del dominio de soporte del modelo MA y la siguiente "slice" no perteneciente al dominio asumido para el sistema MA.

Este capítulo consta de seis secciones. En la sección V-2 se estudia como obtener soluciones recursivas de las ecuaciones propuestas en el capítulo anterior. Estas soluciones tienen una gran importancia teórica pues no hay resultados equivalentes en el caso de estadística de segundo orden. Sin embargo, dichas soluciones no son adecuadas cuando se usan cumulantes estimados a partir de los datos debido a los errores de estimación. Por ello, en la sección V-3 se estudian varias combinaciones de ecuaciones propuestas en el capítulo anterior y su implementación en algoritmos basados en el método de mínimos cuadrados. En esta sección proponemos y discutimos cuatro estimadores basados en la

solución de mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones lineales entre cumulantes de tercer y cuarto orden. Al combinar varias relaciones entre estadística de tercer y cuarto orden, estos métodos hacen uso de más información de estadística de órdenes superiores que otros métodos lineales basados también en una solución de mínimos cuadrados. Para procesos con función densidad de probabilidad simétrica se proponen igualmente cuatro algoritmos basados en estadística de cuarto orden. En todos los casos la unicidad de la solución puede garantizarse por la linealidad de las ecuaciones. Ya que el conocimiento del orden del sistema es necesario para aplicar los algoritmos lineales, en la sección V-4 proponemos un algoritmo que puede usarse en combinación con cualquier estimador y puede implementarse fácilmente. Los resultados obtenidos para los métodos propuestos y el algoritmo de selección del orden para procesos no distribuidos simétricamente se presentan en la sección V-5. En esta sección se hace una comparación entre los distintos métodos propuestos y otros estudiados en la bibliografía, así como un análisis en función del ruido y del número de datos disponibles de la señal. De forma análoga, los resultados para procesos distribuidos simétricamente se presentan en la sección V-6. Como veremos, las simulaciones numéricas confirman las ventajas teóricas esperadas de los métodos propuestos en ruido coloreado y nos permiten trazar una comparación clara tanto entre los métodos lineales propuestos como con otros publicados en la bibliografía. Por último, en la sección V-7 extraeremos las conclusiones más importantes de los resultados de simulación obtenidos.

V-2. ESTIMACIÓN DE LOS COEFICIENTES MA. SOLUCIONES RECURSIVAS.

Bajo las hipótesis H1-H3 de la sección IV-3, los coeficientes del modelo MA pueden estimarse mediante una fórmula cerrada (usando q ecuaciones) a partir de la

familia de ecuaciones dadas en la sección IV-4. Fórmulas recursivas similares fueron obtenidas para la ecuación (4.5) en [GIA89a] y para la ecuación (4.6) en [TUG90]. El interés de dichas fórmulas consiste en mostrar que es posible recuperar los parámetros MA cuando se conozca la estadística de salida del sistema. Sin embargo, cuando la estadística de salida deba ser estimada a partir de los datos medidos, las fórmulas recursivas son muy sensibles a la propagación de los errores debidos al ruido y a la estimación de los cumulantes, por lo que se prefieren soluciones de mínimos cuadrados.

Podemos obtener una fórmula recursiva basándonos en la ecuación (4.21). Para ello impongamos $\tau_1 = -q$ en (4.21) para obtener:

$$\begin{aligned} c_{ky}(q, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2}, q) &= \epsilon b(q) c_{k-1y}(q, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \epsilon b(q) &= \frac{c_{ky}(q, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2}, q)}{c_{k-1y}(q, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2})} \end{aligned} \quad (5.1)$$

A continuación, evaluando $\tau_1 = -q+1$ en (4.21) y usando la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} b(1) c_{ky}(q, 1-\tau_2, \dots, q) + c_{ky}(q-1, -\tau_2, \dots, q) &= \epsilon b(q) c_{k-1y}(q-1, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow b(1) &= \frac{c_{ky}(q, -\tau_2, \dots, q) c_{k-1y}(q-1, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2})}{c_{k-1y}(q, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2}) c_{ky}(q, 1-\tau_2, \dots, q)} - \frac{c_{ky}(q-1, -\tau_2, \dots, q)}{c_{ky}(q, 1-\tau_2, \dots, q)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Continuando de esta manera, obtenemos sucesivamente los coeficientes $b(m)$ ($1 \leq m \leq q$) a partir de los previamente obtenidos $b(k)$ $1 \leq k \leq m-1$ de la forma:

$$\begin{aligned} b(m) &= \frac{c_{ky}(q, -\tau_2, \dots, q) c_{k-1y}(q-m, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2})}{c_{k-1y}(q, -\tau_2, \dots, -\tau_{k-2}) c_{ky}(q, m-\tau_2, \dots, q)} - \\ &- \sum_{i=0}^{m-1} b(i) \frac{c_{ky}(i+q-m, i-\tau_2, \dots, q)}{c_{ky}(q, m-\tau_2, \dots, q)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) constituye una fórmula recursiva que permite obtener los coeficientes del modelo MA. Esta solución esta bien condicionada ya que las únicas divisiones realizadas son con $c_{ky}(q, m-\tau_2, \dots, q)$, $m=0 \dots q$, los cuales son no nulos siempre que la "slice" específica usada $(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{k-2})$ se elija dentro del dominio de soporte del modelo MA(q) $(m-q \leq \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{k-2} \leq m)$.

De forma análoga, podemos usar la ecuación (4.29) para establecer otra fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} \tau_1=q \quad \frac{\gamma_{k-1w}}{\gamma_{kw}} b(q) &= \frac{c_{k-1y}(q, \tau_2, \dots, \tau_{k-3}, q)}{c_{ky}(q, \tau_2, \dots, 0, 0)} \\ \tau_1=q-m \quad b^3(m) &= \frac{\gamma_{k-1w}}{\gamma_{kw}} b(q) \frac{c_{ky}(q-m, \tau_2, \dots, 0, 0)}{c_{k-1y}(q, \tau_2, \dots, q)} - \sum_{i=0}^{m-1} b^3(i) \frac{c_{k-1y}(q-m+i, \tau_2+i, \dots, q)}{c_{k-1y}(q, \tau_2+i, \dots, q)} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Los parámetros MA se obtienen a partir de (5.4) tomando la raíz cúbica $(b^3(m))^{1/3}$.

Para el caso de ecuaciones que establezcan relaciones solamente entre los cumulantes de orden k-ésimo podemos obtener soluciones recursivas similares. Por ejemplo, considerando la ecuación (4.38) y la evaluamos sucesivamente para $\tau_1 = q$ y $\tau_1 = q-m$, $m=1 \dots q$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau_1=q \quad \gamma_{kw}^{k-2} b^{k-1}(\tau_2) \dots b^{k-1}(q) &= \frac{c_{ky}(q, \tau_2, \dots, q)}{c_{ky}(q, q, \dots, q)} \\ \tau_1=q-m \quad b(m) &= \frac{c_{ky}(q, \tau_2, \dots, q)}{c_{ky}(q, q, \dots, q)} \frac{c_{ky}(q-m, q-m, \dots, q-m)}{c_{ky}(q, \tau_2, \dots, q)} - \sum_{i=0}^{m-1} b(i) \frac{c_{ky}(q-m+i, \tau_2+i, \dots, q)}{c_{ky}(q, \tau_2+i, \dots, q)} \end{aligned} \tag{5.5}$$

La solución anterior nos permitiría recobrar los coeficientes del sistema a partir del conocimiento de la estadística de orden k -ésimo.

Soluciones recursivas similares pueden obtenerse a partir de (4.39) ó de las primeras relaciones en (4.32) ó (4.41), repitiendo las anteriores derivaciones. De forma análoga, ecuaciones que impliquen $b^2(i)$ $i=1\dots q$ como (4.40) ó las segundas relaciones en (4.32) ó (4.41) pueden usarse en unión con (4.20). Para recuperar los coeficientes primeramente obtenemos $b^2(i)$ $i=1\dots q$ a partir de una fórmula recursiva análoga a las anteriores usando (4.32) ó (4.40) ó (4.41). Una vez que hayamos obtenido $b^2(i)$ por el procedimiento anterior, podemos recuperar ε y $b(i)$ $i=1\dots q$ a partir de (4.20), recursivamente. Como se comentó anteriormente, estos procedimientos están siempre bien condicionados ya que solamente tomamos divisiones por cumulantes no nulos para el sistema $MA(q)$.

V-3. ESTIMACIÓN DE LOS COEFICIENTES MA. SOLUCIONES DE MÍNIMOS CUADRADOS.

En el capítulo anterior obtuvimos varios conjuntos de ecuaciones que relacionaban los cumulantes de tercer y/o cuarto orden. Estas ecuaciones podemos usarlas aisladamente o combinarlas entre sí para obtener los parámetros del sistema. Ya hemos discutido las soluciones recursivas en la sección V-2. En esta sección nos dedicamos a las soluciones obtenidas mediante la solución de un sistema de ecuaciones que se considera lineal en un conjunto de parámetros mediante el método de mínimos cuadrados. Discutiremos varias combinaciones de ecuaciones que son útiles para obtener estimaciones robustas de los coeficientes del sistema MA, distinguiendo los casos de procesos de función densidad de probabilidad distribuida o no simétricamente. Todos los algoritmos propuestos pueden

extenderse fácilmente al caso de cumulantes de órdenes k y $k-1$ -ésimo. En esta sección consideramos el caso de cumulantes de tercer y cuarto orden tanto por simplicidad de notación como por ser el caso usado en las simulaciones.

a) Procesos no distribuidos simétricamente.

Cuando el proceso de excitación del sistema MA obedezca a una función densidad de probabilidad no simétrica (Exponencial, Rayleigh o distribución K) podemos usar las ecuaciones obtenidas en el apartado a) de la sección IV-5. Las combinaciones de ecuaciones que proponemos buscan utilizar el conjunto más amplio posible de estadística de la señal de salida sin redundancia, y las hemos clasificado en cuatro algoritmos denominados desde mínimos cuadrados 1 a mínimos cuadrados 4 (LS-1 a LS-4). Compararemos posteriormente en la sección V-4 estos algoritmos entre sí y con otros basados en mínimos cuadrados existentes en la bibliografía.

Algoritmo 1. Mínimos cuadrados 1 (LS-1). Consideremos las ecuaciones dadas por la Proposición 1 de la sección IV-5. Tomando $l=0$ en (4.58) y $\tau_1=\tau_2$ ("slice" diagonal), obtenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}(\tau-i, \tau-i, 0) = \epsilon \sum_{i=0}^q b^2(i) c_{3y}(\tau-i, 0) \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}(i-\tau, i-\tau, q) = \epsilon b(q) c_{3y}(-\tau, -\tau). \quad (5.7)$$

Formando seguidamente el sistema de ecuaciones que surgen de (5.6) para $\tau=-q \dots 0 \dots 2q$ y de (5.7) para $\tau=-q \dots q$, obtenemos un sistema de ecuaciones sobredeterminado con $2q+2$ incógnitas $x = (\epsilon, \epsilon b^2(1), \epsilon b^2(2), \dots, \epsilon b^2(q), \epsilon b(q), b(1), \dots, b(q))$:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} . \quad (5.8)$$

donde A denota la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix}
 c_{3y}(-q,0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 c_{3y}(-q+1,0) & c_{3y}(-q,0) & 0 & \dots & 0 & 0 & -c_{4y}(-q,-q,0) & 0 & \dots & 0 \\
 c_{3y}(-q+2,0) & c_{3y}(-q+1,0) & c_{3y}(-q,0) & \dots & 0 & 0 & -c_{4y}(-q+1,-q+1,0) & -c_{4y}(-q,-q,0) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 c_{3y}(q,0) & c_{3y}(q-1,0) & c_{3y}(q-2,0) & \dots & c_{3y}(0,0) & 0 & -c_{4y}(q-1,q-1,0) & -c_{4y}(q-2,q-2,0) & \dots & -c_{4y}(0,0,0) \\
 0 & c_{3y}(q,0) & c_{3y}(q-1,0) & \dots & c_{3y}(1,0) & 0 & -c_{4y}(q,q,0) & -c_{4y}(q-1,q-1,0) & \dots & -c_{4y}(1,1,0) \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & c_{3y}(q,0) & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{4y}(q,q,0) \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{3y}(0,-q) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{3y}(0,-q+1) & -c_{4y}(q,q,q) & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{3y}(0,-q+2) & -c_{4y}(q-1,q-1,q) & -c_{4y}(q,q,q) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{3y}(0,q) & 0 & 0 & \dots & -c_{4y}(0,0,q)
 \end{bmatrix}$$

(5.9)

y el vector b representa:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}
 c_{4y}(-q,-q,0) \\
 c_{4y}(-q+1,-q+1,0) \\
 c_{4y}(-q+2,-q+2,0) \\
 \vdots \\
 c_{4y}(q-1,q-1,0) \\
 c_{4y}(q,q,0) \\
 \vdots \\
 0 \\
 c_{4y}(q,q,q) \\
 c_{4y}(q-1,q-1,q) \\
 c_{4y}(q-2,q-2,q) \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}$$

(5.10)

Posteriormente calculamos la solución de mínimos cuadrados como :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad (5.11)$$

y tomamos los últimos q elementos del vector fila \mathbf{x} como los parámetros estimados del modelo MA. La unicidad de la solución así obtenida está garantizada al ser la matriz \mathbf{A} de rango completo, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición. La matriz de coeficientes \mathbf{A} definida en (5.9) es de rango completo.

Demostración. La matriz \mathbf{A} puede descomponerse en 4 bloques formados por las submatrices \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 y \mathbf{A}_3 de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

donde \mathbf{A}_1 es la matriz construida tomando las primeras $3q+1$ filas y $q+1$ columnas de la matriz \mathbf{A} , \mathbf{A}_2 contiene las restantes $q+1$ columnas, y \mathbf{A}_3 consta de las últimas $2q+1$ filas y las últimas $q+1$ columnas.

Las primeras $q+1$ filas de \mathbf{A}_1 constituyen una matriz triangular superior cuyo determinante es $c_{3y}^{q+1}(-q,0)$, el cual es no nulo ya que $c_{3y}(-q,0)$ pertenece al dominio de soporte de la secuencia de cumulantes $c_{3y}(\tau_1, \tau_2)$ de un sistema MA(q). Esto implica que \mathbf{A}_1 tiene rango completo. De manera similar, las primeras $q+1$ filas de \mathbf{A}_3 son una matriz triangular superior con determinante $c_{4y}^q(q,q,q) c_{3y}(0,-q)$, el cual vuelve a ser no nulo ya que implica cumulantes no nulos para un sistema MA(q); en consecuencia \mathbf{A}_3 es de rango completo. Ya que \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_3 tienen rango completo, \mathbf{A} también es de rango completo.

Algoritmo 2. Mínimos cuadrados 2 (LS-2). Consideremos la ecuación (5.6) del algoritmo 1 y las ecuaciones (4.62) y (4.63) dadas en la Proposición 3, es decir:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}(\tau-i, \tau-i, 0) = \epsilon \sum_{i=0}^q b^2(i) c_{3y}(\tau-i, 0) \\
 \text{(b)} \quad & \sum_{i=0}^q b(i) c_{3y}^3(i-\tau, q) = \frac{\gamma_{3w}^2}{\epsilon} b^3(q) c_{4y}(\tau, 0, 0) \quad , \\
 \text{(c)} \quad & \sum_{i=0}^q \epsilon b^2(i) c_{3y}^2(i-\tau, q) = c_{3y}(q, q) c_{4y}(\tau, \tau, 0)
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

donde hemos usado la igualdad $c_{3y}(q, q) = \gamma_{3w} b^2(q)$. Si evaluamos (5.13)(a) para $\tau = -q \dots 2q$, (5.13)(b) para $\tau = -q \dots q$, y (5.13)(c) para $\tau = -q \dots q$ obtenemos un sistema de $7q+3$ ecuaciones con $2q+2$ incógnitas $x = (\epsilon, \epsilon b^2(1), \epsilon b^2(2), \dots, \epsilon b^2(q), \gamma_{3w}^2 b^3(q)/\epsilon, b(1), \dots, b(q))$. Como ya hicimos en (5.8) podemos reescribir este sistema de forma matricial, donde ahora el vector fila b es $b = [b_1^T \ b_2^T]^T$ siendo b_1 y b_2 :

$$\begin{aligned}
 b_1 = & \begin{bmatrix} c_{4y}(-q, -q, 0) \\ c_{4y}(-q+1, -q+1, 0) \\ c_{4y}(-q+2, -q+2, 0) \\ \vdots \\ c_{4y}(q-1, q-1, 0) \\ c_{4y}(q, q, 0) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & 3q+1 & b_2 = & \begin{bmatrix} c_{3y}(q, q) \ c_{4y}(0, -q, -q) \\ c_{3y}(q, q) \ c_{4y}(0, -q+1, -q+1) \\ c_{3y}(q, q) \ c_{4y}(0, -q+2, -q+2) \\ \vdots \\ c_{3y}(q, q) \ c_{4y}(0, q, q) \\ c_{3y}^3(q, q) \\ c_{3y}^3(q-1, q) \\ c_{3y}^3(q-2, q) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & 4q+2 \\
 & \text{columnas} & & \text{columnas}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

y ahora la matriz A representa:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & (3q+1) \times (2q+2) \\ A_2 & (4q+2) \times (2q+2) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

donde la matriz A_1 de dimensión $(3q+1) \times (2q+1)$ consta de las $3q+1$ primeras filas de (5.8) y la matriz A_2 de dimensión $(4q+2) \times (2q+1)$ es:

$$\begin{bmatrix} -c_{3y}^2(q,q) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_{3y}^2(q-1,q) & -c_{3y}^2(q,q) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_{3y}^2(q-2,q) & -c_{3y}^2(q-1,q) & -c_{3y}^2(q,q) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -c_{3y}^2(0,q) & -c_{3y}^2(1,q) & -c_{3y}^2(2,q) & \dots & -c_{3y}^2(q,q) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{3y}^2(0,q) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{4y}(0,0,-q) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{4y}(0,0,-q+1) & -c_{3y}^3(q,q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{4y}(0,0,-q+2) & -c_{3y}^3(q-1,q) & -c_{3y}^3(q,q) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{4y}(0,0,q) & 0 & 0 & \dots & -c_{3y}^3(0,q) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

A continuación resolvemos este sistema de ecuaciones sobredeterminado obteniendo la solución de mínimos cuadrados y, a partir de ella, los parámetros del sistema MA de los últimos q elementos del vector estimado x . Además, la ecuación anterior da una solución única ya que la matriz A , como puede probarse fácilmente, tiene rango completo.

Algoritmo 3. Mínimos cuadrados 3 (LS-3). Otra alternativa para la estimación de los parámetros del modelo MA es resolver la ecuación (4.58) de la Proposición 1

considerando un conjunto específico de "slices". Si esta ecuación es evaluada desde $-q \leq \tau_1 = \tau_2 = \tau \leq 2q$ y l variando desde 0 a l_1 , siendo l_1 la última "slice" horizontal en el espacio de los cumulantes de tercer o cuarto orden usada para estimar los parámetros ($1_1 \leq q$), tenemos un sistema de $2q+1$ incógnitas $x = (\epsilon, \epsilon b^2(1), \epsilon b^2(2), \dots, \epsilon b^2(q), b(1), \dots, b(q))$ y $(3q+1)(l_1+1)$ ecuaciones que pueden resolverse en el sentido de mínimos cuadrados. Como en los algoritmos precedentes, la consistencia (unicidad) de este planteamiento puede demostrarse notando que la matriz de coeficientes es de rango completo. Tras resolver dicho sistema, los parámetros MA estimados se obtienen a partir de los últimos q elementos en la solución de mínimos cuadrados para el sistema.

Algoritmo 4. Mínimos cuadrados 4 (LS-4). Para estimar los coeficientes del modelo podemos considerar las ecuaciones dadas por la Proposición 2. Evaluando (4.60) para $-q \leq \tau \leq 2q$ y (4.61) para $-q \leq \tau \leq q$, obtenemos un sistema de $5q+2$ ecuaciones con $2q+2$ incógnitas $x = (\epsilon', \epsilon' b^2(1), \dots, \epsilon' b^2(q), \epsilon' b(q), b^3(1), \dots, b^3(q))$ siendo $\epsilon' = \gamma_3 / \gamma_4$. Como antes, el vector de parámetros x se obtiene resolviendo el sistema en el sentido de mínimos cuadrados. Como coeficientes del modelo estimados tomamos los últimos q elementos de x . El anterior sistema de ecuaciones da una solución única ya que la matriz de coeficientes tiene rango completo, como puede probarse observando que esta matriz tiene elementos "diagonales" no nulos para un modelo MA(q).

Comentario. Otras combinaciones de ecuaciones diferentes de las mostradas aquí podrían haberse usado para estimar los parámetros del modelo. Por ejemplo, algunas ecuaciones usadas anteriormente podrían haberse utilizado solas, combinadas o añadidas a otros conjuntos de formas diferentes para obtener un nuevo sistema de ecuaciones sobredeterminado. Más aún, las ecuaciones (4.64) y (4.65) dadas en la Proposición 3 para un conjunto de "slices" $0 \leq \tau_2 \leq q$ no han sido usadas en ninguno de los algoritmos anteriores. Todos estos planteamientos llevarían a un nuevo conjunto de ecuaciones para

estimar los parámetros de la señal, y cuando dispusiéramos de la verdadera estadística darían correctamente los coeficientes del sistema MA. Sin embargo, para el caso de longitud de datos finita y observaciones ruidosas, hemos de usar los cumulantes estimados y no todas las situaciones son idénticas. En este caso hay que tener en cuenta varios factores que tienen una influencia práctica en el buen comportamiento de las estimaciones, como se demuestra en las simulaciones que se presentan en la sección V-6. Los parámetros estimados obtenidos como la solución de mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones sobredeterminado depende del conjunto específico de "slices" de cumulantes de tercer o cuarto orden y la cantidad relativa de información de estadística de tercer y cuarto orden usada en la estimación. Más aún, añadir más ecuaciones a un determinado sistema de ecuaciones (es decir, usar más "slices" o nuevas ecuaciones y de esta forma incrementar el tamaño de la matriz de coeficientes) puede que no conduzca a mejores estimaciones y en algunos casos incrementará la varianza de los parámetros estimados. La razón de este comportamiento es que los cumulantes estimados tienen mayores varianzas conforme las coordenadas τ_1 y τ_2 o τ_3 se acercan a la frontera del dominio de soporte del modelo, y que los cumulantes estimados de cuarto orden muestran una mayor varianza que los de tercer orden. Tomando estos puntos en consideración, las combinaciones propuestas en los algoritmos 1-4 hacen uso de un intervalo amplio de "slices" y, de esta forma, de información estadística de tercer y cuarto orden sin redundancia y constituyen un conjunto de métodos prácticos para recobrar los coeficientes del modelo MA a partir de datos contaminados con ruido.

b) Procesos distribuidos simétricamente.

Cuando el proceso de excitación del modelo MA obedezca a una función densidad de probabilidad distribuida simétricamente (por ejemplo Uniforme o de Laplace), el coeficiente de asimetría del proceso es cero $\gamma_{3w}=0$ y hemos de usar las ecuaciones

obtenidas en la proposición 5 de la sección IV-5. En esta proposición tenemos tres ecuaciones que nos relacionan la "slice" q de cumulantes de cuarto orden que podemos implementar en algoritmos de mínimos cuadrados para estimar los coeficientes del modelo MA. En esta subsección describiremos estos algoritmos que usaremos en las simulaciones para el caso de cuarto orden. En todos los algoritmos la unicidad de la solución de mínimos cuadrados está garantizada ya que la matriz de coeficientes posee rango completo en cada caso.

Algoritmo 5. Mínimos cuadrados 5 (LS-5). Consideremos la ecuación (4.68) de la Proposición 5. Utilizando la relación $c_{4y}(0, \tau_2, q) = \gamma_{4w} b(\tau_2) b(q)$ podemos reescribir esta ecuación de la forma:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}^3(\tau_1+i, \tau_2, q) = \frac{c_{4y}^3(0, \tau_2, q)}{\gamma_{4w}} c_{4y}(\tau_1, \tau_1, \tau_1) \quad (5.17)$$

Evaluando (5.17) para $\tau_1 = -q \dots 0 \dots q$ y τ_2 variando desde 0 hasta $q-1$ podemos formar un sistema de $q(2q+1)$ ecuaciones y $q+1$ incógnitas $x = (1/\gamma_{4w}, b(1), \dots, b(q))$. Resolviendo este sistema en el sentido de mínimos cuadrados podemos recuperar los coeficientes del modelo de los últimos q valores del vector solución x .

Algoritmo 6. Mínimos cuadrados 6 (LS-6). Teniendo en cuenta que $\gamma_{4w} = c_{4y}^2(0, 0, q)/c_{4y}(0, q, q)$, la ecuación (5.17) se puede escribir en la forma:

$$\sum_{i=0}^q b(i) c_{4y}^3(\tau_1+i, \tau_2, q) = \frac{c_{4y}^3(0, \tau_2, q) c_{4y}(0, q, q)}{c_{4y}^2(0, 0, q)} c_{4y}(\tau_1, \tau_1, \tau_1) \quad (5.18)$$

Evaluando (5.18) para $\tau_1 = -q \dots 0 \dots q$ y $\tau_2 = 0 \dots q-1$ obtenemos un sistema de $q(2q+1)$

ecuaciones con $q+1$ incógnitas $x = (b(0), b(1), \dots, b(q))$. Los coeficientes del modelo se obtienen de la solución de mínimos cuadrados, dividiendo x por el coeficiente $b(0)$ estimado de forma que los parámetros del modelo serán $(1, b(1)/b(0), \dots, b(q)/b(0))$.

Algoritmo 7. Mínimos cuadrados 7 (LS-7). Consideremos la ecuación (4.69):

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{4y}(\tau+i, \tau+i, q) = b(q) c_{4y}(\tau, \tau, 0) \quad (5.19)$$

Esta ecuación la podemos usar para recuperar los parámetros del sistema en combinación con la ecuación (5.17). Para ello evaluamos (5.19) para $\tau=-q \dots q$ formando un sistema de $2q+1$ ecuaciones con $q+1$ incógnitas $x = (b(q), b^2(1), b^2(2) \dots, b^2(q))$. Con los últimos q elementos de la solución de mínimos cuadrados de este sistema extraemos la raíz cuadrada y resolvemos la ambigüedad del signo tomando como signo de los coeficientes el dado por la solución del algoritmo LS-5.

Algoritmo 8. Mínimos cuadrados 8 (LS-8). Podemos obtener un sistema con más ecuaciones que en el algoritmo LS-7 si consideremos junto a (5.19) la ecuación (4.70), que reescribimos aquí como:

$$\sum_{i=0}^q b^2(i) c_{4y}^2(\tau_1+i, \tau_2, q) = b(q) c_{4y}(\tau_2, \tau_2, q) c_{4y}(\tau_1, \tau_1, 0) \quad (5.20)$$

donde hemos usado que $c_{4y}(\tau_2, \tau_2, q) = \gamma_{4w} b^2(\tau_2) b(q)$. Evaluando la ecuación (5.20) para $\tau_1=-q \dots 0 \dots q$ y $\tau_2 = 0 \dots l$ siendo l la última "slice" que queremos usar en la estimación ($l < q$), tenemos un sistema de $(l+1)(2q+1)$ ecuaciones con incógnitas $x = (b(q), b^2(1), b^2(2) \dots, b^2(q))$. Si a estas ecuaciones le añadimos las dadas por el algoritmo LS-7, obtenemos un sistema de $(l+2)(2q+1)$ ecuaciones que podemos resolver en el sentido de mínimos

cuadrados. Como en el caso del algoritmo LS-7, para eliminar la ambigüedad del signo inherente al tomar la raíz cuadrada en las estimaciones, usamos el signo de las soluciones del algoritmo LS-5.

Algoritmo 9. Mínimos cuadrados 9 (LS-9). Una última alternativa para estimar los coeficientes del sistema usando cumulantes de cuarto orden podría ser usar la ecuación (4.71). Utilizando en dicha ecuación que $c_{4y}(0, \tau_2, q) = \gamma_{4w} b(\tau_2) b(q)$, tenemos:

$$\sum_{i=0}^q b^3(i) c_{4y}(\tau_1+i, \tau_2, q) = \frac{c_{4y}(0, \tau_2, q)}{\gamma_{4w}} c_{4y}(\tau_1, 0, 0). \quad (5.21)$$

Si evaluamos la ecuación (5.21) para $\tau_1 = -q \dots 0 \dots q$ y $\tau_2 = 0 \dots 1$ ($1 < q$), obtenemos un sistema de $(1+1)(2q+1)$ ecuaciones con incógnitas $x = (1/\gamma_{4w}, b^3(1), b^3(2) \dots, b^3(q))$. Los coeficientes del sistema se obtienen extrayendo la raíz cúbica de los últimos q elementos del vector solución x . La unicidad, como en todos los casos anteriores, esta garantizada ya que la matriz de coeficientes es de rango completo.

V-4. SELECCIÓN DEL ORDEN DEL MODELO MA.

Una adecuada determinación del orden del sistema es de importancia capital en los algoritmos lineales basados en una solución de mínimos cuadrados. Todos estos algoritmos están basados en ecuaciones que sólo son válidas cuando se usa el verdadero orden del sistema. Cuando el orden del modelo no se conoce a priori, como ocurre en muchas aplicaciones prácticas, necesitamos una herramienta que nos proporcione buenas estimaciones del orden. Aún mas, cuando se trabaja con señales contaminadas con ruido se requiere una buena elección del orden del modelo en la mayoría de los casos, ya que los algoritmos lineales son muy sensibles a variaciones en los ordenes de los sistemas.

Es por ello que una estimación previa del orden constituye un tema de gran importancia en muchos algoritmos de identificación de sistemas [MEN91] [GIA89a] [TUG91] [NAN94] [ZHA94].

En esta sección tratamos con el problema de la selección del orden del modelo usando solamente la estadística de ordenes superiores o cumulantes. Ya que los cumulantes de orden mayor que dos se anulan para un proceso Gaussiano, estos constituyen una herramienta apropiada para la estimación del orden del modelo cuando la serie temporal está contaminada con ruido Gaussiano de función de autocorrelación desconocida. Para tratar este problema han surgido recientemente en la bibliografía tres planteamientos principales [GIA90b] [ZHA93] [ALS93]. El método propuesto en [GIA90b] está basado en buscar la coordenada q que satisfaga $c_{3y}(q,0) \neq 0$ y $c_{3y}(q+i,0) = 0$, $i \geq 1$. Este procedimiento puede implementarse por inspección visual o automáticamente mediante un test estadístico. De los estudios llevados a cabo en [ZHA93] este método no es numéricamente robusto, por lo que han surgido recientemente algoritmos basados en minimizar una función "error" [ALS93] o técnicas de determinación del rango de una matriz basadas en la SVD [ZHA93] que muestran un mejor comportamiento que el método propuesto en [GIA90b]. El primer procedimiento de los dos citados anteriormente busca hacer mínimo del error entre la secuencia de cumulantes de tercer orden estimada a partir de la estadística de segundo y/o tercer orden y la estimada a partir de la señal de salida en la región completa de soporte de un sistema $MA(q)$. El segundo método [ZHA93] determina el rango de las matrices construidas usando cumulantes de orden k -ésimo, para lo cuál pueden usarse herramientas robustas como la SVD.

En el resto de esta sección proponemos un método de selección del orden del modelo MA usando cumulantes de órdenes $k-1$ y/o k -ésimo, basado en minimizar el error de reconstrucción de la hipotética última "slice" horizontal (q -slice) de cumulantes de

orden k-ésimo y la suma cuadrática de la secuencia de cumulantes de la primera "slice" que no pertenezca al dominio asumido (q+1-slice) [RUI95b]. Este método muestra un buen comportamiento en señales contaminadas con ruido a niveles moderadamente altos y evita el uso de la inspección visual, tests estadísticos, o determinación del rango de matrices. El algoritmo propuesto consta de las siguientes etapas:

- 1) Elegir un valor Q que constituya una cota superior al orden auténtico del modelo q.
- 2) Para m=1...Q, calcular la siguiente función cuadrática discreta:

$$F(m) = \frac{\sum_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}=0}^m (c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}, m) - \hat{c}_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}, m))^2}{\sum_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}=0}^m c_{ky}^2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}, m)} + \sum_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}=0}^m c_{ky}^2(\tau_1, \tau_2, \tau_{k-2}, m+1), \quad (5.22)$$

donde $c_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}, m)$ representa los cumulantes de orden k-ésimo estimados a partir de los datos, y $\hat{c}_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}, m)$ es la secuencia de cumulantes reconstruida de orden k-ésimo asumiendo que el orden correcto es m, i.e.,

$$\hat{c}_{ky}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-2}, m) = \gamma_{kw} \bar{b}(\tau_1) \bar{b}(\tau_2) \dots \bar{b}(\tau_{k-2}) b(m) \quad (5.23)$$

y $\bar{b}(i)$ $i=1\dots m$ se estima mediante cualquier algoritmo propuesto en las secciones anteriores o sus versiones recursivas, que haga uso de información estadística de orden k y k-1-ésimo, o únicamente de orden k-ésimo.

Cuando dispongamos de la estadística exacta del problema, $F(m)$ se anulará solamente para $m \geq q$, ya que $c_{ky}(\tau_1, \dots, \tau_{k-2}, q) = \hat{c}_{ky}(\tau_1, \dots, \tau_{k-2}, q)$ y $c_{ky}(\tau_1, \dots, \tau_{k-2}, q+1) = 0$. En los casos prácticos, cuando disponemos únicamente de la señal de salida y hemos de

estimar los cumulantes a partir de un conjunto de datos finito, posiblemente ruidoso, $F(q)$ no será nulo debido a errores de estimación, pero mostrará un mínimo global en este punto.

3) Tómese como orden del modelo q el valor del entero m para el cual $F(m)$ alcanza su valor mínimo.

V-5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN. PROCESOS NO DISTRIBUIDOS SIMÉTRICAMENTE.

En esta sección vamos a aplicar los algoritmos de identificación de sistemas MA de fase no mínima y selección del orden del modelo descritos en la sección V-4 y V-5 para el caso de procesos de excitación no distribuidos simétricamente y señales ruidosas [RUI95b]. Los resultados que vamos a exponer se refieren al caso de ruido Gaussiano coloreado, ya que estos algoritmos que usan únicamente cumulantes de tercer y cuarto orden muestran su potencialidad cuando se aplican al caso de ruido coloreado. En las simulaciones llevadas a cabo comparamos el comportamiento de los algoritmos propuestos LS-1, LS-2, LS-3 (con $l_1=2$) y LS-4 con dos métodos lineales bien estudiados en la bibliografía, la versión modificada del método Giannakis-Mendel propuesta por Tugnait [TUG91], denominado en el apartado IV-2 método GMT, y el denominado algoritmo de mínimos cuadrados 1 propuesto en [SCA92] y usado en [NAN94] [ZHA94] que implica estadística de tercer orden sobre la "slice" q (véase sección IV-2). En las simulaciones nos proponemos estudiar el efecto del nivel de ruido coloreado y de la longitud del registro de datos sobre la estimación de los coeficientes del sistema MA. Para tres casos o tests representando procesos MA de órdenes diferentes, elegimos la señal de entrada del sistema como un proceso aleatorio i.i.d. de media cero distribuido según una distribución Exponencial con un factor de asimetría teórico $\gamma_{3w}=2$ y una kurtosis teórica igual a 6.

Estos procesos, así como todos los resultados que aquí se muestran se han obtenido en una estación de trabajo SUN Sparc10 usando el lenguaje MATLAB y las librerías (toolboxes) que este lenguaje incorpora. La señal observada $y(n)$ viene dada por la ecuación (4.12) donde el ruido aditivo de media cero es un proceso Gaussiano coloreado, obtenido filtrando ruido Gaussiano blanco de media cero a través de un sistema ARMA usado en [ZHA94] con parámetros AR [1, -2.2, 1.77, -0.52] y parámetros MA [1, -1.25]. Este ruido es añadido a la señal de salida de forma que se obtenga la razón señal-ruido (SNR) deseada, donde la SNR se define como:

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{\sum_{n=1}^N x^2(n)}{\sum_{n=1}^N v^2(n)}, \quad (5.24)$$

siendo N la longitud del registro de datos. Las N muestras de la señal de salida se usaron para estimar los cumulantes de tercer y cuarto orden reemplazando los valores esperados de la definición de cumulantes por sus estimaciones usando el estimador sesgado. Estas estimaciones se usan para sustituir a los correspondientes cumulantes de tercer y cuarto orden en los algoritmos de la sección V-4. Junto a la propia estimación de parámetros de los modelos, estudiaremos mediante simulaciones el comportamiento del algoritmo de elección del orden del sistema MA de la sección V-5 usando estadística de tercer orden (k viene dada por 3 en la ecuación (5.23)).

Test 1 (Caso de modelos MA (2)). Comenzaremos estudiando en primer lugar el caso de modelos de orden $q=2$. Para ello vamos a simular los siguientes procesos [GIA89a] [NAN94]:

$$y(n) = w(n) - 2.0833 w(n-1) + w(n-2) + v(n) \quad (5.25)$$

$$y(n) = w(n) - 2.333 w(n-1) + 0.667 w(n-2) + v(n) \quad (5.26)$$

con ceros localizados en $3/4$ y $4/3$ (ceros recíprocos) para el primer modelo (5.25) y en 2 y $1/3$ para el segundo modelo (5.26). Para reducir la dependencia de la realización particular usada en las estimaciones, se llevan a cabo 500 realizaciones del proceso, en una simulación tipo Montecarlo de $y(n)$, y se calculan la media y la varianza de los parámetros estimados tanto para los algoritmos propuestos (LS-1 a LS-4) como para aquellos usados en [TUG91] y [NAN94] [ZHA94]. Las tablas V.1 y V.2 muestran los resultados de las simulaciones para tres diferentes longitudes del registro de datos de salida ($N=1024$, $N=2048$ y $N=4096$) y tres valores de SNR (SNR=10 dB, SNR=5 dB y SNR=0 dB) para los dos modelos (5.25) y (5.26) respectivamente. Como se puede observar de estas tablas, todos los estimadores proporcionan mejores resultados cuando la longitud del registro de datos aumenta, y la varianza de los parámetros estimados se incrementa cuando la SNR decrece. Entre los algoritmos propuestos, LS-2 y LS-3 son los más robustos al ruido Gaussiano coloreado, mientras que LS-4 muestra un importante sesgo en las estimaciones para este ejemplo. Comparados con otros métodos lineales usados en [TUG91] y [NAN94], los algoritmos propuestos, y especialmente LS-2, los superan en términos de sesgo y varianza. Este comportamiento se puede visualizar más claramente si calculamos el promedio entre todas ejecuciones de la señal del error cuadrático medio (MSE) entre los coeficientes MA verdaderos $b(i)$ y los estimados $\hat{b}(i)$, i.e.,

$$\text{MSE} = \frac{\text{media sobre todas las realizaciones}}{\left\{ \frac{\sum_{i=1}^q (b(i) - \hat{b}(i))^2}{\sum_{i=1}^q b^2(i)} \right\}} \quad (5.27)$$

Algoritmos	N=1024		N=2048		N=4096	
	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
LS-1	-1.9213 ±0.2679	0.8732 ±0.1736	-2.0048 ±0.1882	0.9423 ±0.1199	-2.0254 ±0.1176	0.9624 ±0.0717
LS-2	-2.0748 ±0.2531	0.9868 ±0.1631	-2.0985 ±0.1873	1.0104 ±0.2896	-2.0837 ±0.1236	1.0057 ±0.0784
LS-3	-2.0184 ±0.2355	0.9491 ±0.1513	-2.0826 ±0.2080	0.9984 ±0.1268	-2.0780 ±0.1413	1.0017 ±0.0848
LS-4	-1.6089 ±1.1708	0.7355 ±0.3409	-1.7493 ±0.9942	0.8275 ±0.3094	-1.8567 ±0.8959	0.9038 ±0.2601
[NAN94]	-1.9806 ±0.5305	0.9582 ±0.3592	-2.0438 ±0.3916	1.0104 ±0.2896	-2.0584 ±0.2591	1.0059 ±0.1956
GMT	-0.7840 ±0.4585	0.5625 ±0.0854	-0.8607 ±0.4202	0.5805 ±0.0515	-0.8604 ±0.2697	0.5891 ±0.0293

Tabla (V.1)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1. (a) SNR = 10 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	N=1024		N=2048		N=4096	
	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
LS-1	-1.7461 ±0.3711	0.6861 ±0.2570	-1.9365 ±0.3232	0.8455 ±0.1687	-2.0363 ±0.2388	0.9301 ±0.1095
LS-2	-2.0808 ±0.4924	0.8687 ±0.2942	-2.1035 ±0.3632	0.9493 ±0.1959	-2.1056 ±0.2348	0.9784 ±0.1149
LS-3	-1.8552 ±0.3809	0.7512 ±0.2676	-2.0011 ±0.3313	0.8936 ±0.1843	-2.0539 ±0.2350	0.9439 ±0.1161
LS-4	-1.1326 ±0.8625	0.5268 ±0.2131	-1.3564 ±0.9368	0.5956 ±0.2610	-1.6123 ±1.2644	0.7211 ±0.3224
[NAN94]	-1.9120 ±0.8302	0.8317 ±0.4811	-2.0749 ±0.6661	0.9324 ±0.3914	-2.0918 ±0.4484	0.9585 ±0.2452
GMT	-0.2289 ±0.2873	0.4352 ±0.0862	-0.1827 ±0.1849	0.4495 ±0.0580	-0.1384 ±0.1096	0.4565 ±0.0390

Tabla (V.1)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1. SNR = 5 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

	N=1024		N=2048		N=4096	
Coefficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos						
LS-1	-1.2988 ±0.7864	0.3978 ±0.3613	-1.5777 ±0.7298	0.6172 ±0.3934	-1.8676 ±0.4846	0.8083 ±0.2418
LS-2	-2.0452 ±1.1768	0.6533 ±0.4362	-2.1791 ±0.7446	0.8785 ±0.4289	-2.0658 ±0.5143	0.9522 ±0.2509
LS-3	-1.1176 ±0.4218	0.3741 ±0.3041	-1.3904 ±0.3739	0.5544 ±0.2778	-1.7284 ±0.3452	0.7719 ±0.2229
LS-4	-1.0759 ±1.1494	0.5867 ±0.3979	-1.1606 ±1.2976	0.5992 ±0.3166	-1.2165 ±1.1222	0.5853 ±0.2901
[NAN94]	-1.4342 ±1.6635	0.3200 ±0.6150	-2.0854 ±1.7989	0.7298 ±0.7693	-2.0869 ±1.3434	0.8918 ±0.6393
GMT	0.1047 ±0.1574	0.4961 ±0.1751	0.1176 ±0.1105	0.5132 ±0.1055	0.1261 ±0.0736	0.5141 ±0.0696

Tabla (V.1)(c). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1. (c) SNR = 0 dB. (500 ejecuciones Montecarlo).

	N=1024		N=2048		N=4096	
Coefficientes	b(1)=-2.333	b(2)=0.667	b(1)=-2.333	b(2)=0.667	b(1)=-2.333	b(2)=0.667
Algoritmos						
LS-1	-2.037 ± 0.393	0.487 ± 0.234	-2.172 ± 0.320	0.556 ± 0.151	-2.336 ± 0.193	0.616 ± 0.108
LS-2	-2.377 ± 0.572	0.618 ± 0.308	-2.374 ± 0.367	0.656 ± 0.210	-2.336 ± 0.211	0.669 ± 0.153
LS-3	-2.255 ± 0.474	0.560 ± 0.259	-2.323 ± 0.363	0.626 ± 0.176	-2.307 ± 0.223	0.652 ± 0.137
LS-4	-1.723 ± 1.711	0.779 ± 0.461	-1.929 ± 1.935	0.783 ± 0.475	-2.034 ± 1.629	0.752 ± 0.479
[NAN94]	-1.826 ± 0.728	0.552 ± 0.459	-2.051 ± 0.544	0.622 ± 0.277	-2.209 ± 0.387	0.671 ± 0.270
GMT	-1.943 ± 0.945	0.267 ± 0.200	-2.534 ± 0.873	0.191 ± 0.173	-2.869 ± 0.670	0.151 ± 0.149

Tabla (V.2)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.333, -0.667] del test 1. (a) SNR = 10 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

Coeficientes	N=1024		N=2048		N=4096	
	b(1)=-2.333	b(2)=0.667	b(1)=-2.333	b(2)=0.667	b(1)=-2.333	b(2)=0.667
Algoritmos						
LS-1	-1.825 ± 0.531	0.384 ± 0.315	-2.052 ± 0.363	0.502 ± 0.209	-2.184 ± 0.266	0.564 ± 0.153
LS-2	-2.327 ± 0.613	0.598 ± 0.407	-2.408 ± 0.553	0.633 ± 0.310	-2.374 ± 0.343	0.649 ± 0.223
LS-3	-1.990 ± 0.435	0.470 ± 0.323	-2.225 ± 0.439	0.569 ± 0.262	-2.280 ± 0.325	0.611 ± 0.196
LS-4	-1.383 ± 1.299	0.723 ± 0.477	-1.638 ± 1.636	0.764 ± 0.438	-1.907 ± 1.908	0.827 ± 0.564
[NAN94]	-1.525 ± 0.915	0.452 ± 0.402	-1.768 ± 0.641	0.502 ± 0.303	-2.119 ± 0.467	0.617 ± 0.268
GMT	-0.487 ± 0.794	0.384 ± 0.210	-0.509 ± 0.798	0.421 ± 0.190	-0.502 ± 0.715	0.427 ± 0.133

Tabla (V.2)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.333, -0.667] del test 1. (b) SNR = 5 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

Coeficientes	N=1024		N=2048		N=4096	
	b(1)=-2.333	b(2)=0.667	b(1)=-2.333	b(2)=0.667	b(1)=-2.333	b(2)=0.667
Algoritmos						
LS-1	-1.207 ± 0.774	0.198 ± 0.410	-1.586 ± 0.784	0.343 ± 0.384	-2.103 ± 0.598	0.414 ± 0.326
LS-2	-1.723 ± 1.167	0.422 ± 0.588	-2.106 ± 0.905	0.516 ± 0.505	-2.525 ± 0.779	0.570 ± 0.423
LS-3	-1.137 ± 0.497	0.236 ± 0.291	-1.515 ± 0.451	0.371 ± 0.311	-1.942 ± 0.444	0.519 ± 0.253
LS-4	-1.133 ± 1.593	0.702 ± 0.488	-1.203 ± 1.430	0.759 ± 0.635	-1.522 ± 1.248	0.860 ± 0.764
[NAN94]	-1.246 ± 1.299	0.098 ± 0.490	-1.391 ± 1.177	0.240 ± 0.666	-1.723 ± 1.048	0.394 ± 0.415
GMT	0.069 ± 0.098	0.422 ± 0.094	0.060 ± 0.077	0.426 ± 0.066	0.059 ± 0.066	0.431 ± 0.052

Tabla (V.2)(c). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.333, -0.667] del test 1. (c) SNR = 0 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

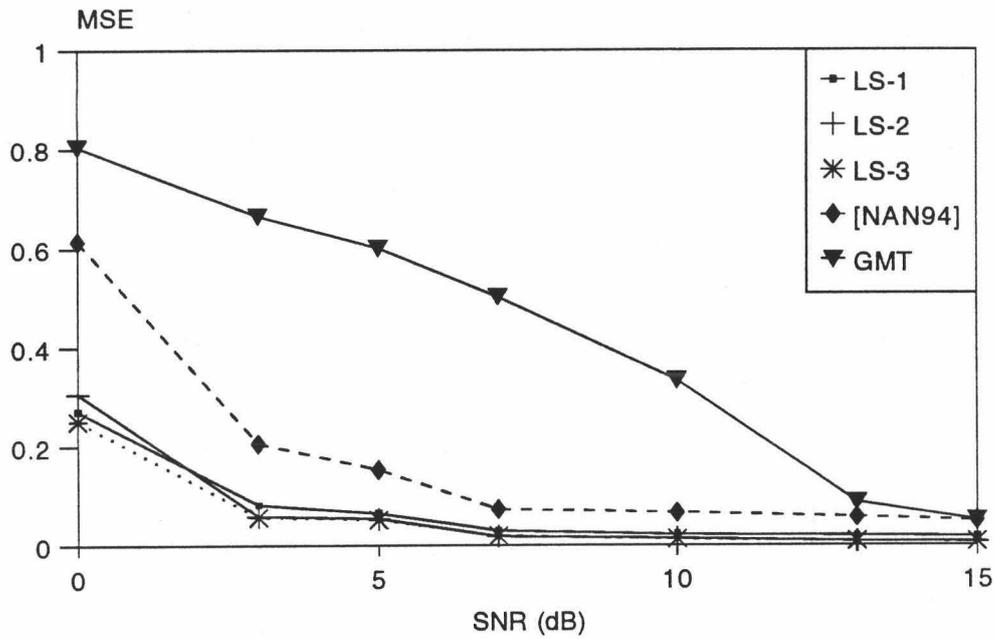


Figura (5.1)(a). MSE frente a la SNR para el modelo MA(2) [1 -2.0833 1] con N=1024.

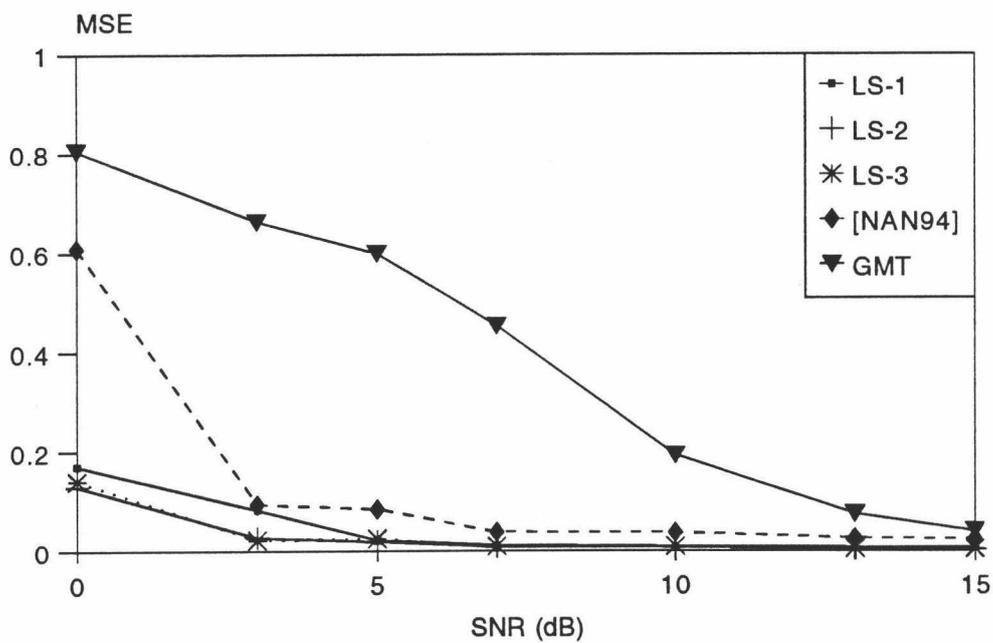


Figura (5.1)(b). MSE frente a la SNR para el modelo MA(2) [1 -2.0833 1] con N=2048.

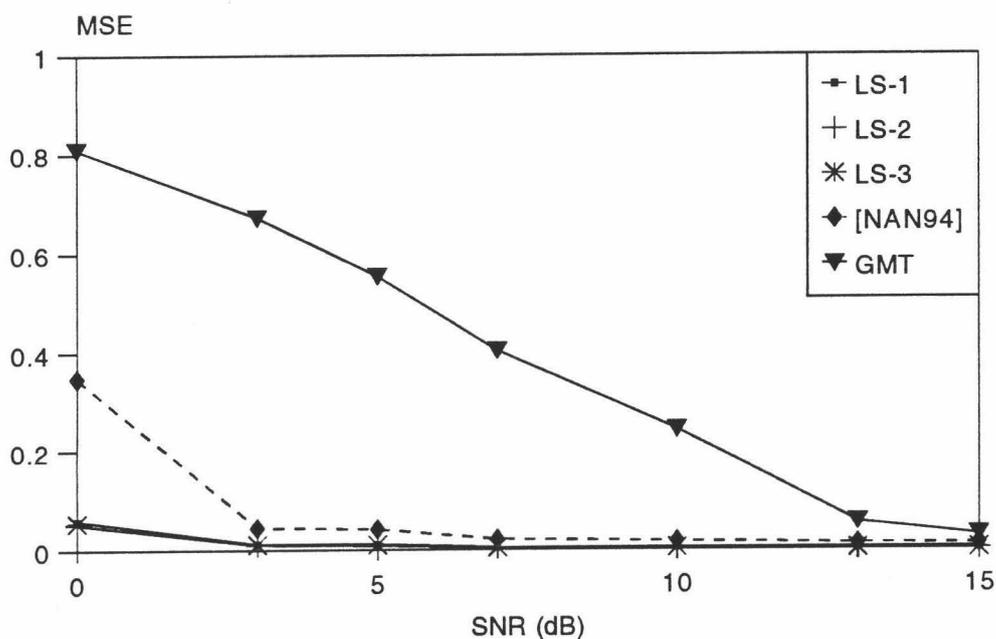


Figura (5.1)(c). MSE frente a la SNR para el modelo MA(2) [1 -2.0833 1] con N=4096.

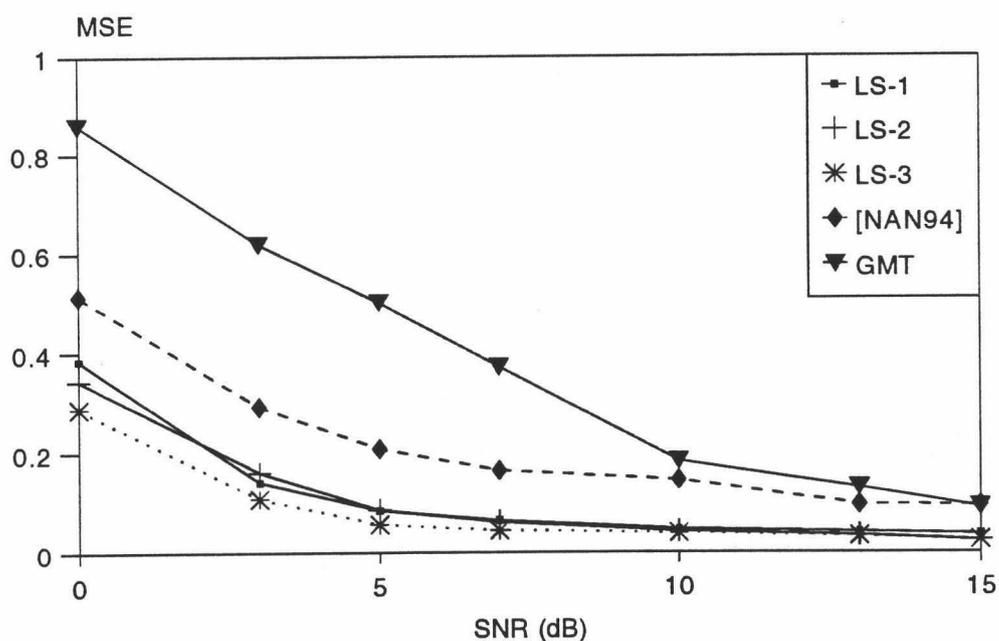


Figura (5.2)(a). MSE frente a la SNR para el modelo MA(2) [1 -2.333 0.667] con N=1024.

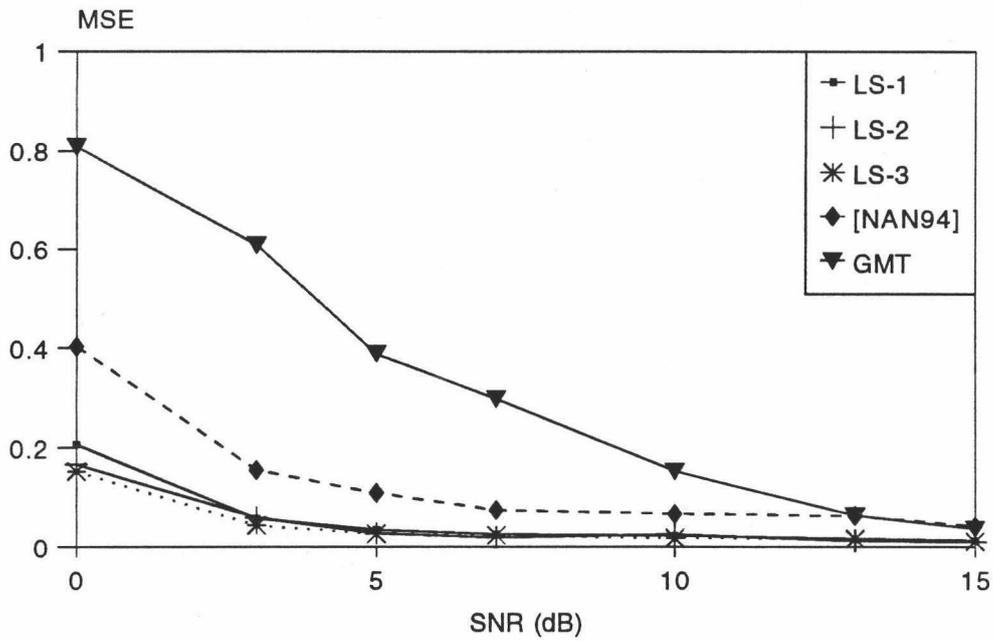


Figura (5.2)(b). MSE frente a la SNR para el modelo $[1 \ -2.333 \ 0.667]$ con $N=2048$.

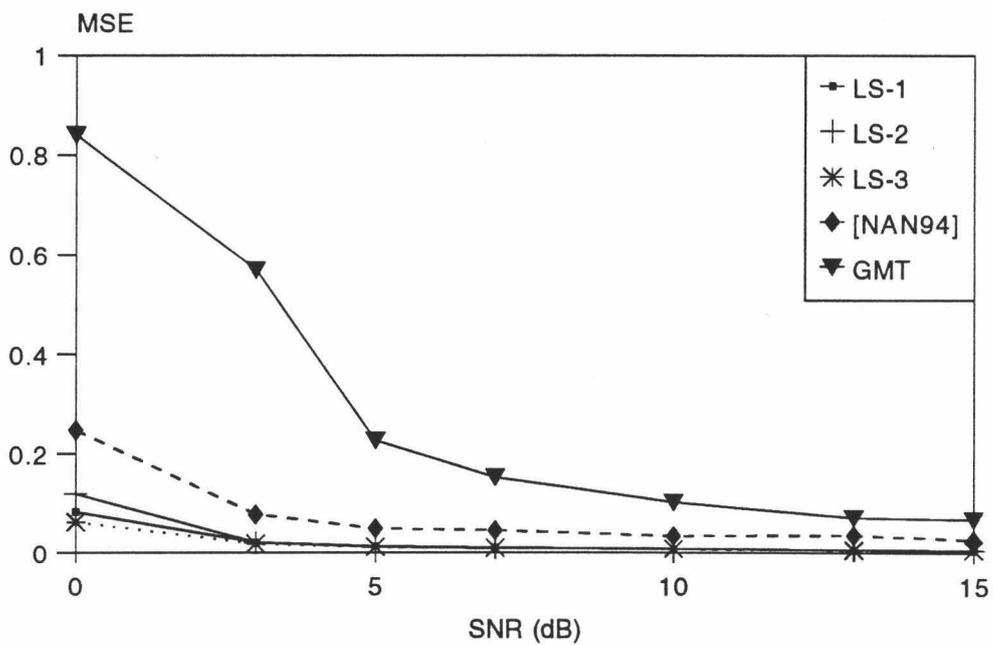


Figura (5.2)(c). MSE frente a la SNR para el modelo $[1 \ -2.333 \ 0.667]$ con $N=4096$.

Las figuras 5.1 (a) (b) (c) para el modelo (5.25), y las figuras 5.2 (a) (b) (c) para el modelo (5.26), muestran el MSE frente a la SNR a diferente número de datos cuando se emplean los algoritmos LS-1, LS-2 y LS-3 (LS-4 es un algoritmo bastante sesgado en estos ejemplos y no se muestra en estas figuras) y los de [TUG91] y [NAN94]. Basándonos en los resultados obtenidos podemos afirmar que:

(a) Los algoritmos propuestos LS-1, LS-2 y LS-3 dan los parámetros con el error cuadrático medio más bajo.

(b) El algoritmo LS-2 parece aventajar en términos de sesgo y varianza de los parámetros a todos los restantes algoritmos.

(c) Las estimaciones dadas por el método GMT están claramente sesgadas ya que este método hace uso de la secuencia de autocorrelación de la señal, que está afectada por el ruido Gaussiano coloreado.

(d) Los algoritmos LS-2 y LS-3 muestran un mayor grado de robustez que el algoritmo de mínimos cuadrados 1 de [NAN94], que usa cumulantes de tercer orden sobre la "slice" q . La razón para este comportamiento es que los algoritmos propuestos hacen uso de mucha más información estadística que [NAN94], obteniéndose así una mayor precisión en las estimaciones.

Además de la obtención de parámetros, hemos aplicado el procedimiento de estimación del orden del modelo MA descrito en la sección anterior a estos ejemplos. En este caso hemos usado el algoritmo LS-2 para estimar los parámetros asumiendo los ordenes $m=1\dots 7$ y hemos empleado estadística de tercer orden en (5.22). En las figuras 5.3 (a) (b) (para el modelo (5.25)) y 5.4 (a) (b) (para el modelo (5.26)) mostramos la mediana de la función $F(m)$, $m=1\dots 7$ normalizada a su máximo valor para 100 ejecuciones independientes y valores de la relación señal-ruido de $SNR=10$ dB y 5 dB. Como se puede observar, estas funciones muestran un mínimo claro en el orden correcto $m=2$, lo que indica que la elección ha sido correcta en la mayoría de los casos.

SNR = 0 dB

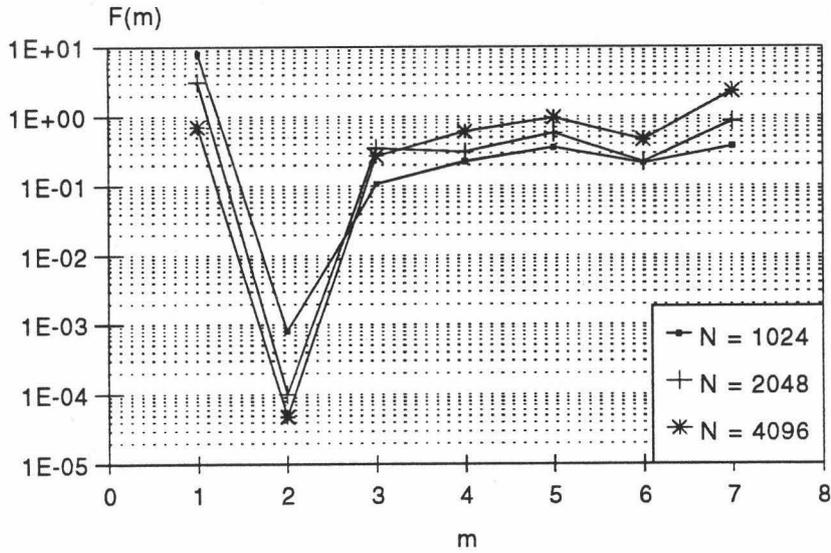


Figura (5.3)(a). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1]. (a) SNR = 0 dB.

SNR = 5 dB

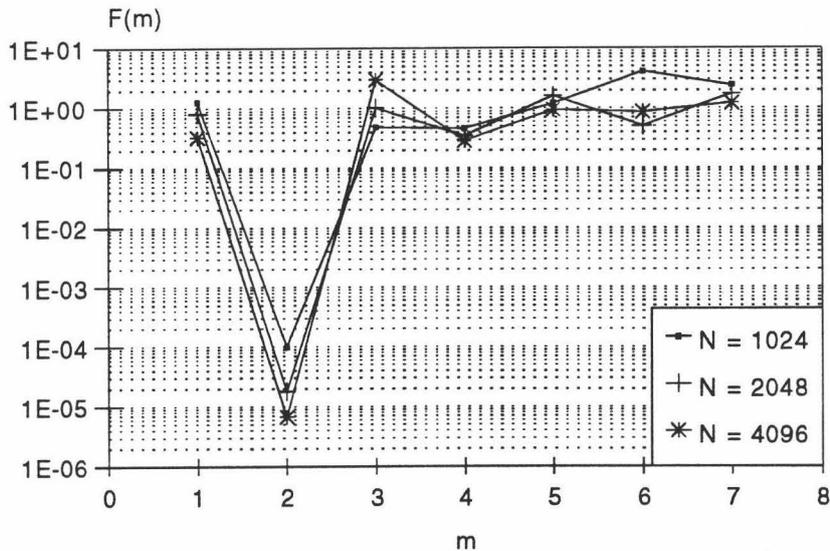


Figura (5.3)(b). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1]. (b) SNR = 5 dB.

SNR = 5 dB

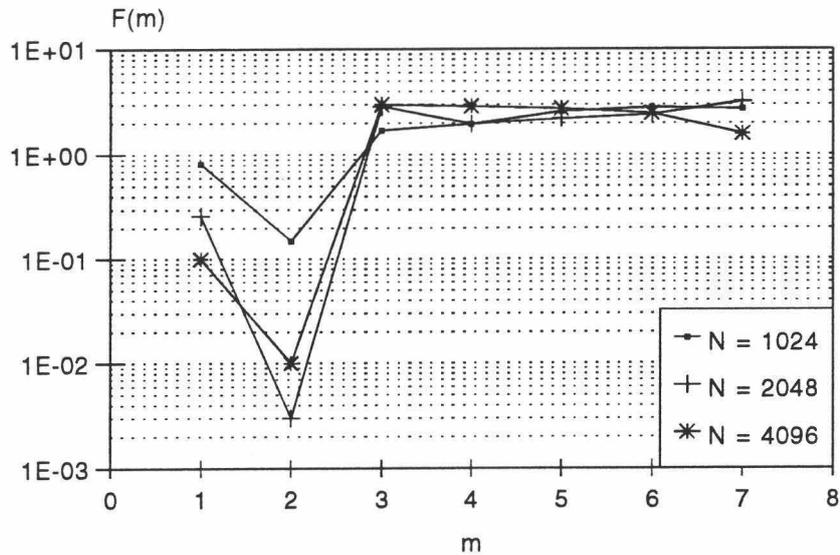


Figura (5.4)(a). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(2) [1, -2.333, 0.667]. (a) SNR = 5 dB.

SNR = 10 dB

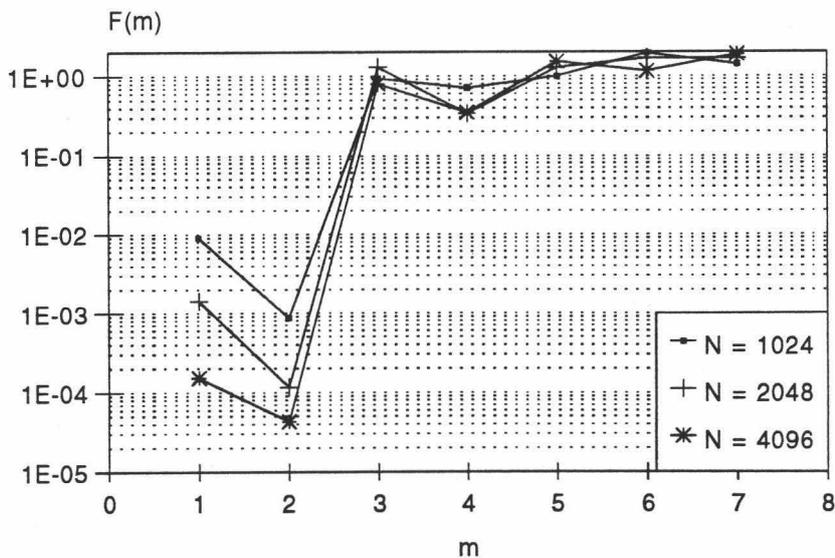


Figura (5.4)(b). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(2) [1, -2.333, 0.667]. (b) SNR = 10 dB.

Para cuantificar el porcentaje de aciertos, la tabla (V.3) indica el número de selecciones correctas de las 100 ejecuciones efectuadas para diferentes valores de la SNR y longitud del registro de datos. Esta tabla muestra que incrementar la relación señal-ruido o el número de datos resulta en mejores selecciones del orden, y que podemos obtener buenas estimaciones hasta un nivel de SNR de 5 dB, aunque para el caso del modelo (5.25) podemos llegar hasta un nivel de 0 dB con fiabilidad.

Ejemplo [1, -2.0833, 1]

SNR Nº datos	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB
1024	76 %	87 %	94 %	100 %
2048	83 %	96 %	100 %	100 %
4096	94 %	100 %	100 %	100 %

Ejemplo [1, -2.333, 0.667]

SNR Nº datos	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB
1024	54 %	61 %	71 %	84 %
2048	63 %	67 %	83 %	94 %
4096	66 %	78 %	89 %	97 %

Tabla (V.3). Número de selecciones correctas del orden del sistema en 100 ejecuciones Montecarlo para los ejemplos de simulación del test 1.

Test 2 (Caso de modelos MA (3)). Para estudiar el caso de modelos MA de tercer orden vamos a utilizar un modelo ampliamente usado en la bibliografía [GIA89a], [NAN94], [ZHA94] y [GIA90b], que corresponde a un sistema MA de fase no mínima:

$$y(n) = w(n) + 0.9 w(n-1) + 0.385 w(n-2) - 0.771 w(n-3) + v(n). \quad (5.28)$$

Los parámetros estimados y el MSE obtenido usando los seis algoritmos que estamos comparando se muestran en la tabla (V.4) (a)-(f) para diferentes valores de la SNR y longitud del registro de datos. Como en el test anterior, los resultados provienen de 500 ejecuciones independientes para cada uno de los seis estimadores. En este ejemplo, los cuatro algoritmos propuestos proporcionan estimadores consistentes de los coeficientes del sistema hasta un nivel de 5 dB, mientras que el sesgo llega a ser importante a una SNR de 0 dB y bajo número de datos. En conjunto, los algoritmos LS-4, LS-2 y LS-3 parecen mostrar un MSE más bajo y mejores estimaciones que los otros algoritmos estudiados. Nótese, que a diferencia al ejemplo anterior, el algoritmo LS-4 está menos afectado por errores de estimación de los cumulantes debido al pequeño valor absoluto de la secuencia de cumulantes para este ejemplo concreto.

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)= 0.900	0.553 ± 0.330	0.623 ± 0.382	0.574 ± 0.243	0.735 ± 0.209	0.691 ± 0.316	0.366 ± 0.191
b(2)= 0.385	0.329 ± 0.184	0.353 ± 0.314	0.286 ± 0.165	0.450 ± 0.093	0.450 ± 0.359	0.452 ± 0.134
b(3)=-0.771	-0.601 ± 0.208	-0.626 ± 0.203	-0.611 ± 0.156	-0.678 ± 0.170	-0.697 ± 0.243	-0.304 ± 0.100
MSE	0.133 ± 0.204	0.121 ± 0.190	0.098 ± 0.132	0.085 ± 0.095	0.133 ± 0.270	0.224 ± 0.087

Tabla (V.4)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2. (a) SNR = 5 dB y N=1024 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)= 0.900	0.789 ± 0.156	0.812 ± 0.123	0.794 ± 0.094	0.849 ± 0.113	0.801 ± 0.181	0.366 ± 0.139
b(2)= 0.385	0.371 ± 0.096	0.360 ± 0.102	0.343 ± 0.091	0.399 ± 0.052	0.399 ± 0.236	0.431 ± 0.092
b(3)=-0.771	-0.731 ± 0.103	-0.732 ± 0.069	-0.721 ± 0.073	-0.745 ± 0.091	-0.721 ± 0.221	-0.302 ± 0.077
MSE	0.023 ± 0.028	0.015 ± 0.021	0.014 ± 0.015	0.016 ± 0.018	0.058 ± 0.118	0.212 ± 0.071

Tabla (V.4)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2. (b) SNR = 5 dB y N=2048 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)= 0.900	0.838 ± 0.105	0.867 ± 0.114	0.843 ± 0.082	0.862 ± 0.095	0.837 ± 0.111	0.373 ± 0.098
b(2)= 0.385	0.366 ± 0.067	0.370 ± 0.079	0.356 ± 0.072	0.403 ± 0.044	0.396 ± 0.175	0.435 ± 0.072
b(3)=-0.771	-0.734 ± 0.082	-0.744 ± 0.057	-0.734 ± 0.057	-0.751 ± 0.070	-0.756 ± 0.138	-0.305 ± 0.051
MSE	0.010 ± 0.014	0.009 ± 0.012	0.008 ± 0.009	0.010 ± 0.012	0.026 ± 0.043	0.202 ± 0.052

Tabla (V.4)(c). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2. (c) SNR = 5 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)= 0.900	0.185 ± 0.456	0.310 ± 0.569	0.059 ± 0.428	0.719 ± 0.335	0.403 ± 0.703	0.148 ± 0.292
b(2)= 0.385	0.279 ± 0.372	0.324 ± 0.503	0.166 ± 0.291	0.530 ± 0.164	0.545 ± 0.594	0.581 ± 0.307
b(3)=-0.771	-0.342 ± 0.395	-0.357 ± 0.413	-0.359 ± 0.288	-0.564 ± 0.220	-0.542 ± 0.671	-0.055 ± 0.110
MSE	0.472 ± 0.471	0.495 ± 0.605	0.498 ± 0.434	0.180 ± 0.108	0.631 ± 1.286	0.514 ± 0.087

Tabla (V.4)(d). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2. (d) SNR = 0 dB y N=1024 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)= 0.900	0.327 ± 0.389	0.484 ± 0.427	0.500 ± 0.421	0.701 ± 0.310	0.590 ± 0.447	0.129 ± 0.218
b(2)= 0.385	0.271 ± 0.251	0.351 ± 0.269	0.359 ± 0.425	0.512 ± 0.159	0.578 ± 0.523	0.566 ± 0.229
b(3)=-0.771	-0.607 ± 0.287	-0.647 ± 0.265	-0.618 ± 0.448	-0.685 ± 0.209	-0.735 ± 0.404	-0.075 ± 0.069
MSE	0.284 ± 0.311	0.289 ± 0.396	0.294 ± 0.319	0.168 ± 0.113	0.301 ± 0.560	0.476 ± 0.087

Tabla (V.4)(e). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2. (e) SNR = 0 dB y N=2048 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)= 0.900	0.701 ± 0.228	0.783 ± 0.243	0.784 ± 0.269	0.724 ± 0.267	0.779 ± 0.248	0.092 ± 0.101
b(2)= 0.385	0.335 ± 0.151	0.354 ± 0.204	0.354 ± 0.206	0.446 ± 0.089	0.502 ± 0.358	0.518 ± 0.108
b(3)=-0.771	-0.624 ± 0.176	-0.665 ± 0.181	-0.667 ± 0.182	-0.768 ± 0.175	-0.767 ± 0.268	-0.068 ± 0.049
MSE	0.085 ± 0.092	0.076 ± 0.084	0.080 ± 0.107	0.056 ± 0.113	0.112 ± 0.275	0.465 ± 0.059

Tabla (V.4)(f). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2. (f) SNR = 0 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

Hemos aplicado también el procedimiento de selección del orden del modelo MA a este ejemplo, usando los coeficientes estimados dados por el algoritmo LS-2 para todos los órdenes dados. La figura 5.5 (a) (b) muestra el comportamiento del algoritmo, representando la mediana de la función $F(m)$, $m=1...7$ normalizada a su valor más alto cuando la SNR está fijada a 10 y 5 dB respectivamente. La figura 5.5 (a) muestra un mínimo claro en $m=3$, indicando un orden del modelo de 3. En la figura 5.5 (b) el mínimo aparece menos pronunciado en el orden correcto $m=3$, debido a que se obtienen valores pequeños de la función $F(m)$ para $m=1$.

SNR = 10 dB

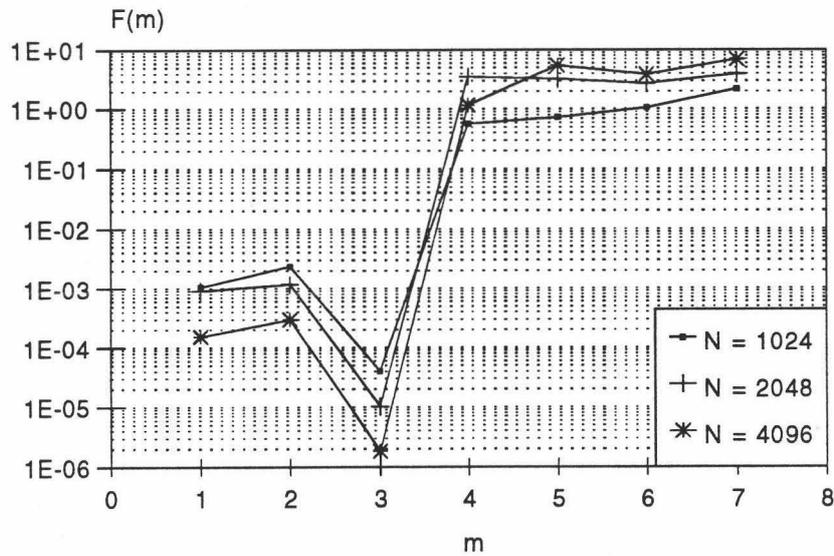


Figura (5.5)(a). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(3) [1, 0.9, 0.385, -0.771]. (a) SNR = 10 dB.

SNR = 5 dB

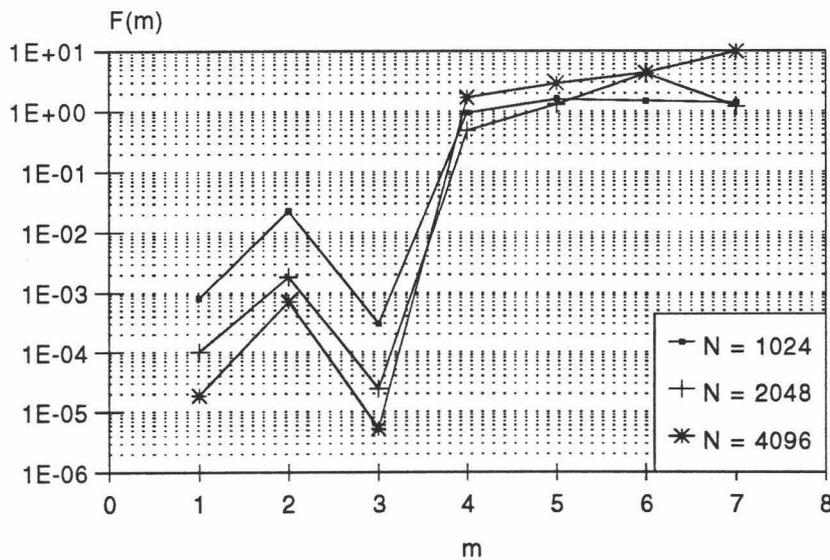


Figura (5.5)(b). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(3) [1, 0.9, 0.385, -0.771]. (b) SNR = 5 dB.

Esto nos indica que cuando la SNR es baja y la longitud del registro de datos de la serie de salida disminuye, el algoritmo tiende a infradeterminar el orden para este ejemplo; debido al pequeño valor de los coeficientes del modelo a veces la señal de salida queda mejor modelada por un sistema MA de orden 1. Este comportamiento aparece de forma más nítida en la tabla (V.5), que indica el tanto por ciento de aciertos en el orden.

SNR N° datos	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB
1024	47 %	71 %	80 %	92 %
2048	68 %	83 %	87 %	96 %
4096	78 %	91 %	94 %	100 %

Tabla (V.5). Número de selecciones correctas del orden del sistema en 100 ejecuciones Montecarlo para el ejemplo de simulación del test 2.

De esta tabla podemos afirmar que buenas selecciones del orden son posibles hasta un nivel de SNR de 5 dB, mientras que cuando la SNR es menor es necesario un mayor número de datos para obtener un mayor índice de fiabilidad.

Test 3 (caso de modelos MA (5)). En este ejemplo de simulación la señal observada viene dada por un modelo MA de fase no mínima de orden 5 usado en [ZHA94], [GIA90b]:

$$y(n) = w(n) - 2.33 w(n-1) + 0.75 w(n-2) + 0.5 w(n-3) + \quad (5.29)$$

$$+ 0.3 w(n-4) - 1.4 w(n-5) + v(n).$$

El resultado del experimento Montecarlo para tres longitudes de datos diferentes y SNR de 10, 5 y 0 dB se muestra en la tabla (V.6)(a)-(g). Para el caso de 0 dB no incluimos todos los resultados para diferente longitud del registro de datos debido a que no se produce una estimación consistente por ningún método. Como puede observarse si comparamos esta tabla con las de los modelos anteriores, se obtienen peores resultados globales a una SNR dada para todos los algoritmos a medida que el modelo posee órdenes mayores. Entre los algoritmos estudiados, los algoritmos LS-2 y LS-1 dan un MSE mas bajo y mejores estimaciones de los coeficientes en términos de sesgo y varianza que los otros algoritmos. En conjunto, el algoritmo LS-2 vuelve a proporcionar los mejores resultados.

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)=-2.330	-1.594 ± 0.424	-1.857 ± 0.482	-1.863 ± 0.489	-1.321 ± 0.713	-1.590 ± 0.546	-1.007 ± 0.377
b(2)= 0.750	0.293 ± 0.466	0.510 ± 0.815	0.538 ± 0.888	0.571 ± 0.217	0.612 ± 0.419	0.514 ± 0.296
b(3)= 0.500	0.250 ± 0.430	0.330 ± 0.628	0.288 ± 0.798	0.444 ± 0.141	0.161 ± 0.449	0.155 ± 0.225
b(4)= 0.300	0.301 ± 0.247	0.344 ± 0.611	0.295 ± 0.659	0.418 ± 0.126	0.295 ± 0.306	-0.093 ± 0.149
b(5)=-1.400	-0.897 ± 0.395	-1.073 ± 0.314	-1.167 ± 0.789	-0.731 ± 0.661	-1.021 ± 0.550	-0.989 ± 0.344
MSE	0.214 ± 0.173	0.196 ± 0.154	0.247 ± 0.268	0.497 ± 0.222	0.203 ± 0.205	0.287 ± 0.146

Tabla (V.6)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 2. (a) SNR = 10 dB y N=1024 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
b(1)=-2.330	-1.780 ± 0.289	-2.210 ± 0.384	-1.959 ± 0.316	-1.571 ± 0.903	-2.021 ± 0.390	-1.294 ± 0.226
b(2)= 0.750	0.384 ± 0.387	0.855 ± 0.439	0.549 ± 0.503	0.730 ± 0.336	0.729 ± 0.400	0.569 ± 0.232
b(3)= 0.500	0.338 ± 0.306	0.276 ± 0.397	0.349 ± 0.508	0.562 ± 0.212	0.351 ± 0.300	0.181 ± 0.161
b(4)= 0.300	0.302 ± 0.169	0.248 ± 0.187	0.432 ± 0.460	0.402 ± 0.098	0.295 ± 0.229	-0.181 ± 0.101
b(5)=-1.400	-1.054 ± 0.299	-1.391 ± 0.309	-1.293 ± 0.424	-0.873 ± 0.396	-1.363 ± 0.354	-1.274 ± 0.214
MSE	0.108 ± 0.066	0.079 ± 0.087	0.127 ± 0.099	0.291 ± 0.206	0.071 ± 0.065	0.176 ± 0.056

Tabla (V.6)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 2. (a) SNR = 10 dB y N=2048 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
b(1)=-2.330	-1.997 ± 0.361	-2.271 ± 0.226	-1.970 ± 0.253	-1.766 ± 1.010	-2.178 ± 0.274	-1.407 ± 0.239
b(2)= 0.750	0.600 ± 0.535	0.731 ± 0.302	0.450 ± 0.522	0.700 ± 0.317	0.781 ± 0.325	0.604 ± 0.201
b(3)= 0.500	0.337 ± 0.318	0.377 ± 0.201	0.659 ± 0.641	0.512 ± 0.198	0.432 ± 0.261	0.223 ± 0.123
b(4)= 0.300	0.318 ± 0.130	0.302 ± 0.131	0.388 ± 0.620	0.403 ± 0.135	0.301 ± 0.128	-0.172 ± 0.092
b(5)=-1.400	-1.243 ± 0.206	-1.378 ± 0.216	-1.378 ± 0.457	-1.003 ± 0.549	-1.413 ± 0.211	-1.371 ± 0.202
MSE	0.079 ± 0.066	0.030 ± 0.024	0.106 ± 0.138	0.220 ± 0.167	0.035 ± 0.032	0.142 ± 0.056

Tabla (V.6)(c). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 2. (a) SNR = 10 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coefficientes						
b(1)=-2.330	-1.502 ± 0.562	-1.618 ± 0.595	-1.408 ± 0.361	-1.061 ± 0.801	-1.195 ± 0.499	-0.484 ± 0.265
b(2)= 0.750	0.239 ± 0.441	0.479 ± 0.787	0.302 ± 0.453	0.548 ± 0.238	0.330 ± 0.317	0.346 ± 0.203
b(3)= 0.500	0.182 ± 0.340	0.223 ± 0.481	0.209 ± 0.444	0.499 ± 0.211	0.130 ± 0.360	0.181 ± 0.215
b(4)= 0.300	0.226 ± 0.302	0.368 ± 0.718	0.142 ± 0.408	0.465 ± 0.162	0.275 ± 0.193	-0.107 ± 0.172
b(5)=-1.400	-0.864 ± 0.451	-1.132 ± 0.715	-1.131 ± 0.611	-0.727 ± 0.403	-0.838 ± 0.614	-0.471 ± 0.223
MSE	0.237 ± 0.158	0.212 ± 0.255	0.290 ± 0.156	0.632 ± 0.202	0.298 ± 0.236	0.530 ± 0.117

Tabla (V.6)(d). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 2. (a) SNR = 5 dB y N=1024 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coefficientes						
b(1)=-2.330	-1.780 ± 0.289	-2.172 ± 0.293	-1.939 ± 0.271	-1.556 ± 0.938	-1.705 ± 0.414	-0.551 ± 0.201
b(2)= 0.750	0.384 ± 0.387	0.645 ± 0.503	0.298 ± 0.471	0.615 ± 0.317	0.584 ± 0.400	0.401 ± 0.155
b(3)= 0.500	0.338 ± 0.306	0.383 ± 0.485	0.785 ± 0.470	0.501 ± 0.207	0.251 ± 0.424	0.198 ± 0.142
b(4)= 0.300	0.302 ± 0.169	0.425 ± 0.491	0.467 ± 0.643	0.484 ± 0.189	0.285 ± 0.223	-0.151 ± 0.155
b(5)=-1.400	-1.054 ± 0.299	-1.388 ± 0.346	-1.048 ± 0.316	-0.856 ± 0.453	-1.084 ± 0.436	-0.525 ± 0.206
MSE	0.108 ± 0.066	0.107 ± 0.084	0.154 ± 0.114	0.341 ± 0.186	0.142 ± 0.153	0.484 ± 0.094

Tabla (V.6)(e). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 2. (a) SNR = 5 dB y N=2048 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)=-2.330	-1.997 ± 0.361	-2.214 ± 0.228	-1.969 ± 0.253	-1.737 ± 1.005	-1.991 ± 0.362	-0.556 ± 0.196
b(2)= 0.750	0.600 ± 0.535	0.824 ± 0.452	0.450 ± 0.522	0.409 ± 0.491	0.768 ± 0.442	0.482 ± 0.163
b(3)= 0.500	0.337 ± 0.318	0.367 ± 0.493	0.659 ± 0.641	0.492 ± 0.472	0.262 ± 0.385	0.213 ± 0.163
b(4)= 0.300	0.318 ± 0.130	0.342 ± 0.490	0.388 ± 0.620	0.401 ± 0.196	0.269 ± 0.159	-0.169 ± 0.096
b(5)=-1.400	-1.243 ± 0.206	-1.329 ± 0.331	-1.378 ± 0.457	-0.998 ± 0.373	-1.143 ± 0.389	-0.518 ± 0.135
MSE	0.079 ± 0.066	0.076 ± 0.072	0.131 ± 0.138	0.286 ± 0.138	0.092 ± 0.105	0.462 ± 0.087

Tabla (V.6)(f). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 2. (a) SNR = 5 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-1	LS-2	LS-3	LS-4	[NAN94]	GMT
Coeficientes						
b(1)=-2.330	-1.256 ± 0.430	-1.486 ± 0.491	-1.146 ± 0.293	-0.895 ± 0.579	-1.452 ± 0.611	-0.153 ± 0.133
b(2)= 0.750	0.222 ± 0.386	0.488 ± 0.608	0.282 ± 0.451	0.579 ± 0.287	0.504 ± 0.421	0.415 ± 0.157
b(3)= 0.500	0.239 ± 0.322	0.358 ± 0.606	0.205 ± 0.496	0.494 ± 0.256	0.206 ± 0.404	0.384 ± 0.151
b(4)= 0.300	0.274 ± 0.246	0.285 ± 0.246	0.241 ± 0.301	0.515 ± 0.159	0.257 ± 0.284	-0.083 ± 0.150
b(5)=-1.400	-0.901 ± 0.346	-0.987 ± 0.404	-0.952 ± 0.443	-0.649 ± 0.422	-0.935 ± 0.542	-0.169 ± 0.101
MSE	0.247 ± 0.168	0.186 ± 0.178	0.274 ± 0.115	0.658 ± 0.190	0.238 ± 0.212	0.713 ± 0.063

Tabla (V.6)(g). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 2. (a) SNR = 5 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

SNR = 10 dB

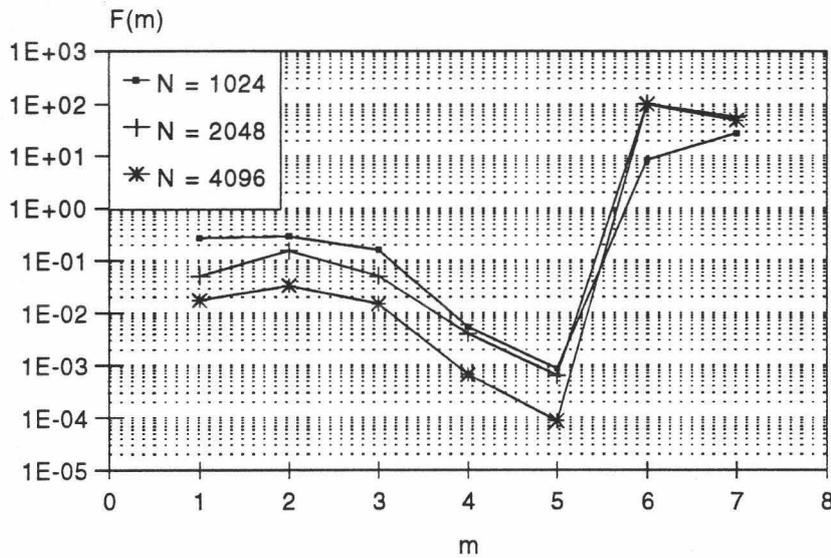


Figura (5.6)(a). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(5) [1, -2.33, 0.75, 0.50, 0.30, -1.40]. (a) SNR = 10 dB.

SNR = 5 dB

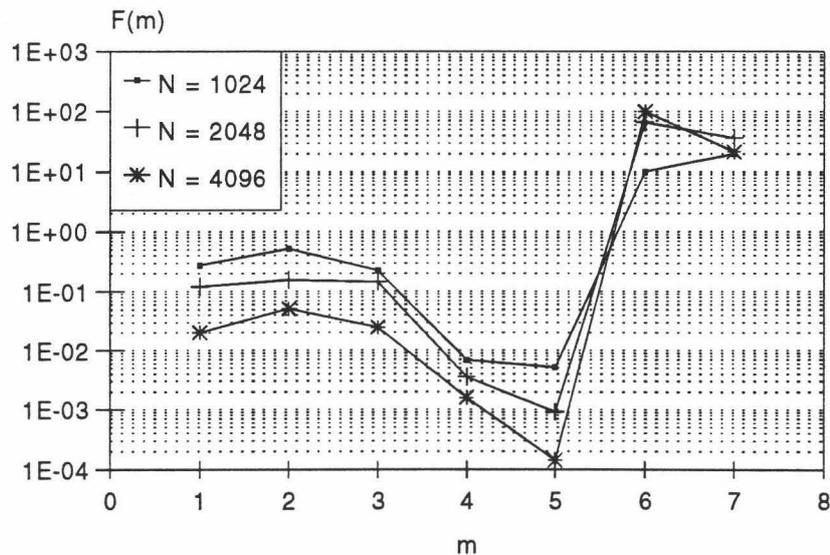


Figura (5.6)(b). Gráfica semilogarítmica de la mediana de la función $F(m)$ normalizada para el proceso MA(5) [1, -2.33, 0.75, 0.50, 0.30, -1.40]. (b) SNR = 5 dB.

La aplicación del método de selección del orden del modelo da los resultados mostrados en la figura 5.6 (a) (b) para la mediana de $F(m)$, $m=1...7$ a niveles de SNR = 10 y 5 dB. El fuerte mínimo que muestran estos gráficos en $m=5$ indica que el orden correcto se ha seleccionado en la mayoría de los casos. El número de elecciones correctas del orden del modelo para 100 ejecuciones independientes se muestra en la tabla (V.7). Como ocurría en los ejemplos anteriores, estos resultados revelan la capacidad de este método para determinar el orden correcto hasta un nivel de 5 dB.

SNR	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB
Nº datos				
1024	44 %	73 %	84 %	91 %
2048	58 %	92 %	99 %	100 %
4096	91 %	97 %	100 %	100 %

Tabla (V.7). Número de selecciones correctas del orden del sistema en 100 ejecuciones Montecarlo para el ejemplo de simulación del test 3.

V-6. RESULTADOS DE SIMULACIÓN. PROCESOS DISTRIBUIDOS SIMÉTRICAMENTE.

En esta sección se van a aplicar los algoritmos de identificación de sistemas MA de fase no mínima y selección del orden del modelo descritos en la sección V-4 y V-5 al caso de que el sistema MA sea excitado por un proceso distribuido simétricamente y, la señal observada esté contaminada con ruido aditivo Gaussiano [RUI95d]. En este caso los cumulantes de tercer orden del proceso son nulos, por lo que hemos de aplicar los

algoritmos que usan únicamente estadística de cuarto orden. Al igual que en la sección anterior, los resultados que vamos a exponer se van a referir fundamentalmente al caso de que el ruido contaminante sea ruido Gaussiano coloreado por ser la situación de más interés, aunque incluiremos un ejemplo de ruido blanco para mostrar que los algoritmos propuestos son también útiles en este caso. En las simulaciones que se llevaron a cabo comparamos el comportamiento de los algoritmos propuestos LS-5, LS-6, LS-7 y LS-8 (con $l=q-1$) con la versión modificada del método Giannakis-Mendel en estadística de cuarto orden propuesta por Tugnait [TUG90] [TUG91], que vamos a seguir denominando método GMT. Conviene hacer notar que hasta ahora el caso de estadística de cuarto orden no ha sido apenas tratado en la bibliografía, y en lo que a algoritmos lineales basados en una solución de mínimos cuadrados se refiere, el método GMT es prácticamente el único propuesto. El algoritmo LS-9 también propuesto en la sección V-3(b) no se incluye en los resultados pues, como ocurría con el algoritmo LS-4 en la sección V-5, al considerar las ecuaciones como lineales en $b^3(i)$, $i=1\dots q$, son muy sensibles a los errores de estimación de los cumulantes. En el caso de cuarto orden, donde los cumulantes exhiben una mayor varianza, este algoritmo deja de ser útil para una solución lineal.

En las simulaciones que siguen nos proponemos estudiar el efecto del nivel de ruido coloreado y de la longitud del registro de datos de la serie temporal sobre la estimación de los coeficientes del sistema MA en términos de sesgo y varianza. Vamos a seguir utilizando los tres test usados anteriormente en la sección V-5, que representan procesos MA de órdenes diferentes, aunque por simplicidad para el test 1 sólo mostraremos los resultados para uno de los modelos de orden 2. Para excitar al sistema MA tomamos como señal de entrada un proceso aleatorio i.i.d. de media cero distribuido según una distribución Laplaciana con un factor de asimetría $\gamma_{3w}=0$ y kurtosis teórica γ_{4w} igual a 12. La señal observada $y(n)$ viene dada por la ecuación (4.12) donde el ruido aditivo de media cero es un proceso Gaussiano coloreado, obtenido filtrando ruido

Gaussiano blanco de media cero a través del mismo sistema ARMA usado en la sección V-5. Este ruido es añadido a la señal de salida de forma que se obtenga la razón señal-ruido (SNR) deseada. Además de estimar los coeficientes de los modelos, vamos a tratar de estimar el orden del sistema a través del algoritmo de elección del orden del sistema MA de la sección V-5 usando estadística de cuarto orden ($k = 4$ en la ecuación (5.23)). Al aplicar el algoritmo en este caso haremos una pequeña modificación, que consiste en buscar la reconstrucción de la "slice" (0,0) de los cumulantes de cuarto orden en lugar de la "slice" (0,q) en la ecuación (5.23). La razón de esta sustitución es que todos los algoritmos propuestos para estadística de cuarto orden usan la "slice" (0,q) para estimar los parámetros, por lo que es mas conveniente usar otra "slice" diferente para testear la capacidad de reconstrucción de dicha "slice" a diferentes órdenes, como lleva a cabo el algoritmo de elección del orden.

Test 1 (Caso de modelos MA (2)). Vamos a estudiar en un primer test la identificación del sistema MA de fase no mínima de orden $q=2$ dado por la ecuación (5.25). Al igual que se hizo en el caso de procesos de excitación no distribuidos simétricamente se llevan a cabo 500 realizaciones del proceso, y suponemos en primer lugar que la salida está contaminada con ruido blanco. A partir de la simulación Montecarlo de $y(n)$, se calculan la media y la desviación estándar de las parámetros estimados del sistema tanto con los algoritmos propuestos (LS-5 a LS-8) como para el algoritmo GMT. Las tablas (V.8)(a)-(d) muestran los resultados obtenidos de las simulaciones para cuatro diferentes longitudes del registro de datos de salida ($N=2048$, $N=4096$, $N=8192$ y $N=16394$) y tres valores de SNR ($SNR=10$ dB, $SNR=5$ dB y $SNR=0$ dB) así como el caso de ausencia de ruido ($SNR = \infty$). Como puede observarse de esta tabla, en el caso de estadística de cuarto orden es mucho más importante el número de datos de que conste la serie temporal que para el caso de estadística conjunta de tercer y cuarto orden. Como era de esperar, todos los estimadores proporcionan mejores resultados cuando la longitud del registro de datos

aumenta, pero se obtienen estimaciones robustas a partir de un número de datos de 4096. El comportamiento de los algoritmos en función del número de datos se puede visualizar claramente en las figuras 5.7 (a) (b) que representan el MSE en función de la longitud del registro de la serie temporal para una relación señal-ruido de 5 dB y ausencia de ruido, respectivamente. Obsérvese de estas figuras que el MSE del algoritmo GMT permanece casi invariable a partir de unos 2000 datos mientras que los algoritmos propuestos muestran una mejora significativa con el número de datos. Resulta interesante notar la gran sensibilidad del algoritmo LS-6 a la longitud del registro de la señal, lo que significa que este algoritmo se ve más afectado por los errores de estimación de los cumulantes. La misma observación cabe hacer a partir de la tabla (V.8), en las que el algoritmo LS-6 da muy buenas estimaciones para $N \geq 4096$, pero muestra una enorme varianza para un número de datos más bajo.

Estas características también se manifiestan en el caso de que no haya ruido añadido, como aparece en la tabla (V.8)(d). El algoritmo GMT da unos parámetros estimados que cambian relativamente poco con el número de datos, mientras que las estimaciones obtenidas por los algoritmos LS-5 - LS-8 mejoran a medida que los errores de estimación de la secuencia de cumulantes decrecen (i.e. el número de datos con los que se estiman aumenta). La razón por la que el algoritmo LS-6 se ve particularmente muy afectado por dichos errores hay que buscarla en las características del mismo. Como puede observarse de la sección V-3(b), en él no se asume que el coeficiente $b(0)$ vale la unidad, si no que éste forma parte del vector incógnita. Para obtener finalmente los coeficientes del sistema ha de dividirse por el coeficiente $b(0)$ estimado. Debido a la gran varianza que muestran los cumulantes de cuarto orden cuando el número de datos es bajo o la señal es muy ruidosa, en algunas ocasiones dicho coeficiente es muy pequeño, por lo que la división posterior da lugar a importantes desviaciones de los coeficientes estimados respecto a los reales del sistema.

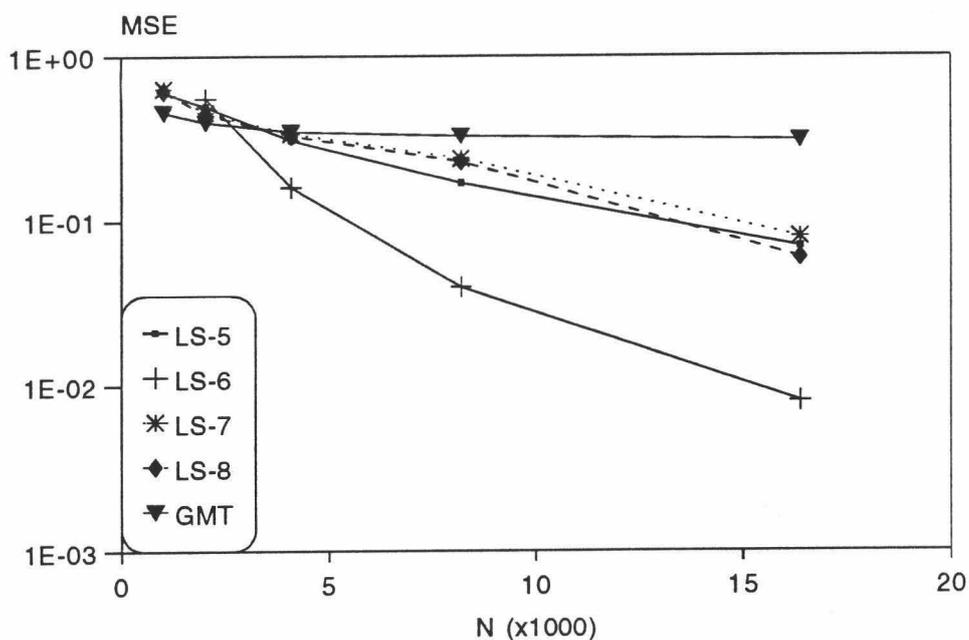


Figura (5.7)(a). MSE frente al número de datos del proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] para una SNR de 5 dB.

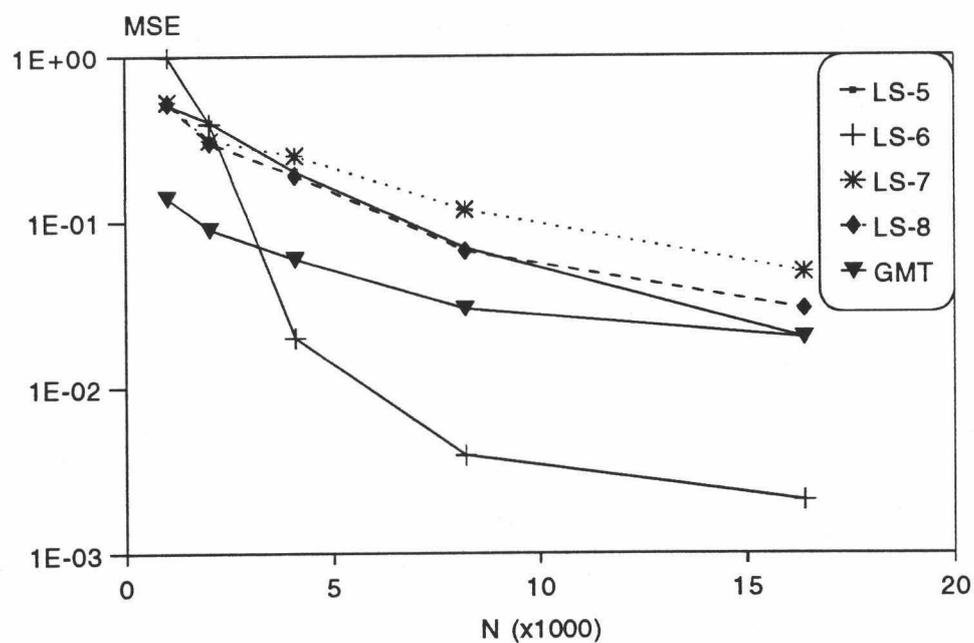


Figura (5.7)(b). MSE frente al número de datos del proceso MA(2) [1, -2.0833 1] en ausencia de ruido.

		N=2048		N=4096	
Coefficientes		b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos					
LS-5		-0.2321 ± 0.4819	0.2323 ± 0.4446	-0.4656 ± 0.7174	0.3225 ± 0.4090
LS-6		-0.6612 ± 6.7270	0.5697 ± 4.3872	-1.1084 ± 3.8933	-0.0971 ± 5.7744
LS-7		-0.3735 ± 0.8790	0.4159 ± 0.5575	-0.4822 ± 1.0371	0.5176 ± 0.6184
LS-8		-0.2911 ± 0.7283	0.3593 ± 0.4978	-0.4552 ± 0.8438	0.4586 ± 0.5080
GMT		-0.4378 ± 0.5017	0.2335 ± 0.1560	-0.5391 ± 0.5343	0.2513 ± 0.1680

		N=8192		N=16394	
Coefficientes		b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos					
LS-5		-0.6526 ± 0.7715	0.4229 ± 0.4108	-1.0518 ± 0.8211	0.5622 ± 0.3729
LS-6		-2.0313 ± 1.3403	1.1072 ± 2.1439	-1.9086 ± 2.5042	0.8524 ± 1.3272
LS-7		-0.7355 ± 1.1922	0.6276 ± 0.5688	-1.0793 ± 1.1931	0.7587 ± 0.4658
LS-8		-0.6395 ± 0.9411	0.5526 ± 0.4593	-0.9632 ± 0.9708	0.6830 ± 0.3881
GMT		-0.7911 ± 0.5589	0.2826 ± 0.1643	-1.0823 ± 0.5027	0.3380 ± 0.1601

Tabla (V.8)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1 en ruido blanco. (a) SNR = 0 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

	N=2048		N=4096	
Coefficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-0.6349 ± 0.7176	0.3666 ± 0.4044	-1.0541 ± 0.7854	0.5459 ± 0.3659
LS-6	-1.6797 ± 1.1874	0.8094 ± 1.4169	-2.0911 ± 0.8373	1.0289 ± 0.6097
LS-7	-0.9117 ± 1.0083	0.5802 ± 0.6332	-1.2947 ± 1.0852	0.7339 ± 0.5803
LS-8	-0.7984 ± 0.8448	0.5210 ± 0.5147	-1.0937 ± 0.8766	0.6471 ± 0.4742
GMT	-0.6434 ± 0.3128	0.4715 ± 0.3769	-0.7318 ± 0.2928	0.5554 ± 0.3518

	N=8192		N=16394	
Coefficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-1.4806 ± 0.7406	0.7470 ± 0.3663	-1.7137 ± 0.5205	0.8343 ± 0.2464
LS-6	-2.1153 ± 0.4328	1.0117 ± 0.2935	-2.0740 ± 0.1971	0.9868 ± 0.1332
LS-7	-1.5486 ± 1.0234	0.9128 ± 0.4846	-1.9418 ± 0.6003	0.9847 ± 0.3800
LS-8	-1.4032 ± 0.9202	0.8560 ± 0.4025	-1.7900 ± 0.4784	0.9337 ± 0.3078
GMT	-0.7670 ± 0.2882	0.5585 ± 0.2820	-0.8065 ± 0.2259	0.5508 ± 0.2756

Tabla (V.8)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1 en ruido blanco. (b) SNR = 5 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

	N=2048		N=4096	
Coeficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-0.8877 ± 0.7710	0.4841 ± 0.3951	-1.3109 ± 0.7207	0.6626 ± 0.3463
LS-6	-2.1975 ± 2.1368	1.2021 ± 1.9834	-1.9937 ± 0.4123	0.9228 ± 0.3402
LS-7	-1.1158 ± 0.9432	0.6408 ± 0.5959	-1.6591 ± 0.9361	0.8485 ± 0.5824
LS-8	-1.0249 ± 0.8223	0.5910 ± 0.5306	-1.4243 ± 0.6992	0.7633 ± 0.4750
GMT	-1.0973 ± 0.3842	0.7071 ± 0.3571	-1.3492 ± 0.4719	0.8052 ± 0.4566

	N=8192		N=16394	
Coeficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-1.6508 ± 0.6046	0.8112 ± 0.2857	-1.8643 ± 0.3595	0.9013 ± 0.1683
LS-6	-2.0759 ± 0.1825	0.9907 ± 0.1349	-2.0716 ± 0.1132	0.9893 ± 0.0867
LS-7	-1.9097 ± 0.7840	1.0014 ± 0.4150	-2.0615 ± 0.5100	1.0319 ± 0.3446
LS-8	-1.7101 ± 0.6334	0.9332 ± 0.3386	-1.9537 ± 0.3769	0.9924 ± 0.2818
GMT	-0.4211 ± 0.4578	0.7870 ± 0.3486	-1.4723 ± 0.3220	0.7596 ± 0.2245

Tabla (V.8)(c). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1 en ruido blanco. (c) SNR = 10 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

	N=2048		N=4096	
Coefficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-0.8771 ± 0.8169	0.4876 ± 0.4173	-1.3914 ± 0.7817	0.7136 ± 0.3813
LS-6	-2.0110 ± 1.2192	0.9763 ± 1.0079	-2.0265 ± 0.3259	0.9758 ± 0.2348
LS-7	-1.3838 ± 0.9753	0.7042 ± 0.6834	-1.7745 ± 1.1028	0.9328 ± 0.5354
LS-8	-1.2148 ± 0.8150	0.6424 ± 0.6068	-1.5059 ± 0.8351	0.8479 ± 0.4301
GMT	-1.5566 ± 0.4403	0.8771 ± 0.3435	-1.7597 ± 0.3922	0.9366 ± 0.3396

	N=8192		N=16394	
Coefficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-1.7434 ± 0.5297	0.8569 ± 0.2510	-1.9059 ± 0.3327	0.9222 ± 0.1566
LS-6	-2.0725 ± 0.1253	0.9929 ± 0.0951	-2.0792 ± 0.0891	0.9960 ± 0.0746
LS-7	-2.0602 ± 0.7697	1.0305 ± 0.4073	-2.0879 ± 0.4785	1.0368 ± 0.3093
LS-8	-1.8310 ± 0.5260	0.9630 ± 0.3013	-1.9917 ± 0.3595	1.0003 ± 0.2509
GMT	-1.8718 ± 0.3010	0.9527 ± 0.2490	-1.9492 ± 0.2391	0.9672 ± 0.1928

Tabla (V.8)(d). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1 en ruido blanco. (d) SNR = ∞ dB (500 ejecuciones Montecarlo).

Este mal condicionamiento del algoritmo podría corregirse si adoptásemos el criterio de tomar como una solución válida de las ecuaciones de mínimos cuadrados aquella en la que el coeficiente estimado $b(0)$ no difiera significativamente de la unidad. En aquellos casos en que $b(0)$ fuese pequeño convendría descartar la solución y tomar la de los otros algoritmos LS-5, LS-7 ó LS-8 como válida.

Por otra parte, observando los resultados de la tabla (V.8) puede concluirse que los algoritmos propuestos son mas robustos al ruido Gaussiano blanco que el algoritmo GMT. Entre todos ellos el algoritmo LS-6 da los mejores resultados en sesgo y varianza cuando el número de datos no es bajo, mientras que el algoritmo GMT muestra un sesgo mayor en sus parámetros debido a que se ve afectado por el ruido blanco. Comparando estos resultados con los del caso de estadística de tercer y cuarto orden observamos un incremento general de la varianza de los parámetros estimados que se atribuye a la mayor varianza que presentan las estimaciones de los cumulantes de cuarto orden.

La comparación de los resultados obtenidos por los diferentes métodos se visualiza más claramente en las gráficas del error cuadrático medio (MSE) entre los coeficientes MA verdaderos $b(i)$ y los estimados $\hat{b}(i)$ (MSE) definido por la ecuación (5.27) frente a la SNR, representado en las figuras 5.8 (a) (b) (c) para un número de datos de 4096, 8192 y 16384 respectivamente en ruido blanco. Basándonos en los resultados obtenidos podemos afirmar que:

- (a) En estadística de cuarto orden y con los algoritmos propuestos se obtienen estimaciones robustas a partir de una SNR de 5 dB y un número de datos superior a 4000.
- (b) Cuando la SNR es muy baja ($SNR < 5$ dB) o la longitud del registro de datos es reducido ($N < 4000$) el error cuadrático medio es muy importante para todos los algoritmos, y las estimaciones no son consistentes en general. Pueden obtenerse estimaciones adecuadas en ambientes severos de ruido si el número de datos es elevado ($N \approx 16000$).

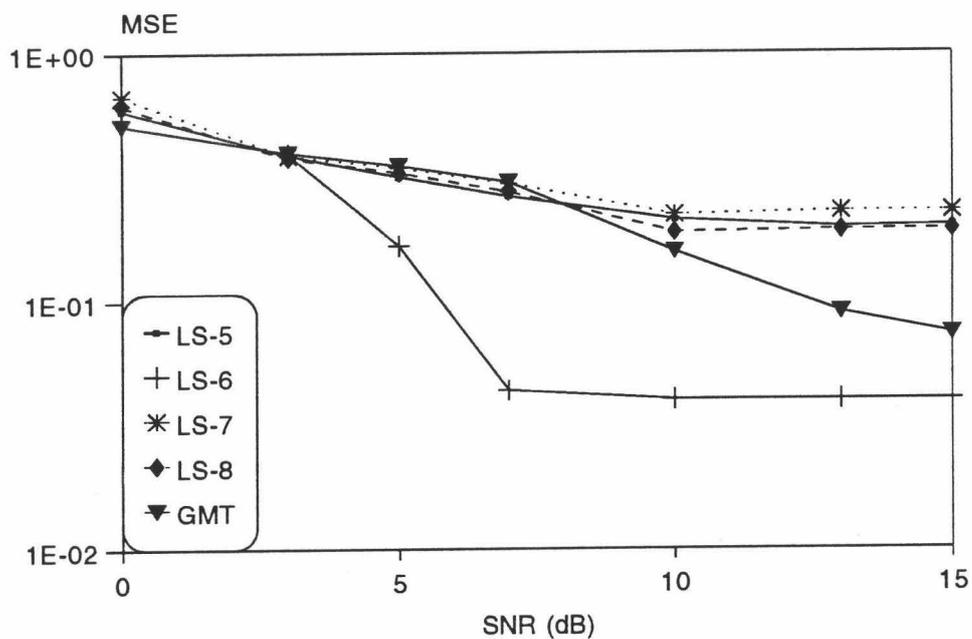


Figura (5.8)(a). MSE frente a la SNR para el sistema MA(2) [1, -2.0833, 1] con N=4096.

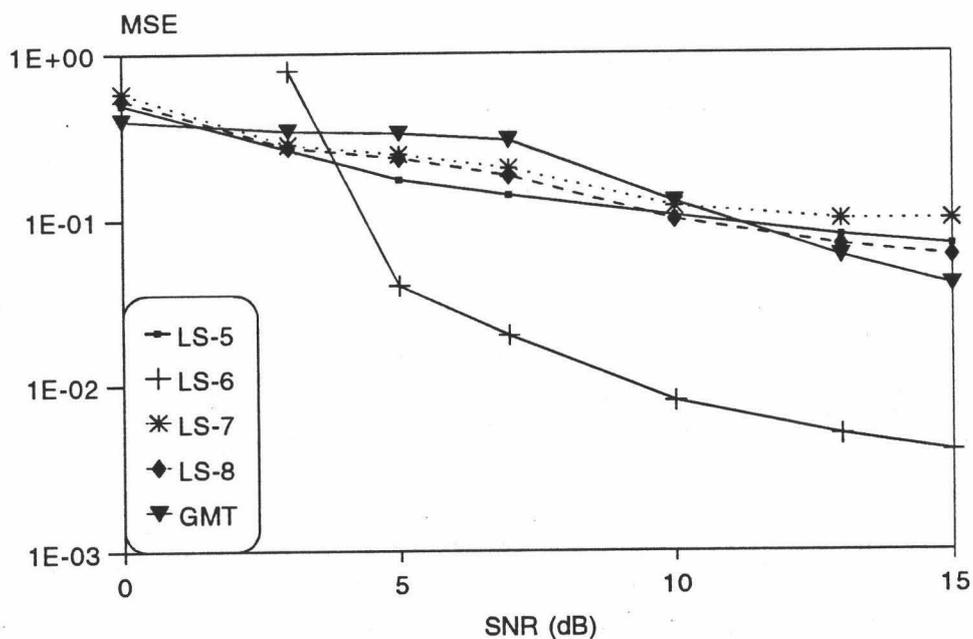


Figura (5.8)(b). MSE frente a la SNR para el sistema MA(2) [1, -2.0833, 1] con N=8192.

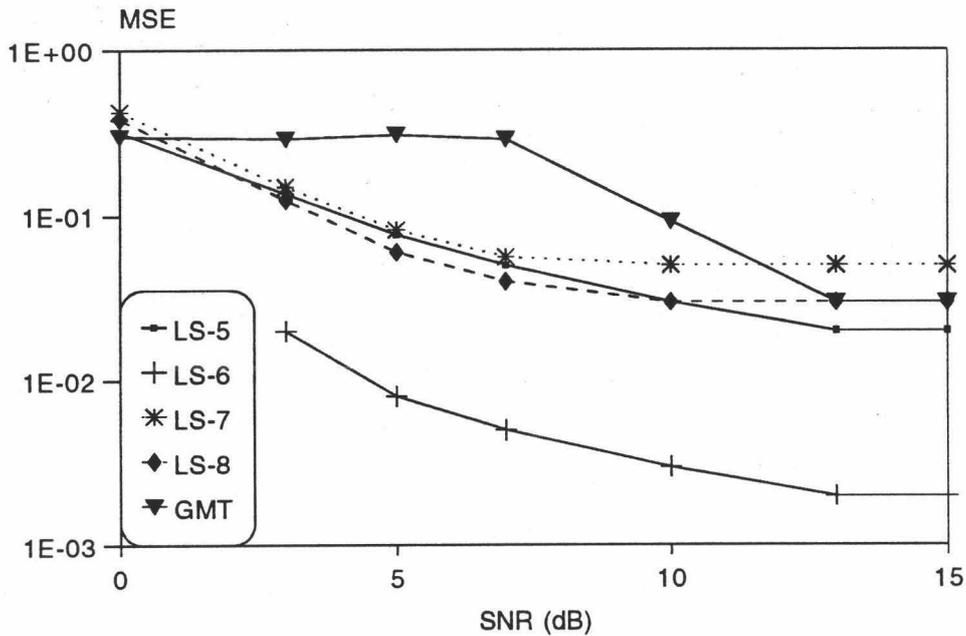


Figura (5.8)(c). MSE frente a la SNR para el sistema MA(2) [1, -2.0833, 1] con N=16384.

(c) Los algoritmos propuestos aventajan al algoritmo GMT en términos de sesgo, varianza y error cuadrático medio. Este sesgo en las estimaciones del algoritmo GMT desaparece a medida que la SNR aumenta. En general, las mayores diferencias entre dicho algoritmo y los propuestos aparecen cuando la SNR es baja y el número de datos elevado.

(d) Entre todos los algoritmos, es el LS-6 quien da mejores estimaciones y menor MSE, aunque como se comentó anteriormente este algoritmo es muy sensible a los errores de estimación de los cumulantes. Es por ello que su uso se recomienda cuando el número de datos de la serie temporal supera las 4000 muestras.

Además de tratar el caso de ruido blanco, consideramos ahora el caso en que contaminamos la salida del proceso MA (2) con ruido Gaussiano coloreado. En las tablas (V.9)(a) y (V.9) (b) se muestran el sesgo y la varianza de los coeficientes estimados por los algoritmos estudiados.

	N=8192		N=16394	
Coefficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-1.3606 ± 0.8441	0.6963 ± 0.3966	-1.6850 ± 0.5833	0.8194 ± 0.2747
LS-6	-2.2094 ± 0.6242	1.0379 ± 0.3191	-2.1162 ± 0.2484	0.9907 ± 0.1497
LS-7	-1.4978 ± 1.2009	0.8898 ± 0.5085	-1.8449 ± 0.7356	0.9222 ± 0.3839
LS-8	-1.3249 ± 0.9714	0.8022 ± 0.3721	-1.6808 ± 0.6187	0.8775 ± 0.3011
GMT	-0.4063 ± 0.0798	0.5771 ± 0.0890	-0.4104 ± 0.0569	0.5678 ± 0.0725

Tabla (V.9)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1 en ruido coloreado. (a) SNR = 5 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

	N=8192		N=16394	
Coefficientes	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000	b(1)=-2.0833	b(2)=1.0000
Algoritmos				
LS-5	-1.6388 ± 0.8090	0.8112 ± 0.2857	-1.8582 ± 0.4001	0.8993 ± 0.1878
LS-6	-2.1025 ± 0.2135	1.0036 ± 0.1352	-2.0834 ± 0.1300	0.9940 ± 0.0905
LS-7	-1.8915 ± 0.7942	0.9771 ± 0.3961	-2.0654 ± 0.6506	1.0206 ± 0.3505
LS-8	-1.7118 ± 0.6586	0.9122 ± 0.3032	-1.9356 ± 0.4969	0.9748 ± 0.2852
GMT	-0.5458 ± 0.1194	0.6323 ± 0.1782	-0.5357 ± 0.0849	0.6109 ± 0.1197

Tabla (V.9)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(2) [1, -2.0833, 1] del test 1 en ruido coloreado. (b) SNR = 10 dB (500 ejecuciones Montecarlo).

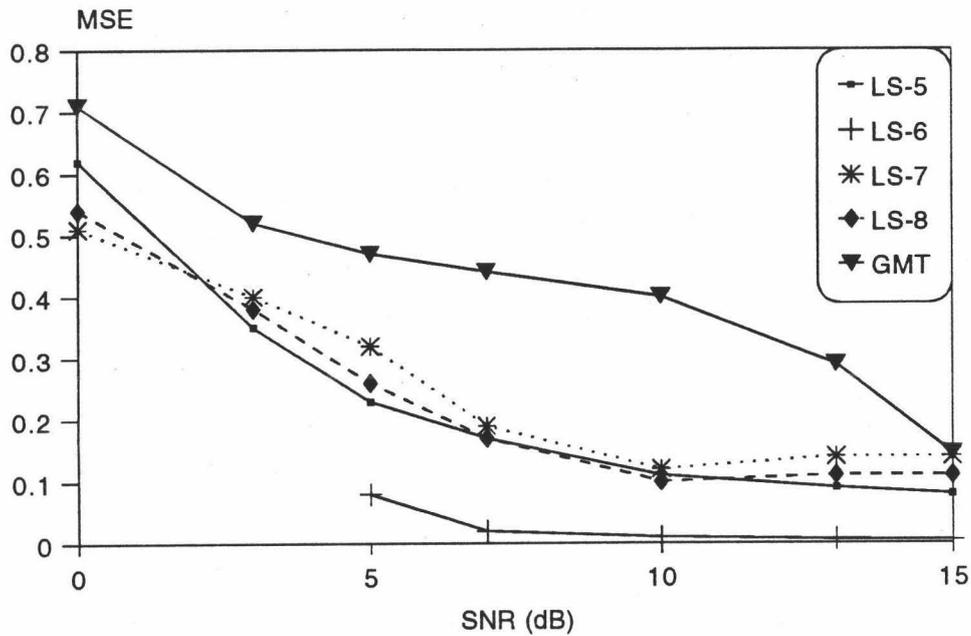


Figura (5.9)(a). MSE frente a la SNR para el sistema MA(2) [1, -2.0833, 1] con N=8192 para el caso de ruido coloreado.

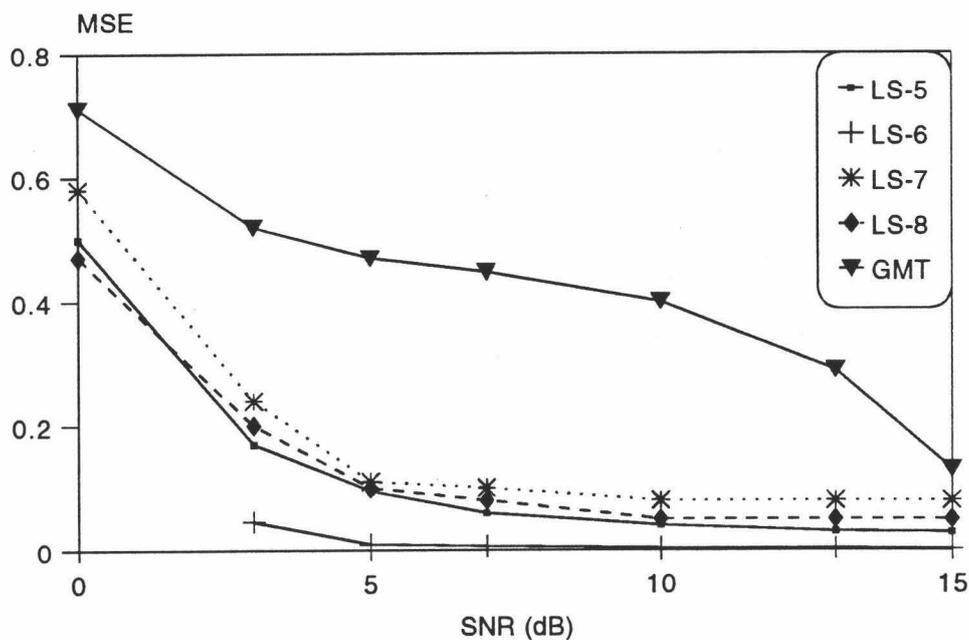


Figura (5.9)(b). MSE frente a la SNR para el sistema MA(2) [1, -2.0833, 1] con N=16384 para el caso de ruido coloreado.

Si comparamos estos resultados con los de las tablas (V.8) (b) y (V.8) (c) observamos que los parámetros estimados apenas si varían para el caso de los algoritmos basados únicamente en estadística de cuarto orden, mientras que el algoritmo GMT que usa la secuencia de autocorrelación se ve fuertemente afectado por el ruido coloreado que contamina los datos. Las estimaciones dadas por el método GMT [9] están claramente sesgadas ya que este método hace uso de la secuencia de autocorrelación de la señal, que está afectada por el ruido Gaussiano coloreado. Este comportamiento se muestra más claramente en las figuras 5.9 (a) (b) que representan el MSE de las estimaciones obtenidas por los diferentes métodos. Al igual que en el caso del ruido blanco, el algoritmo LS-6 da los mejores estimaciones, aunque muestra inestabilidades cuando la SNR es muy baja. El algoritmo GMT muestra un MSE mucho más alto que en el caso de ruido blanco, por lo que la diferencia con los algoritmos propuestos es aun mayor en el caso del ruido coloreado. Este resultado era de esperar ya que el ruido coloreado afecta muy negativamente a la secuencia de autocorrelación de la señal.

Junto a la propia obtención de los parámetros del modelo, hemos tratado de estimar el orden del modelo MA a partir del procedimiento descrito en la sección V-4. En este caso hemos usado el algoritmo LS-8 tomando el parámetro l o número de "slices" en dicho algoritmo como $l=0\dots m$, siendo m el orden asumido $m=1\dots 7$, y hemos empleado en (5.22) estadística de cuarto orden tratando de reconstruir la "slice" (0,0). El número de selecciones correctas de las 100 ejecuciones efectuadas para diferentes valores de la SNR y longitud del registro de datos se muestra en la tabla (V.10). Esta tabla muestra que incrementar la relación señal-ruido o el número de datos conduce a mejores selecciones del orden, y que podemos obtener buenas estimaciones hasta un nivel de SNR de 5 dB, aunque para el caso del modelo (5.25) podemos llegar hasta un nivel de 0 dB con fiabilidad.

SNR Nº datos	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB
4096	60 %	70 %	85 %	90 %
8192	65 %	85 %	90 %	100 %
16384	75 %	100 %	100 %	100 %

Tabla (V.10). Número de selecciones correctas del orden del sistema MA (2) [1, -2.0833, 1] en 20 ejecuciones Montecarlo en ruido coloreado.

Test 2 (Caso de modelos MA (3)). Vamos a tratar el caso de modelos MA de tercer orden. Para ello vamos a utilizar el sistema MA de fase no mínima que fue usado en la sección anterior (ecuación (5.28)). Los parámetros estimados y el MSE obtenido usando los seis algoritmos que estamos comparando se muestran en la tabla (V.11) (a)-(c) para un valor de la SNR de 5 dB y diferente longitud del registro de datos en ruido coloreado.

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
Coeficientes					
b(1)= 0.900	0.453 ± 0.366	1.451 ± 1.134	0.578 ± 0.562	0.559 ± 0.522	0.334 ± 0.279
b(2)= 0.385	0.379 ± 0.223	0.508 ± 0.554	0.380 ± 0.266	0.356 ± 0.256	0.433 ± 0.167
b(3)=-0.771	-0.575 ± 0.250	-1.201 ± 0.841	-0.755 ± 0.174	-0.717 ± 0.173	-0.291 ± 0.104
MSE	0.188 ± 0.206	1.089 ± 2.662	0.202 ± 0.403	0.189 ± 0.362	0.262 ± 0.139

Tabla (V.11)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2 en ambiente de ruido coloreado. (b) SNR = 5 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
Coeficientes					
b(1)= 0.900	0.662 ± 0.221	1.105 ± 0.344	0.801 ± 0.278	0.786 ± 0.268	0.319 ± 0.221
b(2)= 0.385	0.401 ± 0.185	0.414 ± 0.242	0.374 ± 0.175	0.369 ± 0.166	0.431 ± 0.117
b(3)=-0.771	-0.659 ± 0.194	-0.893 ± 0.306	-0.746 ± 0.149	-0.728 ± 0.139	-0.294 ± 0.080
MSE	0.074 ± 0.086	0.127 ± 0.203	0.055 ± 0.186	0.051 ± 0.177	0.249 ± 0.107

Tabla (V.11)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2 en ambiente de ruido coloreado. (b) SNR = 5 dB y N=8192 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
Coeficientes					
b(1)= 0.900	0.749 ± 0.161	1.063 ± 0.312	0.881 ± 0.066	0.869 ± 0.066	0.303 ± 0.165
b(2)= 0.385	0.415 ± 0.148	0.427 ± 0.181	0.366 ± 0.108	0.360 ± 0.108	0.428 ± 0.086
b(3)=-0.771	-0.716 ± 0.140	-0.855 ± 0.195	-0.758 ± 0.087	-0.745 ± 0.085	-0.287 ± 0.062
MSE	0.037 ± 0.044	0.079 ± 0.155	0.009 ± 0.008	0.010 ± 0.008	0.247 ± 0.079

Tabla (V.11)(c). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(3) del test 2 en ambiente de ruido coloreado. (c) SNR = 5 dB y N=16384 (500 ejecuciones Montecarlo).

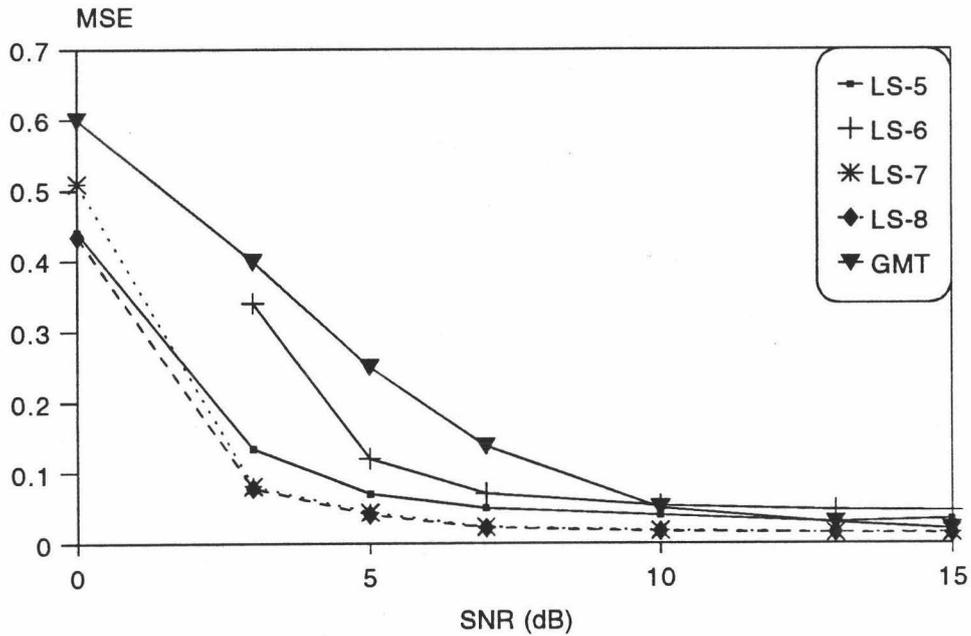


Figura (5.10)(a). MSE frente a la SNR para el sistema MA(3) del test 2 con $N=8192$ para el caso de ruido coloreado.

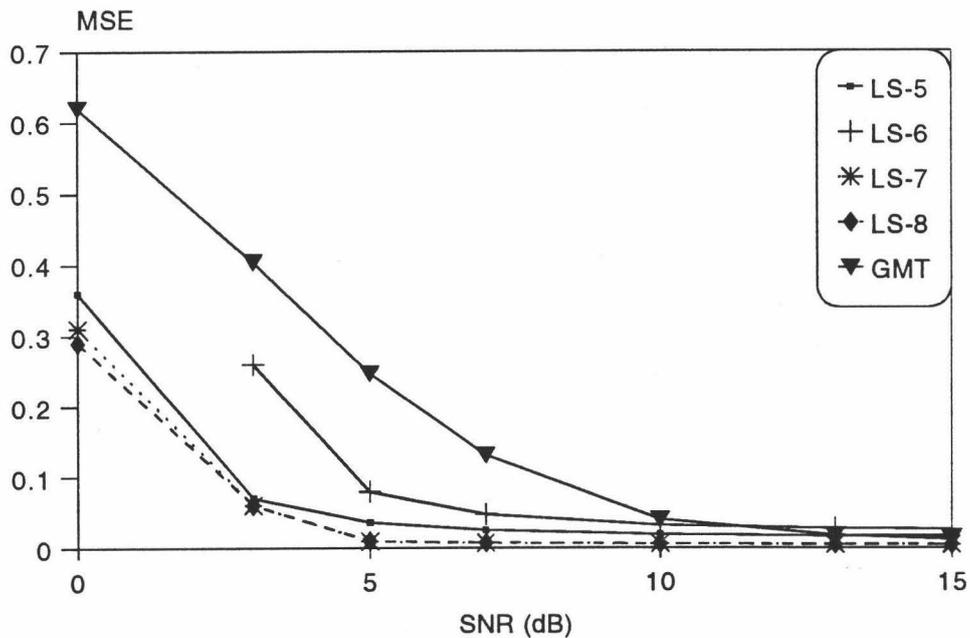
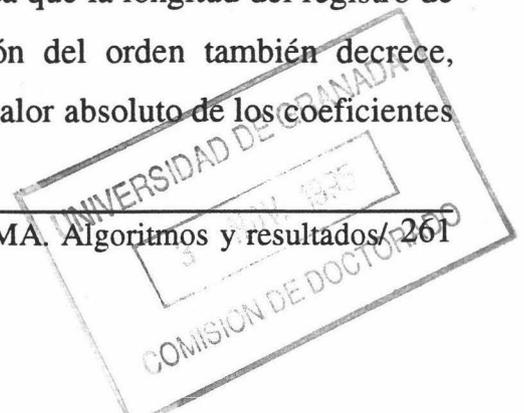


Figura (5.10)(b). MSE frente a la SNR para el sistema MA(3) del test 2 con $N=16384$ para el caso de ruido coloreado.

Como podemos observar en estas tablas, los algoritmos propuestos dan buenas estimaciones para un número de datos superior a 4096 datos, obteniéndose estimaciones consistentes de los coeficientes del sistema. El algoritmo GMT muestra un sesgo importante debido a los errores introducidos en la secuencia de correlación por el ruido coloreado. En conjunto, los algoritmos LS-7, LS-8 y LS-5 muestran un MSE más bajo y mejores estimaciones que los otros algoritmos estudiados. Al igual que ocurría con el caso de procesos no distribuidos simétricamente, aparece una tendencia diferente en el comportamiento de los algoritmos respecto del test 1. Así, los algoritmos LS-7 y LS-8 están menos afectados por errores de estimación de los cumulantes debido al pequeño valor absoluto de la secuencia de cumulantes para este ejemplo, que afecta comparativamente de manera más significativa al algoritmo LS-6.

El comportamiento en función de la relación señal-ruido (SNR) viene especificado en las figuras 5.10 (a) y 10 (b) para un número de datos de $N=8192$ y $N=16384$. En estas figuras volvemos a observar la ventaja de utilizar estadística de cuarto orden solamente para identificar los procesos MA. Igualmente se observa claramente que el mejor MSE lo obtienen los algoritmos LS-7 y LS-8, mostrando el algoritmo LS-6 una mayor sensibilidad a los errores de estimación de los cumulantes de este proceso. Como comentamos anteriormente el algoritmo GMT da el mayor MSE sobre todo en ambientes de bajas SNR.

En este test también hemos aplicado el procedimiento de selección del orden del modelo MA. En la tabla (V.12) se muestra el tanto por ciento de selecciones correctas del orden. Cuando el número de datos es suficientemente elevado tenemos un 100% de estimaciones correctas a partir de SNR de 5 dB. A medida que la longitud del registro de datos disminuye, el índice de fiabilidad en la elección del orden también decrece, tendiéndose a infraestimarlos. Ello es debido al pequeño valor absoluto de los coeficientes



del modelo que hace que la respuesta impulso reconstruida quede mejor modelada por sistemas de orden 1.

SNR Nº datos	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB
4096	20 %	55 %	80 %	90 %
8192	30 %	75 %	95 %	100 %
16384	50 %	100 %	100 %	100 %

Tabla (V.12). Número de selecciones correctas del orden del sistema en 20 ejecuciones Montecarlo para el ejemplo de simulación del test 2 en ambiente de ruido coloreado.

Test 3 (caso de modelos MA (5)). Por último se va a estudiar la estimación de los coeficientes del modelo MA de fase no mínima de orden 5 dado por (5.29). Los parámetros estimados a partir de 100 ejecuciones de un experimento Montecarlo para tres longitudes de datos diferentes y SNR de 10 y 5 dB en ambiente de ruido coloreado se muestra en la tabla (V.13) (a)-(f). Si comparamos con los resultados obtenidos para los modelos de orden 2 y 3 se obtienen en general peores resultados en todos los métodos. En general podemos afirmar que a medida que el orden del modelo se incrementa es necesario un mayor número de datos para obtener estimaciones con el mismo MSE a una SNR dada. Entre todos los algoritmos estudiados, el algoritmo LS-6 obtiene los mejores estimaciones siempre que el número de datos no sea muy bajo. De nuevo el algoritmo GMT da las peores estimaciones en términos de sesgo y varianza de los parámetros estimados debido a que hace uso de estadística de segundo orden.

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
Coeficientes					
b(1)=-2.330	-0.494 ± 0.662	-2.225 ± 0.968	-0.384 ± 0.929	-0.361 ± 0.833	-0.381 ± 0.236
b(2)= 0.750	0.216 ± 0.242	0.715 ± 0.484	0.517 ± 0.342	0.452 ± 0.288	0.360 ± 0.192
b(3)= 0.500	0.126 ± 0.184	0.488 ± 0.665	0.264 ± 0.453	0.237 ± 0.389	0.312 ± 0.223
b(4)= 0.300	-0.026 ± 0.206	0.284 ± 0.368	-0.113 ± 0.475	-0.121 ± 0.447	0.366 ± 0.230
b(5)=-1.400	-0.404 ± 0.429	-1.575 ± 1.136	-0.570 ± 0.353	-0.533 ± 0.315	-0.379 ± 0.199
MSE	0.607 ± 0.320	0.328 ± 1.380	0.665 ± 0.438	0.665 ± 0.438	0.566 ± 0.144

Tabla (V.13)(a). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 3 en ambiente de ruido coloreado. (a) SNR = 5 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
Coeficientes					
b(1)=-2.330	-0.874 ± 0.814	-2.283 ± 0.528	-0.781 ± 0.939	-0.744 ± 0.835	-0.512 ± 0.226
b(2)= 0.750	0.322 ± 0.241	0.755 ± 0.262	0.630 ± 0.297	0.562 ± 0.235	0.437 ± 0.143
b(3)= 0.500	0.212 ± 0.197	0.510 ± 0.266	0.398 ± 0.325	0.353 ± 0.277	0.313 ± 0.177
b(4)= 0.300	-0.003 ± 0.207	0.288 ± 0.261	-0.060 ± 0.445	-0.070 ± 0.436	0.275 ± 0.217
b(5)=-1.400	-0.627 ± 0.473	-1.526 ± 0.524	-0.750 ± 0.297	-0.695 ± 0.270	-0.493 ± 0.216
MSE	0.440 ± 0.350	0.083 ± 0.218	0.465 ± 0.455	0.461 ± 0.407	0.480 ± 0.118

Tabla (V.13)(b). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 3 en ambiente de ruido coloreado. (b) SNR = 5 dB y N=8192 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
b(1)=-2.330	-1.237 ± 0.752	-2.280 ± 0.355	-1.185 ± 0.666	-1.140 ± 0.611	-0.602 ± 0.189
b(2)= 0.750	0.430 ± 0.235	0.749 ± 0.165	0.567 ± 0.287	0.521 ± 0.244	0.468 ± 0.120
b(3)= 0.500	0.283 ± 0.180	0.510 ± 0.163	0.408 ± 0.174	0.375 ± 0.157	0.314 ± 0.149
b(4)= 0.300	0.067 ± 0.174	0.279 ± 0.144	0.060 ± 0.438	0.047 ± 0.424	0.209 ± 0.178
b(5)=-1.400	-0.826 ± 0.442	-1.438 ± 0.251	-0.870 ± 0.241	-0.834 ± 0.237	-0.563 ± 0.169
MSE	0.279 ± 0.299	0.029 ± 0.029	0.268 ± 0.294	0.276 ± 0.268	0.424 ± 0.086

Tabla (V.13)(c). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 3 en ambiente de ruido coloreado. (c) SNR = 5 dB y N=16384 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
b(1)=-2.330	-0.806 ± 0.753	-2.620 ± 3.045	-0.668 ± 0.914	-0.636 ± 0.839	-0.572 ± 0.376
b(2)= 0.750	0.287 ± 0.234	0.869 ± 1.174	0.563 ± 0.342	0.511 ± 0.287	0.337 ± 0.263
b(3)= 0.500	0.183 ± 0.193	0.711 ± 2.323	0.366 ± 0.392	0.337 ± 0.341	0.134 ± 0.174
b(4)= 0.300	0.009 ± 0.187	-0.110 ± 3.860	-0.104 ± 0.467	-0.098 ± 0.439	0.283 ± 0.211
b(5)=-1.400	-0.565 ± 0.437	-1.519 ± 0.617	-0.695 ± 0.301	-0.649 ± 0.286	-0.503 ± 0.336
MSE	0.462 ± 0.335	3.373 ± 32.640	0.525 ± 0.492	0.521 ± 0.449	0.494 ± 0.211

Tabla (V.13)(d). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 3 en ambiente de ruido coloreado. (d) SNR = 10 dB y N=4096 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
b(1)=-2.330	-1.232 ± 0.762	-2.321 ± 0.349	-1.097 ± 0.768	-1.052 ± 0.696	-0.822 ± 0.361
b(2)= 0.750	0.423 ± 0.234	0.751 ± 0.188	0.602 ± 0.291	0.544 ± 0.246	0.467 ± 0.223
b(3)= 0.500	0.280 ± 0.190	0.507 ± 0.179	0.414 ± 0.273	0.379 ± 0.231	0.151 ± 0.129
b(4)= 0.300	0.064 ± 0.172	0.270 ± 0.158	0.048 ± 0.415	0.043 ± 0.405	0.184 ± 0.182
b(5)=-1.400	-0.812 ± 0.442	-1.446 ± 0.255	-0.814 ± 0.306	-0.774 ± 0.284	-0.701 ± 0.315
MSE	0.285 ± 0.301	0.030 ± 0.034	0.319 ± 0.349	0.321 ± 0.315	0.356 ± 0.169

Tabla (V.13)(e). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 3 en ambiente de ruido coloreado. (e) SNR = 10 dB y N=8192 (500 ejecuciones Montecarlo).

Algoritmos	LS-5	LS-6	LS-7	LS-8	GMT
b(1)=-2.330	-1.592 ± 0.672	-2.314 ± 0.257	-1.515 ± 0.402	-1.459 ± 0.379	-1.057 ± 0.334
b(2)= 0.750	0.529 ± 0.213	0.743 ± 0.127	0.605 ± 0.288	0.564 ± 0.251	0.574 ± 0.207
b(3)= 0.500	0.349 ± 0.164	0.503 ± 0.129	0.443 ± 0.174	0.415 ± 0.155	0.176 ± 0.103
b(4)= 0.300	0.137 ± 0.145	0.275 ± 0.109	0.229 ± 0.355	0.228 ± 0.352	0.081 ± 0.160
b(5)=-1.400	-0.998 ± 0.389	-1.409 ± 0.177	-0.979 ± 0.231	-0.946 ± 0.225	-0.896 ± 0.288
MSE	0.161 ± 0.239	0.015 ± 0.015	0.142 ± 0.113	0.152 ± 0.111	0.251 ± 0.121

Tabla (V.13)(f). Parámetros estimados (media ± desviación estándar) para el proceso MA(5) del test 3 en ambiente de ruido coloreado. (e) SNR = 10 dB y N=16384 (500 ejecuciones Montecarlo).

El comportamiento del MSE en función de la SNR viene especificado en las figuras 5.11 (a) y 5.11 (b) para un número de datos de 8192 y 16384 respectivamente. Como se muestra claramente en dichas figuras, el algoritmo LS-6 da lugar a las mejores estimaciones. Cuando el número de datos no es elevado (figura 5.11 (a)) el MSE de los algoritmos LS-5, LS-7 y LS-8 es bastante similar al algoritmo GMT. Si el número de datos aumenta, las diferencias entre estos algoritmos también lo hacen de forma significativa. Esto corrobora la característica antes mencionada de que a medida que el orden del modelo es mayor, se necesita un mayor número de datos para obtener estimaciones consistentes con algoritmos basados en estadística de cuarto orden.

Si aplicamos el método de selección del orden del modelo a este ejemplo en ambiente de ruido coloreado obtenemos los resultados que se muestran en la tabla (V.14), en la que se indica el número de elecciones correctas del orden del modelo en tanto por ciento. Obsérvese como la característica anteriormente señalada de la necesidad de un mayor número de datos para modelos de órdenes mayores aparece claramente reflejada en esta tabla, ya que solamente se obtienen buenas estimaciones del orden para un número de datos de 16384.

SNR N° datos	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB
4096	10 %	15 %	50 %	60 %
8192	15 %	20 %	60 %	65 %
16384	25 %	55 %	70 %	75 %

Tabla (V.14). Número de selecciones correctas del orden del sistema en 20 ejecuciones Montecarlo para el ejemplo de simulación del test 5.

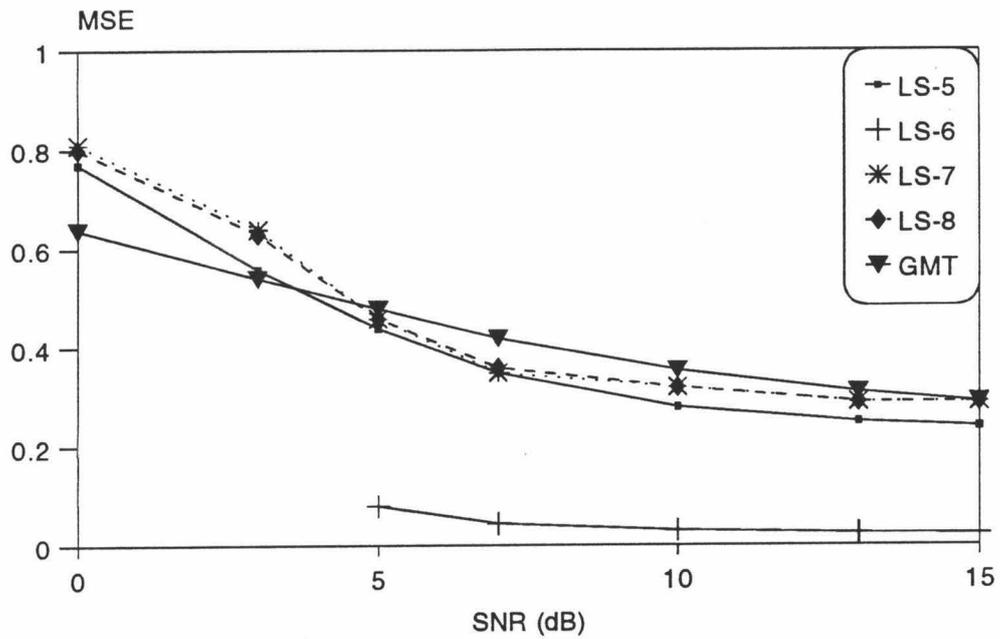


Figura (5.11)(a). MSE frente a la SNR para el sistema MA(5) del test 3 con $N=8192$ en el caso de ruido coloreado.

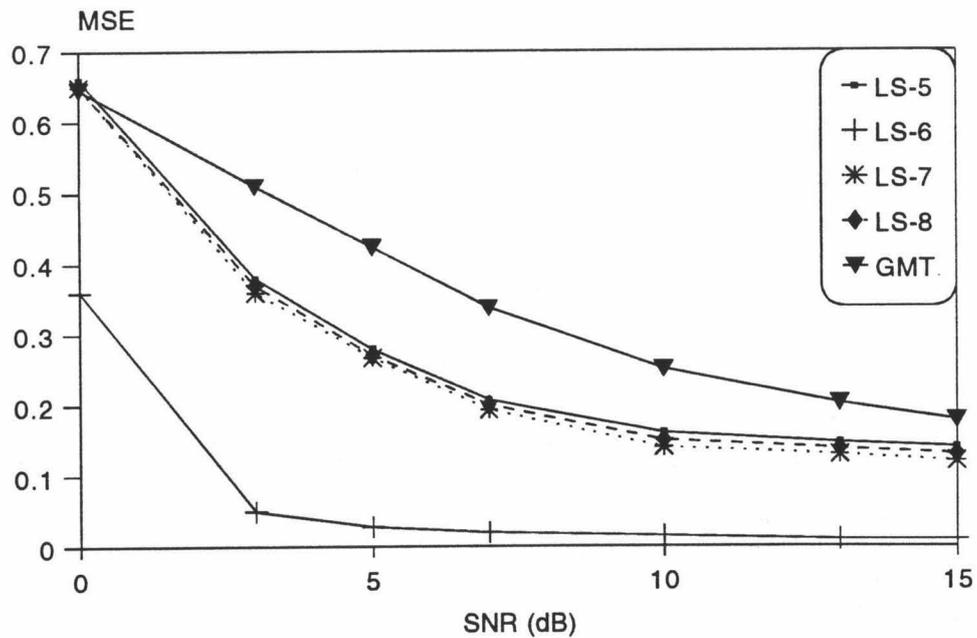


Figura (5.11)(b). MSE frente a la SNR para el sistema MA(5) del test 3 con $N=16384$ en el caso de ruido coloreado.

Al igual que ocurría en los ejemplos anteriores, la mayoría de los errores en las estimaciones del orden del modelo se deben a que dicho orden es infradeterminado por el algoritmo. No obstante, cuando el número de datos del proceso se incrementan, los errores de estimación de los cumulantes disminuyen y se obtienen estimaciones robustas del orden hasta un nivel de 5 dB de ruido coloreado.

V-7. CONCLUSIONES GENERALES.

En los capítulos IV y V de la segunda parte hemos analizado la relación entre los poliespectros de órdenes k y/o $k-1$ -ésimo para sistemas MA. Desde un esquema general se han obtenido varios conjuntos de ecuaciones entre los cumulantes del proceso de salida de un sistema MA de fase mínima o no mínima. Estas ecuaciones tienen una aplicación práctica inmediata en la identificación de los coeficientes del proceso, y así pueden plantearse soluciones recursivas o algoritmos de mínimos cuadrados. Basándonos en estas ecuaciones generales hemos obtenido a través de las Proposiciones 1-4 del capítulo IV el caso práctico de los cumulantes de tercer y cuarto orden, para el cuál hemos implementado los algoritmos de mínimos cuadrados. Estos algoritmos que usan sólo cumulantes han demostrado su utilidad en la identificación de sistemas MA a partir de medidas de la señal de salida contaminada por ruido Gaussiano coloreado de secuencia de autocorrelación desconocida. Ya que los métodos son lineales, la unicidad de las soluciones puede generalmente garantizarse, y lo hemos demostrado en los algoritmos propuestos. También nos hemos ocupado del problema de la selección del orden del modelo, problema de gran importancia en la aplicabilidad de los resultados de identificación. Basándonos únicamente en cumulantes, hemos propuesto un criterio de selección del orden del modelo. Posteriormente hemos llevado a cabo varios test de simulación en el que hemos estudiado y comparado entre sí los métodos propuestos y

otros algoritmos lineales basados en una solución de mínimos cuadrados establecidos en la bibliografía. Junto a ello se ha realizado un análisis del comportamiento del método de selección del orden para modelos de diferente orden. A partir de estos resultados de simulación y de otras simulaciones no mostradas en este capítulo por brevedad, podemos extraer varias conclusiones, tanto para el caso de procesos de excitación distribuidos o no simétricamente:

a) Procesos de excitación con función de densidad de probabilidad no simétrica.

Examinando los resultados de la sección V-5 para los algoritmos propuestos LS-1, LS-2, LS-3, LS-4, y los algoritmos GMT [TUG91] y el usado en [NAN94] podemos concluir:

(1) Todos los métodos lineales estudiados muestran un menor sesgo y varianza cuando se incrementan la longitud del registro de los datos o la SNR.

(2) Los métodos propuestos muestran un mejor comportamiento global que los de [NAN94] y [TUG91] en ambientes de ruido coloreado. Entre todos ellos, el algoritmo LS-2 es el mejor en cuanto que muestra los menores sesgo, varianza, y MSE. Este algoritmo muestra un buen grado de robustez al ruido y a los errores de estimación de los cumulantes, mientras que el algoritmo LS-4 muestra una gran variabilidad dependiendo del ejemplo concreto que se trate debido a su gran sensibilidad a los errores de estimación de los cumulantes del proceso. Así, para aquellos ejemplos cuya secuencia de cumulantes estimada tenga un valor absoluto pequeño comparado con la estadística verdadera de la señal, darán unos coeficientes estimados muy afectados por un sesgo persistente. Los algoritmos LS-1 y LS-3 muestran un buen comportamiento general, aunque se ven superados por el algoritmo LS-2.

(3) Para el caso de ruido Gaussiano coloreado, el método GMT está bastante sesgado debido a que hace uso de la secuencia de autocorrelación de la señal de salida, fuertemente perturbada por el ruido.

(4) Las combinaciones propuestas de estadística de tercer y cuarto orden dadas por los algoritmos LS-1, LS-2 y LS-3, y especialmente LS-2, mejoran sustancialmente los resultados de los algoritmos usados en [NAN94] ó [ZHA94], ya que los métodos propuestos explotan mucha más información de la estadística de la señal que [10] u [11] hacen.

(5) Los resultados obtenidos para el método propuesto de selección del orden del modelo MA muestran que se obtiene una buena estimación en niveles de SNR moderadamente bajas. Porcentajes aceptables de elección del orden correcto se obtienen hasta un nivel de SNR de 5 dB. Así por ejemplo, para dicho nivel de ruido se tienen, en la mayoría de los casos estudiados, porcentajes superiores al 80% para 2048 datos, y superiores al 90 % para 4096 datos.

b) Procesos de excitación con función de densidad de probabilidad simétrica.

A partir de los resultados mostrados en la sección V-6 para los algoritmos propuestos LS-5, LS-6, LS-7, LS-8, y el algoritmos GMT en estadística de cuarto orden podemos extraer las siguientes conclusiones:

(1) Cuando se ha de usar solamente estadística de cuarto orden es necesario usar comparativamente un número mayor de datos para obtener estimaciones consistentes que en el caso de métodos que usan estadística de tercer orden. Ello es debido a la mayor varianza que presentan las estimaciones de los cumulantes de cuarto orden.

(2) Los algoritmos propuestos obtienen en general mejores estimaciones que el método GMT. Este mejor comportamiento se hace más evidente a medida que la longitud del registro de datos aumenta, mientras que el método GMT es bastante independiente del número de datos que usemos para estimar las autocorrelaciones o cumulantes. De todos los algoritmos, el algoritmo LS-6 obtiene las mejores estimaciones y un menor error cuadrático medio siempre que la SNR no sea muy baja y trabajemos con un número de datos superior a los 8000. A partir de las tablas y figuras mostradas en la sección anterior, podemos decir que el algoritmo LS-6 es recomendable para estimar los parámetros cuando la SNR no es inferior a 3 dB y el registro de datos contiene más de 8000 datos. En otro caso conviene aplicar los algoritmos LS-7 o LS-8 para estimar los parámetros. Es interesante recordar que podemos disponer de un parámetro que nos mide la fiabilidad de las estimaciones obtenidas por dicho algoritmo, como es la cercanía o no a la unidad del coeficiente estimado $b(0)$. Si dicho coeficiente tiene un valor próximo a la unidad podemos aceptar la solución como válida. En caso contrario podemos rechazar la solución y tomar aquella proveniente del algoritmo LS-7 ó LS-8.

(3) Los algoritmos LS-7 y LS-8 presentan unos comportamientos muy parecidos, y no presentan las inestabilidades debidas a la división por el coeficiente $b(0)$ en el algoritmo LS-6, aunque necesitan un mayor número de datos para obtener MSE parecidos a los obtenidos mediante dicho algoritmo. Para aquellos ejemplos como en el test 2 en el que la secuencia de cumulantes estimada tiene un valor absoluto pequeño, los algoritmos LS-7, LS-8 y LS-5 superan a las estimaciones dadas por el LS-6, más sensible a los errores de estimación de los cumulantes, proporcionalmente mayores para este ejemplo. Por otra parte, las mejores estimaciones proporcionadas por los algoritmos LS-7 o LS-8 respecto al algoritmo LS-5 pueden atribuirse a que los algoritmos anteriores hacen uso de un conjunto más amplio de estadística de la señal de salida que el algoritmo LS-5 utiliza.

(4) Las estimaciones dadas por los algoritmos basados únicamente en estadística de cuarto orden son prácticamente independientes del tipo de ruido Gaussiano que contamine la salida del sistema. Este no es el caso del algoritmo GMT, ya que al usar la secuencia de autocorrelación de la señal ésta se ve fuertemente perturbada por el ruido Gaussiano coloreado, lo que se traduce en un sesgo importante en las estimaciones que es menos acusado si el ruido utilizado es espectralmente blanco.

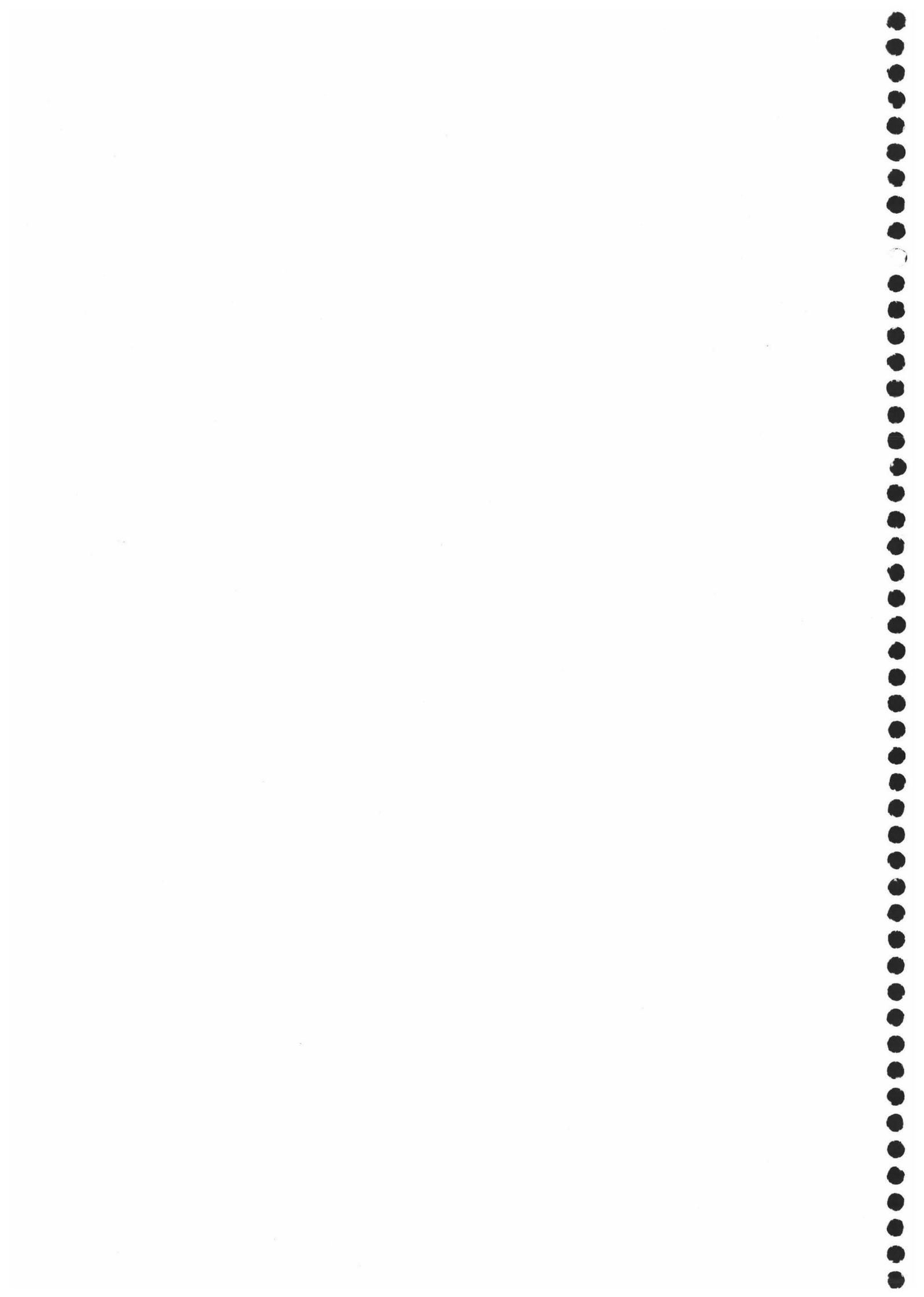
(5) El método de selección de orden del proceso MA basándose en estadística de cuarto orden permite obtener porcentajes aceptables hasta niveles de SNR de 5 dB. En este caso también se aplican las consideraciones anteriores sobre la necesidad de un mayor número de datos para aplicar este proceso de selección, necesidad que es aún mayor cuando el orden del modelo se incrementa.

Como se puede observar en las secciones V-5 y V-6, todos los algoritmos implementados en dichas secciones usan las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior evaluadas sobre un determinado conjunto de "slices", y no sobre todas las "slices" posibles para un modelo MA(q). Un procedimiento que usa todas las "slices" permitidas de un modelo MA (q) fue implementado para el método GMT en [ALS93], y tiene la ventaja de usar un mayor conjunto de datos de la estadística de salida del proceso. Podríamos extender de forma análoga este método a las ecuaciones propuestas y así obtener mejores estimaciones de parámetros a expensas de una mayor complejidad computacional.

Por último es importante destacar que todos estos métodos no quedan limitados a la obtención de parámetros de modelos MA puros, sino que pueden extenderse a modelos ARMA. Así, los métodos propuestos se pueden aplicar a la identificación de la parte MA

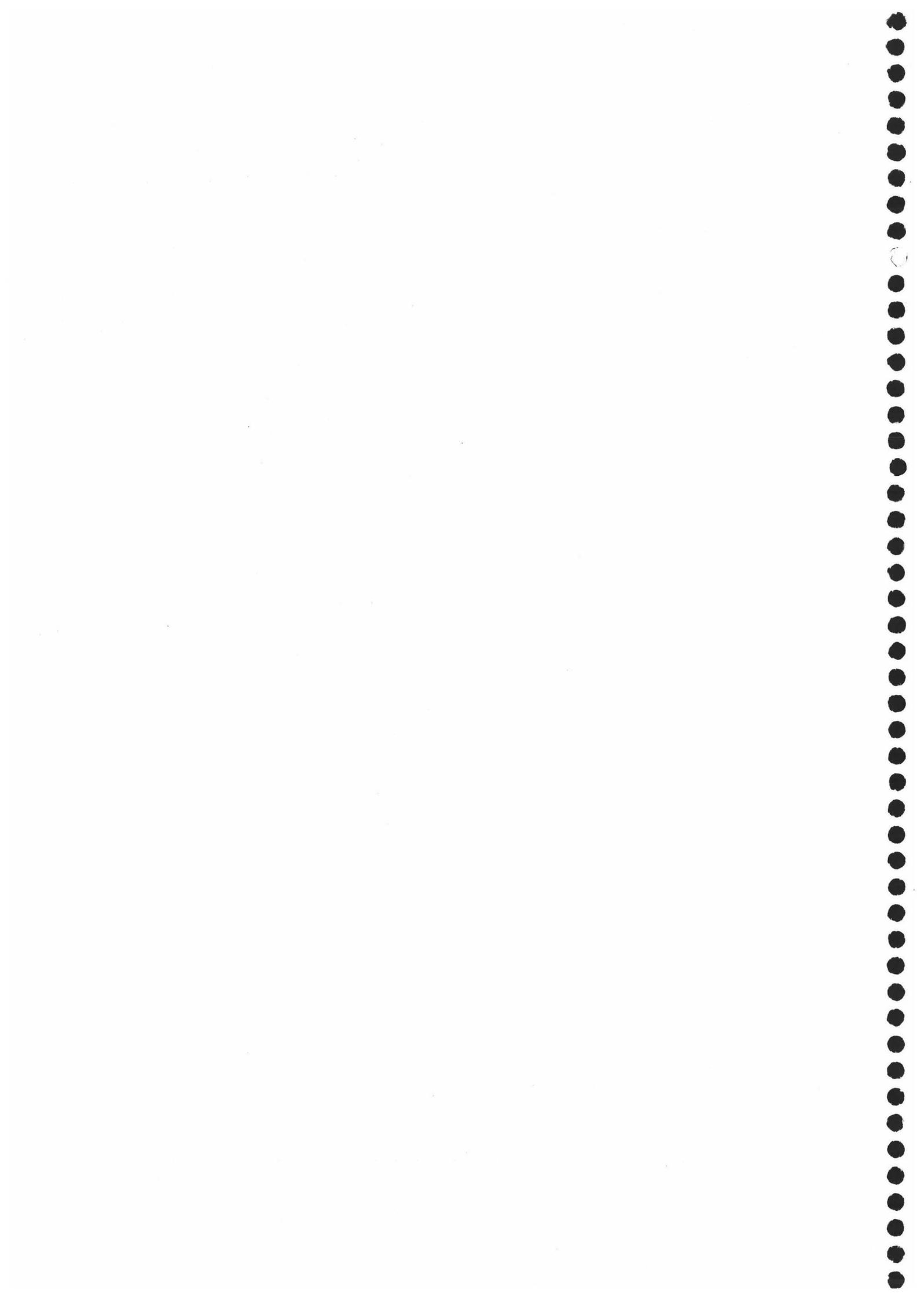
de un modelo ARMA usando el método de "las series residuales" [GIA89a], estimando los parámetros AR mediante cualquiera de los procedimientos propuestos en [NIK93b] [MEN91]. Más aún, podemos computar todos los coeficientes de un modelo ARMA no causal, es decir tanto los parámetros AR como los MA mediante el método "doble-MA" [GIA90a], que reduce el problema de estimar los coeficientes de un modelo ARMA a la estimación de los coeficientes de dos modelos MA.

Una posible continuación de los resultados expuestos en este capítulo sería buscar nuevas aplicaciones de los conjuntos de ecuaciones obtenidos en el capítulo IV y llevar a cabo un análisis del funcionamiento de estos métodos siguiendo el procedimiento descrito en [POR89] comparando con los diferentes planteamientos en la bibliografía.



TERCERA PARTE

DISCRIMINACION DE BLANCOS DE RADAR



INTRODUCCIÓN A LA TERCERA PARTE.

En esta tercera parte de la Memoria nos centraremos en las aplicaciones del tratamiento digital de señales al campo de la identificación de blancos de radar. La identificación de un blanco de radar consiste básicamente en la reconstrucción de su geometría y composición a través de medidas y análisis de la radiación electromagnética dispersada por él [BAU71] [BAU76]. En general, en todo esquema de identificación se precisa de la extracción de parámetros ligados a la geometría y composición del blanco a partir del campo electromagnético dispersado. La identificación se lleva a cabo comparando estos parámetros con los del conjunto de blancos patrón o blancos conocidos.

Las experiencias realizadas sobre blancos conductores excitados por ondas electromagnéticas transitorias de amplio espectro [NIC72] [AND74], junto con el Método de Expansión de Singularidades (SEM) [BAU76] y el análisis de los resultados obtenidos mediante métodos numéricos [MIL80], han mostrado que la respuesta del blanco (intensidad o cargas inducidas en él, campo eléctrico dispersado, etc) se puede modelar en el dominio del tiempo por una suma de exponenciales complejas amortiguadas cuyas frecuencias complejas se denominan resonancias naturales o polos del blanco. Estos parámetros sólo dependen de la geometría y características electromagnéticas del blanco y son independientes tanto de la orientación como de la excitación utilizada. Esta cualidad de las resonancias naturales las hace de gran utilidad para la identificación del blanco.

La mayoría de las técnicas de identificación basadas en el concepto y propiedades de las resonancias naturales del blanco pueden dividirse en dos grandes grupos:

- A) Métodos de identificación basados en el cálculo de las frecuencias de resonancia del blanco y comparación con las de la librería de patrones.

- B) Métodos basados en el diseño de ondas discriminantes que al incidir sobre el blanco patrón produzcan una respuesta fácilmente identificable.

Entre los primeros cabe destacar el método de Prony [PRO795] [BLAR75], las técnicas basadas en la descomposición en valores singulares [KUM82] [TUF82b] y el método de "Pencil de Matrices" [HUA91], mientras que en el segundo grupo los más importantes son la técnica del pulso de extinción (E-pulso) [ROT85a], técnicas de optimización [BAY90] y los filtros de aniquilación de resonancias (FAR) [MOR88].

El segundo grupo de técnicas presenta una serie de ventajas que se acentúan cuando la respuesta del blanco está contaminada con ruido como ocurre en la mayoría de las situaciones prácticas. Este ruido puede generarse en el receptor, en la antena, o bien ser un eco contaminante que llega simultáneamente con la señal dispersada por el blanco a identificar. En esta tercera parte se estudia la técnica basada en el diseño de filtros de aniquilación de resonancias. El objetivo de estos filtros es aniquilar la respuesta del blanco, es decir obtener la respuesta de mínima energía. El proceso de decisión se basa en elegir el blanco cuyo filtro asociado presenta una salida con energía más pequeña. Una forma de garantizar que la respuesta del filtro sea nula fuera de un intervalo temporal dado es diseñar estos sistemas mediante filtros digitales de respuesta impulso finita.

La capacidad de identificación de esta técnica en su forma original propuesta por Morgan en 1988 [MOR88], se encuentra altamente afectada por la presencia de ruido contaminante. Con objeto de minimizar este importante problema, en esta parte se proponen etapas previas de análisis y procesado de señal que eliminen los problemas asociados con la técnica FAR y realcen la estructura básica de la señal constituida por una suma de exponenciales complejas amortiguadas reduciendo al máximo el ruido presente. Este procesado previo se ha aplicado al problema de la identificación de hilos delgados

conductores de diferente longitud. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto el aumento en la capacidad de identificación y discriminación introducida por el tratamiento previo de la señal frente a la técnica FAR original.

Junto a estas etapas previas, se propone como alternativa global al FAR un nuevo sistema digital de identificación, un filtro FIR que hemos denominado Filtro de Extinción que tiene la ventaja de no necesitar un tratamiento previo de los datos y cuya síntesis se ha hecho buscando la función de transferencia más adecuada al problema.

Terminaremos mostrando una interesante aplicación de las técnicas basadas en estadística de órdenes superiores a este problema. Cuando la respuesta dispersada del blanco está contaminada con ruido Gaussiano coloreado de espectro de potencia desconocido, cualquier sistema de discriminación tiende a identificar las regiones espectrales no nulas del ruido como componentes vibratorias extra, lo que puede llevar a la confusión del sistema. Se hace, pues, interesante usar cumulantes en vez de datos en el proceso de identificación, ya que éstos son insensibles a cualquier tipo de ruido Gaussiano. Ello es posible ya que sabemos por el capítulo II que si usamos el estimador propuesto tipo covarianza tenemos una serie de "slices" del espacio de cumulantes que retienen la estructura de exponenciales complejas original de los datos. Al mantener dicha estructura, las secuencias de cumulantes en las "slices" adecuadas vibran a las mismas frecuencias complejas que la señal dispersada del blanco, y por tanto es equivalente tratar con estas secuencias que con la onda original.

Esta tercera parte se ha organizado de la siguiente forma:

- Un primer capítulo (Capítulo VI) en la que se introducen los bases y conceptos fundamentales sobre los que se basa esta técnica de identificación, y se hace un breve

repasso de las técnicas de identificación de blancos existentes en la bibliografía con el propósito de enmarcar la técnica de los filtros de aniquilación de resonancias (FAR). Notaremos la enorme amplificación de las altas frecuencias que muestra la función de transferencia del FAR, que la hace especialmente sensible al ruido aditivo. Como en cualquier caso práctico la señal está contaminada con ruido, procedente tanto de fuentes de ruido interno de la antena como de ruidos externos generados en el ambiente en que está inmerso el blanco, es necesario llevar a cabo un tratamiento previo de la señal que mejore la relación señal-ruido de la onda recibida por el radar para permitir la identificación posterior mediante el FAR. Esta mejora de la señal la vamos a llevar a cabo mediante distintas técnicas: 1) técnicas clásicas de estimación de señales en ruido que se exponen brevemente en el Apéndice B, 2) técnicas basadas en la Descomposición en Valores Singulares (SVD), y 3) técnicas basadas en el diseño de un filtro de suavizado óptimo.

- En el capítulo VII se hace un desarrollo de las técnicas basadas en un modelado paramétrico de los datos, incorporando una nueva forma de tratar la información presente mediante el uso de criterios y algoritmos de estimación del orden del modelo. Asimismo este capítulo está dedicado al diseño de un filtro de suavizado óptimo. Con este filtrado, que constituye una importante aportación de esta parte, se busca fortalecer las características de la señal que se pretende identificar enfatizando las regiones espectrales donde están presentes los modos de la señal.

- En el capítulo VIII se estudia la capacidad de identificación de un hilo patrón frente a hilos de longitudes relativas distintas mediante el FAR. El estudio de la influencia de los distintos parámetros de diseño en la capacidad de identificación del FAR, así como la efectividad de cada una de las técnicas descritas en el capítulo anterior constituye otra de las aportaciones de esta tercera parte.

- Finalmente en el capítulo IX se incluyen como una de las principales aportaciones de esta parte una comparación del método FAR con la técnica de los pulsos de extinción, obteniéndose las ecuaciones de síntesis del FAR a través del formalismo E-pulso. También se lleva a cabo la obtención de las ecuaciones de síntesis del FAR desde otros puntos de vista alternativos, lo que facilita la comprensión de su forma de actuación. Partiendo de estas analogías se construirá un nuevo sistema de respuesta impulso finita, el Filtro de Extinción, que soluciona el problema que presenta el FAR de amplificación de alta frecuencias y reúne una serie de características óptimas de diseño. En este capítulo dedicaremos una sección a la aplicación de esta técnica a la discriminación de blancos en presencia de ruido coloreado, notando la ventaja de usar cumulantes en vez de los datos de la señal dispersada.

Los conceptos y resultados fundamentales que constituyen la base de todo el grupo de técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes se dan en el Apéndice A. En él se desarrollan las líneas fundamentales a seguir para el cálculo del campo electromagnético dispersado basándose en el método de expansión en singularidades (SEM). Aquí se introducen conceptos clave como la respuesta dispersada tardía o 'late-time' del blanco o el concepto de resonancias naturales que caracterizan el blanco y por lo tanto van a servir para identificarlo.

Por último en el apéndice B se presentan las técnicas clásicas para mejorar la relación señal-ruido. Estas técnicas están basadas en el empleo de ventanas espectrales y filtros digitales paso-baja. En este apéndice se hace especial hincapié en la forma óptima de elegir los parámetros de los filtros o ventanas.



CAPITULO VI

ESQUEMAS DE IDENTIFICACION Y DISCRIMINACION DE
BLANCOS DE RADAR.



VI-1. INTRODUCCIÓN

La identificación de blancos de radar en su forma más pura es un problema electromagnético inverso que consiste en la reconstrucción de la geometría y composición del blanco a partir de medidas de la radiación electromagnética dispersada. El blanco o clase de blanco puede ser identificado o discriminado de otros blancos o clases de blancos mediante la comparación con formas y composiciones de blancos ya conocidos que constituyen la librería de patrones. La discriminación necesita, pues, de la extracción de parámetros ligados a la geometría y composición del blanco a partir del campo electromagnético dispersado [MES84]. Una vez obtenidos estos parámetros de los patrones tras un análisis previo, la discriminación se lleva a cabo comparando los parámetros del blanco que se quiere identificar con los del conjunto de patrones.

La total identificación del blanco, reconstruyendo totalmente su geometría es tarea imposible ya que sería necesario una cantidad infinita de información, esto es, de medidas del campo dispersado en todas las frecuencias y todos los ángulos de orientación del mismo. Sin embargo para la clasificación de una gran variedad de blancos no se requiere más que un pequeño número de parámetros. Por ejemplo la sección equivalente de radar (RCS)¹.

En la identificación y discriminación de blancos hay dos problemas fundamentales. Por un lado la presencia de ruido en el campo dispersado por el blanco, provocado por muy diversos agentes externos, y por otro lado la sensibilidad a la orientación del blanco a identificar. Toda técnica de discriminación debe tratar de vencer estos dos problemas,

¹ La RCS de un blanco se define como el área de un blanco equivalente que radie isotrópicamente la misma densidad de potencia por unidad de ángulo sólido que el blanco original.

es decir, deberá ser insensible tanto al ruido como a la orientación del blanco. Todas las técnicas aparecidas tratan de resolver, más o menos acertadamente estos dos tipos de problemas, sin embargo es en la última década cuando han aparecido técnicas más eficaces basadas en el desarrollo del método de expansión en singularidades o SEM descrito en el apéndice A.

Los esquemas de discriminación que han aparecido en los últimos años y que se describirán en este capítulo, pueden clasificarse en dos grupos fundamentales:

- 1º) Aquellas que se basan en la matriz de dispersión del blanco o matriz de "scattering", descritas en la sección VI-2.

- 2º) Aquellas basadas en la respuesta del blanco en el dominio de la frecuencia o en el tiempo, cuyo estudio se realiza en la sección VI-3. Dentro de este grupo podemos distinguir tres tipos generales de técnicas:
 - a) Las basadas en obtener la respuesta a determinadas excitaciones y examinan el contenido en frecuencia de ésta (sección VI-3 (a)).
 - b) Las basadas en la extracción de las resonancias naturales y en la comparación de éstas para identificar blancos (sección VI-3 (b)).
 - c) Las basadas en el diseño de ondas discriminantes sintetizadas para identificar una respuesta específica del blanco entre un conjunto de respuesta (sección (VI-3 (c))). Dentro de este grupo se encuentran el pulso de aniquilación (K-pulso), el pulso de extinción (E-pulso), las técnicas de optimización y los filtros de aniquilación de resonancias (FAR).

Entre estos dos grupos fundamentales son aquellas basadas en el estudio de la

respuesta del blanco en el tiempo, es decir el grupo segundo, y entre éstas, las basadas en el diseño de ondas discriminantes, las que se han mostrado más exitosas en la discriminación y en la superación de los problemas asociados a la contaminación con ruido y a la sensibilidad con la orientación del blanco. Debido a que en este último grupo se encuentra el filtro de aniquilación de resonancias (FAR) de cuyo estudio trata esta tercera parte de la Memoria, llevaremos a cabo una descripción más pormenorizada de este grupo de técnicas. Así, en la sección VI-4 nos ocuparemos del pulso de extinción ó E-pulso, en la sección VI-5 de las técnicas de optimización y en la sección VI-6 describiremos la síntesis de los filtros de aniquilación de resonancias, así como su uso en la discriminación de blancos de radar.

A continuación, pues, se describen brevemente, siguiendo la clasificación del apartado anterior, los fundamentos de las técnicas de identificación más recientes así como las características, ventajas e inconvenientes que presentan en la discriminación de blancos, deteniéndonos con más detalle en la basada en el diseño de filtros de aniquilación de resonancias, de los que son objeto esta tercera parte de la Memoria.

VI-2. TÉCNICAS DE POLARIZACIÓN

El primer grupo de técnicas de discriminación de blancos de radar son, siguiendo la clasificación dada en la introducción, las técnicas de polarización. Se basan en la matriz de dispersión del blanco. El campo eléctrico dispersado por un conductor perfecto se puede relacionar con el campo eléctrico incidente de la forma:

$$\vec{E}^s = A \cdot \vec{E}^i \quad (6.1)$$

donde A es la matriz de dispersión (de dimensión 2) del blanco. Esta matriz de dispersión A describe los cambios de polarización entre la onda incidente y la dispersada por el blanco [KEN52] y es función de la frecuencia de operación y de la orientación del blanco. Estos cambios de polarización se utilizan como parámetro de identificación y discriminación. Estas técnicas presentan el inconveniente de que la reconstrucción de la matriz de dispersión es impracticable, ya que se requerirían medidas en un número infinito de estados de polarización. Esto llevó a la búsqueda y desarrollo de nuevos parámetros relacionados con estos cambios de polarización. Uno de ellos es que cualquier blanco puede caracterizarse por sus "polarizaciones nulas", que son aquellos estados para los cuales la onda dispersada tiene polarización ortogonal a la antena transmisora, y para las cuales el blanco se hace invisible (estas polarizaciones corresponden a los autovectores de la matriz de dispersión A). Otra característica de discriminación mediante la técnica de las polarizaciones es la contraria a la anterior y recibe el nombre de "polarizaciones óptimas" [MIE83].

Uno de los mayores problemas que presenta este grupo de técnicas es su extremada dependencia y sensibilidad con la orientación del blanco.

VI-3. TÉCNICAS BASADAS EN LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

El segundo gran grupo de técnicas de discriminación de blancos de radar son las técnicas basadas en la respuesta del blanco a una excitación dada. En él se pueden distinguir tres tipos:

a) Técnicas basadas en la medida de la respuesta en frecuencia a determinadas excitaciones. Entre estas tenemos:

(1a) Medidas a múltiples frecuencias

La componente del campo eléctrico dispersado en la dirección del campo eléctrico incidente a grandes distancias del blanco conductor se puede escribir como [REP75]:

$$E^s = \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{2\sqrt{\pi r}} G(j\omega) E^i \quad (6.2)$$

donde k es el número de ondas y $G(j\omega)$ es la respuesta en frecuencia del blanco para una orientación dada. La función $G(j\omega)$ determina unívocamente al blanco y por tanto puede utilizarse para su discriminación. Sin embargo el primer problema que se presenta es que $G(j\omega)$ es prácticamente imposible de reconstruir, ya que se requeriría medir el campo dispersado a un número infinito de frecuencias. Lo que sí se puede hacer es una aproximación de la misma, con un número menor de frecuencias de medida cuidadosamente elegidas. Si la respuesta del blanco a estas frecuencias depende únicamente de su geometría, entonces la amplitud de la onda dispersada a estas frecuencias puede utilizarse como conjunto de parámetros de discriminación del mismo.

Es importante decidirse sobre un acertado rango de frecuencias de medida. El rango adecuado será aquel en que el blanco (su geometría) esté mejor y más completamente caracterizado. En este sentido habrá que tener en cuenta que las altas frecuencias caracterizarán mejor los detalles finos del blanco, mientras que las bajas lo harán sólo de la forma volumétrica del mismo. Obtenido un buen rango de trabajo [LIN81], se han hecho clasificaciones de blancos de estructura simple, mediante las amplitudes del campo dispersado a un número discreto de frecuencias dentro de dicho rango.

Esta técnica presenta considerables limitaciones de tipo práctico. La primera de ellas es la necesidad de utilizar radares multi-frecuencia, a causa de lo cual se ha puesto mucho énfasis en minimizar el número de frecuencias requeridas para la discriminación. Para ello se han empleado la fase y polarización de la onda dispersada como características adicionales de discriminación. Otra importante limitación es la dependencia de la respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ con la orientación del blanco. Este problema se acentúa si se introduce la polarización de la onda dispersada como parámetro de discriminación.

(2a) Respuesta rampa

Una interesante característica del blanco, que lo describe de forma única, y por tanto se puede utilizar como parámetro de discriminación, es su respuesta a una rampa como onda incidente o *respuesta rampa* [KEN65] y [YOU76]. En el dominio de la frecuencia la respuesta a la señal rampa puede escribirse como:

$$F(j\omega) = \left(\frac{1}{j\omega}\right)^2 G(j\omega) \quad (6.3)$$

donde $G(j\omega)$ es la respuesta del blanco a la frecuencia ω . Utilizando las propiedades de la Transformada de Fourier, la respuesta rampa en el dominio del tiempo puede escribirse en términos de la segunda integral de la respuesta impulso del blanco.

$F(j\omega)$ se aproxima mediante medidas a diferentes frecuencias para un rango adecuado que describa lo más completamente posible las características del blanco. Si esto se hace, es posible construir la imagen del blanco. La discriminación puede llevarse a cabo mediante la comparación de esta imagen con las de blancos conocidos. Sin embargo la construcción de una imagen del blanco consume mucho tiempo y requiere la medida de la respuesta rampa (aproximada) para tres ángulos de orientación ortogonales

[YOU76]. Por ello es más conveniente discriminar al blanco mediante la comparación directa de la respuesta rampa de éste con la del blanco conocido, es decir la característica de discriminación será la propia respuesta rampa, en lugar de la imagen del blanco. Es por ello que esta técnica tiene todas las limitaciones del método anterior, especialmente la sensibilidad con el ángulo de orientación.

(3a) Respuesta rampa basada en las resonancias naturales del blanco

El grave problema de la sensibilidad de los métodos de discriminación con la orientación puede reducirse introduciendo el concepto de resonancias naturales del blanco en la comparación de la respuesta rampa, ya que como se vio en el primer capítulo estos modos naturales son independientes de la orientación del blanco.

Se puede demostrar [COR65] que la respuesta rampa de cualquier sistema lineal obedece a una ecuación en diferencias de la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} A_{N,n} f(t-n\Delta T) \quad (6.4)$$

donde $f(t)$ es la respuesta y los coeficientes $A_{N,m}$ están definidos a través de relaciones apropiadas que dependen del número de frecuencias naturales del sistema, N como [MOF75]:

$$\prod_{n=1}^N (s + e^{s_n \Delta T}) = s^N + \sum_{n=1}^N A_{N,n} s^{N-n} \quad (6.5)$$

donde s_n son las resonancias naturales del blanco.

En este caso la discriminación del blanco se basa en el siguiente esquema. A partir de M medidas de $G(j\omega)$, se aproxima la respuesta rampa del blanco desconocida mediante la expresión:

$$F_R(t) = K \sum_{m=1}^M \frac{G(m\omega_0)}{m^2} \cos(m\omega_0 t + \phi(m\omega_0)) \quad (6.6)$$

donde K es constante. Para el blanco conocido (del cual debemos conocer N resonancias naturales) se halla la respuesta rampa a través de la expresión (6.4). Comparando la respuesta rampa aproximada para el blanco desconocido con la del blanco conocido, a través de unos parámetros adecuados [MOF75] se puede identificar o discriminar el blanco. En la práctica la respuesta rampa reconstruida para el blanco conocido es solamente aproximada a causa de que sólo se pueden utilizar un número finito de resonancias.

Esta técnica se ha utilizado para estructuras sencillas y modelos por hilos de aviones, para las cuales se han obtenido teóricamente las frecuencias naturales mediante un análisis SEM. Lógicamente el modelado introduce errores y diferencias sustanciales con la experiencia.

Mejoras en la discriminación se han obtenido empleando el siguiente procedimiento. En lugar de modelar el blanco para obtener las resonancias a través del análisis SEM, se usa un proceso menos complicado y teórico. En primer lugar, la respuesta en frecuencia del blanco se obtiene (para una orientación concreta) numéricamente para un número discreto de frecuencias de medida. Conocida la respuesta en frecuencia, puede usarse para calcular de forma aproximada la respuesta rampa a través de (6.6). Finalmente las resonancias naturales dominantes de la respuesta rampa pueden obtenerse con el método de Prony [CHU76]. Este esquema de discriminación ha sido

utilizado incluso para estructuras complejas de aviones a escala [CHU76].

Sin embargo a pesar de que esta técnica ha reducido el problema de la sensibilidad con la orientación del blanco, sigue presentando algunos inconvenientes. El método es complicado en su realización y sensible a la elección del ΔT en la ecuación (6.4). Además hacen falta suficientes valores de $G(j\omega)$ para obtener una discriminación adecuada, haciéndose necesario un sistema de radar multi-frecuencia.

b) Técnicas basadas en la comparación de resonancias naturales.

El camino más directo para utilizar las resonancias naturales en un esquema de discriminación es realizar una comparación directa de las mismas. La respuesta de un blanco desconocido en la región del late-time puede ser analizada, extrayendo de ella sus frecuencias o polos naturales, las cuales pueden ser comparadas con las de una librería de blancos conocidos o blancos patrón, de tal forma que el blanco desconocido se identificará o se discriminará. Esta técnica presenta ya de entrada una mejora sustancial respecto de métodos anteriores, ya que por un lado es independiente de la orientación del blanco, y además no precisa de un radar multi-frecuencia. Sólo será necesario excitar al blanco con una onda que contenga energía en el rango de las frecuencias naturales del blanco desconocido.

Por tanto en este esquema el problema se reduce a la extracción de las resonancias naturales de la región del late-time de la respuesta del blanco.

Son muchos los esquemas de extracción de polos de una señal temporal. Los tradicionalmente utilizados están basados en el método de Prony. Uno de los graves problemas que restringe el uso del método de Prony para la discriminación es la

sensibilidad del método a la presencia de ruido en la respuesta del blanco. En este sentido se han hecho mejoras introduciendo variantes en el mismo, como la del método de Prony extendido [GOM86] descrito en el capítulo II de esta Memoria. Otros problemas son los derivados de una mala estimación del número exacto de modos naturales contenidos en la respuesta, además de todos los relacionados con el tratamiento de señales discretas en el tiempo (aliasing, leakage, uso de ventanas, etc.).

Como alternativa han surgido numerosos métodos de extracción de polos, entre los que cabe destacar el "Pencil of-function method" [HUA90], y los basados en la descomposición en valores singulares [KUM82]. Todos estos métodos tratan de eliminar la sensibilidad con el ruido que contamina la respuesta del blanco. Sin embargo, estos métodos tienen una limitación en la cantidad de ruido que contamina la onda dispersada por el blanco. Para valores de la relación señal-ruido bajas (alto porcentaje de ruido en la señal), la estimación de los polos exactos de la señal falla, haciendo imposible la discriminación entre blancos de estructura parecida.

c) Técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes.

El último tipo de esquemas de discriminación que usan la respuesta del blanco a una determinada excitación, tienen una filosofía completamente distinta a los anteriores. En lugar de analizar la señal respuesta del blanco en términos de sus modos naturales, estos esquemas se basan en la síntesis de formas de onda de excitación para que la respuesta del blanco cumpla una serie de especificaciones preestablecidas.

Estas ondas de excitación son filtros lineales en el dominio del tiempo, los cuales, al convolucionar con la respuesta del blanco para las cuales están diseñadas, aniquilen un contenido de frecuencias naturales preseleccionado de dichas respuestas. Estas frecuencias

naturales, independientes de la excitación, pueden medirse en el laboratorio en un ambiente óptimo (sin ruido ni ecos) usando blancos modelados a escala, por lo que se puede disponer de ellas en caso de que sean necesarias para sintetizar las ondas discriminantes. Este tipo de esquemas tiene la ventaja sobre los anteriores de aunar la independencia del ángulo de orientación de la excitación con una menor sensibilidad al ruido. Las técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes en la última década son:

- 1º) El pulso de aniquilación (K-pulso).
- 2º) El pulso de extinción (E-pulso).
- 3º) Técnicas de optimización.
- 4º) Los filtros de aniquilación de resonancias (FAR).

Dada la importancia de este tipo de técnicas y su estrecha relación con los filtros de aniquilación de resonancias de los que trata esta tercera parte de la Memoria, estudiaremos cada una de estas técnicas en los siguientes apartados.

VI-4. EL PULSO DE EXTINCION (E-PULSO)

El concepto de pulso de extinción (E-pulso) fue introducido por Rothwell y colaboradores en 1985 [ROT85a] quienes propusieron un esquema de discriminación de blancos de radar basado en las oscilaciones naturales que presenta la respuesta de un blanco conductor en la región late-time.

La técnica de los pulsos de extinción tiene como precursora a otra más antigua, basada igualmente en el diseño de ondas discriminantes, que fue introducida por Kennaugh en 1981 [KEN81] denominada técnica de los pulsos de aniquilación (K pulso).

Un K-pulso se define como una onda de excitación de duración mínima, limitada en el tiempo, que cuando interacciona con un blanco de radar produce una minimización de la respuesta del mismo. Con esta definición, la discriminación se basa en la correspondencia unívoca que existe entre un K-pulso y un blanco particular, de tal forma que la excitación de un blanco distinto a aquel para el que se sintetizó el K-pulso producirá una respuesta mayor.

Kennaugh construyó K-pulsos aproximados basándose en consideraciones geométricas. Su intención era aproximar las resonancias de un blanco usando la geometría propia de cada blanco, ya que las resonancias sólo dependen de ésta. Sin embargo esta es una tarea muy complicada para hacer sistemáticamente. Un esquema más apropiado sería aquel que usara las frecuencias de resonancia del blanco directamente en la síntesis de tales ondas, de forma que una vez obtenidas éstas se construyera una onda discriminante específica para cada blanco. Así surgió la técnica del pulso de extinción (E-pulso) de la que nos ocuparemos en este apartado.

Un E-pulso se define como una onda de excitación, transitoria, de duración finita T_e , que aniquila o extingue la contribución de un número preseleccionado de resonancias complejas naturales en el late-time de la respuesta del blanco de duración T_L , esto es:

$$r(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & N \text{ modos extinguidos} \\ \sum_{\substack{\text{modos no} \\ \text{extinguidos}}} A_n e^{\sigma_n t} \cos(\omega_n t + \varphi_n) & N' < N \text{ modos extinguidos} \end{array} \right\} \quad \forall t > T_L + T_e \quad (6.7)$$

Según esta definición y puesto que las frecuencias naturales del blanco son independientes de la excitación, el E-pulso eliminará los modos deseados del blanco independientemente de la orientación del blanco con respecto a la antena transmisora o receptora. Si este E-pulso excita un blanco diferente (con frecuencias naturales distintas), resulta un campo dispersado diferente, permitiéndose así la discriminación de ambos. Desde un punto de vista espectral, mientras que la respuesta del blanco conocido (o blanco correcto) presentará muy poca energía en las frecuencias naturales de éste, la del blanco incorrecto presentará una gran energía sobre estas mismas frecuencias.

El E-pulso definido en (6.7) es una generalización del concepto del K-pulso definido por Kennaugh en 1981 [KEN81]. De hecho en [FOK87] se hace una comparación de ambos de tal forma que el E-pulso coincidirá con el K-pulso cuando el primero aniquile todas las resonancias y tenga duración mínima.

Otra cuestión de interés en este tipo de técnicas es que no es necesario excitar al blanco con un E-pulso con objeto de discriminarlo e identificarlo mediante esta técnica, ya que cualquier otra onda de duración finita y ancho de banda adecuado puede usarse como excitación, siempre que su respuesta contenga los modos naturales del blanco. Obtenida la respuesta a dicha excitación, su convolución numérica con el E-pulso permitirá obtener resultados análogos a los obtenidos con la transmisión del E-pulso (i.e. en esta convolución se habrán extinguido los modos naturales para los que fue diseñado el E-pulso), por lo que no será necesario generar experimentalmente el pulso de extinción para su uso en la discriminación del blanco.

VI-5. TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

La técnica mas reciente de discriminación de blancos de radar es el método de optimización [BAY90] desarrollado por Bayard y Schaubert en 1990. Se usa un planteamiento de partida diferente al E-pulso, basado en la maximización de la energía de la señal en un ancho de banda específico. En esta optimización la razón entre la energía del campo dispersado en un intervalo temporal T_0 (en la localización espacial x_0) y la energía total del campo eléctrico dispersado en x_0 se maximiza, es decir

$$\rho = \max \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_0} |E^s(t, r_0, \theta_0)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |E^s(t, r_0, \theta_0)|^2 dt} \quad (6.8)$$

Para un ángulo apropiado de optimización θ_0 y de duración temporal T_0 , puede obtenerse una onda discriminante, independiente de la excitación. La elección de este ángulo apropiado está relacionada, dado un ancho de banda específico, con la presencia de modos naturales en dicho ancho de banda, aunque las resonancias naturales no necesitan ser conocidas a priori para sintetizar esta onda discriminante.

Los pasos que sigue el método de optimización para diseñar la onda discriminante son los siguientes:

- 1º) Seleccionar un ángulo de optimización para el cual todas las resonancias dentro del ancho de banda estén presentes.
- 2º) Elegir el intervalo temporal de optimización T_0 lo suficientemente grande para que

ρ sea casi la unidad para todas las orientaciones del blanco correcto.

- 3º) Maximizar ρ para obtener una onda óptima incidente. Esto quiere decir que la energía mínima fuera del intervalo T_0 es mínima, y por tanto se conseguirá una respuesta casi cero en el late-time. La maximización en el caso del hilo conductor lleva a una ecuación integral cuya solución está dada por las funciones de onda esferoidales [BAY90] de orden cero restringidas al ancho de banda escogida de partida.
- 4º) Cambiar la orientación del blanco y verificar que la onda así obtenida produce una casi idéntica concentración de energía (ρ es independiente de la orientación).

Este método presenta la gran ventaja de no necesitar un conocimiento preciso de las resonancias naturales del blanco y además se comporta bien para niveles moderados de ruido aunque una reciente comparación con el método E-pulso muestra [BAY91] que éste último es más robusto al ruido que el método de optimización.

VI-6. EL FILTRO DE ANIQUILACIÓN DE RESONANCIAS (FAR).

El concepto de filtro de aniquilación de resonancias (FAR) fue introducido por Morgan [MOR88] como aquel sistema (filtro) lineal cuya salida, cuando se convoluciona con la respuesta dispersada del blanco para el que ha sido sintetizado, exhibe la más baja energía en el late-time. En el proceso de filtrado la respuesta electromagnética dispersada por un blanco desconocido, obtenida por la excitación de éste con una onda incidente $g(t)$, se convoluciona con la respuesta impulso del FAR $k(t)$ sintetizado a partir de las resonancias naturales de los blancos de la librería (figura 6.1).

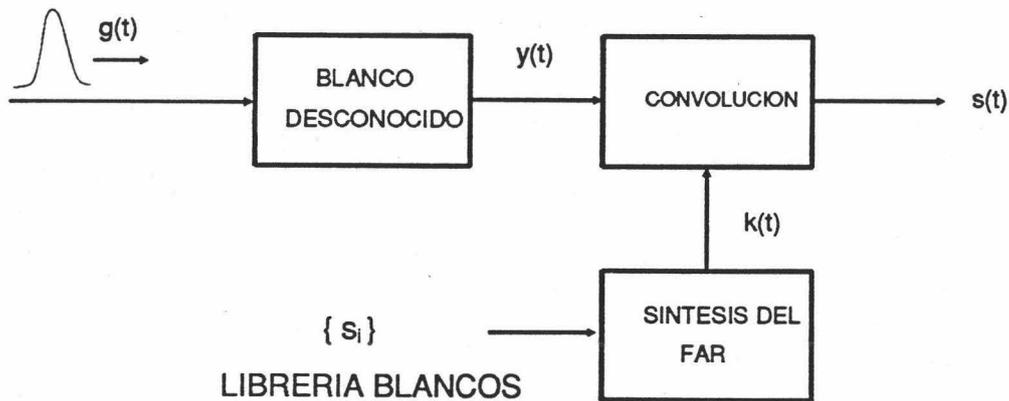


Figura (6.1): Esquema del proceso de filtrado por el FAR.

Por la teoría del SEM desarrollada en el apéndice A sabemos que el campo electromagnético dispersado $\vec{E}^s(\vec{r}, t)$ ó $\vec{H}^s(\vec{r}, t)$ puede desarrollarse en la forma (A.31)

$$y(t) = y_E(t) [u(t) - u(t - T_0)] + y_L(t) u(t - T_0) \quad (6.9)$$

donde $y(t)$ es el campo dispersado $\vec{E}^s(\vec{r}, t)$ ó $\vec{H}^s(\vec{r}, t)$, $y_E(t)$ es la componente 'early-time' de la señal de duración T_0 , e $y_L(t)$ es la respuesta dispersada en el 'late-time', constituida por una suma de sinusoides amortiguadas (A.36).

La respuesta del FAR $s(t)$ al campo dispersado $y(t)$ será la convolución de su respuesta impulso $k(t)$ con dicho campo dispersado

$$s(t) = k(t) * y(t) \quad (6.10)$$

Cuando se quiera discriminar entre un conjunto de M blancos, el proceso de decisión se basa en hacer pasar la señal dispersada por el conjunto de M FAR sintetizados para cada uno de esos blancos, y seleccionar como blanco correcto aquel cuya salida con el FAR

correspondiente exhiba la mejor energía en el late-time, que corresponderá a una onda completamente aniquilada en el caso no ruidoso (figura 6.2).

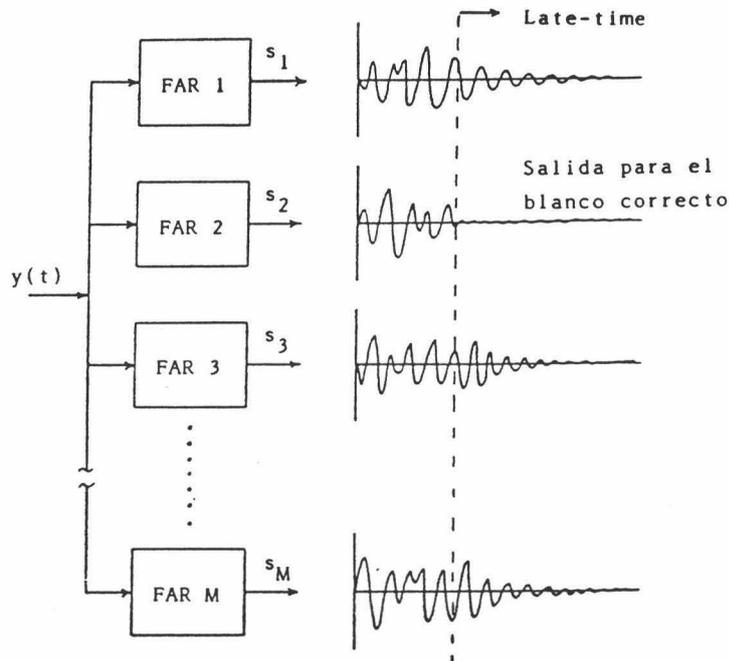


Figura (6.2). Esquema del proceso de discriminación del FAR.

Es decir se va computando para cada filtro representativo de un blanco conocido la energía de la respuesta del FAR, definida como:

$$\epsilon_m = \int_{T_L}^{\infty} s_m^2(t) dt \quad m = 1 \dots M \quad (6.11)$$

y se toma como blanco correcto aquel al que corresponda el FAR de energía mínima. En la ecuación (6.11) T_L es el tiempo de comienzo del cómputo de la energía de salida, que debe ser suficientemente grande para excluir cualquier contribución del 'early-time', ya que el FAR está diseñado para cancelar exactamente un conjunto seleccionado de modos naturales, los cuales sólo aparecen en su forma pura en el 'late-time'.

Teniendo en cuenta la discriminación, los criterios de diseño que se le exigen al FAR son [MOR88]:

- (1) No debe haber contribución del 'early-time' (Apéndice A) de la señal. Esto implica que los filtros de aniquilación de resonancias han de ser de respuesta impulso finita (FIR). Tales filtros son no-recursivos y tienen una respuesta impulso que es cero más allá de un tiempo finito T_k . Esto implica que $T_L \geq T_0 + T_k$.
- (2) El rango de la integral de ϵ_m debe ser lo más amplio posible para tener la mayor cantidad de energía significativa en la región del 'late-time' que es la que sirve para la discriminación (Apéndice A). Esto significa que debe minimizarse la duración de la respuesta impulso T_k .
- (3) La razón de energías entre el 'late-time' del blanco correcto y el de otros blancos debería minimizarse sobre un rango de ángulos de orientación y polarizaciones de la onda.
- (4) Como la señal dispersada suele estar contaminada con ruido, tanto interno como externo a la antena receptora, el filtro debe minimizar la transferencia del ruido a través de él.

Algunos de estos criterios están en conflicto. Por ejemplo una eliminación efectiva del ruido requiere una integración de la señal a través de un filtrado FIR de suavizado de longitud dada, habiendo un conflicto entre (2) y (4). Por lo tanto habrá que llegar a un compromiso entre las distintas características para obtener un filtro óptimo. Teniendo éstas en cuenta el FAR puede sintetizarse usando técnicas analógicas o digitales. La forma analógica del FAR falla al intentar proporcionar consistentemente energías más bajas en el 'late-time' para el blanco correcto. La forma digital, basada enteramente en métodos de procesamiento digitales de la señal se ha mostrado exitosa en los casos estudiados. En los siguientes subapartados vamos a pasar a estudiar como se lleva a cabo el diseño del FAR.

VI.6.1. Síntesis analógica del FAR

En el Apéndice A vimos que el campo electromagnético en el 'late-time' puede expandirse en una suma de modos naturales (A.36). Cada uno de estos modos puede considerarse solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, que en forma normalizada es [MOR88]

$$L_n y_n(t) = \left\{ \frac{d}{dt} - s_n \right\} \left\{ \frac{d}{dt} - s_n^* \right\} y_n(t) = 0 \quad (6.12)$$

donde el operador L_n cancela el modo n -ésimo. El FAR analógico hace uso de operadores diferenciales para cancelar modos individuales naturales. Como cada operador cancela un modo determinado se sigue que los múltiples modos pueden aniquilarse por una aplicación sucesiva de los correspondientes operadores diferenciales. Así, por ejemplo, la cancelación del conjunto de $n=1$ a N modos dominantes en la respuesta del blanco requiere el uso de un operador diferencial de orden $2N$, formado por la composición de los N operadores diferenciales que cancelan cada modo

$$L y(t) = 0 \quad (6.13)$$

Si elegimos la respuesta impulso del FAR $k(t)$ como $Lf(t)$, donde $f(t)$ es una función suave con derivadas continuas hasta el orden del operador L , la salida del FAR será, a partir de la ecuación (6.10)

$$s(t) = k(t) * y_L(t) = Lf(t) * y_L(t) \quad (6.14)$$

Si aplicamos el Teorema de Parseval [OPP75], la ecuación (6.14) es equivalente a

$$s(t) = Lf(t) * y_L(t) = f(t) * Ly_L(t) = 0 \quad (6.15)$$

donde hemos tenido en cuenta (6.13). Como la salida del FAR al 'late-time' es nula, basta pues con elegir la respuesta impulso del FAR de la forma $k(t) = Lf(t)$, con $f(t)$ elegida conveniente para producir un suavizado del ruido presente en la señal.

La función de transferencia del FAR será, utilizando la Transformada de Fourier de $k(t)$

$$K(\omega) = \{ (j\omega - s_1) (j\omega - s_1^*) \dots (j\omega - s_N) (j\omega - s_N^*) \} F(\omega) \quad (6.16)$$

La salida del FAR puede obtenerse en frecuencia a partir de la Transformada inversa de Fourier de $K(\omega) Y(\omega)$

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ K(\omega) Y(\omega) \} \quad (6.17)$$

La forma de llevar a cabo este procedimiento analítico cuando se dispone de muestras de la señal es a través del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), tomando la FFT de muestras de las muestras de $y(t)$, multiplicándola en puntos discretos de frecuencia por $K(\omega)$, y luego utilizar la transformada inversa rápida de Fourier (IFFT) para obtener la serie temporal de salida del FAR. Sin embargo, las características de la función de transferencia del FAR hacen este procedimiento inviable. El polinomio de orden $2N$ que constituye la función de transferencia del FAR (6.16) proporciona una extrema amplificación en las altas frecuencias. Una elección cuidadosa de $f(t)$ (por ejemplo tipo gaussiana) podría proporcionar una compensación de las altas frecuencias al llevar a cabo un suavizado de la señal. Sin embargo, los errores de redondeo de la FFT o cualquier ruido que lleve la señal son amplificados enormemente por el polinomio $K(\omega)$, lo que invalida el uso práctico de este método basada en la síntesis analógica de los filtros de aniquilación de resonancias.

VI.6.2. Síntesis digital del FAR

La implementación del FAR analógico falla al tener que utilizar técnicas digitales en la construcción de su respuesta impulso. Una alternativa posible sería desarrollar el método de forma totalmente digital, reemplazando las ecuaciones diferenciales anteriores por sus correspondientes ecuaciones en diferencias. La ecuación en diferencias equivalente a la ecuación diferencial (6.12) será de la forma:

$$a_n y_n[(p-2)T] + y_n[(p-1)T] + b_n y_n[pT] = 0 \quad (6.18)$$

donde T es el periodo de muestreo. Sustituyendo la expresión del modo n -ésimo de $y_L(t)$ dado por

$$y_n(t) = R'_n e^{(\sigma_n + j\omega_n)t} \quad (6.19)$$

en la ecuación (6.18) se encuentra que los coeficientes del FAR que cancelan este modo son:

$$a_n = -\frac{1}{2} \frac{e^{\sigma_n T}}{\cos(\omega_n T)} \quad b_n = -\frac{1}{2} \frac{e^{-\sigma_n T}}{\cos(\omega_n T)} \quad (6.20)$$

La ecuación en diferencias (6.19) puede sintetizarse fácilmente usando filtros de respuesta impulso finita (FIR) cuyos coeficientes serán $\{ b_n, 1, a_n \}$ donde b_n y a_n vienen dados por (6.20). Para cancelar los N pares de polos se emplea una cascada de N filtros FIR de 3 coeficientes. Combinando los coeficientes que multiplican los mismos puntos temporales se obtiene un filtro FIR global con $2N+1$ coeficientes, que será el FAR que aniquile los N modos presentes en la respuesta impulso del blanco. La ecuación en diferencias que representa este filtro será:

$$s[nT] = \sum_{m=0}^{2N} C_m y[(p-m)T] \quad (6.21)$$

La función de transferencia de este filtro digital será, usando la transformada Z en (6.21)

$$K(z) = \frac{S(z)}{Y(z)} = \sum_{m=0}^{2N} C_m z^{-m} \quad (6.22)$$

la cual representa un polinomio de orden $2N$. Este filtro también vuelve a presentar un problema de amplificación de la alta frecuencia, sin embargo el utilizar una implementación digital elimina el problema del uso de la FFT con los problemas de redondeo asociados, y además permite el uso natural de técnicas de tratamiento digital de la señal para eliminar el ruido presente en la señal en cualquier caso práctico.

Una vez sintetizada la parte de aniquilamiento de los modos, que es llevada a cabo por los filtros de aniquilación de resonancias cuyos coeficientes vienen dados por (6.20), queda implementar la etapa de suavizado de los datos, necesaria para poder llevar a cabo una identificación del blanco en presencia de ruido. De esta segunda etapa, esto es, las diferentes técnicas de suavizado de la señal y de mejora de la relación señal-ruido efectiva nos ocupamos en el Apéndice B y en el siguiente capítulo de esta Memoria.

CAPITULO VII

**MEJORA DE LA SEÑAL BASADA EN UN
MODELADO RACIONAL Y DISEÑO DE UN FILTRO
DE SUAVIZADO OPTIMO.**



VII-1. INTRODUCCIÓN

El principal defecto del FAR es, como se puso de manifiesto en el capítulo anterior su amplificación de las altas frecuencias. Aún utilizando la implementación digital que elimina los errores numéricos de redondeo inherentes al método analógico, la amplificación polinómica de orden $2N$ de las frecuencias fuera del rango donde permanecen las resonancias naturales propia de la función de transferencia del FAR invalida la posibilidad de identificación incluso cuando se trabaja con bajo nivel de ruido.

En cualquier caso práctico la señal está contaminada con ruido, procedente tanto de fuentes de ruido interno de la antena como de ruidos externos generados en el ambiente en que está inmerso el blanco. Por ello, dada la imposibilidad de discriminar blancos a partir de esta señal ruidosa con el FAR, es necesario llevar a cabo un tratamiento previo de la señal que mejore la relación señal-ruido de la onda recibida por el radar para permitir la identificación posterior mediante el FAR. Esta mejora de la señal puede llevarse a cabo mediante distintas técnicas. En esta Memoria se han usado tres tipos, las técnicas clásicas basadas en el uso de ventanas espectrales y filtros paso-baja, descritas en el Apéndice B, y las basadas en la Descomposición en Valores Singulares y en el diseño de un filtro de suavizado óptimo de las que se ocupa este capítulo.

Este capítulo se ha organizado de la forma que se describe a continuación. En la sección VII-2 se establecen las bases del modelado racional de la señal. Basándonos en este modelado se formula en la sección VII-3 el problema de optimización específico de mejora de las señales de las que se ocupa esta tercera parte de la Memoria. La construcción de la solución de este problema se detalla en la sección VII-4. La implementación en un algoritmo de mejora de la señal se lleva a cabo en la sección VII-5.

En la sección VII-6 tratamos el problema de la elección del orden del modelo racional que aplicamos a nuestra señal, así como de la estimación del número de modos presentes en la respuesta dispersada del blanco. La adición de una etapa de filtrado paso-baja de la señal se trata en la sección VII-7. En la sección VII-8 se lleva a cabo el diseño de un filtro de suavizado óptimo, que amplifica las bandas de frecuencia donde hay señal y atenúa el resto del espectro. La construcción de un algoritmo global que recoge todas las etapas anteriores se realiza en la sección VII-9. Finalmente en la sección VII-10 se resumen los resultados más importantes obtenidos en este capítulo.

VII-2. MODELADO RACIONAL DE LA SEÑAL

En el Apéndice B se han desarrollado las técnicas clásicas de las estimación de señales en ruido. Dentro de la teoría clásica nuestro problema se encuadraba en la estimación de señales en ruido desconocidas en su forma, ya que al conocer solamente las resonancias naturales del blanco y no los residuos que dependen de su orientación relativa respecto de la onda incidente, la forma de onda que llega a nuestro receptor es desconocida. Sin embargo aunque no conozcamos la forma explícita del campo dispersado en el late-time sí que sabemos su estructura, que está predicha por el SEM. En el apéndice A se establece que el late-time consiste en una combinación lineal de q exponenciales complejas amortiguadas (A.34). En este caso cualquier conjunto de N datos de la señal, $x(1), x(2), \dots, x(N)$ que constituyen el intervalo de observación satisface una ecuación en diferencias homogénea de la forma [CAD88]:

$$\sum_{m=0}^p a(m) x(n-m) = 0 \quad \begin{array}{l} p \geq q \\ p+1 \leq n \leq N \\ 2p+1 \leq N \end{array} \quad (7.1)$$

ecuación que corresponde a un modelo autoregresivo (AR o todo polos) de orden p . Este

resultado es bien conocido y constituye la base del método de Prony [MAR87] [BLAR75]. En forma matricial esta relación puede escribirse como:

$$X a = \begin{bmatrix} x(p+1) & x(p) & \dots & x(1) \\ x(p+2) & x(p+1) & \dots & x(2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x(N) & x(N-1) & \dots & x(N-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = 0 \quad (7.2)$$

La matriz de datos X tiene estructura Toeplitz y rango q , el número de modos significativos presentes en el late-time. Estas propiedades de la matriz de datos, consecuencia de la estructura de la señal en el late-time, serán útiles para una mejor estimación de la señal cuando esté contaminada con ruido, ya que cuando la señal recibida en la antena es ruidosa, la matriz X formada a partir de los datos medidos no posee rango q debido a la inexactitud que se comete al aproximar por un modelo exponencial de orden q dichos datos ruidosos.

Para mostrar esta pérdida de las propiedades teóricas de la matriz X , consideremos los datos recibidos por la antena $y(n)$ como:

$$y(n) = x(n) + e(n) \quad (7.3)$$

donde $x(n)$ es la señal dispersada por el blanco, que corresponde a un modelo exponencial de orden q , y $e(n)$ es el término correspondiente al ruido aditivo presente en los datos medidos $y(n)$. La matriz formada con los datos recibidos en el receptor Y es la suma de las matrices X y E , formadas por $x(n)$ y $e(n)$ respectivamente:

$$Y = X + E \quad (7.4)$$

La matriz Y tiene estructura Toeplitz pero no tiene rango q . Para probarlo se forma la matriz producto $Y^* Y$ que tiene el mismo rango que Y . Dicha matriz, teniendo en cuenta (7.4), vendrá dada por:

$$Y^* Y = X^* X + X^* E + E^* X + E^* E \quad (7.5)$$

Si el ruido que contamina la onda dispersada es un proceso blanco de media cero y varianza σ^2 que no está correlacionado con la señal exponencial $x(n)$, el valor esperado de dicha matriz vendrá dado por:

$$E\{Y^* Y\} = X^* X + \sigma^2 I \quad (7.6)$$

donde I es la matriz identidad. $X^* X$ es una matriz determinista de rango q ya que X tiene dicho rango, sin embargo la matriz $Y^* Y$ tendrá un rango completo tendiendo a tener q valores singulares más grandes y $p+1-q$ valores singulares mas pequeños de valor medio σ^2 . Como la matriz producto $Y^* Y$ tiene la misma caracterización en valores singulares que la matriz Y se infiere que dicha matriz ya no posee la propiedad de tener rango q , propiedad distintiva de la matriz de datos de la señal exponencial.

Como la matriz de la onda dispersada en el late-time se sabe que ha de poseer estructura Toeplitz y rango q , un buen planteamiento sería buscar la matriz X' que cumpla dichas propiedades y esté lo más próxima posible a Y , la matriz de datos medidos. Es decir, buscamos en el subconjunto de las matrices $(N-p) \times (p+1)$ de rango q y estructura Toeplitz la matriz X' que haga mínima algún tipo de distancia entre la matriz Y y dicho subconjunto. De la forma de obtención de dicha matriz y por tanto de los datos mejorados nos ocuparemos en el siguiente apartado.

VII-3. FORMULACION DEL PROBLEMA DE MEJORA DE LA SEÑAL

Consideremos el espacio métrico (C, d) donde C es el conjunto de matrices $(N-p) \times (p+1)$ y d es la métrica de Frobenius definida como:

$$d(A, B) = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2 \right]^{1/2} \quad (7.7)$$

Definamos el subconjunto de C de las matrices de rango q y estructura Toeplitz y lo notamos S , dicho subconjunto es trivialmente la intersección de otros dos S_1 y S_2 que se denominan conjuntos propios de la matriz Y , definidos como:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ S_1 &= \{ X \in C ; X \text{ posee rango } q \text{ o menor } \} \\ S_2 &= \{ X \in C ; X \text{ posee estructura Toeplitz } \} \end{aligned} \quad (7.8)$$

El problema que nos ocupa es encontrar en el conjunto S la matriz Z que minimice la distancia de Frobenius con la matriz de datos medidos, es decir resolver el problema de optimización dado por [CAD88] [CAD91]:

$$\inf_{Z \in S} d(Z, Y) \quad (7.9)$$

donde 'inf' denota el ínfimo de las distancias. Este problema de optimización es intratable directamente debido al requerimiento de que la solución esté en la intersección de S_1 con S_2 , y este conjunto intersección es complejo de tratar al ser no convexo. Debido a esta complejidad se ha de recurrir a procesos algorítmicos para obtener una aproximación a la solución óptima. El proceso de obtención del algoritmo lleva las siguientes etapas:

VII.3.1 Descomposición del problema original en varios subproblemas relacionados con cada uno de los conjuntos propios S_1 y S_2 .

Una tarea más simple es encontrar por separado aquellos conjuntos de matrices que pertenezcan a los conjuntos S_1 y S_2 que sean más cercanos a la matriz de datos medidos Y en la métrica de Frobenius, es decir, resolver por separado los dos problemas de optimización siguientes:

$$\inf_{Z \in S_k} d(Z, Y) \quad k = 1, 2 \quad (7.10)$$

Una vez encontrada la solución de cada uno de ellos estas nos servirán de base para obtener la solución del problema de optimización global (7.9).

VII.3.2 Búsqueda del conjunto solución a través de mapeos propios.

El conjunto solución de cada uno de los subproblemas definidos en el apartado VII.3.1, es decir, las matrices en el conjunto propio S_k que resuelven el problema de optimización, puede verse como la imagen de un mapeo (operador) que lleve la matriz Y a dicho conjunto solución $F_k(Y)$:

$$F_k : Y \rightarrow F_k(Y) \quad (7.11)$$

Como la unicidad no está garantizada en general, este operador F_k no es una función usual de punto a punto sino un mapeo de punto a conjunto. De esta forma el problema de encontrar el conjunto solución para cada problema de optimización equivale a encontrar los mapeos propios F_1 y F_2 que hacen corresponder a la matriz Y su conjunto solución

en cada subproblema.

VII.3.3 Formación del mapeo compuesto propio.

Como veremos en el apartado VII.3.4 en el algoritmo de búsqueda de la solución global del problema de optimización juega un importante papel el operador resultante de la aplicación secuencial de los mapeos propios individuales:

$$F = F_2 F_1 \quad (7.12)$$

donde dicha aplicación debe entenderse como la formación sucesiva de los conjuntos $F_1(Y)$ y $F_2(F_1(Y))$. Este mapeo compuesto es en general un mapeo de punto a conjunto como es el caso de F_1 y F_2 .

VII.3.4 Algoritmo de búsqueda de la solución óptima.

El cálculo de la solución del problema de optimización global (7.9) puede llevarse a cabo a partir del conocimiento del mapeo compuesto F definido en VII.3.3. Para ello juega un especial significado el concepto de punto fijo del mapeo propio compuesto F . Por punto fijo entendemos aquel elemento del conjunto inicial Y tal que $Y \in F(Y)$. El siguiente algoritmo, basado en el teorema de convergencia global de Zangwill [CAD88] define el algoritmo de búsqueda de una solución óptima:

Algoritmo.- Sea Y la matriz de datos medidos que va a ser aproximada por un elemento de S y X^r una matriz de S que actúa como referencia para reducir la distancia. Sea el conjunto:

$$\{ Z \in C ; d(Z, X_r) \leq d(Y, X_r) \text{ con } X_r \in S \} \quad (7.13)$$

un conjunto cerrado y acotado. Si F , mapeo compuesto propio que actúa minimizando la distancia respecto al elemento referencia X_r es cerrado, cualquier secuencia generada por la regla algorítmica:

$$X_k \in F(X_{k-1}) \quad k \geq 1 \quad (7.14)$$

contiene una subsecuencia convergente a un elemento del conjunto propio S . Como elemento inicial X_0 en la iteración puede tomarse la propia matriz Y .

Este algoritmo construye la solución óptima mediante un proceso iterativo. Dicho proceso sólo asegura que en la secuencia formada según (7.14) hay una subsecuencia convergente, aunque en los casos prácticos se encuentra que la secuencia global converge. Además la secuencia generada por este proceso en general no es única, ya que F es un mapeo de punto a conjunto.

Para construir la solución óptima a nuestro problema de mejora de la señal, se aplicará este proceso. Primero se construye el mapeo propio compuesto F y después se aplica el algoritmo (7.14) para obtener una solución, es decir, una matriz de rango q y estructura Toeplitz que esté más cercana a Y , la matriz de datos medidos.

VII-4. CONSTRUCCION DEL MAPEO PROPIO COMPUESTO.

Como se ha puesto de manifiesto en el apartado anterior una solución del problema

de optimización (7.10) viene dada por la construcción del mapeo propio compuesto y la aplicación del algoritmo iterativo (7.14). Formemos primeramente dicho mapeo. En nuestro problema buscamos la matriz de rango q y estructura Toeplitz que esté más cercana a Y . Por ello el mapeo propio compuesto estará formado por la aplicación sucesiva de F_1 , mapeo propio de aproximación a rango q , y F_2 mapeo propio de aproximación a estructura Toeplitz.

VII.4.1 Mapeo propio de aproximación a rango fijo.

La matriz de datos Z que buscamos ha de poseer rango q . Construyamos el mapeo que me dé el mejor aproximante de la matriz Y en el conjunto S_1 de las matrices $(N-p) \times (p+1)$ de rango q o menor. Este conjunto S_1 es no convexo, ya que la suma de dos matrices de rango q puede tener un rango mayor que q , pero es cerrado, lo que es importante para el algoritmo de solución óptima.

El mapeo al subconjunto de matrices de rango fijo q viene dado por el siguiente teorema [CAD88]:

Teorema.- Sea B una matriz cualquiera de C . Consideremos su descomposición en valores singulares (SVD):

$$B = \sum_{k=1}^r \sigma_k u_k v_k^* \quad (7.15)$$

donde r es el rango de B , σ_k son los valores singulares de la matriz ordenados decrecientemente y u_k y v_k son los vectores singulares ortonormales izquierdo y derecho respectivamente. Si $\sigma_q \neq \sigma_{q+1}$, existe una única matriz de rango q o menor en S^q que

minimiza la distancia de Frobenius. Dicha matriz viene dada por el mapeo propio F_q :

$$\mathbf{X}_1^q = F^q(\mathbf{X}_1) = \sum_{k=1}^q \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \quad (7.16)$$

Este mapeo, al ser única \mathbf{X}_1^q , es una función. Además es continua (y por lo tanto cerrado). Si $\sigma_q = \sigma_{q+1} \neq 0$, F^q es un mapeo cerrado de punto a conjunto pero no continuo.

Por lo tanto, ya se tiene el mapeo propio de aproximación a rango fijo. Por el teorema anterior dicho mapeo coincide con aquel que trunca la descomposición en valores singulares de la matriz en un orden q . En nuestra notación tenemos que $F_1 \equiv F^q$, lo que significa que la matriz de rango q que minimiza la distancia de Frobenius con la matriz de datos medidos \mathbf{Y} se obtiene truncando la SVD de dicha matriz quedándonos con los q primeros valores y vectores singulares.

VII.4.2 Mapeo propio de aproximación a matriz Toeplitz.

La matriz \mathbf{X} que buscamos ha de tener estructura Toeplitz. Estas matrices Toeplitz no son más que un caso especial de matrices dotadas de estructura lineal, como las matrices de Hankel, Hermíticas, etc. Dichas matrices tienen sus componentes dadas por las relaciones funcionales:

$$\mathbf{X}(i,j) = \mathbf{a}_{ij}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \mathbf{a}_{ij}(\theta) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq N-p \\ 1 \leq j \leq p+1 \end{array} \quad (7.17)$$

donde las funciones \mathbf{a}_{ij} son lineales en los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ que se denominan grados de libertad. En el caso de matrices Toeplitz, como están completamente especificadas por el conocimiento de su primera fila y su primera columna, tendremos N grados de libertad,

los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p+1}$ para la primera fila y $\theta_1, \theta_{p+2}, \dots, \theta_N$ para la primera columna, estando sus componentes gobernados por las funciones lineales de dichos parámetros $a_{ij}(\theta)$ dados por:

$$\begin{aligned} a_{ij}(\theta) &= a_{i+1, j+1}(\theta) = \theta_{1+j-i} & 1 \leq i \leq j \leq p+1 \\ a_{ij}(\theta) &= a_{i+1, j+1}(\theta) = \theta_{p+2+j-i} & 1 \leq j \leq i \leq p+1 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Estas relaciones pueden expresarse en forma matricial como

$$X = T^{-1}(A\theta) \quad \begin{array}{l} \theta \text{ vector de parametros} \\ A \text{ matriz característica} \end{array} \quad (7.19)$$

donde la matriz característica A es una matriz $(N-p)(p+1) \times k$ de rango q y T es una función de reordenamiento que forma un vector a partir de una matriz simplemente concatenando las filas o columnas de la matriz, es decir, colocando las componentes de cada fila o de cada columna una tras de la otra. Si z es un vector de datos de longitud $(N-p)(p+1)$, la matriz Z y dicho vector están relacionados mediante la función de la forma:

$$z = T(Z) \quad Z = T^{-1}(z) \quad (7.20)$$

Usando la notación introducida por la función de reordenamiento T , el conjunto de matrices Toeplitz L_T quedará definido como:

$$L_T = \{Z \in \mathbb{C} ; Z = T^{-1}(A\theta) \quad \theta \in \mathbb{R}^{p+1}\} \quad (7.21)$$

siendo A la matriz característica de las matrices Toeplitz. Este conjunto, como todos los de las matrices linealmente estructuradas, es un subespacio cerrado y convexo.

Una vez caracterizado el conjunto de las matrices Toeplitz, buscamos la matriz de estructura Toeplitz tal que minimice la distancia entre dicha matriz y la matriz de rango q Y^q resultante de la aplicación del mapeo a rango fijo anterior $Y^q = F^q(Y)$ (7.16). Es decir, buscamos una solución al problema de optimización siguiente:

$$\min_{X_T \in L_T} \|Y^q - X_T\|_F \quad (7.22)$$

La solución de este problema se obtendrá determinando el mapeo propio F_2 que dará la matriz $X_T \in L_T$ que permanezca más cercana a una matriz arbitraria $Z \in C$. Este operador viene dado, en un caso general válido para cualquier conjunto de matrices linealmente estructuradas por el siguiente teorema [CAD88]:

Teorema.- Sea L_A cualquier subespacio de matrices de C linealmente estructuradas, subespacio cerrado y convexo generado por la matriz característica A . La matriz $X_A \in L_A$ que es más cercana a una matriz arbitraria Z de C está dada por el siguiente mapeo propio continuo de punto a punto:

$$X_A = F_A(Z) = T^{-1}(A[A^*A]^{-1}A^*T(Z)) \quad (7.23)$$

En el caso que nos interesa, si sustituimos la matriz característica A correspondiente a las matrices Toeplitz, encontramos que F_2 , el operador que da el aproximante Toeplitz X_T de la matriz Y^q viene dado por F_T que se obtiene de (7.23):

$$X_T = F_T(Y^q) = T^{-1}(A[A^*A]^{-1}A^*T(Y^q)) \quad (7.24)$$

Este operador F_T actúa promediando las diagonales de la matriz Y^q para obtener a partir de cada una un dato. Conseguida una serie de N datos, los coloca en forma de matriz

Toeplitz, que será la matriz de salida de este operador.

Una vez determinados los mapeos propios F_q y F_T , el mapeo compuesto vendrá dado por:

$$F = F_T F^q \quad (7.25)$$

que es un operador cerrado, ya que al ser F_T una función continua y F^q es un operador cerrado, la composición de dichos operadores es cerrada.

VII-5. ALGORITMO DE MEJORA DE LA SEÑAL EXPONENCIAL. MEJORA POR SUBSECUENCIAS.

Como se ha visto en el apartado VII-4, el mapeo propio compuesto es cerrado. Al ser cerrado estamos en las hipótesis que nos permiten aplicar el algoritmo iterativo dado por (7.14) de búsqueda de la solución del problema de optimización inicial. Por tanto, el algoritmo de mejora de la señal para generar una aproximación Toeplitz de rango q de la matriz de datos X consiste en el siguiente proceso iterativo:

$$X_k = F_T F^q (X_{k-1}) \quad k \geq 1 \quad (7.26)$$

La matriz de datos inicial usada para inicializar la iteración es simplemente Y , la matriz de datos medidos por el receptor. Este algoritmo actúa de la siguiente forma, según se desprende de (7.26):

- 1º) En primer lugar se trunca la SVD de Y para obtener una matriz de rango q . Esta matriz $F^q(Y)$ no tendrá estructura Toeplitz.
- 2º) Para recuperar el requisito de estructura Toeplitz, se aplica seguidamente el operador F_T a $F^q(Y)$ obteniéndose la matriz Toeplitz más cercana a $F^q(Y)$. Esto completa la primera iteración del algoritmo.
- 3º) Generalmente la matriz Toeplitz que se obtiene tras este primer paso tiene rango completo, aunque está más cercana de poseer un rango q que la matriz de partida Y . Para obtener de nuevo un rango q se aplica vuelve al apartado 1º) y 2º), repitiéndose estos pasos hasta que la matriz de salida X_k tenga un rango suficientemente cercano a q .

Este algoritmo está asegurado que converge a una matriz de rango q y estructura Toeplitz ya que F^q y F_T son cerrados. La primera iteración lleva a una matriz de datos que es mas compatible con el modelo exponencial de orden q . Se pueden obtener mejores aproximaciones continuando el proceso del algoritmo, computando secuencialmente las matrices de datos X_k hasta obtener una matriz de salida Toeplitz de rango muy cercano a q . En nuestros ejemplos de simulación se ha constatado que este algoritmo converge rápidamente, y que bastan de 3 a 5 iteraciones para obtener una buena aproximación de los datos medidos.

Debe señalarse que en general estos operadores F^q y F_T no conmutan, pero si la matriz de datos medidos Y que inicializa el algoritmo posee alguna de las propiedades buscadas (Toeplitz o rango q), como es este el caso (Y es Toeplitz), no importa cuál de los operadores se aplica primero.

Este procedimiento algorítmico elimina mucho del ruido presente en los datos, pues se están utilizando para reconstruir la señal en cada paso los q primeros vectores singulares que son los mas robustos al ruido.

Basándose en este algoritmo se puede lograr un refuerzo aún mayor de la estructura de los datos si la secuencia de N datos medidos es decimada tomando cada punto k -ésimo para formar una subsecuencia [CAD91]. Si este orden de decimación varía entre 1 y K se obtendrían de esta forma k subsecuencias. Cada una de estas subsecuencias mantendrá la estructura exponencial relacionada con la original. Más aún, por cada decimación de orden k pueden obtenerse k subsecuencias $x_{(k,m)}$ donde $1 \leq m \leq k$. Como mantienen una estructura similar a la original podemos aplicar el mismo algoritmo (7.26) anterior, promediando para cada decimación.

Para formalizar la idea anterior, consideremos $y(n)$, $n=1\dots N$ la secuencia de datos medidos, modelables por una combinación de q exponenciales. Para un orden de decimación fijo k , formaremos k subsecuencias de la forma:

$$y_{k,m} = [y(m), y(k+m), \dots, y(\text{ent}(N/2-1)k+m)] \quad (7.27)$$

Cada subsecuencia es perfectamente modelada como una combinación lineal de q exponenciales, con las exponenciales de este modelo igual a las del original elevadas a la k -ésima potencia. Si para un orden fijo k notamos las k matrices de datos formadas para cada subsecuencia $Y_{k,m}$, en las que el número de columnas es mayor que q , cada una de estas matrices formadas $Y_{k,m}$ tendrá estructura Toeplitz, rango q y la misma nulidad. Consecuentemente estas matrices pueden combinarse para formar la matriz compuesta de orden k :

$$Y_k = \begin{bmatrix} Y_{k1} \\ Y_{k2} \\ \vdots \\ Y_{kk} \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Esta matriz compuesta tiene también rango q y posee la misma nulidad que las matrices $Y_{k,m}$. Su estructura consiste en varias submatrices Toeplitz. Este uso de subsecuencias producirá un refuerzo de la estructura de la señal, de forma que puede ser incorporado al algoritmo de mejora anterior para mejorar el comportamiento del modelado exponencial. De esta forma el algoritmo queda de la forma:

- 1º) Partimos de los datos medidos $y(n)$. Para cada k , donde $1 \leq k \leq K$ se decima $y(n)$ para obtener k subsecuencias por cada orden de decimación.
- 2º) Para cada subsecuencia $y_{k,m}$ se forman las matrices $Y_{k,m}$, y se combinan para dar la matriz de datos compuesta de orden k Y_k .
- 3º) Para cada $k = 1 \dots K$ se forman de manera análoga las matrices compuestas Y_k .
- 4º) Se forman las matrices de rango q mas cercanas a Y_k truncando hasta dicho orden la SVD de la matriz de datos compuesta para obtener Y_k^q para $k = 1 \dots K$.
- 5º) A partir de la estructura Toeplitz compuesta que cada matriz Y_k posee, se forma una nueva secuencia $y^1(n)$ promediando los elementos de las matrices Y_k^q que correspondan al mismo punto de $y(n)$.

- 6º) Con la nueva secuencia $y^1(n)$ se vuelve al apartado 1º) tomando dicha secuencia como la señal de partida, y se itera hasta conseguir convergencia.

La aplicación del procedimiento de mejora por subsecuencias puede producir una secuencia con sus propiedades estructurales mas reforzadas. El orden de decimación dependerá del número de datos disponibles de la señal, ya que un requisito que se ha de cumplir es que el orden máximo de decimación K ha de ser tal que al menos las matrices $Y_{k:m}$ tengan un número de filas y columnas mayor que q , ya que su rango ha de ser al menos q . Se ha de tener en cuenta que cuanto más pequeñas sean las matrices de datos, el truncamiento de su SVD será menos efectivo para eliminar los vectores singulares que expanden el subespacio del ruido, por lo que este método de mejora por subsecuencias será tanto más efectivo cuanto mayor sea el número de muestras disponibles de la onda dispersada.

VII-6. ELECCION DEL ORDEN DEL MODELO Y ESTIMACION DEL NUMERO DE MODOS PRESENTES EN LA SEÑAL.

Para la implementación del algoritmo de mejora de la señal es necesario elegir p , el orden del modelado racional de la señal, y estimar q , el número de modos presentes en la onda recibida. La elección de un orden del modelo óptimo y la una correcta o adecuada estimación del número de modos dominantes presentes en la señal será de importancia fundamental en la aplicación exitosa del algoritmo (7.26). De estos dos cuestiones nos ocuparemos a continuación.

VII.6.1 Elección del orden del modelo

La elección de un orden p alto es esencial para una buena división entre subespacio de la señal y subespacio del ruido. Desde el punto de vista de la predicción lineal, un orden de predicción alto en el modelo autoregresivo AR equivale a tener una gran apertura del filtro de predicción lineal, lo que permite un mejor ajuste del modelo a los datos medidos. Sin embargo, para valores de p muy altos, la SNR efectiva decrece a pesar de este incremento de la apertura del filtro. Este decrecimiento en la SNR a elevados órdenes de p es debida a los pocos términos que se promedian en cada diagonal de la matriz resultante de rango q para obtener una estructura Toeplitz, lo que da inestabilidades en el algoritmo de mejora anterior. Es por esto por lo que es necesario llegar a un compromiso en el valor del orden del modelo, un orden óptimo que tenga en cuenta los dos efectos de resolución y estabilidad.

El problema de la elección de orden óptimo ha sido estudiado por muchos autores. B. Rao [RAO88], en un estudio sobre la calidad de los subespacios aproximantes obtuvo algunas conclusiones interesantes. En su estudio B. Rao parte del concepto de ángulo entre dos subespacios L y M definido como:

$$|\operatorname{sen}\theta(L,M)| = |(I-P_M)P_L| = |P_M P^\perp| \quad (7.29)$$

donde P_M y P_L son los operadores proyección sobre los subespacios M y L respectivamente. Si se cumple la condición

$$|P_M - P_L| < 1 \quad (7.30)$$

ningún vector en el subespacio M es ortogonal a cualquier vector en el subespacio L , por lo que los subespacios M y L están "muy próximos". En el caso de que L y M sean de la misma dimensión tenemos:

$$|P_M - P_L| = |P_M^\perp P_L| = |P_L^\perp P_M| = |\operatorname{sen}\theta(L, M)| \quad (7.31)$$

de forma que la norma de la diferencia de los operadores P_M y P_L está relacionado con el ángulo entre los subespacios sobre los que proyectan.

En nuestro problema de aproximación de la señal es deseable que el subespacio de orden q de la matriz truncada Y^q sea cercano al de la matriz de los datos sin ruido X , de esta forma nos aseguramos que la señal reconstruida a partir de la matriz Y^q es muy parecida a la de onda dispersada por el blanco. Que el subespacio generado por los q primeros vectores singulares (subespacio de la señal) de Y^q sea cercano al correspondiente de X significa que

$$|P_{Y^q} - P_X| < 1 \quad (7.32)$$

Se puede demostrar [RAO88] que la norma de la diferencia está acotada por:

$$|P_{Y^q} - P_X| \leq |E| |Y^{q+}| \quad (7.33)$$

donde Y^{q+} es la pseudoinversa de Y^q y E es la matriz Toeplitz formada por el ruido añadido a cada dato de la onda dispersada $Y = X + E$. Si σ_q es el mínimo valor singular de Y^q , la norma-2 de la matriz Y^{q+} vale $1/\sigma_q$, que si lo sustituimos en la ecuación (7.33) da la cota

$$|P_{Y^q} - P_X| \leq |E| \frac{1}{\sigma_q} \quad (7.34)$$

Para que se cumpla (7.32), es condición suficiente que la cota superior sea menor que la unidad, es decir

$$\frac{|E|}{\sigma_k} < 1 \quad (7.35)$$

Si esta condición se cumple los subespacios de la señal de la matriz Y^q y X estarán muy cercanos y se podrá obtener una buena aproximación de la señal sin ruido. Si por el contrario esta condición falla, la aproximación no será muy buena. Interesa, pues, que el cociente

$$\frac{|E|}{\sigma_k} \quad (7.36)$$

sea mínimo, pues entonces mejor será la aproximación. Como la norma de E es relativamente independiente del orden del modelo p [RAO88], el ángulo entre subespacios puede ser minimizado seleccionando el valor de p que resulte en un mayor valor de σ_q , el último autovalor no nulo de la matriz Y^q .

Resultados obtenidos en las simulaciones dan un valor típico de p entre $N/3$ y $3N/4$, no presentándose generalmente una variabilidad grande entre esos límites.

VII.6.2 Estimación del número de modos presentes en la señal

En cuanto a la estimación del número de modos q presentes en la señal hay muchos criterios de selección de este orden. Generalmente estos están basados en la minimización de funciones dependientes del orden de la señal. Ejemplos de estos criterios son el criterio de error de predicción final (FPE), el criterio de información de Akaike

(AIC) o el criterio de la función de transferencia autoregresiva (CAT) [MAR87]. Estos criterios, desarrollados para modelos AR, tienden a infraestimar el orden a SNR alta para los procesos exponenciales con los que estamos tratando.

Otros criterios han sido especialmente desarrollado para procesos armónicos. Estos están basados en la SVD de la matriz de datos. Por ejemplo, según (7.6) la matriz en media tiende a tener los q primeros autovalores más grandes y los restantes más pequeños, de valor σ^2 , la varianza del ruido. Una posible elección del orden sería tomar aquel q_e en el que se observe un brusco cambio al pasar del valor singular σ_e al σ_{e+1} . Otra posible elección del orden sería encontrar el número de los q_e primeros valores singulares tales que la razón

$$\rho(\mathbf{p}) = \left\{ \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{q_e}^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_p^2} \right\}^{1/2} \quad (7.37)$$

sea aproximadamente la unidad, es decir, el resto de los valores singulares son pequeños y no representan un porcentaje significativo. La desventaja de este tipo de criterios es que dependen fuertemente de varias condiciones como la SNR, la longitud de la ventana de análisis y la proximidad entre las frecuencias de resonancia. Además, son muy subjetivos, ya que el umbral que nos dice cuando hay un cambio entre el valor de σ_e y el de σ_{e+1} o cuando la razón de (7.37) es aproximadamente la unidad, ha de ser establecido empíricamente.

Será necesario, pues, un criterio basado en la SVD más robusto e independiente de parámetros impuestos a priori. Si utilizamos la información de la varianza del ruido es posible usar el criterio de detección del orden propuesto por Bakamidis y Dendrinos [BAK91]. La varianza del ruido puede estimarse en nuestro problema a partir de las

últimas muestras de señal recibida. Al tratarse de señales transitorias que decaen en el tiempo, transcurrido un cierto intervalo la proporción de ruido en la señal será dominante respecto al contenido de la onda reflejada ya que el ruido es un proceso estacionario en el intervalo de análisis cuya estadística suponemos no varía en dicho intervalo.

VII.6.3 Criterio robusto de detección del orden.

Usando entonces la información sobre la varianza del ruido, es posible usar el criterio basado en la SVD propuesto por Bakamidis [BAK91]. Partiendo de

$$y(n) = x(n) + e(n) \quad (7.38)$$

donde $e(n)$ es el ruido aleatorio añadido a las muestras de la onda dispersada, tomando el valor esperado de $y^2(n)$

$$E\{y^2(n)\} = E\{(x(n)+e(n))^2\} = E\{x^2(n)\} + E\{e^2(n)\} + 2E\{x(n)e(n)\} \quad (7.39)$$

Si el ruido está no correlacionado con la señal $x(n)$, entonces

$$E\{x(n)e(n)\} = 0 \quad (7.40)$$

y la expresión (7.39) queda

$$E\{y^2(n)\} = E\{x^2(n)\} + \epsilon_e^2 \quad (7.41)$$

donde ϵ_e es la energía del ruido que vale σ^2 si tiene media cero. Si notamos x_k la señal reconstruida a partir de la matriz Toeplitz X_k formada cuando se han tomado los k

primeros vectores singulares de la matriz de los datos medidos Y para obtener el aproximante de rango k , la siguiente cantidad

$$E_k = E\{y^2(n)\} - E\{x_k^2(n)\} \quad (7.42)$$

representa la diferencia de energía entre la señal original y la versión reconstruida de orden k . La función $NEE(k)$ definida como

$$NEE(k) = |E_k - \epsilon_e^2| \quad (7.43)$$

es una función decreciente con k en el intervalo $k \leq q$ y creciente en $k \geq q$. Este comportamiento es claro, si escribimos la función $NEE(k)$, teniendo en cuenta (7.42) y (7.41) como

$$NEE(k) = |E\{x^2(n)\} - E\{x_k^2(n)\}| \quad (7.44)$$

La energía de la señal reconstruida con $k < q$ valores singulares es menor que la energía de la señal completa $x(n)$ sin ruido ya que $x_k(n)$ no contiene toda la información de los modos de $x(n)$, por lo que para $k < q$ la función NEE será decreciente. Justo en el número de modos exacto, $k = q$, las energías serán prácticamente iguales por lo que la cantidad (7.44) es cercana a cero. Si $k > q$ la energía de la señal reconstruida excede a la de la $x(n)$ debido a la porción de ruido introducida, por lo que NEE empezará a crecer. Se tiene entonces que NEE tendrá un mínimo en el punto correspondiente al número de modos de la señal q .

La función $NEE(k)$ se puede obtener fácilmente, ya que a partir de (7.42) tenemos que

$$NEE(k) = \left| E\{y^2(n)\} - E\{x_k^2(n)\} \right| - \epsilon_e^2 \quad (7.45)$$

donde todo es fácilmente computable, ya que $y(n)$ es la señal recibida, $x_k(n)$ es la k -ésima reconstrucción tomando los k primeros vectores singulares y ϵ_e es la varianza del ruido (si es de media nula), que se supone conocida. Construyendo esta función $NEE(k)$ para varios valores de k y hallando su mínimo, tendremos estimado el número de modos de la señal.

Este criterio de estimación del orden de la señal es robusto. Sin embargo, a SNR bajas los errores introducidos debidos al ruido en los valores singulares son grandes. Esto se traduce en un mínimo menos pronunciado y por lo tanto más difícil de distinguir.

Por otra parte, cuando la relación señal ruido (SNR) es muy baja no conviene truncar la matriz justo en el orden exacto, es decir, no conviene reconstruir la señal usando todos los modos presentes en ella. Sabemos que los primeros vectores singulares de la señal (que expanden principalmente los modos más energéticos) son más robustos al ruido que los correspondientes a valores singulares más bajos. Si la SNR es muy baja los vectores singulares son cada vez más perturbados de forma que los correspondientes a valores singulares más bajos están muy afectados, por lo que será mejor eliminarlos y quedarnos con un orden inferior, es decir, con el subespacio que expandan los primeros vectores singulares. En este proceso se pierde información, sobre todo de los modos más amortiguados. En consecuencia, para conseguir una mayor resolución en la discriminación de blancos de radar es preferible perder posiblemente la información de los modos más amortiguados e identificar basándose solamente en los primeros vectores singulares que pueden reconstruir la señal con más efectividad a partir del algoritmo de mejora de la señal dado en (7.26). Esta situación es importante a la hora de la utilización del criterio

anterior. Cuando la SNR es muy baja no aparecen un mínimo absoluto, sino varios mínimos relativos. Como es preferible un orden bajo, nos quedamos con el primer mínimo que aparezca en $NEE(k)$. Más aún, como la varianza de ruido puede estimarse de los últimos datos recibidos, es posible hacer también una estimación de la SNR con la que se está operando, tomando como energía de la señal en el late-time la de la propia onda ruidosa. Así, cuando esta estimación nos de una SNR muy baja, el orden de la señal se toma siguiendo el criterio anterior, aunque sin sobrepasar cierto límite superior escogido empíricamente a partir de las observaciones realizadas.

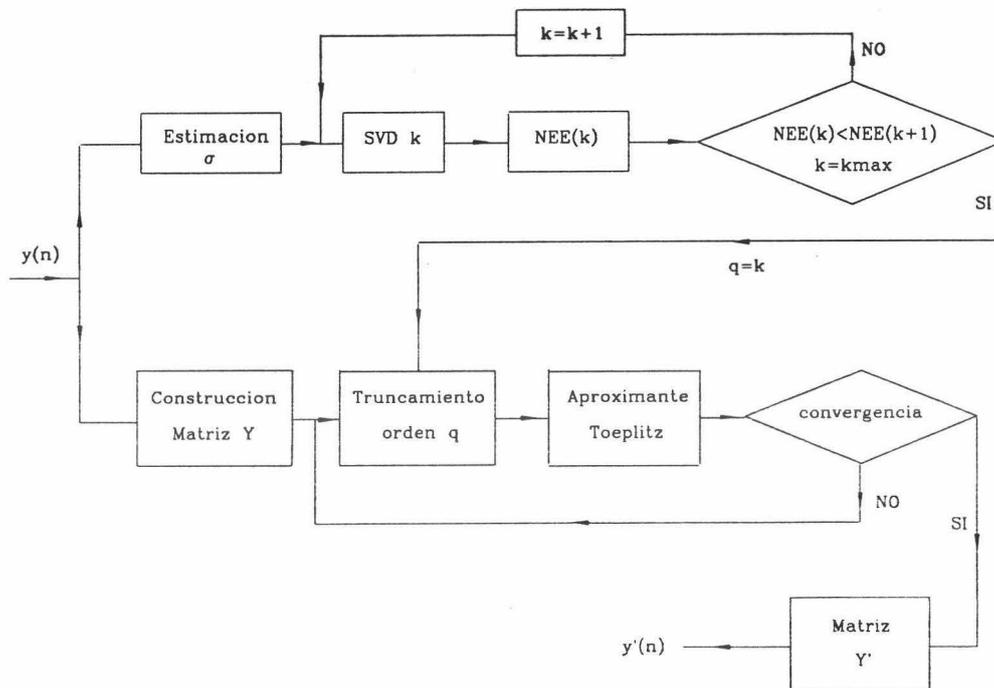


Figura (7.1). Esquema del algoritmo de mejora de la señal y de la estimación del número de modos dominantes.

Una vez que hemos estimado de esta forma el número de vectores singulares óptimo para reconstruir la señal (orden de la señal q) y hemos escogido el orden óptimo del modelo p , aplicamos el algoritmo de mejora de la señal para obtener una buena

aproximación de la onda reflejada por el blanco. El proceso a seguir se muestra en la figura (7.1). En la parte superior de esta figura tenemos representado el algoritmo de estimación del orden de la señal. Una vez estimado σ , la desviación típica del ruido, se van llevando a cabo sucesivas reconstrucciones de la señal usando los primeros vectores singulares y computando para cada una de ellas la función $NEE(k)$. Cuando ésta empiece a crecer se sale de dicho algoritmo y el orden es elegido como $k = q$. Una vez estimado el número de modos dominantes, se entra en el algoritmo de mejora de la señal, tomando el aproximante Toeplitz de rango q de la matriz Y de datos medidos. Cuando haya convergencia obtendremos la matriz Y' de la cual obtenemos la serie de datos $y'(n)$ que tendrán una relación señal-ruido efectiva mucho mayor.

VII-7. FILTRADO PASO-BAJA DE LA SEÑAL RECONSTRUIDA

El algoritmo de mejora de la señal anterior es muy efectivo, aumentando de forma importante la relación señal-ruido efectiva. Sin embargo, debido a que el sistema de identificación FAR amplifica fuertemente las frecuencias superiores a las de resonancia, los errores debidos al ruido que caen en ese intervalo espectral son amplificadas fuertemente, haciendo la discriminación entre blancos parecidos muy difícil. Por esta razón es de gran utilidad filtrar paso-baja los datos obtenidos tras aplicar el algoritmo de mejora de la señal, eliminando así las altas frecuencias a las que es muy sensible el FAR. Este filtrado paso-baja puede hacerse mediante filtros FIR e IIR construidos de forma análoga a la que se describe en el apéndice B.

En este caso, de forma análoga a la figura (B.1), la frecuencia de corte y el orden del filtro paso-baja son elegidos mediante un barrido bidimensional en frecuencia y en el orden conjuntamente, de forma que la elección de dichos parámetros sea óptima. Sin

embargo en esta ocasión no partimos simplemente de la señal sin ruido, sino con las señales construidas usando sucesivamente los primeros vectores singulares. Ya que en el proceso de la descomposición en valores singulares del algoritmo de mejora (7.26) se reconstruía la señal usando los primeros vectores singulares correspondientes principalmente a los modos más energéticos, la identificación se hace solamente en función de ellos, por lo que la frecuencia de corte y el orden de los filtros podrían depender a priori de los modos presentes. Por ello se ha de realizar el proceso de búsqueda cuando nos hemos quedado con los 4 ó 6 primeros vectores singulares para reconstruir la señal. En este caso, partiendo de la señal sin ruido, se la somete al algoritmo (7.26) para varios órdenes, y para cada uno de ellos se determina el filtro digital paso-baja óptimo mediante el proceso representado en la figura (B.1). Una vez identificados los valores de los parámetros para cada orden, estos son almacenados para, en el proceso de identificación construir el filtro óptimo paso-baja adecuado al orden que estime el algoritmo de elección del orden de las señal dado en la figura (7.2).

De esta forma, un esquema del algoritmo completo SVD-Toeplitz y filtrado paso baja posterior quedaría de la siguiente forma (ver figura 7.2):

- 1) La onda dispersada por un determinado blanco $s(t)$ es captada por la antena y muestreada en intervalos temporales de duración T , $s(n) = s(nT)$. De esta señal extraemos la parte del late-time, que hemos notado por $y(n)$. Esta señal recibida estará constituida por una suma de exponenciales amortiguadas $x(n)$ y un ruido contaminante $e(n)$.
- 2) A la señal recibida $y(n)$, se le estima el número óptimo de vectores singulares a usar para su reconstrucción (orden de la señal) mediante el proceso descrito en la figura (7.2).

- 3) Una vez estimado el orden, se le somete al algoritmo iterativo de mejora de la señal SVD-Toeplitz (7.26). En este caso podría utilizarse una decimación en subsecuencias de orden k .
- 4) La señal de salida $y'(n)$ tendrá una SNR efectiva mucho mayor que la señal de entrada. A continuación, se procede a la identificación filtrando la señal por una serie de filtros paso-baja adecuados al número de modos determinados en 2), y haciéndola pasar por el FAR correspondiente hasta completar el número de blancos recogidos en la librería. La onda dispersada será identificada como proveniente del blanco correspondiente al FAR de energía de salida mínima.

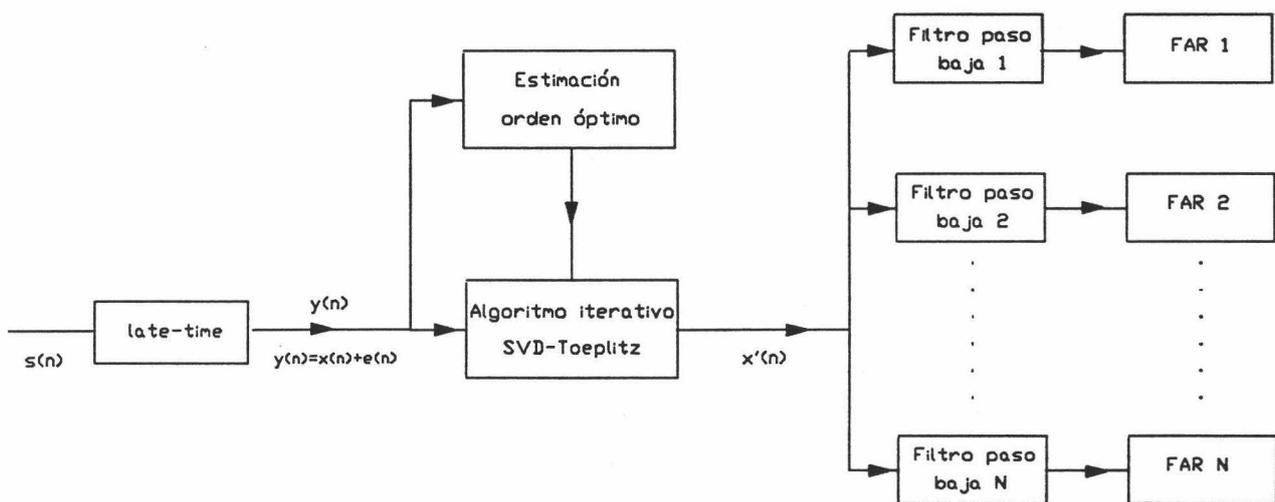


Figura (7.2). Esquema del proceso de identificación con el FAR tras un procesado mediante el algoritmo completo SVD-Toeplitz-Filtrado paso baja.

VII-8. DISEÑO DE UN FILTRO DE SUAVIZADO ÓPTIMO

Como se ha ido comentando anteriormente, el principal problema de la discriminación de blancos de radar es la presencia de ruido, que puede afectar tanto a las bandas espectrales donde hay componentes de la señal, enmascarando éstas componentes, como también a las bandas donde no hay señal impidiendo el proceso de identificación con el FAR. Un filtro óptimo sería aquel que no sólo atenuara las bandas donde no hay señal, sino que también actúe en las propias bandas de ésta, amplificando aquellas zonas de las frecuencias de resonancia de la señal recibida. De esta forma quedarían resaltadas las características propias de cada onda que contribuyen a su identificación, haciendo más fácil la discriminación posterior con el FAR. Más aún, este filtrado puede ser complementario a la mejora introducida por el algoritmo basado en la SVD, de forma que se podrían usar conjuntamente en un algoritmo compuesto, mejorando notablemente la relación señal-ruido, y por tanto permitiendo la identificación en ambientes de ruido muy severos.

VII.8.1. Características del filtro de suavizado óptimo

El filtro óptimo, ha de poseer una serie de características en frecuencia que nos van a permitir diseñarlo:

- 1) Ha de atenuar las bandas de frecuencia donde no hay señal para eliminar el ruido de alta frecuencia, lo que equivale a decir que su comportamiento a alta frecuencia ha de ser paso baja.
- 2) El filtro ha de enfatizar las regiones espectrales donde las componentes de la señal son dominantes, para permitir una fácil discriminación.

Las características 1) y 2) son exactamente las opuestas a las que presenta el filtro de aniquilación de resonancias, por lo que este filtro óptimo puede diseñarse como un FAR inverso, que en vez de aniquilar resonancias las enfatice, y que decaiga rápidamente a lata frecuencia. Como el FAR está formado por ceros correspondientes a las frecuencias de resonancia de la señal, el FAR inverso tendrá polos en estas frecuencias de forma que en su respuesta en frecuencia aparecerán picos en dichas frecuencias y valles entre ellas, decayendo polinómicamente con orden $2N$ fuera del rango espectral de las frecuencias naturales. Por consiguiente, la función de transferencia del filtro óptimo o FAR inverso viene dada, teniendo en cuenta la expresión (6.21)

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{m=0}^{2N} C_m z^{-m}} = \frac{1}{\prod_{n=1}^N (z - e^{s_n T}) (z - e^{s_n^* T})} \quad (7.46)$$

donde s_n son las resonancias naturales del blanco y T es el periodo de muestreo. Sin embargo las resonancias de la señal recibida por nuestro receptor no son conocidas a priori, ya que la onda recibida proviene de un blanco desconocido que precisamente se quiere identificar. Se hace, pues, necesario estimar previamente las resonancias de las señal para construir el FAR inverso según (7.46).

VII.8.2. Diseño del FAR inverso. Metodos de extraccion de resonancias.

Para construir el FAR inverso según la ecuación (7.46) hay que estimar las resonancias de la señal. Hay muchas técnicas de extracción de resonancias en la literatura. La más conocida es el método de Prony con sus variantes. El gran problema de este método es su gran sensibilidad al ruido presente en la señal, que hace que éste método sea muy impreciso cuando el ruido corrompe los datos. En los últimos años han aparecido

varias técnicas de extracción de resonancias basadas en la SVD de las matrices de predicción lineal que aparecen en el modelado racional de los datos. Otras técnicas, como el método de Pencil [HUA90], consiguen resultados mejores aunque son más costosos computacionalmente. Para nuestro propósito, convendría usar un método que haga uso o bien de las etapas anteriores (como la SVD de la matriz de datos) para así rebajar el coste computacional asociado, o bien un método simple pero robusto que converja rápidamente aplicable a nuestro problema. Entre los primeros se encuentra el método de Kumaresan y Tufts, que se basa en la SVD de la matriz de predicción autoregresiva y que ya hemos descrito en el capítulo II, y entre los segundos los métodos modelado AR o modelado MA. A continuación se describirán brevemente estos dos últimos métodos:

Método del modelado autoregresivo (AR)

Para extraer las resonancias y así obtener los coeficientes del FAR inverso pueden utilizarse técnicas basadas en un prefiltrado IIR (modelado AR) o un prefiltrado FIR (modelado MA) que están estrechamente relacionadas con el concepto de FAR. Para describirlas partimos de una secuencia de N muestras de la señal en el late-time. Como se describe en el apéndice B, en el late-time la señal puede modelarse por la suma de q exponenciales complejas amortiguadas

$$x(n) = \sum_{k=1}^q a_k e^{s_k n} \quad n = 0, 1 \dots N-1 \quad (7.47)$$

Si consideramos la transformada Z de esta secuencia, tenemos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^q a_k e^{s_k n} z^{-n} \quad (7.48)$$

Si intercambiamos las sumatorias y llevamos a cabo la suma geométrica obtenemos

$$X(z) = \sum_{k=1}^q a_k \frac{1 - e^{s_k N} z^{-N}}{1 - e^{s_k} z^{-1}} \quad (7.49)$$

expresión que sumada es de la forma:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=1}^q a_k (1 - e^{s_k N}) z^{-N} \prod_{j=1, j \neq k}^q (1 - e^{s_j} z^{-1})}{\prod_{k=1}^q (1 - e^{s_k} z^{-1})} \quad (7.50)$$

Según la ecuación (7.50), $X(z)$ puede escribirse como el cociente de dos polinomios

$$X(z) = \frac{C(z)}{D(z)} \quad (7.51)$$

En esta ecuación $D(z)$ es un polinomio de orden q de coeficientes dados por

$$D(z) = 1 + \sum_{k=1}^q d_k z^{-k} \quad (7.52)$$

cuyas raíces están situadas según la ecuación (7.50) en

$$z_k = e^{s_k} \quad k = 1 \dots q \quad (7.53)$$

y $C(z)$ es un polinomio de grado $N+p-1$ de la forma:

$$C(z) = \sum_{k=0}^{q-1} c_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{q-1} c_{N+k} z^{-(N+k)} \quad (7.54)$$

En este polinomio los coeficientes c_0 a c_{q-1} y c_N a c_{N+q-1} dependen de los polos y de los residuos, pero los otros coeficientes c_q a c_{N-1} son idénticamente cero.

Si comparamos $D(z)$ con la función de transferencia del FAR en la ecuación (6.22) vemos que $D(z)$ es la función de transferencia del FAR digital. Esto no es de extrañar, ya que el FAR se ha diseñado como aquel sistema que aniquile la respuesta en el late-time. Si la señal $x(n)$ dada por (7.47) es filtrada por el FAR $K(z)$ se obtendrá:

$$K(z) X(z) = X(z) \frac{C(z)}{D(z)} = C(z) \quad (7.55)$$

ya que $H(z)$ es idéntico a $D(z)$. Tomando transformada inversa en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$x(n) * d_n = c(n) \quad (7.56)$$

Como $c_n = 0$ para $n=q \dots N-1$ tendremos:

$$x(n) * d_n = 0 \quad n = q \dots N-1 \quad (7.57)$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=0}^q x(n-k) d_k = 0 \quad n = q \dots N-1 \quad (7.58)$$

ecuación que simplemente nos dice que el FAR aniquilará el late-time de la señal a partir de $n = q$, que es la longitud total del filtro. El sistema de ecuaciones (7.58) son las ecuaciones en diferencias que constituyen el punto de partida del método de Prony.

De la discusión anterior queda claro que $1/D(z)$ es el FAR inverso que estamos buscando sintetizar, ya que $D(z)$ es un polinomio que tiene sus ceros situados según (7.53). Precisamente $1/D(z)$ es la parte AR o todo polos de $X(z)$ (ecuación (7.51)) por lo que construir el FAR inverso sería equivalente a encontrar dicha parte AR de $X(z)$. La obtención de esta parte AR de $X(z)$ puede hacerse directamente, usando un modelado AR de los datos (filtros IIR), o indirectamente usando un modelado MA (FIR) o todo ceros de $D(z)$. A continuación describiremos la obtención del FAR inverso usando un modelado AR. El uso de un modelado MA será descrito en el siguiente apartado.

Para obtener, pues, el FAR inverso impongamos un modelo AR a los datos y sigamos un proceso iterativo. Este algoritmo de filtrado iterativo actúa de la siguiente forma [KAY84]:

- 1) Estimar los parámetros de un modelo AR de orden q , a_1, a_2, \dots, a_q , que mejor se adapte a los datos de entrada. En este punto es conveniente utilizar un método que garantice la estabilidad del filtro.
- 2) Con los coeficientes de obtenidos en 1) formamos el filtro inverso

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^q a_n z^{-n}} \quad (7.59)$$

- 3) Filtramos los datos de la señal con $1/A(z)$ para obtener una nueva secuencia de datos $y_1(n)$.
- 4) Con la secuencia obtenida $y_1(n)$ se vuelve al apartado 1) como secuencia de entrada. De esta forma van obteniéndose sucesivamente las secuencias filtradas $y_2(n) \dots y_k(n)$ hasta que halla convergencia, es decir, los coeficientes de $A(z)$ no varíen apreciablemente.

Cuando el algoritmo converja en la k -ésima iteración, obtendremos que el FAR inverso viene dado por $1/A_k(z)$.

El comportamiento de este algoritmo fue analizado por Kay [KAY84]. Como conclusión cabe destacar que se obtiene un buen comportamiento para valores de relación señal-ruido bajas, aunque hay siempre un sesgo presente en los ceros del polinomio $A(z)$ que puede ser importante cuando se estén tratando de identificar blancos muy parecidos (las resonancias estarán muy cerca unas de otras).

Método del filtrado FIR o modelado MA

En vez de construir el FAR inverso directamente, podemos estimar primeramente el polinomio $D(z)$ para después invertirlo y construir el filtro. El polinomio $D(z)$ puede obtenerse del sistema de ecuaciones (7.58), que es un sistema de $N-q$ ecuaciones con q incógnitas (d_1, d_2, \dots, d_q) que son los coeficientes de $D(z)$. Sin embargo este procedimiento es equivalente al método de Prony, que es muy impreciso cuando hay ruido contaminante en los datos de la señal. Si los datos son filtrados con un filtro adecuado se puede eliminar mucho ruido presente en la señal. Este filtro ha de tener respuesta impulso finita, para que cuando la señal sea filtrada por él se siga cumpliendo un sistema de ecuaciones

análogo a (7.58), ya que si filtramos la señal con un filtro de respuesta impulso $w(n)$, la ecuación (7.56) queda:

$$w(n) * x(n) * d_n = w(n) * c(n) \quad (7.60)$$

El segundo miembro de la ecuación (7.60) será cero en algún intervalo de n si y solo si $w(n)$ tiene longitud finita, es decir, es un filtro FIR. Si $w(n)$ tiene longitud $p+1$, la convolución de $w(n)$ con $c(n)$ será cero para $n = p+q \dots N-1$, quedando entonces el sistema de ecuaciones (7.60) de la forma:

$$\sum_{k=0}^q x'(n-k) d_k = 0 \quad n = p+q \dots N-1 \quad (7.61)$$

donde $x'(n)$ es la convolución de $w(n)$ y $x(n)$. Si la longitud del filtro es tal que cumple $0 \leq p \leq N-2q$ podremos obtener de este sistema de ecuaciones los coeficientes d_k . Respetando esta limitación en la longitud del filtro, queda la cuestión de como diseñarlo. Como ha de enfatizar las zonas donde la señal es dominante y atenuar las regiones espectrales donde sólo hay componente de ruido, este filtro debería ser precisamente el filtro inverso $1/D(z)$, un filtro IIR que nos llevaría a un algoritmo iterativo como el descrito en el apartado anterior. Sin embargo en este caso tenemos la condición que el filtro ha de ser FIR para que se cumpla así el sistema de ecuaciones (7.61). Si fuera IIR no se cumpliría exactamente este sistema, siendo ésta precisamente la causa del "bias" que aparecía en los ceros del polinomio $D(z)$ obtenido según el algoritmo de filtrado IIR. Como, en consecuencia, el filtro ha de ser FIR, busquemos un sistema FIR de respuesta impulso $w(n)$ cuya respuesta en frecuencia sea lo más parecida posible a la del filtro $1/D(z)$. Notando $W(z)$ la respuesta en frecuencia del FIR buscamos que:

$$W(z) D(z) = 1 + E(z) \quad (7.62)$$

donde $E(z)$ es la transformada Z de una secuencia de error $e(n)$ que se comete al aproximar $1/D(z)$ por $W(z)$. Pasando esta ecuación al dominio del tiempo, y teniendo en cuenta que $w(n)$ y d_n son secuencias de duración $p+1$ y $q+1$ respectivamente, podemos buscar el filtro $w(n)$ de forma que minimice el error cuadrático global, es decir:

$$\sum_{n=0}^{p+q} |e(n)|^2 = \sum_{n=0}^{p+q} |\delta(n) - \mathbf{b}_n * \mathbf{w}(n)|^2 \quad (7.63)$$

donde la sumatoria se extiende a todos los valores no nulos de la convolución de $w(n)$ y d_n . Minimizar la expresión (7.63), es decir, minimizar la suma de errores cuadráticos en todo el rango de disponible, eligiendo los parámetros $w(1), w(2), \dots, w(p)$, con $w(0) = 1$ es conocido en la teoría de la estimación espectral de modelación paramétrica como el método de autocorrelación [KAY81]. Para resolver este problema existe un algoritmo muy eficiente conocido como el algoritmo recursivo de Levinson-Durbin. Este método asegura que el filtro así obtenido $W(z)$ es estable, es decir, sus ceros permanecen dentro del círculo unidad.

Una vez computado $w(n)$ se pueden filtrar los datos y calcular los coeficientes d_n a partir de la ecuación (7.61). Una vez obtenidos estos coeficientes, podemos volver a calcular $w(n)$ minimizando (7.63) en un procedimiento iterativo similar al del apartado anterior. Ya que el filtrado por $w(n)$ ha eliminado parte del ruido presente en los datos, el nuevo $D(z)$ aniquilará mejor las componentes de la señal, por lo que el filtro inverso $1/D(z)$ será más efectivo. Si el procedimiento se repite hasta que los coeficientes no cambien apreciablemente de iteración a iteración, el filtro $1/D(z)$ será el filtro de

suavizado óptimo. Los pasos de este algoritmo son, pues,

- 1) Se establece $w(n)=\delta(n)$ para un orden p .
- 2) Se resuelve el sistema de ecuaciones (7.61) en el sentido de error cuadrático mínimo para obtener los coeficientes d_n .
- 3) Con los coeficientes d_n estimados, se minimiza la expresión (7.63) mediante el algoritmo de Levinson-Durbin para obtener los coeficientes del filtro FIR $w(n)$.
- 4) Se vuelve a 2) hasta que los coeficientes d_n no cambien apreciablemente.
- 5) Con los coeficientes d_n se forma el FAR inverso $1/D(z)$.

De lo dicho anteriormente se deduce que este tipo de síntesis es la más adecuada y precisa de las estudiadas para la construcción del FAR inverso. No obstante, para muy bajos valores de la relación señal-ruido y para un pequeño número de datos, los coeficientes obtenidos por este algoritmo, aún siendo el más robusto, son imprecisos ya que en este caso hay considerables perturbaciones en los datos medidos. Sin embargo, podemos hacer un uso conjunto de los algoritmos basados en la SVD y de éste último algoritmo basado en el filtrado FIR. En la sección anterior se estudió un algoritmo de mejora de la señal basado en la búsqueda de una matriz Toeplitz de rango q a través de la SVD de la matriz de datos medidos. Los datos obtenidos de esta forma tenían una relación señal-ruido (SNR) efectiva mucho mayor, ya que la señal se había reconstruido usando los q primeros vectores singulares que expanden fundamentalmente los modos dominantes, que son más robustos al ruido. Si a partir de estos datos se obtiene el FAR inverso, al contener estos datos principalmente sólo los modos dominantes con una SNR

efectiva mucho mayor, los coeficientes del FAR inverso que realzarán los modos dominantes se obtendrán de forma mucho más precisa y de forma muy rápida ya que el algoritmo convergerá en pocas iteraciones. El uso conjunto del algoritmo de mejora de la señal y del filtrado de los datos obtenidos por éste por el FAR inverso permitirá la discriminación en ambientes de ruido muy severos, ya que los datos obtenidos tendrán sus modos dominantes extraídos a través de la SVD y realzados a través del filtrado inverso.

VII-9. ALGORITMO COMPLETO DE MEJORA DE LA SEÑAL. IDENTIFICACIÓN MEDIANTE FAR DE ORDENES SUPERIORES.

El uso conjunto del algoritmo de mejora de la señal basado en la SVD de la matriz de datos y del filtrado mediante el FAR inverso nos ha permitido aumentar la relación señal-ruido de los datos de forma muy importante. Sin embargo aún podemos obtener una mejor discriminación si actuamos sobre los FAR. Si el FAR es diseñado en vez de con ceros simples con ceros dobles cabe esperar que las señales que presenten polos más cercanos a los que ha sido diseñado el FAR den menor energía que aquellas que presenten polos más alejados, ya que el FAR con ceros dobles presentará en su respuesta en frecuencia unos mínimos más acusados en las frecuencias que se quieren eliminar. Más aún, pueden diseñarse FAR de órdenes superiores, con los ceros de la función de transferencia triples, cuádruples etc, que presentarán en su respuesta en frecuencia unos mínimos mucho más acusados en las frecuencias características que se quieren eliminar.

El orden del FAR está limitado por el número de datos que se dispongan, ya que conforme la longitud del FAR sea mayor quedan menos muestras de la convolución entre su respuesta impulso y la señal para el proceso de identificación del blanco, ya que éste está basado en la energía resultante de la convolución y una pequeña cantidad de muestras

no permite una discriminación precisa debido a las fluctuaciones introducidas por el ruido.

La efectividad de los FAR con ceros dobles, triples, etc depende de parámetros tales como la separación entre las resonancias naturales del blanco y el número de muestras de la señal, y está completamente ligado al filtrado paso-baja anterior ya que el filtro debe estar adaptado para ser usado con dichos FAR que presentan una amplificación de las altas frecuencias mucho más acusada.

Precisamente es esta amplificación polinómica de las altas frecuencias, que en el caso de los FAR con ceros dobles aumenta en proporción doble al caso del FAR de ceros simples, el FAR con ceros triples en proporción triple, etc, una dificultad que surge en el empleo de los FAR de órdenes superiores. Debido a que la amplificación de las altas frecuencias aumenta con el orden se hace en estos casos necesario un filtrado paso-baja que elimine las frecuencias situadas fuera del intervalo de interés (zonas espectrales donde hay componentes de señal). Los parámetros de los filtros paso-baja son elegidos mediante el mismo procedimiento que se usó en el apartado B-5. En este caso, una vez elegidos los órdenes de los FAR a utilizar, se procede a la determinación de la frecuencia de corte y el orden del filtro paso-baja (IIR ó FIR) adecuado para la discriminación. La forma de elección sigue las mismas etapas que en el apartado B-5. En síntesis, partiendo de la señal sin ruido se van obteniendo sucesivas señales reconstruidas a partir de un orden creciente de la SVD de la matriz de datos y un realce posterior con el FAR inverso, y para cada orden son determinados los parámetros óptimos de los filtros según la figura B.1. Una vez determinados dichos parámetros son almacenados para ser usados en el proceso de discriminación dependiendo del orden estimado en la señal.

Un esquema del proceso de identificación con los FAR usando una etapa global de procesado previo basada en el algoritmo SVD-Toeplitz, filtrado con el FAR inverso

y filtrado paso-baja se muestra en la figura (7.3).

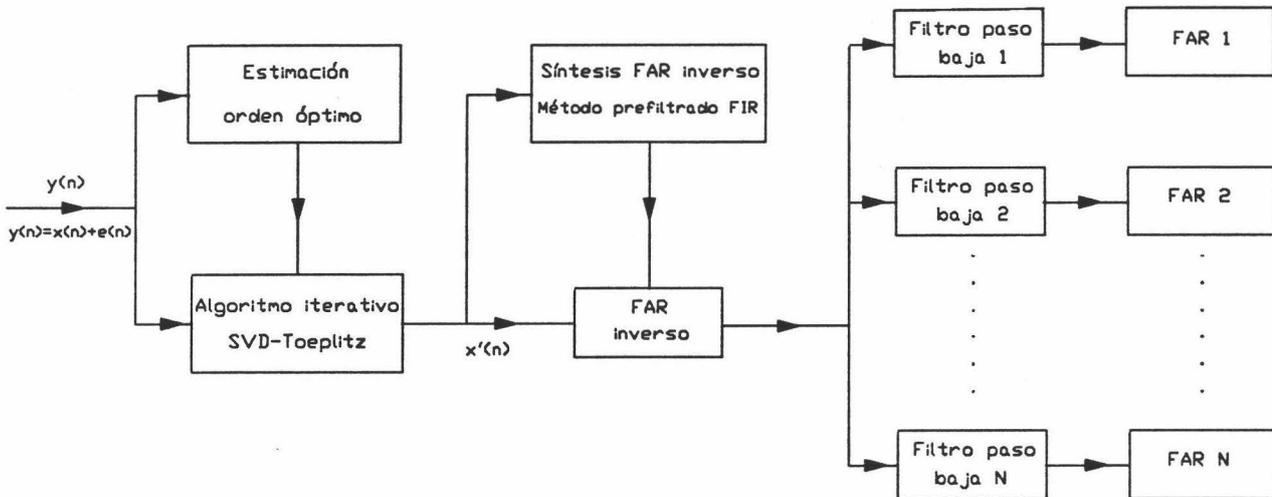


Figura (7.3). Esquema del proceso de discriminación con los FAR tras la etapa global de procesado previo SVD-Toeplitz-FAR inverso-Filtrado paso-baja.

En este caso, tal y como se muestra en la figura (7.3) el late-time de la señal ruidosa $y(n)$ es sometido primeramente al algoritmo de mejora de la señal SVD-Toeplitz. Para ello previamente se han de estimar el número de los vectores singulares usados para la reconstrucción siguiendo el esquema de la figura (7.1). Posteriormente la señal mejorada $x'(n)$, que ya consta principalmente de los modos dominantes (más energéticos) es filtrada por el FAR inverso para realzarlos, el cuál es construido por el método del prefiltrado FIR descrito en VII.8.2, que es el más robusto al ruido. Posteriormente la señal con sus modos dominantes realzados pasa por cada una de las etapas de identificación que constan de un filtro paso-baja IIR o FIR y un FAR de orden dado, representativo de los diferentes blancos de la librería.

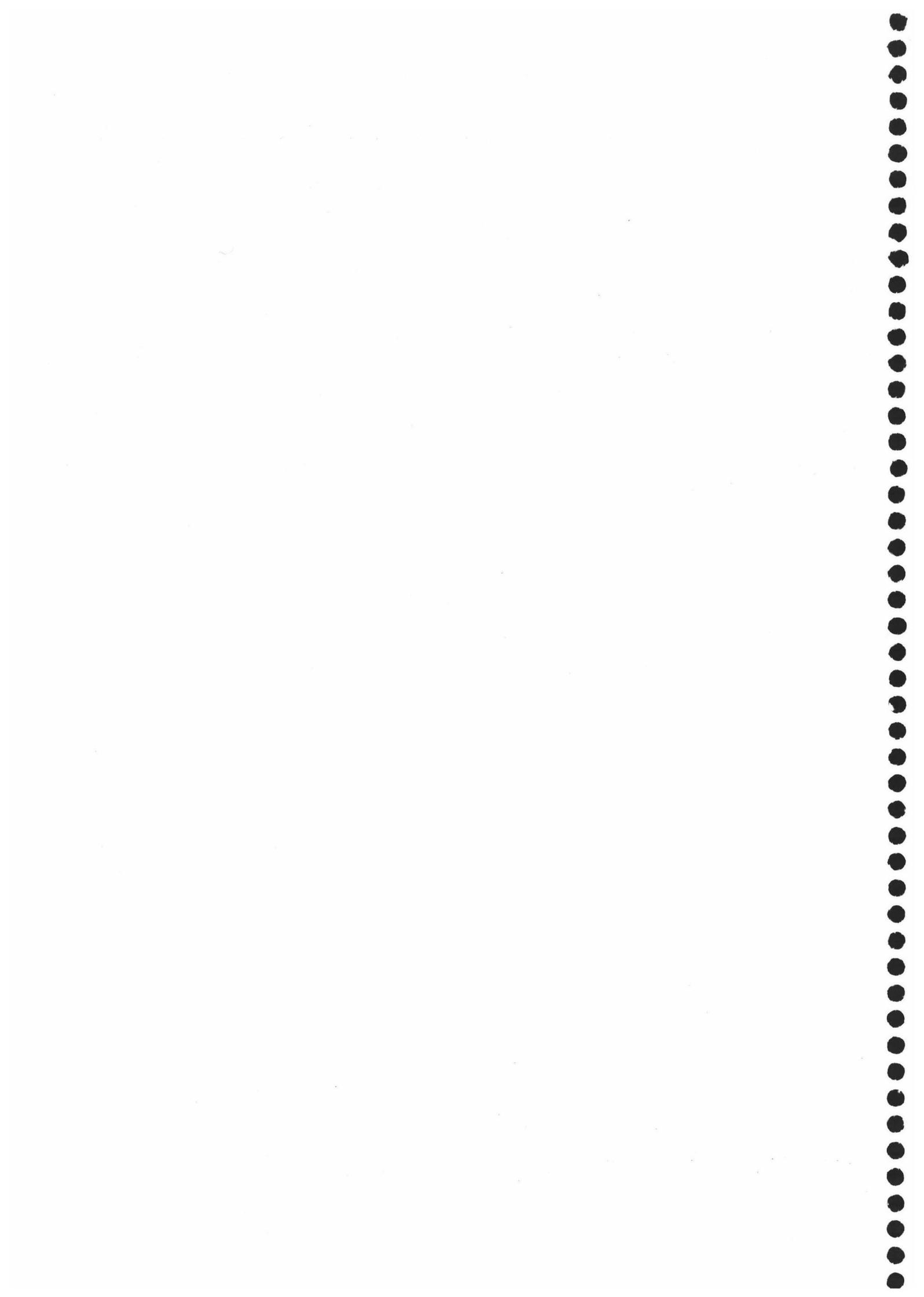
VII-10. CONCLUSIONES.

En este capítulo se ha llevado a cabo un análisis de las posibles técnicas de procesado de señal que puedan mejorar la relación señal-ruido de la onda recibida, para posteriormente proceder a la identificación precisa del blanco. Primeramente se ha estudiado la posibilidad de realizar un modelado racional de los datos recibidos. Adaptando los resultados obtenidos fundamentalmente en [CAD88] [CAD91] y [RAO88] a nuestro problema particular, hemos obtenido una solución al problema de optimización formulado en términos de matrices de datos de la señal recibida. La solución obtenida consiste en el uso de un algoritmo iterativo basado en la SVD y la aproximación Toeplitz de la matriz de datos de la señal. Asimismo se ha hecho un análisis de los diferentes criterios de elección del orden del modelo que aplicamos a la señal dispersada por el blanco. A partir de este análisis se ha llegado a la conclusión de que el criterio propuesto en [BAK91] puede proporcionar buenas estimaciones del orden, aunque debe ser modificado en ambientes de ruido severo en el sentido de obtener sólo el número de modos dominantes de la señal, pues el resto de los modos están muy perturbados por el ruido y pueden dar lugar a una confusión en el sistema de identificación.

Junto al modelado racional de los datos, se ha estudiado la síntesis de un filtro de suavizado óptimo de respuesta impulso finita que busca realzar las características espectrales de la señal para conducir a una identificación más efectiva. Combinando esta etapa con las técnicas de reconstrucción de señal basadas en el modelado racional y con un filtrado paso-baja que atenúe la banda de frecuencias altas, se ha propuesto un algoritmo global de procesado de la señal previo a la identificación. Este algoritmo posee como característica principal el respetar la estructura básica de la señal dispersada por el blanco, estructura de la que va a hacer uso el sistema de identificación.

CAPITULO VIII

APLICACION DE LA TECNICA FAR AL HILO
CILINDRICO CONDUCTOR.



VIII-1. INTRODUCCION

Una vez realizado el estudio de la técnica FAR en el capítulo VI de esta Memoria y hecha una descripción de las etapas de procesado digital de la señal recibida por el receptor en el capítulo VII, en este capítulo se presenta un ejemplo, el de la identificación de la respuesta de un hilo patrón respecto a hilos más cortos o más largos que él. Los resultados obtenidos van a permitir mostrar la efectividad de las técnicas de mejora de la señal y el aumento que producen de la capacidad de identificación de blancos de radar mediante el FAR.

La elección de esta estructura para llevar a cabo la identificación, es decir, el hilo cilíndrico conductor, viene motivada por el hecho de que la respuesta impulso es conocida analíticamente, por lo que nos servirá para estudiar la técnica FAR en función de parámetros tales como la orientación relativa del blanco y de la onda incidente, y del número de resonancias naturales presentes en la respuesta. Además, es un ejemplo muy usado en la literatura, lo que puede permitir una fácil comparación con los resultados obtenidos mediante otros tipos de técnicas. Junto a parámetros propios de la respuesta electromagnética como la orientación o el número de resonancias naturales, analizaremos los efectos de las distintas técnicas de procesado previo de la señal en la identificación del hilo patrón. Estudiaremos como cada una de las etapas de mejora de la señal afecta a la identificación del hilo patrón entre hilos de distintas longitudes, lo que nos permitirá decidir qué etapas son más efectivas para la eliminación de ruido dependiendo de respecto a qué tipo de blancos (más o menos parecidos al patrón) se quiere identificar.

El esquema que vamos a seguir en este capítulo es el que sigue a continuación. En la sección VIII-2 obtendremos mediante un análisis SEM la respuesta impulso de un hilo conductor. En la sección VIII-3 estudiaremos la capacidad de discriminación del FAR en

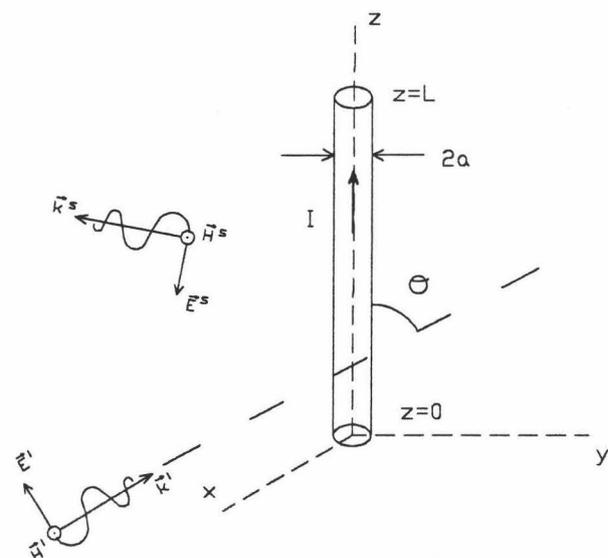
función de parámetros tales como la orientación relativa entre la onda incidente y el blanco, el número de resonancias naturales presentes en la onda dispersada y el periodo de muestreo. Tras obtener la respuesta impulso, en la sección VIII-4 contaminaremos esta respuesta con ruido, y aplicando las diversas técnicas de procesado descritas en el apéndice B y el capítulo VII estudiaremos la capacidad de discriminación del FAR entre hilos de diferente longitud relativa. En esta sección se analiza la efectividad de las diversas técnicas. Concluiremos en la sección VIII-5 con un análisis de los resultados obtenidos, lo que nos permitirá decidir qué tipo de procesado es el más efectivo.

VIII-2. CAMPO ELÉCTRICO DISPERSADO POR UN HILO CONDUCTOR. RESPUESTA IMPULSO DEL HILO.

Consideremos un hilo cilíndrico delgado de longitud L y radio a iluminado por una onda electromagnética plana transitoria formando un ángulo θ , tal y como se indica en la figura de la derecha, y cuyo campo eléctrico asociado viene dado en el dominio del tiempo por:

$$\vec{E}^i(\vec{r},t) = \hat{p} e(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{k}}{c}) \quad (8.1)$$

donde $e(t)$ representa la variación temporal de la onda incidente.



La componente tangencial de dicho campo a la superficie del hilo, en un punto

Hilo conductor iluminado por una onda electromagnética plana.

de éste que se encuentra a una distancia z del origen de coordenadas, viene dada, en el dominio de la Transformada de Laplace, por:

$$E_{\tan}^i(z,s) = \text{sen}\theta E(s) e^{-sz\cos\theta/c} \quad (8.2)$$

el cual inducirá una corriente $I(z,t)$ en el hilo, que a su vez generará un campo eléctrico $\vec{E}^s(\vec{r},t)$ y magnético dispersado $\vec{H}^s(\vec{r},t)$. Esta corriente, $I(z,s)$, se puede obtener como solución de la ecuación integral MFIE dada en (A.1), o su correspondiente para el campo eléctrico EFIE dada por

$$\int_S \left[\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}',s) (\hat{t} \cdot \nabla) - \frac{s^2}{c^2} \hat{t} \cdot \vec{J}(\vec{r}',s) \right] \frac{e^{-(sR/c)}}{4\pi\epsilon_0 R} dS' = -s \hat{t} \cdot \vec{E}^i(\vec{r},s) \quad (8.3)$$

En este caso, al tratar el problema como una estructura abierta, es necesario utilizar una formulación EFIE, que para el caso de hilos conductores delgados ($L \gg a$) y ($a \ll \lambda$) se reduce a la ecuación integrodiferencial de Pocklington [TES73]:

$$\int_0^L \Gamma(z,z',s) I(z',s) dz' = S(z,s) \quad (8.4)$$

con el núcleo $\Gamma(z,z',s)$ dado por:

$$\Gamma(z,z',s) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c^2} \right) \frac{e^{-sR/c}}{4\pi R} \quad ; \quad R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2} \quad (8.5)$$

y la función de excitación $S(z,s)$ por:

$$S(z,s) = -\epsilon_0 \operatorname{sen}\theta [s E(s) e^{-sz\cos\theta/c}] \quad (8.6)$$

A continuación, y de forma análoga al apéndice A, aplicamos el método de expansión en singularidades. Los modos naturales serán soluciones de la ecuación de Pocklinton homogénea, de forma que la solución general de dicha ecuación será una expansión de Mittag-Leffler de forma análoga a (A.9). Por consiguiente la solución SEM de la ecuación de Pocklinton vendrá dada (A.21) (A.9) como:

$$I(z,s) = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha}(s) I_{\alpha}(z) \frac{1}{s-s_{\alpha}} \quad (8.7)$$

que hemos considerado en el dominio de la transformada de Laplace siendo I_{α} es la distribución de corriente espacial del α -ésimo modo natural y $a_{\alpha}(s)$ son los coeficientes de acoplo. En esta ecuación se ha considerado un número de modos finito (N) y que no existe contribución de la función entera. Se puede demostrar [CHE82b] que en este caso los coeficientes de acoplo $a_{\alpha}(s)$ vienen dados por la expresión:

$$a_{\alpha}(s) = \frac{\int_0^L S(z,s) v_{\alpha}(z) dz}{\int_0^L dz v_{\alpha}(z) \int_0^L v_{\alpha}(z') \left[\frac{\partial}{\partial s} \Gamma(z,z',s) \right]_{s=s_{\alpha}} dz'} \quad (8.8)$$

Si representamos $I_\alpha(z)$ por la aproximación:

$$v_\alpha(z) = \text{sen}\left(\frac{\alpha \pi z}{L}\right) \quad (8.9)$$

$a_\alpha(s)$ puede ser evaluado, y llevado a la expresión (8.7), obteniendo de esta forma la siguiente expresión para la corriente inducida $I(z,s)$:

$$I(z,s) = \frac{4\pi^2 \text{sen}\theta}{\mu_0 L^2 (2\ln(L/a) - 1)} s E(s) \sum_{\alpha=1}^N \alpha \left[\frac{1 - (-1)^\alpha e^{-sL\cos\theta/c}}{s^2 \cos^2\theta/c^2 + \alpha^2 \pi^2/c^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{s_\alpha(s-s_\alpha)} + \frac{1}{s_\alpha^*(s-s_\alpha^*)} \right] \text{sen}\left(\frac{\alpha \pi z}{L}\right) \quad (8.10)$$

El módulo de la componente tangencial al hilo del campo eléctrico dispersado en un punto lejano se puede obtener del potencial vector como:

$$E^s(r,s) = s A(r,s) \text{sen}\theta \quad (8.11)$$

donde $A(r,s)$ es el módulo del potencial vector escalar que viene dado por:

$$A(r,s) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-sr/c} \int_0^L I(z,s) e^{-sz\cos\theta/c} dz \quad (8.12)$$

donde r es la distancia entre el hilo y un punto de observación situado en la zona de radiación del hilo.

Introduciendo la expresión de $I(z,s)$ dada por (8.10) en (8.12) se obtiene

finalmente una expresión para el campo dispersado $E^s(r,s)$, esto es:

$$E^s(r,s) = k_1 \frac{e^{-sr/c}}{r} E(s) H(s,\theta) \quad (8.13)$$

donde

$$k_1 = \frac{L \operatorname{sen}^2\theta}{(2 \ln(L/a) - 1) \pi^2} \quad (8.14)$$

y la función de transferencia $H(s,\theta)$ viene dada por:

$$H(s,\theta) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{s^2}{(\pi \alpha)^2} \left[\frac{1 - (-1)^\alpha e^{-sT}}{1 + (T/\alpha \pi)^2 s^2} \right]^2 \left[\frac{1}{s_\alpha (s - s_\alpha)} + \frac{1}{s_\alpha^* (s - s_\alpha^*)} \right] \quad (8.15)$$

donde T es el tiempo de tránsito de un impulso $\delta(t)$ por el hilo, y viene dado por:

$$T = (L/c) \cos\theta \quad (8.16)$$

La amplitud del campo eléctrico dispersado en el dominio del tiempo puede obtenerse haciendo la Transformada inversa de Laplace en (8.13), obteniéndose:

$$E^s(r,t) = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2 \ln(L/a) - 1} \frac{L}{r} \sum_{\alpha=1}^N (E(s_\alpha) C_\alpha(s_\alpha) e^{s_\alpha(t-t/c)} + E(s_\alpha^*) C_\alpha(s_\alpha^*) e^{s_\alpha^*(t-t/c)}) \quad (8.17)$$

donde

$$C_{\alpha}(s) = \frac{1}{(\alpha\pi)^2} \frac{sL}{c} \left[\frac{1 - (-1)^{\alpha} e^{-sT}}{\left(\frac{sT}{\alpha\pi}\right)^2 + 1} \right]^2 \quad (8.18)$$

y teniendo en cuenta que

$$C_{\alpha}(s_{\alpha}^*) = C_{\alpha}^*(s_{\alpha}) \quad ; \quad E(s_{\alpha}^*) = E^*(s_{\alpha}) \quad (8.19)$$

se obtiene una expresión final para el campo dispersado, como:

$$E^s(r,t) = \frac{L}{r} \frac{\text{sen}^2\theta}{2\ln(L/a)-1} \sum_{\alpha=1}^N 2 |E(s_{\alpha})| |C_{\alpha}(s_{\alpha})| \cdot e^{\sigma_{\alpha}(t-r/c)} \cos(\omega_{\alpha}(t-r/c) + \xi_{\alpha}) \quad (8.20)$$

donde

$$\xi_{\alpha} = \text{arctg} \frac{\text{Im}\{E(s_{\alpha}) C_{\alpha}(s_{\alpha})\}}{\text{Re}\{E(s_{\alpha}) C_{\alpha}(s_{\alpha})\}} \quad (8.21)$$

Por otro lado la respuesta impulso $h(t,\theta)$ se puede obtener mediante la Transformada inversa de Laplace de (8.15), esto es:

$$h(t,\theta) = L^{-1}(H(s,\theta)) \quad (8.22)$$

obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 h(t,\theta) = \sum_{\alpha=1}^N [u(t)G_{\alpha}(t) - 2(-1)^{\alpha}u(t-T)G_{\alpha}(t-T) + u(t-2T)G_{\alpha}(t-2T)] - \\
 -2[B_{\alpha r}(s_{\alpha})f_1(t) - C_{\alpha r}(s_{\alpha})f_2(t)] \text{ sen}(bt) - \\
 -2[D_{\alpha r}(s_{\alpha})f_1(t) + E_{\alpha r}(s_{\alpha})f_2(t)] \text{ cos}(bt)
 \end{aligned}
 \tag{8.23}$$

donde los subíndices "r" e "i" denotan parte real e imaginaria, respectivamente, u(t) es la función salto unidad, y A_α, B_α, C_α, D_α, E_α, G_α, f₁(t) y f₂(t) vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$G_{\alpha}(t) = 2 e^{\sigma_{\alpha} t} [A_{\alpha r}(s_{\alpha}) \text{ cos}(\omega_{\alpha} t) - A_{\alpha i}(s_{\alpha}) \text{ sen}(\omega_{\alpha} t)]$$

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^4 s_{\alpha}}{\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)^2} \quad B_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^3 (s_{\alpha}^2 - b^2)}{2\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)^2} \\
 C_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^5}{2\alpha^2 s_{\alpha} (s_{\alpha}^2 + b^2)} \quad D_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^4 s_{\alpha}}{\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)^2}
 \end{aligned}
 \tag{8.24}$$

$$E_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^4}{2\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)}$$

$$f_1(t) = u(t) - 2u(t-T) + u(t-2T)$$

$$f_2(t) = tu(t) - 2(t-T)u(t-T) + (t-2T)u(t-2T)$$

donde $b = \alpha\pi/T$.

En esta expresión que nos proporciona la respuesta impulso $h(t,\theta)$, el primer término corresponde a la componente oscilatoria libre o componente natural que existe para cualquier valor de t y es una suma de modos naturales, mientras que los demás términos corresponden a la componente forzada que existen sólo en $0 < t < 2T$. Vemos que $h(t,\theta)$ se descompone en dos regiones como en (A.23), una primera llamada respuesta temprana o early-time, que no se puede modelar por una suma de funciones armónicas amortiguadas y que se extiende desde $t=0$ hasta $t=T_0=2T$, y otra segunda llamada late-time o respuesta tardía, que se extiende entre $t=2T$ y $t=\infty$, la cual se puede modelar por una suma de exponenciales complejas amortiguadas. De esta forma la expresión (8.23) de la respuesta impulso se puede poner de forma más compacta como:

$$h(t,\theta) = \Omega(t,\theta) + \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha}(\theta) e^{\sigma_{\alpha}t} \cos(\omega_{\alpha}t + \phi_{\alpha}(\theta)) \quad (8.25)$$

donde $\Omega(t,\theta)$ es la respuesta forzada con duración entre 0 y T_0 .

Conocida de esta forma la respuesta impulso del hilo, se puede también obtener el campo dispersado, considerado como respuesta del blanco, sin más que hacer la convolución entre la excitación $e(t)$ y la respuesta impulso como se pone de manifiesto en (8.13), esto es:

$$E^s(r,t) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\ln(L/a)-1} \frac{L}{r} e(t)*h(t,\theta) \quad (8.26)$$

en el cual la región del late-time comenzará en $T_s = T_e + 2T$.

Por último se presentan en la siguiente tabla las diez primeras resonancias del hilo obtenidas en [TES73], normalizadas por c/L , y para una relación longitud-radio L/a de

200.

n	s_n
1	-0.2601+j 2.9062
2	-0.3808+j 6.0067
3	-0.4684+j 9.0603
4	-0.5382+j 12.1705
5	-0.5997+j 15.2493
6	-0.6535+j 18.3626
7	-0.7037+j 21.4539
8	-0.7486+j 24.5703
9	-0.7993+j 27.6680
10	-0.8319+j 30.7876

Tabla (VIII.1) Diez primeras resonancias naturales del hilo cilíndrico

VIII-3. ESTUDIO DE LA CAPACIDAD DE IDENTIFICACION DEL FAR

VIII.3.1 Síntesis de la respuesta impulso del hilo

Calculada la respuesta impulso del hilo, dada por la ecuación (8.23), nos proponemos estudiar la capacidad de identificación del FAR en función de variables tales como la longitud del hilo, el ángulo de orientación relativa entre el hilo y la onda incidente, y el número de resonancias presentes en la respuesta impulso. Para ello sintetizamos la respuesta impulso del hilo patrón para diferentes orientaciones, y usando las resonancias naturales de la tabla (VIII.1). En las figuras (8.1) y (8.2) se muestran la respuesta impulso del hilo a 30° sintetizada con 5 y 10 resonancias respectivamente. Observando estas figuras, vemos que la región del early-time se extiende desde $t = 0$ hasta $t = 2 T$ siendo T el tiempo de tránsito del impulso por el cilindro que en este caso vale $T = \cos 30^\circ$, y luego va seguida de una respuesta oscilatoria amortiguada que constituye la región del late-time. Ambas figuras difieren muy poco en el late-time, es decir, la respuesta del hilo sintetizada usando 5 resonancias es casi idéntica a la respuesta del hilo usando 10 resonancias, lo que indica que las resonancias que tienen coeficientes de amortiguamiento elevados en valor absoluto casi no contribuyen a la respuesta natural del hilo al decaer rápidamente en el tiempo. Esto es importante de destacar, ya que aunque hay infinitos modos naturales, en la práctica para la identificación de blancos sólo es necesario considerar un número finito de ellos, en concreto aquellos que tienen menor coeficiente de amortiguamiento en valor absoluto. En lo que sigue usaremos por simplicidad respuestas impulso sintetizadas con 5 resonancias.

En las figuras (8.3) y (8.4) tenemos la respuesta impulso del hilo para un ángulo de 60° usando 5 y 10 resonancias respectivamente.

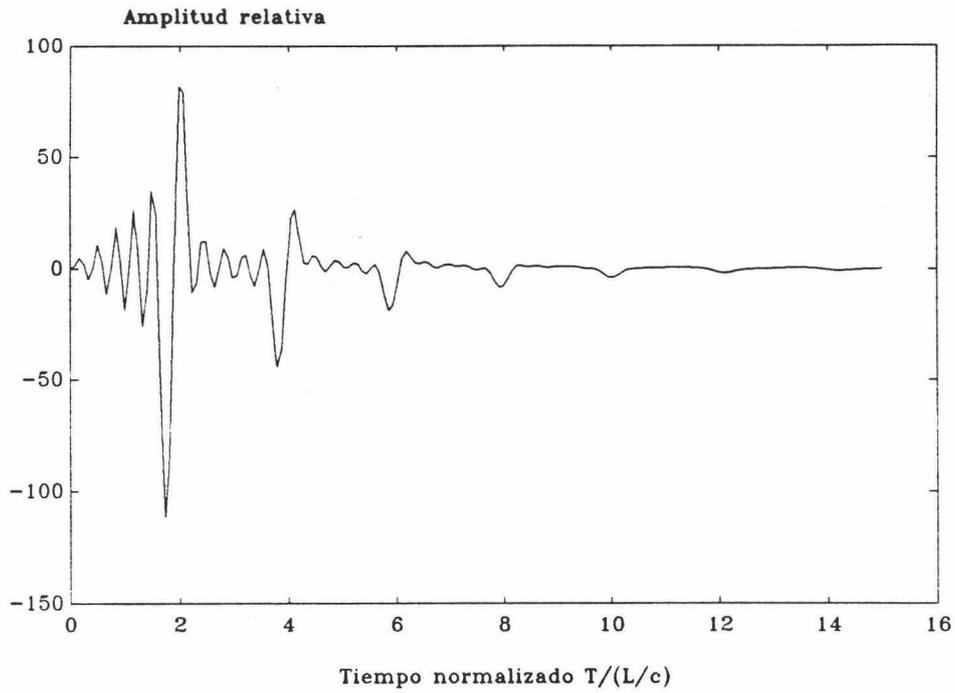


Figura (8.1). Respuesta impulso del hilo a 30^0 sintetizada con 5 resonancias.

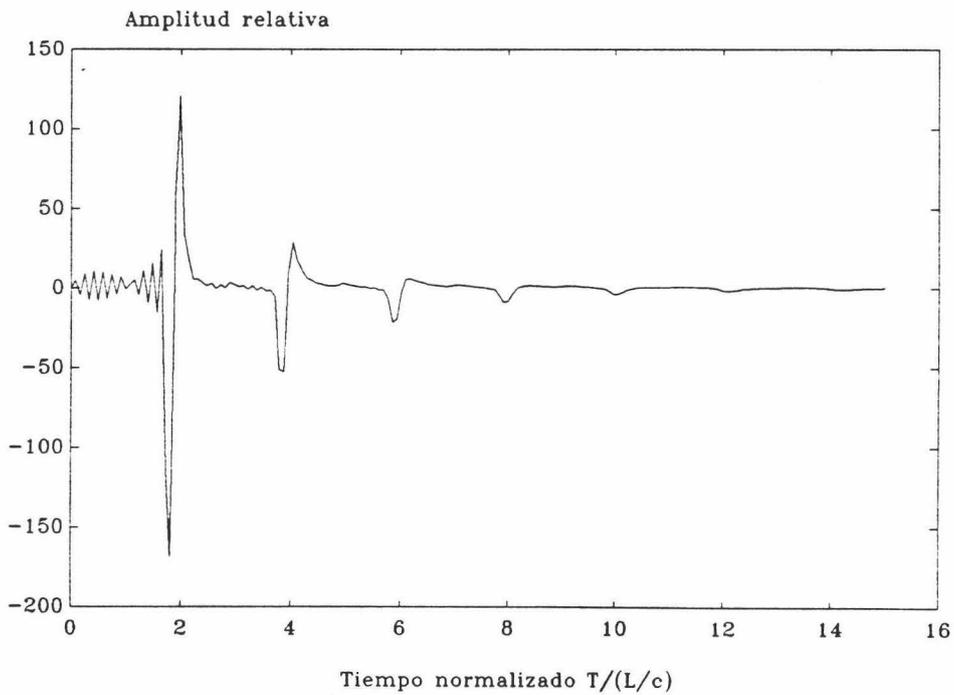


Figura (8.2). Respuesta impulso del hilo a 30^0 sintetizada con 10 resonancias.

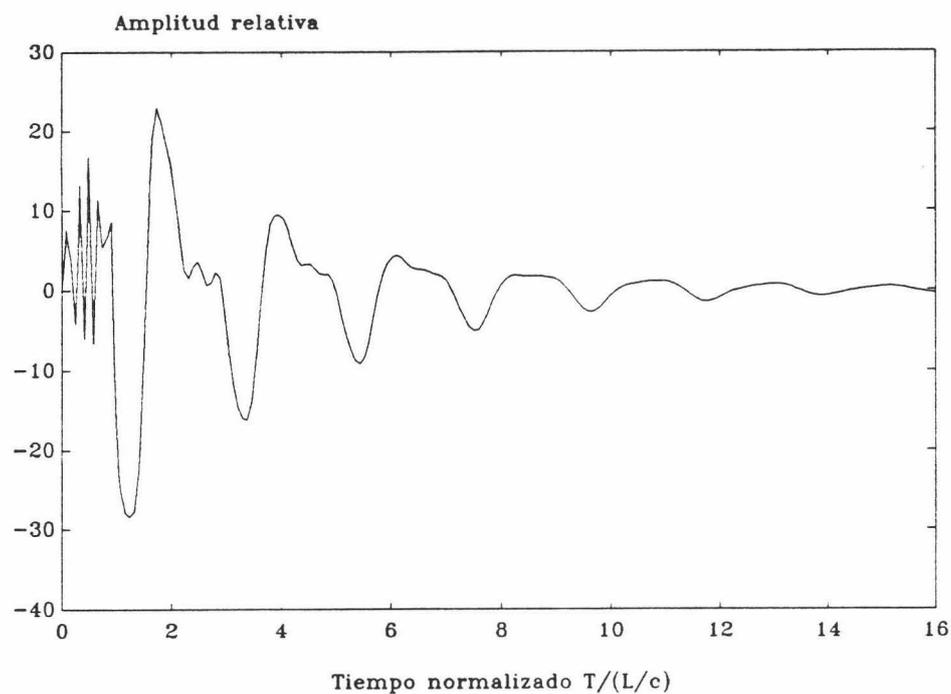


Figura (8.3). Respuesta impulso del hilo a 60° sintetizada con 5 resonancias

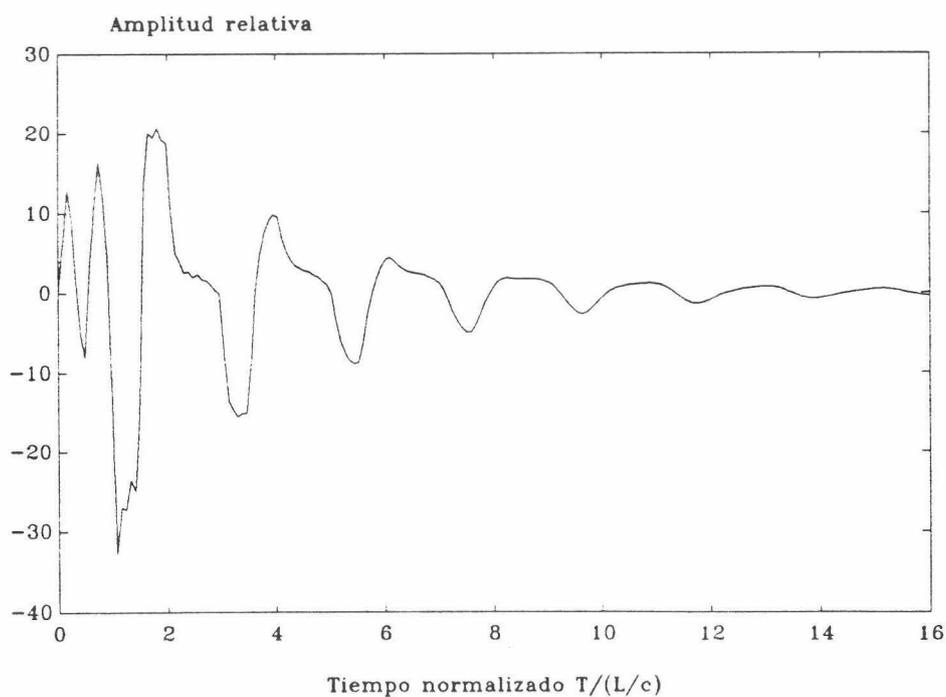


Figura (8.4).- Respuesta impulso del hilo a 60° sintetizada con 10 resonancias.

Se observa igualmente la poca diferencia entre una y otra en el periodo del late-time, probando la escasa contribución de los polos superiores al quinto. Además en estas figuras se observa como la forma de onda ha cambiado, ya que dependiendo de la orientación unos modos son excitados más fuertemente que otros. Esto queda reflejado en la ecuación (8.25), en la que el vector de residuos $a_{\alpha}(\theta)$ depende fuertemente del ángulo θ , tomando valores distintos para cada modo en función de éste y resultando por tanto respuestas impulso diferentes. Esto puede verse claramente con el espectro de la respuesta impulso del hilo en el late-time, representado en las figuras (8.5) y (8.6) para 30° y 60° respectivamente. En estas figuras puede observarse que a 30° los modos más energéticos son los últimos aunque todos tienen energía muy parecida, mientras que a 60° los modos más energéticos son los dos primeros, mientras que el resto están progresivamente más amortiguados (figura (8.6)).

VIII.3.2 Síntesis de los filtros de aniquilación de resonancias.

Para el proceso de identificación de la respuesta impulso del hilo patrón, sintetizamos el FAR que aniquile sus resonancias, cuyos coeficientes vienen dados por la ecuación (6.20), y varios FAR diseñados para aniquilar las respuestas de hilos 1%, 2%, 5% y 10% más cortos y más largos que el hilo (sus resonancias están desplazadas 1%, 2%, 5% y 10% en sentido ascendente y descendente respectivamente). Estos FAR representan blancos alternativos muy parecidos al patrón. La salida de cada FAR será la convolución de la respuesta del hilo con la respuesta impulso del FAR de longitud T_k . Cuando la respuesta del hilo patrón sea filtrada por el FAR patrón la respuesta en el late-time será prácticamente nula, mientras que cuando sea filtrada por los FAR de blancos alternativos el late-time no será aniquilado, por lo que dará una respuesta de energía no nula permitiendo así la identificación. Un esquema de este proceso se presenta en la figura (8.7). En este esquema se muestra que la respuesta impulso del hilo patrón $h(t)$ es filtrada por una serie de FAR y se computa la energía de la salida de cada uno de ellos.

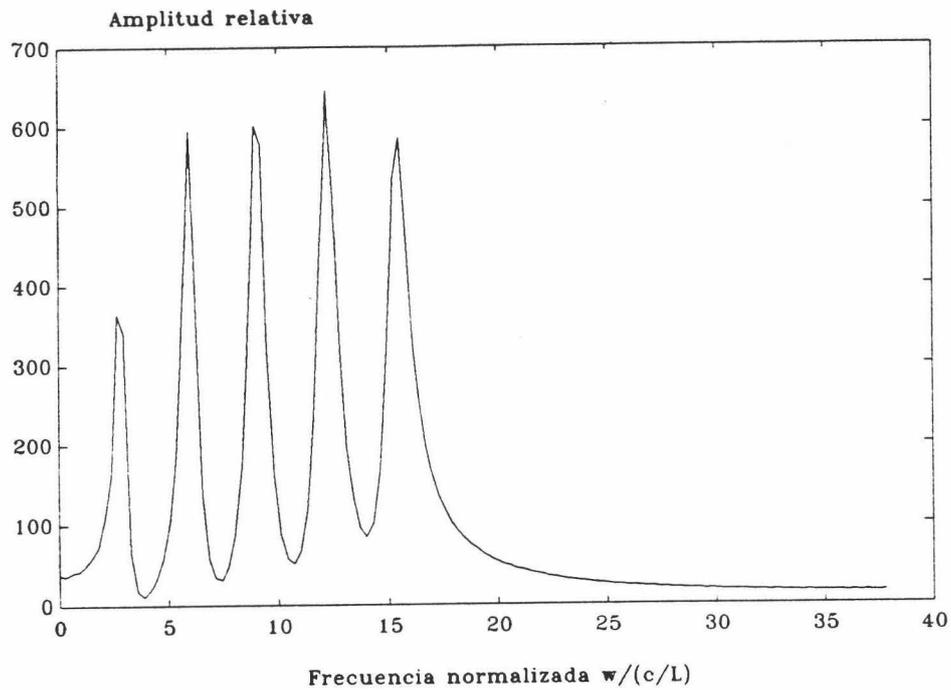


Figura (8.5). Espectro de energía del hilo a 30° sintetizada con 5 resonancias

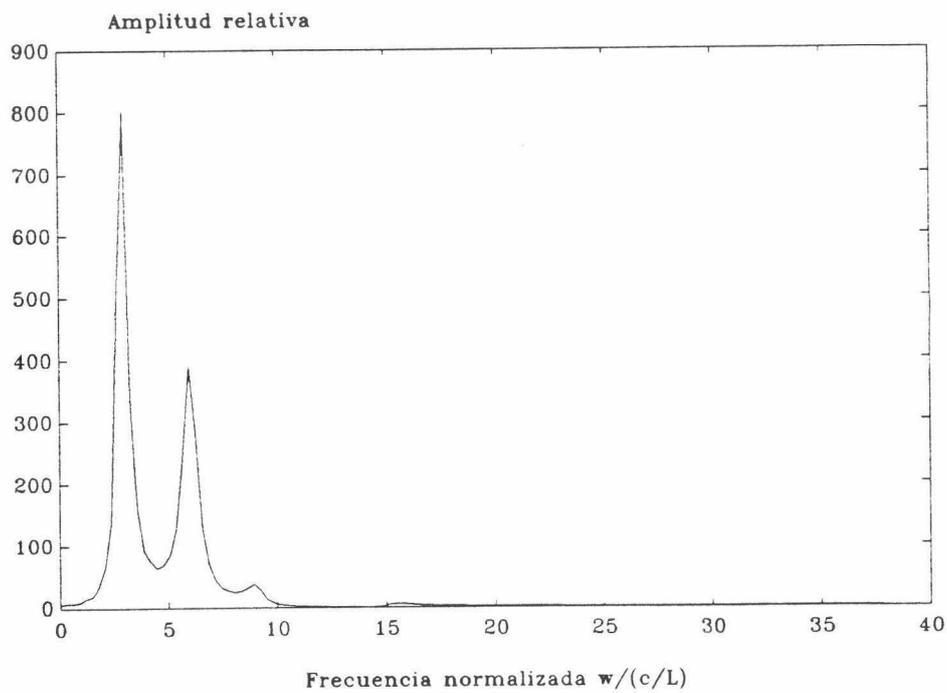


Figura (8.6).- Espectro de energía del hilo a 60° sintetizada con 5 resonancias.

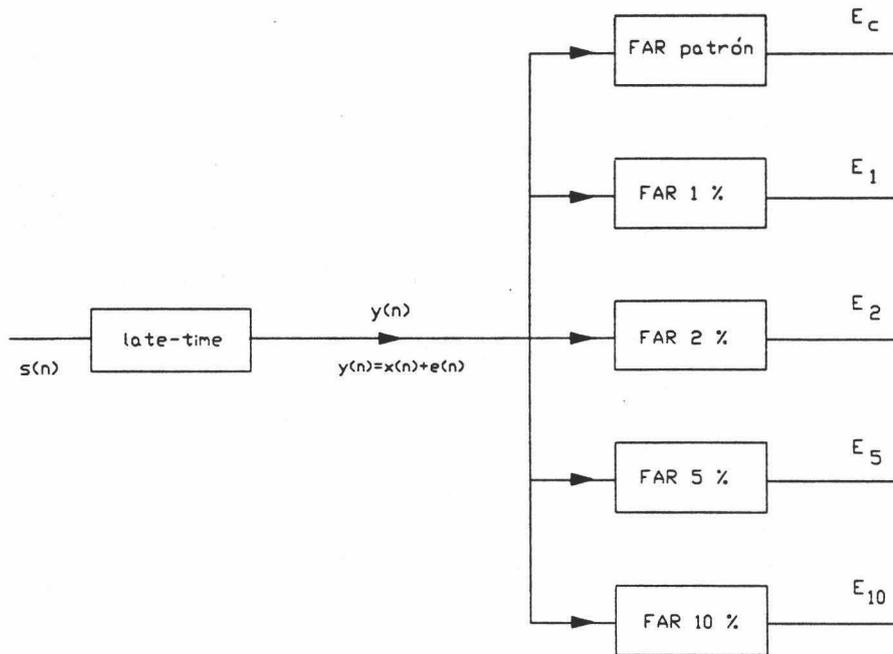


Figura (8.7). Esquema del proceso de discriminación del hilo patrón mediante FAR

Los resultados de este test se presentan en las siguientes tablas. En la tabla (VIII.2) se representa la energía en el late-time ($T_0 + T_k$) cuando la señal es filtrada por una serie de FAR que representan blancos más cortos y en la tabla (VIII.3) cuando la señal es filtrada por FAR representativos de blancos más largos.

FAR patrón	FAR 1%	FAR 2%	FAR 5%	FAR 10%
1.12 E-24	1.94 E-5	7.32 E-5	3.75 E-4	9.88 E-4

Tabla (VIII.2). Energía en el late-time cuando la respuesta impulso del hilo patrón es filtrada por FAR representativos de blancos 1%, 2%, 5% y 10% más cortos.

FAR patrón	FAR 1%	FAR 2%	FAR 5%	FAR 10%
1.12 E-24	2.17 E-5	9.13 E-5	6.56 E-4	3.18 E-3

Tabla (VIII.3). Energía en el late-time cuando la respuesta impulso del hilo patrón es filtrada por FAR representativos de blancos 1%, 2%, 5% y 10% más largos.

Podemos observar que la energía de la señal filtrada por el FAR patrón es prácticamente nula, mientras que cuando es filtrada por los FAR representativos de hilos de longitudes distintas al patrón da energías importantes en el late-time comparadas con la del patrón, permitiendo por tanto una fácil identificación del hilo patrón.

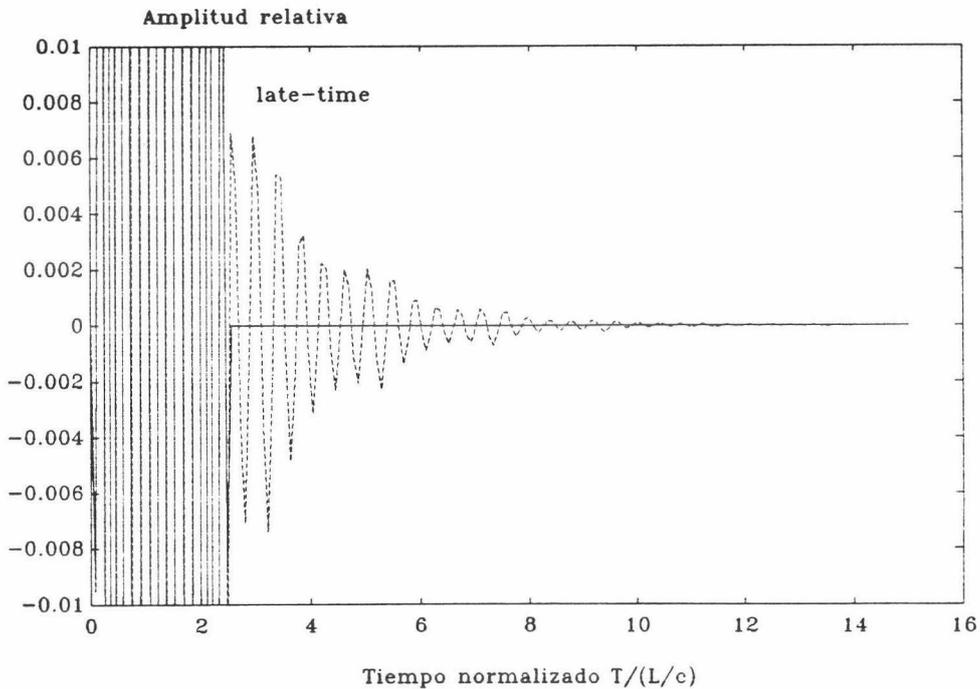


Figura (8.8). Respuesta impulso del hilo patrón a 30° filtrada con el FAR patrón y con el FAR representativo de un hilo un 5% más corto.

En la figura (8.8) se muestra la señal de salida al ser filtrada con un FAR patrón y un FAR correspondiente a un hilo un 5% más corto. Puede observarse que el FAR patrón aniquila la respuesta para la que ha sido diseñado, mientras que el FAR correspondiente al hilo 5% más corto no aniquila la respuesta en el late-time, permitiendo así la identificación.

Una cuestión interesante que puede observarse de las tablas (VIII.2) y (VIII.3) son las diferencias de energía, que aunque pequeñas, muestra la señal de salida dependiendo de si el hilo es más largo o más corto que el patrón. Puede observarse que generalmente los FAR que representan hilos de longitud más larga dan valores de energía mayores que los FAR que representan hilos de longitud más corta. Esto quiere decir que el hilo patrón se identificará mejor respecto a hilos más largos que más cortos. La razón de esta falta de simetría puede verse en la función de transferencia del FAR (ecuación (6.22)) que está representada en magnitud en la figura (8.9). En esta figura puede observarse que, además de los valles correspondientes a los 5 ceros de las frecuencias naturales con los que ha sido diseñado presenta una gran amplificación de las frecuencias que están situadas a partir de las frecuencias de resonancia, tal y como se predijo en el capítulo VI. Es esta amplificación polinómica de las frecuencias altas la que marca la diferencia de discriminación entre hilos más cortos y más largos. Cuando la respuesta del hilo patrón es filtrada por un FAR correspondiente a un hilo más largo (resonancias menores en magnitud respecto a las del patrón), este FAR presentará los ceros desplazados hacia frecuencias bajas, iniciando antes la subida en frecuencia. Al subir antes en frecuencia amplifica también antes el último modo no aniquilado de la señal patrón de entrada, originando una salida de mayor energía. En cambio, cuando es filtrada por un FAR correspondiente a un hilo más corto (resonancias menores en magnitud respecto a las del patrón), éste presentará los ceros desplazados hacia altas frecuencias, amplificando menos efectivamente este último modo no aniquilado.

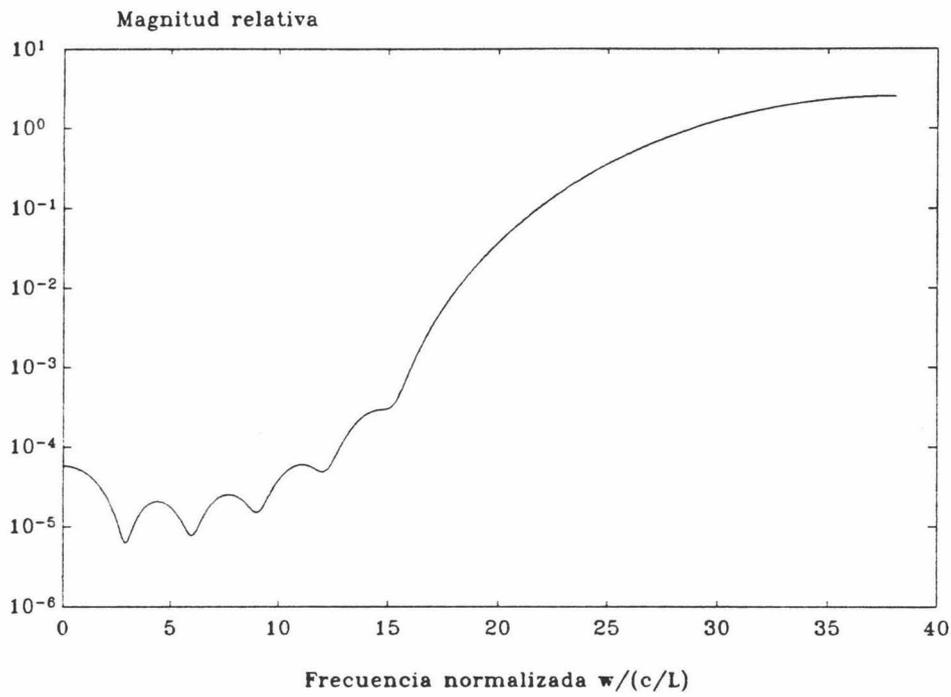


Figura (8.9). Respuesta en magnitud del FAR.

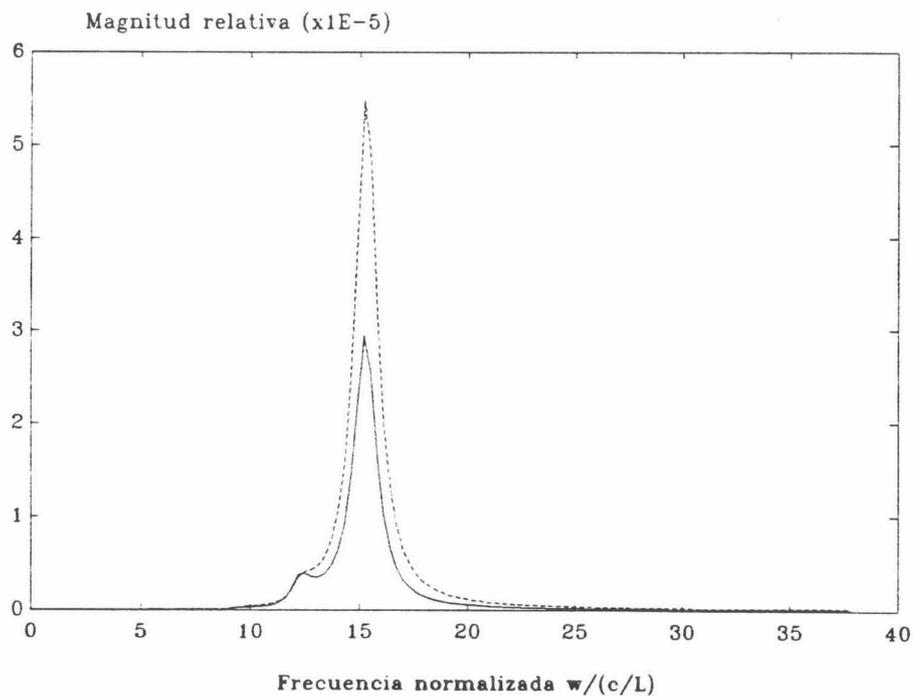


Figura (8.10).- Espectro de energía de la respuesta impulso del hilo a 30° filtrada con un FAR de un hilo 5% más corto (línea continua) y mas largo (línea discontinua).

Este comportamiento lo corrobora el espectro de energía de la señal patrón filtrada por un FAR correspondiente a un hilo 5 % más corto y más largo (figura (8.10)). Vemos que estas señales contienen el último modo no aniquilado por el FAR muy amplificado permitiendo la identificación, pero que el espectro de energía de la señal filtrada por el FAR de un hilo 5 % más largo contiene mayor amplitud, y por tanto mayor energía de salida.

Este efecto es independiente de cuál sea el modo más energético. En la figura (8.11) se representa el espectro de la respuesta del hilo a 90° , que sólo posee los modos de orden impar y tiene los primeros modos más energéticos, cuando es filtrada por los FAR correspondientes a un hilo un 5 % más largo y un 5 % más corto. Igual que antes se observa que el último modo es altamente amplificado, siéndolo más por el FAR del hilo 5 % más largo y por lo tanto la señal de salida filtrada por él contiene mayor energía.

A la luz de esta explicación, parecería lógico que en la tabla (VIII.2) se observara un decrecimiento de la energía de salida a medida que la fase de los ceros que forman el FAR aumenta (frecuencias de resonancia desplazadas hacia frecuencias mayores, correspondientes a hilos más cortos que el patrón). Sin embargo esto no ocurre en dicha tabla. La razón se puede entender claramente si observamos la figura (8.12), que representa la respuesta en magnitud del FAR correspondiente a un hilo un 1 % más corto y un 10% más corto. En ella vemos que el último modo de la respuesta impulso del hilo patrón correspondiente a la resonancia de $w = 15.24$ es más amplificado por el FAR del hilo 10% más corto. Esto es debido a que como todas las frecuencias se han desplazado un 10% proporcionalmente, las últimas se han desplazado linealmente mucho más, aumentando la separación y por lo tanto la subida energética entre las frecuencias aniquiladas.

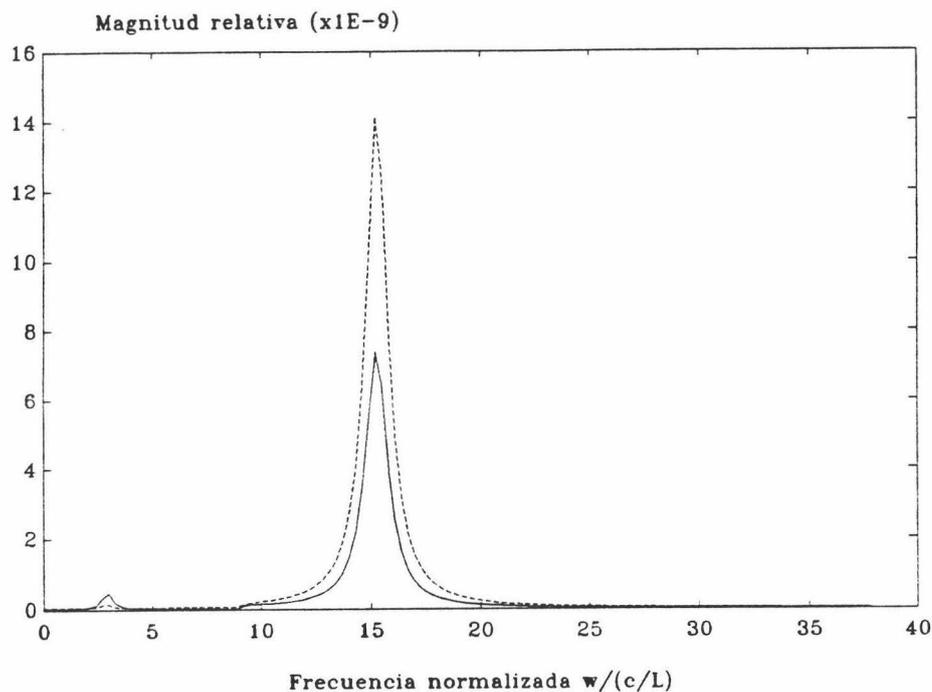


Figura (8.11).- Espectro de energía de la respuesta impulso del hilo a 90° filtrada con un FAR de un hilo 5% más corto (línea continua) y mas largo (línea discontinua).

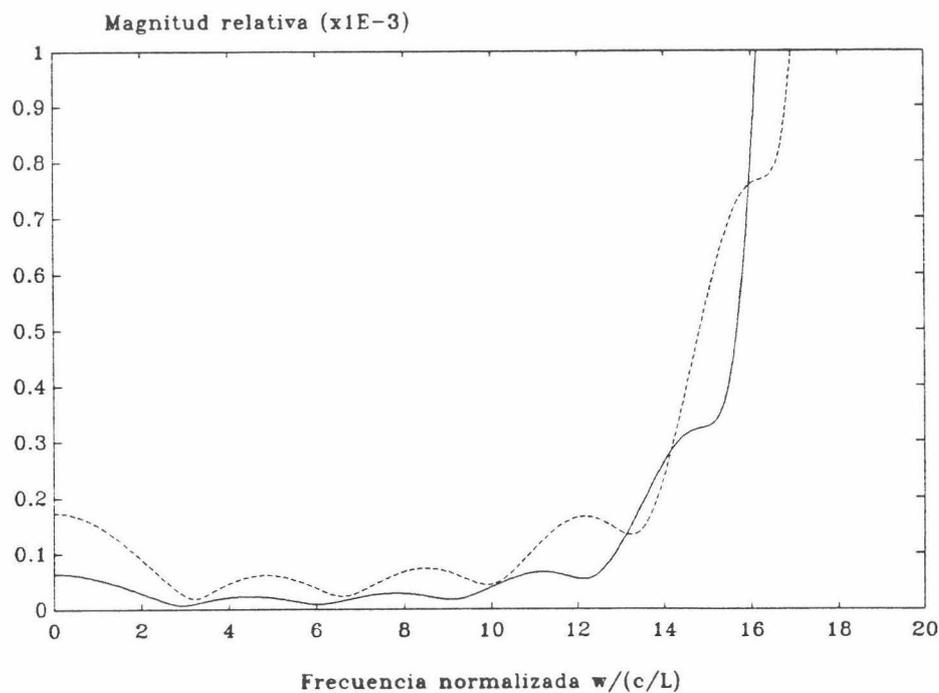


Figura (8.12).- Respuesta en magnitud de un FAR de un hilo un 1 % más corto que el patrón (línea continua) y un 10% más corto (línea discontinua).

VIII.3.3 Identificación mediante el FAR en función de la orientación del blanco.

El FAR, al estar sintetizado a partir de las resonancias naturales que son independientes de la orientación relativa entre la onda incidente y el blanco, debe discriminar independientemente de la orientación. Para estudiar el comportamiento frente a este parámetro, sintetizamos varias respuestas impulso del hilo patrón a diferentes ángulos según (8.23) y calculamos la energía en el late-time de la señal filtrada por el FAR. Esta energía se representa en decibelios (dB) en la figura (8.13).

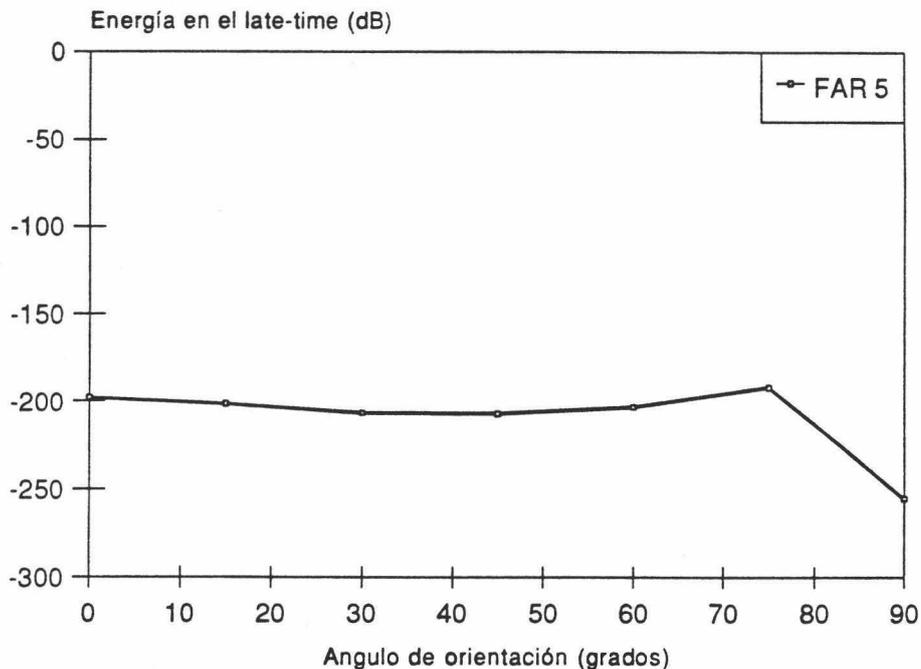


Figura (8.13). Energía en el late-time de la respuesta impulso del hilo filtrada por el FAR patrón en función de la orientación del blanco.

En esta figura puede observarse que la energía es casi independiente del ángulo de orientación, siendo un poco más baja a 90° (dirección de propagación de la onda incidente normal al eje del hilo conductor). La razón de este menor valor de la energía es que en incidencia normal sólo están presentes los modos naturales de orden impar, y al haber

menos modos la energía resultante es menor.

En cuanto a la identificación, como cabría esperar sigue siendo posible independientemente del ángulo entre la onda incidente y el hilo conductor. En la tabla (VIII.4) se muestran los valores de la energía en dB cuando la respuesta impulso del hilo patrón es sintetizada a diferentes ángulos es filtrada por cada uno de los FAR representantes de blancos alternativos. En esta tabla se puede observar que la diferencia de energías de salida de cada uno de los FAR es muy grande, permitiendo una identificación clara del hilo patrón.

FAR Angulo orientación	Patrón	1 %	2 %	5 %	10 %
0 °	-231.89	-44.16	-38.41	-31.34	-27.22
15 °	-235.39	-44.07	-38.32	-31.26	-27.15
30 °	-240.51	-47.11	-41.35	-34.26	-30.05
45 °	-240.97	-62.10	-56.24	-48.77	-43.46
60 °	-237.00	-65.38	-59.63	-52.56	-48.07
75 °	-225.71	-76.55	-70.34	-61.71	-54.16
90 °	-288.98	-83.69	-77.96	-70.93	-66.69

Tabla (VIII.4). Energía en el late-time (dB) de la respuesta impulso del hilo patrón a diferentes orientaciones relativas filtrada por el FAR.

VIII.3.4 Identificación mediante el FAR en función del número de resonancias presentes en la respuesta impulso del blanco.

Una cuestión importante es el estudio del comportamiento del FAR en función del número de modos naturales presentes en la onda dispersada del blanco. A priori no se sabe cuantas resonancias del blanco han sido excitadas, y por tanto se desconoce de cuantos modos consta la respuesta impulso del blanco. Además, en la mayoría de los casos sólo hay disponibles un número finito de resonancias naturales para sintetizar el FAR, por lo que una relativa insensibilidad al número real de modos presentes sería importante. Si representamos la energía en dB en el late-time cuando la señal del hilo patrón está compuesta por un número creciente de resonancias naturales y es filtrada por un FAR sintetizado con las 5 primeras resonancias obtenemos la figura (8.14).

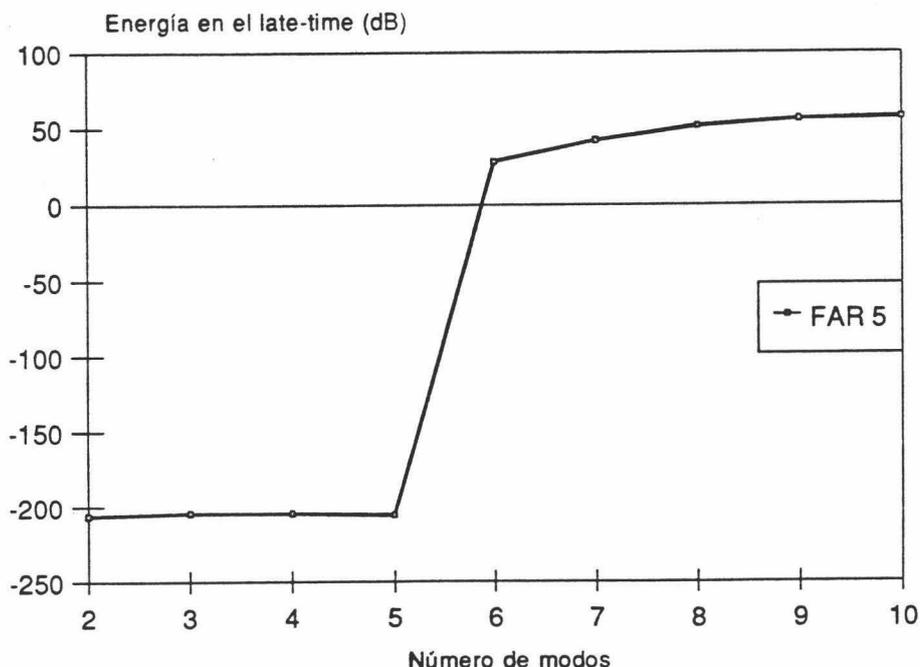


Figura (8.14). Energía en el late-time de la respuesta impulso del hilo filtrada por el FAR patrón en función del número de resonancias (modos) presentes en la respuesta.

En esta figura tenemos en ordenadas el número de resonancias naturales con las que es obtenida la respuesta impulso del hilo, y abscisas la energía en el late-time cuando es filtrada por el FAR de 5 resonancias. En dicha figura podemos observar que la energía permanece prácticamente constante hasta que el número de resonancias de la respuesta del hilo supera al número con que está sintetizado el FAR a partir del cuál la energía crece bruscamente. Este aumento es debido a la amplificación de los modos no aniquilados que están en el rango de amplificación de la respuesta en frecuencia del FAR (figura (8.9)). Es precisamente debido a su respuesta en frecuencia, que amplifica las frecuencias que se extienden a partir de las frecuencias naturales con las que ha sido diseñado, la causa de su sensibilidad al número de modos presentes en la respuesta del blanco, de tal forma que si el número de éstas es superior al número con las que ha sido sintetizado el FAR la respuesta en el late-time no será anulada. En cuanto a la discriminación entre blancos parecidos se vuelve difícil debido a la presencia de modos no aniquilados que son amplificados de forma desigual por el FAR.

FAR Nº resonancias	Patrón	1 % corto	2 % corto	5 % corto	10 % corto
1	3.55 E-25	1.06 E-9	5.28 E-9	6.25 E-8	7.02 E-7
3	1.42 E-24	4.35 E-8	2.03 E-7	1.99 E-6	1.58 E-5
5	1.11 E-24	1.94 E-5	7.32 E-5	3.75 E-4	9.88 E-4
7	7.23	6.91	6.60	5.69	4.30
9	158.35	156.67	154.94	149.70	140.63

Tabla (VIII.5). Energía en el late-time de la respuesta impulso del hilo patrón sintetizada con 1, 3, 5, 7 y 9 resonancias cuando es filtrada con FAR de hilos más cortos.

Precisamente es esta amplificación desigual la que explica los resultados de las tablas (VIII.4) y (VIII.5). En la tabla (VIII.5) se muestra la energía en el late-time de la respuesta impulso del hilo patrón a 30° sintetizada usando 1, 3, 5, 7 y 9 resonancias cuando son filtradas por filtros de aniquilación de resonancias correspondientes a blancos 1%, 2%, 5% y 10% más cortos (resonancias desplazadas en sentido creciente). Análogamente en la tabla (VIII.6) se muestra la energía en el late-time de la respuesta del hilo patrón a 30° sintetizada con 1, 3, 5, 7 y 9 resonancias cuando es filtrada con FAR correspondientes a hilos 1%, 2%, 5% y 10% más largos (resonancias desplazadas en sentido decreciente).

FAR Nº resonancias	Patrón	1 % largo	2 % largo	5 % largo	10 % largo
1	3.55 E-25	6.85 E-10	2.19 E-9	6.94 E-9	8.51 E-9
3	1.42 E-24	3.14 E-8	1.06 E-7	3.87 E-7	5.49 E-7
5	1.12 E-24	2.17 E-5	9.14 E-5	6.57 E-4	3.18 E-3
7	7.23	7.54	7.87	8.87	10.59
9	158.35	160.03	161.70	166.58	174.39

Tabla (VIII.6). Energía en el late-time de la respuesta impulso del hilo patrón sintetizada con 1, 3, 5, 7 y 9 resonancias cuando es filtrada con FAR de hilos más largos.

En las tablas (VIII.5) y (VIII.6) podemos ver, de acuerdo con la discusión anterior, que la identificación es siempre posible de forma muy precisa cuando la respuesta del hilo patrón contiene menos resonancias que los FAR diseñados para los diferentes blancos. En cambio, cuando la respuesta del hilo que llega tiene más resonancias que los FAR de diferentes blancos la identificación se vuelve más difícil, observándose ya mucha menos

diferencia energética entre la salida del FAR patrón y las respuestas de otros blancos. En estos casos (7 y 9 resonancias) se observa una importante diferencia según el FAR esté diseñado para blancos más largos o más cortos. Cuando el FAR representa blancos más cortos (tabla (VIII.5)) la identificación falla ya que se obtienen energías menores en los FAR correspondientes a blancos más cortos. En cambio, en la tabla (VIII.6), correspondiente a los blancos más largos, sí se obtienen energías menores en la salida del FAR correspondiente al patrón, permitiendo la discriminación entre los distintos blancos.

La razón de esta falta de simetría reside en la respuesta en frecuencia del FAR. Cuando a la antena receptora llega una señal que posee componentes espectrales fuera del rango de discriminación del FAR y es filtrada con los FAR diseñados para blancos más cortos (resonancias desplazadas en sentido creciente), el FAR cuya respuesta en frecuencia empiece a crecer antes (en este caso el FAR patrón) amplificará más fuertemente las componentes en frecuencia fuera de su rango espectral, dando por consiguiente una mayor energía en el late-time que el resto de los FAR que presentan un crecimiento en frecuencia a partir de una frecuencia mayor al tener su rango espectral de aniquilación más amplio (aniquila resonancias de frecuencias mayores). En la tabla (VIII.6), como los FAR representan blancos más largos (resonancias desplazadas en sentido decreciente), estamos en la situación contraria, ya que es el FAR patrón el que amplifica menos los modos superiores de la respuesta recibida al tener el resto de los FAR su rango espectral de aniquilación más comprimido debido a la aniquilación de resonancias de frecuencia menor.

Una situación equivalente encontramos cuando sintetizamos la respuesta del hilo patrón con 5 resonancias y tratamos de identificarla a partir de sus primeras 1, 3, 5, 7 y 9 primeras resonancias mediante FAR sintetizados con este número de resonancias. Los resultados se muestran en las tablas (VIII.7) y (VIII.8) según los FAR representen blancos más cortos o más largos respectivamente.

FAR N° resonancias del FAR	Patrón	1 % corto	2 % corto	5 % corto	10 % corto
1	1.44 E 2	1.43 E 2	1.42 E 2	1.39 E 2	1.34 E 2
3	9.42	9.19	8.96	8.28	7.19
5	1.12 E-24	1.94 E-5	7.32 E-5	3.75 E-4	9.88 E-4
7	9.49 E-25	8.42 E-7	4.15 E-6	4.62 E-5	4.30 E-4
9	8.57 E-25	2.86 E-5	1.86 E-4	4.93 E-4	2.22 E-1

Tabla (VIII.7). Energía en el late-time de la respuesta impulso del hilo patrón sintetizada con 5 resonancias cuando es filtrada con FAR de hilos más cortos a partir de 1, 3, 5, 7 y 9 resonancias.

En concordancia con lo expuesto anteriormente, la identificación es clara cuando el número de resonancias con las que está sintetizado el FAR supera al número de resonancias de la señal. Cuando el número de resonancias del FAR es menor, la identificación es posible si se trata respecto a blancos más largos (tabla (VIII.8)) debido a que al desplazarse la zona de amplificación hacia la región de frecuencias bajas se van amplificando fuertemente los modos no aniquilados. Al contrario, la identificación no es posible si se trata respecto a blancos más cortos al tener sus FAR representativos la zona de identificación progresivamente desplazada hacia la zona de frecuencias crecientes, lo que implica que éstos amplifican menos los modos fuera de banda dando por tanto mayor energía para el blanco correcto impidiendo la correcta identificación del blanco.

FAR N° resonancias del FAR	Patrón	1 % largo	2 % largo	5 % largo	10 % largo
1	1.44 E 2	1.45 E 2	1.46 E 2	1.49 E 2	1.54 E 2
3	9.42	9.65	9.87	1.05 E 1	1.17 E 1
5	1.12 E-24	2.17 E-5	9.14 E-5	6.57 E-4	3.18 E-4
7	9.49 E-25	5.41 E-7	1.71 E-6	4.85 E-6	3.50 E-6
9	8.57 E-25	1.07 E-5	2.59 E-5	3.39 E-5	7.29 E-6

Tabla (VIII.8). Energía en el late-time de la respuesta impulso del hilo patrón sintetizada con 5 resonancias cuando es filtrada con FAR de hilos más largos a partir de 1, 3, 5, 7 y 9 resonancias.

Como conclusión de este estudio, es importante destacar el problema que esta técnica de identificación posee debido a su amplificación a altas frecuencias, que hace la identificación impredecible cuando la señal posee componentes espectrales fuera del rango de identificación en frecuencia que se usa para discriminar. En principio, sólo es posible usar un número de resonancias finito de la señal para sintetizar el FAR debido a la imprecisión que la obtención de resonancias complejas cada vez más amortiguadas conlleva y a la limitación práctica de la longitud del filtro $(2N+1)$. Por lo tanto como no se conoce a priori cuántos modos son excitados se hace necesario la existencia de un filtrado paso-baja previo a la identificación, que atenúe las componentes fuera de banda, que de no ser eliminadas, cuando sean amplificadas actúan de forma no predecible llevando a identificaciones erróneas, como ocurría en el caso del hilo cuando el blanco corresponde a un hilo más corto que el patrón. Además, y como veremos en el apartado

siguiente, el ruido siempre está presente contaminando las bandas de alta frecuencia por lo que el uso del filtrado paso-baja se hace imprescindible.

VIII.3.5 Identificación con el FAR en función del periodo de muestreo.

En este estudio de la técnica FAR nos queda comprobar el comportamiento de un parámetro, el periodo de muestreo. Resultaría interesante saber si la identificación depende del periodo de muestreo usado para poder escoger este parámetro de forma tan óptima como sea posible. De la observación de la respuesta en frecuencia (figura (8.9)) parece claro que si va a depender debido a que conforme sube el periodo, la banda de aniquilación se hace mayor, y por lo tanto la subida a altas frecuencias va a empezar posteriormente.

En la figura (8.15) se muestra el cociente entre la energía en el late-time obtenida cuando la señal es filtrada con el FAR patrón y el FAR representativo de un hilo un 5 % más corto, mientras que el cociente de energías cuando es filtrada por el FAR patrón y un FAR de un hilo un 10 % más corto se muestra en la figura (8.16). El resultado de estas gráficas muestra cuán claramente la identificación depende del periodo de muestreo, ya que para periodos de muestreo muy bajos $T < 0.01$ la identificación ni siquiera es posible, al ser el sistema incapaz de resolver entre los dos blancos (hilo patrón e hilo 5 ó 10 % más corto) aún en ausencia de ruido. Conforme el periodo de muestreo aumenta (figura (8.15)), la resolución del sistema aumenta igualmente, llegando a alcanzar un máximo sobre $T = 0.16$ para luego iniciar un leve descenso hasta el máximo periodo de muestreo posible dado por el teorema de Shannon ($T \approx 0.2$). Un comportamiento idéntico puede apreciarse en la figura (8.16), aunque en esta el máximo valor se alcanza un poco antes ($T = 0.15$) para descender ligeramente hasta $T = 0.2$.

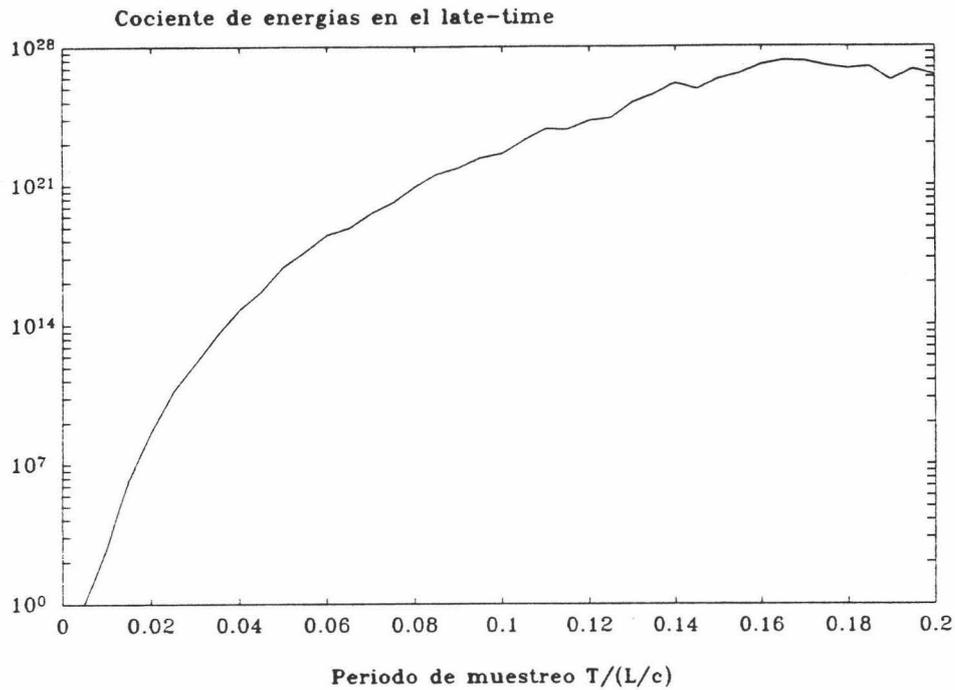


Figura (8.15). Cociente de energías en el late-time entre la señal filtrada por el FAR patrón y el FAR de un hilo 5 % más corto en función de periodo de muestreo.

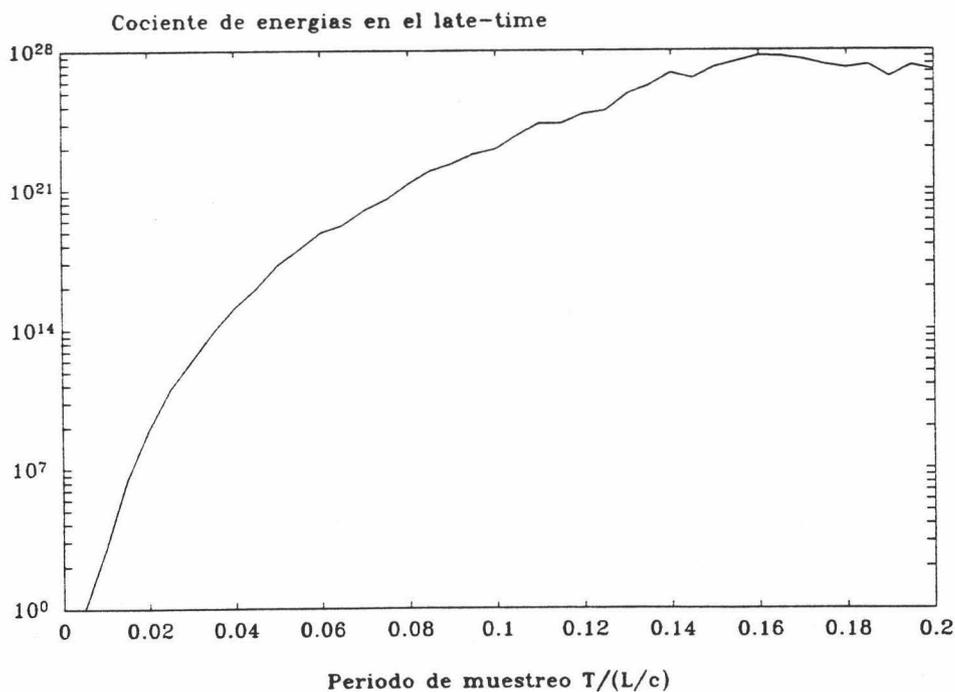


Figura (8.16).- Cociente de energías en el late-time de la señal patrón por el FAR del hilo patrón y el FAR del hilo un 10 % más corto en función del periodo de muestreo.

La interpretación de estas gráficas se puede entender muy bien si observamos el patrón de ceros del FAR en el plano Z. La función de transferencia del FAR viene dada por la ecuación (6.22). Al representar los ceros de este polinomio en el plano Z variando el periodo de muestreo T obtenemos las figuras (8.17) para $T = 0.08$, (8.18) para $T = 0.02$, (8.19) para $T = 0.15$ y (8.20) para $T = 0.2$. La observación de estas figuras pone de manifiesto que para periodos de muestreo bajos $T = 0.02$ los ceros están muy agrupados, por lo que la resolución del sistema será mínima cuando los polos de la señal de llegada cambien de forma leve. Ya para periodos de muestreo $T = 0.08$ y $T = 0.15$ la resolución del sistema es mucho mayor, detectándose un cambio de energías cuando los polos de la señal no coincidan con ceros del FAR patrón. Cuando el periodo de muestreo es muy alto ($T = 0.2$ figura (8.20)) la resolución vuelve a disminuir debido a que los ceros correspondientes al último modo están muy cercanos.

Estas gráficas también nos permiten entender muchas características del FAR puestas de manifiesto anteriormente. Como la función de transferencia $K(z)$ (ecuación (6.22)) evaluada en el círculo unidad del plano Z nos da la respuesta en frecuencia del FAR, la magnitud de ésta puede hallarse sin más que multiplicar para cada punto del círculo unidad, la distancia de todos los ceros a dicho punto. El comportamiento de amplificación a alta frecuencia queda así claro, ya que a partir del último polo ven aumentada las distancias a los ceros, y por lo tanto la magnitud aumenta conforme nos desplazamos hacia frecuencias altas. También es fácil entender desde este punto de vista una característica que señalábamos en el apartado anterior que consistía en que la identificación corría a cargo principalmente del último modo no aniquilado. Teniendo en cuenta que a la frecuencia de este último modo el residuo no aniquilado por el último cero es mucho más amplificado al ser mayor la distancia al resto de los ceros, y que el desplazamiento de la posición correcta para este modo es mucho mayor (y por tanto el residuo), se justifican las gráficas (8.10) y (8.11).

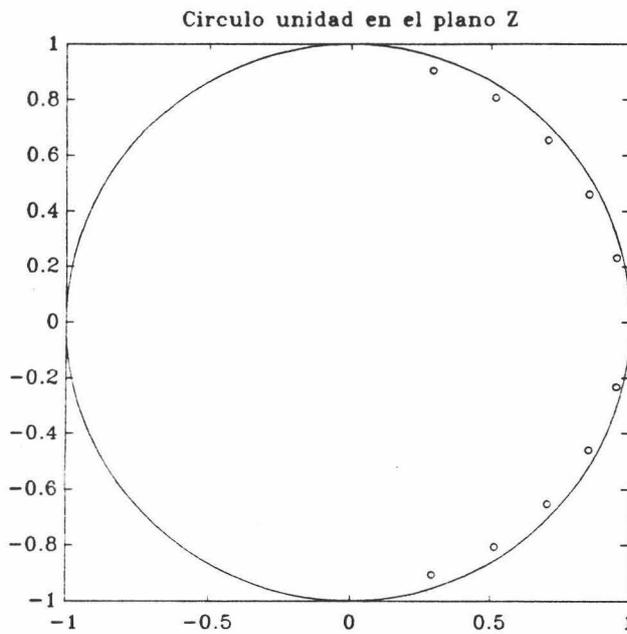


Figura (8.17). Patrón de ceros del FAR del hilo patrón en el plano Z para un periodo de muestreo de 0.08.

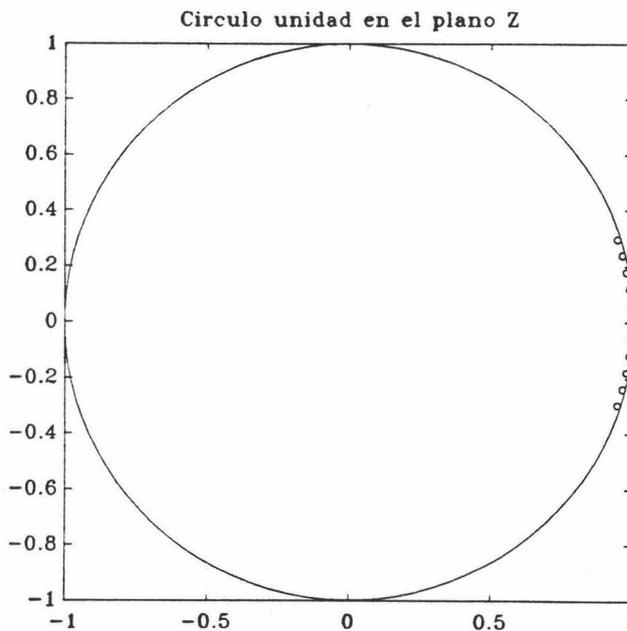


Figura (8.18).- Patrón de polos del FAR del hilo patrón en el plano Z para un periodo de muestreo de 0.02.

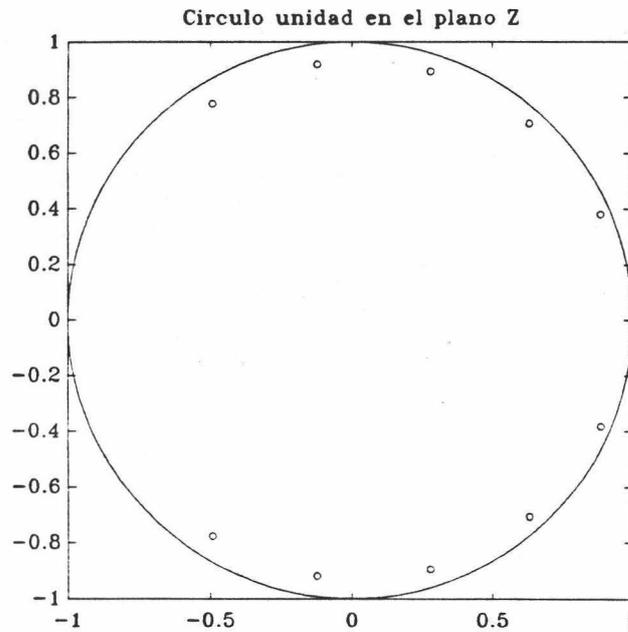


Figura (8.19). Patrón de ceros del FAR del hilo patrón en el plano Z para un periodo de muestreo de 0.15.

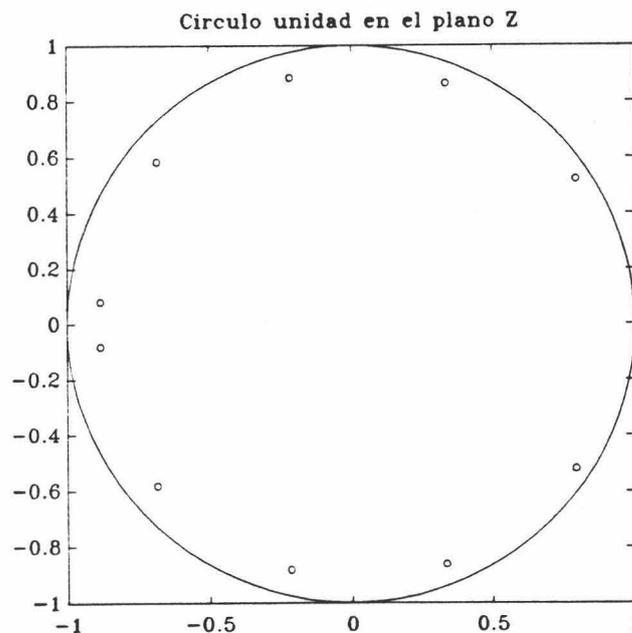


Figura (8.20). Patrón de polos del FAR del hilo patrón en el plano Z para un periodo de muestreo de 0.2.

En conclusión, hay que llegar a un compromiso en la elección del periodo de muestreo para equilibrar tanto la necesidad de resolución del FAR (T alto) con la necesidad de un número suficiente de datos con los que podamos llevar a cabo un procesado previo de la señal (T bajo) cuando ésta esté contaminada con ruido. Precisamente de la identificación de este tipo de estructuras cuando las ondas recibidas estén contaminadas con ruido nos ocuparemos en el siguiente apartado.

VIII-4. IDENTIFICACION MEDIANTE EL FAR CUANDO LA RESPUESTA DEL BLANCO ESTE CONTAMINADA CON RUIDO.

VIII.4.1 Definición de parámetros.

En esta sección vamos a estudiar la identificación con el FAR cuando la respuesta del blanco está contaminada con ruido aditivo, blanco y Gaussiano, es decir, la respuesta impulso del hilo recibida por nuestro receptor vendrá dada por:

$$s(t) = h(t) + e(t) \quad (8.26)$$

donde $h(t)$ viene dada por (8.23) y $n(t)$ es el ruido aditivo que la contamina. Al ser el ruido blanco, contamina por igual todas las bandas de frecuencia objeto de análisis, siendo imposible la eliminación de éste por un simple filtrado. Para estudiar la influencia del ruido en la capacidad de identificación, es necesario un parámetro que nos defina la relación señal-ruido. Para señales que decaen el tiempo, es conveniente la utilización del % de ruido de pico [CAR93] definido como:

$$\% \text{ ruido} = \frac{\text{Máxima amplitud ruido}}{\text{Máxima amplitud de la señal}} \times 100 \quad (8.27)$$

De esta forma, un ruido de un 10 % de pico significa que ninguna de sus componentes excede el 10 % del valor máximo de la señal sin ruido.

Otro parámetro útil sería aquel que nos sirva para cuantificar la discriminación. Como nuestro objetivo es identificar entre el hilo patrón y diversos hilos más largos y más cortos, nos interesa medir de alguna forma la diferencia de energías en el late-time entre la respuesta filtrada por el FAR patrón y la del FAR representativo de otros blancos alternativos. Esta relación puede expresarse mediante el cociente entre la energía en el late-time de la señal filtrada por el FAR patrón E_c y la energía en el late-time de la señal filtrada por el FAR incorrecto E_i , que representa otro blanco distinto al patrón. A este cociente lo denominaremos parámetro de discriminación (DP):

$$DP = \frac{E_c}{E_i} \quad (8.28)$$

Cuando no haya ruido $DP = 0$, indicando una identificación perfecta de la respuesta patrón. Cuando haya ruido, el valor de DP no será nulo ya que la respuesta del blanco no será totalmente aniquilada por el FAR, aunque si queremos que haya discriminación habrá de ser menor que la unidad ya que un $DP > 1$ significa que la energía de salida por el FAR incorrecto es menor y por lo tanto el sistema identificaría erróneamente la respuesta del hilo patrón como procedente de un hilo más largo o más corto. Interesa, pues, que el valor de DP sea menor que la unidad y lo más pequeño posible para hacer más clara la identificación del blanco patrón.

Si convenimos que para una identificación clara $DP \leq 0.5$, lo que significa que la energía de salida por el FAR incorrecto es al menos el doble de la energía de salida por el FAR correcto, obtenemos que el sistema identificará a partir del valor de DP siguiendo la siguiente tabla:

DP = 0	Identificación perfecta (caso ideal).
DP ≤ 0.5	Identificación precisa del blanco patrón.
0.5 < DP ≤ 1	Zona dudosa. El sistema no identifica al blanco de procedencia.
DP > 1	Identificación errónea.

Una vez definidos los parámetros que nos van a permitir estudiar la discriminación en presencia de ruido, pasamos a estudiar el comportamiento del sistema mediante simulación numérica. Esta simulación se hace en las siguientes condiciones:

- 1) Sintetizamos la respuesta impulso del hilo patrón según (8.23) con un periodo de muestreo de $T = 0.08$ generando 150 datos con las cinco primeras resonancias (la inclusión de más resonancias no será necesaria por los filtrados paso-baja posteriores que se llevarán a cabo) para diferentes orientaciones del blanco ($0^\circ < \theta < 90^\circ$),
- 2) Sintetizamos varios FAR con las cinco resonancias utilizadas para el hilo, uno correspondiente al patrón y otros correspondientes a hilos 1 %, 2 %, 5 % y 10 % más cortos, al ser los hilos más cortos las longitudes que peor discrimina el FAR según se dedujo en el apartado VIII.3.4.
- 3) Contaminamos la respuesta impulso del hilo patrón sintetizada en 1) con ruido aditivo, blanco y Gaussiano para diferentes valores de % de ruido de pico (65, 40, 20, 12, 7) según se definió en la ecuación (8.27). La simulación se hace usando un generador de números aleatorios distribuidos en forma gaussiana con 500 semillas distintas para hacerlo independiente de la elección de ésta en una simulación tipo Montecarlo.

- 4) A continuación se procede a la identificación usando el esquema de la figura (8.21):

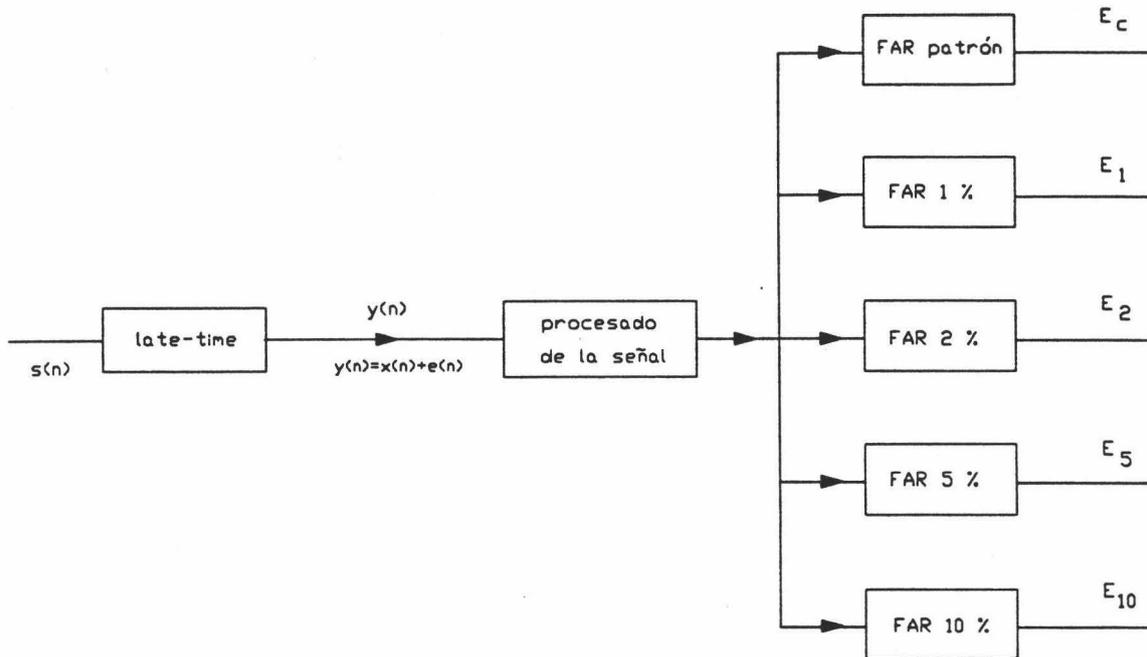


Figura (8.21). Esquema del proceso de identificación del hilo patrón. A la salida se calcula la energía de la señal filtrada.

Como se observa en dicha figura, a la respuesta impulso ruidosa muestreada del hilo patrón $s(n)$ se le separa la porción del late-time $y(n)$, y a continuación es filtrada por FAR correspondientes al hilo patrón y un 1 %, 2 %, 5 % y 10 % más cortos para computar la energía de salida en cada caso. A continuación estudiamos el valor del parámetro DP definido en (8.28), siendo E_i en cada caso E_1 , E_2 , E_5 y E_{10} . De esta forma, calculando el valor de DP para diferentes ruidos de pico podemos estudiar la influencia del ruido en la identificación del hilo patrón respecto a blancos muy parecidos (hilo 1 % más corto) y menos parecidos (10 % más corto).

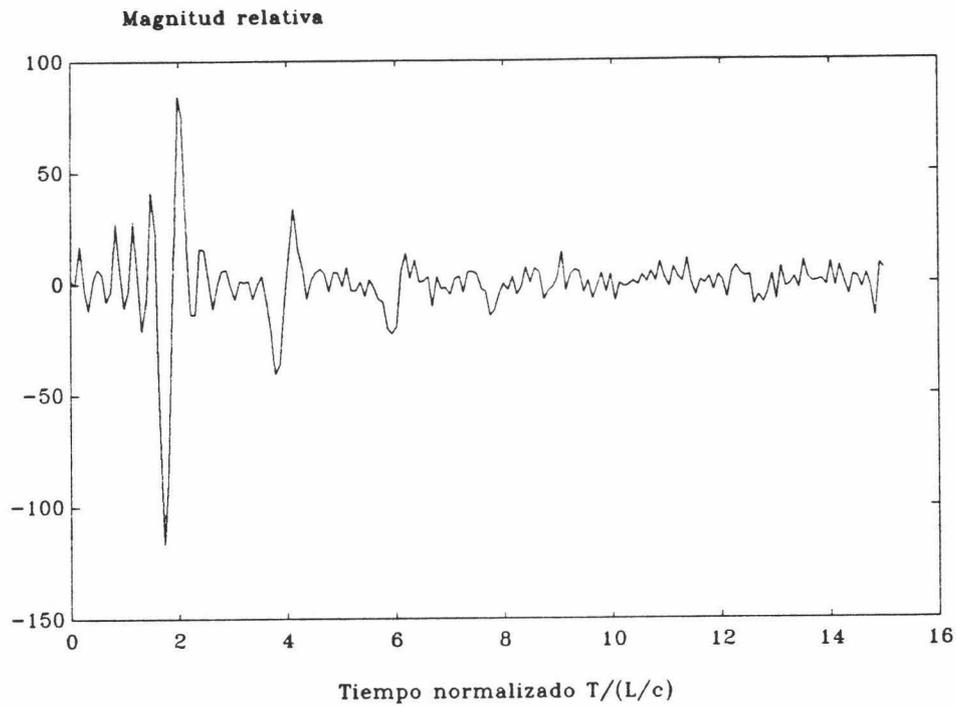


Figura (8.22). Respuesta impulso del hilo patrón a 30° contaminada con ruido aditivo, blanco y gaussiano de un 20 % de pico.

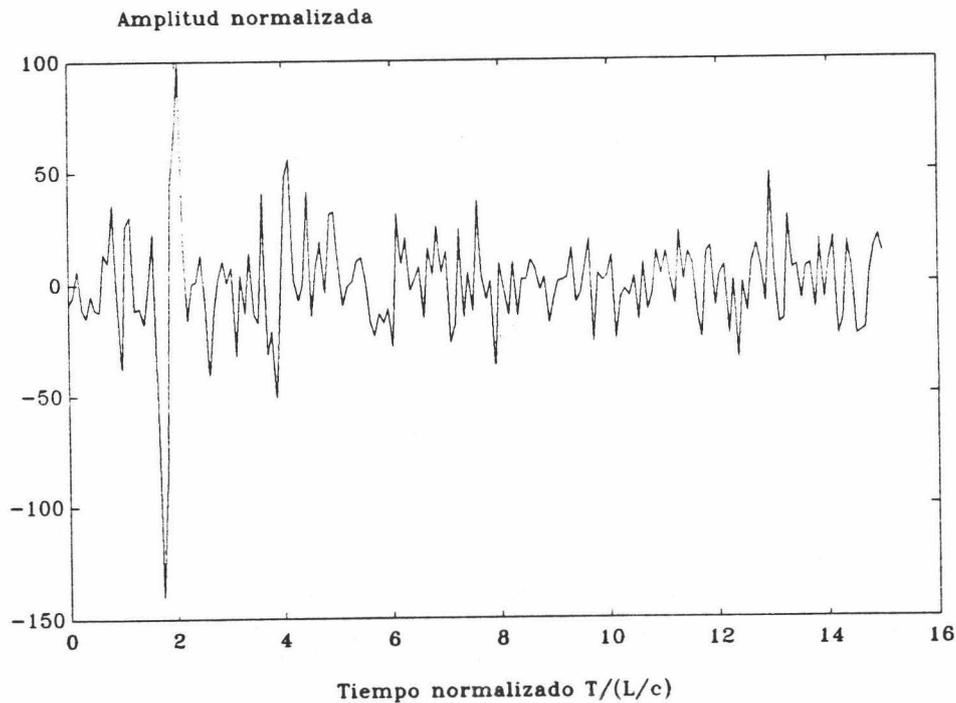


Figura (8.23). Respuesta impulso del hilo patrón a 30° contaminada con ruido aditivo, blanco y gaussiano de un 65 % de pico.

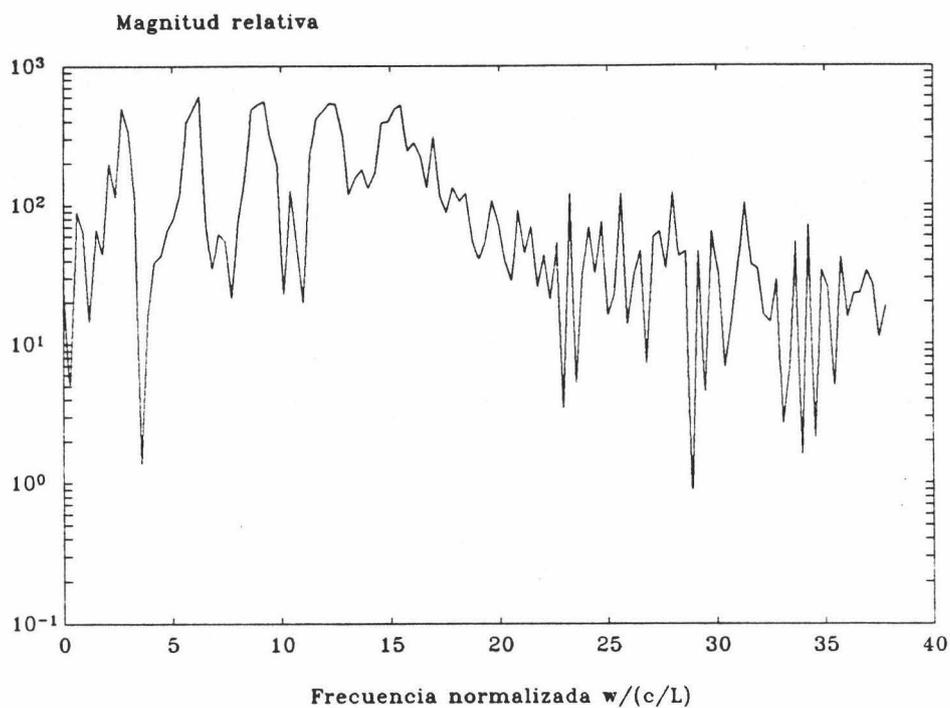


Figura (8.24). Espectro de energía de la respuesta impulso del hilo patrón a 30° contaminada con ruido aditivo, blanco y gaussiano de un 20 % de pico.

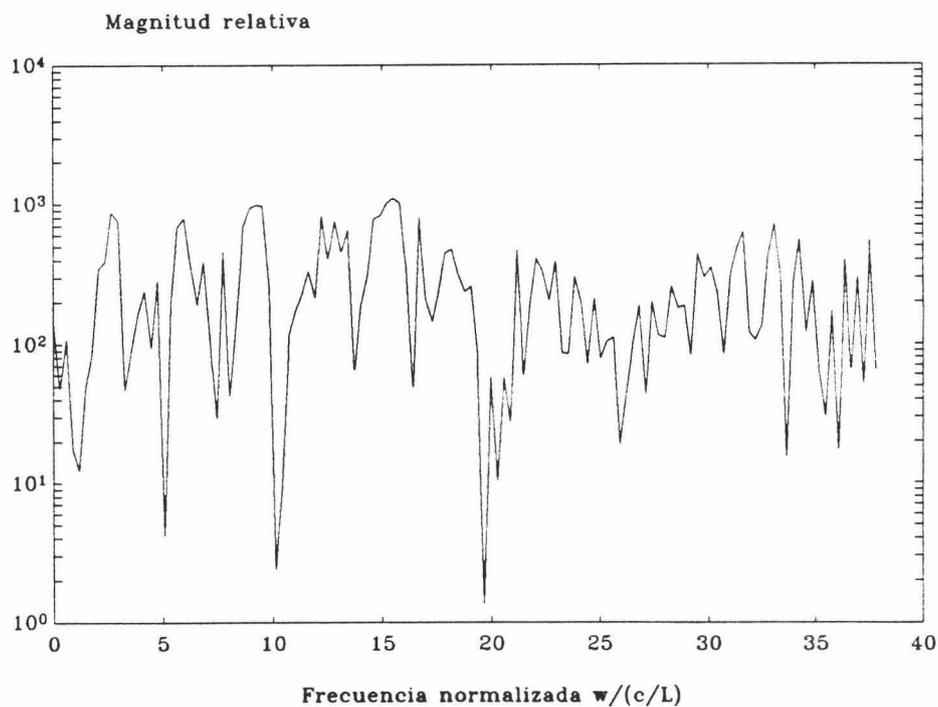


Figura (8.25). Espectro de energía de la respuesta impulso del hilo patrón a 30° contaminada con ruido aditivo, blanco y gaussiano de un 65 % de pico.

VIII.4.2 Identificación mediante el FAR.

A continuación procedemos a estudiar la capacidad de identificación del FAR por sí sólo, sin ningún procesado previo, cuando la respuesta impulso del hilo patrón está contaminada con ruido. Esta respuesta impulso cuando está contaminada con ruido de un 20 % de pico y de un 65 % de pico se muestran en las figuras (8.22) y (8.23). En ellas podemos observar, si las comparamos con (8.1), como las componentes del ruido aditivo han distorsionado la forma de onda. Los espectros de energía correspondientes se muestran en las figuras (8.24) y (8.25). Análogamente podemos observar, si las comparamos con el caso no ruidoso (figura (8.25)), como el ruido ha perturbado la forma del espectro, quedando las resonancias naturales cada vez más oscurecidas por el nivel del ruido a medida que éste aumenta. Además, ha incluido componentes de alta frecuencia

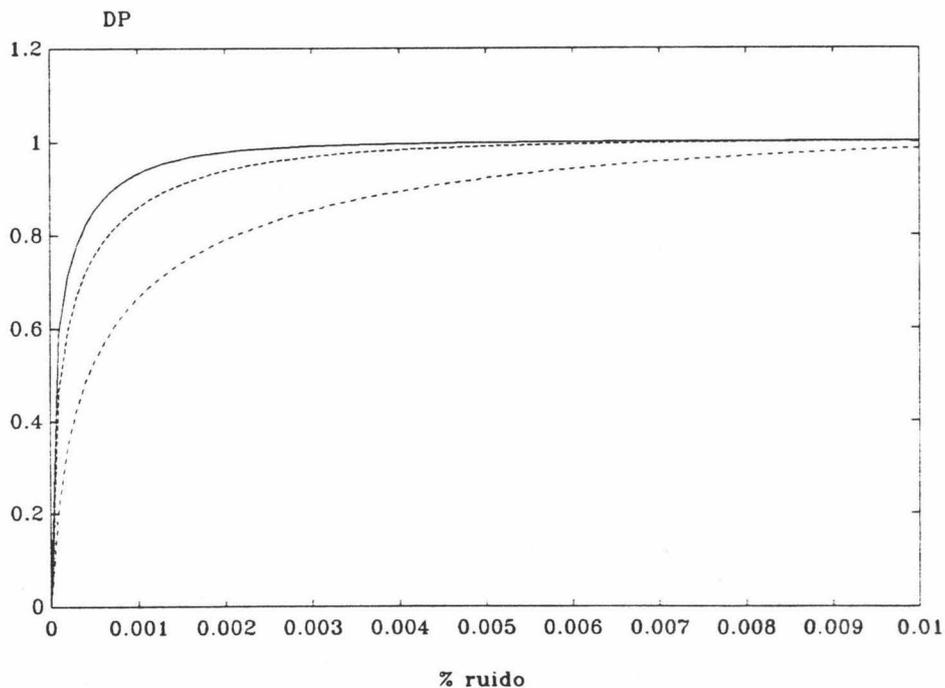


Figura (8.26). Parámetro de discriminación en función del % de ruido añadido cuando la señal es filtrada por los FAR de hilos más cortos según la figura (8.21).

a las que el FAR es muy sensible. Por ello no es de extrañar que la discriminación si únicamente filtramos con el FAR sea imposible, incluso cuando el nivel de ruido sea muy bajo, ya que la presencia de éste introduce una componente aleatoria en la señal filtrada que dará mayor o menor energía dependiendo de su magnitud en la zona de frecuencias altas. En la figura (8.26) podemos ver el parámetro DP en función del % de ruido de pico cuando la señal es filtrada por el FAR patrón y el FAR representativo de hilos 1 %, 2 %, 5 % y 10 % más cortos. En dicha figura podemos observar que incluso una pequeña adición de ruido produce un aumento del valor de DP, dificultando la discriminación. Cuando el nivel de ruido es tan sólo del 0.01 % de pico la discriminación es imposible incluso para el caso del hilo un 10 % más corto. Vemos, pues, que identificar usando sólo el FAR es imposible, pues cualquier pequeño ruido que tenga la onda dispersada por el blanco impedirá la identificación de éste.

VIII.4.3 Identificación usando ventanas y filtros paso-baja.

Para hacer posible la discriminación, según se desprende del apartado VIII.4.2 hemos de eliminar las componentes de alta frecuencia (ruido fuera de banda) que introducen una cantidad de energía aleatoria procedente de la amplificación de estas bandas mediante el FAR. Primeramente, usamos las técnicas clásicas basadas en la utilización de ventanas y filtros paso-baja descritas en el apéndice B. Un esquema del proceso de identificación se muestra en la figura (8.27). En este proceso la señal, tras serle extraído el late-time se convoluciona con la función ventana o con la respuesta impulso del filtro paso-baja para eliminar la contribución de las altas frecuencias para posteriormente pasar por una serie de FAR representativos de blancos alternativos (hilos de longitudes más cortas del patrón).

Es de esperar que el filtrado paso-baja atenúe el problema asociado a la amplificación de las componentes de alta frecuencia del ruido. Para que este filtrado sea

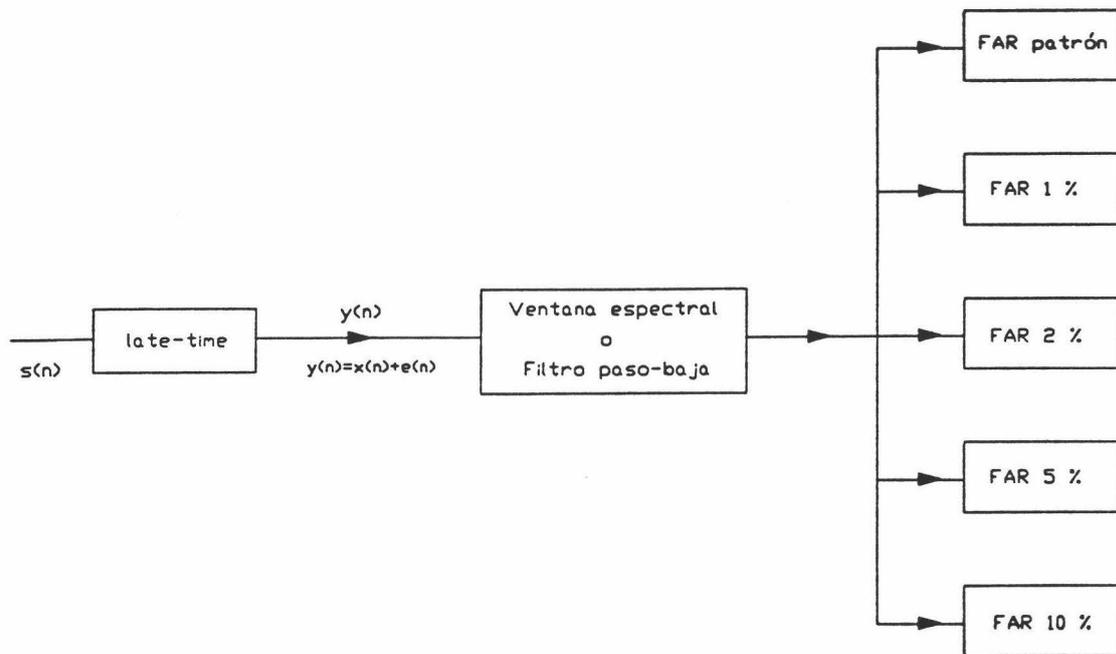


Figura (8.27). Esquema del proceso de identificación de la respuesta del hilo patrón usando ventanas o filtros paso-baja previos al FAR.

efectivo hemos de elegir aquellas ventanas o filtros que sean capaces de proporcionar una caída suficiente en frecuencia (atenuación en la banda de stop) sin importarnos conseguir un mayor ancho de transición, y además elegir sus parámetros de una forma adecuada.

Entre las ventanas que nos pueden proporcionar la caída suficiente en frecuencia tenemos la ventana Gaussiana y la ventana de Kaiser-Bessel. La elección de los parámetros de las ventanas se hace según el procedimiento descrito en el apéndice B, apartado B.5 a partir de la señal sin ruido. En el caso de la ventana gaussiana, el barrido es unidimensional, variando la anchura gaussiana (inverso de la desviación estándar). Los resultados obtenidos del valor de DP en función de la anchura gaussiana cuando el late-time de la respuesta impulso del hilo a 30° (orientación a la que los modos son excitados de forma muy parecida y por lo tanto los resultados son aplicables en general) es filtrada por los diferentes FAR, según el esquema (8.27), se muestra en la figura (8.28).

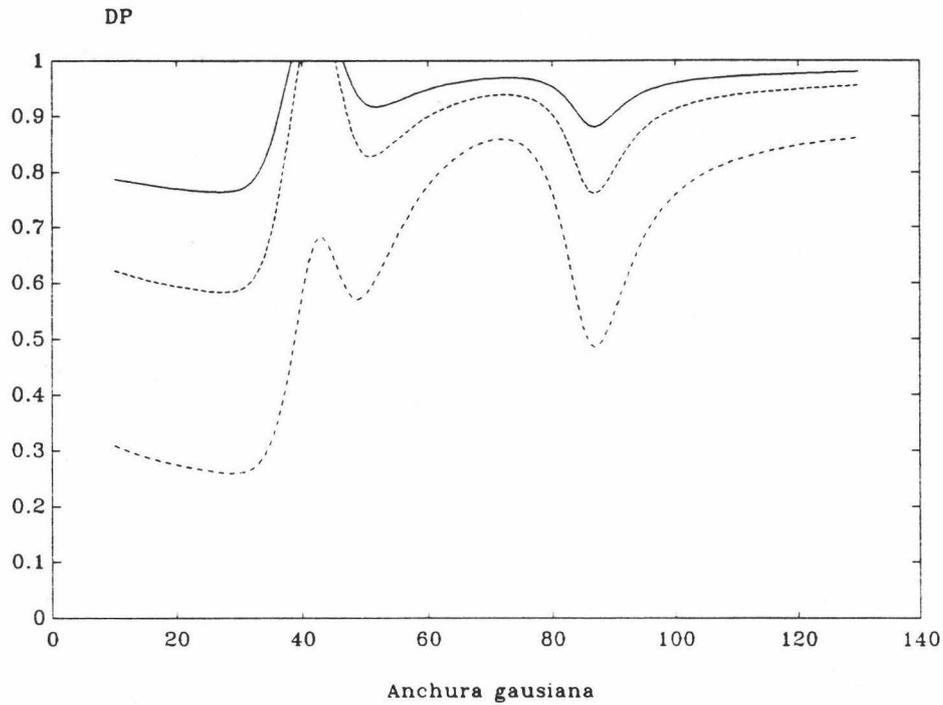


Figura (8.28). Elección del parámetro anchura gaussiana para la identificación con el FAR.

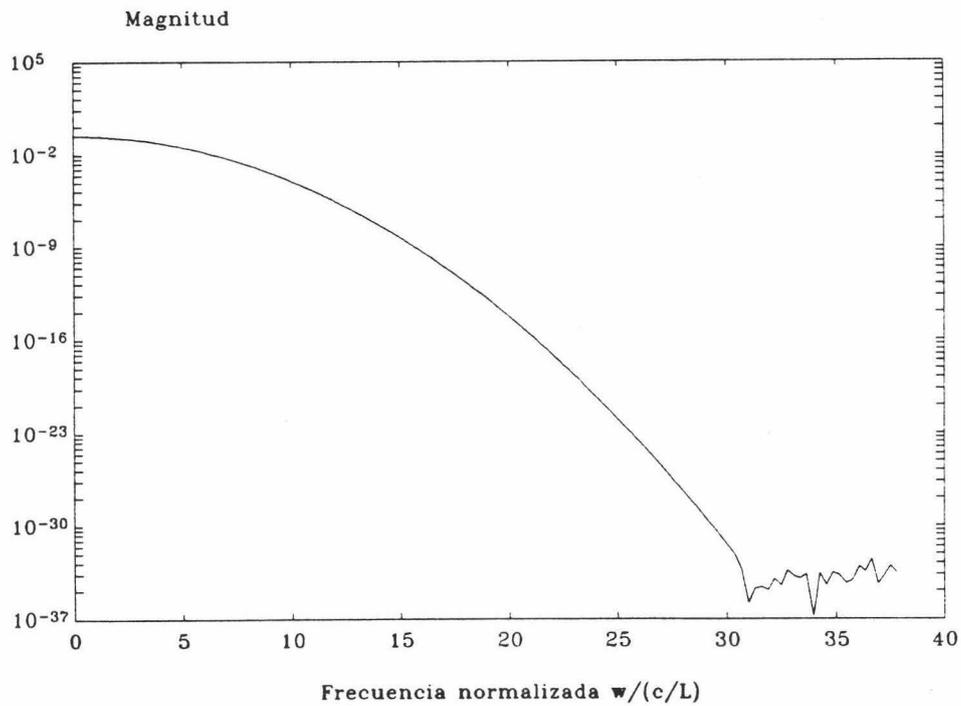


Figura (8.29). Espectro de energía de una ventana gaussiana de anchura 27. Obsérvese la caída en frecuencia en la forma típica de un espectro paso-baja.

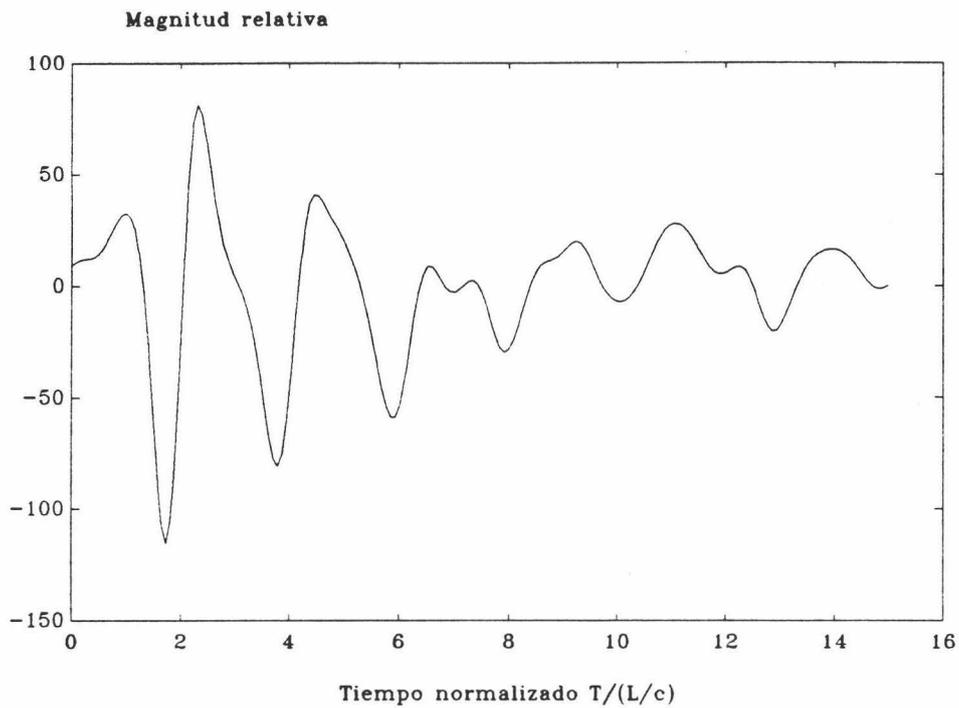


Figura (8.30). Respuesta impulso del hilo a 30° con un 20 % de ruido de pico filtrada con una gaussiana de anchura 27.

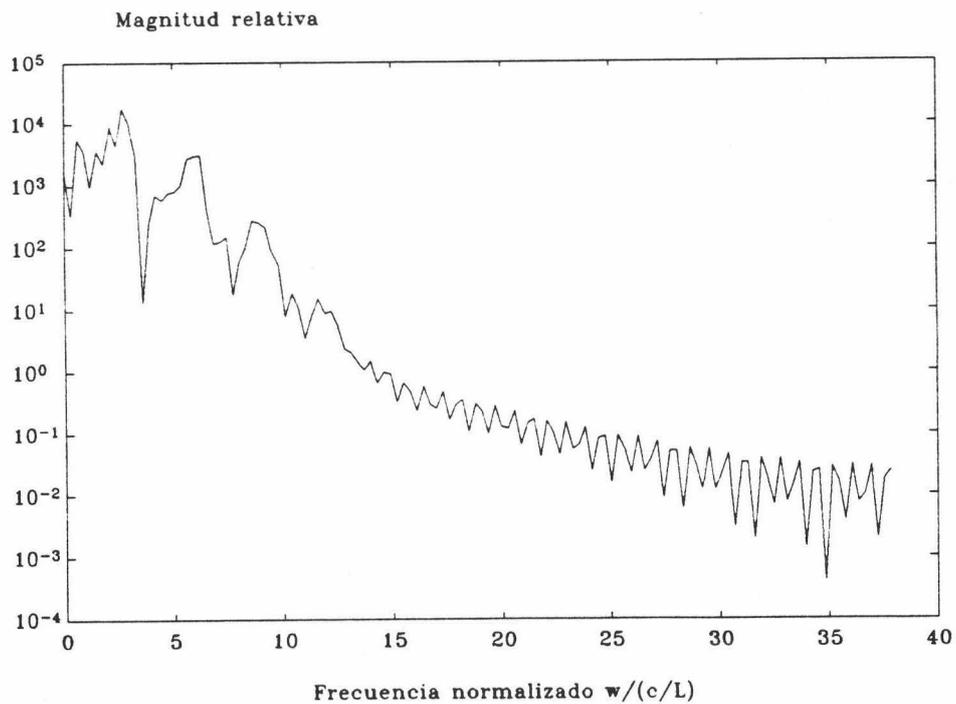


Figura (8.31). Espectro de energía de la señal de la figura (8.22) filtrada por una ventana gaussiana de anchura 27.

En esta figura puede observarse que hay un rango óptimo entre 20 y 35 que es el que se utilizará para sintetizar la gaussiana e identificar la señal ruidosa. La forma de actuar de esta ventana se puede entender fácilmente si observamos la forma de su espectro de energía, representado en la figura (8.29) para una gaussiana de anchura 27. Este es un espectro típico paso-baja con una importante caída en frecuencia que elimina el ruido en las frecuencias altas haciendo posible la posterior identificación.

Para observar la forma de actuar del suavizado por la gaussiana, se muestra en la figura (8.30) la respuesta impulso del hilo a 30° con un ruido de pico de un 20 % (figura (8.22)) filtrada por una gaussiana de anchura 27, y en la figura (8.31) el espectro de energía de la señal filtrada. En esta última figura podemos ver claramente, si la comparamos con (8.24), el efecto del filtrado paso-baja de la gaussiana, que ha reducido de forma importante las componentes de alta frecuencia de la señal ruidosa, lo que va a permitir una posterior identificación.

La forma de actuar de otros tipos de ventanas sería análoga, aunque sólo aquellas que presenten una atenuación en frecuencia suficientemente importante permitirán la identificación. Entre éstas tenemos la ventana de Kaiser-Bessel, que posee un parámetro β (ecuación (B.23)) que da la relación entre la atenuación de la banda de stop y el ancho del lóbulo principal, mientras que la duración de la ventana controla la frecuencia de corte. En este caso, pues, los parámetros que tenemos son dos, β y el orden de la ventana, por lo que el barrido habría de ser bidimensional. En la figura (8.32) se muestra el valor del parámetro de discriminación DP obtenido con la respuesta impulso del hilo sin ruido en función del orden de la ventana cuando el parámetro β es elegido de forma óptima en cada caso. Podemos observar que para órdenes mayores de 20 se obtiene un valor de DP casi constante si el β es elegido de forma adecuada. Si elegimos para filtrar la señal uno de los órdenes óptimos $N = 27$ que se corresponde con un $\beta = 27$, obtenemos un espectro de energía de la ventana como el que se muestra en la figura (8.33).

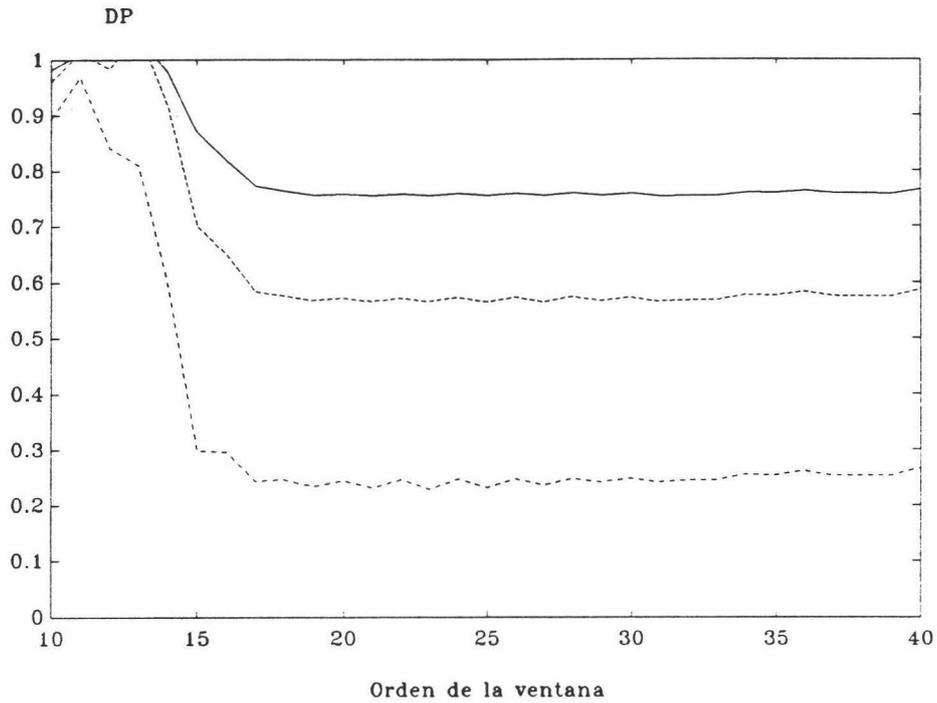


Figura (8.32). Elección del orden óptimo de la ventana de Kaiser-Bessel con el parámetro β óptimo en cada caso para la identificación con el FAR.

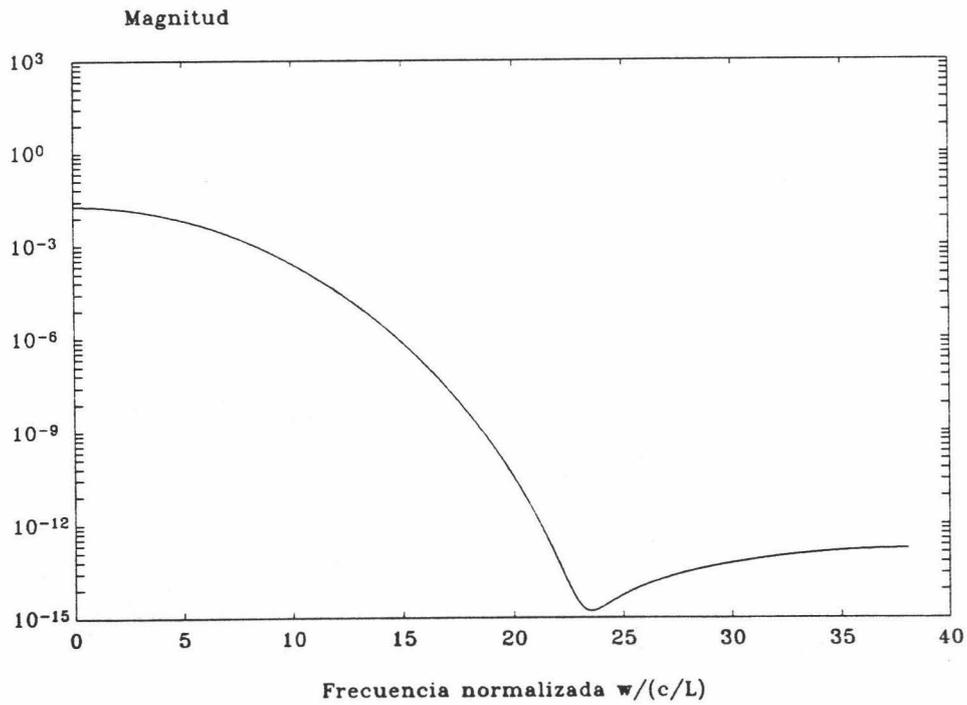


Figura (8.33). Espectro de energía de la ventana de Kaiser-Bessel de orden 27 y parámetro $\beta = 27$.

Esta forma del espectro es característico de un filtro paso-baja. Si filtramos con esta ventana el late-time de la respuesta impulso del hilo con un 20 % de ruido de pico (dado en la figura (8.22)) obtenemos una señal cuyo espectro es el mostrado en la figura (8.34). En este caso, como ocurría en el caso del filtrado por la gaussiana, han sido eliminadas las altas frecuencias correspondientes principalmente al ruido.

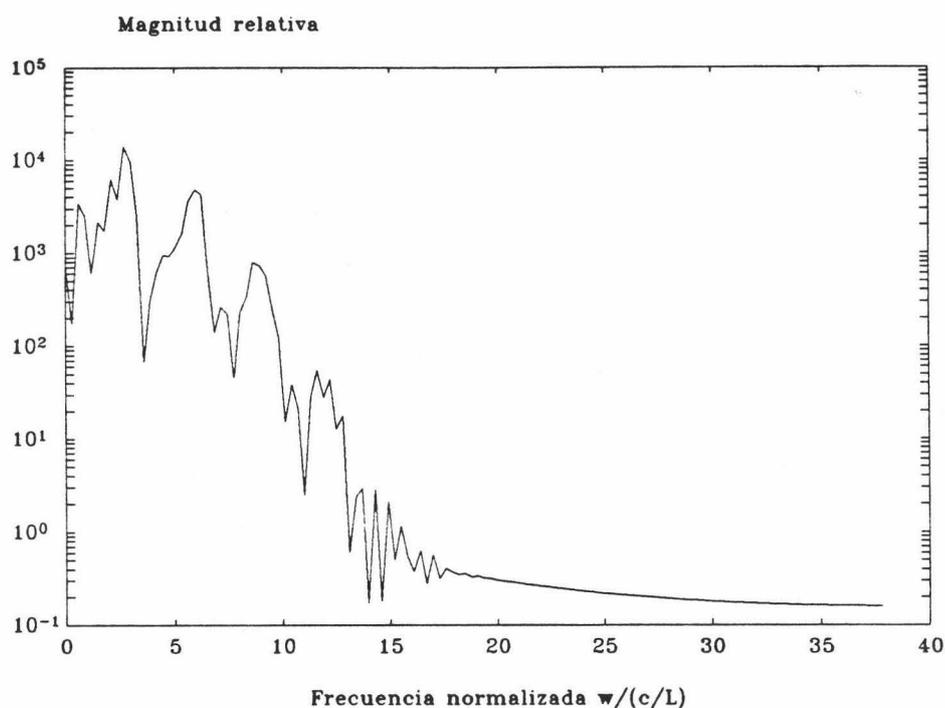


Figura (8.34). Espectro de energía de la respuesta impulso del hilo a 30° contaminada con un 20 % de ruido de pico filtrada por una ventana de Kaiser de $N = 27$ y $\beta = 27$.

Además de ventanas para filtrar la señal se pueden utilizar propiamente filtros digitales paso-baja. Estos pueden ser, como se comenta en el apéndice B, de respuesta finita (FIR) e infinita (IIR). En el caso de los filtros FIR diseñados usando ventanas tendríamos dos parámetros que variar para buscar el FIR óptimo, la frecuencia de corte y el orden del filtro (duración del FIR) que controla el ancho de transición y la atenuación en la banda de stop. Eligiendo el diseño con ventanas de Kaiser, para la respuesta impulso del hilo patrón sin ruido representamos el valor de DP en función de la frecuencia de corte del FIR para el orden óptimo en cada caso (figura (8.35)).

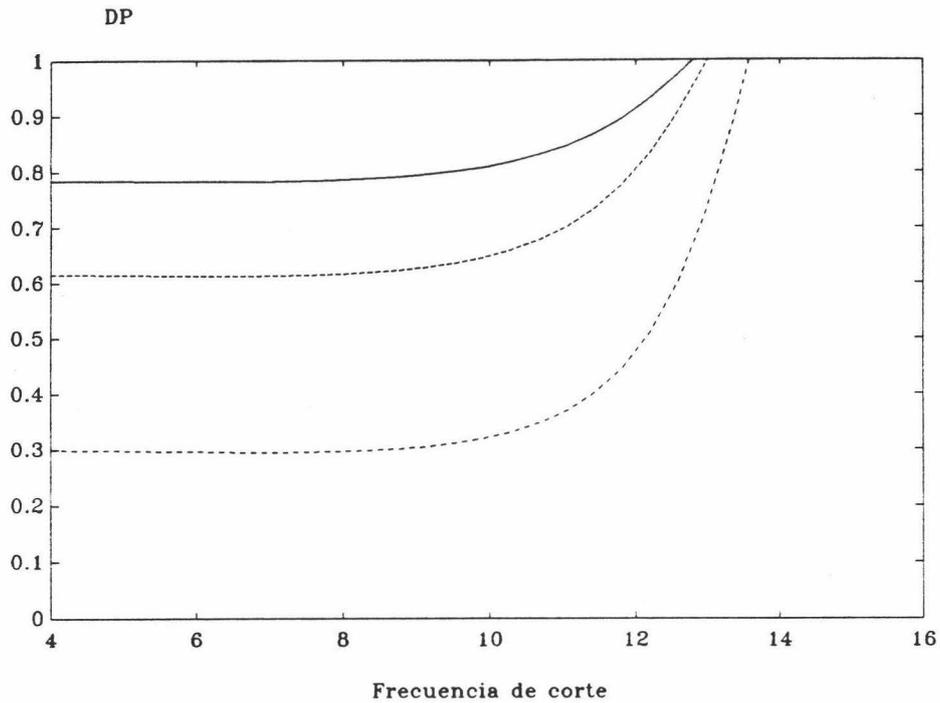


Figura (8.35). Elección de la frecuencia de corte óptima del filtro digital FIR paso-baja con el orden del filtro N elegido de forma óptima para cada caso.

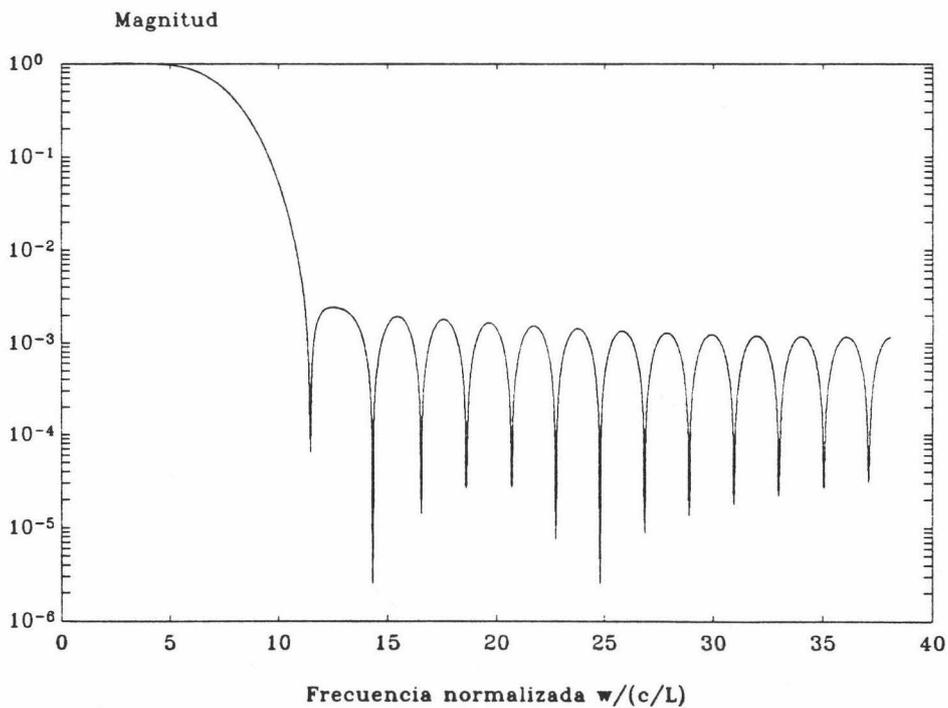


Figura (8.36). Respuesta en magnitud del filtro FIR paso-baja diseñado con ventana de Kaiser-Bessel con frecuencia de corte 7.6 y orden $N = 37$.

En esta figura podemos observar que la frecuencia de corte puede elegirse en un rango amplio (entre 4 y 10) sin más que elegir un orden adecuado del filtro. Tomando una de las óptimas, la frecuencia de corte de 7.6 y el orden óptimo para esta frecuencia de corte que resulta ser $N = 37$, obtenemos un filtro cuya respuesta en magnitud está representada en (8.16). Si la respuesta ruidosa del hilo de la figura (8.22) es filtrada por este FIR obtenemos una señal con las altas frecuencias atenuadas, como puede observarse de la figura (8.37) que representa el espectro de energía de la señal filtrada.

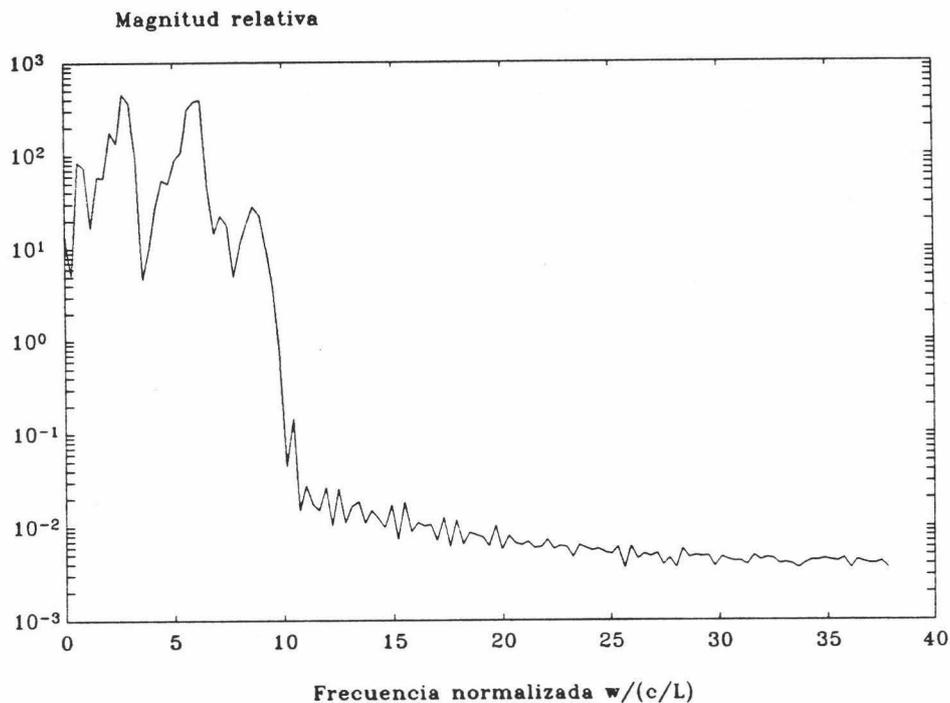


Figura (8.37). Espectro de energía de la señal de la figura (8.22) filtrada por un filtro FIR con ventana de Kaiser de duración $N = 37$ y frecuencia de corte 7.6.

En este caso el espectro de la señal presenta un corte más abrupto en la frecuencia de corte del filtro, de forma que las componentes en frecuencia más allá de esta frecuencia de corte han sido bastante atenuadas.

Por último, el caso de los filtros de respuesta impulso infinita tipo Chebyshev se ilustra en las figuras (8.38), (8.39) y (8.40). En este caso tenemos tres parámetros, la

frecuencia de corte, el orden del filtro y el rizado permitido en la banda de paso (ecuación (B.34)). Este último parámetro no influye apenas en la identificación, por lo que puede elegirse de forma estándar en 0.5 por lo que el barrido para conseguir los parámetros óptimos será también en este caso bidimensional, variando la frecuencia de corte y el orden del filtro N que controla el ancho de la banda de transición y la atenuación de la banda de stop. En la figura (8.38) se representa el valor del parámetro de discriminación obtenido para la señal sin ruido en función de la frecuencia de corte del filtro para el orden óptimo en cada caso.

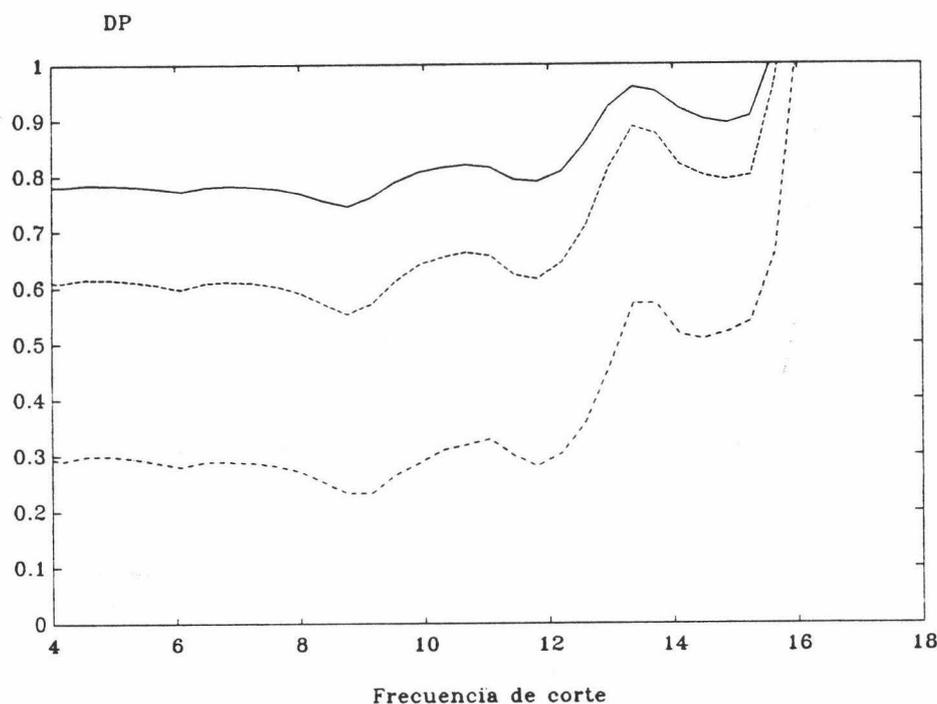


Figura (8.38). Elección de la frecuencia de corte óptima del filtro digital IIR Chebyshev con el orden del filtro N elegido de forma óptima en cada caso.

Se puede observar que el parámetro de discriminación DP presenta mínimos para unas frecuencias de corte determinadas, que caen alrededor de 6, 9, 12 y 15. Si comparamos estos valores con los de las resonancias del hilo (tabla (VIII.1)) vemos que los mínimos van apareciendo en frecuencias de corte correspondientes a las frecuencias de las resonancias naturales del hilo, indicando de esta forma las posibles bandas de paso del

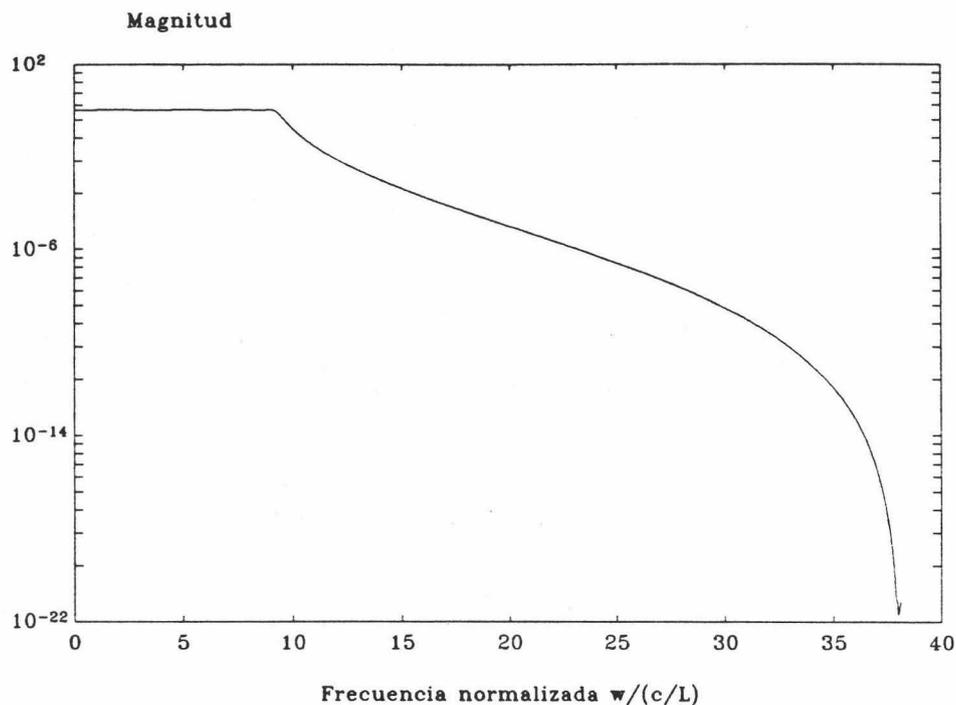


Figura (8.39). Respuesta en magnitud de un filtro IIR Chebyshev con frecuencia de corte 9.1 y orden óptimo para esta frecuencia $N = 8$.

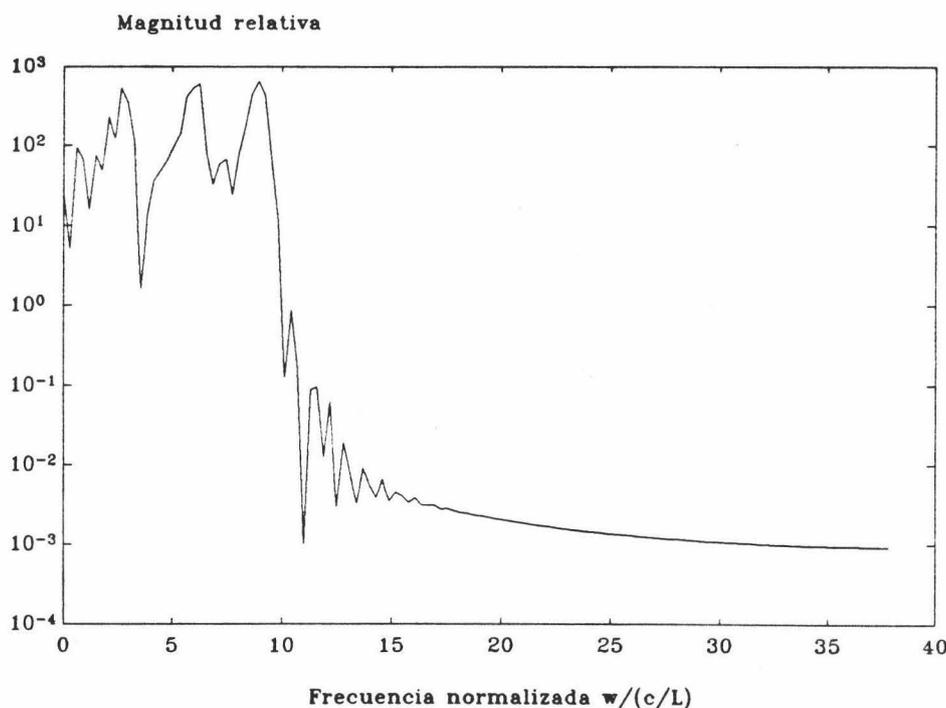


Figura (8.40). Espectro de energía de la respuesta impulso del hilo a 30° contaminada con un 20 % de ruido de pico filtrada con el filtro IIR mostrado en la figura (8.39).

filtro correspondientes a las zonas de frecuencia donde hay señal.

Una ilustración de la respuesta en magnitud de los filtros IIR Chebyshev se muestra en la figura (8.39) para una frecuencia de corte 9.1 y un orden $N = 8$. Puede observarse, si las comparamos con los espectros de las ventanas (figuras (8.29) y (8.33)) o de la respuesta en magnitud de los filtros FIR (figura (8.36)), la mayor caída en frecuencia y atenuación de la banda de stop de estos filtros. Por ello no es de extrañar que el espectro de energía del late-time del hilo a 30° contaminado con un 20 % de ruido de pico (figura (8.22)) filtrado con filtros IIR presente un corte más abrupto y una atenuación mayor en la banda de stop, como puede observarse en la figura (8.40) para el caso del filtrado por el filtro representado en la figura (8.39).

Una vez obtenidos de forma óptima los parámetros de las ventanas, procedemos a la simulación numérica en las condiciones que se establecieron en el apartado VIII.4.1. Contaminando la respuesta del hilo a diferentes orientaciones con ruido blanco y Gaussiano a diferentes valores de % de la máxima amplitud de la señal (% de ruido de pico) y haciéndola pasar por las diferentes ventanas y filtros paso-baja para filtrarlos posteriormente con los FAR representativos de diferentes blancos (hilos 1, 2, 5 y 10 % más cortos) según el esquema de la figura (8.27), obtenemos los valores de DP que se muestran en las figuras (8.41) a (8.44). En la figura (8.41) tenemos el valor de DP obtenido cuando el procesado previo se lleva a cabo con una gaussiana. En esta figura podemos observar, a diferencia con (8.26), que la identificación ya es posible a elevados valores de % de ruido de pico. Como puede observarse, ahora la identificación con hilos un 5 % y un 10 % más cortos es siempre posible en el rango de % de ruido estudiado, en el que el valor de DP permanece casi constante. Sin embargo, para blancos muy parecidos (hilo 1 % y 2 % más cortos) y según el criterio dado en VIII.4.1, la identificación no es clara, incluso a bajos niveles de % de ruido aditivo.

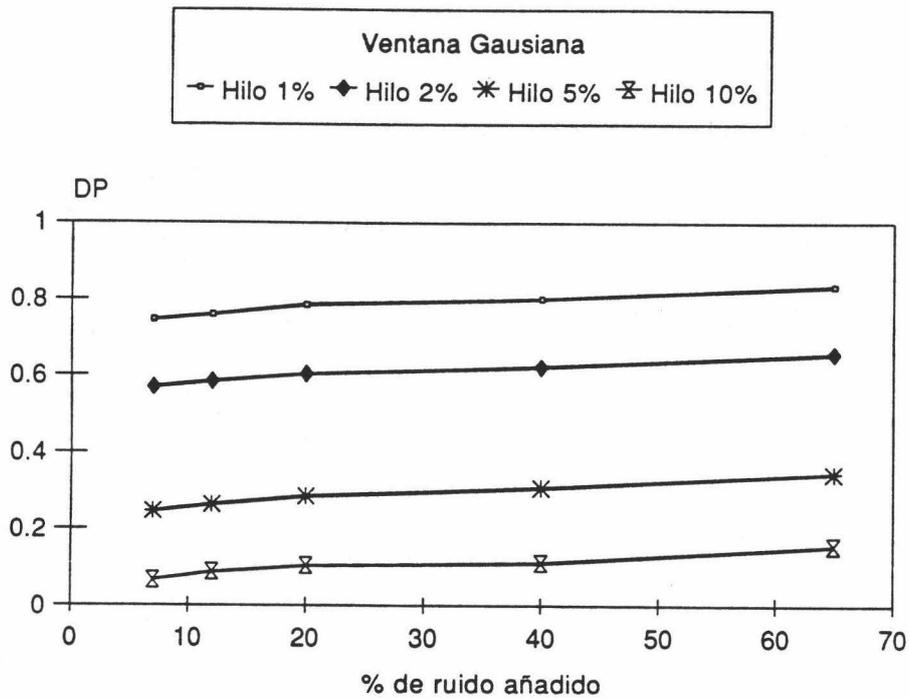


Figura (8.41). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico cuando la respuesta ruidosa del hilo es filtrada con una ventana gaussiana.

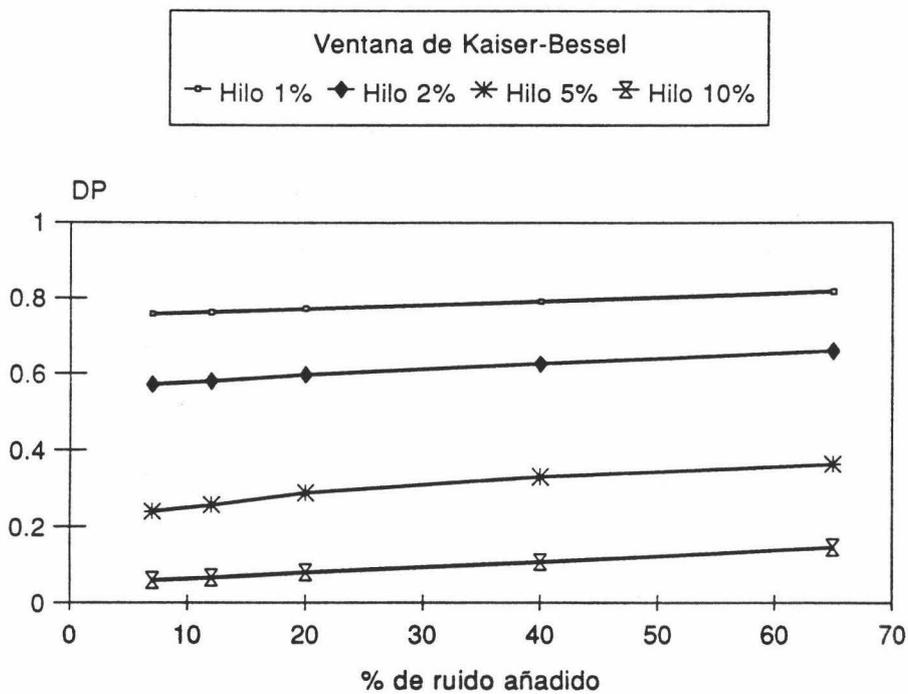


Figura (8.42). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico cuando la respuesta ruidosa del hilo es filtrada con una ventana de Kaiser.

Idénticas consideraciones cabe hacer cuando la respuesta ruidosa del hilo es filtrada con ventanas de Kaiser (figura (8.42)). Puede observarse que los resultados obtenidos son casi idénticos a los proporcionados por el filtrado con una gaussiana, debido a que ambas ventanas han sido elegidas de forma óptima. También pueden observarse pocas variaciones cuando la respuesta impulso ruidosa del hilo patrón es filtrada con los filtros FIR diseñados con ventanas de Kaiser, según se muestra en la figura (8.43). En esta gráfica se puede observar que el valor de DP permanece sin grandes cambios con el % de ruido, siendo la identificación del hilo patrón posible para hilos un 5 % y 10 % más cortos. Si comparamos estos resultados obtenidos con los filtros FIR con los obtenidos usando filtros IIR Chebyshev (figura (8.44)), vemos que en estos últimos el valor de DP es un poco más bajo, y por lo tanto mejor es la identificación del hilo patrón, aunque tampoco en este caso se consigue una discriminación clara con blancos parecidos.

En conclusión, puede decirse que usando las técnicas clásicas con la forma de elección óptima de parámetros que se ha descrito en este apartado podemos conseguir una sustancial mejora en la capacidad de identificación de los FAR en ambiente ruidoso para blancos relativamente distintos (hilos 5 % y 10 % más cortos), que queda claro si lo comparamos con los resultados obtenidos sin procesado previo (figura (8.26)). Sin embargo, aunque la identificación del hilo patrón con hilos 5 y 10 % más cortos es posible para el rango de % de ruido de pico estudiado, para blancos muy parecidos (hilo 1 % y 2 % más cortos) la identificación no es clara, poniendo de manifiesto la necesidad de un procesado adicional que será estudiado en los siguientes apartados. En cuanto a los diferentes tipos de ventanas y filtros estudiados, no hay grandes diferencias entre ellos para la capacidad de identificación del FAR debido a la forma óptima de elección de parámetros que se ha llevado a cabo, siendo de éstos el caso de los filtros IIR Chebyshev con el que se obtiene una mejor identificación.

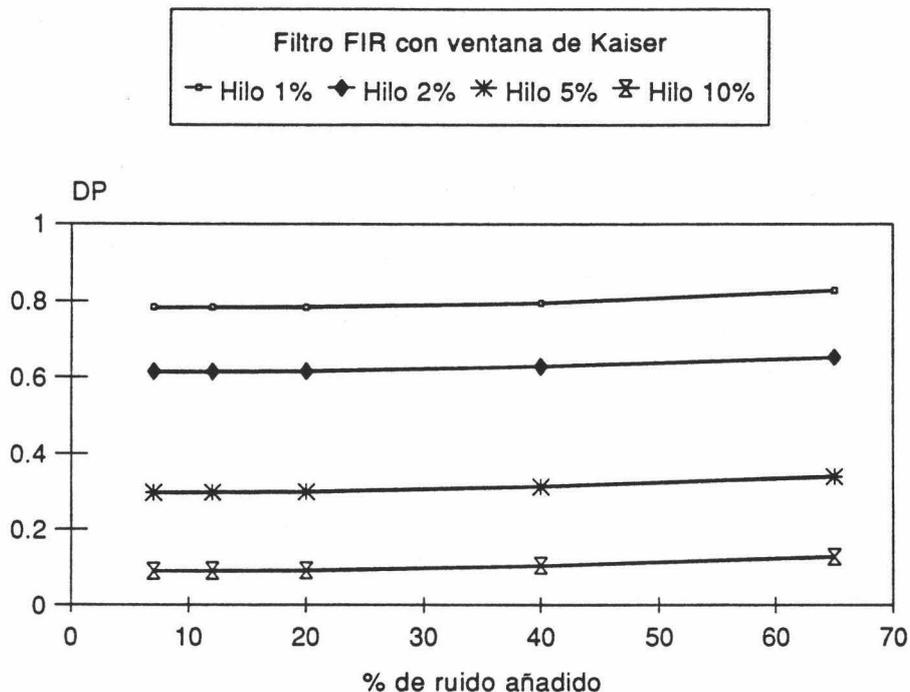


Figura (8.43). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico cuando la respuesta ruidosa del hilo es filtrada con un filtro FIR con ventana de Kaiser.

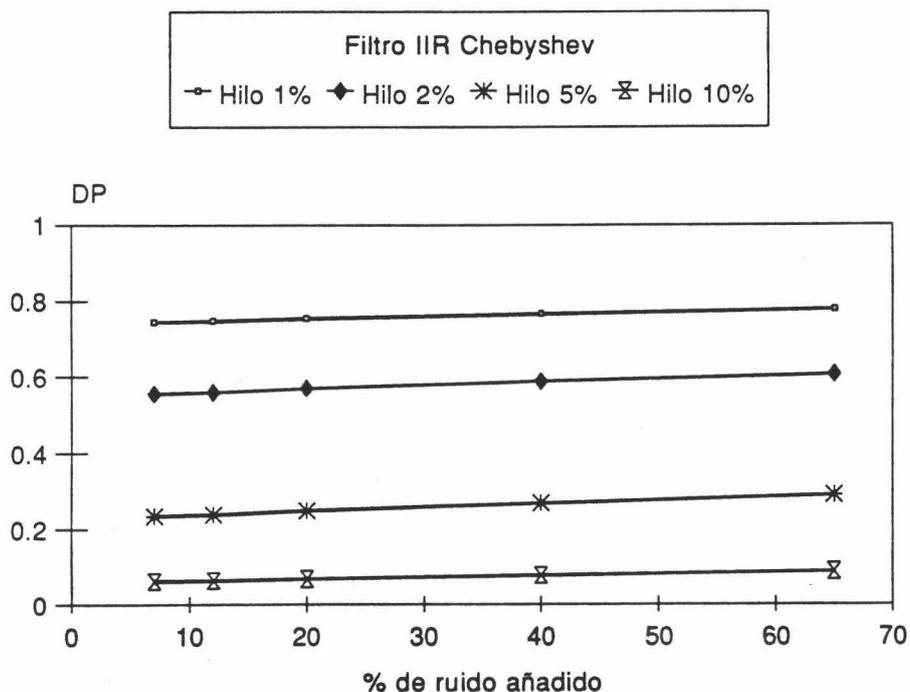


Figura (8.44). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico cuando la respuesta ruidosa del hilo es filtrada con un filtro IIR Chebyshev.

VIII.4.4 Identificación mediante el algoritmo de mejora de la señal SVD-Toeplitz y filtrado paso-baja.

Con las técnicas clásicas, aunque se consigue una mejora sustancial en el identificación, no es posible distinguir entre blancos parecidos. En estos casos, es necesario someter a la señal a un procesado previo basado en el algoritmo de mejora de la señal descrito en el capítulo VII. Un esquema del proceso de identificación se muestra en la figura (8.45).

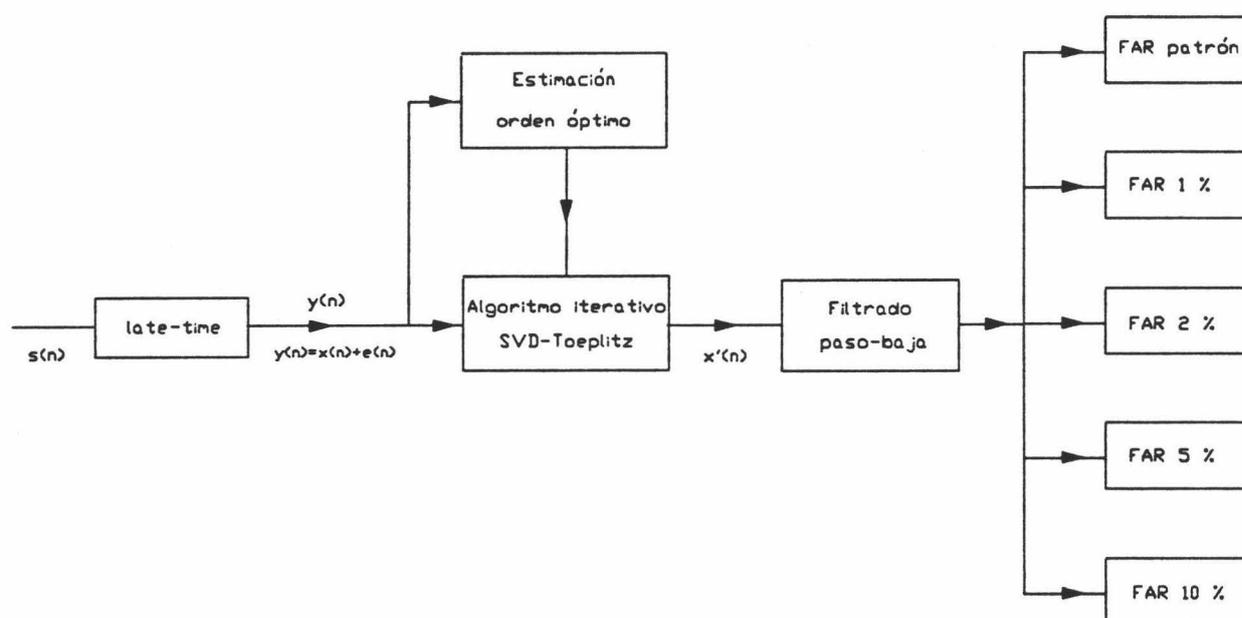


Figura (8.45). Esquema del proceso de identificación de la respuesta del hilo patrón usando mediante el procesado previo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja.

En este caso a la respuesta ruidosa del hilo patrón se le estiman el orden óptimo de la señal (número de vectores singulares con los que la reconstrucción es más exacta) (figura (7.1)), y una vez estimados éste, es sometida al algoritmo SVD-Toeplitz con y sin división en subsecuencias. En este caso, al usar un número pequeño de datos (150 datos) el orden de decimación no puede ser muy elevado, ya que éste está acotado por el tamaño

de las submatrices $Y_{k,m}$ (ecuación (7.28)) cuyo número de filas y columnas ha de ser mayor que el orden estimado en la señal. Además dicho orden debe elegirse de forma que la eliminación de ruido sea efectiva, es decir, no se puede sobrepasar un orden de decimación 2 ó 3 para que la combinación de los primeros vectores propios expanda el subespacio de la señal y no el del ruido. En las simulaciones llevadas a cabo se observa que con un orden de decimación 3 y para 150 datos, los resultados se degradan, por lo que sólo se incluirán aquí los obtenidos sin decimación y para un orden de decimación dos.

Para obtener una identificación efectiva del hilo patrón con este algoritmo es necesario filtrar paso-baja la señal, de forma que se trate de un algoritmo compuesto SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja, según se puso de manifiesto en el capítulo VII, apartado VII.6. En este proceso pueden usarse ventanas o filtros digitales paso-baja, aunque como según vimos en el apartado anterior los resultados mejores se obtenían con filtros digitales IIR Chebyshev, será este tipo de filtrado el que usaremos. Primeramente se han de elegir la frecuencia de corte y el orden del filtro de forma óptima. El proceso de elección se detalla en el apartado VII.6 del capítulo VII. Partiendo del late-time de la señal sin ruido, en este caso la respuesta impulso del hilo a 30° no ruidosa, se aplica el algoritmo SVD-Toeplitz sin subsecuencias y con decimación de orden 2 para varios órdenes de la señal (4, 6, 8 y 10), correspondientes a cada una de las posibilidades de elección de este orden (número de vectores principales) en el caso del hilo. Para cada una de estas cuatro señales de salida con diferentes órdenes se buscan la frecuencia de corte y el orden óptimos del filtro paso-baja IIR que será usado en la posterior identificación del hilo patrón según el número de vectores singulares usados para reconstruir la señal.

Los parámetros del filtro paso-baja dependerán, como es lógico, del orden que se use del filtro de aniquilación de resonancias. Como se comentó en el capítulo VII, para incrementar la resolución en la identificación pueden usarse FAR de órdenes superiores,

construidos de forma que tengan ceros dobles, triples correspondientes a las resonancias que se han de eliminar. El máximo orden del FAR viene limitado por el número de datos disponibles de la respuesta del hilo, ya que tras el proceso de convolución deben quedar disponibles suficientes datos para computar la energía de salida. En las simulaciones llevadas a cabo a partir de las respuestas del hilo de diferentes órdenes (4, 6, 8 y 10) anteriores, es el FAR de orden 3 (FAR triple), que posee ceros triples en las resonancias a eliminar, con el que se obtienen los mejores resultados.

Usando por consiguiente a partir de ahora el FAR triple, incluimos como ejemplo del tipo de gráficas obtenidas en el proceso de elección de los parámetros óptimos del filtro paso-baja, las figuras (8.45) a (8.48), en las que se muestran el valor del parámetro DP en función de la frecuencia de corte del filtro IIR cuando el orden es el óptimo para cada una de las frecuencias, para un orden de la señal de 4, 6, 8 y 10 respectivamente y no hay división en subsecuencias. Para el caso de decimación de orden 2 se obtienen resultados muy parecidos que no se muestran por simplicidad. Para obtener las gráficas mostradas se ha usado la respuesta impulso del hilo a 30° , lo cuál no resta generalidad ya que es una orientación en la que los últimos modos están un poco más excitados que los primeros por lo que serán más energéticos (figura (8.25)), y por lo tanto la frecuencia de corte óptima de los filtros estará cerca de los últimos modos del hilo, englobando de esta forma los casos de orientaciones mayores de 45° en los que los modos más energéticos son los de frecuencias más bajas y por supuesto los de orientaciones menores de 30° en los que los últimos modos son más fuertemente excitados. Si comparamos las gráficas (8.46) y (8.49) puede observarse que las frecuencias de corte óptimas (mínimos del parámetro de discriminación) caen precisamente en las frecuencias de las últimas resonancias de la respuesta impulso del hilo (alrededor de 9, 12 y 15), indicando claramente que las bandas de paso del filtro incluyen las zonas espectrales donde hay señal.

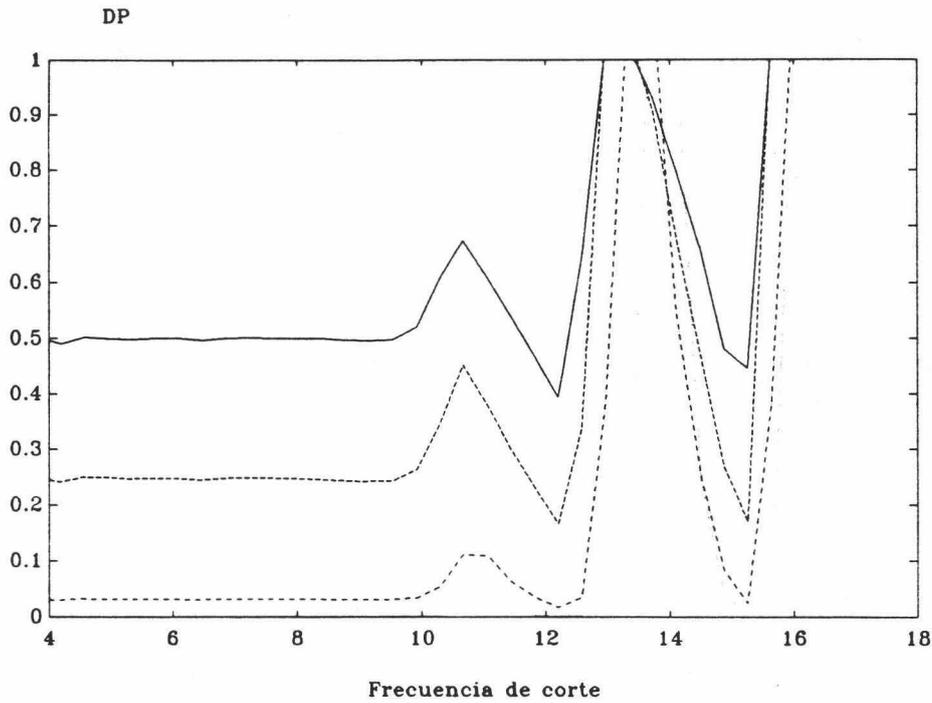


Figura (8.46). Elección de la frecuencia de corte óptima del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 2.

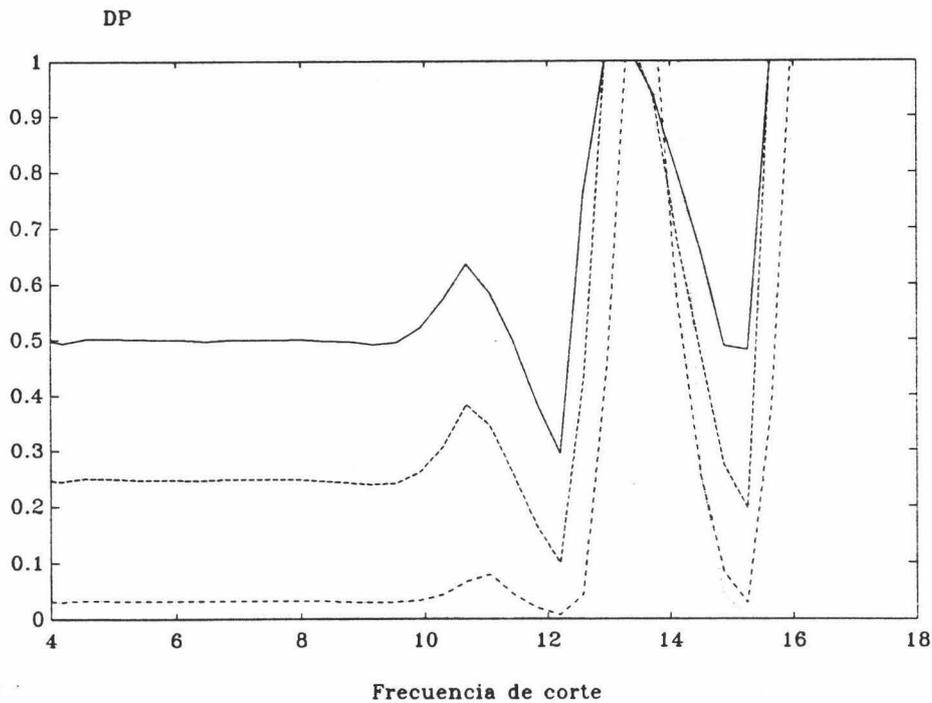


Figura (8.47). Elección de la frecuencia de corte óptimo del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 3.

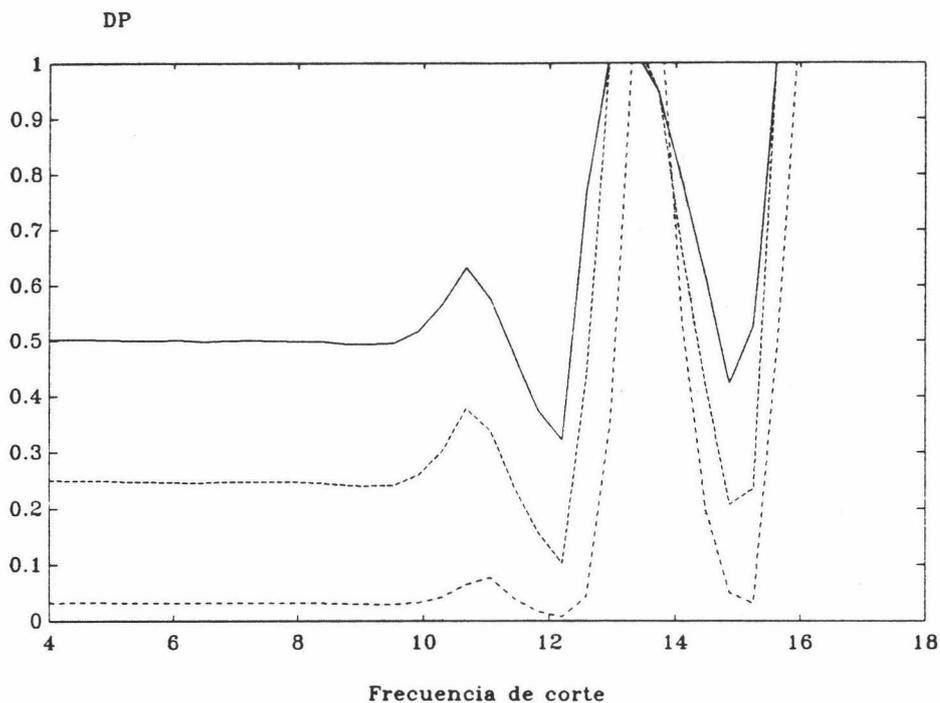


Figura (8.48). Elección de la frecuencia de corte óptima del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 4.

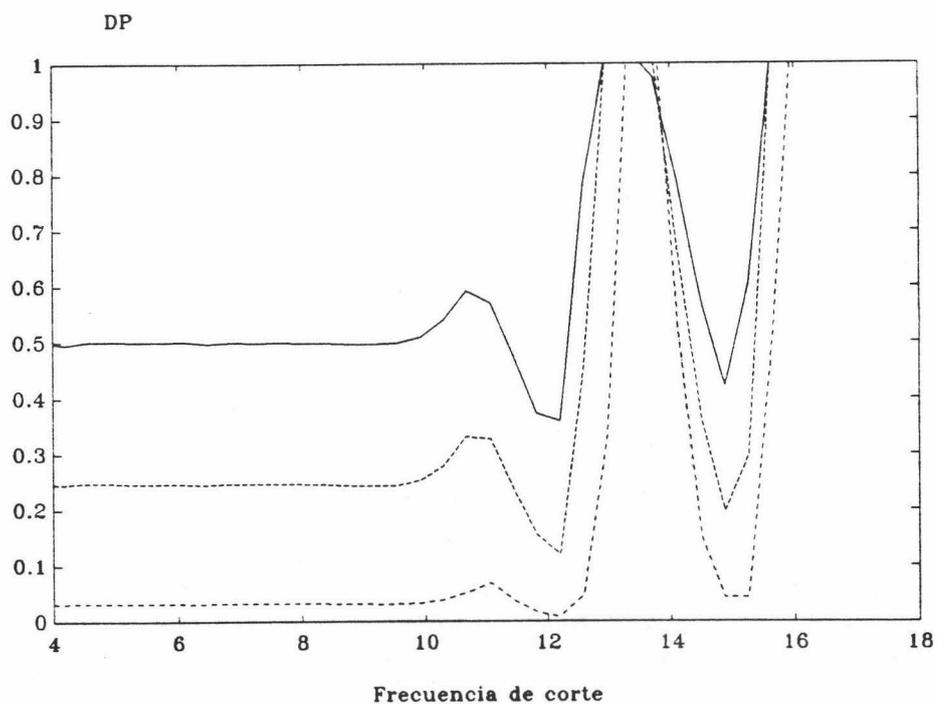


Figura (8.49). Elección de la frecuencia de corte óptimo del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 5.

Además, observando estas gráficas se puede ver la gran similitud existente entre ellas, por lo que los parámetros de los filtros apenas variarán con el número de vectores singulares usados para estimar la señal. Esta característica es lógica ya que la adición de vectores singulares adicionales podrán incluir nuevos modos del hilo pero no han de modificar las bandas de paso, en las que estos nuevos modos estarán incluidos debido a que los posibles modos dominantes expandidos por los primeros vectores singulares en unas orientaciones corresponderán a los modos de frecuencias bajas y en otras a los de altas.

Una vez elegidos los filtros paso baja adecuados se procede a la identificación para distintos niveles del % de ruido de pico, según se muestra en la figura (8.45). Primeramente la respuesta ruidosa del hilo se somete a un proceso de estimación del número de vectores singulares óptimo para la reconstrucción, los cuales expandirán los modos naturales dominantes (más energéticos), para seguidamente pasar al algoritmo de mejora de la señal SVD-Toeplitz con y sin división en subsecuencias, según el proceso descrito en el capítulo VII (figura (7.1)). La señal reconstruida con los primeros vectores singulares de la matriz de datos, aunque contendrá únicamente la información de los modos más energéticos y por lo tanto habremos perdido información de la señal, tendrá una relación señal-ruido mucho mayor que la señal de partida, por lo que cuando posteriormente filtremos paso-baja con el filtro IIR Chebyshev para eliminar la zona de frecuencias altas la identificación será mucho más efectiva.

Ilustremos la forma de actuar del algoritmo con un ejemplo. Partamos de la respuesta impulso ruidosa a 30° con un 65 % de ruido de pico (figura (8.23)). Esta señal, tras ser estimada la varianza del ruido que la contamina, entra en el proceso de estimación del orden de la señal para pasar posteriormente al algoritmo SVD-Toeplitz sin subsecuencias.

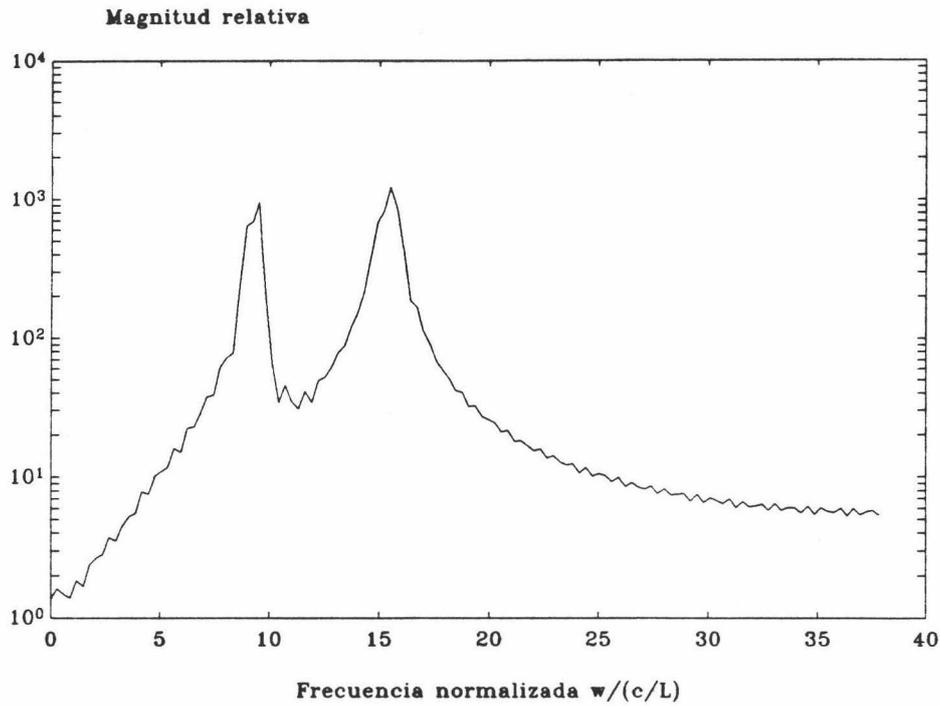


Figura (8.50). Espectro de energía de la señal de la figura (8.23) tras ser sometida al algoritmo SVD-Toeplitz con un orden 2 de la señal.

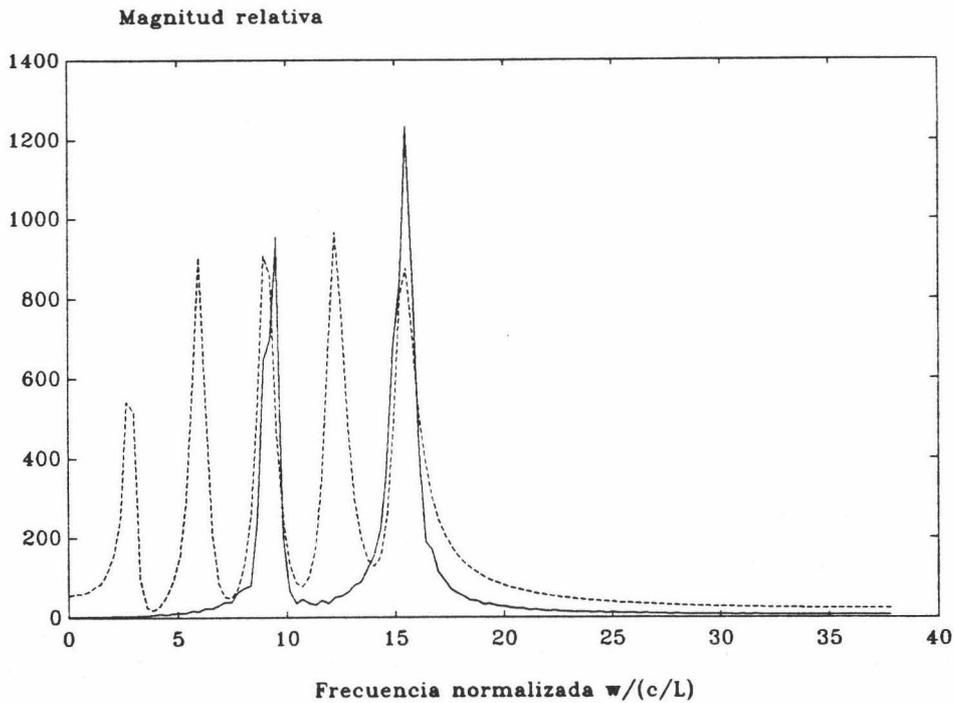


Figura (8.51). Comparación del espectro de energía de la respuesta impulso del hilo a 30° (línea continua) y el de la señal de la figura (8.23) (línea discontinua).

En este caso el orden de la señal estimado es 4, por lo que la señal se reconstruirá únicamente a partir de los cuatro primeros vectores singulares, que por ser un hilo a 30° expandirán fundamentalmente los modos más energéticos que en este caso al ser un hilo en una orientación relativa de 30° suelen corresponder a los últimos, aunque en el caso ruidoso no necesariamente debido a que las diferencias energéticas entre los modos son muy pequeñas y el nivel energético del ruido puede modificarlos. En la señal de nuestro ejemplo los modos más energéticos son los últimos por lo que serán éstos fundamentalmente los expandidos por dos primeros vectores singulares, como puede comprobarse a partir del espectro de energía de la señal en la figura (8.50). Si comparamos este espectro con el espectro de energía de la respuesta ruidosa del hilo (figura (8.25)) vemos que una considerable cantidad de ruido ha sido eliminada, y que como comentábamos anteriormente, al reconstruir únicamente con los 4 primeros vectores singulares, la señal de salida contiene sólo los dos modos más energéticos. Para comprobar la exactitud de la reconstrucción de estos modos, en la figura (8.51) se compara el espectro de energía de la señal reconstruida (figura (8.50)) con el de la respuesta impulso de hilo a 30° no ruidosa. Como puede verse en esta figura, los modos correspondientes a las resonancias de frecuencia 9.06 y 15.24 han sido extraídos de forma bastante precisa (salvo la amplitud energética, lo cual no es importante), lo que quiere decir que la señal reconstruida oscila a dos frecuencias naturales que corresponden a las del hilo patrón. Estas modos nos van a permitir la identificación del hilo patrón respecto a otros blancos alternativos cuando posteriormente pasemos a la identificación con los FAR.

Posteriormente esta señal reconstruida es filtrada paso-baja por un filtro adecuado elegido de forma óptima según el proceso descrito con anterioridad. Un filtro paso-baja adecuado para este número de modos presentes en la señal, según puede desprenderse de la figura (8.46), es un IIR Chebyshev de frecuencia de corte 15.24, con el orden óptimo adecuado dado por $N = 13$ cuya respuesta en magnitud tenemos representada en la figura

(8.52). Cuando la señal reconstruida es filtrada, obtenemos un espectro de energía mostrado en la figura (8.53), en la que puede observarse que la banda de frecuencias altas ha sido muy atenuada para impedir la interferencia que estas frecuencias podrían hacer en el proceso de identificación del FAR.

A continuación llevamos a cabo este mismo proceso, ilustrado para el ejemplo de la figura (8.5), con cada una de las señales obtenidas mediante la simulación numérica establecida en el apartado VIII.4.1. Contaminamos para ello la respuesta impulso del hilo patrón a diferentes orientaciones con ruido blanco y Gaussiano para diferentes valores de % de ruido de pico, y la hacemos pasar, tras someterla a un proceso de mejora de la señal representado por el algoritmo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja tanto sin división en subsecuencias como con decimación de orden 2, por los FAR triples representativos de diferentes blancos. Los valores del parámetro de discriminación DP obtenidos en esta simulación se representan en las figuras (8.54) y (8.56). En la figura (8.54) tenemos representado el DP cuando la señal no es dividida en subsecuencias. Comparándola con los resultados obtenidos mediante el uso único de filtros paso-baja (figura (8.44)) vemos que se ha producido una sustancial mejora en capacidad de identificación del FAR, pues, además de que la diferencia energética en hilos 5 % y 10 % más cortos es mayor, como ponen de manifiesto los valores de DP más bajos, en este caso hilos 1 % y 2 % más cortos pueden ser discriminados del patrón, lo que antes no era posible con el uso único de un filtrado paso-baja.

Ahora, como pone de manifiesto la figura (8.54), tras la mejora de la relación señal-ruido de la señal al aplicar el algoritmo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja, la identificación respecto a estructuras muy cercanas (hilos 1 % y 2 %) es posible sin dificultad hasta altos niveles de ruido de pico añadido (~ 40 %).

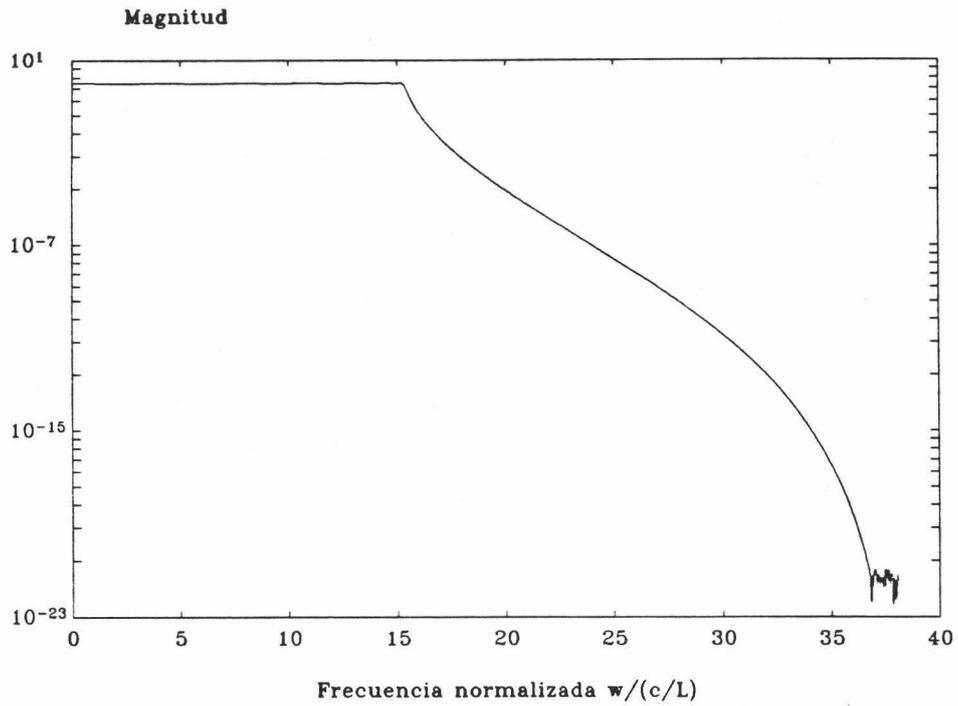


Figura (8.52). Respuesta en magnitud del filtro paso-baja IIR Chebyshev óptimo para el uso tras el algoritmo SVD-Toeplitz para un orden de la señal 2.

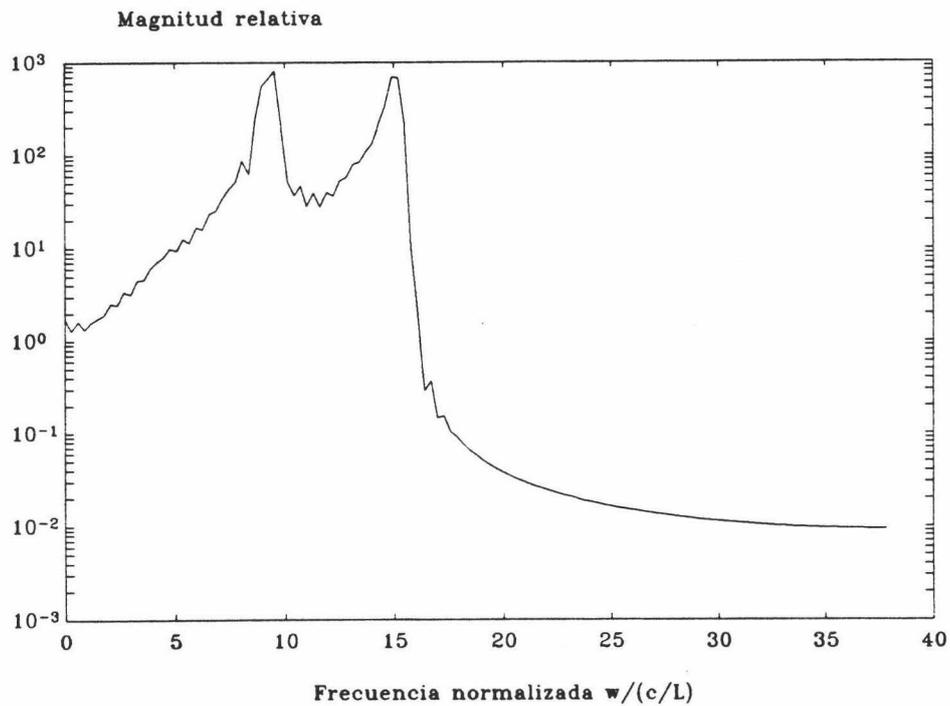


Figura (8.53). Espectro de energía de la respuesta del hilo a 30° con un 65 % de ruido (figura (8.23)) a la salida del algoritmo completo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja.

Sin embargo, si el nivel de ruido se incrementa sustancialmente, la reconstrucción que se lleva a cabo mediante la SVD de la matriz de datos no es muy precisa, y en ocasiones la clasificación llevada a cabo por el sistema FAR falla. En la figura (8.55) tenemos representado el % de error en la identificación del hilo patrón cuando se hace uso del algoritmo SVD sin subsecuencias. En este caso entendemos por error que la energía de la salida por otros FAR alternativos al patrón es menor que la obtenida por el patrón. Podemos observar de esta figura que a un nivel de un 40 % de ruido de pico el sistema identifica bien respecto a hilos 5 % y 10 % más cortos, mientras que se comete un pequeño error ($< 3\%$) para blancos muy parecidos (hilos 1 % y 2 % más cortos). A niveles de ruido más severos, tales como un 65 % de ruido de pico, el error de identificación del hilo patrón es más grande, aunque con ninguno de los blancos alternativos estudiados supera un 20 %.

Debe señalarse que la gráfica (8.55) no puede interpretarse como que el sistema clasifique erróneamente el hilo patrón como si fuera un hilo 1 % más corto en un 20 % de los casos por ejemplo, sino que de acuerdo con nuestra clasificación del valor de DP dada en el apartado VIII.4.1, la energía de la señal filtrada por el FAR patrón es mayor que la de la filtrada por otros FAR alternativos (que corresponde a un $DP > 1$), lo que no quiere decir que la diferencia energética sea suficiente para que el sistema clasifique erróneamente el blanco. Es más, en la inmensa mayoría de los casos estudiados, la respuesta del sistema sería la no clasificación clara con ningún blanco de la librería.

Cuando la respuesta impulso del hilo es dividida en subsecuencias con un orden de decimación 2 obtenemos los resultados mostrados en la figura (8.56). Comparándola con el caso sin subsecuencias (figura (8.54)) vemos que el valor de DP se ha incrementado, principalmente a niveles de ruido superiores al 20 %, y que para hilos 1 % más cortos la discriminación no es posible más allá de un 40 % de ruido de pico.

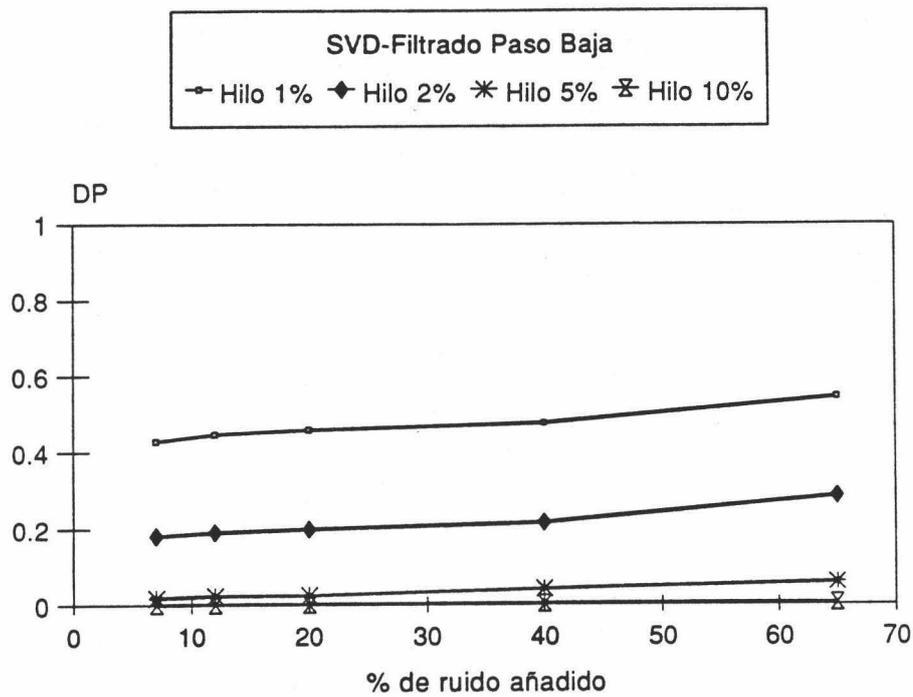


Figura (8.54). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico tras el uso del algoritmo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja sin subsecuencias.

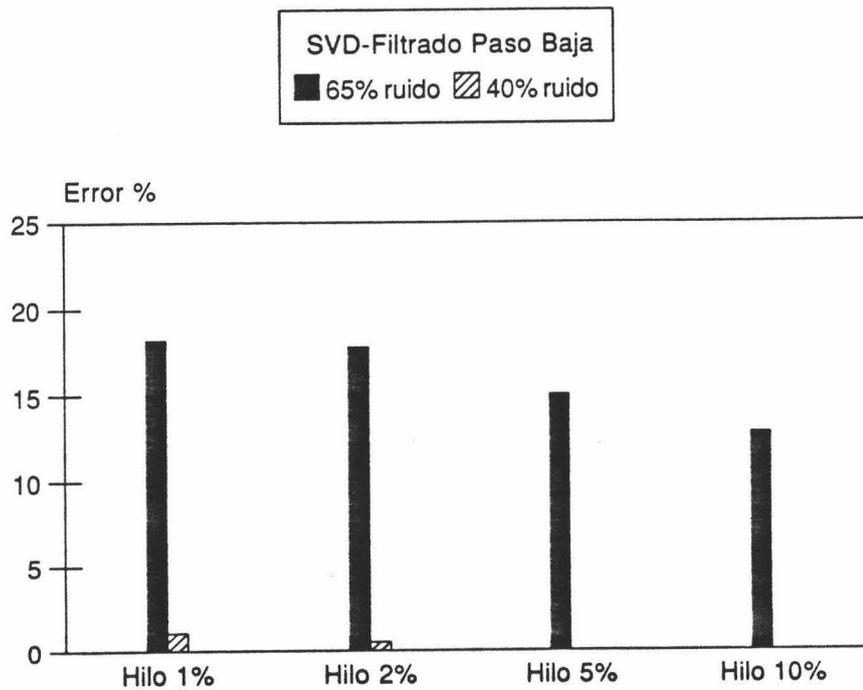


Figura (8.55). Error de identificación del hilo patrón cuando se usa el algoritmo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja sin subsecuencias.

Estos resultados indican que trabajando con este número de datos pequeño (150 datos), la decimación es menos efectiva que trabajar directamente con la matriz de datos total. A la misma conclusión llegamos si representamos para este caso el error en la identificación cometido cuando se aplica el algoritmo SVD con decimación 2 (figura (8.57)). Si la comparamos con el error cometido sin decimación (figura (8.55)) vemos que en un 40 % de ruido de pico el error para hilos 1 % y 2 % más cortos queda sobre el 10 %, mientras que en el caso sin subsecuencias permanecía inferior al 3 %. Igual ocurre con un nivel de un 65 % de ruido, en el que el error supera con creces al obtenido sin subsecuencias, por ejemplo con respecto a un hilo 1 % más corto es sobre un 35 % (figura (8.57)) para una decimación de orden 2, mientras que sin división en subsecuencias es del 20 % (figura (8.55)). Únicamente cabe destacar una mejora en el error de identificación para blancos alternativos más diferentes (hilo 5 % y 10 % más cortos) en los que el error con el uso de subsecuencias se ha reducido respecto al obtenido sin la decimación, sin embargo el error en el resto de las estructuras y el parámetro de discriminación es menor sin división en subsecuencias. A partir de estos resultados puede comprenderse que aumentar el orden de decimación empeorará el valor de DP, tal y como comentábamos al iniciar este apartado, debido principalmente al poco número de datos que usamos en la simulación.

Como conclusión final, destacar que el algoritmo de mejora SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja ha permitido incrementar sustancialmente el parámetro de discriminación (DP) respecto al uso en solitario de las técnicas de clásicas de suavizado de la señal. Además en este caso se permite la identificación del hilo patrón respecto a blancos muy parecidos (hilos 1 % y 2 % más cortos) que no era posible en las técnicas clásicas. Esta identificación es correcta hasta niveles de ruido de pico de un 40 %, sin embargo a niveles de ruido de este orden o superiores aparece un error en la identificación del hilo patrón que marca un umbral en la aplicación de esta técnica.

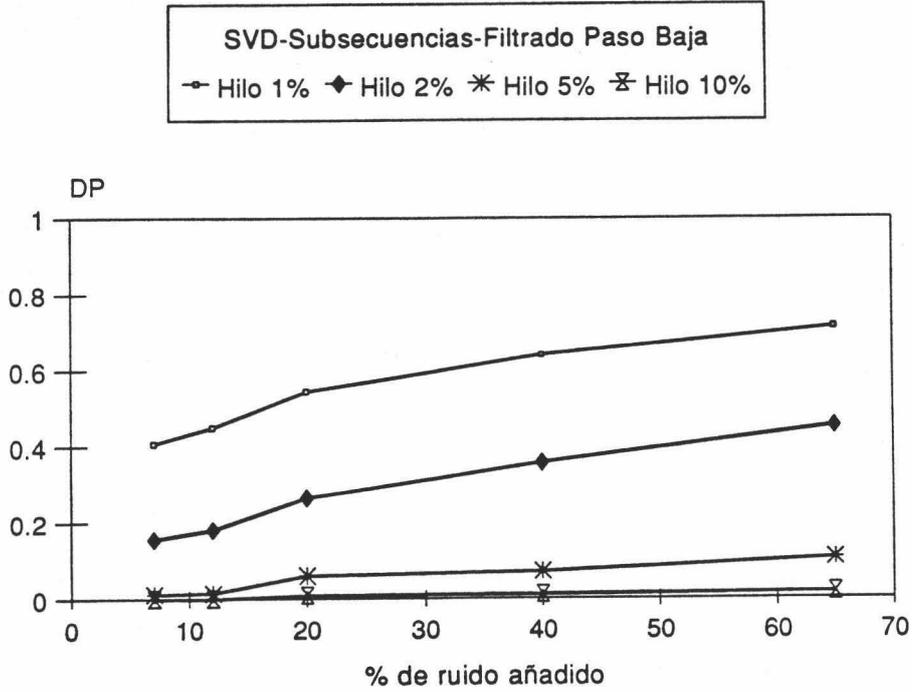


Figura (8.56). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico tras el uso del algoritmo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja con decimación de orden 2.

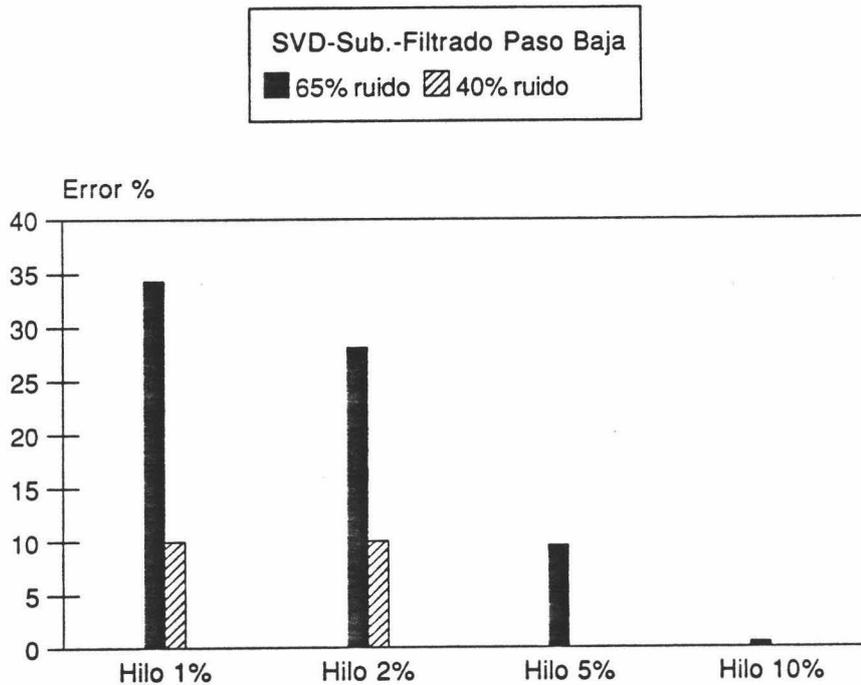


Figura (8.57). Error de identificación del hilo patrón cuando se usa el algoritmo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja con decimación de orden 2.

En cualquier caso el error de identificación no supera el 20 % en el peor de los casos para hilos 1 % más cortos. Destacar por último que los resultados de nuestra simulación muestran que la división en subsecuencias sólo es efectiva si se dispone de un mayor número de datos que equivale a periodos de muestreo altos, en donde la capacidad de resolución del FAR disminuye o blancos alternativos suficientemente diferentes del patrón. En cualquier caso parece que el tiempo de cálculo que se consume al dividir en subsecuencias no compensa los resultados obtenidos para la identificación y por consiguiente, para un número de datos moderado es más útil usar simplemente la SVD sin división en subsecuencias.

VIII.4.5 Identificación mediante el algoritmo compuesto SVD-Toeplitz y Filtrado de suavizado óptimo-Filtrado paso-baja.

Como se ha estudiado en el apartado VIII.4.4 el algoritmo SVD-Toeplitz-Filtrado paso-baja elimina mucho ruido de la señal y permite una correcta identificación del hilo patrón incluso con blancos muy parecidos en la mayoría de los casos. Sin embargo la presencia de un error de identificación que surge cuando el nivel de ruido que contamina la señal es alto y que se va incrementando con éste, marca una cota en la magnitud de ruido que puede contaminar la señal. Ya al 40 % de ruido de pico aparece un pequeño error en la identificación con respecto a hilos 1 % y 2 % más cortos. Veremos que la adición de un nuevo filtrado mediante el FAR inverso estudiado en el capítulo VII permite rebajar la cota del nivel de ruido a la que aparece el error de identificación.

Un esquema del proceso de identificación con este procesado previo de la señal se muestra en la figura (8.58). En este caso la respuesta ruidosa del hilo patrón es sometida primeramente al algoritmo SVD-Toeplitz, según el proceso descrito en el apartado VIII.4.4, obteniéndose una señal reconstruida usando sólo los primeros vectores singulares

de la matriz de datos, que seguidamente es filtrada por el filtro de suavizado óptimo (FAR inverso), sintetizado a partir de dicha señal reconstruida por el método del prefiltrado FIR (ecuación (7.63)) que es el más adecuado según se comentó en el capítulo VII para posteriormente ser filtrada paso-baja mediante un filtro IIR.

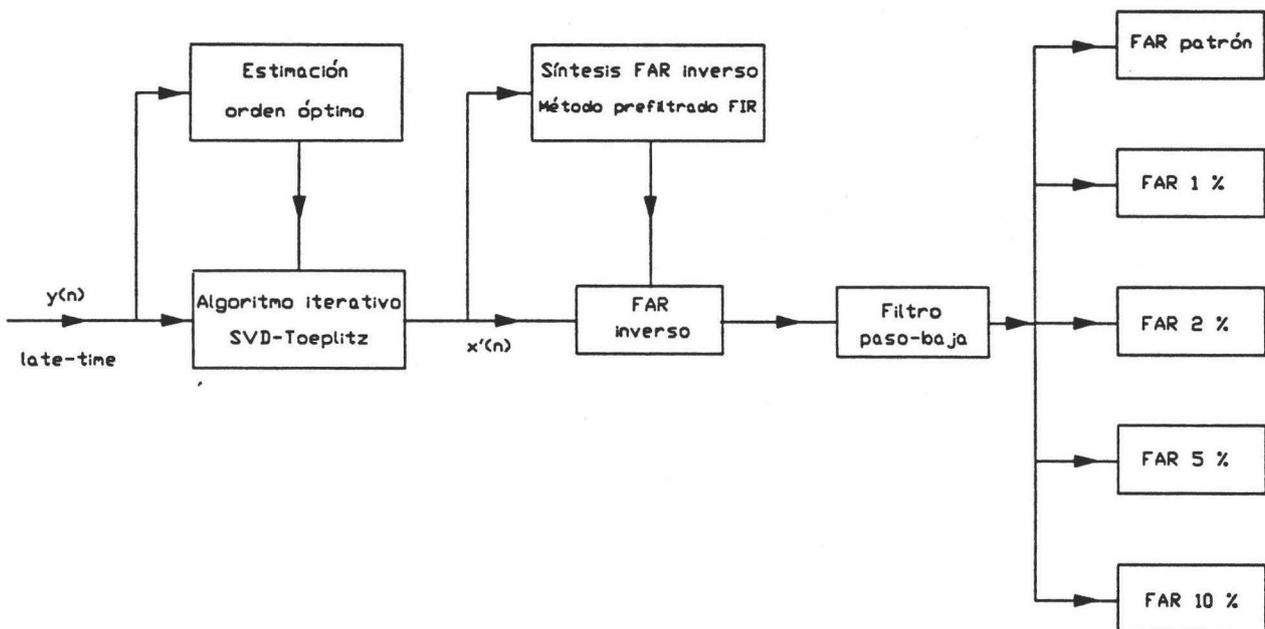


Figura (8.58). Esquema del proceso de identificación de la respuesta del hilo patrón usando mediante el algoritmo compuesto SVD-Toeplitz y FAR inverso-Filtrado paso-baja.

Este procesado de la señal que se realiza previo a la identificación por los diferentes FAR incorpora, junto a las etapas SVD-Toeplitz, que reconstruye la señal a partir de los vectores singulares más robustos al ruido, y Filtrado paso-baja, que atenúa la banda de altas frecuencias, una nueva etapa de filtrado mediante un filtro de suavizado óptimo que enfatiza las regiones espectrales donde las componentes de la señal son dominantes. Esta nueva etapa, al amplificar los modos de la respuesta del hilo en detrimento de las componentes de ruido presentes en los datos permitirá una identificación más precisa de la respuesta del hilo patrón por los FAR.

Como se observa en la figura (8.58) se sigue manteniendo un filtrado paso-baja antes de la identificación por el FAR pues es necesario atenuar de forma importante las altas frecuencias. Los parámetros de estos filtros paso-baja han de elegirse de forma óptima pues su banda de paso ha de incluir las componentes de la señal que permiten la identificación. Estos parámetros dependen del orden de los filtros de aniquilación de resonancias que se utilicen. En el caso del hilo los que dan lugar a una mayor resolución son los de orden 3 y por lo tanto serán los que se usarán. En consecuencia, para los FAR triples han de elegirse de forma óptima la frecuencia de corte y el orden del filtro paso-baja, que será de respuesta impulso infinita tipo Chebyshev. Como la etapa SVD previa al filtrado de suavizado puede hacerse con y sin división en subsecuencias, y la reconstrucción de la señal puede hacerse para distinto número de vectores singulares (4, 6, 8 y 10 en este caso), la elección de estos parámetros ha de realizarse para los mismos casos que en el apartado VIII.4.4. Al ser esta primera etapa de SVD análoga, las mismas consideraciones sobre el número de decimación útil son válidas. En síntesis el proceso sería el siguiente: partiendo del late-time de la señal sin ruido, en este caso la respuesta impulso del hilo a 30° no ruidosa, se aplica el algoritmo SVD-Toeplitz sin subsecuencias y con decimación de orden 2 para varios órdenes de la señal (4, 6, 8 y 10), correspondientes a cada una de las posibilidades de elección de este orden (número de vectores principales) en el caso del hilo. Para cada una de estas cuatro señales de salida con diferentes órdenes se construye el filtro de suavizado óptimo para ser filtradas por él y posteriormente buscar la frecuencia de corte y el orden óptimos del filtro paso-baja IIR que será usado en la posterior identificación del hilo patrón según el número de vectores singulares usados para reconstruir la señal.

Como ejemplo del tipo de gráficas obtenidas en el proceso de elección de parámetros de los filtros paso-baja tras esta etapa de procesado, en las figuras (8.59) a (8.62) se muestran el valor del parámetro DP en función de la frecuencia de corte del filtro IIR cuando el orden es el óptimo para cada una de las frecuencias, para un orden

de la señal de 4, 6, 8 y 10 respectivamente y no hay división en subsecuencias. Para el caso de decimación de orden 2 se obtienen resultados muy parecidos que no se muestran por simplicidad.

Para obtener las gráficas mostradas se ha usado la respuesta impulso del hilo a 30° , lo cuál vimos en el apartado anterior no resta generalidad a los parámetros así escogidos. Observando estas gráficas se puede ver que las frecuencias de corte óptimas (mínimos del valor de DP) corresponden en todas a las posiciones donde caen las frecuencias de las últimas resonancias del hilo (sobre frecuencias normalizadas 9, 12 y 15), lo que indica, al igual que ocurría con una única etapa SVD, que las bandas de paso de los diferentes filtros óptimos incluyen las resonancias naturales del hilo patrón que se pretende identificar. Si las comparamos con las obtenidas para la SVD (figuras (8.46) a (8.49)) vemos que los mínimos de DP están en este caso mucho más marcados, lo cual se corresponde con el hecho de que el FAR inverso ha amplificado dichos modos haciendo la elección de la frecuencia de corte más clara. Como en el caso de la etapa única SVD los mínimos obtenidos para los diferentes números de vectores singulares usados son muy similares, por lo que también tras la etapa del FAR inverso la frecuencia de corte de los filtros apenas variará con el número vectores singulares usados para estimar la señal.

Una vez elegidos de forma óptima los filtros paso baja adecuados se procede a la identificación para distintos niveles del % de ruido de pico, siguiendo el proceso que se muestra en la figura (8.59). Primeramente la respuesta ruidosa del hilo se somete a un proceso de estimación del número de vectores singulares óptimo para la reconstrucción, los cuales expandirán los modos naturales dominantes (más energéticos), para seguidamente pasar al algoritmo de mejora de la señal SVD-Toeplitz con y sin división en subsecuencias, según el proceso descrito en el capítulo VII (figura (7.1)).

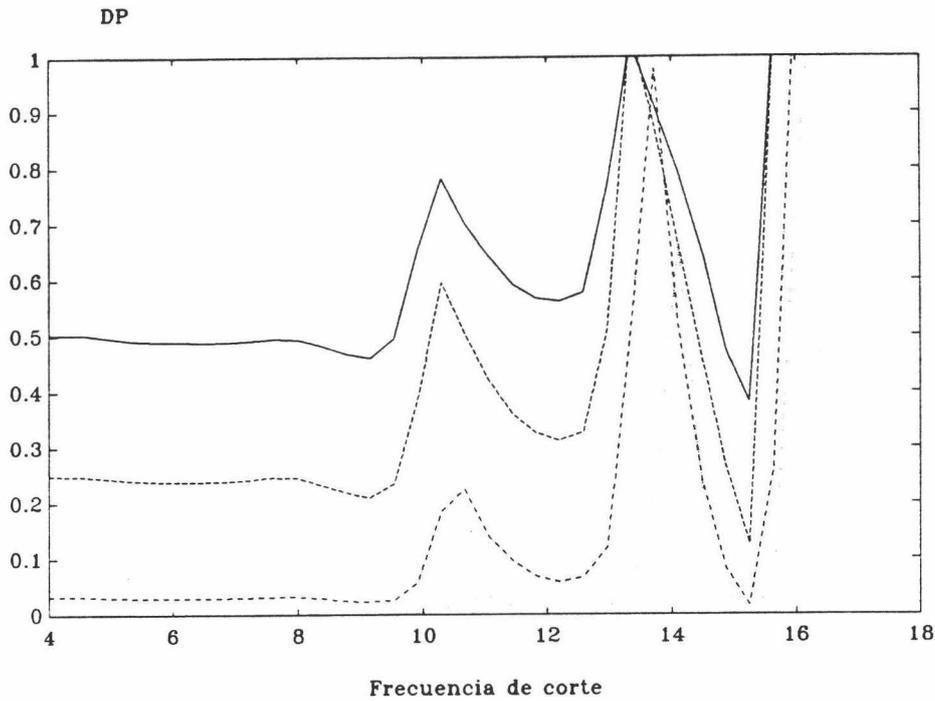


Figura (8.59). Elección de la frecuencia de corte óptimo del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 2.

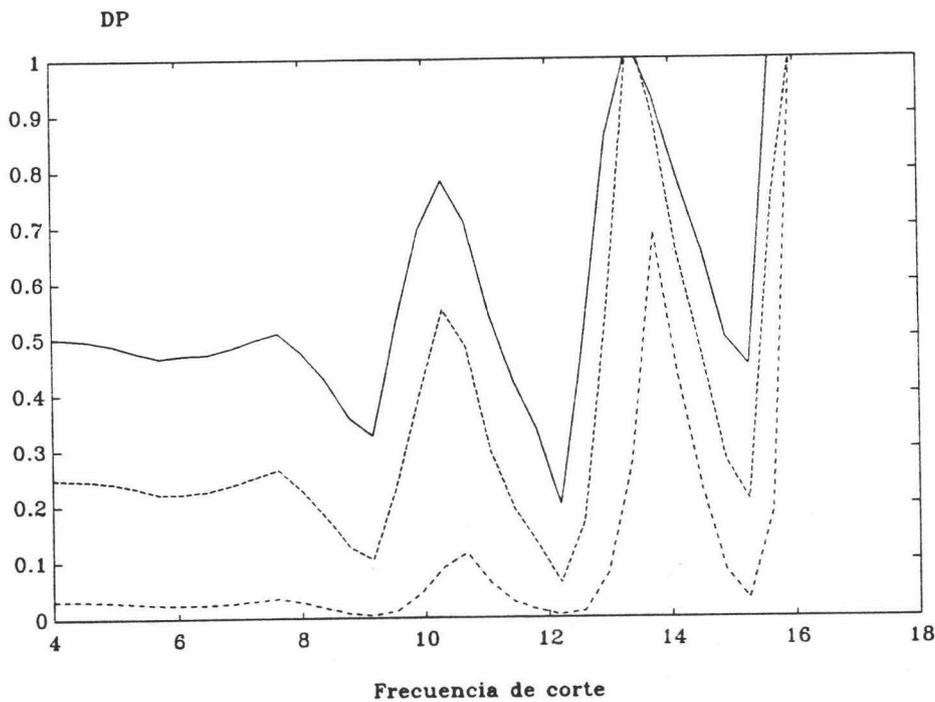


Figura (8.60). Elección de la frecuencia de corte óptimo del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 3.

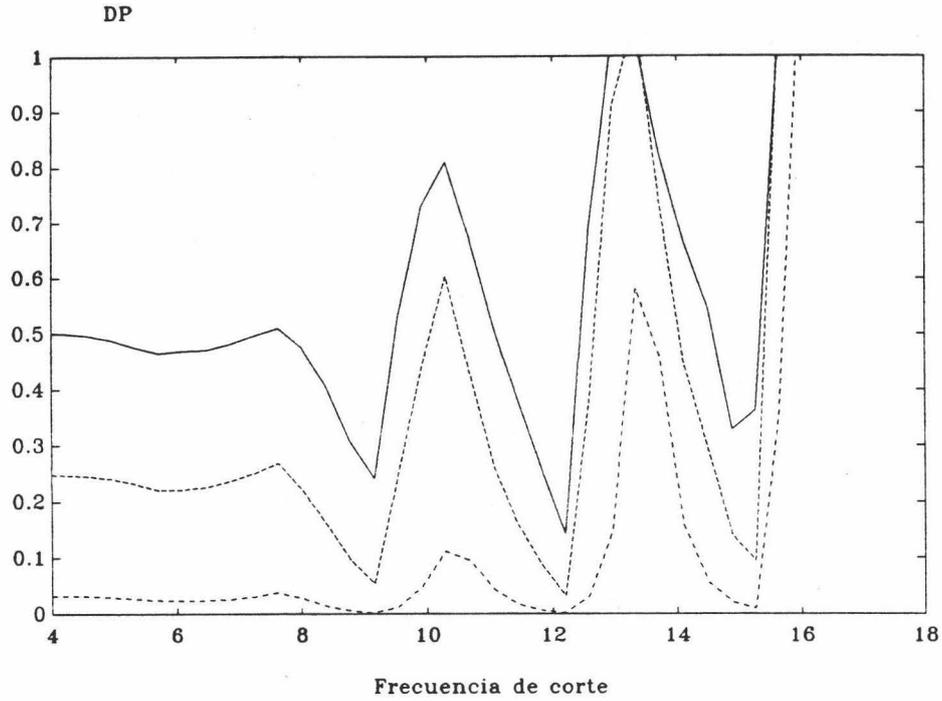


Figura (8.61). Elección de la frecuencia de corte óptima del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 4.

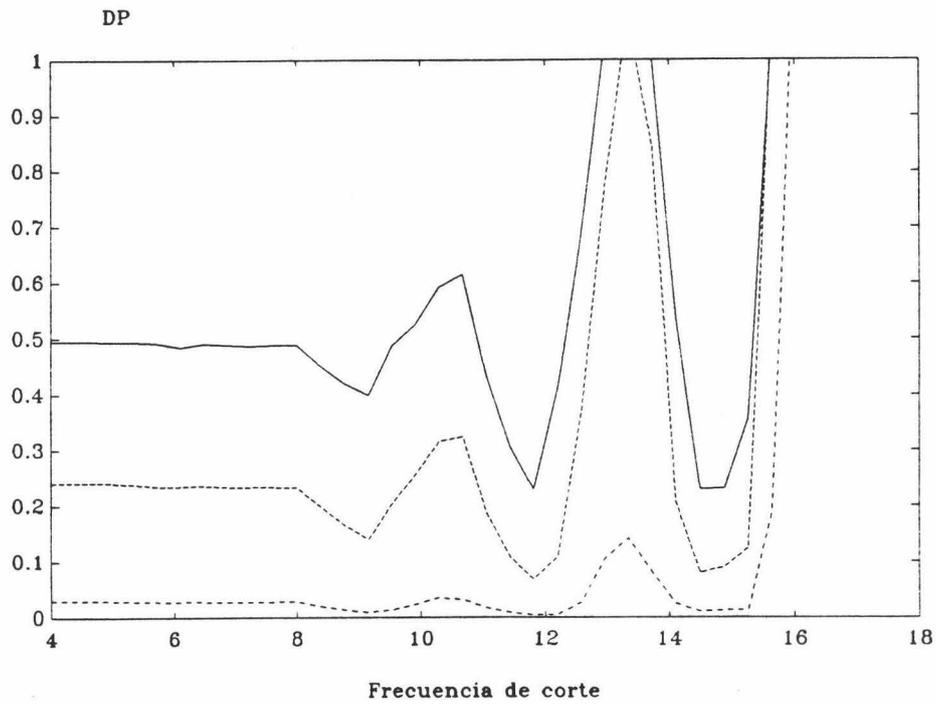


Figura (8.62). Elección de la frecuencia de corte óptimo del filtro paso-baja IIR Chebyshev cuando la respuesta del hilo a 30° es tomada para orden de señal 5.

Tras esta etapa la señal reconstruida con los primeros vectores singulares de la matriz de datos es filtrada por el FAR inverso, de forma que la señal, aunque contendrá únicamente la información de los modos más energéticos amplificadas por el FAR inverso, tendrá sus características distintivas (modos naturales) mucho más enfatizadas, por lo que cuando posteriormente filtremos paso-baja con el filtro IIR para eliminar la zona de frecuencias altas la identificación será mucho más efectiva.

Como en el caso de la etapa SVD, ilustraremos la forma de actuar de la etapa del filtrado óptimo con el mismo ejemplo. Partamos de la respuesta impulso ruidosa a 30° con un 65 % de ruido de pico (figura (8.23)). Esta señal es sometida primeramente a la etapa SVD-Toeplitz obteniéndose una señal reconstruida usando únicamente los dos primeros vectores singulares que contiene principalmente los modos de frecuencia 9.0 y 15.2 (figura (8.50)). Con los datos de esta señal reconstruida se construye el FAR inverso mediante el método del prefiltrado FIR, que estima la resonancias naturales de la señal. En general, sobre todo a altos niveles de ruido, las resonancias extraídas mediante el método del prefiltrado FIR tienen su componente imaginaria (frecuencia) mucho mejor estimada que la parte real (factor de amortiguamiento), por lo que para sintetizar el FAR inverso según la ecuación (7.46) conviene utilizar únicamente la componente imaginaria tomando como factor de amortiguamiento de la resonancia un valor preestablecido. Una vez construido el FAR inverso, la señal de la figura (8.50) es filtrada por él, de forma que los modos naturales presentes en ella serán mucho más enfatizados, atenuando el resto de las regiones. Esto puede observarse en su espectro de energía, representado en la figura (8.63), donde se ha incluido el espectro de la respuesta impulso del hilo a 30° sin ruido por comparación. Podemos observar que los dos modos presentes han sido fuertemente amplificadas mientras que el resto de las bandas superior e inferior han sido atenuadas, de esta forma la señal oscilará fuertemente a las frecuencias naturales del hilo patrón por lo que el proceso de identificación por el FAR correspondiente será más fácil.

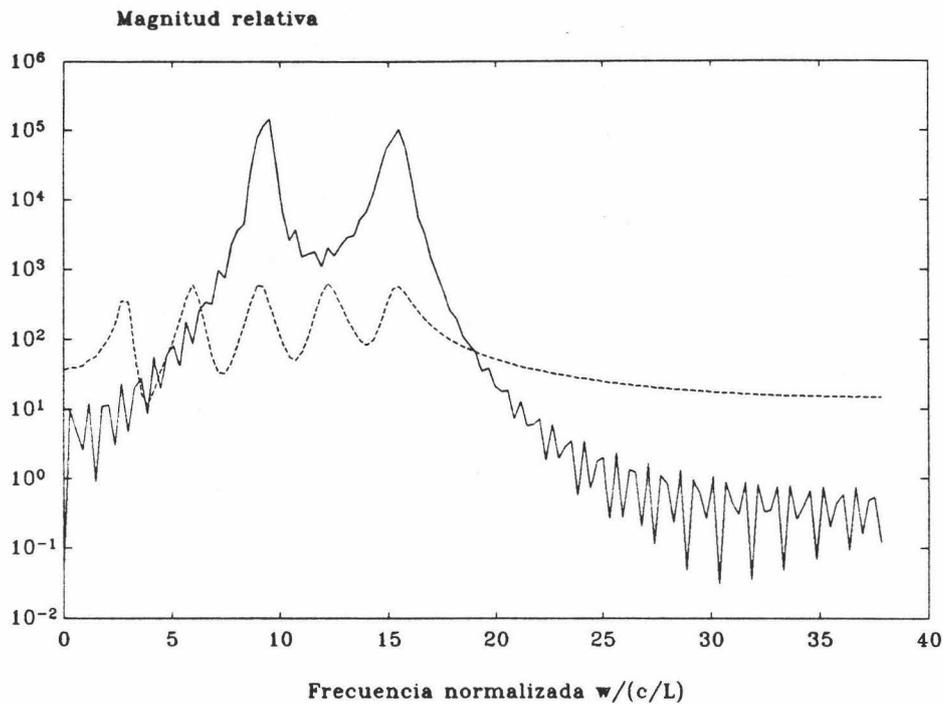


Figura (8.63). Espectro de energía de la señal de la figura (8.23) tras ser sometida al algoritmo compuesto (8.58) para un orden 2 (línea continua) comparada con la respuesta impulso del hilo a 30° no ruidosa.

Posteriormente esta señal es filtrada paso-baja por un filtro adecuado elegido de forma óptima según el proceso descrito con anterioridad. Un filtro paso-baja adecuado para este número de modos presentes en la señal, según puede desprenderse de la figura (8.59), es un IIR Chebyshev de frecuencia de corte 15.24, con el orden óptimo adecuado dado por $N = 12$ cuya respuesta en magnitud tenemos representada en la figura (8.64).

Cuando la señal con modos naturales enfatizados es filtrada, obtenemos un espectro de energía mostrado en la figura (8.65), en la que puede observarse que la banda de frecuencias altas ha sido muy atenuada para impedir la interferencia que estas frecuencias podrían hacer en el proceso de identificación del FAR. De este modo esta señal ya sólo contiene dos modos naturales con el resto de bandas de frecuencia, sobre todo las de alta frecuencia atenuadas de manera que la identificación con el sistema FAR sea posible.

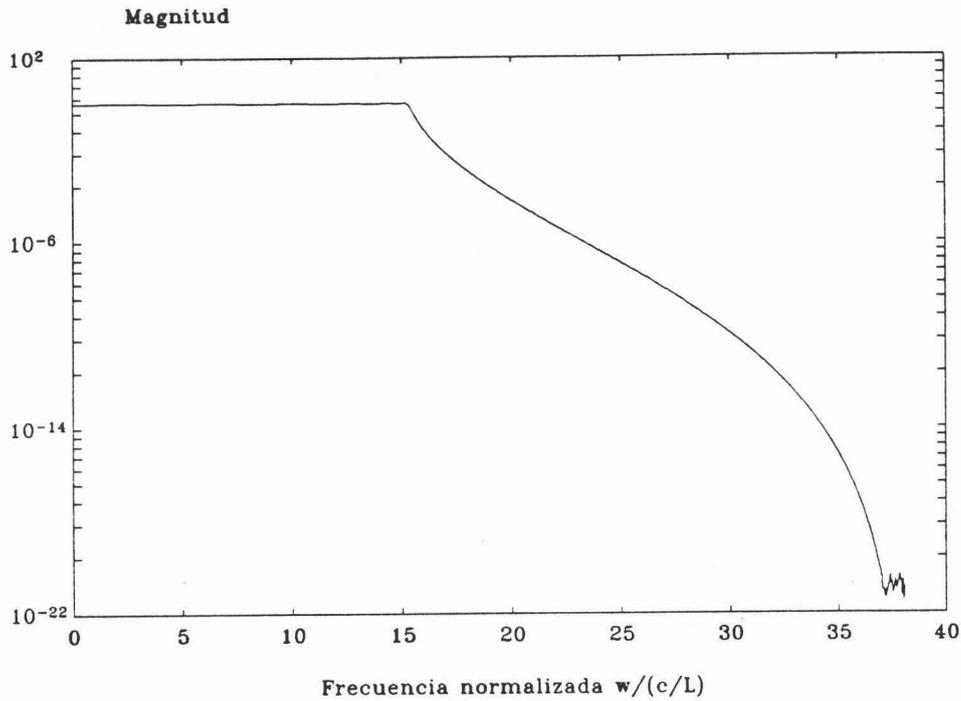


Figura (8.64). Respuesta en magnitud del filtro paso-baja IIR Chebyshev óptimo para el uso tras el algoritmo de la figura (8.58) para un orden de la señal 2.

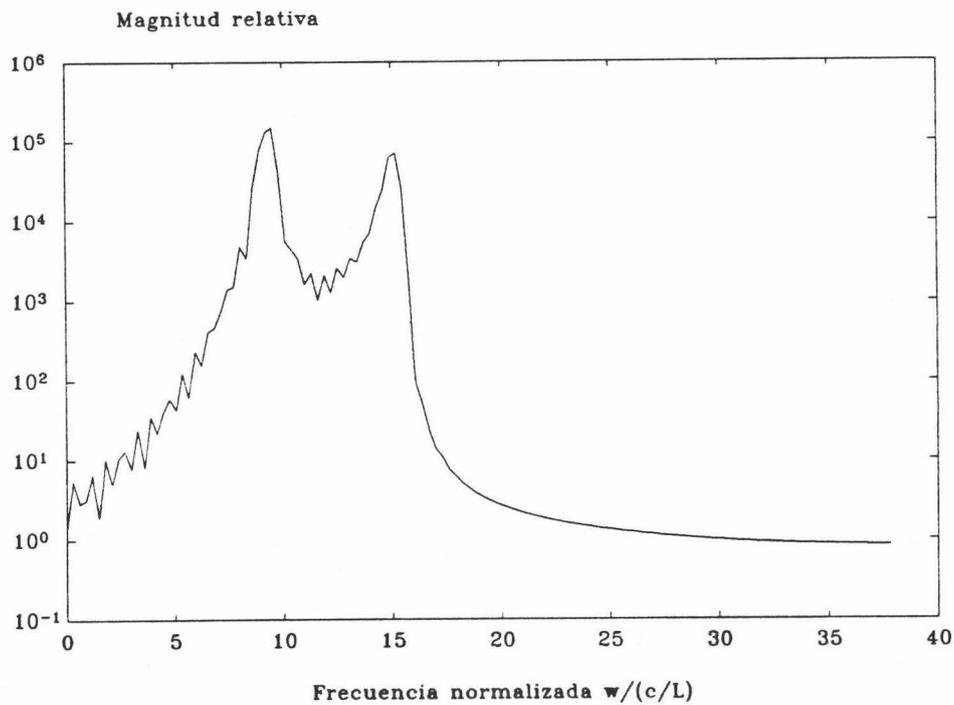


Figura (8.65). Espectro de energía de la respuesta del hilo ruidosa de la figura (8.23) a la salida del algoritmo compuesto SVD-Toeplitz y FAR inverso-Filtrado paso-baja.

A niveles de ruido menos severos el procesado que lleva a cabo el algoritmo compuesto es mucho más efectivo. Consideremos por ejemplo la respuesta impulso del hilo a 30° contaminada con un 20 % de ruido de pico mostrada en la figura (8.22). Si esta señal es sometida al algoritmo compuesto para su identificación mostrado en la figura (8.58), primeramente entra en la etapa SVD-Toeplitz, para lo cual ha de serle estimado el orden óptimo de la señal. En este caso dicho orden resulta ser 8, de forma que la reconstrucción se hará con los 8 primeros vectores singulares. La figura (8.66) muestra el espectro de energía de la señal reconstruida comparada con la respuesta impulso del hilo no ruidosa. Puede observarse que los 4 primeros modos han sido reconstruidos de forma muy efectiva mientras que a diferencia de la figura (8.24) ha sido eliminada una gran cantidad de ruido en la banda de la señal y fuera de ella. La información del 5º modo se ha perdido en la reconstrucción, por eso en el espectro de energía dicho modo está ausente.

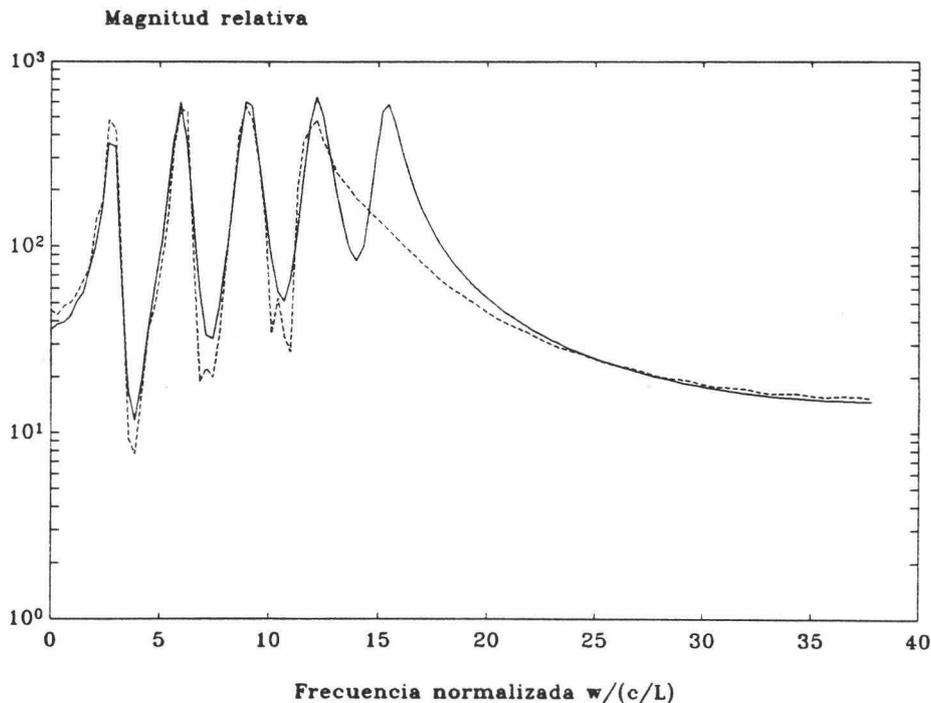


Figura (8.66). Espectro de energía de la señal de la figura (8.22) tras ser sometida al algoritmo SVD-Toeplitz para un orden 8 (línea discontinua) comparada con la respuesta impulso del hilo a 30° no ruidosa.

Posteriormente esta señal reconstruida es filtrada por el FAR inverso de forma que los modos presentes en ella serán fuertemente enfatizados. En la figura (8.67) se representa el espectro de energía de esta señal comparada con la respuesta impulso del hilo a 30° . Puede observarse como el FAR inverso ha amplificado las bandas de frecuencia donde están presentes los modos naturales del hilo y ha atenuado el resto de las bandas. De esta forma la señal tiene sus frecuencias características mucho más enfatizadas de forma que será más fácil identificarla.

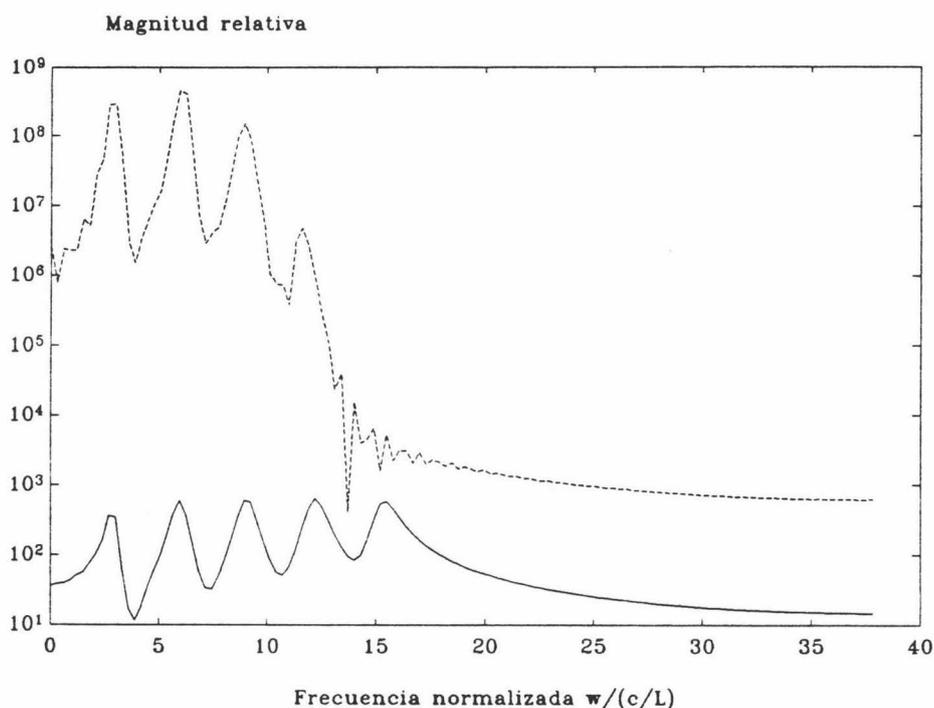


Figura (8.67). Espectro de energía de la señal de la figura (8.22) tras ser sometida al algoritmo de figura (8.58) para un orden 8 (línea discontinua) comparada con la respuesta impulso del hilo a 30° no ruidosa.

Seguidamente llevemos a cabo este mismo proceso, ilustrado para los ejemplos de las figuras (8.22) y (8.23), con cada una de las señales obtenidas mediante la simulación numérica establecida en el apartado VIII.4.1. Contaminamos para ello la respuesta impulso del hilo patrón a diferentes orientaciones con ruido blanco y Gaussiano para diferentes valores de % de ruido de pico, y la hacemos pasar, tras someterla al procesado

previo que consta en primer lugar por el algoritmo SVD-Toeplitz tanto sin división en subsecuencias como con decimación de orden 2 y en segundo lugar por un filtrado compuesto FAR inverso-Filtrado paso-baja, por los FAR triples representativos de diferentes blancos. Los valores del parámetro de discriminación DP obtenidos en esta simulación se representan en las figuras (8.68) y (8.70).

En la figura (8.68) tenemos representado el parámetro de discriminación DP y en la figura (8.69) tenemos representado el % de error en la identificación del hilo patrón cuando la etapa SVD-Toeplitz del algoritmo compuesto SVD-Toeplitz y FAR inverso-Filtrado paso-baja se hace sin división en subsecuencias. Observando la figura (8.68) puede constatarse que la identificación del hilo patrón con respecto al resto de estructuras alternativas es posible para el rango de % de ruido añadido de pico estudiado, y que si los comparamos con los resultados obtenidos mediante el uso la etapa SVD-Filtrado paso-baja sin subsecuencias (figura (8.54)) vemos que se ha producido una pequeña mejora en la capacidad de identificación del FAR aunque no es muy significativa. Sin embargo la principal mejora se produce comparando el % de error de identificación cometido tras el uso de la etapa FAR inverso y sin ella (figuras (8.57) y (8.69) respectivamente), en las que puede observarse que el % de error de identificación del hilo patrón a un 40 % de ruido es nulo y que no supera el 10 % para un 65 % de ruido tras la etapa FAR inverso mientras que sin el uso de esta etapa aparece un error de identificación al 40 % de ruido y al 65 % el error ya es del orden del 20 %. La etapa del filtrado de suavizado óptimo, pues, además de permitir la identificación del hilo patrón con respecto a los blancos alternativos incluso los más parecidos (hilos 1 % y 2 % más cortos) permite rebajar el error de identificación cometido con el uso único de la etapa SVD-Toeplitz, de forma que dicho error ya no supera el 10 % para niveles de ruido considerables (65 % de ruido de pico).

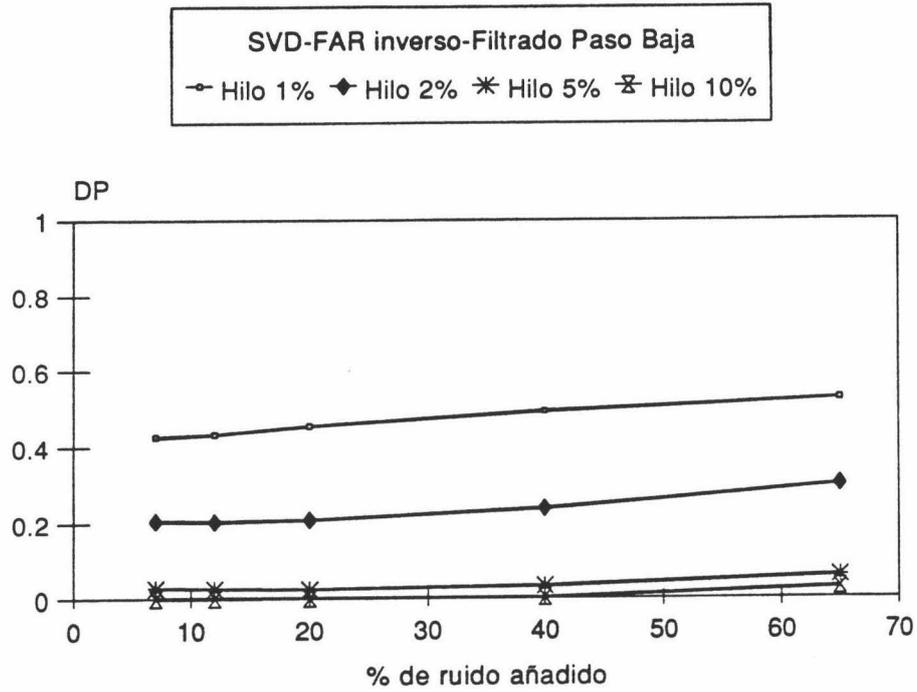


Figura (8.68). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico tras el uso de los algoritmos SVD-Toeplitz sin subsecuencias y FAR inverso-Filtro paso-baja.

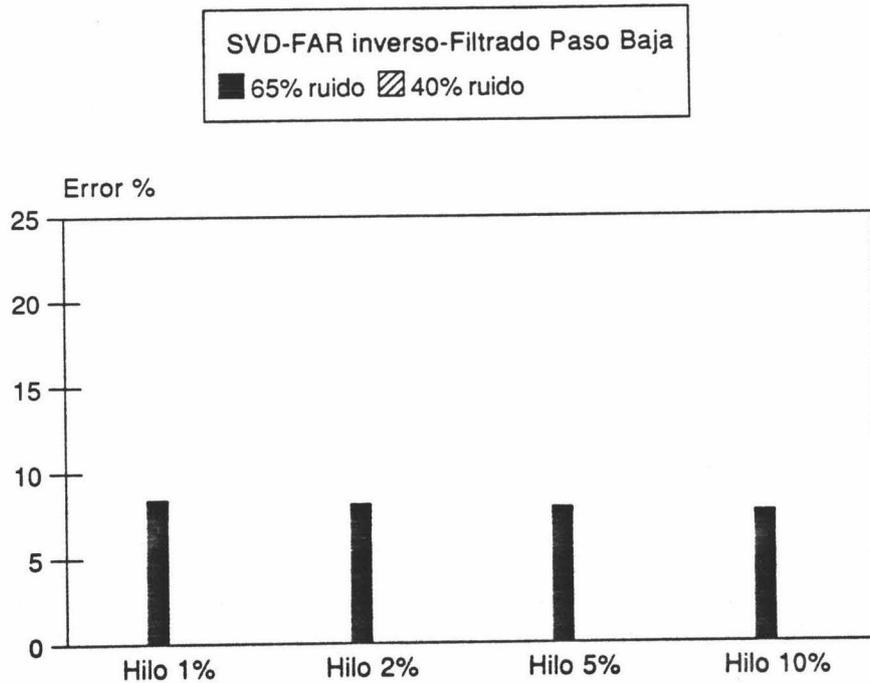


Figura (8.69). Error de identificación del hilo patrón cuando se usa el algoritmo compuesto SVD-Toeplitz sin subsecuencias y FAR inverso-Filtro paso-baja.

Cuando la respuesta impulso del hilo es dividida en subsecuencias con un orden de decimación 2 en la primera parte del algoritmo compuesto de la figura (8.58) obtenemos los resultados mostrados en la figura (8.70) para el parámetro de discriminación y en la figura (8.71) para el error de identificación. Comparando la figura (8.70) con el caso sin subsecuencias (figura (8.68)) vemos que el valor de DP se ha incrementado para todo el rango de niveles de ruido y que con hilos 1 % más cortos la identificación empieza a ser complicada a un 65 % de ruido de pico.

La disminución de la capacidad de identificación del FAR tras la etapa del algoritmo compuesto cuando se hace uso de división en subsecuencias para un número pequeño de datos se hace más evidente si comparamos el error de identificación cometido con una decimación de orden 2 (figura (8.71)) y sin división en subsecuencias (figura (8.69)). Como puede observarse el error de identificación del hilo patrón con respecto al resto de las estructuras se ha incrementado de forma considerable, ya que para la decimación de orden 2 se sitúa por encima del 25 % en todos los casos mientras que sin división en subsecuencias no supera el 10 %. Estos resultados confirman lo obtenido en el caso de la etapa única SVD-Filtrado paso-baja, lo que indica que trabajando con este número de datos pequeño (150 datos), la decimación es menos efectiva que trabajar directamente con la matriz de datos total.

VIII-5. CONCLUSIONES.

A partir de los resultados obtenidos con la aplicación de las técnicas de procesado de la señal para poder identificar en ambiente ruidoso un hilo patrón frente a hilos conductores de diferente longitud, podemos establecer las siguientes conclusiones:

1) La aplicación de un filtrado paso-baja, bien sea con filtros digitales o con ventanas espectrales permite una sustancial mejora en la capacidad de identificación con los FAR

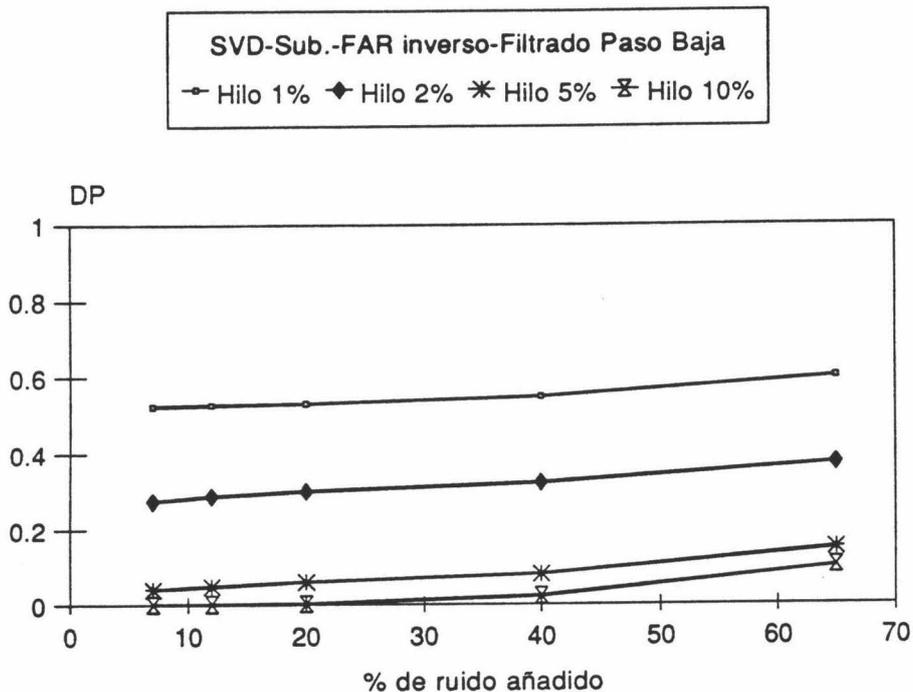


Figura (8.70). Parámetro de discriminación en función del % de ruido de pico tras el uso de los algoritmos SVD-Toeplitz con decimación 2 y FAR inverso-Filtro paso-baja.

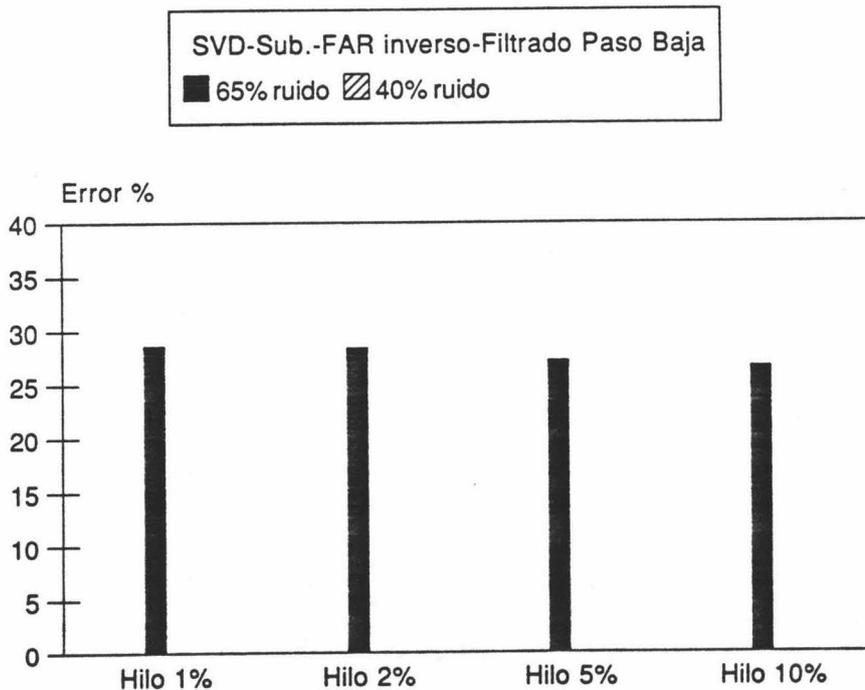


Figura (8.71). Error de identificación del hilo patrón cuando se usa el algoritmo compuesto SVD-Toeplitz con decimación 2 y FAR inverso-Filtro paso-baja.

en ambiente ruidoso, que se hace especialmente evidente para blancos relativamente distintos (hilos 5 % o 10 % más cortos). Para blancos más parecidos la identificación no es clara, siendo necesario un procesado adicional que se llevará a cabo con la aplicación de nuevas etapas. Entre todos los tipos de ventanas y filtros digitales estudiados, son los filtros de respuesta impulso infinita que presentan una mayor caída en frecuencia, los que llevan a menores valores del DP.

2) El uso conjunto de la etapa de modelado racional (SVD-Toeplitz) y Filtrado paso-baja conduce a un incremento general de la capacidad de identificación del FAR. En este caso se permite la identificación del hilo patrón hasta niveles de ruido de pico de un 40 % respecto a blancos muy parecidos (hilos tan sólo un 1 % más cortos) que no era posible anteriormente. Para niveles de ruido superiores aparece un error de identificación que marca un nivel umbral de ruido que puede contaminar la respuesta. Es de destacar que entre las diferentes posibilidades de aplicar la descomposición en valores singulares (SVD) con o sin división en subsecuencias, la decimación de la señal para descomponerla en subsecuencias sólo es efectiva si se dispone de un número elevado de datos. En cualquier caso, en los experimentos de simulación llevados a cabo parece deducirse que los resultados obtenidos tras la división en subsecuencias no compensan en tiempo de cálculo.

3) La adición de una nueva etapa de filtrado por el filtro de suavizado óptimo (FAR inverso) para formar el algoritmo compuesto SVD-Toeplitz-FAR inverso-Filtrado paso-baja, permite rebajar el umbral en el nivel permitido de ruido que aparecía para la identificación con blancos parecidos sin el uso de esta etapa. De esta forma, para niveles severos de ruido (65 %) el error de identificación no supera el 10 %. Para blancos más diferentes al patrón la identificación se vuelve más clara al obtenerse valores de DP más bajos. Por último destacar, que al igual que ocurría sin la aplicación de esta etapa, la división en subsecuencias en la SVD que tiene lugar previo al filtro de suavizado óptimo da lugar a resultados poco satisfactorios, siendo más efectiva el uso de la secuencia global de datos.

CAPITULO IX

COMPARACION ENTRE EL FAR Y EL E-PULSO.
EL FILTRO DE EXTINCION.



IX-1. INTRODUCCION.

En los capítulos anteriores de esta tercera parte hemos llevado a cabo un estudio de la técnica FAR y hemos analizado su comportamiento en la discriminación de blancos. Un problema interesante sería comparar el FAR con otros métodos de identificación, ya que así podrían extraerse conclusiones acerca del funcionamiento de esta técnica. En este capítulo nos proponemos llevar a cabo una comparación de la técnica de los filtros de aniquilación de resonancias con las técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes que han ido surgiendo en la literatura. La comparación entre algunas de estas técnicas ya ha sido realizada por otros autores. Así, entre las ondas discriminantes, el K-pulso fue relacionado con el E-pulso por Fok y Moffatt en 1987 [FOK87]. En este artículo se muestra que el K-pulso es un tipo particular de E-pulso. También existe una comparación entre el método de optimización y el E-pulso realizada por Bayard, Rothwell y colaboradores [BAY91] en 1991. En su artículo los autores comparan la potencia de discriminación de la onda sintetizada por cada uno de los métodos cuando hay ruido presente. Aunque ambos métodos usan el 'late-time' de la señal, la onda discriminante es sintetizada de forma diferente. Conclusión importante de su artículo es que el E-pulso es más robusto en presencia de ruido que la onda sintetizada por el método de optimización.

Queda pues, comparar el FAR con las técnicas de su mismo grupo para así tener un esquema completo de las técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes. En este capítulo, partiendo de las ecuaciones de diseño de los pulsos de extinción, llegaremos a la conclusión de que tanto el FAR analógico como el digital son un tipo particular de E-pulso, que pueden derivarse a partir de las ecuaciones de diseño de éste. Basándonos en esta comparación interpretaremos la función de las ventanas espectrales usadas con el FAR y veremos que la combinación FAR-ventana espectral equivale a un E-pulso

subseccional expandido en funciones base que son precisamente la ventana usada.

Con esta relación entre el FAR y el E-pulso se explican desde otro punto de vista las propiedades de discriminación del FAR señaladas en los capítulos anteriores. Además, como conocemos las características ideales que debe poseer un E-pulso para conseguir una discriminación óptima, se puede buscar un nuevo filtro de respuesta impulso finita que intente reunir las características adecuadas en frecuencia y que no necesite el uso de etapas previas de procesado de la señal. Buscando el mejor cumplimiento de estas especificaciones llegamos al diseño de un nuevo filtro FIR digital, que denominaremos filtro de extinción (FE), que obvia el uso de técnicas de mejora de la señal, indispensables como hemos visto para una discriminación fiable con el FAR.

Terminaremos el capítulo mostrando resultados de simulación del comportamiento del filtro de extinción, tanto en ambientes de ruido blanco como en ruido coloreado. En este último caso, cuando el ruido aditivo Gaussiano que contamine la respuesta dispersada del blanco tenga un espectro de potencia desconocido, usaremos las técnicas basadas en estadística de órdenes superiores desarrolladas en los capítulos II y III. En estos capítulos se habían propuesto un estimador para las correlaciones de alto orden, el estimador tipo covarianza, que permitía un adecuado modelado de las secuencias de cumulantes de señales sinusoidales amortiguadas. Como la señal dispersada del blanco obedece al mismo modelo, podemos usar los resultados obtenidos en aquellos capítulos. Así, cuando el ruido sea coloreado podemos trabajar con la secuencia de cumulantes de tercer o cuarto orden en vez de con datos, ya que adoptando una "slice" del intervalo de "slices" permitidas, tenemos asegurado que dichas secuencias retienen las mismas frecuencias de resonancia que los datos originales, lo cual nos va a permitir identificar el blanco.

Para tratar estos aspectos, el capítulo se ha organizado en 6 secciones. En la

sección IX-2 daremos una breve descripción de las ecuaciones de diseño de los pulsos de extinción, ya que serán necesarias para establecer la relación entre esta técnica y el FAR. Esta relación, tanto para el FAR analógico como para el FAR digital, se presenta en la sección IX-3. En la sección IX-4 veremos una forma alternativa de obtener los coeficientes del FAR digital desde el punto de vista de la teoría de sistemas. Usaremos todos estos resultados en la sección IX-5 para construir un nuevo filtro FIR, que denominamos filtro de extinción (FE), que permita la discriminación de blancos de radar sin las limitaciones inherentes al FAR. En la sección IX-6 estudiaremos las propiedades de discriminación del FE tanto en ambientes de ruido blanco como en ruido coloreado. En este último caso trabajaremos en estadística de cuarto orden de la señal. Terminaremos en la sección IX-7 con las conclusiones más importantes de este capítulo.

IX-2. DISEÑO DEL PULSO DE EXTINCIÓN (E-PULSO).

Debido a que todas las técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes están relacionadas con la técnica del pulso de extinción, y con objeto de comparar posteriormente con los filtros de aniquilación de resonancias, describiremos a continuación brevemente esta técnica. La síntesis de los E-pulsos puede hacerse en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.

IX.2.1 Síntesis del E-pulso en el dominio del tiempo

Según la definición del pulso de extinción dada en el capítulo VI, habrá que forzar a que la respuesta del blanco dada por la ecuación (A.38) sea idénticamente nula en "late-time" para un número N de resonancias naturales presentes en la respuesta impulso

del blanco. Si se impone esta condición, la señal $r(t)$ resultante de la excitación con el E-pulso $e(t)$ será [ROT85a] [ROT85b]:

$$r(t) = \int_0^{T_e} e(t') h(t-t') dt' = 0 \quad \forall t > T_L + T_e \quad (9.1)$$

y teniendo en cuenta la expresión (A.36) se obtiene que:

$$\int_0^{T_e} e(t') \sum_{n=1}^N a_n e^{\sigma_n(t-t')} \cos(\omega_n(t-t') + \phi_n) dt' = 0 \quad (9.2)$$

$$\sum_{n=1}^N a_n e^{\sigma_n t} \int_0^{T_e} e(t') e^{-\sigma_n t'} \cos(\omega_n(t-t') + \phi_n) dt' = 0 \quad (9.3)$$

$$\sum_{n=1}^N a_n e^{\sigma_n t} [A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) + B_n \text{sen}(\omega_n t + \phi_n)] = 0 \quad (9.4)$$

donde A_n y B_n vienen dadas por:

$$A_n = \int_0^{T_e} e(t') e^{-\sigma_n t'} \cos(\omega_n t') dt' \quad (9.5)$$

$$B_n = \int_0^{T_e} e(t') e^{-\sigma_n t'} \text{sen}(\omega_n t') dt'$$

Debido a que las funciones sinusoidales amortiguadas $e^{\sigma_n t} \sin(\omega_n t + \phi_n)$ y $e^{\sigma_n t} \cos(\omega_n t + \phi_n)$ son linealmente independientes, la ecuación (9.4) se cumple sí y sólo si $A_n = B_n = 0$ con $1 \leq n \leq N$, esto es:

$$\begin{cases} A_n = 0 \\ B_n = 0 \end{cases} \quad 1 \leq n \leq N \quad (9.6)$$

Las $2N$ ecuaciones (9.6) son las ecuaciones de diseño en el dominio del tiempo del E-pulso que aniquila las N resonancias naturales del blanco. Es importante destacar que estas ecuaciones son independientes de los parámetros \hat{k} y \hat{p} , o lo que es lo mismo el E-pulso es independiente de la orientación del blanco respecto a la dirección de propagación de la onda incidente.

IX.2.2 Síntesis del E-pulso en el dominio de la frecuencia.

De la ecuación (A.38) se puede obtener equivalentemente la respuesta del blanco a la excitación con el E-pulso en el dominio de la transformada de Laplace como [ROT85b] [ROT87]:

$$r(t) = L^{-1}(R(s)) = L^{-1}(E(s)H(s)) \quad (9.7)$$

y por otro lado:

$$H(s) = L(h(t)) = L\left(\sum_{n=1}^N a_n e^{(s_n t + j\phi_n)}\right) = \sum_{n=1}^N a_n \frac{e^{j\phi_n}}{s - s_n} \quad (9.8)$$

e introduciendo (9.8) en (12.7) se obtiene que:

$$r(t) = L^{-1} \left(\sum_{n=1}^N a_n E(s) \frac{e^{j\phi_n}}{s-s_n} \right) = \sum_{n=1}^N a_n E(s_n) e^{s_n t + j\phi_n} = \quad (9.9)$$

$$= \sum_{n=1}^N a_n |E(s_n)| e^{j \arctg \frac{\text{Im}g(E(s_n))}{\text{Re}(E(s_n))}} e^{(s_n t + j\phi_n)} = \sum_{n=1}^N a_n |E(s_n)| e^{\sigma_n t} e^{j(\omega_n t + \psi_n)} \quad (9.10)$$

donde

$$\psi_n = \phi_n + \arctg \left(\frac{\text{Im}g(E(s_n))}{\text{Re}(E(s_n))} \right) \quad (9.11)$$

y tomando la parte real en $r(t)$ se obtiene que:

$$r(t) = \sum_{n=1}^N a_n |E(s_n)| e^{\sigma_n t} \cos(\omega_n t + \psi_n) \quad (9.12)$$

Para que $r(t)$ sea nula para cualquier valor de t en la región del late-time, se tiene que cumplir que:

$$|E(s_n)| = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E(s_n) = 0 \\ E(s_n^*) = 0 \end{array} \right\} \quad 1 \leq n \leq N \quad (9.13)$$

Las ecuaciones (9.13) son las ecuaciones de diseño del E-pulso en el dominio de la frecuencia, y son análogas a las ecuaciones (9.6) en el dominio del tiempo.

IX.2.3 Expansión del E-pulso en funciones base.

Para sintetizar el E-pulso, es necesario tener una representación matemática de la forma de la forma de $e(t)$ con $2N$ parámetros variables. Una forma muy útil de representar el E-pulso es como una suma de funciones base de la forma [ROT85b]:

$$e(t) = \sum_{m=1}^M c_m f_m(t) \tag{9.14}$$

donde $f_m(t)$ es la m -ésima función base de un apropiado conjunto de funciones base linealmente independientes, y c_m sus amplitudes correspondientes. Si la ecuación (9.14) se sustituye en las condiciones de diseño en el dominio del tiempo (9.6) se obtiene un conjunto de $2N$ ecuaciones y M incógnitas c_m que puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} A_{m,n}^c \\ \text{-----} \\ A_{m,n}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

donde

$$A_{m,n}^{c,s} = \int_0^{T_e} f_m(t') e^{-\sigma_n t'} \begin{cases} \cos(\omega_n t') \\ \text{sen}(\omega_n t') \end{cases} dt' \tag{9.16}$$

Por otro lado en el dominio de la frecuencia las ecuaciones (A.20) se transforman teniendo en cuenta la ecuación (9.14), en:

$$\sum_{m=1}^M c_m F_m(s_n) = 0 \quad n=1...2N ; m=1...M \quad (9.17)$$

$$\sum_{m=1}^M c_m F_m(s_n^*) = 0$$

que dan lugar a la misma ecuación matricial (9.15) pero donde los elementos de la matriz de los coeficientes vienen dados por:

$$A_{m,n}^{c,s} = F_m \left(\begin{pmatrix} s_n \\ s_n^* \end{pmatrix} \right) ; F_m(s) = L(f_m(t)) \quad (9.18)$$

La elección del conjunto base está motivada por las siguientes consideraciones:

- simplicidad de representación
- simplicidad de cálculo
- capacidad para eliminar ruido
- posibilidad de representación continua del E-pulso
- completitud

Varios conjuntos base se han propuesto y utilizado en la representación del E-pulso, entre estos los más usuales son [ROT85b]:

- funciones base tipo coseno amortiguado

$$f_m(t) = e^{\tilde{\sigma}_m t} \cos(\tilde{\omega}_m t + \tilde{\phi}_m) \quad (9.19)$$

- funciones base tipo coseno de Fourier

$$f_m(t) = \cos\left((m-1)\frac{\pi t}{T_e}\right) \quad (9.20)$$

- funciones base tipo función impulso

$$f_m(t) = \delta(t-m\Delta) \quad (9.21)$$

- funciones base definidas a intervalos

$$f_m(t) = \begin{cases} p(t-(m-1)\Delta) & (m-1)\Delta < t < m\Delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9.22)$$

IX.2.4 E-pulsos forzado y natural

Una interpretación física del pulso de extinción, relacionado con el número de funciones base que se utilicen para expandirlo, se puede dar descomponiéndolo en dos componentes, tal y como muestra la figura (9.1), esto es:

$$e(t) = e^f(t) + e^e(t) \quad (9.23)$$

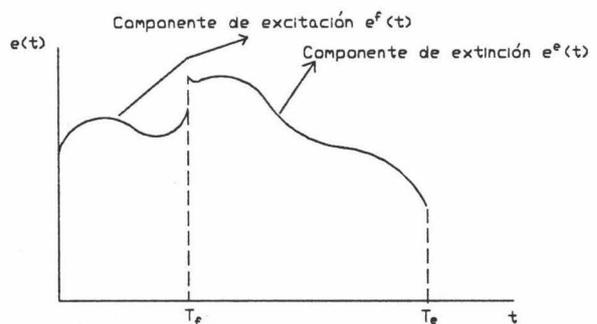


Figura (9.1): Descomposición del E-pulso en una componente de excitación y otra de extinción.

donde $e^f(t)$ o componente forzada, es una componente de excitación que se extiende entre

$t=0$ y $t=T_f$ y $e^c(t)$ o componente de extinción anulará la respuesta del blanco producida por la componente de excitación $e^f(t)$, y que se extiende entre T_f y T_e . Con esta descomposición y eligiendo $M=2N$ la ecuación matricial (9.14) se puede poner de la siguiente forma:

$$\sum_{m=1}^{2N} A_{n,m}^{c,s} c_m = -F_n^{c,s} \quad n = 1 \dots N \quad (9.24)$$

que constituyen un sistema de ecuaciones $2N \times 2N$ de cuya resolución se obtienen las amplitudes c_m que caracterizan al E-pulso. Las matrices A y F vienen dadas por:

$$A_{n,m}^{c,s} = \int_{T_f}^{T_e} f_m(t') e^{-\sigma_n t'} \begin{Bmatrix} \cos(\omega_n t') \\ \text{sen}(\omega_n t') \end{Bmatrix} dt' \quad (9.25)$$

$$F_n^{c,s} = \int_0^{T_f} e^f(t') e^{-\sigma_n t'} \begin{Bmatrix} \cos(\omega_n t') \\ \text{sen}(\omega_n t') \end{Bmatrix} dt' \quad (9.26)$$

Según esta descomposición pueden distinguirse dos tipos básicos de E-pulsos:

-E-pulso forzado, que tiene una componente $e^f(t)$ distinta de cero y por tanto dará lugar a que el sistema de ecuaciones (9.25) tenga solución para toda duración T_e del pulso incidente. Como caso particular $e^f(t)$ se puede tomar como una función más del conjunto de funciones base $\{f_m\}$, lo que equivaldría a tomar un conjunto de $2N+1$ funciones base, pudiéndose elegir el coeficiente de esta última como constante de normalización para obtener un valor deseado de la energía del pulso incidente.

-E-pulso natural, que no presenta componente de excitación $e^f(t)$ resultando un sistema (9.15) homogéneo por lo que sólo tendrá solución para determinadas duraciones.

IX-3. SÍNTESIS ALTERNATIVA DEL FAR

Se pueden obtener los mismos coeficientes de diseño del FAR desde el punto de vista de la teoría de sistemas. De esta forma se verá más clara la actuación del FAR. Para ello partimos de la transformada de Laplace de la componente ϵ del campo dispersado en el 'late-time' dado por (A.35)

$$H_1^s(\vec{r}, t, \eta) = \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{R_n(\vec{r}, \eta)}{s - s_n} \quad t > T_0 \quad (9.27)$$

en donde hemos considerado únicamente los $2N$ modos dominantes que contribuyen casi por completo al 'late-time'. Si queremos eliminar estos modos habrá que cancelar los $2N$ polos responsables de la oscilación amortiguada en la respuesta temporal del blanco. Esto se consigue diseñando un sistema lineal invariante temporalmente, causal, que llamaremos FAR, con $2N$ ceros en su función de transferencia. Teniendo en cuenta que cuando una señal excite a dicho sistema la salida será la convolución temporal entre la respuesta impulso del sistema y la respuesta del blanco, lo que equivale en el dominio de la frecuencia al producto de la función de transferencia del sistema y la transformada de Laplace de la onda dispersada, cuando dicha señal de excitación preceda del blanco para el que el sistema ha sido diseñado cancelará sus $2N$ polos, dando una respuesta temporal nula a partir de un tiempo $T_L \geq T_0 + T_k$, siendo T_k la duración de la respuesta impulso del sistema, que es finita al constar solamente de ceros.

De lo dicho en el párrafo anterior, la respuesta en frecuencia de este sistema que aniquile la onda dispersada en el 'late-time' será

$$K(s) = \prod_{\substack{i=-N \\ i \neq 0}}^N (s - s_i) = \left\{ \prod_{i=1}^N (s - s_i) (s - s_i^*) \right\} \quad (9.28)$$

la cual para efectos de implementación, y para evitar una respuesta impulsiva podemos considerar de la forma

$$K(s) = \left\{ \prod_{i=1}^N (s-s_i) (s-s_i^*) F(s) \right\} \quad (9.29)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función arbitraria $f(t)$ utilizada para implementar este sistema, derivable con continuidad hasta el orden $2N$. Esta función sirve para producir un suavizado que reduzca los efectos de diferenciación analógica de alto orden. Si comparamos la ecuación (9.29) con la ecuación (6.16) vemos que este sistema es el FAR analógico definido en el capítulo VI, cuya respuesta impulso hemos obtenido a partir de la teoría de sistemas.

Para obtener el FAR digital desde el punto de vista de la teoría de sistemas, consideremos un simulador digital (sistema digital tal que su salida son las muestras del sistema analógico que simula) del sistema analógico dado por (9.29). La obtención de los coeficientes del simulador digital, representado en este caso por una ecuación en diferencias homogénea no recursiva, puede hacerse fácilmente a partir de los ceros de su función de transferencia, relacionados con los del sistema analógico que simula mediante

$$\begin{aligned} z_i &= e^{p_i T} \\ z_i^* &= e^{p_i^* T} \end{aligned} \quad i = 1 \dots N \quad (9.30)$$

donde T es el periodo de muestreo [REI83].

Conocidos los ceros de la función de transferencia, esta vendrá dada por

$$K(z) = \prod_{i=1}^N (z-z_i) (z-z_i^*) \quad (9.31)$$

La ecuación (12-31) es idéntica a la (6.22). Veámoslo obteniendo los coeficientes del FAR que aniquile el modo i -ésimo. Para obtener estos coeficientes realizamos el producto correspondiente a dicho modo

$$(z-z_i)(z-z_i^*) = z^2 - (z_i+z_i^*)z + z_i z_i^* \quad (9.32)$$

Utilizando la relación entre los ceros del sistema analógico y el digital dado por (9.31), y teniendo en cuenta que $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, la ecuación (9.32) se convierte en

$$z^2 - e^{\sigma_i T} 2 \cos(\omega_i T) z + e^{2\sigma_i T} \quad (9.33)$$

Si multiplicamos o dividimos la ecuación en diferencias por una constante, dicha ecuación no cambia ya que sigue conservando los mismos ceros. Si dividimos la ecuación (9.33) por el coeficiente de z obtenemos

$$-\frac{1}{2} \frac{e^{-\sigma_i T}}{\cos(\omega_i T)} z^2 + z - \frac{1}{2} \frac{e^{\sigma_i T}}{\cos(\omega_i T)} \quad (9.34)$$

e implementándola en forma causal queda

$$-\frac{1}{2} \frac{e^{\sigma_i T}}{\cos(\omega_i T)} z^{-2} + z^{-1} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\sigma_i T}}{\cos(\omega_i T)} \rightarrow \rightarrow \rightarrow a_n z^{-2} + z^{-1} + b_n \quad (9.35)$$

ecuación que es equivalente a (6.18), cuyos coeficientes a_n y b_n vienen dados por

$$a_n = -\frac{1}{2} \frac{e^{\sigma_n T}}{\cos(\omega_n T)} \quad b_n = -\frac{1}{2} \frac{e^{-\sigma_n T}}{\cos(\omega_n T)} \quad (9.36)$$

que son idénticos a los dados en (6.20).

IX-4. RELACION ENTRE EL FAR Y E-PULSO.

Como comentábamos en la introducción, uno de los objetivos importantes de este capítulo es comparar el FAR con las otras técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes existentes. En la literatura han ido comparándose estas técnicas. Tal fueron los casos del K-pulso, que Fok y Moffatt en 1987 [FOK87] concluyeron que era un tipo particular de E-pulso, o con las técnicas de optimización, que fueron comparadas con el E-pulso por Bayard, Rothwell y colaboradores [BAY91] en 1991. En esta sección mostraremos que los coeficientes tanto del FAR analógico como del digital se pueden obtener a partir de las ecuaciones de diseño del E-pulso, lo que de hecho convierte al FAR en un E-pulso determinado [CAR94]. Desde el punto de vista del E-pulso, el papel de las ventanas espectrales que usamos en el capítulo VII lo asumen las funciones base en las que se expande el E-pulso, lo que permite analizar el comportamiento de esta técnica.

IX.4.1 FAR analógico y E-pulso.

Para sintetizar el E-pulso se necesita un conocimiento previo de las resonancias naturales del blanco, como es también el caso del FAR. En el dominio de la frecuencia las ecuaciones de diseño del E-pulso vienen dadas por (9.13), siendo $E(s)$ la transformada de Laplace del E-pulso. A partir de ellas se puede observar que una forma fácil de cumplirlas es elegir $E(s)$ como

$$E(s) = \{ (s-s_1) (s-s_1^*) \dots (s-s_N) (s-s_N^*) \} \quad (9.37)$$

Para evitar una transformada temporal impulsiva, podemos añadir una función suave con

derivada continua hasta orden $2N$, que notaremos $f(t)$, cuya transformada de Laplace $F(s)$ no tenga ceros en las zonas de frecuencia de interés del espectro. De esta forma la transformada del E-pulso será

$$E(s) = \left\{ (s-s_1) (s-s_1^*) \dots (s-s_N) (s-s_N^*) \right\} F(s) \quad (9.38)$$

Como la respuesta en frecuencia de un sistema se obtiene a partir de su función de transferencia analógica evaluando esta en $s = j\omega$, la respuesta en frecuencia será

$$E(\omega) = E(s) \Big|_{s=j\omega} = \left\{ (j\omega-s_1) (j\omega-s_1^*) \dots (j\omega-s_N) (j\omega-s_N^*) \right\} F(\omega) \quad (9.39)$$

que es equivalente a la respuesta en frecuencia del FAR analógico dado en (6.16). Por lo tanto hemos derivado el FAR analógico a partir del esquema E-pulso, utilizando las ecuaciones de diseño en el dominio de la frecuencia, lo que muestra que el FAR analógico es una forma de pulso de extinción.

IX.4.2 FAR digital y E-pulso.

Para buscar una relación entre el E-pulso y el FAR digital consideremos un E-pulso forzado de duración T_e expandido sobre un conjunto de funciones base impulso (9.21)

$$e(t) = e^f(t) + e^e(t)$$

$$e^f(t) = \alpha_0 \delta(t) \quad (9.40)$$

$$e^e(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \delta(t-m\Delta)$$

siendo $M=2N$ el numero de funciones base para $e^e(t)$, $\Delta=T_e/M$, $e^f(t)$ la componente forzada de duración $T_f=\Delta$, y $e^e(t)$ la componente de extinción que se extiende desde T_f a $T_e= M\Delta$. Las amplitudes $\{\alpha_m\}$ se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones equivalente a (9.15)

$$\begin{bmatrix} M_{n,m}^c \\ \dots \\ M_{n,m}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n=1,\dots,N \\ m=0,\dots,M \end{matrix} \quad (9.41)$$

donde

$$M_{n,m}^{c,s} = \int_0^{T_e} \delta(t'-m\Delta) e^{-\sigma_n t'} \begin{Bmatrix} \cos(\omega_n t') \\ \sin(\omega_n t') \end{Bmatrix} dt' \quad (9.42)$$

Para comparar con las ecuaciones de síntesis del FAR, consideraremos un E-pulso que aniquile solamente el modo i -ésimo. En este caso, la ecuación matricial (9.41) queda de la forma

$$\begin{bmatrix} M_{i,m}^c \\ M_{i,m}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m = 0,1,2 \quad (9.43)$$

en la cual

$$M_{i,m}^{c,s} = e^{-\sigma_i m \Delta} \begin{Bmatrix} \cos(\omega_i m \Delta) \\ \sin(\omega_i m \Delta) \end{Bmatrix} \quad (9.44)$$

siendo 1 el modo que se ha eliminado.

La ecuación (9.44) es un conjunto de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, que son las amplitudes del E-pulso. Para resolverlo, una de las amplitudes α_m puede elegirse arbitrariamente. Eligiendo $\alpha_1=1$, la ecuación (9.44) queda de la forma

$$\begin{aligned}\alpha_0 + e^{-\sigma_1 \Delta} \cos(\omega_1 \Delta) + \alpha_2 e^{-\sigma_1 2\Delta} \cos(\omega_1 2\Delta) &= 0 \\ e^{-\sigma_1 \Delta} \sin(\omega_1 \Delta) + \alpha_2 e^{-\sigma_1 2\Delta} \sin(\omega_1 2\Delta) &= 0\end{aligned}\tag{9.45}$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones lineales (9.45), obtenemos que

$$\alpha_{0,2} = -\frac{1}{2} \frac{e^{\pm \sigma_1 \Delta}}{\cos(\omega_1 \Delta)}\tag{9.46}$$

En un E-pulso expandido en funciones base impulso Δ es el tiempo que transcurre entre dos impulsos de amplitud determinada por las ecuaciones de diseño. Cuando en el proceso de identificación este se convoluciona con la respuesta del blanco, la convolución continua se reduce a una convolución discreta con señales muestreada a intervalos Δ . Entonces, a efectos prácticos, es equivalente considerar tanto la señal como el E-pulso señales muestreadas con un intervalo de muestreo $T = \Delta$. Como la forma de actuación es la misma y ya que los coeficientes de (9.46) son idénticos a los del FAR digital dados en (6.20), con los coeficientes a_n y b_n equivalentes a α_0 y α_2 respectivamente, la analogía con el FAR digital es total [CAR94].

Para construir un E-pulso que aniquile los N-modos de la respuesta del blanco, se convolucionan cada uno de los E-pulsos forzados sintetizados para aniquilar cada modo natural presente en la onda dispersada. De esta forma se obtiene un pulso de duración

$2N\Delta$ expandido en $2N+1$ funciones base impulso, de forma análoga al FAR digital que está formado por $2N+1$ coeficientes (6.21).

IX.4.3 Discusión. Analogía entre las funciones base y las ventanas espectrales.

La conclusión es, pues, que el FAR, desarrollado a partir de un esquema en principio diferente no es más que un tipo particular de E-pulso. En el caso práctico más importante del FAR digital, este se puede considerar un E-pulso forzado expandido en funciones impulso. Estos tipos de E-pulso fueron estudiados por Rothwell [ROT85b] poniendo de manifiesto las siguientes características

- 1) Las funciones base impulso constituyen el conjunto base más simple. Como el conjunto de los E-pulsos expandidos en funciones base impulso (o FAR digital) es el más fácil y rápidamente sintetizable a partir de las resonancias naturales y la convolución continua se reduce a discreta, el proceso de identificación es muy rápido, y la implementación puede hacerse usando técnicas estándar digitales.
- 2) Debido a usar convoluciones discretas se produce un pobre suavizado del ruido que inevitablemente contamina la señal. Por lo tanto cuando el ruido es importante este conjunto base es una mala elección.

En resumen, la simplicidad de implementación del FAR tiene como contrapartida una alta sensibilidad al ruido presente en la señal. En el caso de otros pulsos estudiados en la literatura, como es el caso de los E-pulsos rectangulares [ROT85a] que usan funciones base continuas a intervalos, o los E-pulsos polinómicos [CAR93] que son ondas suaves y derivables con continuidad en distintos órdenes en toda su duración, la convolución

continua que tiene lugar en el proceso de identificación de la señal entre ésta y el E-pulso tiene el efecto de promediar y alisar los datos para reducir así el nivel de ruido presente en la señal.

Esta propiedad de suavizado que hace que los E-pulsos se comporten bien frente al ruido se puede ver muy bien estudiando su forma de actuación. Consideremos una clase general de E-pulsos forzados $e(t)$ expandidos en un conjunto base de funciones pulso subseccionales (9.22)

$$e(t) = \sum_{n=0}^N c_n p(t-n\Delta) \quad (9.47)$$

donde $p(t)$ es una función pulso (9.22) que es cero para $t < 0$ y $t > \Delta$, siendo Δ el ancho del pulso. Esta ecuación puede escribirse como

$$e(t) = \left\{ \sum_{n=0}^N c_n \delta(t-n\Delta) \right\} * p(t) \quad (9.48)$$

En el segundo miembro de la ecuación (9.48) se puede identificar el primer termino como un E-pulso expandido en funciones impulso o FAR (9.40) convolucionado con una función pulso $p(t)$ que juega el papel de una ventana en el dominio de la frecuencia o ventana espectral, que suaviza la señal para eliminar parte del ruido presente.

En el dominio de la frecuencia también puede verse el papel de suavizado que llevan a cabo las funciones base en el E-pulso. La transformada de Laplace del pulso definido en (9.47) viene dada por

$$E(s) = P(s) \sum_{n=0}^N c_n e^{-sn\Delta} \quad (9.49)$$

donde $P(s)$ es la transformada de Laplace de la función pulso $p(t)$. El espectro, como se observa de la ecuación (9.49) está compuesto por dos partes, el primer factor es $P(s)$ que tienen la forma de un filtro paso-baja que elimina el ruido de alta frecuencia de la señal y compensa la amplificación de las altas frecuencias del segundo factor, que cumple las especificaciones de diseño del E-pulso (9.13) a través de la elección de las amplitudes.

El FAR digital, al ser la forma del E-pulso más simple, pierde esta capacidad de suavizado de la señal. Sin embargo, hay un hecho importante digno de tener en cuenta. Ya que el campo dispersado medido experimentalmente está muestreado en intervalos discretos temporales, y como el E-pulso es conocido explícitamente, con objeto de obtener una convolución lo más precisa posible para eliminar la mayor cantidad de ruido en la señal, se requiere una interpolación entre puntos de la respuesta muestreada. Dependiendo del tipo de interpolación usado, tendremos que la convolución se transformará en una integración de tipo rectangular, trapezoidal etc. Sin embargo cuando se usa el FAR digital, se actúa directamente sobre los datos muestreados de la señal, sin necesidad de interpolar. Esto unido a la sencillez de implementación hace que el proceso de identificación sea muy rápido. La desventaja de su sensibilidad al ruido puede solventarse usando técnicas digitales de tratamiento previo de la señal, que actúen sobre los datos de forma análoga a como actuaban las funciones base en los otros tipos de E-pulsos, suavizando la señal mediante filtros paso-baja o otras técnicas que aumenten la relación señal-ruido efectiva, tal y como hemos hechos en los capítulos anteriores.

La diferencia entre usar FAR digitales con ventanas espectrales u otros tipos de filtrado paso-baja y E-pulsos expandidos en otros tipos de funciones base es que se

pueden usar técnicas digitales para implementar las etapas de suavizado y que éstas se pueden diseñar separadamente de la parte propiamente de aniquilación, dada por el sistema FAR. Esta última propiedad puede ser útil para controlar los parámetros propios de la etapa de suavizado, como por ejemplo en el caso de una ventana espectral serían el ancho de transición del lóbulo principal, la atenuación de la banda de stop, o simplemente la forma de la ventana, independientemente de la parte propia de aniquilación de los modos de la señal, evitando así la necesidad de sintetizar diferentes y más complicados E-pulsos cada vez que se desea cambiar algunos de los parámetros de la etapa de suavizado.

Estas características pueden hacer interesante utilizar el FAR con una etapa de suavizado previa en la discriminación de blancos de radar. En este proceso, se sintetiza primeramente un conjunto de FAR parciales que aniquilen cada modo natural contenido en la respuesta del blanco, que luego se convolucionan para construir el FAR global, y posteriormente se diseña una etapa de suavizado cuyos parámetros se elijan de forma que eliminen la mayor cantidad de ruido posible, posibilitando la identificación en niveles severos de ruido.

En este punto podría resultar interesante llevar a cabo una comparación mediante simulaciones numéricas entre el FAR con las distintas ventanas espectrales descritas en el apéndice B y los diversos tipos de E-pulso. Para ilustrar estos casos con un ejemplo, vamos a tomar el caso del hilo cilíndrico conductor y vamos a comparar los resultados obtenidos cuando se trata de discriminar entre un hilos de diferentes longitudes relativas. Para ello se ha sintetizado la respuesta impulso de un hilo cilíndrico delgado conductor con relación longitud/radio de 200 y la de otros hilo de longitudes 5 y 10 % más cortas. Posteriormente se filtran mediante FAR y E-pulsos que han sido sintetizados para eliminar las 5 primeras resonancias del hilo patrón. Como nos interesa estudiar la capacidad de

discriminación cuando el campo eléctrico dispersado es ruidoso, contaminamos la respuesta del blanco con ruido aditivo, blanco y gaussiano para unos valores de relación señal-ruido (SNR) de 5, 10, 15, 20, 25 y 30 dB, siendo $SNR = 10 \log(e_s/e_r)$ donde e_s es la energía de la señal y e_r es la energía del ruido en la ventana de análisis (99,5% de la energía total de la señal). Los valores obtenidos del valor del parámetro de discriminación se muestran en las figuras (9.2) y (9.3) cuando se trata de discriminar entre un hilo patrón y un hilo un 5% y un 10% más corto respectivamente.

En la obtención de dichas figuras se han usado E-pulsos sintetizados con funciones base rectangulares y E-pulsos polinómicos lineales [CAR93], mientras que cuando se usa el FAR la señal es filtrada por ventanas o filtros digitales paso-baja.

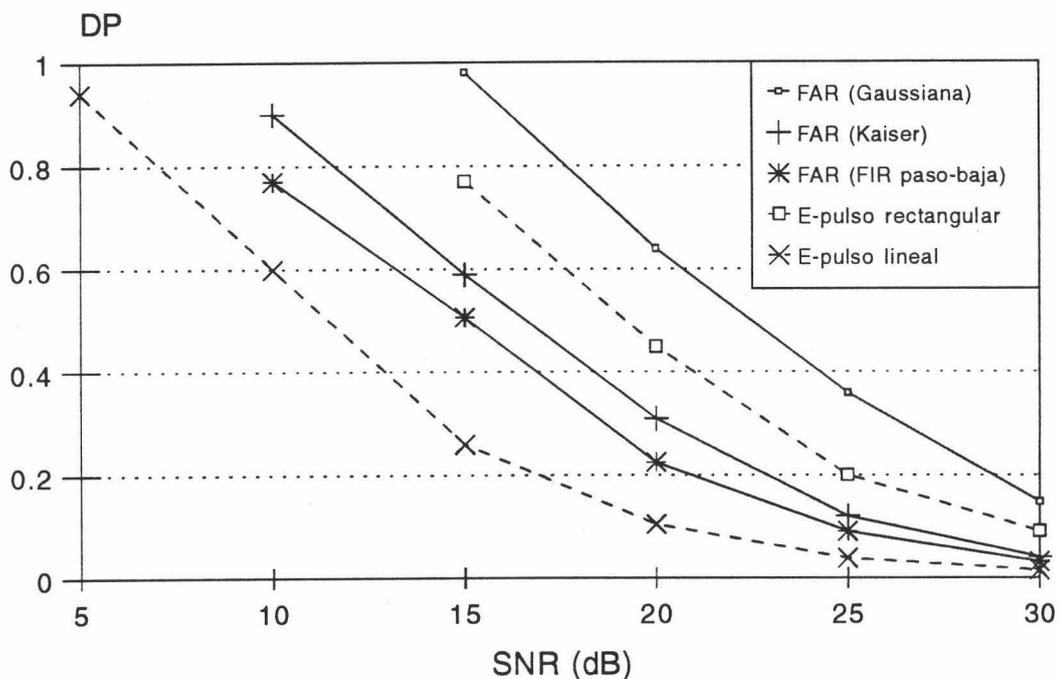


Figura (9.2). DP frente a la SNR para el caso de discriminación entre un hilo patrón y un hilo un 5 % más corto.

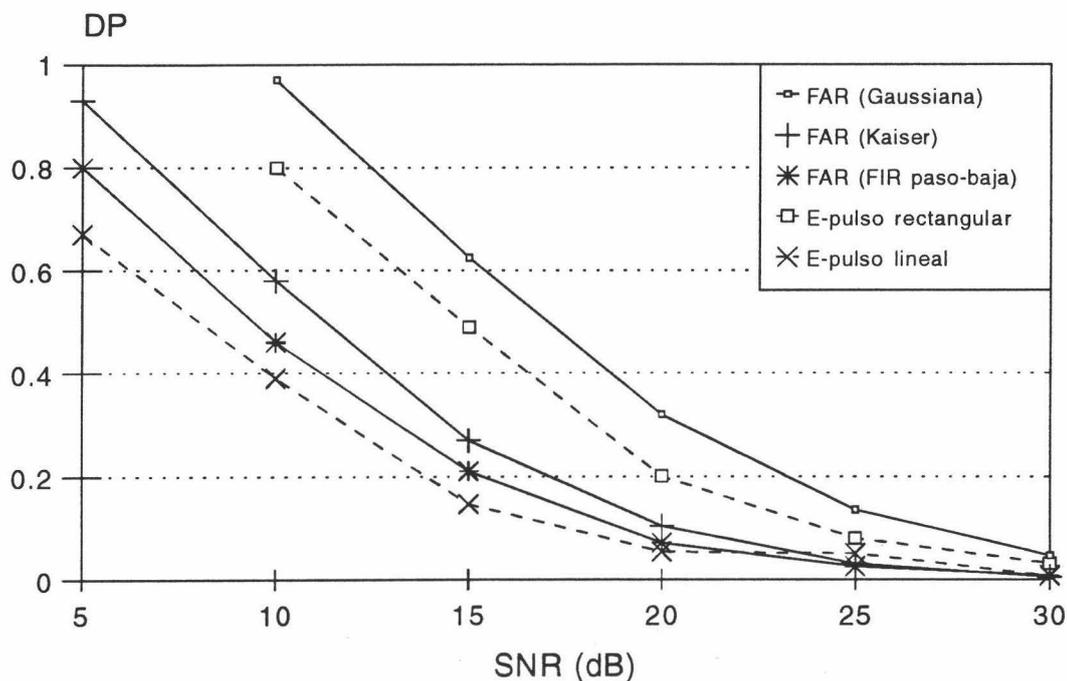


Figura (9.3). DP frente a la SNR para el caso de discriminación entre un hilo patrón y un hilo un 10 % más corto.

Las ventanas que se han usado corresponden a las ventanas Gaussiana y de Kaiser-Bessel son las que permitían obtener los mejores resultados. De manera análoga, se han usado un filtro FIR paso-baja diseñado por el método del ventaneo (ventana Kaiser-Bessel), que son los que permitían obtener mejores resultados como se vio en el capítulo VIII. En dichas figuras puede observarse que el comportamiento es similar, aunque usando el FAR con ventanas de Kaiser-Bessel y con filtros FIR paso-baja permite obtener una mejora significativa sobre la ventana Gaussiana y los E-pulsos rectangulares. Los mejores resultados se obtienen como era de esperar con los E-pulsos lineales, que son los que presentan mayor suavidad en la síntesis en el dominio del tiempo y un espectro con mayor concentración de energía en las bandas espectrales de la señal.

IX-5. DISEÑO DE UN NUEVO FILTRO FIR. EL FILTRO DE EXTINCIÓN.

A partir de la discusión anterior queda claro que el FAR es un E-pulso simple, de hecho el más simple que puede construirse y precisamente por ello es muy sensible al ruido aditivo. Una pregunta importante sería cual es el mejor E-pulso, mejor en el sentido de que permite la discriminación precisa entre blancos hasta niveles bajos de SNR. Rothwell, uno de los creadores de la técnica E-pulso, tras estudiar exhaustivamente en [ROT95b] las propiedades de discriminación de varios tipos de E-pulsos llega a la conclusión de que los mejores resultados en presencia de ruido se obtienen con formas de onda relativamente suaves, evitando la presencia de discontinuidades. En el espectro esto se traduce en una forma ideal que debería ser cero en un entorno de las frecuencias complejas de resonancia que han de ser eliminadas, constante entre ellas, y cero fuera del ancho de banda considerado. Con este tipo de espectro todas las resonancias naturales serían eliminadas, mientras que las del blanco desconocido serían excitadas con amplitudes iguales. En la figura (9.4) se muestra cuál sería la forma ideal del espectro de un E-pulso diseñado para el caso simple de un blanco de 4 modos naturales de idéntico coeficiente de amortiguamiento.

El espectro mostrado en esta figura no corresponde a una onda de duración finita ya que está limitado en frecuencia. Buenas aproximaciones a esta forma ideal se obtienen para el caso de los hilos cilíndricos conductores con los pulsos naturales DC. La cuestión que se nos plantea es como podríamos diseñar un sistema digital o filtro cuya respuesta en frecuencia cumpla las especificaciones dadas. Por supuesto, el filtro debe ser de respuesta impulso finita, ya que las señales que hemos de filtrar son transitorias y debe tener una longitud lo menor posible para tener así un intervalo más amplio con el que identificar la señal.

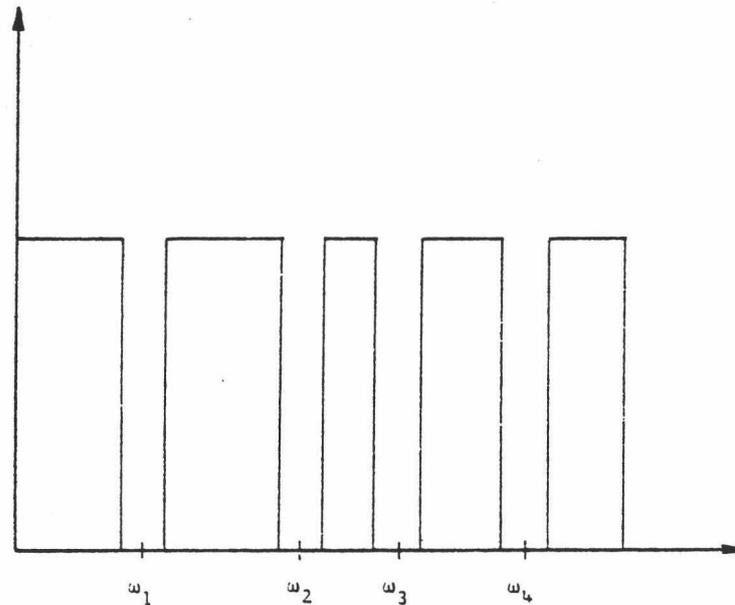


Figura (9.4). Espectro ideal de un E-pulso diseñado para eliminar cuatro modos del blanco de idénticos factores de amortiguamiento.

El filtro que vamos a tratar de diseñar, y que vamos a denominar filtro de extinción (FE) va a tratar de cumplir lo más adecuadamente posible los siguientes especificaciones:

A) Su función de transferencia ha de poseer ceros en las frecuencias de resonancia del blanco. De esta forma nos aseguramos la eliminación de la respuesta dispersada del blanco para el cual está diseñado.

B) Ha de poseer un comportamiento paso-baja, esto es, fuera del ancho de banda que estamos usando para la identificación ha de mostrar una respuesta en frecuencia nula. Con esta segunda especificación evitamos la posible confusión del sistema debido al ruido de alta frecuencia o a las probables señales dispersadas de otros objetos presentes en la señal de retorno de radar.

C) En los intervalos entre las frecuencias naturales debería tener una respuesta en magnitud constante. Sin embargo sería deseable que esas zonas fueran amplificadas, de forma que para aquellos blancos distintos a los que el filtro ha sido diseñado que posean

resonancias en esas zonas, éstas sean excitadas dando lugar a una salida más energética.
D) Ha de ser de respuesta impulso finita (FIR).

Para cumplir estos cuatro requisitos, el filtro de extinción se va a diseñar por el siguiente algoritmo:

- 1) Partiendo del conocimiento de las resonancias naturales del blanco que se pretende identificar, construimos un sistema que aniquile dichas resonancias. Para ello, al igual que se hacía con el FAR, para cada frecuencia compleja construimos el filtro parcial de 3 coeficientes dado por (9.36), y convolucionamos todos estos filtros parciales para conseguir un filtro de $2N+1$ coeficientes, siendo N el número de resonancias naturales a aniquilar.
- 2) Fuera del ancho de banda útil para la identificación, en la función de transferencia insertamos ceros a frecuencias equiespaciadas. Para ello, recorreremos toda la zona a eliminar espaciando las frecuencias a intervalos regulares, y tomando como factor de amortiguamiento común el de la resonancia natural menos amortiguada. Con estas frecuencias complejas construimos el sistema que aniquile esta banda, obteniéndose los filtros parciales a partir de (9.36) y convolucionando cada uno de ellos con el sistema del apartado 1. El espaciado del intervalo se elige llegando a un compromiso mediante dos intereses opuestos: la longitud del filtro debe ser pequeña, lo que equivale a incrementar el espaciado, y la banda debe quedar suficientemente aniquilada, lo que exigiría un espaciado pequeño en frecuencia. Para esta etapa podría usarse cualquier otro filtro FIR paso baja cuya frecuencia de corte esté situada en el comienzo de la banda no útil. En este caso es importante asegurar que ningún cero del filtro cae en la región de resonancias del blanco, es por ello por lo que hemos escogido el método del mapeo de ceros del plano s al plano Z para diseñar el filtro paso-baja.
- 3) Si pretendemos realzar el intervalo entre dos frecuencias de resonancia del blanco para así excitar las resonancias de otros posibles blancos diferentes, nuestro sistema debería

poseer un "pico" en cada una de las zonas intermedias de frecuencia. La forma de conseguir esto es que la función de transferencia del filtro posea polos localizados entre esas zonas. Sin embargo esto nos llevaría a un filtro de respuesta impulso infinita, que violaría el requisito 4) que nos habíamos propuesto. La forma de cumplirlo es diseñar un filtro FIR cuya respuesta en frecuencia aproxime lo mejor posible a ese filtro IIR. El procedimiento consta de los siguientes pasos:

- 3.1) Diseñamos un filtro IIR con polos en el plano Z localizados en frecuencias intermedias a las de las resonancias naturales del blanco. Notamos este filtro como $D(z)$.
- 3.2) Buscamos un filtro FIR de función de transferencia $W(z)$ que sea lo más parecida posible a la del filtro $D(z)$:

$$W(z) \approx \frac{1}{D(z)} \quad (9.50)$$

o lo que es lo mismo

$$W(z) D(z) = 1 + E(z) \quad (9.51)$$

donde $E(z)$ es la transformada Z de una secuencia de error $e(n)$ que se comete al aproximar $1/D(z)$ por $W(z)$. En el dominio del tiempo la ecuación (9.51) puede escribirse:

$$w(n) * d_n = \delta(n) + e(n) \quad (9.52)$$

donde $\delta(n)$ es la función delta de Dirac discreta, que es no nula únicamente en $n=0$ donde vale la unidad. Si $w(n)$ y d_n son secuencias de duración $p+1$ y $q+1$ respectivamente, la convolución de la ecuación (9.52) será de longitud $p+q+1$, y la secuencia de error $e(n)$ también. Teniendo esto en cuenta, buscamos el filtro $w(n)$ de forma que minimice el error cuadrático global, es decir:

$$\sum_{n=0}^{p+q} |e(n)|^2 = \sum_{n=0}^{p+q} |\delta(n) - \mathbf{b}_n * \mathbf{w}(n)|^2 \quad (9.53)$$

Minimizar la expresión (12-53), es decir, minimizar la suma de errores cuadráticos en todo el rango de disponible, eligiendo los parámetros $w(1)$, $w(2)$, ..., $w(p)$, con $w(0) = 1$ es conocido en la teoría de la estimación espectral de modelación paramétrica como el método de autocorrelación [MAR87]. Para resolver este problema existe un algoritmo muy eficiente conocido como el algoritmo recursivo de Levinson-Durbin [KAY88]. Este método asegura que el filtro así obtenido $W(z)$ es estable, es decir, sus ceros permanecen dentro del círculo unidad.

3.3) Convolucionamos el aproximante FIR $w(n)$ con el filtro del apartado anterior para obtener el filtro de extinción global.

La longitud del FE viene determinada principalmente por los filtros parciales de los apartados 2) y 3), y más especialmente por este último apartado. Cuantos más coeficientes tenga el filtro parcial $w(n)$ mejor aproximará al filtro IIR. Ello tiene la desventaja de incrementar de forma inadecuada la longitud del filtro, quedando pocos datos para llevar a cabo la identificación. Además, al incrementar la longitud de $w(n)$ pueden introducirse ceros indeseables en la banda de frecuencias de resonancia de la señal, llevando a resultados no deseados. Por consiguiente es aconsejable por muchas razones mantener la longitud del filtro pequeña, de forma que su respuesta impulso nunca supere a la mitad del número de datos total de la señal.

Como ejemplo de una función de transferencia de un filtro de extinción, en la figura (9.5) se muestra la de un FE diseñado para aniquilar las 5 primeras resonancias de un hilo cilíndrico conductor de relación longitud/radio de 200.

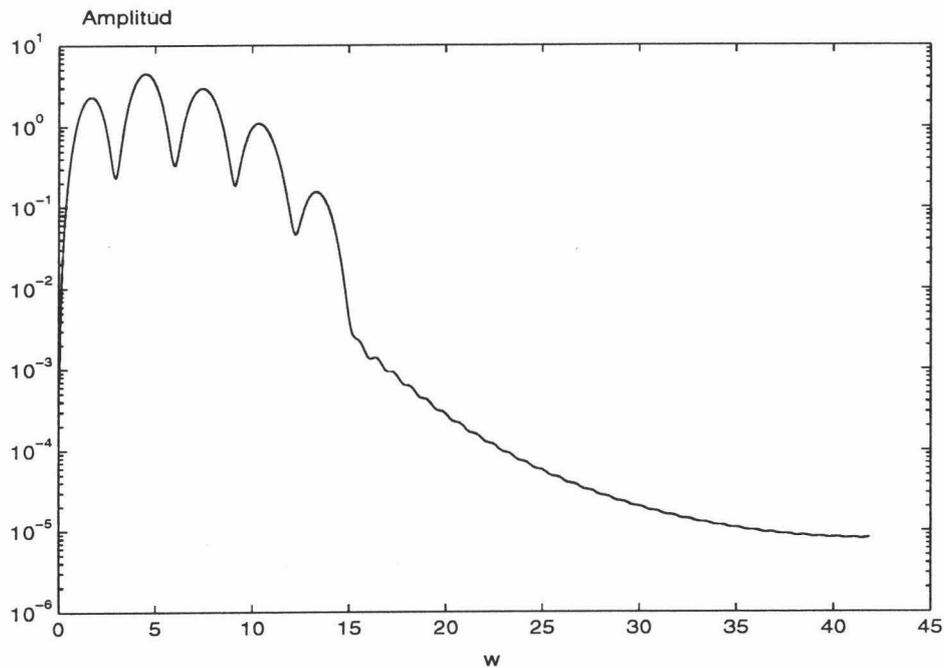


Figura (9.5). Función de transferencia de un Filtro de Extinción de 96 coeficientes diseñado para eliminar las cinco primeras resonancias del hilo cilíndrico.

En esta figura se observa como la región de frecuencia superior a la quinta resonancia localizada en $w=15.24$ ha sido eliminada, y como los intervalos entre las frecuencias naturales han sido realzados. De esta forma esperamos aumentar la capacidad de discriminación de estos filtros FIR sin necesidad de llevar a cabo un procesado previo de la señal.

IX-6. DISCRIMINACION EN PRESENCIA DE RUIDO COLOREADO.

A lo largo de los últimos años, el ruido contaminante considerado para testear el funcionamiento de la técnica basadas en el diseño de ondas discriminantes ha sido siempre de tipo blanco, no existiendo estudios referentes ni a su comportamiento ni a la presentación de posibles modificaciones de la técnica en presencia de ruido coloreado. La

razón de ello puede encontrarse en el hecho de que a diferencia del ruido blanco, el ruido coloreado, por definición, puede introducir en la respuesta del blanco frecuencias o modos adicionales a las propias resonancias naturales del blanco, lo que podría conducir a una importante disfunción de una técnica tan apoyada en el uso de las resonancias naturales (posición y número de ellas) como son estas técnicas.

El análisis basado en HOS mostrado en los capítulos II y III para el caso de señales sinusoidales amortiguadas, ha demostrado su éxito en la aniquilación de ruido aditivo Gaussiano, independientemente de su contenido espectral, y por lo tanto se presenta como una buena y prometedora motivación para ser usado en el problema de la discriminación mediante filtros de extinción, o FAR con etapas previas, en ambientes de ruido coloreado. Es por ello que en esta sección, se propone el uso conjunto de la técnica del FE y un procesado de señal basado en la estadística de cuarto orden (análisis triespectral), para intentar tratar con éxito el problema de la discriminación de blancos de radar mediante la síntesis de filtros de extinción, cuando la respuesta del blanco desconocido se contamina con ruido coloreado que altere la región de resonancias de dicha respuesta. Es interesante hacer ver que el procedimiento que se propone a este respecto, no está restringida al caso de ruido coloreado, sino que al igual que todo el análisis de señales basado en HOS, no precisa de un conocimiento del contenido espectral del ruido contaminante. Esto hace que tal y como se mostrará en los resultados de esta sección, la técnica propuesta no sólo permite considerar con éxito el caso de ruido coloreado, sino que además se puede discriminar hasta menores valores de SNR en el caso de ruido blanco que usando simplemente la técnica FE. La elección del tratamiento en cuarto orden viene motivada por los resultados del capítulo III, que llegan a la conclusión de que el análisis triespectral es superior al biespectral para el caso de señales sinusoidales amortiguadas.

Merece la pena destacar el hecho de que esta sección es una aplicación del tratamiento de estadística de órdenes superiores, presentado y analizado con detalle en los capítulos I-V, al problema de la discriminación de blancos de radar mediante la síntesis de ondas discriminantes, cuando la respuesta del blanco está contaminada de ruido aditivo cuyo contenido espectral no se conoce a priori.

IX.6.1. Procedimiento de identificación de la señal de radar usando cumulantes.

Consideremos que se dispone de un Filtro de Extinción $h(n)$ sintetizado para aniquilar la respuesta en el período del late-time de un blanco patrón con resonancias naturales conocidas. Consideremos también que la respuesta a un pulso estrecho de un blanco desconocido el cual tratamos de discriminar o identificar con el blanco patrón, está contaminada por un ruido aditivo Gaussiano $w(n)$, es decir, la respuesta ruidosa es $r'(n)=r(n)+w(n)$ (ver figura (9.6)). La aplicación de la técnica de discriminación en su forma directa, consiste, tal y como se ha desarrollado en el capítulo VIII y como se muestra en la figura (9.6)-a, en una convolución de $r'(n)$ con $h(n)$ para obtener una señal de salida $c(n)$, cuya región del late-time nos permite determinar si el blanco desconocido es o no el blanco patrón. La técnica de los Filtros de Extinción aplicada de esta forma, basa su éxito o fracaso tanto en el uso del proceso de filtrado o convolución como en la utilización de filtros cuya función de transferencia sea poco sensible al ruido.

Como alternativa a este esquema original de la técnica FE o FAR, se propone la inclusión justo antes del proceso de filtrado por el sistema $h(n)$ del blanco patrón de una etapa previa de estimación de la secuencia de cumulantes de cuarto orden de la señal ruidosa $C_4(n)$. Esta secuencia es posteriormente filtrada por el sistema de respuesta impulso $h(n)$ para proceder a su identificación (ver figura (9.6-b)).

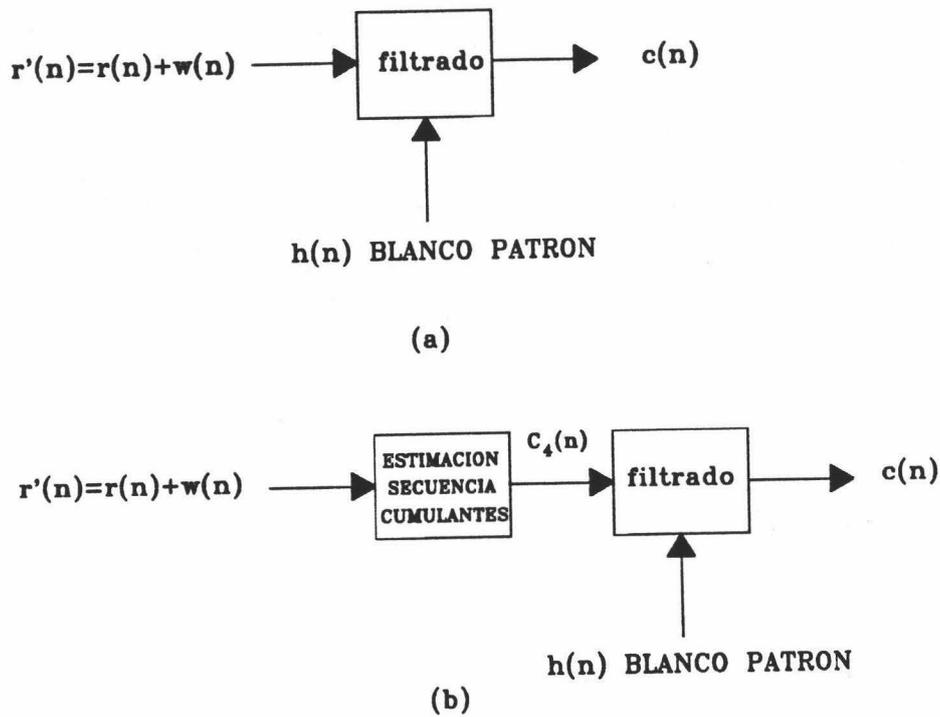


Figura (9.6): Esquema de discriminación en presencia de ruido. a) Método original usando datos. b) Usando los cumulantes de la señal.

La justificación de usar cumulantes en vez de datos proviene de que tal y como predice el SEM, la señal no ruidosa $r(n)$ es un proceso armónico exponencialmente amortiguado, y puede aplicarse los resultados obtenidos en el capítulo II de la presente Memoria. En concreto, hacemos uso de la propiedad de que ciertas "slices" en el espacio de cumulantes retienen la estructura de la señal, y por lo tanto pueden ser útiles para identificar al blanco mediante cualquier procedimiento o técnica que use resonancias naturales. Como el número de datos es obligatoriamente finito, para estimar la secuencia de cumulantes de cuarto orden ha de usarse el estimador tipo covarianza propuesto en el capítulo II, que nos asegura el mantenimiento de la misma estructura de las secuencias de los cumulantes teóricas para los cumulantes estimados.

IX.6.2 Resultados de simulaciones.

Para testear de forma comparativa la capacidad de discriminación de los Filtros de Extinción usando la propia señal y mediante el uso de la secuencia de cumulantes de la respuesta del blanco, se han considerado, al igual que en el capítulo VIII tres blancos concretos como son tres hilos de diferente longitud. Uno es el hilo patrón (LR=1.0), otro es un 10% más corto (LR=0.9) y el tercero es un 10% más largo (LR=1.1). La respuesta impulso no ruidosa, $r(n)$, para el hilo patrón se ha generado teóricamente, usando las cinco primeras resonancias naturales y un ángulo de orientación $\theta=30^\circ$. Para las simulaciones se han usado 200 muestras en la región del late-time (que para el blanco patrón empieza en $T_L=1.73$ L/c), con un período de muestreo $\Delta t=0.075$ L/c. Así mismo, se han sintetizado tres filtros de extinción correspondientes a cada uno de los tres blancos posibles. Como tratamos de identificar el hilo patrón, la señal filtrada a través del filtro de extinción correspondiente a dicho hilo deberá exhibir una energía mínima comparada con la de las señales filtradas por otros filtros sintetizados usando las resonancias de los blancos alternativos.

Nuestro interés es tratar de identificar la respuesta del hilo patrón cuando está contaminada con ruido aditivo. Para ello se ha contaminado con diferentes niveles de ruido Gaussiano tanto blanco como coloreado. Para comparar los efectos de ambos tipos de ruido la figura (9.7) muestra los espectros de energía de la respuesta ruidosa del hilo patrón, así contaminada con 10 dB de ruido blanco y 10 dB de ruido coloreado respectivamente. El ruido coloreado se ha obtenido de la misma forma que se expuso en el capítulo III. En dicha figura puede verse que mientras el ruido blanco no altera la zona de resonancias, el ruido coloreado si que lo hace, ya que introduce polos superfluos junto a los polos del blanco, representados en el espectro como picos en la región de bajas frecuencias. Este hecho, como veremos a continuación, repercute negativamente en el

funcionamiento de la técnica FE con datos para discriminar entre estos tres blancos, lo cual se puede corregir en gran medida mediante el uso de la secuencia de cumulantes de cuarto orden.

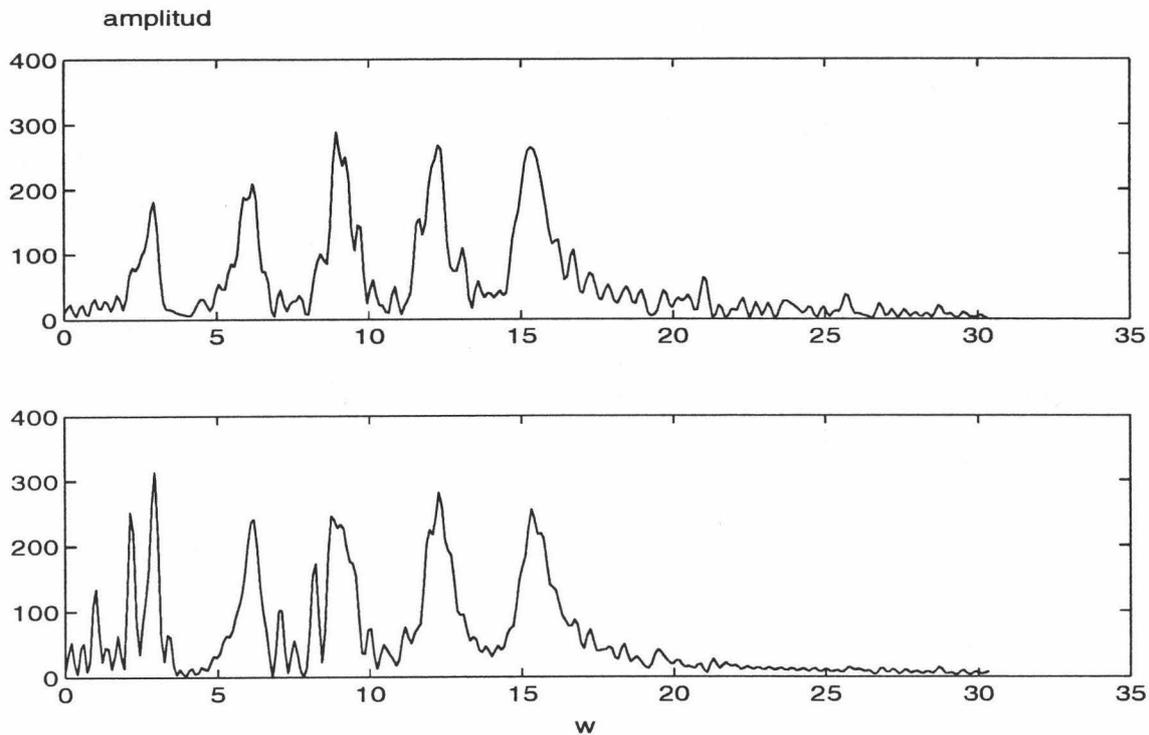


Figura (9.7): Espectros de energía de la respuesta impulso ruidosa del hilo cilíndrico a 30 contaminada con 10 dB de ruido blanco y coloreado respectivamente.

La capacidad de discriminación entre estos dos hilos de longitudes diferentes y el hilo patrón de la técnica FE usando datos y usando cumulantes, para distintos niveles de ruido blanco y coloreado se presenta en las tablas (IX.1) y (IX.2), respectivamente. Las tablas presentan el parámetro de discriminación EDR definido como [GAL95b]

$$\text{EDR} = 10 \log \frac{E_c}{\min(E_c)} \quad (5.56)$$

donde E_c es la energía del late-time de la señal filtrada del blanco patrón, es decir, $c(t)$.

Además en la definición de EDR, $\min(E_c)$ representa el valor mínimo de E_c de entre todos los E_c 's calculados para cada uno de los blancos a identificar. En el ejemplo concreto elegido, $\min(E_c)=\min(E_c(LR=1),E_c(LR=1.1),E_c(LR=0.9))$. Según esta definición, el método discriminará al blanco patrón de blancos diferentes, cuando EDR sea 0dB para el blanco patrón y distinto de 0dB para los blancos con diferente geometría. Además, en este último caso, es decir, cuando el blanco no sea el patrón, convendrá que EDR sea lo más grande posible.

Las tablas (IX.1)-a y (IX.2)-a presentan el valor de EDR obtenido con la señal de salida filtrada por cada uno de los tres filtros de extinción correspondientes a los tres blancos cuando se añaden niveles de 15, 10, 5, 0, -5 y -10 dB de ruido blanco y coloreado, respectivamente. Además dichos valores se obtienen en todos los casos usando el método de discriminación del FE original usando datos (figura (9.6)-a), con Filtros de Extinción de 56 coeficientes sintetizados para anular las cinco primeras resonancias naturales del hilo patrón y de hilos de longitudes un 10 % mayores y menores que el patrón. Además dichos filtros incluyen un cero en el origen para eliminar cualquier tipo de componente continua o de baja frecuencia que pueda perturbar a la discriminación. Los resultados son un valor medio sobre los obtenidos en 100 ejecuciones Monte-Carlo del ruido aditivo, tanto blanco como coloreado. En todos casos el ruido coloreado se ha obtenido filtrando ruido Gaussiano blanco a través de un sistema ARMA con parámetros AR [1, -2.2, 1.77, -0.52] y parámetros MA [1, -1.25]. Este ruido es añadido a la señal de salida de forma que se obtenga la razón señal-ruido (SNR) deseada, donde usamos la definición de SNR dada en el capítulo VIII.

Por otra parte, las tablas (IX.1)-b y (IX.2)-b representan los resultados obtenidos del parámetro EDR con el método de discriminación del FE usando la secuencia de cumulantés en la slice horizontal (0,0), cuando éstos son estimados mediante el estimador

estándar sesgado en ruido blanco y coloreado respectivamente. Los resultados obtenidos cuando la secuencia de cumulantes se obtiene mediante el estimador tipo covarianza propuesto en el capítulo II de esta Memoria viene dado en las tablas (IX.1)-c y (IX.2)-c.

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	10.63	0	10.20
10	6.42	0	6.07
5	3.22	0	2.95
0	1.35	0	1.18
-5	0.52	0	0.41
-10	0.20	0	0.13

(a)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	16.09	0	16.02
10	11.35	0	11.29
5	7.03	0	7.02
0	3.56	0	3.66
-5	1.18	0	1.39
-10	0	0.23	0.20

(b)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	16.2	0	16.15
10	11.5	0	11.43
5	7.21	0	7.19
0	3.81	0	3.92
-5	1.60	0	1.87
-10	0.28	0	0.57

(c)

Tabla (IX.1): Parámetro EDR en dB calculado en ambiente de ruido blanco. a) Técnica FE usando datos. b) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador estándar c) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza.

En el proceso de identificación, los cumulantes han sido estimados mediante los dos tipos de estimadores a partir de los datos de la señal para obtener una secuencia de 110 cumulantes, los cuales serán posteriormente filtrados por los FE alternativos.

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	8.51	0	7.71
10	4.95	0	3.68
5	2.71	0	0.86
0	2.25	0.59	0
-5	2.41	1.15	0
-10	2.45	1.34	0

(a)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	14.05	0	13.8
10	9.52	0	9.05
5	5.69	0	4.84
0	3.06	0	1.74
-5	1.75	0.17	0
-10	2.79	1.59	0

(b)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	14.19	0	13.9
10	9.66	0	9.19
5	5.87	0	5.01
0	3.31	0	2.00
-5	2.04	0	0.32
-10	2.77	1.04	0

(c)

Tabla (IX.2): Parámetro EDR en dB calculado en ambiente de ruido coloreado. a) Técnica FE usando datos. b) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador estándar c) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza.

Puede verse de la tabla (IX.1)-a que el FE usando datos es capaz de identificar correctamente entre los tres blancos alternativos cual de ellos es el hilo de longitud patrón, hasta un nivel de ruido blanco añadido de -10 dB, si bien a partir de 0 dB las diferencias obtenidas mediante el parámetro EDR son poco significativas entre los blancos. Para el caso de ruido coloreado, la tabla (IX.2)-a muestra que el método FE usando datos sólo es capaz de clasificar la señal recibida como proveniente del blanco correcto hasta un nivel de ruido añadido de 5 dB, ya que a partir de este valor de SNR el blanco es clasificado como un hilo de longitud relativa $LR=1.1$. Además, de la comparación de estas dos tablas puede verse que los valores de EDR, aún para los casos de SNR para los que el método original discrimina, son mucho mayores cuando el ruido es blanco que cuando el ruido es coloreado. Es decir, tal y como se esperaba, el método FE usando datos es mucho más sensible a la presencia de ruido coloreado que a la de ruido blanco.

Las tablas (IX.1)-b y (IX.2)-b muestran los resultados de identificación que se obtendrían si el método FE utiliza la secuencia de cumulantes estimada mediante el estimador estándar. En los capítulos II y III habíamos analizado las propiedades de este estimador y llegábamos a la conclusión que no era adecuado para la estimación de cumulantes o correlaciones de señales exponencialmente amortiguadas cuando se dispone únicamente de un número finito de datos. Este mal modelado de la secuencia de momentos causa que en ruido blanco este método falle a partir de un valor de la relación señal-ruido de -5 dB, decidiendo de forma errónea que el blanco patrón es el blanco con $LR=1.1$. Los propios errores deterministas en la estimación de la secuencia de cumulantes mediante este estimador y el propio ruido aditivo causan que sea preferible el uso de datos con la técnica FE en ruido blanco. En ruido coloreado los resultados mejoran respecto del caso del método del FE usando datos, pero se sitúan en un umbral de 0 dB, límite de SNR a partir del cual la técnica falla identificando la señal recibida como la del hilo de $LR=1.1$.

De la tablas (IX.1)-c y (IX.2)-c, puede verse que el método FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza da los mejores resultados. En ruido blanco se consigue discriminar correctamente en todo el rango de SNR considerado, a diferencia de hasta los -5 dB que permite el FE usando el estimador estándar. Además se obtienen mayores valores del parámetro EDR respecto al caso del FE usando datos, lo que indica una mejor discriminación mediante esta técnica. La mejora introducida al usar la secuencia de cumulantes estimada mediante el estimador covarianza se hace más evidente en el caso de ruido coloreado, como muestra la tabla (IX.2)-c. Para este caso observamos que podemos llegar hasta un umbral de SNR de -5 dB para obtener una correcta identificación de la señal patrón recibida, a diferencia de los umbrales de 5 y 0 dB obtenidos mediante el método FE usando datos y cumulantes estimados mediante el estimador estándar respectivamente. Además, puede verse que para valores de SNR en los cuales la técnica propuesta discrimina correctamente, los valores de EDR son mucho más elevados que los obtenidos mediante las otras dos alternativas. De esta forma, la combinación de los resultados obtenidos en los capítulos II y III para la secuencia de cumulantes de señales complejas amortiguadas con la técnica de los Filtros de Extinción permite no sólo aumentar en unos 10 dB el rango de valores de SNR para el que se discrimina correctamente en ruido coloreado, sino que aumenta y mantiene la capacidad de discriminación en todo el rango de SNR en ruido blanco.

Finalmente es interesante comprobar la influencia que la longitud del Filtro de Extinción puede tener en los resultados de discriminación. Para ello, las tablas (IX.3)-a, y (IX.3)-b muestran el valor del parámetro EDR obtenido con una longitud de filtro de 36 coeficientes en ruido blanco cuando se usan el método FE con datos y con cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza respectivamente.

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	9.27	0	8.95
10	5.27	0	5.04
5	2.44	0	2.32
0	0.94	0	0.91
-5	0.33	0	0.34
-10	0.11	0	0.14

(a)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	15.53	0	14.41
10	8.91	0	9.91
5	4.92	0	6.15
0	2.10	0	3.59
-5	0.60	0	2.10
-10	0.02	0	0.88

(b)

Tabla (IX.3): Parámetro EDR en dB calculado en ambiente de ruido blanco mediante un FE de 36 coeficientes. a) Técnica FE usando datos. b) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza.

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	5.63	0	8.95
10	3.00	0	5.04
5	3.80	2.13	0
0	4.51	3.36	0
-5	4.79	3.82	0
-10	4.89	3.98	0

(a)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	9.91	0	14.41
10	5.95	0	9.91
5	3.18	0	6.15
0	2.59	0.83	0
-5	3.68	2.46	0
-10	5.26	4.19	0

(b)

Tabla (IX.4): Parámetro EDR en dB calculado en ambiente de ruido coloreado mediante un FE de 36 coeficientes. a) Técnica FE usando datos. b) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza.

El mismo caso en ambientes de ruido coloreado se muestra en las tablas (IX.4)-a y (IX.4)-b. Con respecto a los resultados obtenidos mediante el filtro de 56 coeficientes observamos un empobrecimiento de los resultados de discriminación que se traduce en un menor valor del parámetro EDR y en un umbral superior de SNR para una discriminación correcta en ruido coloreado. Este decrecimiento de la capacidad de discriminación se debe a que al disminuir el número de los coeficientes del filtro, las características de diseño ya no se cumplen con un nivel adecuado, dando lugar a una aproximación muy inexacta del filtro dado por la ecuación (9.50).

El caso en que se aumenta la longitud del filtro viene recogido en las tablas (IX.5)-a y (IX.5)-b, que representan el EDR en ruido blanco obtenido mediante un Filtro de extinción de 96 coeficientes usando datos y cumulantes estimados con el estimador tipo covarianza. Las tablas (IX.6)-a y (IX.6)-b representan el caso de ruido coloreado.

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	6.23	0	5.23
10	3.08	0	2.43
5	1.26	0	0.93
0	0.45	0	0.30
-5	0.15	0	0.06
-10	0.06	0.02	0

(a)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	14.35	0	13.14
10	9.77	0	8.63
5	5.79	0	4.88
0	2.93	0	2.40
-5	1.44	0	1.26
-10	0.87	0	0.69

(b)

Tabla (IX.5): Parámetro EDR en dB calculado en ambiente de ruido blanco mediante un FE de 96 coeficientes. a) Técnica FE usando datos. b) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza.

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	8.81	0	8.95
10	5.17	0	5.04
5	2.80	0	0.87
0	2.14	0.49	0
-5	2.25	1.06	0
-10	2.30	1.27	0

(a)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	17.80	0	16.58
10	13.07	0	11.82
5	8.74	0	7.42
0	5.32	0	3.83
-5	3.36	0	1.51
-10	3.01	0.40	0

(b)

Tabla (IX.6): Parámetro EDR en dB calculado en ambiente de ruido coloreado mediante un FE de 96 coeficientes. a) Técnica FE usando datos. b) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza.

La comparación de estas tablas con los resultados obtenidos para el filtro de 56 coeficientes (tablas (IX.1) y (IX.2)) muestran que se obtienen prácticamente los mismos resultados del valor del EDR, lo que demuestra que a partir de un valor de unos 56 coeficientes el incrementar la longitud del filtro no se traduce en una mejora en la discriminación. Para interpretar los resultados de estas tablas se ha de tener en cuenta que incrementar la longitud del filtro equivale a disminuir la cantidad efectiva de datos en la convolución, por lo que un aumento del número de coeficientes de los Filtros de Extinción no conlleva necesariamente mejores resultados de identificación.

Por último vamos a estudiar la influencia en los resultados de identificación del tipo particular de ruido coloreado usado en las simulaciones. Las tablas (IX.7)-a y (IX.7)-b recogen el valor del EDR obtenido mediante un Filtro de Extinción de 56 coeficientes usando tanto datos como cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza en ruido coloreado generado filtrando ruido blanco a través del sistema FIR usado en el

capítulo III [0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0, 0, 0.5, 0.6, 0.7, 0.6, 0.5]. A diferencia del sistema ARMA usado anteriormente, el filtro FIR anterior es un filtro paso-baja que introduce componentes espectrales en el intervalo de las dos primeras resonancias del hilo.

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	10.47	0	9.82
10	6.46	0	5.41
5	3.67	0	1.90
0	2.45	0.22	0
-5	2.82	1.15	0
-10	2.96	1.48	0

(a)

SNR	LR=0.9	LR=1	LR=1.1
15	16.37	0	16.25
10	11.64	0	11.40
5	7.43	0	6.87
0	4.35	0	3.17
-5	2.75	0	0.64
-10	3.45	1.42	0

(b)

Tabla (IX.7): Parámetro EDR en dB usando un FE de 56 coeficientes calculado en ambiente de ruido coloreado generado a través del sistema FIR del capítulo 3. a) Técnica FE usando datos. b) Técnica FE usando cumulantes estimados mediante el estimador tipo covarianza.

Podemos observar a partir de estas tablas que los resultados coinciden con los anteriormente expuestos con el anterior ruido coloreado, de forma que el uso de cumulantes con el Filtro de Extinción permite extender el intervalo de aplicabilidad de esta técnica en 10 dB en ruido coloreado. Este hecho muestra una vez más que el análisis basado en estadística de ordenes superiores es más robusto al ruido coloreado independientemente de su contenido espectral, siempre que éste sea estadísticamente Gaussiano.

IX-7. CONCLUSIONES.

Los conclusiones más importantes que pueden extraerse de este capítulo son los siguientes:

- 1) El FAR, que aparecía como una técnica más basada en el diseño de ondas discriminantes, no es más que un tipo particular de pulso de extinción expandido en funciones base tipo impulso. Esto permite completar el esquema de las técnicas de identificación de blancos de radar, ya que las restantes ya habían sido comparadas entre sí en la literatura.
- 2) Las ecuaciones de síntesis del FAR pueden obtenerse igualmente haciendo uso de la teoría de sistemas, buscando un sistema que aniquile la respuesta especificada del blanco mediante la introducción de ceros en las frecuencias complejas de resonancia. La síntesis digital puede realizarse a través del mapeo de los ceros analógicos al dominio de la transformada Z .
- 3) Los dos nuevos puntos de vista con los que se puede abordar la construcción de los filtros de aniquilación de resonancias nos ha planteado el problema de la síntesis de un sistema de identificación óptimo. Buscando un filtro digital de respuesta impulso finita cuya función de transferencia reúna lo mejor posible las características espectrales que idealmente debe poseer cualquier onda discriminante, hemos propuesto el denominado Filtro de Extinción (FE), que soluciona los problemas de amplificación de las altas frecuencias que presenta FAR y permite una discriminación adecuada de los blancos sin la necesidad de etapas previas de procesado de la señal.

4) Finalmente se ha estudiado la discriminación en presencia de ruido coloreado, ruido que no ha sido considerado anteriormente en la bibliografía. Haciendo uso de los resultados obtenidos en el capítulo II para el modelado de las secuencias de correlaciones de alto orden de señales sinusoidales exponencialmente amortiguadas, se ha propuesto un nuevo procedimiento de identificación de la señal de radar usando correlaciones o cumulantes de la señal. Las simulaciones llevadas a cabo usando como sistema de identificación el Filtro de Extinción propuesto igualmente en este capítulo, muestran el éxito de utilizar los cumulantes o correlaciones de la señal en vez de datos para llevar a cabo la identificación, así como la potencialidad de la técnica de los Filtros de Extinción, ya que la identificación es posible incluso en niveles severos de ruido Gaussiano blanco o coloreado. Con estos resultados, se extiende la aplicabilidad de las técnicas de identificación de blancos de radar al caso de que la señal dispersada este contaminada con ruido Gaussiano de espectro de potencia desconocido.



CONCLUSIONES



Esta Memoria se ha centrado en el estudio y desarrollo de técnicas de procesado de señal mediante estadística de órdenes superiores. Las principales aportaciones de este trabajo se pueden englobar en tres grandes grupos:

- A) Desarrollo de nuevas técnicas de estimación de parámetros de sinusoides exponencialmente amortiguadas mediante el uso de secuencias de correlaciones de alto orden.
- B) Estudio teórico del problema de la identificación de sistemas MA de fase no mínima mediante estadística de órdenes superiores y propuesta de nuevos algoritmos.
- C) Aplicación de técnicas de procesado de señal a un problema físico concreto: la identificación y discriminación de blancos de radar en ambientes de ruido blanco y coloreado.

Dentro de cada uno de estos grupos las aportaciones concretas, sin excesivo detalle, ya que cada capítulo ha incluido un apartado que las recoge, son:

A1) Se ha realizado un estudio teórico sobre las regiones en el espacio de las correlaciones de alto orden adecuadas para recuperar los parámetros de exponenciales complejas amortiguadas en el caso de disponer de un número finito o infinito de datos de la señal. Este análisis nos ha permitido proponer un nuevo tipo de estimador, denominado estimador tipo covarianza, que reduce los errores deterministas asociados con una estimación imperfecta de las correlaciones de alto orden a partir de un número finito de datos y permite superar algunas deficiencias de estimadores anteriores.

A2) Para la implementación en algoritmos del estimador tipo covarianza se han

propuesto tres matrices de correlaciones de alto orden. Particularmente interesantes desde un punto de vista teórico son las matrices de estructura no Hankel usando varias "slices" horizontales, debido a su vinculación con el método de la covarianza de la predicción lineal. Los resultados de simulación obtenidos permiten afirmar que se obtiene un incremento de entre 5 y 10 dB en los valores umbrales de la SNR, en el caso disponer de un número reducido de datos contaminados con ruido coloreado. Estos resultados extienden asimismo la aplicabilidad de las técnicas basadas en correlaciones de alto orden a casos en los que se dispone de un único registro de datos de longitud finita.

A3) También se ha abordado el problema de la identificabilidad a partir de una única "slice" unidimensional usando resultados recientes desarrollados para sistemas lineales. Ello nos ha permitido obtener un algoritmo consistente para extraer los parámetros de la señal. Este algoritmo se ha aplicado usando la secuencia de cumulantes de cuarto orden al caso de disponer de un número de datos finito contaminados con ruido Gaussiano.

B1) En lo que respecta a la identificación de procesos MA, se ha realizado un estudio teórico que ha permitido obtener relaciones generales entre los poliespectros de ordenes k y/o $k-1$ ($k \geq 2$) de la señal de salida. Estas relaciones conducen a un conjunto de ecuaciones lineales que combinan los cumulantes de salida de órdenes k y $k-1$ del proceso con los coeficientes del sistema, ecuaciones que se han mostrado útiles para identificar un sistema lineal de fase no mínima excitado por una secuencia no gaussiana. Estas ecuaciones generalizan las usadas en métodos lineales existentes basados en mínimos cuadrados con la ventaja añadida de que el uso de la secuencia de autocorrelación de la señal es opcional en estas ecuaciones. Esta característica las convierte en especialmente útiles para estimar los coeficientes del sistema MA a partir de medidas de la señal contaminadas con ruido Gaussiano coloreado de espectro de energía desconocido.

B2) Basándose en estas ecuaciones generales se han propuesto nueve algoritmos lineales basados en una solución de mínimos cuadrados, que combinan estadística de tercer y cuarto orden. En este caso ha de distinguirse entre sistemas MA excitados con procesos de función de densidad de probabilidad simétrica ó no. Para los primeros se han propuesto algoritmos que utilizan exclusivamente estadística de cuarto orden, y para los segundos se usarán algoritmos que combinen estadística de tercer y cuarto orden. En los casos estudiados los algoritmos propuestos permiten obtener mejores estimaciones de los coeficientes del sistema que los algoritmos lineales basados en una solución de mínimos cuadrados existentes en la bibliografía.

B3) Junto a la propia estimación de los coeficientes del sistema, se ha propuesto un algoritmo de selección del orden del modelo. El criterio propuesto de selección del orden se basa solamente en estadística de órdenes superiores o cumulantes por lo que en principio no es sensible al ruido aditivo Gaussiano, y es de fácil implementación. Los resultados de simulación obtenidos mediante este algoritmo permiten afirmar que se obtienen buenas estimaciones hasta un nivel de SNR de 5 dB.

C1) Finalmente se ha realizado un estudio de la técnica de los filtros de aniquilación de resonancias para la discriminación de blancos de radar, proponiéndose, a partir de un estudio exhaustivo de los parámetros de diseño del FAR, etapas de procesado previo que mejoren la relación señal-ruido efectiva para permitir la identificación precisa del blanco.

C2) Se ha propuesto la utilización de una etapa de procesado de la señal compatible con el proceso de identificación en la que se propone la introducción de una nueva etapa de filtrado de suavizado (FAR inverso) que busca realzar las características espectrales de la señal para conducir a una identificación más efectiva. Fruto de la comparación de las ecuaciones de diseño de los FAR con los pulsos de extinción se ha obtenido que los

FAR son un tipo particular de E-pulso. A partir de esta analogía se ha propuesto un nuevo filtro, el filtro de extinción, diseñado de forma óptima para la identificación de blancos, que ha obtenido resultados muy significativos en los ejemplos estudiados.

C3) Se ha tratado el problema de la discriminación de blancos de radar en ambiente de ruido coloreado. Para ello, haciendo uso de los resultados obtenidos en el modelado de las secuencias de correlaciones de alto orden de señales sinusoidalmente amortiguadas se ha propuesto un método de identificación basado en correlaciones o cumulantes de la señal en lugar de datos. Ello ha sido posible ya que tenemos asegurado que determinadas secuencias de las correlaciones de tercer o cuarto de la señal retienen las mismas frecuencias de resonancia que los datos originales, lo cual permite identificar el blanco.

APENDICE A

EL METODO DE EXPANSION EN SINGULARIDADES.



A-1. INTRODUCCIÓN.

El Método de Expansión en Singularidades (SEM) es una técnica analítica formalizada por Baum [BAU76] en los comienzos de los años 70 para analizar la respuesta transitoria de antenas y dispersores conductores a excitaciones variables con el tiempo. Está basado en los resultados de muchos experimentos y análisis teóricos que revelan que la respuesta en el dominio del tiempo de tales objetos está dominada en el período del "late-time" (o respuesta tardía del blanco cuando la onda incidente de excitación ha pasado a través del objeto) por una suma de exponenciales complejas amortiguadas. Las frecuencias de estas oscilaciones sólo dependen de las propiedades físicas de los objetos, es decir, la geometría en el caso de conductores perfectos y no de la forma particular de la excitación.

A-2. EL CONCEPTO DE RESONANCIAS Y DE MODOS NATURALES

Considérese el problema transitorio que se presenta en la figura 1.1, en el cual un cuerpo conductor perfecto está siendo iluminado por un campo incidente $\vec{E}^i(\vec{r},t)$ y $\vec{H}^i(\vec{r},t)$ en el espacio libre. Varios planteamientos particulares del problema pueden emplearse como base de la solución. Una de tales formulaciones es la ecuación integral del campo magnético en el dominio del tiempo (MFIE). La corriente inducida en la superficie del objeto por la onda transitoria satisfará [BAU76]:

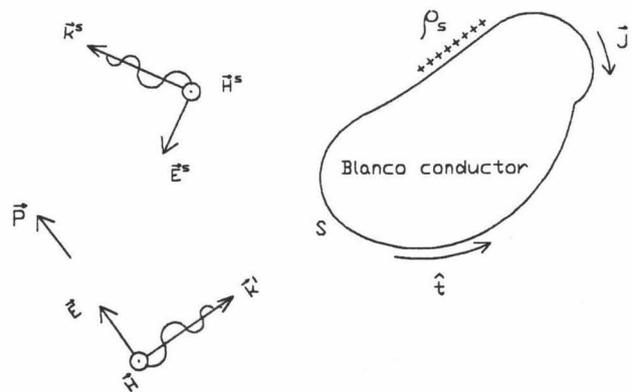


Figura (1.1): Blanco conductor iluminado por una onda electromagnética transitoria.

$$\vec{J}(\vec{r},t) = 2\hat{n} \times \vec{H}^i(\vec{r},t) + \iint_{S_{pv}} \vec{K}(\vec{r},\vec{r}') \vec{J}(\vec{r},t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c) dS' \quad (A.1)$$

donde \vec{J} es la corriente superficial inducida, \vec{K} es un kernel diádico y la integral de superficie es de valor principal que excluye el punto $\vec{r} = \vec{r}'$. En el espacio libre el operador diádico \vec{K} viene dado por la expresión:

$$\vec{K} \vec{J} = -\hat{n} \times \frac{\vec{R}}{R^2} \times \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \right\} \vec{J} \quad (A.2)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad \tau = t - \frac{R}{c} \quad \text{tiempo retardado}$$

En la ecuación (A.1), el producto vectorial $\hat{n} \times \vec{H}^i$ forma la porción óptica de la corriente inducida, mientras que el término de la integral de superficie proporciona la corriente de realimentación en cada punto del dispersor debido al resto de las corrientes inducidas en la superficie.

Esta ecuación MFIE o su correspondiente para el campo eléctrico EFIE se puede representar genéricamente por el operador diádico lineal:

$$\vec{L} \cdot \vec{J}(\vec{r}', t') = \vec{d}(\vec{r}, t) \quad (A.3)$$

donde el vector fuente \vec{d} , relacionado con las componentes tangenciales a la superficie de campo incidente y el operador \vec{L} vienen dados por las expresiones:

$$\vec{d} = \hat{n} \times \vec{H}^i \quad (A.4)$$

$$\vec{L} = \left\{ \frac{1}{2} \vec{I} + \iint_{S_{pv}} \vec{K}(\vec{r}, \vec{r}') dS' \right\} \cdot \vec{J}$$

Los modos naturales \vec{J}_n son soluciones de esta ecuación cuando no hay fuentes, es decir, cuando es homogénea:

$$\vec{L} \cdot \vec{J}(\vec{r}', t') = \vec{0} \quad t' > \tau \quad (\text{A.5})$$

Para resolver esta ecuación se separa la variable temporal usando la Transformada de Laplace. Entonces el operador \vec{L} queda:

$$\vec{L}(s) = \frac{1}{2} \vec{I} - \vec{L}_1 = \frac{1}{2} \vec{I} - \iint_{S_{\text{PV}}} dS \hat{n} \times \nabla \left(\frac{4\pi}{R} e^{-sR/c} \right) \times \quad (\text{A.6})$$

Ya que la ecuación (A.5) es una ecuación de autovalores, Marin [MAR73] demuestra, usando las propiedades espectrales del operador diádico \vec{L}_1 y la teoría de determinantes de Fredholm que el operador inverso $\vec{L}(s)$ existe y es una función analítica de s , excepto para ciertos valores $s_n = \sigma_n + j \omega_n$ en los cuales posee polos. Dichos polos s_n son denominados frecuencias complejas o naturales de resonancia. Su parte real σ_n es negativa debido a la pérdida de energía por radiación desde el cuerpo. Estos polos han de ser de orden finito, y es un resultado experimental [MAR73] que son polos simples para cuerpos conductores perfectos. Por consiguiente dichos modos son de la forma:

$$\vec{J}_n(\vec{r}, t) = \vec{J}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \quad (\text{A.7})$$

en donde n es un índice discreto para cuerpos conductores perfectos y \vec{J}_n es la distribución de corriente espacial sobre la superficie, que es solución de la ecuación:

$$\vec{L}(s_n) \vec{J}_n(\vec{r}) = \vec{0} \quad (\text{A.8})$$

Esta ecuación tendrá M soluciones linealmente independientes, \vec{J}_{nm} para cada valor de s_n , siendo M la degeneración de la solución correspondiente a dicho valor del polo.

La solución general de la ecuación (A.5) válida en el plano finito s puede obtenerse usando una expansión en modos naturales y el teorema de representación de Mittag-Leffler [MOR84]:

$$\vec{J}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left\{ C_{nm} \frac{1}{s-s_n} \vec{J}_{nm} \right\} + \vec{J}'(s) \quad (\text{A.9})$$

donde \vec{J}' es una función entera en el plano s y los coeficientes de la expansión son C_{nm} .

Las singularidades de la corriente inducida total y por tanto del campo dispersado, pueden deberse tanto a las singularidades del campo incidente como a este tipo de singularidades que están determinadas completamente por el dispersor.

A-3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL MEDIANTE EXPANSIÓN EN FUNCIONES DE GREEN CAUSALES.

Para resolver la ecuación (A.3) eliminamos la dependencia en la configuración de la fuente por medio de la función diádica de Green causal $\tilde{\mathbf{g}}$, que representa la corriente inducida en el punto (\vec{r}', t') de la superficie del cuerpo debido a una fuente impulsiva en (\vec{r}'', t'') :

$$\tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{g}}(\vec{r}', t' | \vec{r}'', t'') = \tilde{\mathbf{I}} \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') \delta(t' - t'') \quad (\text{A.10})$$

La función $\tilde{\mathbf{g}}$ ha de cumplir la condición de causalidad:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}'t' | \vec{\mathbf{r}}''t'') = \vec{\mathbf{0}} \quad t' < t'' + \frac{|\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}''|}{c} \quad (\text{A.11})$$

La solución de la ecuación (A.10) es de la forma:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}',t' | \vec{\mathbf{r}}'',t'') = \vec{\mathbf{I}} \delta(\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}'') \delta(t' - t'') + u(t' - t_0) \tilde{\mathbf{g}}_0(\vec{\mathbf{r}}',t' | \vec{\mathbf{r}}'',t'') \quad (\text{A.12})$$

en donde $\tilde{\mathbf{g}}_0$ es la solución libre de fuentes de (A.10), la cual para excluir el punto fuente $\vec{\mathbf{r}}'' = \vec{\mathbf{r}}'$ en el tiempo $t' = t''$ debe tomarse a partir del intervalo temporal $t_0 > t''$. Esta solución puede expandirse en modos naturales de forma análoga a (A.9) donde los coeficientes pueden obtenerse a partir de los modos $\vec{\mathbf{a}}_n$ del operador autoadjunto normalizado de $\tilde{\mathbf{L}}$ [MOR84]:

$$\tilde{\mathbf{g}}_0(\vec{\mathbf{r}}',t' | \vec{\mathbf{r}}'',t'') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M \vec{\mathbf{a}}_{nm}(\vec{\mathbf{r}}'',t'') \vec{\mathbf{J}}_{nm}(\vec{\mathbf{r}}') e^{s_n t'} \quad (\text{A.13})$$

Conocida $\tilde{\mathbf{g}}$, la corriente inducida para una excitación específica $\vec{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{H}}^i$ está dada en términos de la convolución espacio-temporal:

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}',t') = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}}',t' | \vec{\mathbf{r}}'',t'') \cdot \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{r}}'',t'') \rangle dt'' \quad (\text{A.14})$$

en donde $\langle \rangle$ indica la integración sobre la superficie en la variable $\vec{\mathbf{r}}''$.

Una vez calculada la corriente inducida pueden obtenerse los campos eléctrico y magnético a partir de la teoría del potencial. Usando los potenciales escalar y vectorial, relacionados a través de la condición o gauge de Lorentz, podemos expresar el campo

dispersado $\vec{E}^s(\vec{r},t)$ como:

$$\vec{E}^s(\vec{r},t) = -\nabla\phi^s(\vec{r},t) - \frac{\partial\vec{A}^s(\vec{r},t)}{\partial t} \quad (\text{A.15})$$

y el campo magnético como:

$$\vec{H}^s(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}^s(\vec{r},t) \quad (\text{A.16})$$

donde los potenciales escalar y vector vienen dados respectivamente por:

$$\phi_s(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}',t-R/c)}{R} dS' \quad ; \quad \vec{A}^s(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)}{R} dS' \quad (\text{A.17})$$

siendo $\rho_s(\vec{r},t)$ la densidad superficial de carga inducida sobre la superficie del blanco. Utilizando las ecuaciones (A.15), (A.16) y la ecuación de continuidad, el campo eléctrico y magnético dispersado puede obtenerse como [BAU76]:

$$\begin{aligned} \vec{E}^s(\vec{r},t) = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{R^2} \nabla R(\vec{r}',\tau) \rho(\vec{r}',\tau) dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\vec{r}',\tau) dS' + \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{J}(\vec{r}',\tau) dS' \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\vec{H}^s(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{R^2} \vec{J}(\vec{r}',\tau) + \frac{1}{Rc} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{J}(\vec{r}',\tau) \right] \times \frac{\vec{R}}{R} dS'$$

Generalmente el problema de la respuesta de blancos a ondas de radar consiste en estudiar la respuesta a una onda plana. En el siguiente apartado se obtendrá el campo dispersado por un conductor cuando esté iluminado por una onda electromagnética plana transitoria.

A-4. RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN DE ONDA PLANA

Consideremos como en el apartado anterior un conductor perfecto sobre el que incide una onda electromagnética plana transitoria linealmente polarizada:

$$\vec{H}^i = \hat{l} f(t - \vec{r} \cdot \hat{p}/c) \quad (\text{A.19})$$

en donde \vec{r} es el vector de posición del punto campo, \hat{l} es el vector de polarización de la onda y \hat{p} es el vector unitario en la dirección de propagación. Para este caso es posible llevar a cabo las integraciones espaciales y temporales para calcular la densidad de corriente inducida. Para ello vamos a calcular, basándonos en la linealidad del problema, la respuesta a una onda plana impulsiva o respuesta impulso del blanco. Posteriormente podemos calcular la respuesta a cualquier excitación de onda plana sin más que convolucionar dicha excitación con la respuesta impulso del blanco.

A.4.1 Respuesta a una onda plana impulsiva

Si calculamos primeramente la respuesta a una onda plana impulsiva, la densidad de corriente inducida en el blanco dispersor vendrá dada, según (A.14):

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \langle \vec{g}(\vec{r}', t' | \vec{r}'', \vec{r}'' \cdot \hat{p}/c) \cdot \hat{n}(\vec{r}'') \times \hat{l} \rangle \quad (\text{A.20})$$

y si utilizamos el desarrollo en serie (A.13) y la expresión de \vec{g} dada en (A.12):

$$\begin{aligned}\vec{J}(\vec{r}',t') &= \vec{J}^{\text{PO}}(\vec{r}',t') + \sum_n \mathbf{A}_n(\vec{r}',t') \vec{J}_n(\vec{r}',t') \\ \vec{J}^{\text{PO}}(\vec{r}',t') &= \hat{n} \times \vec{H}^i(\vec{r}',t') \\ \mathbf{A}_n(\vec{r}',t') &= \langle u(t'-t_0) \vec{a}_n(\vec{r}'', \vec{r}''/\hat{p}/c) \cdot \hat{n} \times \hat{l} \rangle\end{aligned}\tag{A.21}$$

El término \vec{J}^{PO} es la porción óptica de la corriente inducida y a \mathbf{A}_n , los coeficientes del desarrollo en serie en modos naturales, se les denomina coeficientes de acoplo de la corriente inducida.

El campo magnético dispersado puede obtenerse de la expresión (A.18). Sin embargo generalmente en problemas de blancos de radar se mide el campo electromagnético a una gran distancia del blanco. En estos casos se puede aproximar \vec{R} por \vec{r} por lo que la expresión del campo magnético lejano dispersado queda:

$$\vec{H}^s(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{J}(\vec{r}',t-\vec{r}-\vec{r}'/c) \times \hat{f} \, dS' \tag{A.22}$$

Sustituyendo el valor de \vec{J} dado por (A.21) en la ecuación (A.22) se obtiene para el campo magnético lejano dispersado:

$$\vec{H}^s(\vec{r},t) = \vec{H}^{\text{PO}}(\vec{r},t) + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n(\vec{r},t) \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \tag{A.23}$$

en donde \vec{H}_n son la parte espacial de los modos naturales del campo magnético, obtenidos a partir de las modos naturales de corriente a través de los potenciales. Los coeficientes de acoplo de dicho campo \mathbf{B}_n vienen dados por la expresión:

$$\mathbf{B}_n(\vec{r}, t) = \langle u(t - \vec{r}''\hat{p}/c - |\vec{r} - \vec{r}''|/c) \vec{a}_n(\vec{r}'', \vec{r}''\hat{p}/c) \cdot \hat{n} \times \hat{1} \rangle \quad (\text{A.24})$$

donde la función escalón hace cumplir los requisitos de causalidad que imponen que en un punto de observación (\vec{r}, t) los coeficientes de expansión serán debidos a integraciones en puntos fuente del cuerpo \vec{r}'' tales que:

$$\vec{r}'' \hat{p} + |\vec{r} - \vec{r}''| < c t \quad (\text{A.25})$$

La integración en los coeficientes de acoplo presente en (A.24) incluirá solamente aquellos puntos dados por (A.25) que permanecen dentro del paraboloides de revolución centrado en \vec{r} y plano directriz coincidente con la onda incidente en un tiempo t .

En la ecuación (A.23) podemos distinguir dos términos distintos:

(a) $\vec{H}^{PO}(\vec{r}, t)$ es la parte óptica del campo magnético generado por la corriente inducida.

El intervalo temporal en el cual esta porción alcanza un punto campo \vec{r} será:

$$t^{PO} = [\hat{p} \vec{r}' + |\vec{r} - \vec{r}'|] / c \quad (\text{A.26})$$

Permitiendo a \vec{r} variar sobre la superficie puede definirse un máximo y un mínimo valor de t^{PO} que nos da la duración temporal de la componente óptica. Dichos límites vienen dados por:

$$\begin{aligned} t_{\text{inicial}} &= \min(t^{\text{PO}}) = r/c \\ t_{\text{final}} &= \max(t^{\text{PO}}) = 2D/c \end{aligned} \tag{A.27}$$

donde D es la dimensión del objeto dispersor en la dirección de \hat{p} .

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{H}_n(\vec{r}, t) e^{s_n t}$ que representa el campo dispersado generado por la corriente que

surge detrás de la onda plana incidente.

El término óptico (a) es directamente proporcional a la segunda derivada temporal del área de la silueta del dispersor proyectada en la dirección incidente de la excitación \hat{p} , y por lo tanto depende fuertemente de ella. El resto del campo dispersado (b) se debe a la distribución local de corriente libre de fuentes en la porción variable de la superficie, por ello el vector de residuos \vec{H}_n depende del tiempo, ya que el área de la superficie donde la integración tiene lugar está cambiando en el transcurso del tiempo. Esta forma de expansión con coeficientes variables con el tiempo se denomina en el SEM "expansión de clase 2". El vector de residuos \vec{H}_n llega a ser constante pasado un cierto periodo de tiempo, como puede observarse de la expresión de los coeficientes de acoplo dados por (A.24), precisamente en un tiempo $T_0 = 2D/c$ medido en el punto campo \vec{r} a partir de la llegada de la onda incidente, intervalo de tiempo que es idéntico a la duración de la componente óptica del campo dispersado.

La ecuación (A.23) es una expansión de clase 2 con coeficientes variables temporalmente. Sin embargo como se ha puesto de manifiesto pasado un cierto tiempo los coeficientes de acoplo pasan a ser constantes. Separando dichos intervalos temporales

obtenemos una representación alternativa de (A.23):

$$\vec{H}^s(\vec{r},t) = u(t-|\vec{r}|/c) \sum_n C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t} + \vec{H}^e(\vec{r},t) + \vec{H}^{PO}(\vec{r},t) \quad (A.28)$$

donde la función escalón tiene en cuenta el tiempo que tarda en llegar la onda al punto campo y el resto de las variables vienen dadas por:

$$C_n(\vec{r}) = A_n(\vec{r},t) \quad \text{para} \quad t > T_0 \quad (A.29)$$

$$\vec{H}^e(\vec{r},t) = [u(t-|\vec{r}|/c) - u(t-T_0)] \sum_n [A_n(\vec{r},t) - C_n(\vec{r})] \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t}$$

La función \vec{H}^e es la cubre la parte con coeficientes temporalmente variables de la expansión en modos naturales. Es, como puede observarse de (A.29) una función limitada temporalmente en el mismo intervalo que la componente óptica del campo magnético.

La transformada de Laplace del campo dispersado dado por (A.28) nos dará la función de transferencia del blanco dispersor, al ser dicho campo la respuesta a una onda plana impulsiva. Cambiando el origen temporal en $|\vec{r}|/c$ tendremos en el dominio de la transformada de Laplace:

$$\vec{H}^s(\vec{r},s) = \sum_n \frac{C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r})}{s - s_n} + \vec{H}^e(\vec{r},s) + \vec{H}^{PO}(\vec{r},s) \quad (A.30)$$

La representación en el plano de la variable 's' consta, pues, de una expansión en un conjunto numerable de funciones con un polo simple, polos que hemos denominado resonancias naturales del objeto $s_n = \sigma_n + j \omega_n$ seguido de una función entera en el plano

's' producida por la transformada de Laplace de las funciones limitadas temporalmente \vec{H}^e y \vec{H}^{PO} . Esta representación es la de una función meromorfa expandida en polos simples como implica el Teorema de Mittag-Leffler [MOR84].

A.4.2 Respuesta temprana y tardía del blanco ("early-time" y "late-time")

De lo dicho anteriormente, la distribución temporal del campo transitorio dispersado tendrá la forma genérica:

$$\vec{H}^s(t) = \vec{H}_E(t) [u(t)-u(t-T_0)] + \vec{H}_L(t) u(t-T_0) \quad (\text{A.31})$$

siendo $T_0 = 2D/c$ el tiempo de transición que transcurre en un punto campo \vec{r} desde la llegada de la onda incidente hasta que los coeficientes de la expansión en modos naturales son constantes en el tiempo como se ha puesto de manifiesto en el apartado anterior. Esta representación temporal permite distinguir dos intervalos, antes y después del tiempo de transición T_0 . Estos intervalos los denominaremos:

1.- Respuesta temprana o "early-time", donde el campo dispersado está compuesto de un término óptico y una expansión en singularidades de clase 2 con coeficientes variables con el tiempo. Este periodo se corresponde con el intervalo temporal en que la onda está iluminando el objeto.

2.- Respuesta tardía o "late-time", donde el campo dispersado puede representarse por una expansión en singularidades con coeficientes constantes en el tiempo, expansión que se denomina de clase 1. Esta se corresponde en la ecuación (A.28) con el intervalo posterior a T_0 cuando la porción óptica y el campo \vec{H}^e se han anulado y solamente permanece la expansión en coeficientes constantes:

$$\vec{H}_L^s(\vec{r}, t) = \sum_n C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \quad t > T_0 \quad (\text{A.32})$$

expresión que podemos reescribir como:

$$\vec{H}_1^s(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{R}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \quad t > T_0 \quad (\text{A.33})$$

en donde el vector de residuos \vec{R}_n es simplemente:

$$\vec{R}_n(\vec{r}) = C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) \quad (\text{A.34})$$

La importancia del "late-time" proviene de su característica de poseer unos coeficientes en la expansión constantes en el tiempo, lo que lo convierte en sumamente útil para caracterizar temporalmente a un blanco simplemente por una suma de exponenciales complejas amortiguadas en dicho intervalo.

Como el campo dispersado es real, los polos aparecen en pares complejos conjugados, por lo que la expresión (A.33) puede reescribirse usando sinusoides amortiguadas:

$$\vec{H}_1^s(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{R}'_n(\vec{r}) e^{\sigma_n t} \cos(\omega_n t) \quad t > T_0 \quad (\text{A.35})$$

la cual, descomponiendo el vector residuos en su forma módulo-argumento y refiriéndonos a una dirección cualquiera η , la componente η de dicho campo queda de la forma:

$$H_1^s(\vec{r}, t, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(\vec{r}, \eta) e^{\sigma_n t} \cos(w_n t + \phi_n(\vec{r}, \eta)) \quad t > T_0 \quad (\text{A.36})$$

donde ϕ_n es la fase del vector complejo de residuos \vec{R}_n' . Esta ecuación es muy útil y será ampliamente utilizada en el proceso de caracterizar la respuesta transitoria de un blanco en el "late-time".

En la ecuación (A.36) se ha de hacer notar que el vector de residuos \vec{R}_n' depende de la dirección η del campo y en consecuencia tanto su módulo R_n' como su fase ϕ_n dependen de la orientación relativa del blanco respecto a la excitación. Por ello algunos modos pueden ser fuertemente excitados en algunas orientaciones y ser casi nulos en otras, obteniéndose en el "late-time" campos dispersados diferentes según unos modos contribuyan más o menos a la respuesta impulso del blanco.

A.4.3 Respuesta a una onda plana arbitraria

Una vez que hemos calculado la respuesta a una onda plana impulsiva podemos calcular la respuesta a una onda plana arbitraria dada por la ecuación:

$$\vec{H}^i = \hat{I} f(t - \vec{r} \cdot \hat{p}/c) \quad (\text{A.37})$$

en donde \vec{r} es el vector de posición del punto campo, \hat{I} es el vector de polarización de la onda, \hat{p} es el vector unitario en la dirección de propagación de la onda y $f(t)$ es una función de modulación arbitraria. La respuesta a dicha excitación puede calcularse usando la convolución temporal de la respuesta impulso con $f(t)$ gracias a la linealidad del problema. En el dominio de la transformada de Laplace quedaría simplemente el producto

de la transformada de la función de modulación por la función de transferencia del sistema:

$$\vec{H}_t^s(\vec{r},s) = F(s) \vec{H}^s(\vec{r},s) \quad (\text{A.38})$$

donde la función de transferencia $\vec{H}^s(\vec{r},s)$ viene dado por la ecuación (A.29) y $\vec{H}_t^s(\vec{r},s)$ es el campo magnético dispersado por el blanco al ser excitado por la onda plana.

Una cuestión práctica importante a la hora de simular en el computador la respuesta impulso de los blancos es el número de modos que hay que incluir en la ecuación (A.36) que nos da el "late-time" del blanco. En teoría intervienen un conjunto numerable de modos pero en la práctica sólo contribuyen significativamente un número finito de ellos, aquellos con factores de amortiguamiento σ_n de magnitud menor en valor absoluto, ya que conforme éste aumenta la contribución del modo, al ir afectada por una exponencial decreciente como se pone de manifiesto en (A.36), se extingue rápidamente, no teniendo una contribución importante en el intervalo de análisis en el "late-time".



APENDICE B

TEORIA CLASICA DE LA ESTIMACION DE SEÑALES EN RUIDO.



B-1. INTRODUCCIÓN.

En general, la estimación de una señal en presencia de ruido aditivo es un problema básico de la teoría de los procesos estocásticos. La información disponible es la suma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (\text{B.1})$$

donde $y(t)$ es el campo dispersado por el blanco en una dirección, $x(t)$ es la señal ruidosa captada por la antena y $n(t)$ es el ruido aditivo contaminante. El problema es expresar $y(t)$ en términos de $x(t)$. La solución depende de las hipótesis que se hagan sobre $y(t)$ y $n(t)$. En la teoría clásica de la estimación espectral se consideran tres aspectos diferentes del problema [PAPO84]:

- 1) La señal $y(t)$ es conocida. Se trataría, pues, de determinar la presencia o ausencia de dicha señal conocida en la señal observada. Es el problema clásico del retorno de una señal de radar, por ejemplo.
- 2) La señal $y(t)$ es desconocida, pero se conocen una serie de sus propiedades.
- 3) La señal $y(t)$ puede considerarse como un proceso aleatorio estacionario con un espectro de potencia conocido.

En cualquiera de los tres casos el ruido añadido a la señal es un proceso aleatorio con propiedades conocidas.

Entre estos tres casos, ¿Cuál corresponde a nuestro problema?. A primera vista parece que como intentamos discriminar una señal entre una librería de blancos se

adaptaría mejor al caso 1). Sin embargo la señal $y(t)$ no es conocida por completo en cualquier situación, sino que sólo conocemos sus resonancias naturales a partir de las cuales identificamos, y como puede verse en el apéndice A, la señal en el "late-time" es (ecuación (A.36)):

$$y_L(\vec{r}, t, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(\vec{r}, \eta) e^{\sigma_n t} \cos(w_n t + \phi_n(\vec{r}, \eta)) \quad t > T_0 \quad (\text{B.2})$$

donde la fase ϕ_n y el módulo del vector complejo de residuos \vec{R}_n' dependen fuertemente de la orientación relativa entre el blanco y la onda plana incidente η . Por lo tanto, dependiendo del ángulo de orientación entre el blanco y la onda de excitación tendríamos una señal recibida distinta, y por consiguiente un sistema de filtrado óptimo para cada ángulo. Esto no es, pues, un buen planteamiento ya que sólo hemos de utilizar la información de las resonancias naturales que caracterizan unívocamente al blanco, independientemente de la excitación.

El caso 3), considerar la onda dispersada como un proceso aleatorio estacionario lleva como consecuencia suponer que nuestra señal es una serie temporal aleatoria cuyas propiedades estadísticas son independientes del tiempo, por lo que tendría que ser de duración infinita. Sin embargo estamos tratando con señales deterministas y transitorias, es decir, se van anulando conforme el tiempo crece, lo que está en contra de las hipótesis de partida del caso 3).

Nuestro problema, el de estimar la señal dispersada por un blanco de radar debe plantearse dentro de la teoría clásica de la estimación espectral según el caso 2), considerando la onda dispersada $y(t)$ como una señal desconocida y el ruido aditivo $n(t)$ como un proceso aleatorio de media conocida.

B-2. ESTIMACIÓN DE UNA SEÑAL DESCONOCIDA EN RUIDO ALEATORIO MEDIANTE PROMEDIO TEMPORAL.

Dentro de la teoría clásica de la estimación de señales el modelo que mejor se adapta a nuestro problema, como se ha discutido en la introducción, consiste en considerar la señal $x(t)$ desconocida en su forma y contaminada con un ruido aleatorio $n(t)$ modelado como la realización de un proceso aleatorio de media y autocovarianza $C(t,t)$ conocidas. Si suponemos que el proceso $n(t)$ tiene media nula, la autocovarianza se convierte en autocorrelación $C(t,t)=R(t,t)$, de forma que la media y la varianza del proceso $x(t)$ serán:

$$\begin{aligned} E\{x(t)\} &= y(t) \\ \sigma_x^2 &= E\{n^2(t)\} = C(t,t) = R(t,t) \end{aligned} \tag{B.3}$$

Si $R(t,t) \ll y^2(t)$, entonces podemos utilizar el proceso observado como una estimación de $y(t)$. Sin embargo si $R(t,t)$ es del orden de $y(t)$, para estimarla hemos de reducir o suavizar el ruido de alguna forma. La forma más simple de suavizado de la señal es la media $s(t)$ sobre un intervalo T :

$$s(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t-\tau) d\tau = x(t) * \frac{1}{2T} p_T(t) \tag{B.4}$$

donde $p_T(t)$ es una ventana rectangular de lado $2T$. Si tenemos en cuenta la ecuación (B.1) se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_y(t) + s_n(t) \\ s_y(t) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t-\tau) d\tau \quad s_n(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{B.5}$$

El problema que aparece en esta estimación es la elección del valor del intervalo T óptimo. La elección se hace de forma que si se usa el estimador $s(t)$ para estimar $y(t)$, el valor cuadrático medio del error de estimación $s(t)-y(t)$ sea mínimo. Dicho error vendrá dado por:

$$e = E\{[s(t)-y(t)]^2\} = b^2 + \sigma_s^2 \quad (\text{B.6})$$

donde b y σ_s son el sesgo y la desviación típica del estimador $s(t)$. El sesgo viene dada por:

$$b = E\{s(t)\} - y(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t-\tau) d\tau - y(t) = \frac{T^2}{6} y''(t+\tau_1) \quad |\tau_1| < T \quad (\text{B.7})$$

donde se ha usado una expansión en momentos de $s_y(t)$ hasta segundo orden. La varianza del estimador $s(t)$ viene dada por definición:

$$\sigma_s^2(t) = E\{s_n^2(t)\} = C_{s_n}(t,t) \quad (\text{B.8})$$

La covarianza del estimador s_n puede obtenerse considerando que $s_n(t)$ es la salida de un sistema lineal dado por la ventana rectangular. Usando la relación entre la autocorrelación de la señal de salida y la autocovarianza de la señal de entrada particularizada para el sistema lineal ventana rectangular tenemos:

$$R_{s_n}(t,t) = C_{s_n}(t,t) = \frac{1}{4T^2} \iint_S C_n(t-t_1, t-t_2) dt_1 dt_2 \quad (\text{B.9})$$

Si $n(t)$ es un ruido blanco, es decir su autocorrelación viene dada por la ecuación:

$$C_n(t_1, t_2) = I(t_1) \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{B.10})$$

entonces la varianza del estimador $s(t)$ viene dada por:

$$\sigma_s^2(t) = \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T I(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2T} I(t+\tau_0) \quad |\tau_0| < T \quad (\text{B.11})$$

donde en la última igualdad hemos aplicado el Teorema del valor medio [OPP75].

Como el error cuadrático medio está dado según la ecuación (B.6) por la suma de el sesgo y de la varianza del estimador $s(t)$, la elección del intervalo de suavizado viene dictada por dos requerimientos contrapuestos: para que σ_s sea pequeña T ha de ser grande (B.11), pero para que el sesgo sea pequeña T ha de ser pequeño (B.7). Eligiendo aquel T que minimice el error cuadrático medio tendríamos la duración óptima del intervalo de suavizado, sin embargo la dependencia del error cuadrático de estimación con el intervalo T es muy complicada, ya que en las expresiones de el sesgo y de la varianza θ_0 y θ_1 dependen también de T . Para obtener una estimación podemos suponer que tanto la derivada segunda de $y(t)$ como la intensidad del ruido $I(t)$ que aparecen en las ecuaciones (B.11) y (B.7) son suficientemente suaves en el intervalo T de forma que:

$$\begin{aligned} I(t+\tau_0) &\approx I(t) \\ y''(t+\tau_1) &\approx y''(t) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

y entonces podemos aproximar el error cuadrático medio por:

$$e \approx \frac{T^4}{36} (y''(t))^2 + \frac{I(t)}{2T} \quad (\text{B.13})$$

Minimizando el error cuadrático medio de la estimación con respecto a T obtenemos que el intervalo de suavizado óptimo viene dado por:

$$T_{\min}(t) = \sqrt[5]{\frac{9I(t)}{2(y''(t))^2}} \quad (\text{B.14})$$

De la expresión anterior del intervalo óptimo podemos destacar:

- 1) El intervalo óptimo depende de t , luego para cada muestra temporal habrá que utilizar un intervalo de suavizado distinto.
- 2) Para determinar dicho intervalo necesitamos conocer la intensidad del ruido $I(t)$ y la derivada segunda de la función buscada.

Estas características del valor de T_{\min} hacen que para el problema que estamos estudiando sea poco útil este tipo de estimación. Esto es debido a las siguientes causas:

- 1^a) En nuestro proceso de discriminación de blancos sólo disponemos para identificarlos de las resonancias naturales y no de la expresión completa del "late-time". Por ello el conocimiento de la derivada segunda de la función buscada no es posible, ya que como se comentó anteriormente la forma de onda de $y(t)$ depende de la orientación relativa del blanco respecto de la onda incidente (B.2).
- 2^a) La utilización de este suavizado tan simple, basado en un promedio temporal en un intervalo $2T$ no lleva a una discriminación efectiva. El FAR es muy sensible a los errores introducidos a frecuencias superiores al intervalo donde hay resonancias naturales debido al comportamiento de su función de transferencia. Por lo tanto un suavizado que atenúe mas la parte alta del espectro sería más efectivo.

- 3ª) El uso de un intervalo adaptativo, para cada muestra temporal, lleva consigo un tiempo de cálculo considerablemente superior que si el intervalo fuese fijo, ya que este caso se reduciría a un simple filtrado paso-baja.

B-3. ESTIMACIÓN DE UNA SEÑAL DESCONOCIDA EN RUIDO ALEATORIO MEDIANTE EL USO DE VENTANAS ESPECTRALES.

Por las razones señaladas en el apartado anterior el suavizado basado en un promedio temporal no es muy efectivo. En vez de utilizar una ventana rectangular para definir el intervalo de suavizado podríamos utilizar otras ventanas que tengan características más adecuadas a nuestro problema. Ahora usaremos como estimador de la señal $y(t)$ el proceso:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)w(\tau)d\tau = g_y(t) + g_n(t) \quad (\text{B.15})$$

donde $w(t)$ es la función ventana, función positiva, de área unidad y de duración $2T$.

La cuestión que se plantea ahora es ¿cual será la elección óptima de la ventana?. Para elegir la forma de la ventana podemos plantear el problema de dos formas:

- 1) Tomaremos como función ventana aquella función positiva de área unidad tal que el error cuadrático medio de estimación sea mínimo. Este planteamiento es análogo al usado anteriormente para el caso particular de la ventana rectangular. El error cuadrático medio será (B.2):

$$e = b^2 + \sigma_g^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)w(\tau)d\tau - y(t) \\ \sigma_g^2 = E\{g_n^2(t)\} \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

El sesgo del estimador $g(t)$ puede escribirse, usando una expansión en momentos de segundo orden:

$$b = \frac{1}{2} y''(t+\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 w(\tau) d\tau = \frac{m_2}{2} y''(t+\tau_1) \quad (\text{B.17})$$

y la varianza, asumiendo que el ruido es blanco:

$$\sigma_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} I(t-\tau)w^2(\tau)d\tau = I(t+\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\tau)d\tau = I(t+\tau_0) E \quad (\text{B.18})$$

en donde hemos considerado $g_n(t)$ como la salida de un sistema lineal dado por la ventana y hemos aplicado el teorema del valor medio. En las ecuaciones (B.17) y (B.18) θ_1 y θ_0 toman algún valor en el intervalo de integración y hemos notado m_2 el momento de segundo orden de la ventana y E la energía de la misma.

A partir de las ecuaciones (B.17) y (B.18), y asumiendo que la derivada segunda de la función $y(t)$ y la intensidad del ruido son funciones suaves, tenemos que el error cuadrático medio viene dado por:

$$e = \frac{m_2^2}{4} y''(t) + E I(t) \quad (\text{B.19})$$

el cual depende de dos parámetros libres de la ventana E y m_2 que son función de la forma de la ventana. Para obtener un mínimo del error cuadrático medio con respecto a dichos parámetros supongamos que partimos de una ventana dada $w^f(t)$ y que escalamos el tiempo linealmente:

$$w(t) = c w^f(ct) \quad (\text{B.20})$$

Esta función seguirá siendo de área unidad y positiva pero su energía y su momento de segundo orden vendrán dados por:

$$E = c E^f \quad m_2 = \frac{m_2^f}{c^2} \quad (\text{B.21})$$

Partiendo de esta forma fija para $w(t)$ obtenemos que el error de estimación mínimo se obtiene para un escalado c dado por:

$$c_{\min} = \sqrt{\frac{[m_2^f y''(t)]^2}{E^f I(t)}} \quad (\text{B.22})$$

Como se puede observar de la ecuación (B.22) el escalado óptimo depende de la derivada segunda de $y(t)$ y de la forma particular de la ventana a través del cociente entre m_2^f y E^f . La ventana que presenta este cociente mínimo es la parábola truncada en un intervalo T dado. Dicho cociente depende del intervalo T por lo que, como ocurría anteriormente en el caso de la ventana rectangular, el escalado óptimo que nos dará el error cuadrático

medio de estimación mínimo depende del punto dado t a través de la intensidad del ruido y de la derivada segunda de la función, y del intervalo de integración o longitud de la ventana a través del cociente entre m_2^f y E^f .

2) Para evitar usar ventanas adaptativas para cada valor del tiempo y soslayar el desconocimiento de la derivada segunda de $y(t)$, como implicaría el apartado 1), escogemos una ventana de duración fija. Dicha duración fija la tomamos de forma que sea aquella para la que la discriminación de un blanco a las diferentes orientaciones sea óptima. Esta elección implica hacer un barrido numérico de duraciones mediante el ordenador hasta escoger la duración óptima.

La selección del tipo de ventana está dictada por el tipo de datos o de sistemas con los que estamos trabajando, y las interferencias que pueden aparecer en nuestra señal. Por ejemplo, si hay componentes de ruido distantes de las banda de la señal se debería usar una ventana con lóbulos laterales rápidamente decadentes, mientras que si hay componentes de ruido cercanos y lejanos a las componentes en frecuencia de la señal, en este caso una ventana con lóbulos laterales de equirrizado sería una elección adecuada. En nuestro caso la forma de la ventana la escogemos partiendo de que vamos a tener interferencias en todo el rango del espectro y teniendo en cuenta nuestro proceso de discriminación, que usa un sistema que amplifica las altas frecuencias. Por ello buscamos aquel tipo de ventana que presente una buena atenuación de las frecuencias fuera de un intervalo espectral determinado, para compensar la amplificación del ruido de alta frecuencia que lleva a cabo el FAR. Es decir, buscamos como característica de la ventana una buena atenuación de los lóbulos laterales, con una velocidad de caída alta, más que un lóbulo principal estrecho que pueda producir una banda de transición pequeña. Entre todas las ventanas que presentan estas características óptimas hay dos que son ampliamente utilizadas por sus propiedades [HAR78]:

1) **Ventana de Kaiser-Bessel.**- Se define como aquella función de duración T que presenta una máxima concentración de energía en un intervalo espectral dado. Dicha función ha sido determinada como una familia de funciones parametrizadas por el producto tiempo-ancho de banda, las funciones esferoidales achatadas de orden cero. Kaiser ha descubierto una aproximación a estas funciones en términos de las funciones de Bessel de primera clase modificadas de orden cero. Esta ventana de Kaiser-Bessel se define, en su forma discreta ya que estamos tratando con funciones muestreadas en el tiempo, como:

$$w_k[n] = \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \quad (\text{B.23})$$

donde β es una constante igual a la mitad del producto tiempo-ancho de banda que especifica en la respuesta en frecuencia la relación entre la altura del rizado de los lóbulos laterales y el ancho del lóbulo principal.

2) **Ventana Gaussiana.**- Está caracterizada por un producto mínimo tiempo-ancho de banda, por lo que para una determinada duración temporal tiene la máxima concentración promedio en frecuencia. Viene definida por:

$$w_g[n] = e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha \frac{2n}{N-1}\right)^2} \quad (\text{B.24})$$

Esta ventana está parametrizada por α , el recíproco de su desviación estándar que es una medida del ancho de su transformada de Fourier. Si α se incrementa, disminuirá el ancho de la ventana y se reducirá la severidad de la discontinuidad en las fronteras. Esto redundará en un incremento del ancho del lóbulo principal y en un decrecimiento de la amplitud de los lóbulos laterales.

B-4. USO DE FILTROS DIGITALES PASO-BAJA.

De lo dicho en el apartado anterior, nuestra principal estrategia a la hora de buscar la ventana óptima para el estimador de suavizado de la señal es que dicha ventana presente una buena atenuación de las frecuencias superiores a las de resonancia con las que está sintetizado el FAR. En realidad, dichas ventanas son filtros paso-baja en el dominio de la frecuencia, que atenúan la parte alta del espectro, por lo que en vez de dichas ventanas espectrales se podrían utilizar filtros digitales para eliminar la banda de frecuencias superior a la de resonancia del FAR. Los filtros digitales paso-baja pueden ser de dos tipos [OPP75]:

a) **FIR (respuesta impulso finita)**, caracterizados por tener una respuesta impulso que es cero más allá de un intervalo finito de tiempo $t=MT$, siendo T el intervalo de muestreo. La salida filtrada paso baja será la convolución entre la respuesta impulso del filtro y la señal de entrada, en este caso el campo dispersado por un blanco:

$$s[n] = \sum_{r=0}^M h[n] y[n-r] \quad n \geq 0 \quad (\text{B.25})$$

La principal ventaja de los filtros FIR reside en que pueden ser diseñados de forma que posean fase lineal, no distorsionándose así la fase de la señal, y en que al ser su respuesta impulso finita, sólo necesitan un número finito fijo M de muestras del pasado para calcular la respuesta a un tiempo cualquiera, por lo que pasado un intervalo inicial MT se calculan las muestras siguientes de la señal con sólo aquellas procedentes del "late-time", sin contribución alguna del early-time o de la utilización de condiciones iniciales arbitrarias.

Los filtros FIR pueden diseñarse en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. La técnica más conocida es el diseño usando ventanas que consiste en truncar la respuesta impulso infinita ideal $h_d[n]$ de un filtro paso-baja. Si $H_d(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia ideal, entonces:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n} \quad (\text{B.26})$$

para obtener una respuesta impulso de duración finita simplemente truncamos $h_d[n]$ mediante una ventana de duración finita $w[n]$:

$$h[n] = h_d[n] w[n] \quad \begin{cases} w[n]=0 & \forall n > N-1 \text{ y } n < 0 \\ w[n]=1 & n \leq N-1 \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

La respuesta en frecuencia que se obtiene corresponde a la serie de Fourier (B.26) truncada, lo que va a dar lugar a problemas asociados con la convergencia no uniforme de la serie truncada. Uno de los problemas más conocidos es el fenómeno de Gibbs. Para moderar este fenómeno se usa un truncamiento menos abrupto de la serie de Fourier mediante el uso de otras ventanas que decaigan suavemente a cero en los extremos. Esto hace que la altura de los lóbulos laterales disminuya a expensas de aumentar el ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana por lo que en la respuesta en frecuencia del filtro se observa una transición más ancha en las discontinuidades de $H_d(e^{j\omega})$. Para la construcción de filtros FIR son ventanas ampliamente usadas la de Hanning, Hamming, Blackman, Kaiser-Bessel, etc [HAR78].

b) **IIR (respuesta impulso infinita).** En este caso la salida filtrada y la entrada del filtro están relacionados por la ecuación en diferencias:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (\text{B.28})$$

o equivalentemente por la suma de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (\text{B.29})$$

donde $h[n]$ es la respuesta impulso del filtro.

Los filtros IIR tienen la ventaja de su fácil implementación y su mayor selectividad en frecuencia. En general, los filtros IIR ofrecen una excelente respuesta en magnitud a expensas de una fase no lineal. Tienen, pues, características superiores a los FIR cuando la fase no es de interés en el sistema. En nuestro problema de la discriminación de blancos de radar buscamos aniquilar la respuesta del blanco correcto, por lo que será de más interés aniquilar la magnitud de la respuesta en frecuencia para obtener mínima energía.

Para diseñar filtros IIR paso baja el método que lleva a mejores resultados es el diseño a partir de filtros analógicos cuya función de transferencia conocemos, usando transformación bilineal. En este diseño se parte de la ecuación diferencial del sistema analógico paso-baja de orden N y se divide dicha ecuación en N ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, las cuales se integran para luego usar una aproximación numérica de la integral basada en la regla trapezoidal. El resultado es que la función de sistema del filtro digital se obtiene del analógico a través de una transformación bilineal:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (\text{B.30})$$

de forma que :

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (\text{B.31})$$

Esta transformación da filtros digitales estables a partir de filtros analógicos estables y evita problemas de aliasing presentes en otras técnicas de diseño. Sin embargo el precio que se paga es la introducción de una distorsión en el eje de frecuencias, debido a que todo el eje w es mapeado en el intervalo $[0, \pi]$, por lo que además la frecuencia de corte del sistema analógico debe ser precalculada para compensar este efecto mediante la relación:

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{w}{2}\right) \quad \begin{array}{l} \Omega \text{ frecuencia del sistema analógico} \\ w \text{ frecuencia del sistema digital} \end{array} \quad (\text{B.32})$$

Típicos filtros analógicos selectivos en frecuencia que se toman para diseñar filtros digitales son los filtros de Butterworth y Chebyshev. A continuación se describirán someramente las principales características de cada uno de ellos [OPP75]:

a) **Filtros de Butterworth.**- Se definen por la propiedad de que su respuesta en magnitud es máximamente plana en la banda de paso¹. Para un filtro paso baja de orden $2N$ esto significa que las primeras $2N-1$ derivadas de la respuesta en magnitud cuadrática son cero en $\Omega = 0$. Otra propiedad es que la aproximación del filtro ideal paso-baja es monótona en la banda de paso y de banda de stop². La respuesta en magnitud del filtro analógico de Butterworth viene dada por:

¹ Se denomina banda de paso a la banda de frecuencia que el filtro paso baja deja intacta.

² Se denomina banda de stop a la banda de frecuencia que el filtro paso baja atenúa.

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (\text{B.33})$$

donde Ω_c es la frecuencia de corte y N es el orden del filtro analógico respectivamente. Conforme N se incrementa la respuesta en magnitud del filtro se acerca más a la unidad en la banda de paso y tiende rápidamente a cero en la banda de stop manteniendo el valor de $1/2$ en la frecuencia de corte Ω_c .

A partir de la respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth analógico construimos el filtro digital mediante transformación bilineal (B.31), calculando Ω_c a partir de (B.32) evaluándola para la frecuencia de corte que queramos del filtro digital, e imponiendo un orden fijo N .

b) Filtros de Chebyshev.- La respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth es monótona en la banda de paso y en la de stop, de forma que cerca de $\Omega = 0$ la respuesta en magnitud es aproximadamente la unidad mientras que debido a su comportamiento monótono se aleja de dicho valor ideal en la banda de paso conforme Ω se acerca a Ω_c .

Un comportamiento mas eficiente, que generalmente consigue las mismas especificaciones en frecuencia con órdenes mas bajos del filtro, es distribuir la precisión de la aproximación uniformemente sobre la banda de paso, siendo monótona en la banda de stop o viceversa. Esta aproximación se lleva a cabo eligiendo una respuesta en magnitud que tenga un comportamiento de equirrizado mas que un comportamiento monótono. La familia de los filtros de Chebyshev tienen la propiedad de que la respuesta en magnitud es de equirrizado en la banda de paso y monótona en la de stop o monótona

en la de paso y de equirrizado en la de stop. La forma analítica de la respuesta en magnitud de estos filtros viene dada por:

$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)} \quad (\text{B.34})$$

donde N es el orden del filtro, V_N es el polinomio de Chebyshev de N -ésimo orden definido como:

$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x) \quad (\text{B.35})$$

y ϵ es la magnitud del rizado permitido en banda de paso. Partiendo de un orden N y un rizado ϵ de forma que se cumplan unas determinadas especificaciones en frecuencia, se diseña el filtro digital mediante transformación bilineal, tomando la frecuencia de corte Ω_c de forma que satisfaga la ecuación (B.32) evaluada para la frecuencia de corte del filtro digital.

B-5. ELECCIÓN DE PARÁMETROS EN LOS FILTROS DIGITALES PASO-BAJA Y EN LAS VENTANAS ESPECTRALES.

El filtrado paso-baja, tanto con filtros digitales como con las ventanas espectrales puede ser único, es decir, filtrar la señal para después pasar al proceso de identificación con la serie de filtros, o bien puede considerarse una etapa previa a cada FAR, de forma que habrá un filtrado antes de pasar por un FAR dado, pudiendo considerarse este filtro asociado a cada FAR particular como un único bloque de identificación del sistema.

Sea cuál sea el caso, una vez escogido el tipo de filtro y el método con que se va a diseñar (FIR ó IIR) o la forma de ventana que se va a usar, queda el problema de la elección de los parámetros tales como la frecuencia de corte o el orden para el caso del filtro o la duración u otro tipo de parámetros característicos en el caso de la ventana. Estos parámetros han de escogerse de forma que la discriminación entre los distintos blancos sea óptima. Para ello se lleva a cabo un barrido en este tipo de parámetros de forma que la energía de salida mínima corresponda al caso del blanco correcto. Para que dicha elección sea independiente del nivel de ruido que contamina la señal, se lleva a cabo con la señal sin ruido, y para distintas orientaciones del blanco para conseguir así que sea independiente del ángulo entre la onda incidente y el blanco. Un esquema del proceso de elección de los parámetros (frecuencia de corte) en el caso de un filtro digital paso-baja se muestra en la figura (B.1).

1) Partiendo de una librería de señales $s_1, s_2 \dots s_{N_b}$ se procede al criterio de elección de parámetros, en este caso la frecuencia de corte de cada etapa de filtrado. Partiendo de la primera señal s_1 correspondiente a la onda dispersada por un blanco específico, se determina, para cada frecuencia de corte de dicho filtro fc_1 en incrementos δf , el rango de frecuencias de corte posibles (en el sentido de que haya discriminación) en el resto de los filtros.

Repitiendo este proceso para cada señal de la librería $\{s_i\}$ con $i=1\dots N_b$, se van determinando sucesivamente el rango de frecuencias de corte posibles en los otros filtros para cada frecuencia de corte en el filtro i -ésimo de forma que haya una buena discriminación (figura (B.1)).

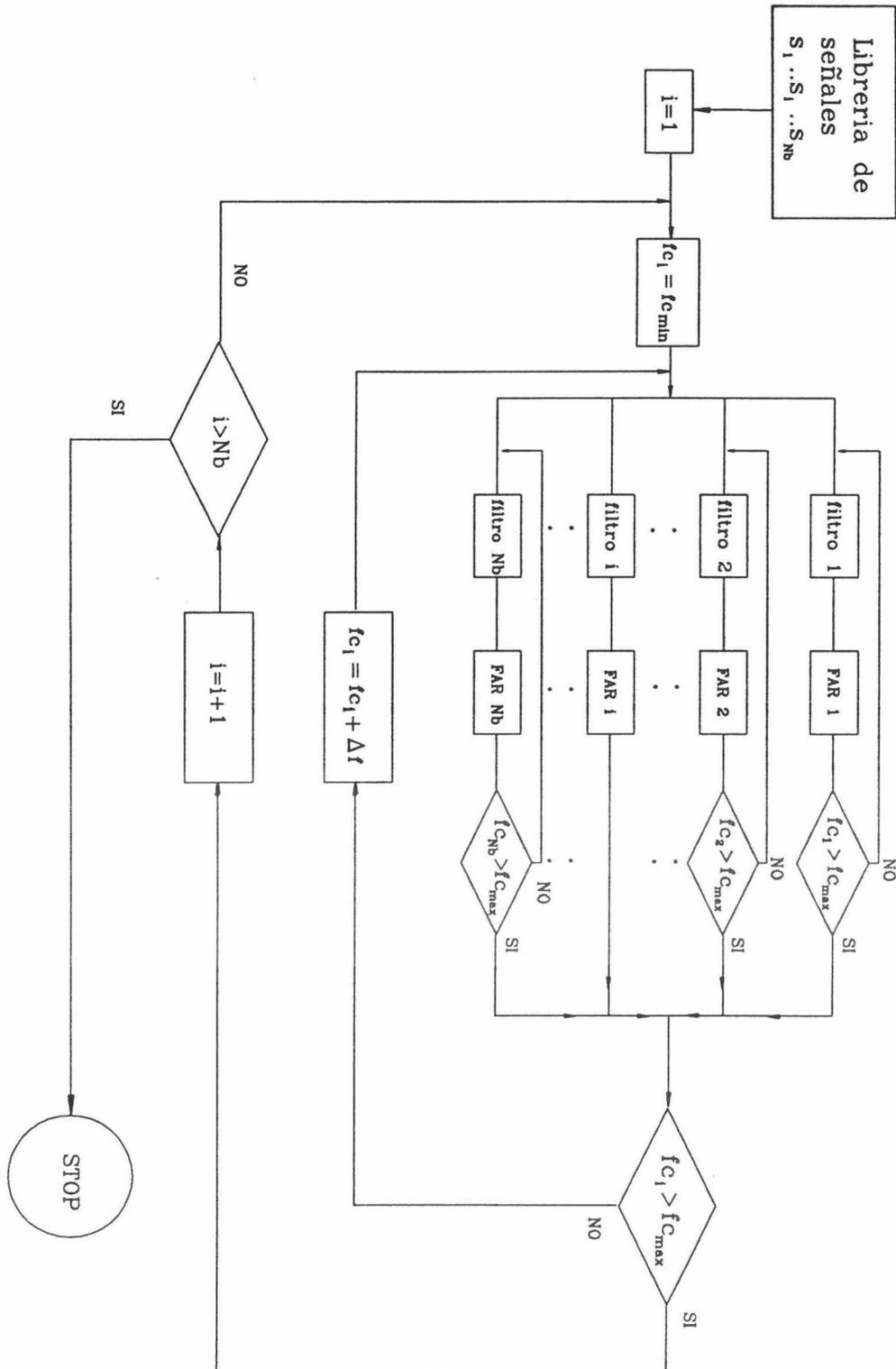


Figura (B.1).- Proceso de elección de la frecuencia de corte de los filtros digitales pasobaja para el caso de la discriminación entre Nb blancos.

2) Se forman las N_b -uplas de frecuencias permitidas $(f_{c_1}, f_{c_2}, \dots, f_{c_{N_b}})$ de forma que cada una de ellas esté en el rango de frecuencias permitidas de las restantes. Esto nos asegura que la discriminación se producirá sea cuál sea la señal recibida.

3) Posteriormente escogemos entre el conjunto de N_b -uplas permitidas, aquella que dé una energía mínima para el blanco correcto de forma que la discriminación con el resto de las estructuras sea óptima.

BIBLIOGRAFIA



-
- [ABA85] T.J. Abatzoglou, "A Fast Maximum Likelihood Algorithm for Frequency Estimation of a Sinusoid Based on Newton's Method", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-33, pp. 77-89, Feb. 1985.
- [ALS93] S.A. Alshebeili, A.N. Venetsanopoulos and A.E. Cetin, "Cumulant based identification approaches for nonminimum phase FIR systems", IEEE Trans on Signal Processing, Vol. 41, No. 4, pp. 1576-1588, AP. 1993.
- [AKA66] H. Akaike, "Note on Higher-Order Spectra", Ann. Ins. Statist. Math. , No. 18, pp. 123-126, 1966.
- [AND74] R.A. Anderson, J.A. Landt, F.J. Deadrick and E. K. Miller, "The LLL Transient Electromagnetic Measurement Facility: A Brief Discription", Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, CA, Rep. UCRL-51933, Aug 1974.
- [BAK91] S. Bakamidis, M. Dendrinis, and G. Carayannis, "SVD Analysis by Synthesis of Harmonic Signals", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., Vol. 39, No 2, February 1991.
- [BAL89] C.A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics", Ed. New York: Wiley, Chap. 11, 1989.
- [BAR55] M.S. Bartlett, "An Introduction to Stochastic Processes", London U.K.: Cambridge Univ. Press, 1955.
- [BAU71] C.E. Baum, "On the Singularity Expansion Method for the Solution of Electromagnetic Interaction Problems", Interaction Note 88, December 1971.
- [BAU76] C.E. Baum, "The Singularity Expansion Method" in Transient Electromagnetic Fields, L.B. Felson, Ed. New York: Springer-Verlag, ch.3, pp. 129-179, 1976.
- [BAU91] C.E. Baum, E.J. Rothwell, K.M. Chen and D.P. Nyquist, "The Singularity Expansion Method and its Application to Target Identification", Proc. IEEE, Vol.79, No. 10, pp. 1481-1492, October 1991.
- [BAY90] J. P. R. Bayard and D. Schaubert, "Target Identification Using Optimizations Techniques", IEEE Trans Antennas and Propagat., Vol 38, No. 4, April 1990.

[BAY91] **J. P. R. Bayard, D. H. Schaubert, E. J. Rothwell, K. M. Chen and D. M. Nyquist**, "*Optimization Method versus E-pulse Method in the context of Target Discrimination*", IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol 39, No. 1, Jan. 1991.

[BEN82] **J.S. Bendat and A.G. Piersol**, "*Spectral Analysis of Nonlinear Systems Involving Square-Law Operations*", J. Sound Vibr., Vol.81, pp. 199-212, 1982.

[BLA53] **A. Blanc-Lapierre and R. Forter**, "*Theorie des Fonctions Aleatoires*". Paris, France: Masson, 1953.

[BLAR75] **M.L. VanBlaricum and R. Mittra**, "*A Technique for Extracting the Poles and Residues of a System Directly from its Transient Response*", IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. AP-23, pp. 777-781, Nov. 1975.

[BLAR78] **M.L. Van Blaricum and R. Mittra**, "*Problems and Solutions Associated with Prony's Method for Processing Transient Data*", IEEE Trans. Antennas Propagation, Vol. AP-26, pp. 174-182, January 1978.

[BEN80] **A. Benveniste, M. Goursat and G. Ruget**, "*Robust Identification of Nonminimum Phase System: Blind Adjustment of Linear Equalizer in Data Communications*", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-25, pp. 385-398, June 1980.

[BRI65] **D.R. Brillinger**, "*An Introduction to Polyspectra*", Ann. Math. Statist., Vol. 36, pp. 1351-1374, 1965.

[BRI67a] **D.R. Brillinger and M. Rosenblatt**, "*Computation and Interpretation of k-th Order Spectra*", in Spectral Analysis of Time Series, B. Harris, Ed. New York, NY:Wiley, pp. 189-232, 1967.

[BRI67b] **D.R. Brillinger and M. Rosenblatt**, "*Asymptotical Theory of Estimates of k-th Order Spectra*", Spectral Analysis of Time Series, B. Harris, Ed. New York, NY:Wiley, pp. 153-188, 1967.

[BRI70] **D.R. Brillinger**, "*The Identification of Polynomial Systems by Means of Higher Order Spectra*", J. Sound Vibr., Vol.12, pp. 301-313, 1970.

[BRI77] **D.R. Brillinger**, "*The Identification of a Particular Nonlinear Time Series System*", Biometrika, Vol. 65, pp. 509-515, 1977.

[BRO83] **R. G. Brown**, "*Random Signal Analysis and Kalman Filtering*", Ed. John Wiley & Sons, 1983.

-
- [CAD87] J.A. Cadzow and M.-M Wu, "*Analysis of Transient Data in Noise*", IEE Proceedings, Vol 134, Pt F, No 1, February 1987.
- [CAD88] J. A. Cadzow, "*Signal Enhancement. A Composite Property Mapping Algorithm*", IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, Vol ASSP-36, No. 1, Jan. 1988.
- [CAD91] J. A. Cadzow and D. M. Wilkes, "*Enhanced Rational Signal Modeling*", Signal Processing, Vol. 25, No. 2, November 1991.
- [CAR86] M.C. Carrión, "*Análisis Espectral por Modelación Paramétrica de Señales Electromagnéticas Dispersadas por Blancos de Radar*", Tesis Doctoral, Univ. de Granada, 1986.
- [CAR93] M.C. Carrión, A. Gallego, J. Portí and D.P. Ruiz, "*Subsectional-Polynomial E-pulse Synthesis and Application to Radar Target Discrimination*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-41, No. 9, pp. 1204-1211, Sept. 1993.
- [CAR94] M.C. Carrión, Diego P. Ruiz, A. Gallego, A. Medouri, "*Comparación entre las Técnicas FAR y E-pulso para la Discriminación de Blancos de Radar*", IX Symposium Nacional de la URSI, Vol 1, pp 283-287, Gran Canaria, Septiembre 1994.
- [CAR95a] M.C. Carrión, D.P. Ruiz, A. Gallego and J.A. Morente, "*FIR system identification using third- and fourth-order cumulants*", IEE Electronics Letters, Vol. 31, No. 8, pp. 612-614, April 1995.
- [CAR95b] M.C. Carrión, A. Gallego, D.P. Ruiz, J.A. Morente and G. Giménez, "*A Block-Data Recursive-in-Order Method Based on Reflection Coefficients for Bispectrum Estimation Using AR-Modeling*", Signal Processing 47, November 1995.
- [CHE82a] K.M. Chen and D. Westmoreland, "*Radar Waveform Synthesis for Exciting Single-Mode Backscatters from a Sphere and Application for Target Discrimination*", Radio Science, Vol. 17, No. 3, pp. 574-588, May-June 1982.
- [CHE82b] K.M. Chen, D. Nyquis, D. Westmoreland, C. Changs and B. Drachman, "*Radar Waveform Syntesis for Single-Mode Scattering by a Thin Cylinder and Application for Target Discrimination*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol AP-30, No. 5, Sept 1982.

- [CHE86] K.M. Chen, D.P. Nyquist, E.J. Rothwell, L.L. Webb and B. Drachman, "Radar Target Discrimination by Convolution of Radar Returns with Extinction-Pulses and Single-Mode Extraction Signals", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-34, No. 7, pp. 896-904, July 1986.
- [CHU76] C.W. Chuang and D.L. Moffat, "Natural Resonances of Radar Targets via Prony Method and Target Discrimination", IEEE Trans. Aerospace Electronic System, Vol. AES-12, No. 5, pp.583-589, Sept. 1976.
- [COR65] M. Corrington, "Simplified Calculation of Transient Response", Proc. IEEE, Vol. 53, pp. 287-292, March 1965
- [CRA46] H. Cramer, "Mathematical Methods of Statistics", Princenton, NJ. Princenton Univ. Press, 1946.
- [DAL89] J.W. Dalle Molle and M.J. Hinich, "The Trispectrum" in Proc. Workshop on Higher-Order Spectral Analysis, Vail, CO, pp. 68-72, 1989.
- [FOK87] F.Y.S. Fok and D.L. Moffat, "The K-pulse and E-pulse", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-35, No. 11, pp. 1325-1326, Nov.1987.
- [FON93] J.A.R. Fonollosa and J. Vidal, "System Identification using a Linear Combination of Cumulant Slices", IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 41, No 7, pp. 2405-2412, July 1993.
- [FOU77] P.F. Fougere, "A Solution to the Problem of Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power, Spectrum Analysis", J. Geophysical Res., Vol. 82, pp. 1051-1054, March 1977.
- [FRI89] B. Friedlander and B. Porat, "Adaptative IIR Algorithms Based on High-order Statistics", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 37, pp. 485-495, 1989.
- [FRI90] B. Friedlander and B. Porat, "Asymptotically Optimal Estimation of MA and ARMA Parameters of Non-Gaussian Processes from High-order Moments", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 35, pp. 27-35, 1990.
- [GAL92] A. Gallego, A. Medouri, D.P. Ruiz and M.C. Carrión, "Estimation of the Number of Natural Resonances Contained in the Radar Target Response Using E-pulse Technique", Int. Wroclaw Symposium on Electromagnetic Compatibility, Wroclaw (Poland), pp. 15-18, Sept. 1992.

[GAL93a] A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri, "Prewindowed and Postwindowed Methods for Bispectrum Estimation Via AR Modelling". IEE Electronics Letters, Vol. 29, No. 2, pp. 181-182, January 1993.

[GAL93b] A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri, "Extended E-pulse Technique for Discrimination of Conducting Spheres", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-41, No. 10, pp. 1460-1462, Oct. 1993.

[GAL94a] A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz, and A. Medouri, "The Relationship Between AR-Modelling Bispectral Estimation and The Theory of Linear Prediction", Signal Processing, Vol. 37, No. 3, April 1994.

[GAL94b] A. Gallego, "Métodos de Modelación AR del Biespectro. Aplicación de la Técnica E-pulso a la Discriminación de Blancos de Radar". Tesis Doctoral, Granada, Junio 1994.

[GAL94c] A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz, and J. Portí, "AR-Modelling bispectrum estimation using data segmentation into coupled records", IEE Electronics Letters, Vol. 30, No. 25, pp. 2096-2098, Dec. 1994.

[GAL95a] A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri, "A "Constrained Third-Order Mean"-type Estimator to Calculate the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids Using Third-Order Statistic", Signal Processing Vol. 42, pp 59-69, March 1995.

[GAL95b] A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri, "Improved S-pulse Automated Scheme Using Subsectional-Polynomial Basis-Functions", aceptado para su publicación a IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Aug. 1995.

[GER77] W. Gersch and J. Yonemoto, "Automatic Classification of EEG's: A parametric model new features for classification approach", Proc. Joint Automatic Control Conf. (San Francisco, CA), June 22-24, 1977.

[GIA87] G.B. Giannakis, "Cumulants: A Powerful Tool in Signal Processing", Proc. IEEE, Vol. 75, pp. 1333-1334, 1987.

[GIA89a] G.B. Giannakis and J.M. Mendel, "Identification of Non-Minimum Phase Systems Using Higher-Order Statistics", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 37, pp. 360-377, March 1989.

- [GIA89b] **G.B. Giannakis**, "*Signal reconstruction from multiple correlations: frequency- and time-domain approaches*", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 6, No. 5, pp. 682-697, May 1989.
- [GIA90a] **G.B. Giannakis and A. Swami**, "*On estimating non-causal nonminimum phase ARMA models on non-Gaussian processes*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 38, pp. 478-495, 1990.
- [GIA90b] **G. B. Giannakis and J. M. Mendel**, "*Cumulant-based order determination of non-Gaussian ARMA models*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 38, No. 8, pp. 1411-1423, 1990.
- [GIA92] **G.B. Giannakis and A. Swami**, "*Identifiability of General ARMA Processes Using Linear Cumulant-based Estimators*", Automatica, Vol. 28, No. 4, pp. 771-779, 1992.
- [GOD81] **M.D. Godfrey and F. Rocca**, "*Zero-memory Nonlinear Deconvolution*", Geophys. Prospect., Vol. 29, pp. 189-228, 1981.
- [GOL83] **G.H. Golub and C.F. Van Loan**, "*Matrix Computations*", The Johns Hopkins University Press, 1983.
- [GOM86] **R. Gómez and M.C. Carrión**, "*Extended Prony Method Applied to Noisy Data*", IEE Electronics Letters, Vol. 22, No. 11, pp. 613-614, May 1986.
- [HAN93] **P. Händel**, "*High-order Yule-Walker estimation of the parameters of exponentially damped cisoids in noise*", Signal Processing, Vol 32, No. 3, pp. 315-328, June 1993.
- [HAR68] **R. F. Harrington**, "*Field Computations by Moment Methods*", Macmillan, New York, 1968.
- [HAR78] **F. J. Harris**, "*On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*", Proc. of the IEEE, Vol.66, No. 1, Jan. 1978.
- [HAS63] **K. Hasselman, W. Munk and G. MacDonald**, "*Bispectra of Ocean Waves*" in Time Series Analysis, New York: Wiley, pp. 125-130, 1963.
- [HAY79] **S. Haykin**, "*Nonlinear Methods of Spectral Analysis*", New York, NY: Springer-Verlag, 1979.

[HAY85] S. Haykin, "Radar Signal Processing", IEEE ASSP Magazine, Vol. 2, No. 2, pp. 2-18, April 1985.

[HIN68] M.J. Hinich and C.S. Clay, "The Application of the Discrete Fourier Transform in the Estimation of Power Spectra Coherence and Bispectra of Geophysical Data", Rev. Geophys., Vol. 6, No. 3, pp. 347-363, 1968.

[HIN82] M.J. Hinich, "Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series", J. Time Series Analysis 3, pp. 169-176, 1982.

[HIN85a] M.J. Hinich and D.M. Patterson, "Evidence of Nonlinearity in Daily Stock Returns". J. Bus. Econ. Stat., Vol. 3, No. 1, pp. 69-77, 1985.

[HIN85b] M.J. Hinich and D.M. Patterson, "Identification of the Coefficients in a Non-Linear Time Series of the Quadratic Type", J. of Economics, No. 30, pp. 269-288, 1985.

[HIN88] M.J. Hinich and M.A. Wolinsky, "A Test for Aliasing Using Bispectral Analysis", J. American Statistical Association, Vol. 83(402), pp. 499-502, 1988.

[HUA90] Y. Hua and T.K. Sarkar, "Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoids in Noise", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-38, No. 5, pp. 814-824, May 1990.

[HUA91] Y. Hua, "Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using Higher Order Statistics and Matrix Pencil", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 39, No. 7, pp. 1691-1692, July 1991.

[HUA92] Y. Hua and T.K. Sarkar, "Parameter Estimation of Multiple Transient Signals", Signal Processing, Vol. 28, pp. 109-115, 1992.

[HUA93] Y. Hua, F. Baqai, Y. Zhu, and D. Heilbronn, "Imaging of Point Scatterers from Step Frequency ISAR Data", IEEE Trans. on Aerosp. and Electronics Systems, Vol. 29, pp. 195-205, Jan 1993.

[HUA94] Y. Hua, "High Resolution Imaging of Continuously Moving Object Using Stepped Frequency Radar", Signal Processing, Vol. 35, pp. 33-40, Jan 1994.

[HUB81] P.J. Huber, B. Kleiner, T. Gasser and G. Dumermuth, "Statistical Methods for Investigating Phase Relations in Stationary Stochastic Processes", IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-19, pp. 78-86, 1981.

- [HUR87] M.P. Hurst and R. Mittra, "Scattering Center Analysis via Prony's Method", IEEE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. AP-35, pp. 986-988, Aug. 1987.
- [IMS84] IMSL User's Manual, Edition 9.2, "International Mathematical and Statistical Libraries", Inc., Houston, Texas, 1984.
- [JOU90] I.I. Jouny, "Bispectral Analysis of Radar Signals with Application to Target Classification", Ph.D. dissertation, Univ. Ohio State, 1990.
- [KAH93] M. Kharizi, T.K. Sarkar and Z.A. Maricevic, "Analysis of Wide Radiating Slot in the Ground Plane of a Microstrip Line", IEEE Trans. Microwave Theory & Techniques, Vol 42, pp. 29-37, Jan 1993.
- [KAH94] M. Kharizi, T.K. Sarkar and Z.A. Maricevic, "Dynamic Analysis of a Microstrip Line Over a Perforated Ground Plane", IEEE Trans. Microwave Theory & Techniques, Vol 42, No. 5, pp. 820-825, May 1994.
- [KAY81] S.M. Kay and S.L. Marple, "Spectrum Analysis-A Modern Perspective", Proc. IEEE, Vol. 69, No. 11, pp. 1380-1419, November 1981.
- [KAY84] S. M. Kay, "Accurate Frequency Estimation at Low Signal-to-Noise Ratio", IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, Vol ASSP-32, No. 3, June 1984.
- [KAY88] S.M. Kay, "Modern Spectral Estimation". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.
- [KEN52] E. Kennaugh, "Polarization Properties of Radar Reflections", Ohio State Univ., Project Rep. Contract No. RADC-AF28(009)-90, Rep. 389-12 (AD2494), March 1952.
- [KEN65] E.M. Kennaugh and D.L. Moffatt, "Transient and Impulse Response Aproximations", Proc. IEEE pp.893-901, August 1965.
- [KEN81] E.M. Kennaugh, "The K-pulse Concept" IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-29, No. 2, pp. 327-331, Mar 1981.
- [KES86] S.B. Kesler, "Modern Spectrum Analysis II", New York, NY: IEEE Press, 1986.
- [KHO89] S. Al Khouri, R. Gómez, F.J. Muñoz and V. Ramirez, "Extraction of the Poles of Noisy Rational Signals by Continuation Method", Proc. Inst. Elect. Eng., pt. F, pp. 57-62, Feb 1989.

-
- [KIM80] Y.C. Kim, J.M. Beall, E.J. Powers and R.W. Miksad, "*Bispectrum and Nonlinear Wave Coupling*", Phys. Fluids, Vol.23, No. 2, pp. 258-263, February 1980.
- [KIM85] H.T. Kim, N. Wang and D.L. Moffat, "*K-pulse for Thin Circular Loop*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-33, No. 12, pp. 1403-1407, Dec. 1985.
- [KON88] R. Konstantinides and K. Yao, "*Statistical Analysis of Effective Singular Values in Matrix Rank Determination*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 757-763, May 1988.
- [KOR68] J. Korein, L.J. Tick, R.A. Zeitlin and C.T. Randt, "*Linear and Nonlinear Spectral Analytic Techniques Applied to the Human Electroencephalogram*", Corr. Sci. Health Re. Council, Vol. 4, pp. 1126-1128, 1968.
- [KUM82] R. Kumaresan and D.W. Tufts, "*Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids and Pole-Zero Modeling in Noise*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, pp. 833-840, Dec. 1982.
- [KUM83] R. Kumaresan, "*On the Zeros of the Linear Prediction-Error Filter for Deterministic Signals*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-31, pp. 217-220, Feb. 1983.
- [KUM86] R. Kumaresan, L.L. Scharf and A.K. Shaw, "*An Algorithm for Pole-Zero Modeling and Spectral Analysis*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-34, pp. 637-640, Jun. 1986.
- [LAW74] C.L. Lawson and R.J. Hanson, "*Solving Least Squares Problems*", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.
- [LEO59] V. P. Leonov and A. N. Shiryaev, "*On the Technique of Computing Semi-Invariants*", Theory Probl. Appl., No. 4, pp. 319-329, 1959.
- [LII76] K.S. Lii, M. Rosenblatt and C. Van Atta, "*Bispectral Measurements in Turbulence*", J. Fluid Mech., Vol. 77, pp. 45-62, 1976.
- [LII81] K.S. Lii and K.N. Helland, "*Cross-Bispectrum Computation and Variance Estimation*", ACM Trans. Math. Software, Vol. 7, pp. 284-294, 1981.

[LII82] **K.S. Lii, M. Rosenblatt**, "*Deconvolution and Estimation of Transfer Function Phase and Coefficients for Non-Gaussian Linear Processes*", *Ann. Statist.*, Vol. 10, pp. 1195-1208, 1982.

[LII84] **K.S. Lii, M. Rosenblatt**, "*Non-Gaussian Linear Processes, Phase, and Deconvolution*", in *Statistical Signal Processing*, E.J. Wegman and J.G. Smith, Eds, pp. 51-58, 1984.

[LIN81] **H. Lin and A. Ksienski**, "*Optimum Frequencies for Aircraft Classification*", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-17, pp. 656-665, Sept. 81.

[MAK75] **J. Makhoul**, "*Linear Prediction: A Tutorial Review*", *Proc. IEEE*, Vol. 63, No. 4, pp. 561-580, April 1975.

[MAG54] **T.A. Magness**, "*Spectral Response of a Quadratic Device to Non-Gaussian Noise*". *J. Appl. Phys.*, Vol. 25, pp. 1357-1365, 1954.

[MAI74] **R.K. Mains and D.L. Moffatt**, "*Complex Natural Resonances of an Object in Detection and Discrimination*", TR-3424-1, Ohio State University, Electroscience Laboratory, Columbus, June 1974.

[MAR73] **L. Marin**, "*Natural-Mode Representation of Transient Scattered Fields*", *IEEE Trans Antennas and Propagat.*, vol 21, No. 6, November 1973.

[MAR87] **S.L. Marple**, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, Chaps. 8-9, pp.206-284, 1987.

[MED95] **A. Medouri, D.P. Ruiz, A. Gallego and M.C. Carrión**, "*Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using Matrix Pencil Method and Fourth Order Statistic*", *IEEE Signal Processing Athos Workshop on Higher-order Statistics*, pp. 347-351, June 1995.

[MEN91] **J.M. Mendel**, "*Tutorial on Higher-Order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory: Theoretical Results and Some Applications*", *Proc. IEEE*, Vol. 79, No. 3, pp. 278-305. March 1991.

[MES84] **E. Mese, et. al.**, "*Target Identifications by Means of Radar*", *Microwave Journal*, pp. 85-102, Dec. 1984.

[MIE83] H. Mieras, "Optimal Polarizations of Simple Compound Targets", IEEE Trans. Ant. Propagat., vol AP-31, pp.996-999- November 1983.

[MIL73] E.K. Miller, A.J. Poggio and G.J. Burke, "An Integro-Differential Equation Technique for the Time-Domain Analysis of Thin-Wire Structures. Part I. Numerical Results", J. Comput. Phys., Vol.12, pp. 210-233, 1973.

[MIL80] E.K. Miller and J.A. Landt, "Direct Time-Domain Techniques for Transient Radiation and Scattering from Wires", Proc. IEEE, Vol. 68, pp. 1396-1423, 1980.

[MIL91] E.K. Miller and G.J. Burke, "Using Model Based Parameter Estimation to Increase the Physical Interpretability and Numerical Efficiency of Computational Electromagnetics", Computer Physics Communications, Vol.68, pp. 43-75, 1991.

[MOF75] D.L. Moffat and R. K. Mains, "Detection and Discrimination of Radar Targets", IEEE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. Ap-23, No. 3, May 1975.

[MOR84] M. A. Morgan, "Singularity Expansion Representations of Fields and Currents in Transient Scattering", IEEE Trans. Antennas and Propagat., vol 32, No. 5, May 1984.

[MOR88] M.A. Morgan, "Scatterer Discrimination Based Upon Natural Resonance Annihilation", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 2, No. 5/6, pp. 481-502, 1988.

[NAN94] A.K. Nandi, "Blind identification of FIR systems using third order cumulants", Signal Processing, vol 39, pp 131-147, September 1994.

[NIC72] A.M. Nicolson, C.L. Bennett, D. Lamensdorf and L. Susman, "Applications of Time-Domain Metrology to the Automation of Broadband Microwave Measurements", IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-20, Jan. 1972.

[NIK85] C.L. Nikias, A.N. Venetsanopoulos and B. Paramasivaiah, "Mixed-Phase Wavelet Estimation Via Autoregressive Bispectrum", in Proc. 1985 Int. Geosc. Remote Sensing Symp., Vol. 1, Amherst, MA: U. Mass Press, pp. 66-71, Oct. 1985.

[NIK86a] C.L. Nikias, A.N. Venetsanopoulos and B. Paramasivaiah, "Identification of Nonminimum Phase Communication Channels Via Parametric Modeling of Third Moments", in Proc. Int. Conf. Communications (Toronto, Ont., Canada), June 1986.

[NIK86b] C.L. Nikias, "ARMA Bispectrum Approach to Nonminimum Phase System Identification", Tech Rep. CDSP-86-102, Dept. Electrical and Computer Eng., Northeastern Univ., Boston, MA, Aug. 1986.

[NIK87] C.L. Nikias and M.R. Raghuvver, "Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework", Proc. IEEE, Vol. 75, No. 7, pp. 869-891, July 1987.

[NIK93a] C.L. Nikias and J.M. Mendel, "Signal Processing with Higher-Order Spectra", IEEE Signal Processing Magazine, pp. 10-37, July 1993.

[NIK93b] C.L. Nikias and A.P. Petropulu, "Higher-Order Spectra Analysis. A Nonlinear Signal Processing Framework", Ed. Prentice Hall, 1993.

[OPP75] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[OUI88] H. Ouibrahim, D.D. Weiner, and T.K. Sarkar, "Matrix Pencil Approach to Direction Finding", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 610-612, April 1988.

[PAN88] R. Pan and C.L. Nikias, "The Complex Cepstrum of Higher-order Moments", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 186-205, 1988.

[PAPA90] C.K. Papadopoulos and C.L. Nikias, "Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using Higher Order Statistics", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-38, No. 8, pp. 1424-1436, Aug. 1990.

[PAPO77] A. Papoulis, "Signal Analysis", McGraw-Hill, New York, 1977.

[PAPO84] A. Papoulis, "Probability Random Variables and Stochastic Processes", New York: McGraw-Hill, 1984.

[PEA80] L.W. Pearson and D.R. Roberson, "The Extraction of the Singularity Expansion Description of a Scatterer from Sampled Transient Surface Current Response", IEEE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. Ap-28, pp. 182-190, Mar 1980.

[PET94] L. Peters, Jr., J.J. Daniels and J.D. Daniels, "Ground Penetrating Radar as a Subsurface Environmental Sensing Tool", Proceeding of the IEEE, Vol. 82, No. 12, pp. 1802-1822, Dec 1994.

-
- [PFU92] A.L. Pflug, G.E. Ioup, J.W. Ioup and R.L. Field, "*Properties of Higher-Order Correlations and Spectra for Band Limited, Deterministic Transients*", J. Acoust. Soc. Am., No. 91(2), pp. 975-988, February 1992.
- [PIZ84] R. Pizer and J. Moore, "*Moment Methods in Electromagnetics. Techniques and Applications*". Research Studies Press, London, 1984.
- [POR89] B. Porat and B. Friedlander, "*Performance Analysis of Parameter Estimation Algorithms Based on High-order Moments*", Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing, Vol. 3, pp. 191-229, 1989.
- [PRO795] R. Prony, "*Essai Experimental et Analytique*", Paris J. de l'Ecole Polytechnique, Vol. 1, pp. 24-76, 1795.
- [RAG84] M.R. Raghuvver, "*Bispectrum and Multidimensional Power Spectrum Estimation Algorithms Based on Parametric Models with Applications to the Analysis of ECG data*", Ph.D. Dissertation, Univ. of Connecticut, Storrs, Dec. 1984.
- [RAG85] M.R. Raghuvver and C.L. Nikias, "*Bispectrum Estimation: A parametric Approach*" IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-33, No. 5, pp. 1213-1230, October 1985.
- [RAG86] M.R. Raghuvver and C.L. Nikias, "*Bispectrum Estimation Via AR Modelling*", Signal Processing, Vol. 9, No. 1, pp. 35-48, January 1986.
- [RAO88] B. D. Rao, "*Perturbation Analysis of an SVD-Based Linear Prediction Method for Estimating the Frequencies of Multiple Sinusoids*", IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, vol ASSP-36, No. 7, July 1988.
- [REI83] J. G. Reid, "*Linear System Fundamentals*", McGraw-Hill, New York, 1983.
- [REP75] A. Repjar, A. Ksienski, and L. White, "*Object Identification from Multi-frequency Radar Returns*", The Radio and Electronic Engineer, Vol. 45, pp. 161-167, April 1975.
- [ROB80] E. A. Robinson and S. Treitel, "*Geophysical Signal Analysis*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

[ROD73] G.I. Roden and D.J. Bendiner, "*Bispectra and Cross-Bispectra of Temperature, Salinity, Sound Velocity and Density Fluctuations with Depth off Northeastern Japan*", J. Phys. Ocean, Vol.3, No. 3, pp. 308-317, 1973.

[ROS80] M. Rosenblatt, "*Linear Processes and Bispectra*", J. Appl. Proba., Vol. 17, pp. 265-270, 1980.

[ROS83] M. Rosenblatt, "*Cumulants and Cumulants Spectra*" in Time Series in Frequency Domain, D. Brillinger and P. Krishnaiah, Eds. Amsterdam, The Netherlands:North-Holland, pp. 369-382, 1983.

[ROS85] M. Rosenblatt, "*Stationary Sequences and Random Fields*", Boston: Birkhauser, 1985.

[ROT85a] E.J. Rothwell, D.P. Nyquist, K.M. Chen and B. Drachman, "*Radar Target Discrimination Using the Extinction-Pulse Technique*" IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol AP-33, No. 9, pp. 929-936, Sept. 1985.

[ROT85b] E.J. Rothwell, "*Radar Target Discrimination Using the Extinction-Pulse Technique*", Ph. D. dissertation, Michigan State University, 1985.

[ROT87] E.J. Rothwell, K.M. Chen, D.P. Nyquist and W. Sun, "*Frequency Domain E-pulse Synthesis and Target Discrimination*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-35, No. 4, April 1987.

[ROT87] E.Rothwell, K.M. Chen, and D.P. Nyquist, "*Extraction of the Natural Frequencies of a Radar Target from a Measured Response Using E-pulse Technique*", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-35, pp. 715-720, June 1987.

[ROT88] E.J. Rothwell and K.M. Chen, "*A Hibrid E-pulse/Least Squares Technique for Natural Resonance Extraction*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-76, No. 3, pp. 296-298, March 1988.

[RUI92] Diego P. Ruiz, A. Medouri, A. Gallego, M. C. Carrión, "*Identificación de Blancos de Radar mediante Filtros de Aniquilación de Resonancias*", VII Simposium Nacional de la URSI, vol 2, pp 598-602, Málaga 1992.

[RUI93] Diego P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego , A. Medouri, "*Discriminación de Estructuras Poligonales Conductoras mediante Filtros de Aniquilación de Resonancias*", VIII Simposium Nacional de la URSI, vol 2, pp 834-838, Valencia 1993.

[RUI94] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego and A. Medouri, "*Horizontal-slice Cumulant Matrices for Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids*", in Proc. EUSIPCO-94, VII European Signal Processing Conference, Edinburg, Scotland, U.K. September 1994.

[RUI95a] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego and A. Medouri, "*Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using a Higher-order Correlation-Based Approach*", IEEE Trans. Signal Processing, vol 43, November 1995.

[RUI95b] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego and J.A. Morente, "*Identification of MA Processes Using Cumulants: Several Sets of Linear Equations*", submitted to IEE Proc. Vision, Image and Signal Processing, July 1995.

[RUI95c] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, and A. Gallego, "*Damped Sinusoidal Signal Reconstruction Using Higher-Order Correlations*", submitted to VIII European Signal Processing Conference (EUSIPCO-96), September 1996.

[RUI95d] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, and A. Gallego, "*Blind Identification of FIR Systems Using Fourth-Order Cumulants*", submitted to VIII European Signal Processing Conference (EUSIPCO-96), September 1996.

[SAR92] T.K. Sarkar, Z. Maricevic, and M. Kahrizi, "*An accurate Deembedding Procedure for Characterizing Discontinuities*", International Journal of Microwave and Millimeter Wave Computer Aided Engineering, vol 2, No. 2, pp. 168-178, 1992.

[SAR94] T.K. Sarkar, M. Salazar, "*An Alternate Interpretation of Complex Modes in Closed Perfectly Conducting (Lossless) Structures*", AEU, vol 48, pp. 123-129, May 1994.

[SAR95] T.K. Sarkar, O. Pereira, "*Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of Complex Exponentials*", IEEE Trans Antennas and Propagat. Magazine, vol 37, No. 1, pp. 48-55, February 1995.

[SCA92] G. Scarano, F. Corina, A. Neri and G. Jacovitti, "*Gaussian noise insensitive FIR system identification*", Proc. EUSIPCO-92, vol II, pp 735-738, 1992.

[SCH80] M. Schetzen, "*The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*", New York, NY: Wiley, 1980.

[SHI60] A.N. Shiryaev, "*Some Problems in the Spectral Theory of Higher-Order Moments I*", Theory Probl. Appl., No. 5, pp. 265-284, 1960.

[SHI63] A.N. Shiryaev, "On Conditions for Ergodicity of Stationary Processes in Terms of Higher-order Moments", Theory Probl. Appl., No. 8, pp. 463-439, 1963.

[SHU93] R.M. Shubair, Y.L. Chow, "Efficient Computation of the Periodic Green's Function in Layered Dielectric Media", IEEE Trans Microwave Theory & Techniques, vol 41, pp. 498-592, March 1993.

[SIN63] Y.G. Sinai, "On Higher-Order Spectral Measures of Ergodic Stationary Processes", Theory Probl. Appl., No. 8, pp. 429-436, 1963.

[SKO85] Merril I. Skolnik, "Fifty Years of Radar", Proceedings of the IEEE, Vol. 73. No. 2, Feb. 1985.

[SUB80] T.Subba Rao and M.M. Gabr, "A Test for Linearity of Stationary Time Series", J. Time Series Analysis (GB), Vol. 1, No. 2, pp. 145-158, 1980.

[SWA89] A. Swami, J.M. Mendel, "Closed-form Recursive Estimation of MA coefficient using Autocorrelations and Third-order Cumulants", IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-37, pp. 1794-1795, Nov 1989.

[SWA91] A. Swami, J.M. Mendel, "Cumulant-based Approach to the Harmonic Retrieval and Related Problems", IEEE Trans. Signal Processing, vol 39, No.5, pp. 1099-1109, May 1991.

[SWA92] A. Swami, J.M. Mendel, "Identifiability of the AR Parameters of an ARMA Process Using Cumulants", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 37, No. 2, pp. 268-273, February 1992.

[TES73] F. M. Tesche, "On the Analysis of Scattering and Antenna Problems Using the Singularity Expansion Technique", IEEE Trans. on Ant. and Propagat. Vol. AP-21, No.1, January 1973.

[TIC82] L.J. Tick, "The Estimation on Transfer Functions of Quadratic Systems", Technometrics, Vol. 3, pp. 1055-1096, 1982.

[TUF80] D.W. Tufts and R. Kumaresan, "Improved Spectral Resolution", Proc. IEEE, Vol. 68, pp. 419-420. Mar. 1980.

[TUF82a] D.W. Tufts and R. Kumaresan, "Singular Value Decomposition and Improved Frequency Estimation Using Linear Prediction", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, pp. 671-675, Aug. 1982.

-
- [TUF82b] **D. Tufts and R. Kumaresan**, "*Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood*", *Proceedings of the IEEE*, vol 70, No. 9, Sep. 1982.
- [TUF86] **D.W. Tufts and C.D. Melissinos**, "*Simple, Effective Computation of Principle Eigenvectors and Their Eigenvalues and Application to High-Resolution Estimation of Frequencies*", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 1064-1053, Oct. 1986.
- [TUG90] **J.K. Tugnait**, "*Approaches to FIR System Identification with Noisy Data Using Higher Order Statistics*", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-38, pp. 1307-1317, July 1990.
- [TUG91] **J.K. Tugnait**, "*New results on FIR System Identification Using Higher Order Statistics*", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 39, pp. 2216-2221, October 1991.
- [WEL85] **B. Wells**, "*Voiced/Unvoiced Decision Based on the Bispectrum*", in *Proc. ICASSP'85*, pp. 1589-1592 (Tampa, FL, Mar. 1985).
- [WHI74] **E.C. Whitman**, "*The Spectral Analysis of Discrete Time Series in Terms of Linear Regressive Models*", *Naval Ordnance Labs Rep. NOLTR-70-109*, White Oak, M.D., June 1974.
- [YOU76] **J.D. Young**, "*Radar Imaging from Ramp Response Signatures*", *IEEE Trans. on Antennas and Propagat.* Vol. AP-24, No. 3, May. 76.
- [ZHA93] **X.-D Zhang, Y.-S Zhang**, "*Singular Value Decomposition-based MA Order Determination of Non-Gaussian ARMA Models*", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 41, No. 8, pp. 2657-2664, Aug. 1993.
- [ZHA94] **X.-D Zhang, Y.-S Zhang**, "*FIR System Identification Using Higher Order Statistics Alone*", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 42, No. 10, pp. 2854-2858, Oct. 1994.
- [ZHE93] **F.-C. Zheng, S. McLaughlin and B. Mulgrew**, "*Blind Equalization of Multilevel PAM Data for Nonminimum Phase Channels via Second- and Fourth-order Cumulants*", *Signal Processing*, Vol. 31, pp 313-327, 1993.

