"APORTACIONES A LA TEORIA DE SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS DE McSHANE: EXISTENCIA Y UNICIDAD, REGULARIDADES"

Tesis presentada, para optar al grado de Doctor en Ciencias (Sección de Matemáticas), por el Licenciado en Matemáticas:

JOSE MIGUEL ANGULO IBAÑEZ

y realizada bajo la dirección del Profesor Dr.

D. RAMON GUTIERREZ JAIMEZ

Catedrático de la Universidad de Granada.

El acto de defensa de la tesis se celebró el día 22 de Junio de 1985 en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, siendo juzgada por el siguiente Tribunal:

Presidenta: Dra. Dª PILAR IBARROLA MUÑOZ, Catedrática de la Universidad Complutense de Madrid

Vocales: Dr. D. VICENTE QUESADA PALOMA, Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid

Dr. D. DAVID NUALART RODON, Catedrático de la Universidad Central de Barcelona

Dr. D. ELIAS MORENO BAS, Profesor Titular de la Universidad de Granada

Secretaria: Dra. Dª JOSEFA LINARES PEREZ, Profesora Encargada de Curso de la Universidad de Granada

Calificación obtenida: APTO CUM LAUDE, por unanimidad

MEMORIA DE

TESIS DOCTORAL

sobre:

"APORTACIONES A LA TEORIA DE SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS DE McSHANE: EXISTENCIA Y UNICIDAD, REGULARIDADES"

Memoria que para optar al grado de Doctor en Matemáticas presenta D. José Miguel Angulo Ibañez, licenciado en Matemáticas.

Vº Bº

El Director de la Tesis

RAMON GUTIERREZ JAIMEZ
Director del Departamento de Estadística Matemática

Granada, 22 de Mayo de 1985

UNIVERSIDAD DE GRANADA. FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Introducción histórica de la teoría de McShane

El origen de la teoría de cálculo estocástico de McShane puede situarse entorno al año 1969, en que se publican los primeros artículos suscritos por éste sobre integrales estocásticas retardadas, según las referencias en la bibliografía existente. A partir de entonces, y a través de diversos escritos y comunicaciones, que culminan con la publicación de su libro [10], McShane propone un nuevo tipo de integral estocástica, cuyo fundamento justifica partiendo de diversos argumentos que se refieren a ciertos problemas, "desventajas" o "paradojas" (en sus propios términos) que comporta el cálculo estocástico con integrales de Itô. Tales problemas, que se interpretan como ciertas discrepancias o incompatibilidades entre el cálculo ordinario y el cálculo estocástico, ya habían sido constatados anteriormente por diversos autores, entre los que cabe destacar, por sus importantes aportaciones sobre los mismos, Wong y Zakai [15] y Stratonovich [I-12]. El propósito fundamental de McShane, con la definición de las integrales "belated" e "Itô-belated", está dirigido a conseguir una teoría de cálculo unificada, carente de tales discrepancias. (En lo sucesivo nos referiremos exclusivamente a la integral "belated" (integral retardada)).

Concretamente, supongamos que la evolución de un sistema físico (o económico, o de cualquier otro tipo) afectado por alguna perturbación externa, está bien representada por un modelo matemático consistente en una ecuación integral del tipo

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))dz(s) \tag{1}$$

donde $x(t)$ representa el estado del sistema en el instante t, f la sensibilidad de x al transcurso del tiempo, y g la sensibilidad de x a la perturbación sobre el sistema, cuya influencia durante el intervalo de tiempo $[s,t]$ está caracterizada por el incremento $z(t)-z(s)$, siendo las funciones anteriores tales que las integrales en (1) puedan ser interpretadas, p.e., en el sentido de Riemann-Stieltjes o de Lebesgue-Stieltjes.

Desde el punto de vista probabilístico, la filosofía en el planteamiento e interpretación de modelos (estocásticos) para un sistema del tipo considerado es diferente. En efecto, con frecuencia la información acerca de la perturbación que afecta al sistema tiene carácter aleatorio, de forma que también la información a obtener sobre el estado del sistema poseerá carácter aleatorio. Matemáticamente, esta idea se ha traducido en el siguiente planteamiento del modelo:

$$x(t,\omega) = x(0,\omega) + \int_0^t f(s,x(s,\omega))ds + \int_0^t g(s,x(s,\omega))dz(s,\omega) \tag{2}$$

donde ω pertenece a algún espacio probabilístico (Ω,A,P) y las funciones x y z representan procesos estocásticos, así como las funciones que intervienen como integrando en las integrales. Interesa ahora estudiar aspectos probabilísticos concernientes al modelo, fundamentalmente relativos a la función estado x, más que las realizaciones particulares o trayectorias correspondientes a cada ω.

El "ruido blanco gaussiano" ha sido utilizado con profusión como idealización de la perturbación externa de tipo estocástico en muchos fenómenos. Ello ofrece, por otra parte, la gran ventaja del amplio estudio de que ha sido objeto el proceso de Wiener o movimiento browniano (así como otros procesos afines también utilizados, como martingalas y casimartingalas). Sin embargo, como es sabido, casi todas las trayectorias del proceso de Wiener son de variación no acotada, lo que imposibilita interpretar las integrales en el modelo (2) trayectoria a trayectoria, como integrales ordinarias de Riemann-Stieltjes o Lebesgue-Stieltjes. Ello ha motivado la necesidad de definir un nuevo concepto de integral global de tipo estocástico.

Por su importancia históricamente y por el amplio desarrollo teórico de que ha sido objeto, destaca la definición de integral estocástica de Itô [I-2], originalmente establecida para un integrador de Wiener y posteriormente extendida a otros integradores , como martingalas (procesos que, según observan diversos autores, no se pueden realizar en el mundo físico), etc. Como antes señalábamos, la teoría y la práctica han puesto de manifiesto ciertas "paradojas" o problemas que plantea la adopción de tal concepto de integral estocástica, como, p.e.: reglas de cálculo incompatibles con las del cálculo ordinario, no estabilidad respecto a la perturbación, no invariancia frente a cambios de coordenadas en la función estado del sistema, etc.

Así, por ejemplo, como señalan Wong y Zakai [15], si z es un proceso de Wiener, se observa que la definición de Itô proporciona

$$(I)\int_0^t z\,dz = \frac{1}{2}(z^2(t)-t)$$

Por otra parte, si z_n es una sucesión de procesos más regulares (p.e., poligonales) que aproximan a z, se tendrá que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t z_n\,dz_n = (I)\int_0^t z\,dz + \frac{t}{2}$$

y, en general (bajo las condiciones convenientes)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t,z_n(t))dz(t) = \int_a^b f(t,z(t))dz(t) + $$
$$+ \frac{1}{2}\int_a^b [\delta f(t,z(t))/\delta z]dt$$

propagándose tales discrepancias a expresiones más generales y, en particular, a las concernientes a los modelos estocásticos.

Precisamente, el gran interés del citado artículo (y otros) de Wong y Zakai, estriba en las aportaciones que en él realizan sus autores sobre la forma concreta del "término de corrección" que liga las versiones determinística y ordinaria de determinadas expresiones de tipo diferencial o integral. No obstante, según muestra Sussmann [I-13], tales resultados no se pueden extender, al menos a partir de los métodos usados por Wong y Zakai, al caso en que se consideran en el modelo varias fuentes de perturbación sobre el sistema.

Los resultados antes referidos, y otros similares, han servido de motivación para la definición de nuevos tipos de integrales estocásticas, con la finalidad común de resolver de algún modo plausible los problemas antes señalados, entre las que cabe destacar las de Stratonovich [I-12] (y otras extensiones posteriores, como la i. de Fisk-Stratonovich) y McShane. La llamada definición simetrizada de la integral de Stratonovich, supone de algún modo la introducción en la misma del "término de corrección" ("término de corrección de Stratonovich"), permitiéndose así reestablecer en el cálculo estocástico las mismas reglas del cálculo ordinario. Así, en el ejemplo antes planteado, se tendría

$$\int_a^b f(t,z_n(t))dz_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} (S)\int_a^b f(t,z(t))dz(t)$$

Sin embargo, como observa Elworthy, este tipo de integral no es muy tratable matemáticamente (p.e., para probar su existencia o dar estimaciones).

La solución de McShane, aunque está dirigida a obtener los mismos resultados en lo que se refiere a conseguir una utilización e interpretación más adecuada de los modelos estocásticos (como observa Sussmann [I-13]), es diferente en cuanto a su filosofía y planteamiento (cabe señalar la práctica ausencia de alusiones a la integral de Stratonovich en los trabajos de McShane; las relaciones entre las respectivas integrales han sido establecidas posteriormente por otros autores, p.e., Sussmann [I-13], Marcus [I-3], Elworthy [4],...).

El modelo de McShane está referido de forma genérica a un sistema físico (o económico, o de cualquier otro tipo) afectado por r fuentes de perturbación, y cuyo estado viene representado por un vector de n coordenadas. En el caso determinístico, la expresión del modelo en la situación planteada vendrá dada por un sistema de n ecuaciones integrales del tipo

$$x^i(t) = x^i(a) + \int_a^t f^i(s,x(s))ds + \sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g_\rho^i(s,x(s))dz^\rho(s) \qquad (i=1,\dots n) \tag{3}$$

Sin embargo, según observa McShane, no existe ninguna razón para mantener la misma representación anterior para el caso estocástico. McShane establece las siguientes propiedades que, según su criterio, es deseable que satisfaga un modelo estocástico para sistemas del tipo considerado:

a) Inclusividad: "El modelo debe ser aplicable a sistemas en que los -- ruidos permitidos sean procesos pertenecientes a alguna familia suficientemente amplia, que incluya procesos uniformemente lipschitzianos, procesos movimiento browniano, y tantas modificaciones como sean convenientes en las aplicaciones".

b) Consistencia: "Para cada $\omega\varepsilon\Omega$ tal que las trayectorias $z^\rho(.,\omega)$ (ρ=1, ...r) sean lipschitzianas, el modelo debe proporcionar una solución para las $x^i(.,\omega)$ que satisfaga (3)".

c) Estabilidad: "El modelo debe ser tal que si los ruidos z^ρ son reemplazados por otros ruidos permitidos z_o^ρ suficientemente 'próximos', respectivamente, las correspondientes - soluciones x^i, x_o^i sean también 'próximas' entre sí".

Atendiendo al criterio expresado a través de las tres propiedades anteriores, McShane propone un nuevo tipo de integral estocástica, la - integral retardada ("belated"), definida por un procedimiento sencillo similar al que se sigue para la definición de la integral de Riemann-Stieltjes en el cálculo ordinario, pero que utiliza particiones retardadas ("belated"). Tal definición supone frente a la de Itô exigir condiciones estocásticas más débiles en cuanto al integrador (lo que permite satisfacer la propiedad de inclusividad), aunque condiciones de continuidad más fuertes sobre el integrando. (Según observan también McShane y Elworthy, este tipo de integral es matemáticamente más ventajoso, --- pues es más permisivo frente a procedimientos no probabilísticos, de -- forma que si no se está demasiado preocupado en exigir las "condiciones más débiles" en los resultados, se puede obtener un rápido desarrollo - de la teoría).

En cuanto a las condiciones (b) y (c), la idea propuesta por McSha_ ne consiste, por una parte, en incluir en el modelo estocástico integra_ les retardadas de "segundo orden", de forma que la nueva representación del mismo queda del modo siguiente:

$$(4) \qquad x^i(t,\omega) = x^i(a,\omega) + \int_a^t f^i(s,x(s,\omega),\omega)ds + \sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g^i_\rho(s,x(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega) + \sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t h^i_{\rho\sigma}(s,x(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega) \qquad (i=1,\ldots n)$$

y, por otra, en distinguir ciertas versiones de la integral cuyo uso se_ rá conveniente con el fin de establecer la compatibilidad con el cálculo ordinario: las "versiones estrictas" (en la terminología de McShane), cuya existencia está asegurada en cualquier caso, y que consisten en -- aquellas versiones de la integral cuyo valor para cada ω tal que la correspondiente trayectoria en el integrando es Riemann-integrable, y las correspondientes a los integradores son lipschitzianas (caso en el que, para tales puntos del espacio Ω, los valores de las integrales de la úl_ tima suma en (4) habrán de ser 0) coincide con el de la integral de Rie_ mann-Stieltjes correspondiente a dicho punto. Esto proporcionará la con_ sistencia.Por último, McShane propone una forma concreta ("forma canóni_ ca") para el integrando en las integrales de segundo orden en (4), que supone una extensión tanto de los resultados proporcionados por Wong y Zakai como del término de corrección de Stratonovich, y que viene dada por la siguiente expresión:

$$h^{i}_{\rho\sigma}(t,x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [\delta g^{i}_{\rho}(t,x)/\delta x^{k}] g^{k}_{\sigma}(t,x)$$

De este modo se logra la estabilidad, según prueba McShane [10] (Marcus [I-3] proporciona una extensión sobre este aspecto).

Como indicamos al principio de esta introducción, McShane publicó sus primeras ideas sobre el cálculo estocástico con integrales retardadas en el año 1969, a partir del cual, y en años sucesivos, aparecen nuevos artículos a través de los cuales va configurando su teoría, y que culminan con la publicación en 1974 de su libro [10], en que tales ideas son expresadas de una forma más clara, extensa y definitiva. A partir de entonces, se abre un periodo de varios años durante el cual no se aprecia un nuevo impulso al desarrollo de la teoría de McShane, si bien algunos autores (McShane, Stojanovic, Protter, Sussmann, Marcus, Ferrandis,...) publican artículos con interesantes contribuciones particulares a la misma, comparaciones con otras teorías de integración estocástica,etc; durante dicho periodo se gesta el importante libro de Elworthy [4] (precedido por algunos trabajos propios de éste) que supone un relanzamiento de la teoría de McShane, conteniendo un amplio estudio sobre la integral, tratando nuevos aspectos concernientes a la misma, con importantes extensiones en sus elementos (p.e., se manejan procesos valuados en espacios de Hilbert y en variedades), y enfocado más bien desde el punto de vista de la geometría diferencial. A este trabajo ha seguido recientemente otro de Mohammed [11] , dirigido fundamentalmente hacia el estudio de las difusiones asociadas a la solución en sistemas del tipo considerado por McShane.

Problemas abordados y aportaciones concretas en esta memoria

Nuestro estudio sobre integrales retardadas, cuyos resultados exponemos en esta memoria, se ha centrado fundamentalmente en dos importantes aspectos concernientes a sistemas de ecuaciones integrales estocásticas con integrales retardadas:

I.- El problema de la existencia y unicidad de solución

II.- El problema de la regularidad de la solución cuando los coeficientes del sistema dependen de un parámetro

El problema (II) aun no ha sido tratado (salvo alguna escueta alusión; v. Elworthy [4]) en la bibliografía existente sobre integrales estocásticas de McShane, por lo que los resultados obtenidos sobre el mismo en esta memoria, y que exponemos en el capítulo III, son totalmente originales.

En cuanto al problema (I), los resultados obtenidos, que desarrollamos en el capítulo II, constituyen una extensión de los proporcionados por McShane [10] y Elworthy [4] (en el caso real), fundamentalmente en lo que se refiere a la condición inicial, como más adelante explicamos.

Por otra parte, el tratamiento que hemos realizado sobre ambos problemas ha motivado la necesidad de realizar un amplio estudio previo, principalmente sobre ciertos aspectos relativos a integrales retardadas indefinidas, dando como fruto el establecimiento de numerosos resultados que, aparte de ser esenciales para el desarrollo de los problemas abordados a que nos hemos referido, poseen un evidente interés propio. Tales aspectos son considerados en el capítulo II. También, en el capítulo I, en que estudiamos la teoría básica sobre integrales retardadas, contribuimos con diversas aportaciones sobre los aspectos allí tratados, concretamente sobre existencia y estimaciones de integrales retardadas. En dicho capítulo, nuestra aportación principal consiste en el establecimiento de ciertos resultados que permiten una utilización eficiente del "método de truncamiento", fundamental en muchos resultados (principalmente en los capítulos I y II) que se obtienen a través de dicho método por extensión de otros resultados previamente establecidos por distintos procedimientos (generalmente, más complicados).

A continuación, explicamos de una forma más detallada nuestro planteamiento sobre los problemas abordados en esta memoria, así como el contenido concreto de cada capítulo, destacando los principales resultados que hemos obtenido al respecto.

En el capítulo I exponemos una selección conveniente de los conceptos y resultados fundamentales de la teoría básica de integración estocástica de McShane, en función de las necesidades posteriores en el tratamiento de los problemas concretos abordados en la memoria. Concretamente, introducimos la definición (o definiciones) de la integral retardada, enunciamos algunas propiedades elementales de la misma, y estudiamos la existencia y estimaciones de integrales retardadas (principalmente de primer y de segundo orden, que son las que intervienen en los modelos estocásticos planteados). En el apartado sobre existencia de integrales retardadas, definimos las principales clases de procesos, tanto en lo que se refiere al integrador como al integrando, que se manejan en la teoría, y que habrán de jugar un papel relevante a lo largo de toda la memoria. Sobre los dos últimos aspectos, existencia y estimaciones, contribuimos con algunas aportaciones propias. En cuanto a existencia, destacamos entre ellas un lema sobre L_p-continuidad de procesos (extensión del "teorema de la convergencia-L_r", de Loève [9]), que será aplicado con frecuencia en muchas demostraciones posteriores, y como consecuencia del cual ponemos de manifiesto la importancia del antes citado método de truncamiento como procedimiento de extensión. Como un primer ejemplo de su utilidad, simplificamos en el capítulo I, a partir del referido lema, la demostración de algunos teoremas de existencia de integrales retardadas establecidos por McShane. En lo que concierne a estimaciones de las integrales, esenciales para desarrollar el estudio de los problemas concretos que abordamos en los capítulos II y III, extendemos convenientemente los resultados obtenidos por McShane, estableciendo los mismos bajo hipótesis menos restrictivas y que permiten una aplicación más flexible (v., p.e., su utilización en un Apéndice al final de la memoria).

En el capítulo II tratamos el problema de la existencia y unicidad de solución en sistemas de ecuaciones integrales estocásticas con integrales retardadas. Uno de nuestros principales objetivos al estudiar los modelos estocásticos ha consistido en extender el planteamiento en lo que se refiere al término correspondiente a la condición inicial. En efecto, hemos considerado sistemas de ecuaciones integrales estocásticas del tipo

$$(5)\qquad x^i(t,\omega) = \alpha^i(t,\omega) + \sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g^i_\rho(s,x(s,\omega),\omega)\,dz^\rho(s,\omega) + \sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t h^i_{\rho\sigma}(s,x(s,\omega),\omega)\,dz^\rho(s,\omega)\,dz^\sigma(s,\omega)$$

$$(i=1,\dots n)\ (\omega\in\Omega)\ (t\in[a,b])$$

(se supone que alguno de los z^ρ puede ser t, por lo que no existe pérdida de generalidad en cuanto al planteamiento (4)), donde ahora la "condición inicial" está representada por un proceso α, que además de imponer el valor del estado del sistema en el instante a, depende de t y, por tanto, contiene información adicional sobre el sistema (que se conoce a priori). Tal información podría interpretarse como el valor del estado del sistema en cada instante en caso de ausencia de "perturbaciones" (entendiendo ahora con este término cualquier elemento que afecte al sistema, que venga representado por alguna de las funciones z^ρ, y cuyo efecto sobre el mismo se conozca a través de una función de sensibilidad relativa a los incrementos de la misma).

Este fue el planteamiento original de McShane en algunos de sus primeros artículos. Sin embargo, los resultados que él mismo expone en [10], en los que se configuran de forma definitiva las hipótesis para la existencia y unicidad, están referidos al caso particular en que α

no depende de t. Elworthy [4] adopta inicialmente el planteamiento (5), si bien sus hipótesis para establecer la existencia y unicidad de solución son, en un sentido general, más fuertes que las de McShane, de las que partimos en nuestro estudio (incluso, con el debilitamiento de alguna de ellas en cuanto al integrando en las integrales en (5)), y, por otra parte, la clase de procesos en que Elworthy considera el proceso α es más restrictiva que las consideradas por nosotros, como observamos en el párrafo siguiente. En cuanto a los integradores z^ρ, el teorema de existencia y unicidad de solución de McShane [10] está referido al caso especial en que los integradores son procesos muestralmente continuos, situación que tratamos como caso particular en nuestro estudio.

Uno de los problemas que surgen inmediatamente a la vista del planteamiento en (5), teniendo en cuenta los aspectos que se pretende estudiar sobre tales sistemas, consiste en delimitar clases de procesos a que podrá pertenecer α con el fin de establecer los resultados. En tal sentido, hemos aprovechado la utilidad del método de truncamiento. Así, inicialmente estudiamos el problema de existencia y unicidad de solución en el caso en que α es un proceso L_2-continuo en c.t.p. de $[a,b]$ y L_2-acotado (caso A), para lo cual hemos aplicado el método de Picard, a través de un teorema del punto fijo (de tipo determinístico) debido a Fomin y Kolmogorov (Elworthy [4] utiliza también dicho método; McShane [10] aplica el método de aproximaciones sucesivas de Cauchy-Peano; nosotros hemos elegido el primero con el fin de disponer de un tratamiento útil dirigido a futuros estudios sobre otros problemas de regularidad diferentes). El caso estudiado por Elworthy queda incluido (salvo la generalización que supone en lo que concierne a los espacios sobre los están valuados los procesos) en el anterior, ya que considera α dentro de la clase de procesos L_2-continuos en todo punto de $[a,b]$. A partir del caso A, y por extensión, aplicando el método de truncamiento (sobre la condición inicial) y una versión (determinística) del lema de Gronwall, establecemos la existencia y unicidad de solución, progresivamente, en los caso en que α es el producto de un proceso L_2-continuo en c.t.p. de $[a,b]$ y L_2-acotado y un proceso P-continuo en c.t.p. de $[a,b]$

y con aplicación global acotada c.s. (es decir, con trayectorias acotadas globalmente por alguna v.a. finita c.s.) (caso B), y, posteriormente, en que α es una combinación lineal finita de productos del tipo anterior (caso C). Como caso especial, estudiamos el problema en la situación en que α y los integradores son procesos muestralmente continuos, viendo cómo tal propiedad se transmite a la solución del sistema (casos A-Reg, B-Reg, C-Reg). Dentro del caso B, destacamos también el caso especial en que α tiene aplicación global acotada c.s. (caso - B'), estableciendo asímismo la transmisión de dicha propiedad a la solución. Por último, particularizamos los resultados anteriores al caso en que α no depende de t, obteniendo así, en el caso en que además los integradores son muestralmente continuos, el considerado por McShane - [10].

Previamente al establecimiento de los resultados antes referidos, realizamos en el capítulo II un amplio estudio sobre determinados aspectos concernientes a integrales retardadas indefinidas: F-medibilidad, P-continuidad, separabilidad, medibilidad, acotabilidad muestral y continuidad muestral. El tratamiento sobre el problema de la existencia y unicidad de solución que hemos realizado, y que acabamos de exponer en síntesis, ha requerido el establecimiento de diversos resultados previos en tal sentido, sobre todo en lo que se refiere a acotabilidad y continuidad muestrales. En lineas generales, se tratará de estudiar la transmisión de propiedades de los integradores a la integral indefinida como proceso. Tales resultados tendrán también una importancia fundamental en el capítulo III, en que tratamos el problema de la regularidad en sistemas de ecuaciones integrales estocásticas con coeficientes dependientes de un parámetro.

Concretamente, en cuanto al primer aspecto, demostramos por una - parte la acotabilidad muestral en integradores del tipo considerado -- por McShane, cuando dichos integradores se eligen separables, y, por - otra, extendemos una importante desigualdad sobre integrales retardadas indefinidas establecida por Elworthy [4] en el caso de integradores muestralmente continuos, al caso en que dichos integradores son sólo separables, lo que nos permite probar la acotabilidad muestral en integrales retardadas indefinidas bajo las condiciones usuales. La referida desigualdad constituye además la base fundamental para el estudio particular sobre regularidad que desarrollamos en el último apartado del capítulo III.

En cuanto a continuidad muestral, desarrollamos un estudio similar al realizado por Elworthy [4], extendiendo los resultados proporcionados por éste en cuanto a permitir la existencia de puntos de P-discontinuidad en el integrando. Previamente, establecemos ciertas relaciones simples entre clases de procesos muestralmente continuos y las clases de procesos definidas en el capítulo I, que son las que se manejan usualmente a lo largo de la memoria.

Con respecto al problema de regularidad considerado, que abordamos en el capítulo III, la estructuración del estudio en base a los casos que hemos planteado, es similar a la que hemos hecho en el capítulo II para el estudio de la existencia y unicidad de solución, si bien obtenemos diversas particularizaciones de especial interés que se derivan de las características propias del problema considerado. En este caso, no partimos de ningún resultado previamente establecido al respecto, pues desconocemos su existencia en la bibliografía (como antes indicamos, salvo alguna escueta alusión). Así, el planteamiento, hipótesis consideradas y resolución en los resultados que proponemos son totalmente originales en este aspecto.

Al comienzo del capítulo III, establecemos los tipos de convergencia que utilizamos para dar contenido al concepto de aproximación: L_2-convergencia uniforme (caso A), P-convergencia uniforme (casos B y C), y P-convergencia muestral uniforme (conjuntamente todos los casos anteriores).

El estudio se ha realizado en tres etapas. En la primera, tratamos el problema de la dependencia continua de la solución respecto de la condición inicial, estableciendo el carácter lipschitziano de tal dependencia.

En la segunda y tercera, tratamos el problema propiamente de la dependencia continua de la solución respecto de los coeficientes cuando éstos dependen de un parámetro. El estudio más extenso corresponde a la segunda. En las tres situaciones generales que hemos planteado (casos A, B y C) las hipótesis de convergencia impuestas sobre los coeficientes correspondientes al integrando en las integrales en (5) son similares (difiere el caso A de los casos B y C en cuanto a las hipótesis previas sobre tales coeficientes, que son las que consideramos en el capítulo II al tratar el problema de la existencia y unicidad de solución). Con respecto a tales hipótesis, proponemos en un lema previo y en la discusión que realizamos al final de cada teorema de regularidad, distintas formas alternativas. En cuanto a las hipótesis de convergencia a imponer sobre el término correspondiente a la condición inicial, tendrán características particulares según el caso considerado. En el caso A, establecemos la dependencia en términos de L_2-convergencia uniforme. En los casos B y C, que estudiamos por extensión a partir del método de truncamiento, hemos establecido la dependencia en términos de P-convergencia uniforme. Como antes hemos señalado, al final de cada teorema realizamos una discusión sobre las hipótesis que en él establecemos, en la que proponemos formas alternativas y consideramos algunos casos particulares en que las mismas se verifican.

Por último, en lo que se refiere a la tercera etapa en el estudio realizado, partiendo de los resultados obtenidos en la etapa anterior y de las desigualdadse sobre integrales indefinidas establecidas en el capítulo II, estudiamos la dependencia continua de la solución respecto de los coeficientes del sistema en términos de "P-convergencia muestral uniforme" (terminología propia), más fuerte que la P-convergencia uniforme. Para establecer los resultados al respecto, sólo se requerirá imponer una hipótesis adicional de convergencia, en tal sentido, sobre la condición inicial en los teoremas de regularidad obtenidos en la etapa segunda. Finalmente, observamos algunas consecuencias de particular im portancia que se derivan de los resultados obtenidos al considerar este tipo de convergencia.

Al final de la memoria, incluimos en un Apéndice un teorema de existencia y unicidad a través del cual mostramos una aplicación del método de Picard en que el correspondiente operador definido se extiende por continuidad con objeto de poder aplicar el teorema del punto fijo de Fomin y Kolmogorov.

En la introducción al comienzo de cada capítulo, explicamos con mayor detalle la estructura del mismo y el contenido concreto de cada apartado.

Diremos, finalmente, que el estudio realizado se inscribe dentro de la línea de investigación sobre Integración Estocástica constituida desde hace tiempo en el Departamento de Estadística Matemática de la Universidad de Granada.

Agradecimientos

Al Prof. Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez, Director de la Tesis.

INDICE

INDICE

Referencias

Al final de la memoria citamos las referencias que han incidido de una forma más o menos directa sobre el trabajo realizado.

En el primer párrafo de esta introducción hemos hecho referencia - también a las siguientes:

[I-1] FERRANDIS, E.: "The comparison between McShane's and Young's -- stochastic integrals". Relat. Int. 167 y 168 (Dic., - 1979). Univ. Est. de Campinas, Sao Paulo.

[I-2] ITO, K.: "Stochastic Integral". Proc. Imp. Acad. V. 20 (1944),- pp. 519-524.

[I-3] MARCUS, I. M.: "Modeling and Approximation of Stochastic Differential Equations driven by Semimartingales". Stochastic, 1981. Vol. 4, pp.223-245.

[I-4] McSHANE, E. J.: "Toward a Stochastic Calculus". Proc. Math. Ac. Sci., USA. Vol 63 (1969), pp. 275-280 (parte I) y pp. 1084-1087 (parte II).

[I-5] McSHANE, E. J.: "Stochastic integrals and stochastic functional equations". SIAM Journal Appl. Math.. Vol. 17 (Marzo, 1969), pp. 287-306.

[I-6] McSHANE, E. J.: "Stochastic functional equations: Continuity -- properties and relations to ordinary equations". Proc. of a Workshop on Calculus of Variations and Optimal - Control Theory (ed. A. V. Balakrishnam). Ac. Pres. -- New York, 1969.

[I-7] McSHANE, E. J.: "A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and Stochastic Integrals". --- Amer. Soc. Memoir 88, 1969.

[I-8] McSHANE, E. J.: "Stochastic Differential Equations and Models - of Random Processes" Proc. Sixth. Berkeley Symp. Math.

Stat. Prob.. Vol III, pp. 263-294. University of California Press, 1972.

[I-9] McSHANE, E. J.: "Stochastic Integration". Vector and Operator - Value Measures and Applications (ed D. H. Tucker y H. B. Maynard), pp. 247-281. Ac. Press. New York, 1973.

[I-10] McSHANE, E. J.: "Stochastic Differential Equations". J. Multivariate Analysis. Vol. 5 (1975), pp. 121-177.

[I-11] McSHANE, E. J.: "The choice of a stochastic model for a noise - system". Math. Progr. Study 6 (1976), pp. 79-92. ---- North-Holland Publishing Company.

[I-12] STRATONOVICH, R. L.: "Conditional Markov Processes and their application to the Theory of Optimal Control (English - translation). Amer. Elsevier. New York, 1968.

[I-13] SUSSMANN, H. J.: "On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations". The Ann. of Probability. Vol. 6 (1978), pp. 19-41.

CAPITULO I: FUNDAMENTOS PROBABILISTICOS Y TEORIA BASICA DE INTEGRACION ESTOCASTICA DE McSHANE

I.0.- Introducción.

Exponemos en este capítulo los conceptos y resultados fundamentales relativos a integración estocástica en el sentido de McShane, que constituyen la base sobre la que se sustentan los siguientes capítulos I y II, en que desarrollamos ampliamente los aspectos concretos que han sido el objeto principal de nuestra investigación, centrada en el estudio de las correspondientes ecuaciones integrales estocásticas.

La estructura del capítulo responde en rasgos generales a la línea de exposición seguida por McShane en [10]. No obstante, aparte de consistir el contenido del mismo, en esencia, en una selección conveniente de los elementos proporcionados por McShane, en función de las necesidades concretas para nuestros propósitos posteriores, contribuimos con diversas aportaciones interesantes, algunas de ellas de una importancia fundamental, como veremos, para los siguientes capítulos: por una parte, una formalización adecuada de los elementos que se manejan, que afecta tanto a la notación como a la conceptualización; por, otra, diversos resultados originales, así como algunas contribuciones concretas sobre resultados ya establecidos.

Hemos dividido el capítulo en cuatro apartados generales, que versan respectivamente sobre los siguientes aspectos: definiciones de la integral retardada, propiedades elementales, teoremas de existencia y estimaciones. A continuación precisamos algo más el contenido concreto en cada uno de ellos.

En el primer apartado introducimos la notación básica a seguir, así como distintas formas de definir la integral estocástica de McShane, según el tipo de convergencia estocástica considerado.

En el segundo, enunciamos algunas propiedades elementales de diversa índole de la integral, ya sea por su utilidad para el cálculo, o por su importancia como herramientas de uso frecuente en demostraciones posteriores, etc.

En el tercero, incluimos los resultados de mayor relevancia del capítulo: los principales teoremas de existencia de integrales retardadas (o de McShane). Enunciamos el lema fundamental ("lema de interferencia", en la terminología de Young) del que se parte para establecer cualquier resultado sobre existencia o estimaciones de integrales retardadas en el sentido de la L_2-norma (norma cuadrática), y que constituye el principio de la teoría.También enunciamos algunos teoremas relativos a casos en -- que las integrales retardadas son nulas (tales resultados no tienen aquí más interés que el que pueda derivarse de su utilidad para el cálculo, o también para la formalización de modelos en algunas situaciones concretas, aparte de su interés intrínseco, como es por ejemplo el caso de las integrales retardadas de orden superior a 2). Todos estos resultados son originales de McShane. Nuestra contribución más importante en este punto está constituida por el "lema de L_p-continuidad" (I.3.5.4), que consiste en una extensión sobre continuidad de procesos del conocido "lema de L_p-convergencia" (o"convergencia-L_r", en Loève[9]) para sucesiones de variables aleatorias.En efecto, a través de una consecuencia de dicho lema ponemos de manifiesto la importancia del "método de truncamiento", que -- constituirá el fundamento del procedimiento de demostración seguido en - muchos de los resultados, que se obtienen así por extensión de resultados previamente establecidos en casos más favorables en que se puede -- trabajar en términos de la L_p-norma (para algún p). Como ejemplo de su - utilidad, mostramos en este capítulo cómo la aplicación de dicho lema -- simplifica notablemente las demostraciones de algunos teoremas de existencia de integrales retardadas establecidos por McShane. Por otra parte, el lema será aplicado con frecuencia, de forma directa, en los capítulos posteriores, quedando de nuevo patente su utilidad.

Por último, en el apartado cuarto establecemos una serie de resultados sobre estimaciones de integrales retardadas de primer y segundo - orden, fundamentalmente en términos de la L_2-norma, cuyo uso en los capítulos II y III es esencial. Parte de ellas son debidas a McShane, y - son consecuencia del lema fundamental antes citado; nosotros establecemos al respecto extensiones convenientes de tales resultados que permiten mayor flexibilidad en su manejo.

Además de la importancia intrínseca de los resultados antes mencionados, principalmente en lo que se refiere a los teoremas de existencia, conviene destacar también la que se deriva del hecho de que las hipótesis que en ellos se imponen habrán de condicionar directamente las hipótesis a exigir en la mayor parte de los resultados que establecemos posteriormente. De hecho, a partir de las primeras definimos ciertas clases de procesos que jugarán un papel relevante a lo largo de toda la memoria.

I.1.- Definición de la integral.

I.1.1.- Definiciones previas y notación:

Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado contenido en un conjunto $T\subset R$.

Una partición π de $[a,b]$ sobre T es una (2m+1)-upla, $(m\in N)$

$$\pi=(t_1,t_2,\ldots t_{m+1};\tau_1,\ldots\tau_m)$$

donde $a=t_1<t_2<\ldots<t_{m+1}=b$, y $\tau_j\in T$ para todo $j\in\{1,2,\ldots m\}$.

π es una partición

. de Cauchy, si $\tau_j=t_j$ (para todo j)

. de Riemann, si $t_j\leq\tau_j\leq t_{j+1}$ (para todo j)

. de McShane o "retardada", si $\tau_j\leq t_j$ (para todo j).

$B([a,b])$ es la clase de todas las particiones retardadas de $[a,b]$ sobre T. Dicha clase es fundamental en la definición de la integral estocástica de Mc-Shane. (Se sobreentiende que $B([a,b])$ depende de T, pero, puesto que T será fijo y consideraremos subclases de particiones del tipo $B([s,t])$, $a\leq s\leq t\leq b$, dado un mismo conjunto T, éste no se indicará de forma explícita en la notación).

Dada cualquier partición π de $[a,b]$ sobre T, llamamos "engranaje de π" al número real

$$\text{eng}(\pi)=\max_j[\max\{\tau_j,t_{j+1}\}-\min\{\tau_j,t_j\}]$$

valor que mide no sólo el tamaño de los subintervalos $[t_j,t_{j+1}]$, sino también la proximidad de cada "punto de evaluación" τ_j a los correspondientes "puntos de división" t_j, t_{j+1}.

Si $\pi\in B([a,b])$, entonces

$$\text{eng}(\pi)=\max_j(t_{j+1}-\tau_j)$$

Sea (Ω,A,P) un espacio de probabilidad (A σ-álgebra).

Sea $f(\tau,\omega)$ un proceso R-valuado definido sobre T, y sean $z^1(t,\ )$,...

...$z^q(t,\omega)$, $(q\in N)$, procesos R-valuados definidos sobre $[a,b]$. Sea π una partición de $[a,b]$ sobre T.

Llamamos "suma de Riemann de f respecto de $(z^1,\ldots z^q)$ sobre $[a,b]$ relativa a la partición π" a la variable aleatoria

$$S(\pi;f;z^1,\dots z^q)(\omega)=\sum_{j=1}^{m} f(\tau_j,\omega)\prod_{k=1}^{q}\Delta_j z^k(\omega)$$

donde $\Delta_j z^k(\omega)=z^k(t_{j+1},\omega)-z^k(t_j,\omega)$

I.1.2.- DEFINICION I: "f tiene una integral retardada respecto de $(z^1,\dots z^q)$ sobre $[a,b]$ si las sumas $S(\pi;f;z^1,\dots z^q)$ convergen en probabilidad a alguna variable aleatoria J, cuando eng(π) tiende a 0 en B([a,b])".

La variable aleatoria J en la definición anterior, si existe, está definida salvo equivalencia. Cada versión de J es, pues, una versión de la integral (retardada,o de McShane) de f respecto de $(z^1,\dots z^q)$ sobre $[a,b]$, que notaremos genéricamente por

$$\int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)\dots dz^q(t,\omega)$$

o, simplemente

$$\int_a^b fdz^1\dots dz^q$$

Se denomina "orden de la integral" al entero positivo q.

Podemos dar una definición equivalente a la definición anterior, expresada en términos de la pseudo-métrica de la convergencia en probabilidad $\bar{\rho}$, que se define, para cada par de v.a. finitas c.s. x_1, x_2, por

$$\bar{\rho}(x_1,x_2)=\inf\{\varepsilon:P(|x_1-x_2|\geq\varepsilon)<\varepsilon\}$$

DEFINICION II: "f tiene una integral retardada respecto de $(z^1,\dots z^q)$ sobre $[a,b]$ si existe alguna variable aleatoria J verificando que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $\pi\in B([a,b])$ y eng(π)<δ, entonces

$$\bar{\rho}(S(\pi;f;z^1,\dots z^q),J)<\varepsilon \text{ ".}$$

I.1.3.- Interesará en muchos casos tener en cuenta la posible circunstancia de que la integral exista considerando la convergencia de las correspondientes sumas de Riemann en algún sentido más fuerte que el de la convergencia en probabilidad.

Concretamente, consideremos la pseudo-norma $||\cdot||_p$ (que denominaremos abreviadamente "L_p-norma") definida por

$$\|x\|_p = \{E[|x(\omega)|^p]\}^{1/p}$$

para cada variable aleatoria x R(ó R^n)-valuada tal que dicha cantidad sea finita, en cuyo caso diremos que x es "L_p-integrable". Dicha pseudo-norma induce una pseudo-distancia ("L_p-distancia") cuyo valor, para cada par de variables aleatorias x,y, viene dado por

$$\|x-y\|_p$$

Se pueden dar definiciones más fuertes de la integral retardada a partir de las definiciones I y II de (I.1.2) sustituyendo la P-convergencia por la L_p-convergencia y $\bar{\rho}$ por la L_p-distancia, para cada valor de p.

Si la integral de f respecto de $(z^1,\ldots z^q)$ sobre $[a,b]$ existe en el sentido de la L_p-convergencia, será notada, si se quiere señalar esta circunstancia explícitamente, por

$$(L_p)\int_a^b f dz^1,\ldots dz^q$$

NOTA: En $\|.\|_p$ omitiremos el subíndice cuando p=2, es decir, escribiremos $\|.\|$. Esto es motivado por el hecho de que la L_2-norma juega un papel fundamental en el estudio de las ecuaciones integrales estocásticas de McShane y será usada, pues, de forma casi exclusiva, en la mayor parte de este trabajo.

I.2.- Propiedades elementales.

A continuación citamos algunas propiedades elementales que se desprenden de la definición de la integral retardada, útiles para su manejo, y que serán aplicadas implícita o explícitamente en todo lo que sigue.

I.2.1.- Puesto que la integral retardada se define como el límite en probabilidad, si existe, de sumas de Riemann evaluadas a través de los procesos que intervienen en ella, se deduce que la integral retardada es invariante, en cuanto a su valor y existencia, ante sustituciones de los procesos integradores e integrando por procesos respectivamente equivalentes:

PROPIEDAD I: "Sean f y g procesos R-valuados definidos sobre T y equivalentes, y sean $(z^1,\dots z^q)$, $(y^1,\dots y^q)$ q-uplas de procesos R-valuados definidos sobre $[a,b]$ y respectivamente equivalentes dos a dos. Entonces:

a) Existe

$$\int_a^b f dz^1,\dots dz^q$$

si y solo si existe

$$\int_a^b g dy^1,\dots dy^q$$

b) Casi seguramente

$$\int_a^b f dz^1,\dots dz^q \equiv \int_a^b g dy^1,\dots dy^q \text{ ".}$$

NOTA: Dos procesos $x(t,\omega)$, $y(t,\omega)$ son equivalentes si para cada t se verifica que $x(t,.)\equiv y(t,.)$ casi seguramente.

I.2.2.- La integral retardada es lineal respecto a cada integrador y respecto al integrando:

PROPIEDAD II:

"a) Sean f_1 y f_2 procesos integrables respecto de $(z^1,\dots z^q)$ sobre $[a,b]$, y sea c una variable aleatoria R-valuada. Entonces $c[f_1+f_2]$ es integrable respecto de $(z^1,\dots z^q)$ sobre $[a,b]$. Además, casi seguramente

$$\int_a^b c[f_1+f_2]dz^1,\dots dz^q \equiv c\left[\int_a^b f_1 dz^1,\dots dz^q + \int_a^b f_2 dz^1,\dots dz^q\right]$$

b) Sea f integrable respecto de $(z^1_\alpha, z^2, \ldots z^q)$ y respecto de $(z^1_\beta, z^2, \ldots z^q)$ sobre $[a,b]$, y sea c una variable aleatoria R-valuada. Entonces f es integrable respecto de $(c[z^1_\alpha + z^1_\beta], z^2, \ldots z^q)$ sobre $[a,b]$. Además, casi seguramente

$$\int_a^b fd(c[z^1_\alpha + z^1_\beta])\, dz^2, \ldots dz^q \equiv$$
$$\equiv c\left[\int_a^b fdz^1_\alpha dz^2, \ldots dz^q + \int_a^b fdz^1_\beta dz^2, \ldots dz^q\right] ".$$

I.2.3.- Como antes, supondremos que los integradores están definidos sobre $[a,b]$ y los integrandos sobre T.

<u>PROPIEDAD III</u>: "Sean f_1 y f_2 integrables respecto de $(z^1, \ldots z^q)$ sobre $[a,b]$. Sea $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que

$$f_1(.,\omega) \equiv f_2(.,\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega_1$. Entonces, si F_1 y F_2 son versiones de - las respectivas integrales, ha de ser

$$F_1(\omega) = F_2(\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega_1 / N$, siendo N un subconjunto P-nulo de Ω".

(Una propiedad análoga se podría enunciar referida a los integradores).

I.2.4.- Puesto que el espacio de las variables aleatorias (R-valuadas) es completo con $\bar{\rho}$, podemos establecer el siguiente "<u>criterio de Cauchy</u>" de existencia de integrales retardadas, que constituye en realidad una definición equivalente a las definiciones I y II de (I.1.2):

<u>PROPIEDAD IV</u>: "Sean f y $(z^1, \ldots z^q)$ definidos como anteriormente. Entonces, existe la integral retardada

$$\int_a^b fdz^1, \ldots dz^q$$

si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada -- par de particiones $\pi', \pi'' \in B([a,b])$ con $\text{eng}(\pi')$ y $\text{eng}(\pi'')$ menores que δ, se verifica que

$$\bar{\rho}(S(\pi'; f; z^1, \ldots z^q), S(\pi''; f; z^1, \ldots z^q)) < \varepsilon \text{ ".}$$

El mismo criterio es válido si se sustituye la integral del enunciado por

$$(L_p)\int_a^b f dz^1,\ldots dz^q$$

y $\bar{\rho}$ por la L_p-distancia.

I.2.5.- La integral retardada es aditiva respecto al intervalo de definición, en el siguiente sentido:

PROPIEDAD V: "Sea f integrable respecto de $(z^1,\ldots z^q)$ sobre $[a,b]$. Sea $[c,d] \subset [a,b]$. Entonces:

a) f es integrable respecto de $(z^1,\ldots z^q)$ sobre $[c,d]$

b) Casi seguramente

$$\int_a^b f dz^1,\ldots dz^q \equiv \int_a^c f dz^1,\ldots dz^q + \int_c^b f dz^1,\ldots dz^q$$

c) Si $\delta>0$ es tal que para cualquier $\pi \varepsilon B([a,b])$ con $eng(\pi)<\delta$ se verifica que

$$\bar{\rho}(S(\pi;f;z^1,\ldots z^q), \int_a^b f dz^1,\ldots dz^q) \leq \varepsilon$$

entonces, para cualquier $\pi \varepsilon B([c,d])$ con $eng(\pi')<\delta$ se verifica que

$$\bar{\rho}(S(\pi';f;z^1,\ldots z^q), \int_c^d f dz^1,\ldots dz^q) \leq \varepsilon".$$

La propiedad anterior sigue siendo válida si se considera integrabilidad en el sentido de la convergencia en L_p-distancia y se sustituye $\bar{\rho}$ por la misma L_p-distancia.

NOTA: Las demostraciones de las propiedades I-V, con simples modificaciones en los enunciados, pueden verse en McShane [10].

I.3.- Teoremas de existencia.

En el planteamiento de las ecuaciones integrales estocásticas de McShane, a cuyo estudio dedicamos los capítulos II y III, intervienen integrales retardadas de primer y segundo orden. McShane [10] ha establecido diversos teoremas en los que se determinan condiciones suficientes para la existencia de integrales de primer y segundo orden, y que son fundamentales en el estudio de las -- ecuaciones integrales estocásticas. Tales condiciones definen ciertas clases - de procesos que tendrán, pues, un papel relevante en el estudio de los aspec-- tos que hemos considerado en nuestro trabajo.

Enunciamos en este punto dichos teoremas, acerca de los cuales realizamos algunas aportaciones que explicamos en cada apartado. Por su importancia en el desarrollo de los capítulos II y III, conviene destacar entre ellas el lema - (I.3.5.4), en que establecemos una condición suficiente para que un proceso P-continuo sea L_p-continuo (v.Angulo [1]), consecuencia del teorema de L_p-convergencia (v.Loève [9 , p.163]), que constituye una útil herramienta en las demostraciones de la mayor parte de los resultados que aquí exponemos. Como ejemplo de su aplicabilidad, lo usamos en este punto para simplificar las demostraciones dadas por McShane de algunos teoremas de existencia (v.Angulo [1]).

Enunciamos también en este punto algunos teoremas, establecidos por McShane [10], en que se prueba la nulidad de ciertas integrales (integrales respecto de (z,t); integrales respecto de (z^1,z^2) con z^1 y z^2 con incrementos independientes; integrales de orden superior a 2), bajo determinadas condiciones.

Previamente, definimos algunos conceptos que manejaremos con profusión - en todo lo que sigue.

I.3.1.- Definiciones previas:

Sea $f(\tau,\omega)$ un proceso definido sobre $T\subset R$ y R-valuado.

Sea $s\in T$. Los siguientes conceptos se refieren a continuidad local:

."f es continuo en probabilidad (P-continuo) en s si para todo $\varepsilon>0$, y con $t\in T$

$$\lim_{t\to s} P\{|f(t,\omega)-f(s,\omega)|\geq\varepsilon\}=0".$$

."f es <u>continuo en L_p-distancia (L_p-continuo) en s</u> si $\|f(s,\omega)\|_p<\infty$ y, con $t\epsilon T$

$$\lim_{t\to s} \|f(t,\omega)-f(s,\omega)\|_p=0".$$

Los conceptos anteriores se extienden a conceptos de continuidad global o en algunas partes de T, como es usual. Consideraremos también los siguientes - conceptos sobre acotación de procesos en un sentido global:

."f tiene <u>aplicación global acotada c.s</u>. si existe una variable aleato-- ria B $\bar{R}$-valuada finita c.s. tal que para todo $\omega\epsilon\Omega$

$$|f(\tau,\omega)|\leq B(\omega) \qquad \forall\tau\epsilon T".$$

Esto implica que casi todas las trayectorias de f son acotadas. Si f es separable, el recíproco también es cierto.

."f es <u>acotado en L_p-norma (L_p-acotado)</u> si existe un número real M tal - que

$$\|f(\tau,\omega)\|_p \leq M \qquad \forall\tau\epsilon T".$$

Por otra parte, sobre cualquier intervalo $[a,b]\subset R$ consideraremos la medida de Lebesgue. Así mediante la abreviatura "c.t.p." significaremos "en casi todo punto", es decir "salvo en un conjunto Lebesgue-nulo" en $[a,b]$.

Finalmente, dada una <u>filtración</u> $F=\{F_\tau;\ \tau\epsilon T\}$ del espacio medible (Ω,A) (es decir, una familia no decreciente de sub-σ-álgebras de A), decimos que un proceso f es <u>adaptado a F</u> o <u>F-medible</u> si para cada $\tau\epsilon T$, la variable aleatoria $f(\tau,.)$ es F_τ-medible.

I.3.2.- <u>Hipótesis básicas</u>:

Con el fin de evitar su repetición en cada enunciado, escribimos a continuación algunas hipótesis previas a las que nos referiremos sistemáticamente en el resto de este capítulo e inicio del capítulo II:

[H]: " 1) (Ω,A,P) es un espacio de probabilidad (completo). $[a,b]$ es un intervalo cerrado en $T\subset R$.

2) $F=\{F_\tau;\ \tau\epsilon T\}$ es una filtración del espacio medible (Ω,A).

3) $z(t,\omega)$, con o sin afijos, es un proceso R-valuado y definido so

bre [a,b].

4) $f(\tau,\omega)$ es un proceso R-valuado y definido sobre T".

NOTA: Aunque no se trata de un requerimiento necesario, por comodidad y brevedad supondremos que el espacio de probabilidad (Ω,A,P) es completo. Es decir, si $N_0 \subset N \in A$ y $P(N)=0$, podremos afirmar que $N_0 \in A$ y $P(N_0)=0$.

I.3.3.- Integradores de McShane:

Para el establecimiento de condiciones para la existencia de integrales retardadas de primer y segundo orden, tanto McShane como otros autores posteriores (Elworthy, Mohammed,...) consideran las siguientes hipótesis sobre los integradores, que permiten hacer uso del "lema de interferencia" (I.3.5.1): Cada z definido por [H,3] es un proceso verificando

3.1) z es F-medible

3.2) Existe $K \in R^+$ tal que

$$|E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]/F_s)| \leq K(t-s)$$

$$E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]^2/F_s) \leq K(t-s)$$

c.s., cuando $a \leq s \leq t \leq b$.

El establecimiento de estimaciones en L_2-norma de integrales retardadas de segundo orden, con el fin de aplicarlas en el estudio de las ecuaciones integrales estocásticas de McShane, requerirá considerar una condición adicional sobre z en el sentido de (3.2), que permite aplicar convenientemente el "lema de interferencia" (I.3.5.1) al caso de segundo orden:

3.2') $$E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]^4/F_s) \leq K(t-s)$$

A partir de las condiciones anteriores definimos las siguientes clases de procesos, a través de las cuales nos referiremos a dichas condiciones:

Z_F^2: clase de procesos que verifican las condiciones (3.1) y (3.2).

Z_F^4: clase de procesos que verifican las condiciones (3.1), (3.2) y (3.2')

Aunque en el estudio de la existencia de integrales retardadas se exige que los integradores pertenezcan a Z_F^2, para el estudio de la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones integrales estocásticas de McShane será ne cesario, como ya se ha indicado, que los integradores pertenezcan a la subclase de aquélla Z_F^4.

NOTA: Se pueden definir, mediante la adición sucesiva de condiciones del tipo (3.2'), con exponente 6,8,..., nuevas subclases de procesos z, con denominación Z_F^6, Z_F^8,... . Así, la clase Z_F^{2p} (p=1,2,3,...), estará constituida por aquéllos procesos que verifican (3.1) y además

3.2)$_p$ Existe $K\varepsilon R^+$ tal que

$$|E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]/F_s)|\leq K(t-s)$$

$$E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]^{2r}/F_s)|\leq K(t-s) \qquad (r=1,\ldots,p)$$

c.s., cuando $a\leq s\leq t\leq b$.

Aunque aquí no tienen utilidad, tales clases habrán de tener un papel relevante en el estudio de la derivabilidad en órdenes sucesivos de la función que asigna, en ecuaciones integrales estocásticas con condición inicial variable, a cada condición inicial la solución de la ecuación correspondiente (probado que ésta existe y es única) (v.Elworthy [4], Yor [17]).

I.3.4.- Procesos integrables:

Análogamente a como hemos hecho en el apartado anterior, definimos aquí ciertas clases de procesos f definidos por [H,4], sobre los que se fundamenta el estudio de la existencia de integrales retardadas, así como los estudios posteriores sobre ecuaciones integrales estocásticas que exponemos en los capítulos II y III.

Para cada $p\varepsilon R^+$, definimos

H_F^p: clase de procesos F-medibles,
L_p-acotados en T y
L_p-continuos en c.t.p. de [a,b]

H_F^*: clase de procesos F-medibles,
con aplicación global acotada c.s. y
P-continuos en c.t.p. de [a,b]

H_F^{p*}: clase de procesos que se pueden descomponer como producto de dos pro cesos, pertenecientes respectivamente a H_F^p y H_F^*.

Realmente tendrán interés aquí las clases anteriores para p=1 y, sobre todo, p=2.

I.3.5.- Lemas previos:

I.3.5.1.- Aunque no lo usaremos explícitamente, sino a través de los lemas (I.3.5.2) y (I.3.5.3), enunciamos el siguiente "lema de interferencia" (todos ellos aparecen demostrados en McShane [10]), por constituir la base de la teoría de McShane:

LEMA: "Sean F_1, F_2,..., F_m sub-σ-álgebras de A. Sean $u_1,\ldots,u_m$, $\Delta_1,\ldots\Delta_m$ vv.aa. tales que para cada $k\varepsilon\{1,\ldots,m\}$, toda u_j con $j\leq k$ y toda Δ_j con $j<k$ es F_k-medible. Sean $C_1,\ldots,C_m$, $D_1,\ldots,D_m$ números tales que c.s.

$$|E(\Delta_j/F_j)|\leq C_j \qquad E(\Delta_j^2/F_j)\leq D_j \qquad (j=1,\ldots,m)$$

Entonces

$$||\sum_{j=1}^m u_j\Delta_j||\leq 2\sum_{j=1}^m ||u_j||C_j+\{\sum_{j=1}^m ||u_j||^2 D_j\}^{1/2} \text{ ''}.$$

I.3.5.2.- El siguiente lema se utiliza en la demostración del teorema de existencia (I.3.6.1). Nosotros lo usaremos en el apartado (I.4) para el establecimiento de estimaciones de integrales retardadas de primer orden.

LEMA: "Sean las hipótesis [H], con $z\varepsilon Z_F^2$. Sea $C=2K(b-a)^{1/2}+K^{1/2}$. Sean $[s_1,t_1)$,. ...,$[s_m,t_m)$ subintervalos disjuntos de $[a,b)$. Sean $u_1,\ldots,u_m$ variables aleatorias tales que para cada $j\varepsilon\{1,\ldots,m\}$, u_j es F_{s_j}-medible y $||u_j||<\infty$. Entonces

$$||\sum_{j=1}^m u_j[z(t_j)-z(s_j)]||\leq C\{\sum_{j=1}^m ||u_j||^2(t_j-s_j)\}^{1/2} \text{ ''}.$$

(se sobreentiendo el argumento ω).

I.3.5.3.- El lema que sigue es también consecuencia del lema (I.3.5.1), y será usado en (I.4) para el establecimiento de estimaciones en L_2-norma de integrales retardadas de segundo orden:

LEMA: "Sean las hipótesis [H], con $z^1,z^2\varepsilon Z_F^4$. Sea $C=2K(b-a)^{1/2}+K^{1/2}$.

Sean $[s_1,t_1),\dots,[s_m,t_m)$ subintervalos disjuntos de $[a,b)$ y $u_1,\dots$ $\dots,u_m$ variables aleatorias tales que para cada $j\in\{1,\dots,m\}$, u_j es F_{s_j}-medible y $\|u_j\|<\infty$. Entonces

$$\|\sum_{j=1}^{m} u_j[z^1(t_j)-z^1(s_j)][z^2(t_j)-z^2(s_j)]\|\leq$$

$$\leq C\{\sum_{j=1}^{m}\|u_j\|^2(t_j-s_j)\}^{1/2}\text{ "}.$$

I.3.5.4.- Establecemos a continuación una <u>condición suficiente para que un proceso P-continuo sea L_p-continuo</u>. Este resultado constituye una importante herramienta que utilizaremos con frecuencia en lo sucesivo. Para demostrarlo nos apoyamos en el "<u>teorema de la convergencia-L_p</u>" (v.Loève [9]):

"Sean X_n variables aleatorias pertenecientes al espacio L_p. En tal caso

$$X_n \xrightarrow{L_p} X$$

si y solo si se verifican las siguientes condiciones:

a) $X_n \xrightarrow{P} X$

b) Las vv.aa.$|X_n|^p$ son uniformemente integrables".

Recordemos que "una sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}_{n\in N}$ es <u>uniformemente integrable</u> si, definiendo

$$B_{n,c}=\{|Y_n|\geq c\} \qquad c\in R^+,\ n\in N$$

se tiene que

$$\int_{B_{n,c}} |Y_n|\,dP \longrightarrow 0$$

cuando c tiende a ∞, uniformemente en n".

<u>LEMA</u>: (lema de L_p-continuidad) (Angulo [1])

"Sea $X(t,\omega)$ un proceso R-valuado definido sobre $S\subset R$, P-continuo en $t_0\in S$. Supongamos que existe un proceso $Y(t,\omega)$ R-valuado definido sobre S tal que para cada $t\in S$ y cada $\omega\in\Omega$

$$|X(t,\omega)|\leq Y(t,\omega)$$

Entonces, si Y es L_p-continuo en t_0, también X es L_p-continuo en t_0".

Demostración:

Puesto que Y es L_p-continuo en t_0, existirá un entorno V_{t_0} de t_0 en S tal que para cada $t\varepsilon V_{t_0}$

$$\|Y(t,\omega)\|_p < \infty$$

y, en consecuencia,

$$\|X(t,\omega)\|_p < \infty$$

Sea $\{t_n\}_{n\varepsilon N}$ una sucesión cualquiera de puntos de S que converja a t_0. Sabemos que, entonces,

$$X(t_n,\omega) \xrightarrow{P} X(t_0,\omega)$$

$$Y(t_n,\omega) \xrightarrow{L_p} Y(t_0,\omega)$$

cuando n tiende a ∞.

Además, existirá $n_0\varepsilon N$ tal que si $n\geq n_0$ entonces $t_n\varepsilon V_{t_0}$. Por tanto, $X(t_n,\omega)$, $Y(t_n,\omega)$ serán L_p-integrables, para todo $n\varepsilon N$ tal que $n\geq n_0$.

Sean, para cada $c\varepsilon R^+$ y cada $n\varepsilon N$

$$A_{n,c} = \{|X(t_n,\omega)|^p\geq c\}$$

$$B_{n,c} = \{|Y(t_n,\omega)|^p\geq c\}$$

Por el teorema de la convergencia-L_p, la familia

$$\{|Y(t_n,\omega)|^p\}_{n\geq n_0}$$

es uniformemente integrable, es decir

$$\int_{B_{n,c}} |Y(t_n,\omega)|^p dP \longrightarrow 0$$

cuando c tiende a ∞, uniformemente en $n(\geq n_0)$.

Puesto que $A_{n,c} \subset B_{n,c}$, se tiene que, para $n\geq n_0$

$$\int_{A_{n,c}} |X(t_n,\omega)|^p dP \leq \int_{A_{n,c}} |Y(t_n,\omega)|^p dP \leq \int_{B_{n,c}} |Y(t_n,\omega)|^p dP$$

Así, la familia

$$\{|X(t_n,\omega)|^p\}_{n\geq n_0}$$

es uniformemente integrable.

De nuevo por el teorema de la convergencia-L_p, se tiene que

$$X(t_n,\omega) \xrightarrow{L_p} X(t,\omega)$$

cuando n tiende a ∞.

Actuando de este modo para todas las posibles sucesiones convergentes a t_0 en S, se concluye que X es L_p-continuo en t_0.

I.3.5.5.- A partir del lema anterior, establecemos el siguiente resultado, que pone de manifiesto la potencia del método de truncamiento, que aplicamos con frecuencia. En efecto, es más cómodo trabajar en clases H_F^p que en clases H_F^* o H_F^{p*}, puesto que en las primeras se dispone de una norma (pseudo-norma), como sabemos. Aquí veremos cómo, por truncamiento, podemos aproximar cualquier proceso de H^{p*}, en general, mediante ciertos procesos en H_F^p:

COROLARIO:

"Sea $f\in H_F^{p*}$, es decir, f se puede descomponer como

$$f(\tau,\omega)=b(\tau,\omega).\ f_1(\tau,\omega) \qquad \forall\tau\in T, \quad \forall\omega\in\Omega$$

con $b\in H_F^*$ y $f_1\in H_F^p$. Sea, para cada V>0, el proceso b_V definido por

$$b_V(\tau,\omega)=\text{med}\{b(\tau,\omega),\ V,-V\}$$

(valor intermedio en la ordenación). Entonces

a) $b_V.f_1\in H_F^p$

b) $b_V(\tau,\omega).f_1(\tau,\omega) \xrightarrow{p} f(\tau,\omega)$

cuando V tiende a ∞, uniformemente en τ".

Demostración:

a) Puesto que $b_V.f_1$ está acotado por $V.|f_1|$, es L_p-acotado en T, por ser lo f_1.

Existen subconjuntos T_0,T_1 de T Lebesgue-nulos tales que:

b es P-continuo en $T-T_0$

f_1 es L_p-continuo en $T-T_1$.

Puesto que para cada $\tau\varepsilon T$ y cada $\omega\varepsilon\Omega$

$$|b_V(t,\omega)-b_V(s,\omega)|\leq b(t,\omega)-b(s,\omega)|$$

ha de ser b_V P-continuo en $T-T_0$.

Por tanto, $b_V.f_1$ es P-continuo en $T-(T_0 U T_1)$. Por el lema (I.3.5.4) $b_V.f_1$ es también L_p-continuo en $T-(T_0 U T_1)$.

Finalmente, $b_V.f_1$ es F-medible, por serlo f_1 y b_V, este último por serlo b.

b) Sea $B(\omega)$ una v.a. finita c.s. tal que para cada $\omega\varepsilon\Omega$

$$|b(\tau,\omega)|\leq B(\omega) \qquad \forall\tau\varepsilon T$$

Para todo $\varepsilon>0$, para todo $\tau\varepsilon T$

$$P[|f(\tau,\omega)-b_V(\tau,\omega)f_1(\tau,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[|b(\tau,\omega)|>V]\leq P[B(\omega)>V]$$

y el último miembro es independiente de τ y tiende a 0 cuando V tiend a ∞.

I.3.6.- <u>Existencia de integrales retardadas de primer orden</u>:

I.3.6.1.- El siguiente teorema, demostrado por McShane [10], proporciona condi ciones para la existencia de integrales retardadas de primer orden en el sent do de la convergencia en L_2-norma:

<u>TEOREMA</u>:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\varepsilon Z_F^2$ y $f\varepsilon H_F^2$. Entonces, existe la integral r tardada

$$(L_2)\int_a^b fdz".$$

I.3.6.2.- El teorema anterior se extiende ampliando la clase a que ha de pert necer el integrando, pero perdiendo la certeza de que existe convergencia en sentido fuerte. Este es el contenido del siguiente teorema, demostrado por --

McShane [10], cuya prueba simplificamos notablemente mediante la aplicación del lema de L_p-continuidad (I.3.5.4):

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\epsilon Z_F^2$ y $f\epsilon H_F^{2*}$. Entonces, existe la integral - retardada

$$\int_a^b f dz".$$

Demostración: (v.Angulo [1])

Sea $f\equiv b.f_1$, con $b\epsilon H_F^*$ y $f_1\epsilon H_F^2$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea V un número tal que el conjunto

$$\Omega_V=\{\omega\epsilon\Omega;\ B(\omega)>V\}$$

tiene $P(\Omega_V) <\varepsilon/4$, siendo B una v.a. que acota c.s. las trayectorias de b.

Definimos b_V como en el corolario (I.3.5.5), por truncamiento. Por dicho corolario, sabemos que $b_V.f_1\epsilon H_F^2$. Entonces, por el teorema anterior, $b_V.f_1$ es integrable respecto de z. Es decir, existe $\delta>0$, tal que si π' y π'' pertenecen a $B([a,b])$ y $eng(\pi')$, $eng(\pi'')$ son menores que δ, entonces

$$\bar{\rho}(S(\pi';b_V.f_1;z),\ S(\pi'';b_V.f_1;z)) \leq \varepsilon/2$$

(por el criterio de Cauchy (I.2.4)).

Puesto que $P(\Omega_V) <\varepsilon/4$, se tiene que

$$\bar{\rho}(S(\pi';b_V.f_1;z),\ S(\pi';b.f_1;z)) <\varepsilon/4$$

y lo mismo con π'' en lugar de π'.

En consecuencia, finalmente podemos escribir, aplicando la propiedad -- triangular de $\bar{\rho}$,

$$\bar{\rho}(S(\pi';f;z),\ S(\pi'';f;z))<\varepsilon$$

lo que, de nuevo aplicando el criterio de Cauchy (I.2.4), concluye la demostración.

I.3.7.- Existencia de integrales retardadas de segundo orden:

I.3.7.1.- En el siguiente teorema, análogo del teorema (I.3.6.1) para integra les de primer orden, se dan condiciones para la existencia de integrales retardadas de segundo orden con convergencia en L_1-norma. Dicho resultado está demostrado por McShane [10]. Exponemos aquí una demostración alternativa, más directa, en que aplicamos el criterio de Cauchy (I.2.4) (v.Angulo [1])

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \varepsilon Z_F^2$ y $f \varepsilon H_F^1$. Entonces, existe la integral retardada

$$(L_1)\int_a^b f dz^1 dz^2".$$

Demostración:

Sea M una cota superior de $\|f(\tau,\omega)\|_1$ en T. Sea $\varepsilon>0$ y γ definido por

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{K(2M+b-a)}$$

Sea G la unión de un conjunto numerable de intervalos abiertos (α_1,β_1), (α_2,β_2),... que recubran al conjunto N de los puntos de L_1-discontinuidad de f y tales que

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \gamma$$

Esta elección es posible por ser N Lebesgue-nulo.

Es fácil comprobar, por otra parte, que se verifica lo siguiente:

$\exists \delta>0$ tal que si $t_0 \varepsilon [a,b]-G$, $\tau \varepsilon T$ y $|t_0-\tau|<\delta$, entonces $\|f(t_0\omega)-f(\tau,\omega)\|_1<\delta/2$.

En efecto, si no fuese así, podríamos encontrar sucesiones de puntos t_1, t_2,... en $[a,b]-G$ y τ_1,τ_2,... en T tales que $|t_n-\tau_n|$ tendiese a 0 cuando n tiende a ∞, y $\|f(t_n,\omega)-f(\tau_n,\omega)\|_1 \geq \gamma/2$. Pero en tal caso, existirá una subsucesión $\{t'_n\}_{n\varepsilon N}$ de $\{t_n\}_{n\varepsilon N}$ convergente en $[a,b]-G$, puesto que este conjunto es compacto. Sea t_0 el límite. Así, f es L_1-continuo en t_0. Si $\{\tau'_n\}_{n\varepsilon N}$ es la subsucesión de $\{\tau_n\}_{n\varepsilon N}$ correspondiente a $\{t'_n\}_{n\varepsilon N}$, entonces τ'_n tiende a t_0 cuando n tiende a ∞, y sin embargo $\|f(t_0,\omega)-f(\tau'_n,\omega)\|_1$ no puede tender a 0, lo cual es una contradicción.

Sean ahora dos particiones $\pi_1,\pi_2 \varepsilon B([a,b])$. Puesto que no tienen porqué contener los mismos puntos de división, definimos a partir de ellas dos nuevas particiones π'_1, π'_2, del siguiente modo: Si existe en π_2 algún punto de división t^* que no lo sea de π_1 (es decir, tal que para algún $j\in\{1,\dots m\}$ se -- tenga $t_j<t^*<t_{j+1}$ en π_1), insertamos dicho punto en π_1, permaneciendo τ_j como - punto de evaluación asociado a los dos nuevos subintervalos $[t_j,t^*]$ y $[t^*,t_{j+1}]$. Se repite este procedimiento hasta que todos los puntos de divi-- sión de π_2 hayan sido insertados en π_1, obteniéndose una nueva partición $\pi'_1\in B([a,b])$. Análogamente se hace con π_2, insertando los puntos división de π_1, y obteniéndose $\pi'_2\in B([a,b])$. Notaremos

$$\pi'_1=(t_1,\dots t_{m+1};\tau^1_1,\dots\tau^1_m)$$
$$\pi'_2=(t_1,\dots t_{m+1};\tau^2_1,\dots\tau^2_m)$$

Si $[t_j,t_{j+1}]\not\subset G$, entonces existe algún t_0 en $[t_j,t_{j+1}]-G$. Si $\text{eng}(\pi_1)$ y $\text{eng}(\pi_2)$ (que coinciden respectivamente con $\text{eng}(\pi'_1)$ y $\text{eng}(\pi'_2)$) son menores que δ, tenemos que

$$||f(\tau^1_j,\omega)-f(\tau^2_j,\omega)||_1 \leq$$

$$\leq||f(\tau^1_j,\omega)-f(t_0,\omega)||_1+||f(\tau^2_j,\omega)-f(t_0,\omega)||_1 \leq \gamma/2+ \gamma/2=\gamma.$$

Mediante Σ_G simbolizaremos una suma tomada respecto a aquellos índices $j\in\{1,\dots m\}$ tales que $[t_j,t_{j+1}]\subset G$. (Correspondientemente se interpreta $_{no}\Sigma_G$). Entonces, podemos escribir:

$$||S(\pi'_1;f;z^1;z^2)-S(\pi'_2;f;z^1,z^2)||_1 =$$

$$=||\sum_{j=1}^m[f(\tau^1_j,\omega)-f(\tau^2_j,\omega)]\Delta_j z^1(\omega)\Delta_j z^2(\omega)||_1 \leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^m E[E(|f(\tau^1_j,\omega)-f(\tau^2_j,\omega)|.|\Delta_j z^1(\omega)\Delta_j z^2(\omega)|/F_{t_j})] \leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m E[|f(\tau^1_j,\omega)-f(\tau^2_j,\omega)|.E([(\Delta_j z^1(\omega))^2+(\Delta_j z^2(\omega))^2]/F_{t_j})] \leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^m E(|f(\tau^1_j,\omega)-f(\tau^2_j,\omega)|.K\Delta_j t) =$$

$$=K\{\Sigma_G||f(\tau^1_j,\omega)-f(\tau^2_j,\omega)||_1\Delta_j t + {}_{no}\Sigma_G||f(\tau^1_j,\omega)-f(\tau^2_j,\omega)||_1\Delta_j t\} <$$

$$<K\{2M\gamma + \gamma(b-a)\} = \varepsilon$$

Teniendo en cuenta que

$$S(\pi_1';f;z^1,z^2) = S(\pi_1;f;z^1,z^2)$$

$$S(\pi_2';f;z^1,z^2) = S(\pi_2;f;z^1,z^2)$$

y aplicando el criterio de Cauchy, se concluye que existe la integral retardada de f respecto de (z^1,z^2) sobre $[a,b]$, con convergencia en L_1-norma.

I.3.7.2.- El teorema anterior se extiende de modo análogo a como hemos visto en (I.3.6.2) para integrales de primer orden. Como allí, simplificamos la demostración dada por McShane [10] , mediante la aplicación del lema de L_p-continuidad (I.3.5.4):

<u>TEOREMA</u>:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1,z^2\varepsilon Z_F^2$ y $f\varepsilon H_F^{1*}$. Entonces, existe la integral retardada

$$\int_a^b f dz^1 dz^2".$$

Demostración: (v. Angulo [1])

La prueba es similar a la que hemos hecho para el teorema (I.3.6.2). Sea $f\equiv b.f_1$, con $b\varepsilon H_F^*$ y $f_1\varepsilon H_F^1$.

Sea $\varepsilon>0$. Sea V un número tal que el conjunto

$$\Omega_V=\{\omega\varepsilon\Omega \ ; \ B(\omega)>V\}$$

tiene $P(\Omega_V)<\varepsilon/4$, siendo B una v.a. que acota c.s. las trayectorias de b.

Definimos b_V como en (I.3.5.5), por truncamiento. Entonces, por (I.3.5.5) $b_V.f_1\varepsilon H_F^1$. Por el teorema (I.3.7.1), $b_V.f_1$ es integrable respecto de (z^1,z^2) sobre $[a,b]$. Es decir, existe $\delta>0$ tal que si π' y π'' pertenecen a $B([a,b])$ y -- $eng(\pi')$, $eng(\pi'')$ son menores que δ, entonces

$$\bar{\rho}(S(\pi';b_V.f_1;z^1,z^2),S(\pi'';b_V.f_1;z^1,z^2))\leq\varepsilon/2$$

Puesto que $P(\Omega_V)<\varepsilon/4$, ha de ser

$$\bar{\rho}(S(\pi';b_V.f_1;z^1,z^2),S(\pi';b.f_1;z^1,z^2))<\varepsilon/4$$

y lo mismo con π'' en lugar de π'.

En consecuencia, por la propiedad triangular de $\bar{\rho}$,

$$\bar{\rho}(S(\pi';f;z^1,z^2),S(\pi'';f;z^1,z^2))<\varepsilon$$

lo que concluye la demostración.

I.3.7.3.- Observación.

El teorema (I.3.7.1) de existencia de integrales retardadas de segundo orden está basado en la convergencia en L_1-norma, que es más general que la convergencia en L_2-norma. En él las condiciones sobre los integradores son las mismas que las exigidas en el teorema (I.3.6.1) de existencia de integrales retardadas de primer orden, y sobre el integrando se impone una condición más débil que en este último (pertenecer a H^1_F en lugar de a H^2_F).

Conviene tener en cuenta, no obstante, que siguiendo el mismo procedimiento de demostración que en (I.3.6.1), y apoyándonos en la desigualdad de Hölder, podemos demostrar la existencia de la integral

$$\int_a^b f dz^1 dz^2$$

si exigimos a f pertenecer a H^2_F y a z^1, z^2 pertenecer a Z^4_F. Este aspecto puede ser interesante en el estudio de las ecuaciones integrales estocásticas, puesto que éste se realiza fundamentalmente por medio de la L_2-norma.

Se puede hacer, asímismo, una extensión análoga a la anterior para el estudio de la existencia de integrales retardadas de orden q cualquiera con L_2-convergencia, aumentando para ello convenientemente las restricciones sobre los integradores, en el mismo sentido en que acabamos de hacerlo para integrales de segundo orden. (Sobre este aspecto, v. Elworthy [4]; también v. aquí las observaciones que hacemos en una nota en el apartado (II.2.4) y en el apartado (II.3.7)). De todos modos, para nuestros propósitos en este trabajo, tal consideración no tiene relevancia.

I.3.8.- Nulidad de ciertas integrales.

Si bien los resultados que exponemos a continuación no son relevantes para los objetivos principales de nuestro trabajo, algunos de ellos (integración respecto de dos integradores con incrementos condicionalmente independientes, integración respecto de (z,t)) sí tienen cierta importancia en el planteamiento formal en determinados casos del modelo general de ecuaciones integrales estocásticas sobre el que se centra nuestro estudio en los capítulos II y III. Por otra parte, tales resultados tienen un interés intrínseco, justificado por el hecho de que, al delimitar dentro de la gama de órdenes y casos en integrales retardadas aquéllas que realmente poseen un contenido no nulo, constituyen una valiosa herramienta para el cálculo estocástico (p.e., en diferenciación de funciones dependientes de t, $z^1,\dots z^q$ usando los fundamentos de la fórmula de Taylor). (Una discusión sobre tales aspectos puede verse en McShane [10]).

Los resultados que siguen están dados y demostrados por McShane [10]. Elworthy [4] proporciona algunas versiones algo diferentes sobre los mismos casos que en tales resultados se consideran.

I.3.8.1.- Integrales de orden superior a 2:

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sean z^1, $z^2 \varepsilon Z_F^2$, y $v^1,\dots v^q$ ($q \geq 1$) procesos definidos sobre [a,b] con trayectorias continuas c.s., y sea g un proceso definido sobre T tal que

$$|g(\tau,\omega)| \leq B(\omega).f(\tau,\omega)$$

siendo B una v.a. finita c.s. y f un proceso L_1-acotado en T y F-medible.

Entonces, existe la integral retardada de g respecto de $(z^1,z^2,v^1,\dots v^q)$ sobre [a,b] y

$$\int_a^b g\,dz^1 dz^2 dv^1 \dots dv^q \equiv 0$$

casi seguramente".

(En realidad, como muestra Elworthy [4], en el teorema no es necesario exigir la continuidad muestral c.s. para todos los procesos v^k ($k=1,\dots q$). En efecto, bastará que al menos uno de tales procesos verifique dicha condición).

I.3.8.2.- Integrales respecto de (z,t).

El siguiente teorema se aplica en realidad a casos más generales que (z,t), aunque su mayor interés radica en este caso particular:

TEOREMA:

"Sean z^1 y z^2 procesos definidos sobre $[a,b]$ tales que las trayectorias de z^2 son continuas c.s. y las de z^1 satisfacen una condición de Lipschitz

$$|z^1(t,\omega)-z^1(s,\omega)|\leq L(\omega)(t-s) \qquad (s,t\epsilon[a,b]),$$

donde L es una variable aleatoria finita c.s. (en particular, z^1 puede ser t). Sea g un proceso definido sobre T tal que

$$|g(\tau,\omega)|\leq B(\omega)g_1(\tau,\omega)$$

donde B es una variable aleatoria finita c.s. y g_1 es L_1-acotado en T.

Entonces, existe la integral de g respecto de (z^1,z^2) sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^b g dz^1 dz^2 \equiv 0$$

casi seguramente".

I.3.8.3.- Integrales respecto de dos procesos z^1 y z^2 con incrementos condicionalmente independientes.

TEOREMA:

"Sean las hipótesis H. Sean $z^1,z^2 \epsilon Z_F^2$. Sean $z^1(t,\omega)-z^1(s,\omega)$ y $z^2(t,\omega)-z^2(s,\omega)$ condicionalmente independientes dado F_s. Sea f un proceso definido sobre T tal que

$$f\equiv b.f_1$$

donde b y f_1 son procesos F-medibles, b con aplicación global acotada c.s. y f_1 L_2-acotado en T.

Entonces, existe la integral de f respecto de (z^1,z^2) sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^b f dz^1 dz^2 \equiv 0$$

casi seguramente".

I.4.- Estimaciones.

En este apartado estudiamos algunas estimaciones de integrales retardadas de primer y segundo orden, cuya utilización es fundamental en los capítulos II y III.

Bajo las condiciones de los teoremas (I.3.6.1) y (I.3.7.1) se pueden establecer estimaciones de las integrales expresadas en términos de la L_2-norma y L_1-norma, respectivamente (v. McShane [10]). Puesto que el estudio de -- las ecuaciones integrales estocásticas se hace, en un primer paso, trabajando con la L_2-norma, y tales ecuaciones contienen integrales de primer y segundo orden, es necesario disponer de estimaciones de las integrales de segundo orden expresadas también en términos de la L_2-norma. McShane proporciona un resultado en tal sentido, bajo condiciones menos restrictivas que las que exige en los anteriores (v. McShane [10]).

Sin embargo, tanto en el caso de primer orden como en el de segundo, -- tales resultados son insuficientes en ciertas situaciones (sobre todo en el primero). Nuestra aportación en este punto consiste en una extensión conveniente de los resultados anteriores en cada caso (v. Angulo [2]), con el -- fin de disponer de estimaciones bajo condiciones más flexibles que las exigidas por McShane.

I.4.1.- Estimaciones de integrales retardadas de primer orden.

I.4.1.1.- El siguiente resultado, debido a McShane [10], es un corolario del teorema (I.3.6.1), y se obtiene como consecuencia del lema (I.3.5.2):

COROLARIO:

"Bajo las hipótesis del teorema (I.3.6.1) y con $C=2K(b-a)^{½}+K^{½}$, se tiene que

$$\left\| \int_a^b f(t,\omega)dz(t,\omega)\right\| \leq C\left\{\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt\right\}^{½}."$$

I.4.1.2.- No siempre podremos asegurar que $f\varepsilon H_F^2$, aunque exista la correspondiente integral retardada. Pero, como vamos a probar, la estimación anterior sigue siendo válida sin más que exigir que existan las integrales que allí aparecen y que z pertenezca a Z_F^2 y f sea F-medible.

Haremos uso del lema (I.3.5.2) y del siguiente

LEMA:

"Sean X_n $(n\geq 1)$ y X variables aleatorias L_p-integrables tales que

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

cuando n tiende a ∞.

Entonces,

$$\|X\|_p \leq \liminf \|X_n\|_p \text{ ".}$$

Demostración:

Supongamos que fuese $\|X\|_p > \liminf\|X_n\|_p$. Entonces, existiría una subsucesión $\{X_{n'}\}_{n'\varepsilon N}$ de $\{X_n\}_{n\varepsilon N}$ tal que

$$\|X_{n'}\|_p < \|X\|_p \qquad \forall n'\varepsilon N$$

y

$$\lim\|X_{n'}\|_p = \liminf\|X_n\|_p$$

Por otra parte, puesto que

$$X_{n'} \xrightarrow{P} X$$

cuando n' tiende a ∞, existirá una subsucesión $\{X_{n''}\}_{n''\varepsilon N}$ de $\{X_{n'}\}_{n'\varepsilon N}$ tal que

$$X_{n''} \xrightarrow{c.s.} X$$

cuando n" tiende a ∞. Entonces

$$0 \leq |X_{n''}|^p \xrightarrow{c.s.} |X|^p$$

Por el lema de Fatou-Lebesgue

$$E[\liminf |X_{n''}|^p] \leq \liminf E[|X_{n''}|^p]$$

y el miembro de la izquierda es igual a

$$E[|X|^p]$$

Así,

$$E[|X|^p] \leq \liminf E[|X_{n''}|^p = \lim E[|X_{n''}|^p]$$

En definitiva

$$\|X\|_p \leq \lim \|X_{n''}\|_p < \|X\|_p$$

lo que es absurdo.

PROPOSICION : (v.Angulo [2])

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\varepsilon Z_F^2$ y f F-medible. Supongamos que existe la integral estocástica retardada

$$\int_a^b fdz$$

y que existe la integral de Riemann, de Cauchy o de McShane(ordinarias)

$$\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt$$

Entonces, se puede establecer la siguiente estimación:

$$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz(t,\omega)\right\| \leq C\left\{\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt\right\}^{1/2} ".$$

Demostración:

Basta demostrar el resultado para el caso en que la integral ordinaria del enunciado existe como integral de Cauchy, puesto que toda partición de -- Cauchy es también una partición de Riemann y de McShane.

Sea, pues, $\{\pi(n)\}_{n\varepsilon N}$ una sucesión de particiones de Cauchy de [a,b] so-- bre T tales que eng(π) tienda a 0 cuando n tiende a ∞.

Sabemos que

$$S(\pi(n);f;z)(\omega) \xrightarrow{P} \int_a^b f(t,\omega)dz(t,\omega)$$

cuando n tiende a ∞. Entonces, por el lema anterior

(1) $$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz(t,\omega)\right\| \leq \liminf \|S(\pi(n);f;z)\|$$

Por otra parte

$$S(\pi(n);\|f\|^2;t) \longrightarrow \int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt$$

cuando n tiende a ∞. Por tanto

(2) $$\liminf S(\pi(n);\|f\|^2;z) = \lim S(\pi(n);\|f\|^2;z) = \int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt$$

Por último, el lema (I.3.5.2) permite afirmar que

(3) $$\|S(\pi(n);f;z)(\omega)\| \leq C\{S(\pi(n);\|f\|^2;t\}^{1/2}$$

De (1), (2) y (3) se deduce que

$$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz(t,\omega)\right\| \leq C\left\{\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt\right\}^{1/2}$$

como queríamos demostrar.

I.4.1.3.- A pesar de la generalidad de la proposición anterior, en principio podrían presentarse situaciones en que incluso no se pudiese comprobar la integrabilidad de $\|f(t,\omega)\|^2$. En tales casos, el siguiente resultado, extensión del anterior, puede ser útil:

PROPOSICION: (v.Angulo [2])

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z \in Z_F^2$ y f F-medible. Supongamos que existe la integral estocástica retardada

$$\int_a^b f dz$$

y que existe alguna función real $g(\tau)$ definida sobre T integrable en el sentido de Riemann, de Cauchy o de McShane (ordinarios), tal que

$$\|f(\tau,\omega)\|^2 \leq g(\tau) \qquad \forall \tau \in T$$

Entonces

$$\int_a^b \|f(t,\omega)dz(t,\omega)\| \leq C\left\{\int_a^b g(t)dt\right\}^{1/2}".$$

Demostración:

La prueba es inmediata a partir de la de la proposición (I.4.1.2). En efecto, es inmediato que

(4) $$S(\pi(n);\|f\|^2;t) \leq S(\pi(n);g;t)$$

Además

(5) $$\liminf S(\pi(n);g;t) = \lim S(\pi(n);g;t) = \int_a^b g(t)dt.$$

Relacionando ahora (1), (2), (4) y (5), deducimos que

$$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz(t,\omega)\right\| \leq C\left\{\int_a^b g(t)dt\right\}^{1/2}$$

como queríamos demostrar.

I.4.1.4.- El resultado anterior tiene una aplicación inmediata a procesos L_2 acotados:

COROLARIO:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z \varepsilon Z_F^2$ y f F-medible. Supongamos que existe la integral retardada

$$\int_a^b f dz$$

y que f es L_2-acotado en T, siendo M una cota. Entonces

$$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz(t,\omega)\right\| \leq CM(b-a)^{1/2} \text{ ".}$$

(La prueba es trivial: Basta tomar $g(\tau) \equiv M^2$ en la proposición anterior).

I.4.2.- Estimaciones de integrales retardadas de segundo orden.

I.4.2.1.- De igual modo que en el caso anterior, McShane establece a partir del teorema (I.3.7.1) la siguiente estimación para integrales retardadas de segundo orden (v.McShane [10]):

COROLARIO:

"Bajo las hipótesis del teorema (I.3.7.1), se tiene que

$$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)dz^2(t,\omega)\right\|_1 \leq K\int_a^b \|f(t,\omega)\|_1 dt \text{ ".}$$

I.4.2.2.- Como ya hemos indicado anteriormente, este resultado no es útil para el estudio de las ecuaciones integrales estocásticas, que se realiza en u primer paso mediante la L_2-norma.

La siguiente proposición, establecida por McShane [10], proporciona una estimación en L_2-norma de la integral de segundo orden, bajo condiciones similares a las de la proposición (I.4.1.2), con una restricción adicional sobre los integradores.

PROPOSICION:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \varepsilon Z_F^4$ y f F-medible. Supongamos que -- existe la integral estocástica retardada

$$\int_a^b f dz^1 dz^2$$

y que existe la integral de Riemann, o de Cauchy, o de McShane ordinaria

$$\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt$$

Entonces, se puede establecer la siguiente estimación:

$$\|\int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)dz^2(t,\omega)\| \leq C\{\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt\}^{1/2} \text{''}.$$

I.4.2.3.- Podemos extender la proposición anterior a la siguiente

PROPOSICION: (v.Angulo [2])

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \varepsilon Z_F^4$ y f F-medible. Supongamos que existe la integral estocástica retardada

$$\int_a^b f dz^1 dz^2$$

y que existe alguna función real $g(\tau)$ definida sobre T integrable en el sentido de Riemann, de Cauchy o de McShane (ordinarios), tal que

$$\|f(\tau,\omega)\|^2 \leq g(\tau) \qquad \forall \tau \varepsilon T$$

Entonces

$$\|\int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)dz^2(t,\omega)\| \leq C\{\int_a^b g(t)dt\}^{1/2} \text{''}.$$

Demostración:

La prueba es similar a la de la proposición (I.4.1.3).

Sea $\{\pi(n)\}_{n\varepsilon N}$ una sucesión de particiones de Cauchy de [a,b] sobre T tales que $eng(\pi)$ tienda a 0 cuando n tiende a ∞.

Puesto que

$$S(\pi(n);f;z^1,z^2)(\omega) \xrightarrow{P} \int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)dz^2(t,\omega)$$

cuando n tiende a ∞, el lema (I.4.1.2) asegura que

$$\|\int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)dz^2(t,\omega)\| \leq \lim\inf \|S(\pi(n);f;z^1,z^2)\| \tag{6}$$

El lema (I.3.5.3) permite afirmar que

$$\|S(\pi(n);f;z^1,z^2)\| \leq C\{S(\pi(n);\|f\|^2;t\}^{1/2} \tag{7}$$

Es inmediato que

(8) $$S(\pi(n);\|f\|^2;t)\leq S(\pi(n);g;t)$$

Por último, podemos escribir

(9) $$\liminf S(\pi(n);g;t)=\lim S(\pi(n);g;t)=\int_a^b g(t)dt$$

De (6), (7), (8) y (9) se desprende que

$$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)dz^2(t,\omega)\right\|\leq C\left\{\int_a^b g(t)dt\right\}^{1/2}\ ..$$

I.4.2.4.- El resultado anterior se aplica de forma inmediata a procesos L_2-acotados:

<u>COROLARIO</u>:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1,z^2\in Z_F^4$ y f F-medible. Supongamos que -- existe la integral estocástica retardada

$$\int_a^b f dz^1 dz^2$$

y que f es L_2-acotado en T, siendo M una cota.

Entonces

$$\left\|\int_a^b f(t,\omega)dz^1(t,\omega)dz^2(t,\omega)\right\|\leq CM(b-a)^{1/2}\text{''}.$$

(La prueba es trivial: Basta tomar $g(\tau)\equiv M^2$ en la proposición anterior).

CAPITULO II: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION EN SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS DE McSHANE

II.0.- Introducción.

En este capítulo tratamos uno de los principales aspectos sobre los que se centra nuestro estudio: el problema de existencia y unicidad de solución en sistemas de ecuaciones integrales estocásticas del tipo

$$X^i(t,\omega) = \alpha^i(t,\omega) + \sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g_\rho^i(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega) +$$

$$+ \sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t h_{\rho\sigma}^i(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)$$

$$(i=1,\ldots n) \quad (\omega\in\Omega) \quad (t\in[a,b])$$

Con tal motivo, resulta necesario establecer previamente el concepto de integral retardada indefinida, es decir, con el extremo superior del dominio de integración variando en el intervalo [a,b], y estudiar ciertas propiedades de la misma de gran importancia posteriormente, aparte de su interés propio.

Al plantear el citado problema, hemos seguido la siguiente filosofía: si adoptamos un concepto generalizado de "condición inicial" α, en el sentido de "información inicial sobre la solución del sistema consistente en el valor de la misma en ausencia de perturbaciones externas", se trata de establecer la existencia y unicidad de solución admitiendo una cierta clase amplia de procesos que circunstancialmente puedan representar dicha información. Concretamente, nuestro propósito en este aspecto ha sido extender, por lo que a la condición inicial respecta, los casos previamente tratados por McShane [10] y Elworthy [4]. A tal efecto, como antes hemos señalado, hemos realizado también un amplio estudio previo acerca de determinadas propiedades de la integral retardada indefinida como proceso, estableciendo diversos resultados interesantes de gran importancia posterior, que extienden convenientemente los ya existentes.

Hemos estructurado el capítulo en seis apartados generales, de los cuales los cuatro primeros se refieren a la integral retardada indefinida y los dos últimos a sistemas de ecuaciones integrales estocásticas.

En el primero introducimos el concepto de integral retardada indefinida, y estudiamos su carácter de proceso adaptado (salvo equivalencia) a cualquier filtración a la que lo sean las funciones que intervienen en ella (integradores e integrando).

En el segundo, vemos por una parte cómo el posible carácter de P-continuidad de los integradores se transmite a la integral indefinida. Por otra, aplicamos a tal proceso conocidos teoremas de separabilidad y medibilidad, particularizando los resultados obtenidos en este apartado y el anterior a los casos de mayor interés para nuestro estudio, es decir, las integrales retardadas de primer y de segundo orden (observamos también su extensión a integrales de orden superior), cuando se consideran las hipótesis usuales sobre el (los) integrador(es). El concepto de separabilidad tendrá gran importancia posteriormente, fundamentalmente en el apartado siguiente y en el último del capítulo III.

En el tercer apartado, desarrollamos diversos resultados sobre acotabilidad muestral en integrales retardadas indefinidas. Aparte de su -- evidente interés, tales resultados tendrán una enorme importancia tanto en el resto de este capítulo como a lo largo de todo el capítulo III. Estudiamos la relación existente entre la separabilidad y la acotabilidad muestral, y, a través de una conocida desigualdad de submartingalas, establecemos la acotabilidad muestral de los integradores de McShane, cuando dichos procesos se eligen separables. Por otra parte, a partir de un importante lema establecido por Elworthy [4], extendemos al caso separable cierta desigualdad, de excepcional importancia, que éste demuestra para el caso de integradores muestralmente continuos, y probamos a partir de ella la acotabilidad muestral (salvo equivalencia) en integrales retardadas indefinidas cuando se consideran las hipótesis usuales sobre integradores e integrando. (Como antes, desarrollamos el estudio en particular para integrales retardadas de primer y segundo orden, y observamos cómo el mismo se extiende fácilmente a los demás casos). La referida desigualdad es la base fundamental para el estudio que desarrollamos en el último apartado del capítulo III.

En el cuarto apartado, partiendo de determinados resultados establecidos por Elworthy [4] y del procedimiento seguido por McShane [10] para probar la existencia de integrales retardadas de primer orden, estudiamos la continuidad muestral en integrales retardadas, considerando de nuevo las hipótesis usuales sobre integradores e integrando y adicionalmente la de que los primeros sean muestralmente continuos. (Como en apartados anteriores, desarrollamos el estudio en especial para integrales retardadas de primer y segundo orden). Previamente, estudiamos la relación existente entre determinadas clases de procesos muestralmente continuos y las clases de procesos que hemos introducido en el capítulo I (relativas al integrando) y que manejamos usualmente.

Todos los resultados desarrollados y expuestos en los apartados anteriormente referidos tienen como finalidad principal posibilitar el estudio de los resultados concretos que consideramos en este trabajo relativos a sistemas de ecuaciones integrales estocásticas, que abordamos en los siguientes y en el capítulo III.

En el quinto apartado, introducimos el concepto de "solución" asociada a un sistema de ecuaciones integrales estocásticas del tipo considerado, y estudiamos algunas propiedades elementales de la misma que serán utilizadas posteriormente.

Finalmente, en el sexto y último apartado exponemos los resultados de mayor relevancia en este capítulo: los teoremas de existencia y unicidad de solución en sistemas de ecuaciones integrales estocásticas. Como en parte ya hemos indicado anteriormente, nuestro objetivo fundamental en este aspecto ha sido extender los resultados particulares obtenidos por McShane [10] y Elworthy [4] sobre el mismo. Por lo que respecta al primero, hemos mantenido prácticamente (incluso hemos debilitado algo) las mismas hipótesis sobre las funciones que intervienen como integrando en las integrales que aparecen en la expresión formal del tipo de sistemas considerado, mientras que nuestro estudio supone una extensión en lo que respecta a la condición inicial, que en lugar de restringirse a una variable aleatoria es un proceso dentro de ciertas clases, según los distintos casos considerados, y también a los integradores, que no han de ser necesariamente continuos muestralmente, aunque también contemplamos éste como un caso particular de especial interés, aprovechando los resul tados obtenidos en el apartado cuarto. Por otra parte, aquí abordamos el problema planteado basándonos en el método de Picard, con el fin de obtener un tratamiento útil para consideraciones porteriores (a diferencia de McShane que sigue a tal efecto el método de aproximación de Cauchy-Peano). Por lo que se refiere a los resultados proporcionados por Elworthy, si bien responden en parte a los objetivos anteriores, están referidos al caso más restrictivo de los que contemplamos, en cuanto a las condiciones a imponer sobre el proceso condición inicial (además, Elworthy supone como condición la no existencia de puntos de L_2-discontinuidad). Por otra parte, las hipótesis de Elworthy sobre cada integrando son, en un sentido general , más fuertes que las de McShane y, por tanto, que las nuestras.

En líneas generales, el desarrollo que hemos seguido al tratar el problema se concreta en los siguientes puntos:

- Tratamiento del caso fundamental por el método de Picard (caso A)
- Extensión a los demás casos considerados mediante la aplicación del método de truncamiento y del lema de Gronwall (casos B y C)
- Estudio del caso especial en que los integradores y la condición inicial son procesos muestralmente continuos (casos A-Reg, B-Reg y C-Reg)
- Consideraciones particulares sobre el caso en que la condición inicial es una variable aleatoria

El planteamiento y estudio del problema en los diferentes casos considerados se ha hecho en función de la progresión en la obtención de resultados, que, si bien conlleva cierta inclusividad en los mismos, supone evidentemente mayor claridad en la exposición desde el punto de vista de la realización de la investigación.

II.1.- La integral retardada indefinida. $\bar{F}$-medibilidad.

II.1.1.- Definición de la integral.

II.1.1.1.- Sea (Ω,A,P) un espacio de probabilidad, y $[a,b]$ un intervalo cerrado contenido en $T\subset R$. Sea f un proceso R-valuado definido sobre T y $z^1,\dots z^q$ procesos R-valuados definidos sobre $[a,b]$.

DEFINICION:

"Sea f integrable retardadamente respecto de $(z^1,\dots z^q)$ sobre $[a.b]$. Se llama integral retardada indefinida de f respecto de $(z^1,\dots z^q)$ al proceso J R-valuado definido salvo equivalencia, para cada $t\varepsilon[a,b]$, por

$$J(t,\omega)=\int_a^{t^-} f(s,\omega)dz^1(s,\omega)\dots dz^q(s,\omega)".$$

Cada proceso que satisfaga la definición anterior (cuyo contenido está justificado por la propiedad (I.2.5)) será una versión de la integral retardada indefinida. Así, ésta es un proceso definido salvo equivalencia.

II.1.1.2.- Versiones generalizadas:

Como observamos en el capítulo anterior, realizamos todo nuestro estudio con procesos R-valuados (o R^n-valuados). Sin embargo, ocasionalmente consideraremos procesos $\bar{R}$ (o $\bar{R}^n$)-valuados, es decir, que podrán tomar los valores $+\infty$ ó $-\infty$, aunque para cada t esto ocurrirá como máximo en un subconjunto nulo de Ω (es decir, se tratará de procesos finitos c.s. para cada t).

En lo que concierne a la integral retardada indefinida, llamaremos versión generalizada de la integral a cualquier proceso $\bar{R}$-valuado finito c.s. para cada t, que sea equivalente a cualquier versión ordinaria de la misma (esto equivale a generalizar los límites en probabilidad a procesos $\bar{R}$-valuados finitos c.s.).

El concepto de versión generalizada no tiene relevancia alguna en nuestro estudio, y sólo sirve como elemento de apoyo para el desarrollo de la -- teoría. No obstante, como también observamos en el capítulo I, el estudio -- completo se podría extender, con ciertas precauciones en lo formal ante posi bles indeterminaciones del tipo $(+\infty-\infty)$, considerando en general variables -- aleatorias y procesos finitos c.s. con valores en $\bar{R}$ (ó $\bar{R}^n$).

II.1.2.- $\bar{F}$-medibilidad.

En el caso en que los procesos que intervienen en una integral retardad satisfacen las hipótesis [H] y son F-medibles, veremos que podremos asegurar que la integral retardada indefinida correspondiente es F-medible salvo P-equivalencia. Puesto que P está definido sobre A, y cada $F_t \epsilon F$ no tiene que - contener necesariamente los elementos nulos en A, la integral retardada será $\bar{F}$-medible, siendo $\bar{F}$ una cierta extensión de F, como veremos en el punto si-- guiente.

Sin embargo, también veremos que bajo las hipótesis que consideramos -- usualmente, no existirá pérdida de generalidad en considerar $F \equiv \bar{F}$.

II.1.2.1.- Definiciones previas y notación:

Dado cualquier sub-σ-álgebra G de A, definimos el σ-álgebra completado $\bar{G} \subset A$ de G, del siguiente modo:

"$B \epsilon \bar{G}$ si y solo si $B \epsilon A$ y existe $B' \epsilon G$ tal que $P(B \Delta B')=0$"

$\bar{G}$ es el mínimo σ-álgebra que contiene a G y a todos los elementos P-nulos de A.

Podemos extender este concepto a filtraciones de (Ω,A):

Sea F una filtración del espacio medible (Ω,A):

$$F=\{F_\tau \ ; \ \tau \in T\}$$

Representamos mediante $\bar{F}$ a la filtración completada de F en A, del espacio medible (Ω,A), definida por:

$$\bar{F}=\{\bar{F}_\tau \ ; \ \tau \epsilon T\}$$

donde $\bar{F}_\tau$ es el σ-álgebra completado de F_τ en A.

II.1.2.2. La prueba del siguiente resultado es trivial

LEMA:

"Sea G un sub-σ-álgebra de A. Entonces, para cualquier variable aleatoria X L_1-integrable, se verifica que

$$E(X/\bar{G}) \equiv E(X/G) \qquad \text{c.s. } [\bar{G}]$$

(es decir, salvo un conjunto P-nulo en $\bar{G}$)."

II.1.2.3. Como consecuencia, establecemos la siguiente proposición:

PROPOSICION:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z \varepsilon Z_F^p$ (para algún p=2,4,...). Entonces $z \varepsilon Z_{\bar{F}}^p$."

Demostración:

Veámoslo para p=2 (la extensión a los demás casos es inmediata). Sea $z \varepsilon Z_p^2$.

Puesto que $F_t \varepsilon \bar{F}_t$, para cada $t \varepsilon [a,b]$, z es también $\bar{F}$-medible. Por otra - parte, sabemos que para algún K>0

$$|E(z(t,\omega)-z(s,\omega)/F_s)| \leq K(t-s)$$

c.s., cuando $a \leq s \leq t \leq b$.

Por el lema anterior, para cada s,t,

$$E(z(t,\omega)-z(s,\omega)/F_s) \equiv E(z(t,\omega)-z(s,\omega)/\bar{F}_s)$$

c.s. $[\bar{F}_s]$ (y, por tanto, c.s.). Así

$$|E(z(t,\omega)-z(s,\omega)/\bar{F}_s)| \leq K(t-s)$$

c.s., cuando $a \leq s \leq t \leq b$.

De igual modo se actúa para la desigualdad

$$E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]^2/F_s) \leq K(t-s)$$

(c.s., cuando $a \leq s \leq t \leq b$).

En definitiva, se tendrá que $z \varepsilon Z_{\bar{F}}^2$.

II.1.2.4.- Observación: A partir de la proposición anterior, y teniendo en -- cuenta que cualquier proceso F-medible es también $\bar{F}$-medible, deducimos que, sin pérdida de generalidad, podremos suponer en [H] una filtración F completa, (es decir, siendo $F \equiv \bar{F}$), lo que haremos cuando por simplicidad esto sea conveniente.

II.1.2.5.- En cualquier caso, podemos establecer el siguiente resultado

PROPOSICION

"Sean las hipótesis [H], y sean $f, z^1, \ldots z^q$ procesos F-medibles. Supongamos que existe la integral retardada

$$\int_a^b f dz^1 \ldots dz^q$$

Entonces, cualquier versión $J(t,\omega)$ de la correspondiente integral indefinida es un proceso $\bar{F}$-medible".

Demostración:

La prueba es trivial. Basta observar que para cada $t\varepsilon[a,b]$ y cada partición $\pi_t \varepsilon B([a,t])$, la suma

$$S(\pi_t; f; z^1, \ldots z^q)$$

es una variable aleatoria F_t-medible. Puesto que para cada t, $J(t,.)$ es en-- tonces el límite en probabilidad P de variables aleatorias F_t-medibles, es - una variable aleatoria $\bar{F}_t$-medible.

II.2.- P-continuidad. Separabilidad. Medibilidad.

En este apartado vemos cómo la P-continuidad de los integradores en algún punto de $[a,b]$, se transmite a la integral retardada indefinida.

Aplicamos también conocidos teorema de separabilidad y medibilidad a la integral indefinida. El aspecto de separabilidad tendrá gran importancia posteriormente, en particular en el apartado (II.3).

II.2.1.- Definiciones previas:

Sea f un proceso $\bar{R}$-valuado definido sobre $T\subset R$:

."f es separable si existe un subconjunto numerable S de T y un subconjunto P-nulo N de Ω tales que si $\omega\varepsilon\Omega-N$, para todo $t\varepsilon T$ se verifica que

$$f(t,\omega)\varepsilon\overline{f(I\cap S,\omega)}$$

para cada intervalo abierto $I\subset R$ que contenga a t". (S se denomina conjunto "separante" o "separador").

."f es medible si considerado como función de $T\times\Omega$ en $\bar{R}$, es medible respecto al σ-álgebra producto $B\times A$, siendo B el σ-álgebra de subconjuntos de Borel de T".

II.2.2.- Lemas de separabilidad y medibilidad:

Los siguientes resultados son particularizaciones al caso real de teoremas establecidos por Gihman-Skorohod [6] (en realidad, pueden encontrarse en la mayor parte de los tratados sobre fundamentos de la Teoría de la Probabilidad, aunque su origen se debe a Doob).

II.2.2.1.- El lema que sigue se conoce como "teorema de Separabilidad":

LEMA:

"Sea f cualquier proceso definido sobre $[a,b]$ y R-valuado. Entonces --- existe un proceso f^* $\bar{R}$-valuado equivalente a f que es separable".

NOTA: Es importante tener en cuenta que f^* se obtiene en la demostración de este resultado por construcción, fijando previamente un conjunto separante D cualquiera, de forma que para cada $t\varepsilon D$ se verifica que

$f^{*}(t,.)\equiv f(t,.)$.

II.2.2.2.- En el caso en que f es un proceso P-continuo en $[a,b]$ y separable, cualquier subconjunto numerable denso en $[a,b]$ sirve como conjunto separante. El siguiente lema, conocido como "teorema de medibilidad", completa el anterior en el caso en que el proceso f es P-continuo en c.t.p. de $[a,b]$:

LEMA:

"Sea f un proceso definido sobre $[a,b]$, R-valuado y P-continuo en c.t.p. de $[a,b]$. Entonces, existe un proceso f^{*} $\bar{R}$-valuado equivalente a f que es separable y medible".

NOTA: La nota en el lema (II.2.2.1) es aplicable también a este resultado.

II.2.3.- P-continuidad:

El siguiente resultado es establecido por McShane [10]; hemos extendido el apartado b) en el sentido de que aquí exigimos la P-continuidad de los integradores en c.t.p. de $[a,b]$, y no en todo punto como hace McShane:

PROPOSICION:

"Sean f y $(z^1,z^2,\ldots z^q)$ procesos R-valuados definidos como es usual sobre T y $[a,b]$, respectivamente. Supongamos que existe la integral retardada

$$\int_a^b f dz^1 \ldots dz^q$$

y que para todo t_0 perteneciente a algún subconjunto S de $[a,b]$ se verifica que

$$\prod_{k=1}^{q} [z^k(t,\omega)-z^k(t_0,\omega)] \xrightarrow{P} 0$$

cuando $t\to t_0$ en $[a,b]$. Entonces

a) Cualquier versión F de la correspondiente integral indefinida es P-continua en S.

b) Si $[a,b]-S$ tiene medida nula, existe una versión generalizada F^{*} de la integral indefinida que es separable y medible".

(La prueba de a) es sugerida por McShane [10], y b) es consecuencia inmediata del lema (II.2.2.2)).

II.2.4.- Aplicación a integrales retardadas de primer y segundo orden:

Al estudiar ecuaciones integrales estocásticas, partiremos siempre de hipótesis que implican las supuestas en los resultados establecidos en los apartados anteriores. Resumimos las conclusiones obtenidas en dichos resultados en los siguientes corolarios, relativos a integrales de primer y segundo orden, respectivamente:

COROLARIO I:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z \in Z_F^2$ y f F-medible. Supongamos que existe la integral retardada

$$\int_a^b f dz$$

Entonces:

a) Cualquier versión de la correspondiente integral indefinida es P-continua en [a,b] y $\bar{F}$-medible

b) Existe una versión generalizada de la integral indefinida que es separable y medible".

Demostración:

La $\bar{F}$-medibilidad es consecuencia inmediata de la proposición (II.1.2.5).

Para probar el resto, basta ver que z es P-continuo en todo punto de [a,b], por la proposición (II.2.3). Pero aún más es cierto. En efecto, z es L_2-continuo en todo punto de [a,b], puesto que dados $s,t \in [a,b]$, $s \leq t$, se tiene que

$$\|z(t,\omega)-z(s,\omega)\|^2 = E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]^2) =$$

$$= E\{E([z(t,\omega)-z(s,\omega)]^2/F_s)\} \leq K(t-s)$$

y el último término tiende a 0 cuando $s \to t$.

COROLARIO II:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \in Z_F^2$ y f F-medible. Supongamos que existe la integral retardada

$$\int_a^b f dz^1 dz^2$$

Entonces:

a) Cualquier versión de la correspondiente integral indefinida es P-continua en $[a,b]$ y $\bar{F}$-medible.

b) Existe una versión generalizada de la integral indefinida que es separable y medible."

Demostración:

Como en el caso anterior, sólo es necesario demostrar aquí que para cualquier $t_0 \in [a,b]$

$$[z^1(t,\omega)-z^1(t_0,\omega)][z^2(t,\omega)-z^2(t_0,\omega)] \xrightarrow{P} 0$$

cuando $t \to t_0$. (El resto es consecuencia de las proposiciones (II.1.2.5) y (II.2.3)).

Sea $\varepsilon > 0$. Por las desigualdades de Tchebichev y de Hölder (con $r=s=2$) tenemos que

$$P\{|[z^1(t,\omega)-z^1(t_0,\omega)][z^2(t,\omega)-z^2(t_0,\omega)]| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \frac{E[|z^1(t,\omega)-z^1(t_0,\omega)|.|z^2(t,\omega)-z^2(t_0,\omega)|]}{\varepsilon}$$

$$\leq \frac{\{E([z^1(t,\omega)-z^1(t_0,\omega)]^2)\}^{\frac{1}{2}}\{E([z^2(t,\omega)-z^2(t_0,\omega)])\}^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}$$

Puesto que z^1 y z^2 son L_2-continuos en todo punto de $[a,b]$, según hemos visto en la demostración del corolario anterior, el último miembro en las desigualdades anteriores tiende a 0 cuando $t \to t_0$, lo que concluye la demostración.

NOTA: Para <u>integrales de orden superior a 2</u>, se podrían enunciar resultados análogos a los anteriores. Así, si consideramos el caso de q integradores $(z^1,\ldots z^q)$, teniendo en cuenta que al definir las clases Z_F^2, Z_F^4 sugerimos una extensión de la definición a clases Z_F^{2p} $(p=1,2,\ldots)$, bastaría exigir (junto a las demás hipótesis), que los integradores $z^1,\ldots z^q$ perteneciesen a la clase Z_F^q ó Z_F^{q+1}, según sea q par o impar, para obtener los mismos resultados. En efecto, para probarlo bastará aplicar la <u>desigualdad de Hölder</u> en el caso general:

Si $X_1,\ldots X_q$ $(q \geq 1)$ son variables aleatoria, entonces se verifica que

$$E(|\prod_{k=1}^{q} X_k|) \leq \prod_{k=1}^{q} \{E(|X_k|^{r_k})\}^{1/r_k}$$

donde $r_1,\ldots r_q$ son mayores que 0 y $\sum_{k=1}^{q} 1/r_k=1$

(suponiendo que existan las esperanzas que aparecen en las desigualdades).

II.3. Acotabilidad muestral.

En este apartado establecemos diversos resultados sobre acotabilidad muestral en integrales indefinidas, que tendrán una importancia fundamental en el estudio de sistemas de ecuaciones integrales estocásticas, en este capítulo y el siguiente.

En efecto, McShane [10] estudia al respecto únicamente el caso en que los integradores son procesos muestralmente continuos y la condición inicial es una v.a.. Este es un caso particular en nuestro estudio. Por otra parte, Elworthy [4] estudia el caso general en cuanto a los integradores, con condición inicial en H_F^2 y sin puntos de L_2-discontinuidad.

Precisamente, uno de nuestros principales objetivos ha sido generalizar la condición inicial en los sistemas que planteamos en el apartado (II.5), demostrando la existencia y unicidad de solución para una amplia clase de sistemas, en lo que se refiere a la condición inicial considerada. Tanto en la generalización que hemos realizado en cuanto a la clase de procesos a intervenir como condición inicial, como en la delimitación conveniente de la clase a que pertenece la solución y en la que se asegura la unicidad, juega un papel fundamental la acotabilidad muestral, principalmente a través de los resultados que exponemos en este apartado.

Por una parte, demostramos que todo integrador de McShane tiene al menos una versión R-valuada separable y con aplicación global acotada.

Por otra, y a partir de un lema fundamental establecido por Elworthy [4] (análogo al "lema de interferencia " (I.3.5.1), pero aplicable a la integral indefinida, en un sentido más conveniente para el estudio de la acotabilidad y continuidad muestrales en la misma), extendemos satisfactoriamente al caso de integradores cualesquiera(apoyándonos en la separabilidad) los resultados establecidos por Elworthy para el caso de integradores muestralmente continuos (que estudiamos en el apartado (II.4).

II.3.1.- Definiciones previas.

En el apartado (I.3.1) hemos introducido el concepto de acotabilidad muestral (se extiende inmediatamente a procesos $\overline{R}$-valuados)

En este punto nos limitaremos a recordar la definición de submartingalas y una de las desigualdades fundamentales para submartingalas, que aplicaremos en el punto (II.3.3):

."Sea X un proceso $\bar{R}$-valuado definido sobre T y F una filtración del espacio medible (Ω,A). X es una <u>submartingala relativa a F</u> sii

a) X es F-medible

b) $E(X^+(\tau,\omega))<\infty \qquad , \forall \tau \in T$

c) Para cada $s,t\varepsilon T$ con $s\leq t$, c.s.

$$E(X(t,\omega)/F_s)\geq X(s,\omega)".$$

.<u>Desigualdad</u>: "Si X es una submartingala sobre un intervalo $[a,b]$, y D es un subconjunto numerable denso de $[a,b]$, entonces para cada $C\varepsilon R^+$

$$P[\omega: \sup_{t\varepsilon D} X(t,\omega)>C)\leq \frac{E(X^+(b,\omega))}{C} ".$$

II.3.2.- <u>Separabilidad y acotabilidad muestral</u>.

En el caso de procesos con aplicación global acotada c.s., podremos asegurar la existencia de una versión separable sin necesidad de compactificar el espacio final; la separabilidad de cualquier versión implicará la acotabilidad muestral de la misma.

<u>PROPOSICION</u>

"Sea f un proceso R-valuado y definido sobre $[a,b]$ con aplicación global acotada c,s,. Entonces, existe un proceso f^* R-valuado y definido sobre $[a,b]$ y separable equivalente a f. Además, cualquier versión separable de f R (ó $\bar{R}$)-valuada tendrá aplicación global acotada c.s.".

Demostración:

Sea f_1 una versión de f $\bar{R}$-valuada y separable (por el lema (II.2.2.1)) y D un conjunto separante para f_1.

Sea $B(\omega)$ una v.a. R-valuada finita c.s. que acota muestralmente a f. Entonces,

$$\sup_{[a,b]} |f_1(t,.)| \equiv \sup_D | f_1(t,.)| \underset{c.s}{\equiv} \sup_D | f(t,.)|\leq B(.)$$

Sea

$$\Omega_0=\{\omega:\ \sup|f_1(t,\omega)|<\infty\}$$

Es inmediato que $P(\Omega_0)=1$. Sea el proceso f^* cuyas trayectorias vienen definidas por

$$f^*(.,\omega)\equiv\begin{cases} f_1(.,\omega) & \text{si } \omega\in\Omega_0 \\ 0 & \text{si } \omega\notin\Omega_0 \end{cases}$$

f^* es, pues, equivalente a f, R-valuado, y tiene aplicación global acotada.

Si g es cualquier otra versión separable de f, y D es un conjunto separante para g,

$$\sup_{[a,b]}|g(t,.)|\equiv\sup_{D}|g(t,.)|\underset{c.s.}{\equiv}\sup_{D}|f(t,.)|$$

y el término de la derecha, por hipótesis, es una v.a. finita c.s.. Así, g tiene aplicación global acotada c.s.

II.3.3.-<u>Acotabilidad muestral en integradores de McShane</u>.

Demostramos en este punto que si z es un integrador de McShane, entonces el proceso <u>$\sigma[z(t,\omega)-z(a,\omega)]+Kt$, con $\sigma=1$ ó -1, es una submartingala</u>. - Esta idea (con $\sigma=1$) fue sugerida por Protter [14] con otros fines. Nosotros la utilizamos aquí para demostrar que cualquier integrador de McShane tiene una versión R-valuada, separable y con aplicación global acotada.

<u>PROPOSICION</u>:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\in Z_F^2$. Entonces, existe una versión z^* de z R-valuada que es separable y tiene aplicación global acotada".

Demostración:

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\bar{F}\equiv F$ (por la proposición (II.1.2.3) y que $z(a,\omega)\equiv 0$. Por ser $z\in Z_F^2$, se tiene que

$$|E(z(t,\omega)-z(s,\omega)/F_s)|\leq K(t-s)$$

c.s., cuando $a\leq s\leq t\leq b$. Podemos escribir, a partir de la desigualdad anterior, con $\sigma=1$ ó -1,

$$-K(t-s)\leq\sigma E(z(t,\omega)-z(s,\omega)/F_s)$$

o bien

$$\sigma z(s,\omega)+Ks \leq E(\sigma z(t,\omega)+Kt/F_s)$$

Por otra parte, $E[(\sigma z(t,\omega))^+]<\infty$, para cada $t\varepsilon[a,b]$ (puesto que de hecho z es L_2-acotado en $[a,b]$). Es decir, $\sigma z(t,\omega)+Kt$ es una submartingala respecto a F. Sea z' una versión separable ($\bar{R}$-valuada) de z (por el lema (II.2.2.1). Entonces $\sigma z'(t,\omega)+Kt$ es una submartingala separable. Por tanto, con c>0

$$P[\omega: \sup_{[a,b]} [\sigma z'(t,\omega)+Kt] > c] \leq \frac{E[(\sigma z'(t,\omega))^+]+Kb}{c} <\infty$$

En definitiva, para cada $\sigma=1, -1$

$$\sup_{[a,b]} [\sigma z'(t,.)+Kt] \underset{c.s}{<} \infty$$

es decir

$$\sup_{[a,b]} [\sigma z'(t,.)] \underset{c.s}{<} \infty$$

Sea el conjunto

$$\Omega_0=\{\omega: \sup_{[a,b]} |z'(t,\omega)|<\infty\}$$

Entonces, $P(\Omega_0)=1$. Definimos el proceso z" por

$$z''(.,\omega) \equiv \begin{cases} z'(.,\omega) & \text{si} \quad \omega\varepsilon\Omega_0 \\ 0 & \text{si} \quad \omega\not\varepsilon\Omega_0 \end{cases}$$

z" es, pues, equivalente a z, R-valuado, separable y tiene aplicación global acotada, según se desprende de lo anterior.

II.3.4.- Lema fundamental.

El siguiente lema está tomado de Elworthy [4], quien lo aplica al estudio de la continuidad muestral de integrales retardadas indefinidas (aquí - planteamos la versión correspondiente al caso real). Nosotros lo aplicamos también al estudio de la acotabilidad muestral de integrales retardadas indefinidas, del modo que exponemos en los restantes puntos del apartado (II.3).

LEMA:

"Sea (Ω,A,P) un espacio de probabilidad y sean $F_1 \dots F_m \; F_{m+1}$ sub-σ-álgebras de A. Sean $u_1,\dots u_m$ y $\Delta_1,\dots \Delta_m$ variables aleatorias tales que para cada $j\in\{1,...m\}$ u_j es F_j-medible y Δ_j es F_{j+1}-medible. Supongamos además que existen constantes C_j, D_j verificándose que

$$|E(\Delta_j/F_j)| \leq C_j$$

$$E(\Delta_j^2/F_j) \leq D_j \qquad (j=1,...m)$$

casi seguramente.

Entonces, para cualquier $\alpha>0$

$$P[\sup_{1\leq k\leq m} |\sum_{j=1}^{k} u_j\Delta_j|>\alpha]<\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{m}C_k||u_k||+\frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=1}^{m}D_k||u_k||^2".$$

(La demostración puede verse en la referencia citada).

II.3.5.- Acotabilidad muestral en integrales retardadas de primer orden.

En este apartado aplicamos la desigualdad establecida en el lema --- (II.3.4) para demostrar la acotabilidad muestral de integrales retardadas indefinidas de primer orden. Primero lo hacemos en el caso en que el integrando es un proceso simple, y luego en el caso general.

II.3.5.1.- Sea π una partición de $[a,b]$ (sobre T):

$$\pi=(t_1,...t_{m+1};\ \tau_1,...\tau_m)$$

Para cada $s\in[a,b]$, notaremos mediante π_s a la subpartición, de $[a,s]$,

$$\pi_s=(t_1,...t_{r(s)},\ s;\ \tau_1,...\tau_{r(s)})$$

donde $r(s)$ es tal que $t_{r(s)} \leq s \leq t_{r(s)+1}$.

LEMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\in Z_F^2$ y separable. Sea una partición $\pi=(t_1,...t_{m+1};\tau_1,...\tau_m)$ de $[a,b]$ (sobre T) y sean $u_1,...u_m$ variables aleatorias tales que para cada $j\in\{1,...m\}$ u_j es F_{t_j}-medible y $||u_j||<\infty$. Definimos la función

$$S^1:[a,b]\times\Omega \longrightarrow R$$

del siguiente modo: para cada $t\in[a,b]$, $\omega\in\Omega$

$$S^1(t,\omega)=\sum_{j=1}^{r(s)} u_j(\omega)\Delta_j z(\omega)+u_{r(s)}(\omega)(z(s,\omega)-z(t_{r(s)},\omega))$$

Entonces, para cualquier $\alpha>0$

$$P[\sup_{[a,b]}|S^1(t,\omega)|>\alpha] \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t\|u_j\|+\frac{1}{\alpha^2}\sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t\|u_j\|^2 \text{ ".}$$

Demostración:

Para cada $n\in N$, sea el conjunto de puntos

$$\{s_j^k:\ j=1,\dots m;\quad k=1,\dots n\}$$

tal que para cada j el conjunto

$$\{s_j^k:\quad k=1,\dots n\}$$

constituye una división de $[t_j,t_{j+1}]$ en n subintervalos homogéneos de tamaño $\frac{1}{n}\Delta_j t$.

Entonces

$$|S^1(s_{j_o}^{k_o})|=|\sum_{j=1}^{j_o-1}\sum_{k=1}^{n} u_j(z(s_j^{k+1})-z(s_j^k))+\sum_{k=1}^{k_o-1} u_{j_o}(z(s_{j_o}^{k+1})-$$
$$-z(s_{j_o}^k))|$$

con $1<k_o\leq m+1$, $1\leq j_o\leq m$ (se sobreentiende el argumento ω).

Por el lema (II.3.4), con $C_j^k = D_j^k = K(s_j^{k+1}-s_j^k)$ y $\Delta_j^k=z(s_j^{k+1})-z(s_j^k)$,

(para cada j y cada k)

$$P[\sup_{j,k}|S^1(s_j^k)|>\alpha] \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t\|u_j\|+\frac{1}{\alpha^2}\sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t\|u_j\|^2$$

Tomando límites cuando $n\to\infty$, y teniendo en cuenta que S^1 es un proceso separable, y admite cualquier subconjunto denso en $[a,b]$ por ser P-continuo (de hecho, es la integral indefinida de un proceso simple), se tiene el resultado deseado.

II.3.5.2.- A partir del lema anterior, establecemos el siguiente resultado:

<u>PROPOSICION</u>:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\varepsilon Z_F^2$ y separable, y f F-medible y tal que las funciones $\|f(\cdot,\omega)\|^2$ y $\|f(\cdot,\omega)\|$ son integrables (en el sentido ordinario de Riemann, de McShane o, en general, de Cauchy).

Sea J una versión separable de la integral retardada indefinida

$$\int_a^t f dz \quad (t \in [a,b]) \qquad \text{(suponemos que existe)}$$

Entonces, para cualquier $\alpha>0$

$$P[\sup_{[a,b]}|J(t,\omega)|>\alpha] \leq \frac{K}{\alpha}\int_a^b \|f(t,\omega)\|dt + \frac{K}{\alpha^2}\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt."$$

NOTA: En realidad, una versión J separable existirá siempre (por (II.2.2.1)) aunque quizá, en principio, como versión generalizada. No obstante, como veremos en el teorema (II.3.5.3.), existirá en particular como versión ordinaria de la integral.

Demostración:

Sea D cualquier subconjunto numerable denso en $[a,b]$:

$$D = \{s_1, s_2, \ldots\}$$

y sea, para cada $n \in N$

$$D_n = \{s_1, \ldots s_n\}$$

Definimos, para cada $\alpha>0$, los conjuntos

$$B_n(\alpha) = \{\omega : \sup_{D_n}|J(s,\omega)|>\alpha\} \qquad (n \in N)$$

$$B(\alpha) = \{\omega : \sup_{D}|J(s,\omega)|>\alpha\}$$

Es inmediato que $B_n(\alpha)\uparrow B(\alpha)$ y, por tanto,

$$P[B_n(\alpha)]\uparrow P[B(\alpha)]$$

Por otra parte, dado cualquier $\varepsilon>0$ podemos encontrar una partición $\pi \in B([a,b])$ tal que

$$P[\sup_{D_n}|J(s,\omega) - S(\pi_s;f;z)(\omega)| > \varepsilon] < \varepsilon$$

(por ser D_n finito). En particular, podemos elegir π de Cauchy.

Así, si suponemos que $\alpha>\varepsilon>0$, podemos escribir

$$P[\sup_{D_n}|J(s,\omega)|>\alpha] \leq$$

$$\leq P[\sup_{D_n}(|J(s,\omega)-S(\pi_s;f;z)(\omega)| + |S(\pi_s;f;z)(\omega)|)>\alpha] \leq$$

$$\leq P[\sup_{D_n}(|J(s,\omega)-S(\pi_s;f;z)(\omega)|>\varepsilon]+P[\sup_{D_n}|S(\pi_s;f;z)(\omega)|>\alpha-\varepsilon]\leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{K}{\alpha-\varepsilon}\sum_{j=1}^{m}\Delta_j t\|f(\tau_j,\omega)\| + \frac{K}{(\alpha-\varepsilon)^2}\sum_{j=1}^{m}\Delta_j t\|f(\tau_j,\omega)\|^2$$

(la última desigualdad, por el lema (II.3.5.1)).

Haciendo tender ε a 0 (y, por tanto, eng(π) a 0), n a ∞, y considerando que J es separable, se obtiene la desigualdad del enunciado.

NOTA: El resultado anterior será válido también en el caso en que J sea cualquier versión generalizada separable de la integral.

II.3.5.3.- Establecemos a partir de lo anterior el siguiente teorema sobre acotabilidad muestral de integrales indefinidas de primer orden:

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\varepsilon Z_F^2$ y f F-medible tal que $\|f(.,\omega)\|^2$ y $\|f(.,\omega)\|$ son funciones integrables (en el sentido ordinario de Riemann, de McShane o, en general, de Cauchy). Entonces:

a) Existe una versión de la integral retardada indefinida

$$\int_a^t f dz \qquad (t\varepsilon[a,b]) \qquad\qquad \text{(si existe la integral)}$$

que es separable y pertenece a $H_{\bar{F}}^{*}$ (sobre [a,b])

b) Cualquier versión separable de la integral pertenece a $H_{\bar{F}}^{*}$."

Demostración:

La P-continuidad y $\bar{F}$-medibilidad están aseguradas por el corolario (II.2.4-I).

Por otra parte, podemos suponer sin pérdida de generalidad que z es separable y $F \equiv \bar{F}$, por las proposiciones (II.3.3) y (II.1.2.3), respectivamente.

Sea J_1 una versión (generalizada) separable de la integral. De la proposición (II.3.5.2) se desprende que

$$\sup_{[a,b]} |J_1(t,\omega)| < \infty \qquad \text{c.s.}$$

y, por tanto, J_1 tiene aplicación global acotada c.s.. Sea el conjunto

$$\Omega_0 = \{\omega : \sup_{[a,b]} |J_1(t,\omega)| < \infty\}$$

y sea J el proceso definido por

$$J(\cdot,\omega) \equiv \begin{cases} J_1(\cdot,\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_0 \\ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega_0 \end{cases}$$

J es R-valuado, es separable y tiene aplicación global acotada, como -- puede observarse por la forma en que se ha definido. Esto demuestra a). Por otra parte, b) es consecuencia inmediata de la proposición (II.3.2).

NOTA: El teorema anterior se aplica inmediatamente al caso en que $f \in H_F^2$. Este será el que nos interesará fundamentalmente en el estudio de las ecuaciones integrales estocásticas, puesto que en casos más generales el - método de truncamiento nos remitirá al anterior. No obstante, podríamos extender fácilmente el teorema anterior al caso en que, por ejemplo, $f \in H_F^{2*}$, aplicando dicho método aquí directamente (ver procedimiento usado en la demostración del teorema de continuidad muestral ---- (II.4.4.)).

II.3.6.- <u>Acotabilidad muestral en integrales retardadas de segundo orden</u>.

El desarrollo en este apartado es exactamente igual al del apartado -- (II.3.5); es decir, partiendo del lema fundamental (II.3.4), establecemos - desigualdades similares a las obtenidas en el caso anterior, ahora para integrales retardadas indefinidas de segundo orden, primero con integrando -- simple y después en el caso general, que nos permiten concluir la existencia de versiones muestralmente acotadas bajo condiciones similares a las -- del teorema (II.3.5.3).

II.3.6.1.- El siguiente lema es análogo al lema (II.3.5.1). En este caso, -- con el fin de aplicar la desigualdad de Hölder convenientemente, es necesa-- rio exigir una condición adicional sobre los integradores.

LEMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \varepsilon Z_F^4$ y separables. Sea una partición $\pi = (t_1, \ldots t_{m+1}; \tau_1, \ldots \tau_m)$ de [a,b] (sobre T) y sean $u_1, \ldots u_m$ variables aleatorias tales que para cada $j \varepsilon \{1, \ldots m\}$ u_j es F_{t_j}-medible y $\|u_j\|<\infty$.
Definimos la función

$$S^2 : [a,b] \times \Omega \to R$$

del siguiente modo: para cada $t \varepsilon [a,b]$,

$$S^2(t,\omega) = \sum_{j=1}^{r(s)} u_j(\omega) \Delta_j z^1(\omega) \Delta_j z^2(\omega) + u_{r(s)}(\omega)(z^1(s,\omega) -$$
$$-z^1(t_{r(s)},\omega))(z^2(s,\omega) - z^2(t_{r(s)},\omega))$$

Entonces, para cualquier $\alpha > 0$

$$P[\sup_{[a,b]} |S^2(t,\omega)| > \alpha] \le \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t \|u_j\| + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t \|u_j\|^2 ".$$

Demostración:

La prueba es similar a la del lema (II.3.5.1), teniendo en cuenta por - ahora C_j^k, D_j^k se definen igual que allí, pero tomando

$$\Delta_j^k = [z^1(s_j^{k+1}) - z^1(s_j^k)]\,[z^2(s_j^{k+1}) - z^2(s_j^k)]$$

$$(= \Delta_j^k z^1 . \Delta_j^k z^2)$$

(se sobreentiende el argumento ω).

En efecto, por la desigualdad de Hölder

$$|E(\Delta_j^k / F_{s_j^k})| \le \{E((\Delta_j^k z^1)^2 / F_{s_j^k}\}^{1/2} . \{E((\Delta_j^k z^2)^2 / F_{s_j^k}\}^{1/2} \le$$

$$\le (\{K(s_j^{k+1} - s_j^k)\}^{1/2})^2 = K(s_j^{k+1} - s_j^k)$$

y también

$$E((\Delta_j^k)^2 / F_{s_j^k}) \le \{E((\Delta_j^k z^1)^4 / F_{s_j^k}\}^{1/2} . \{E(\Delta_j^k z^2)^4 / F_{s_j^k})^{1/2} \le K(S_j^{k+1} - s_j^k)$$

y estamos de nuevo en condiciones de aplicar el lema (II.3.4), como hicimos en (II.3.5.1).

II.3.6.2.- A partir del lema anterior establecemos la desigualdad correspondiente en el caso general:

PROPOSICION:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \varepsilon Z_F^4$ y separables, y f F-medible y tal que las funciones $\|f(.,\omega)\|^2$ y $\|f(.,\omega)\|$ son integrables (en el sentido ordinario de Riemann, de McShane o, en general, de Cauchy).

Sea J una versión separable de la integral retardada indefinida

$$\int_a^t f dz^1 dz^2 \quad (t \varepsilon [a,b]) \qquad \text{(suponemos que existe)}$$

Entonces, para cualquier $\alpha>0$

$$P[\sup_{[a,b]} |J(t,\omega)|>\alpha] \leq \frac{K}{\alpha}\int_a^b \|f(t,\omega)\| dt + \frac{K}{\alpha^2}\int_a^b \|f(t,\omega)\|^2 dt".$$

Demostración:

La prueba es exactamente igual a la de la proposición (II.3.5.2), escribiendo $S(\pi_s;f;z^1,z^2)$ en lugar de $S(\pi_s;f;z)$ y aplicando el lema (II.3.6.1) en lugar del lema (II.3.5.1).

NOTA: Como en el caso de primer orden, el resultado anterior es válido también en el caso en que J sea cualquier versión generalizada separable de la integral.

II.3.6.3.- Establecemos, a partir de lo anterior, el siguiente teorema sobre acotabilidad muestral de integrales indefinidas de segundo orden.

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \varepsilon Z_F^4$ y f F-medible tal que $\|f(.,\omega)\|^2$ y $\|f(.,\omega)\|$ son funciones integrables (en el sentido ordinario de Riemann, de McShane o, en general, de Cauchy).

Entonces:

a) Existe una versión de la integral retardada indefinida

$$\int_a^t f dz^1 dz^2 \qquad (t\varepsilon[a,b]) \qquad \text{(si existe la integral)}$$

que es separable y pertenece a $H^*_{\bar{F}}$ (sobre $[a,b]$)

b) Cualquier versión separable de la integral pertenece a $H^*_{\bar{F}}$ ".

Demostración:

La prueba es prácticamente igual a la del teorema (II.3.5.3), aplicando (II.2.4-II) y (II.3.6.2) en lugar de (II.2.4-I) y (II.3.5.2), respectivamente.

NOTA: La nota posterior al teorema (II.3.5.3) se aplica exactamente igual a este teorema.

II.3.7.- Observación.

El procedimiento seguido en los apartados (II.3.5) y (II.3.6) se puede extender, sin dificultad alguna, al caso de integrales retardadas de orden superior a 2, obteniéndose resultados similares. Para ello, bastará considerar integradores pertenecientes a alguna clase Z^{2p}_F para algún $p\varepsilon N$ de tal modo que se pueda aplicar convenientemente la desigualdad de Hölder (v.nota en (II.2.4)) para establecer el resultado correspondiente al caso de integrando simple, a partir del lema fundamental (II.3.4). No obstante, para mayor claridad en la exposición de las diferencias existentes entre los casos de primer y segundo orden, que son los que nos interesan desde el punto de vista del estudio de las ecuaciones integrales estocásticas, hemos preferido desarrollar sólo éstos en particular y por separado.

II.4.- Continuidad muestral.

Los resultados obtenidos en el apartado (II.3) son aplicables en particular, al caso en que los integradores son muestralmente continuos, puesto que tal condición implica la separabilidad. Sin embargo, en este caso es posible afirmar aún más: se podrá elegir una versión de la integral retardada indefinida cuyas trayectorias sean también continuas. Ello requerirá exigir sobre el integrando ciertas condiciones que ya consideramos en el capítulo I.

En este punto estudiamos tales aspectos, de gran importancia para el estudio de ecuaciones integrales estocásticas en el caso especialmente interesante en que los integradores son procesos muestralmente continuos.

Previamente, formalizamos convenientemente los conceptos concretos que manejaremos sobre continuidad muestral, y establecemos la situación de las clases consideradas de procesos muestralmente continuos respecto de las clases que hemos manejado anteriormente.

II.4.1.- Definiciones previas y notación.

Sea X un proceso definido sobre $[a,b]\subset R$ y R-valuado. Sea $\Omega_C(X)$ el subconjunto de Ω definido por:

"$\omega\in\Omega_C(X)$ si y solo si $X(.,\omega)$ es una función continua sobre $[a,b]$"

Deducimos que:

. X es muestralmente continuo c.s. (o tiene trayectorias continuas c.s.) si $P[\Omega_C(X)]=1$

. X es muestralmente continuo (o tiene trayectorias continuas) si $\Omega_C(X)\equiv\Omega$

Dada cualquier clase H de procesos definidos sobre $[a,b]$ y R-valuados, definimos las siguientes subclases:

Reg (H): procesos pertenecientes a H que son muestralmente continuos c.s. ("procesos regulares en H")

E Reg (H): procesos pertenecientes a H que son muestralmente continuos ("procesos estrictamente regulares en H").

Representaremos mediante H_F <u>a la clase de todos los procesos definidos sobre T, R-valuados y F-medibles</u> (para alguna filtración F dada).

II.4.2.- <u>Continuidad muestral, acotabilidad muestral y P-continuidad</u>.

Sean las clases H_F, $H_F^{p*}(p>0)$, H_F^{*}, con $T\equiv[a,b]$.

II.4.2.1.- Puesto que todo proceso muestralmente continuo c.s. es, evidentemente, separable y P-continuo en todo punto, podemos establecer el siguiente resultado:

<u>PROPOSICION</u>:

"$Reg(H_F)\subset H_F^{*}$".

De hecho, podemos escribir:

$$EReg(H_F)\subset Reg(H_F)\subset H_F^{*}\subset H_F^{p*}\subset H_F$$

II.4.2.2.- Asímismo, podemos establecer las siguientes identidades:

<u>PROPOSICION</u>:

"Sea cualquier clase G verificando

$$H_F^{*}\subset G\subset H_F$$

Entonces

$$Reg(H_F^{*})\equiv Reg(G)\equiv Reg(H_F)$$

$$EReg(H_F^{*})\equiv EReg(G)\equiv EReg(H_F)$$

Demostración:

Las inclusiones de izquierda a derecha son evidentes. Basta ver, pues, que

$$Reg(H_F)\subset Reg(H_F^{*})$$

(en el caso estrictamente regular se hará igual). Pero esto es consecuencia inmediata de la proposición anterior, puesto que

$$Reg(Reg(H))\equiv Reg(H)$$

para cualquier clase H.

Obsérvese que en particular G puede ser H_F^{p*} (p>0), o la clase de combinaciones lineales finitas de elementos de H_F^{p*}, etc.

II.4.3.- Variables aleatorias C([a,b])-valuadas.

Sea C([a,b]) el espacio de las funciones reales definidas sobre [a,b] y continuas. Consideremos la distancia d definida, para cada par de elementos $f,g\in C([a,b])$, por

$$d(f,g)= \sup_{[a,b]} |f(t)-g(t)|$$

(C([a,b]),d) es un espacio métrico completo.

Consideremos sobre C([a,b]) el σ-álgebra de conjuntos de Borel. Sea (Ω,A,P) un espacio de probabilidad y sea $L^0(\Omega,A;C([a,b]))$ el conjunto de las variables aleatorias C([a,b])-valuadas definidas sobre (Ω,A,P).

Sea f un proceso R-valuado definido sobre $T\subset R$, y sean $z^1,\dots z^q$ $(q\geq 1)$ -- procesos R-valuados definidos sobre $[a,b]\subset T$ tales que todas sus trayectorias sean funciones continuas sobre [a,b]. Para cada partición π de [a,b] sobre T definimos la aplicación

$$C(\pi):\Omega \longrightarrow C([a,b])$$

tal que, para cada $\omega\in\Omega$, $s\in[a,b]$

$$C(\pi)(\omega)(s) = S(\pi_s;f;z^1,\dots z^q)$$

Se comprueba que $C(\pi)$ es una variable aleatoria C([a,b])-valuada (v.Elworthy [4 ,p.68]).

II.4.4.- Continuidad muestral en integrales retardadas de primer orden.

A partir del lema (II.3.4) podemos establecer el importante teorema -- que sigue, en que vemos cómo la continuidad muestral de los integradores se transmite a la integral indefinida.

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sea $z\in Reg(Z_F^2)$ y $f\in H_F^{2*}$.

Entonces, existe una versión $J(t,\omega)$ de la integral retardada indefinida

$$\int_a^t f dz \qquad (t\varepsilon[a,b])$$

que pertenece a $EReg(H_{\overline{F}})$".

Demostración:

Podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que $z\,\varepsilon\, EReg(Z_F^2)$.

Supongamos primero el caso en que $f\varepsilon H_F^2$. Sea M una cota superior de $||f(.,\omega)||$ en T.

Sea $\varepsilon>0$ y sea $\gamma>0$ tal que

$$\gamma<\max\ \{1, \frac{\varepsilon^2}{k(2M+b-a)+\frac{k}{\varepsilon}(4M^2+b-a)}\}$$

Sea G la unión de un conjunto numerable de intervalos abiertos (α_1,β_1), (α_2,β_2),... que recubran al conjunto N de los puntos de L_2-discontinuidad de f y tales que

$$\sum_i(\beta_i-\alpha_i) < \gamma$$

Se comprueba fácilmente (de modo similar a como hicimos en la demostración del teorema (I.3.7.1)) que

"$\exists\,\delta>0$ tal que si $t_0\varepsilon[a,b]\ G$, $\tau\varepsilon T$ y $|\tau-t_0|<\delta$, entonces $||f(\tau,\omega)-f(t_0,\omega)|| < \gamma/2$".

Sean π_1, $\pi_2\varepsilon B([a,b])$ dos particiones coadjuntadas (v. demostración del teorema (I.3.7.1)):

$$\pi_1=(t_1,\dots t_{m+1};\ \tau_1^1,\dots\tau_m^1)$$
$$\pi_2=(t_1,\dots t_{m+1};\ \tau_1^2,\dots\tau_m^2)$$

siendo $eng(\pi_1)$ y $eng(\pi_2)$ menores que δ.

Si $[t_j,\ t_{j+1}]\not\subset G$, existirá algún $t_0\varepsilon[t_j,t_{j+1}]-G$.

Entonces,por lo anterior

$$||f(\tau_j^1,\omega)-f(\tau_j^2,\omega)||\leq||f(\tau_j^1,\omega)-f(t_0,\omega)||+||f(\tau_j^2,\omega)-f(t_0,\omega)||\leq$$

$$\leq\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=\gamma$$

Definiendo $C(\pi_1)$ y $C(\pi_2)$ según hemos visto en el punto (II.4.3), con -- q=1, y aplicando el lema (II.3.5.1), tenemos que

$$P[d(C(\pi_1),C(\pi_2))>\varepsilon] =$$

$$P[\sup_{[a,b]} |C(\pi_1)(\omega)(t)-C(\pi_2)(\omega)(t)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t\|f(\tau_j^1,\omega)-f(\tau_j^2,\omega)\|+$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{m} K\Delta_j t\|f(\tau_j^1,\omega)-f(\tau_j^2,\omega)\|^2 \leq$$

(agrupando en $\sum_G$ los términos correspondientes a aquellos índices j tales que $[t_j,t_{j+1}] \subset G$:)

$$\leq \frac{K}{\varepsilon} \{\sum_G \Delta_j t\|f(\tau_j^1,\omega)-f(\tau_j^2,\omega)\|+$$

$$+ \sum_{noG} \Delta_j t\|f(\tau_j^1,\omega)-f(\tau_j^2,\omega)\|\} +$$

$$+ \frac{K}{\varepsilon^2} \{\sum_G \Delta_j t\|f(\tau_j^1,\omega)-f(\tau_j^2,\omega)\|^2+$$

$$+ \sum_{noG} \Delta_j t\|f(\tau_j^1,\omega)-f(\tau_j^2,\omega)\|^2\} \leq$$

$$\leq \frac{K}{\varepsilon}\{2M\gamma+\gamma(b-a)\}+\frac{K}{\varepsilon^2}\{(2M)^2\gamma+\gamma^2(b-a)\}\leq$$

$$\leq\gamma[\frac{K}{\varepsilon}(2M+b-a)+ \frac{K}{\varepsilon^2}(4M^2+b-a)]<\varepsilon .$$

Por tanto, $C(\pi)$ converge en probabilidad a un cierto elemento J de $L(\Omega,A;C([a,b]))$ cuando eng(π) tiende a 0, según el criterio de Cauchy. J se puede interpretar también como una versión de la integral retardada indefini da de f respecto de z sobre $[a,b]$, siendo todas sus trayectorias continuas.

Veamos ahora el caso general. Supongamos que el proceso f se descompone como producto de dos procesos b y f_1 pertenecientes respectivamente a H_F^* y H_F^2. Aplicamos el método de truncamiento: Sea para cada V>0, el proceso b_V definido por

$$b_V(\tau,\omega)= \text{med}\{b(\tau,\omega),\ V,-V\}$$

para cada $\tau \in T$, $\omega\in\Omega$.

Para cada V, el proceso $f_V \equiv b_V.f_1$ pertenece a H_F^2, y por tanto estamos -

en el caso particular considerado al inicio de la demostración. Así, podemos elegir una versión J_V de la correspondiente integral indefinida que tenga todas sus trayectorias continuas.

Consideraremos la sucesión $\{V\}_{V\in N}$. Sea B una v.a. finita c.s. que acote las trayectorias de b, y sea, para cada $V\in N$, el conjunto

$$\Omega_V=\{\omega:\ B(\omega)<V\}$$

Sabemos que $P(\Omega_V)\uparrow 1$ cuando $V\uparrow\infty$. Por otra parte, para cada $\omega\in\Omega$,se verifica que

$$f(.,\omega)\equiv f_V(.,\omega)$$

Sea el proceso J definido por

$$J(.,\omega)\equiv\begin{cases} J_V(.,\omega) & \text{si } \omega\in\Omega_V-\Omega_{V-1} \quad (V\geq 1) \\ 0 & \text{si } \omega\in\Omega-(\bigcup_V \Omega_V) \end{cases}$$

(considerando $\Omega_0=\emptyset$). El proceso J tiene todas sus trayectorias continuas. Vamos a ver que J es una versión de la integral indefinida

$$\int_a^t f dz \qquad (t\in[a,b])$$

En efecto, dado $\varepsilon>0$ podemos elegir $V'\in N$ tal que $P(\Omega_{V'})>1-\varepsilon/2$

Existirá $\delta>0$ tal que para cada $V\leq V'$ en N, cada $t\in[a,b]$ y cada $\pi_t\in B([a,t])$ con $\mathrm{eng}(\pi_t)<\delta$

$$P[\omega\in\Omega_V-\Omega_{V-1}: |J_V(t,\omega)-S(\pi_t;f_V;z)|>\varepsilon]<\frac{\varepsilon}{2V'}$$

Teniendo en cuenta que en $\Omega_V-\Omega_{V-1}$ f_V coincide con f y J_V con J, y sumando en $V=1,\ldots V'$, podemos escribir

$$P[\omega\in\Omega_{V'}: |J(t,\omega)-S(\pi_t;f;z)|>\varepsilon]<\frac{\varepsilon}{2}$$

y, por tanto,

$$P[\omega\in\Omega\ : |J(t,\omega)-S(\pi_t;f;z)|>\varepsilon]<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Así, para cada t, J(t,.) es una versión de la integral retardada de f respecto de z sobre [a,t], como queríamos demostrar.

NOTAS: 1) En el caso en que $f \varepsilon H_F^2$, podremos aplicar aquí, en particular, la desigualdad obtenida en la proposición (II.3.5.2).

2) McShane [10], por una vía totalmente distinta, prueba el teorema anterior, considerando que $f \equiv b.f_1$ como aquí, y con b y f_1 medibles. Elworthy [4] demuestra el mismo resultado en el caso particular en que f es L_2-continuo en todo punto de [a,b].

II.4.5.- Continuidad muestral en integrales retardadas de segundo orden.

De nuevo el lema (II.3.4) nos permite establecer el siguiente teorema.

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [H]. Sean $z^1, z^2 \varepsilon Reg(Z_F^4)$ y $f \varepsilon H_F^{2*}$.

Entonces, existe una versión $J(t,\omega)$ de la integral retardada indefinida

$$\int_a^t f dz^1 dz^2 \qquad (t \varepsilon [a,b])$$

que pertenece a $EReg(H_F)$".

Demostración:

La prueba es igual que en el teorema (II.4.4), considerando aquí dos integradores y aplicando el lema (II.3.6.1) en lugar del lema (II.3.5.1).

NOTAS: 1) En el caso en que $f \varepsilon H_F^2$, podremos aplicar aquí, en particular, la desigualdad obtenida en la proposición (II.3.6.2).

2) McShane [10], por una vía totalmente distinta, prueba el teorema anterior en el caso en que $f \equiv b.f_1 \varepsilon H_F^{1*}$, con b y f_1 medibles. Elworthy [4] considera el caso en que f es L_2-continuo en todo punto de [a,b]

II.4.6.- Observación.

Los resultados (II.4.4) y (II.4.5) se extienden fácilmente a integrales de orden superior a 2. Para ello, bastará tener en cuenta las mismas indicaciones que explicamos en (II.3.7) sobre las restricciones a imponer sobre los integradores. Elworthy [4] también considera el caso general en este sentido, con las restricciones sobre el integrando que ya hemos señalado en sendas notas en los apartados (II.4.4) y (II.4.5).

II.5.- Sistemas de ecuaciones integrales estocásticas (S.E.I.E.).

En este punto establecemos el planteamiento definitivo (ver justificación en la introducción de esta memoria) del tipo sistemas de ecuaciones integrales estocásticas sobre el que se centra nuestro estudio y al que, por tanto, nos referiremos repetidamente en lo sucesivo.

Asímismo , demostramos algunos resultados relativos a las posibles soluciones de tales sistemas, previos al estudio de su existencia y unicidad y que serán de gran utilidad posteriormente.

II.5.1.- Planteamiento.

II.5.1.1.- Un "sistema de ecuaciones integrales estocásticas" (S.E.I.E.) será un sistema del tipo

$$X^i(t,\omega)=\alpha^i(t,\omega)+\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g_\rho^i(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)+$$
$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t h_{\rho\sigma}^i(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)$$
$$(t\varepsilon[a,b]),\quad (\omega\varepsilon\Omega),\ (i=1,\dots n)$$

donde $z^1,\dots z^r$ son procesos R-valuados definidos sobre $[a,b]$, la incógnita $X=(X^1,\dots X^n)$ y la condición inicial $\alpha=(\alpha^1,\dots\alpha^n)$ son procesos R^n-valuados definidos sobre $[a,b]$, y las funciones g_ρ^i , $h_{\rho\sigma}^i$ $(i=1,\dots n;\rho,\sigma=1,\dots r)$ son R-valuadas y definidas sobre $[a,b]\times R^n\times\Omega$.

II.5.1.2.- Notación

Designaremos mediante

$$\{g,h:(i,\rho,\sigma)\}$$

al conjunto de todas las funciones que intervienen como coeficientes en las integrales del sistema anterior, es decir

$$\{g_\rho^i\ h_{\rho,\sigma}^i:(i=1,\dots n),\ (\rho,\sigma=1,\dots r)\}$$

.Notaremos mediante $E[\alpha,g,h]$ al S.E.I.E. anterior, con coeficientes α,g,h (con sus afijos correspondientes).

.Asímismo, notaremos mediante $I^i[g,h;X]$ a la parte correspondiente a -

las sumas de integrales con coeficientes g y h (con los afijos correspondientes) evaluados en X, en el miembro derecho de la i-ésima ecuación del S.E.I.E. anterior. Si las integrales existen, $I[g,h;X]$ es un proceso R^n-valuado definido sobre $[a,b]$.

Es decir, el S.E.I.E. $E[\alpha,g,h]$ puede escribirse de forma abreviada como

$$X\equiv\alpha+I[g,h;X]$$

o bien

$$X^i(t,\omega)=\alpha^i(t,\omega)+I^i[g,h;X](t,\omega) \qquad (i=1,\dots n)$$
$$((t,\omega)\in[a,b]\times\Omega)$$

NOTAS: 1) En particular, alguno de los integradores $z^1,\dots z^r$ puede ser el parámetro tiempo t. En tal caso, conviene tener en cuenta el teorema (I.3.8.2) sobre nulidad de integrales respecto de (z,t). En el caso en que tales integrales sean nulas, el sistema que acabamos de plantear equivale al sistema (*) que consideramos en la introducción de este capítulo. En los demás casos, es más general, si en (*) se supone que ningún $z^1,\dots z^r$ puede ser también t.

2) Al comparar sistemas con distintos coeficientes, por ejemplo $E[\alpha,g,h]$ y $E[\alpha',g',h']$, supondremos siempre n fijo, así como el conjunto de integradores $(z^1,\dots z^r)$.

II.5.2.- Concepto de solución. Resultados generales.

A continuación enunciamos y demostramos algunos resultados concernientes a las posibles soluciones de S.E.I.E. (cuya existencia y unicidad estudiamos ampliamente en el apartado (II.6)), a los que nos referiremos en el resto de este capítulo y en el capítulo III.

II.5.2.1.- Se entiende por solución del S.E.I.E. $E[\alpha,g,h]$ cualquier proceso x tal que

$$x\equiv\alpha+I[g,h;x]$$

para alguna elección de versiones de las correspondientes integrales.

II.5.2.2.- Notación.

Sean x,y procesos R (ó R^n)-valuados definidos sobre S⊂R:

.Si x e y son procesos equivalentes, es decir, tales que para cada t∈S

$$x(t,.)\equiv y(t,.) \quad c.s.$$

escribiremos abreviadamente

$$x\sim y$$

(Es evidente que "∼" es una relación de equivalencia, definida sobre -- cualquier clase de procesos que se considere).

II.5.2.3.- Puesto que las integrales en E[α,g,h], están definidas salvo equivalencia, podemos establecer la siguiente proposición.

PROPOSICION:

"Sea x una solución del sistema E[α,g,h]. Sea y cualquier proceso equivalente a x.

Entonces, y es también solución de E[α,g,h]".

Demostración:

En efecto, para cualquier función f∈{g,h: (i,ρ,σ)} tendremos que, por - ser x∼y, es también

$$f(t,x(t,\omega),\omega) \sim f(t,y(t,\omega),\omega)$$

Entonces, para la propiedad (I.2.1), para cada i

$$I^i[g,h;x] \sim I^i[g,h;y]$$

para cada elección de versiones de las correspondientes integrales.

Así,

$$(x-\alpha)\sim I\ [g,h;y]$$

es decir, x-α es una versión de I[g,h;y]. Por tanto, x es solución de E[α,g,h].

En consecuencia, x es solución de E[α,g,h] si y solo si

$$x \sim (\alpha+I[g,h;x])$$

para cada elección de versiones de las correspondientes integrales.

II.5.2.4.- Es especialmente interesante el siguiente resultado, para el caso de dos sistemas con coeficientes equivalentes en una parte de Ω, importante para la construcción de soluciones mediante soluciones parciales, como veremos en (II.6).

PROPOSICION:

"Sea x solución de $E[\alpha,g,h]$ y x' solución de $E[\alpha',g',h']$.

Sea $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que para todo $\omega\varepsilon\Omega_0$

$$\alpha(.,\omega)\equiv\alpha'(.,\omega)$$

$$f(.,X(.,\omega),\omega)\equiv f'(.,X(.,\omega),\omega)$$

para todo $f\varepsilon\{g,h,g',h':(i,\rho,\sigma)$ y cualquier proceso X (en realidad basta que se verifique con X igual a x')

Sea el proceso y definido por

$$y(.,\omega)\equiv\begin{cases} x(.,\omega) & \omega\varepsilon\Omega_0^c \\ x'(.,\omega) & \omega\varepsilon\Omega_0 \end{cases}$$

Entonces, y es solución de $E[\alpha,g,h]$".

Demostración:

Podemos escribir, para cada $t\varepsilon[a,b]$

$$P[\,|y(t,\omega)-\alpha(t,\omega)-I[g,h;y](t,\omega)|>0]=$$

$$=P[\,|y(t,\omega)-\alpha(t,\omega)-I[g,h;y](t,\omega)|>0]\cap\Omega_0+$$

$$+P[\,|y(t,\omega)-\alpha(t,\omega)-I[g,h;y](t,\omega)|>0]\cap\Omega_0^c$$

Teniendo en cuenta la propiedad (I.3.3), y que y es igual a x en Ω_0^c y a x' en Ω_0, el último miembro es igual a

$$=P[\,|x'(t,\omega)-\alpha(t,\omega)-I[g,h;x'](t,\omega)|>0]\cap\Omega_0+$$

$$+P[\,|x(t,\omega)-\alpha(t,\omega)-I[g,h;x](t,\omega)|>0]\cap\Omega_0^c$$

El último término es 0, por ser x solución de $E[\alpha,g,h]$, y el primero es igual a

$$P[|x'(t,\omega)-\alpha'(t,\omega)-I[g',g';x'](t,\omega)|>0]\cap\Omega_0$$

por las hipótesis sobre los coeficientes en el enunciado. Puesto que x' es solución de $E[\alpha',g',h']$, este término también es nulo. En definitiva, tenemos que

$$y \sim \alpha+I[g,h,y]$$

es decir, y es solución de $E[\alpha,g,h]$.

II.5.2.5.- Consecuencia inmediata de la proposición anterior son los siguientes corolarios:

COROLARIO I:

"Bajo las condiciones de la proposición (II.5.2.4), si $E[\alpha,g,h]$ y $E[\alpha',g',h']$ tienen respectivamente solución única (salvo equivalencia), entonces dadas dos versiones respectivas cualesquiera x y x' de tales soluciones, para cada $t\in[a,b]$ existirá $N_t\subset\Omega$, P-nulo, tal que

$$x(t,\omega)=x'(t,\omega)$$

para todo $\omega\in\Omega_0-N_t$.

Asímismo, existirán dos versiones y e y' de las soluciones, respectivamente, tales que para cada $\omega\in\Omega_0$

$$y(.,\omega)\equiv y'(.,\omega)".$$

COROLARIO II:

"Bajo las condiciones de la proposición (II.5.2.4), si $P(\Omega_0)=1$, entonces $E[\alpha,g,h]$ y $E[\alpha',g',h']$ tienen el mismo conjunto de soluciones". (Las pruebas de ambos corolarios son inmediatas).

II.5.2.6.- La siguiente proposición tiene un caracter diferente al de las - anteriores, y se refiere a P-continuidad de la solución.

PROPOSICION:

"Sea x solución de $E[\alpha,g,h]$, siendo $z^1,\ldots z^r \epsilon Z_F^2$. Entonces:

a) $x-\alpha$ es P-continuo en todo punto de $[a,b]$.

b) x y α tienen los mismos puntos de P-discontinuidad en $[a,b]$".

Demostración:

b) es consecuencia inmediata de a). Y a) es cierto, puesto que, por los corolarios (II.2.4 -I-II), el proceso

$$I^i[g,h,x]$$

es P-continuo en todo punto de $[a,b]$, para cada i.

NOTA: Aunque este concepto y otros análogos serán comentados al inicio del apartado siguiente, observemos aquí que un proceso R^n-valuado es P-continuo en un punto si y solo si lo es también cada uno de los procesos R-valuados que constituyen sus componentes.

II.6.- Existencia y unicidad de solución.

En este extenso apartado exponemos uno de los aspectos principales en que se ha centrado nuestra investigación: la existencia y unicidad de solución de S.E.I.E.'s. Dentro de éste, hemos dedicado nuestro esfuerzo fundamentalmente a logar demostrar la existencia y unicidad de solución en sistemas en que la condición inicial pueda pertenecer a clases bastante más amplias que las consideradas hasta el momento.

Los principales trabajos que tratan tal aspecto aparecidos hasta hoy se deben al propio McShane [10] y a Elworthy [4]. El primero, estudia sistemas -- del tipo $E[\alpha,g,h]$ en que α es una variable aleatoria F_a-medible cualquiera y los integradores son regulares. Así, la dependencia de la solución del sistema respecto del tiempo sólo puede ser expresada a través de una integral retardada, y las propiedades de la solución vienen limitadas por las de las integrales retardadas indefinidas. Por su parte, Elworthy estudia el caso Hilbert-valuado, incluyendo en la condición inicial el parámetro tiempo, pero con la restricción de que tal proceso ha de ser L_2-continuo en todo punto de $[a,b]$. Considera también, en un caso más general en cuanto al codominio de los procesos, el caso particular en que la c.i. no depende de t.

Nosotros hemos considerado en nuestra investigación el caso real generalizando la condición inicial: hemos estudiado progresivamente los casos en que ésta es un proceso R^n-valuado con componentes en H^2_F, en H^{2*}_F (como caso particular en H^*_F) o que sean combinación lineal de elementos de H^{2*}_F, obteniendo los - resultados deseados. Asímismo, hemos tratado en cada situación el caso particular en el que la condición inicial y los integradores son procesos regulares.

Al mismo tiempo, nuestra configuración de hipótesis previas para demostrar la existencia y unicidad es algo más débil que la de McShane. Elworthy, - en su estudio, considera hipótesis algo más fuertes que las impuestas por McShane, en lo que concierne a las funciones que intervienen como integrando en el sistema (v.Elworthy [4]).

En definitiva, en el caso real, hemos establecido la existencia y unicidad de solución de S.E.I.E.'s bajo condiciones más generales en lo que concierne a los coeficientes (fundamentalmente en lo que se refiere a la condición --

inicial) que las consideradas por McShane y, posteriormente, por Elworthy.

Por otra parte, uno de nuestros objetivos en este aspecto, ha sido establecer la existencia y unicidad de solución por una vía más conveniente para el estudio de la regularidad de la solución que la utilizada por McShane. En efecto, éste se apoya en la aplicación del método de aproximación de Cauchy-Peano en un caso restringido, para construir posteriormente una solución general a partir de soluciones parciales (v.McShane [10]). Nosotros, hemos estudiado el caso fuerte correspondiente al primer paso aplicando el método de Picard, con el fin de disponer de instrumentos que serán de gran utilidad en el capítulo siguiente. Este camino es usado por Elworthy [4] en su estudio.

Antes de introducirnos en el desarrollo de los resultados obtenidos, es necesario considerar las siguientes nociones previas:

II.6.1.- Definiciones previas y notacion.

. Sea (Ω,A,P) un espacio de probabilidad (supondremos siempre que dicho espacio es completo), y sea $[a,b]\subset R$.

Sea $x(t,\omega)$ un proceso definido sobre $[a,b]$ y R^n-valuado (para algún $n\in N$):

$$x=(x^1,\dots x^n)$$

Definimos, para cada $t\in[a,b]$

$$|||x|||_p(t)=\sup_{s\in[a,t]}\{||x(s,\omega)||_p\}$$

donde

$$||x(s,\omega)||_p=\{E[|x(s,\omega)|^p]\}^{1/p}$$

Puesto que para cada (s,ω)

$$|(x(s,\omega)|^p=\sum_{i=1}^n|x^i(s,\omega)|^p$$

también es cierto que, para cada s

$$||x(s,\omega)||_p=(\sum_{i=1}^n||x^i(s,\omega)||_p^p)^{1/p}$$

Notaremos, en particular

$$|||x|||_p=|||x|||_p(b)$$

. Sea $L^p(\Omega,[a,b];R^n)$ el conjunto de las clases de equivalencia de procesos definidos sobre $[a,b]$ y R^n-valuados con $|||x|||<\infty$.
$(L^p(\Omega,[a,b];R^n),|||\cdot|||_p)$ es un <u>espacio de Banach</u>.

. En lo sucesivo, <u>consideraremos prácticamente siempre p=2</u>, y por tanto, omitiremos el subíndice cuando eso ocurra.

NOTAS: 1) Obsérvese que, en general, sólo se puede afirmar que

$$|||x|||_p^p(t) \leq \sum_{i=1}^{n} |||x^i|||_p^p(t)$$

para cualquier proceso $x=(x^1,\dots x^n)$ R^n-valuado definido sobre $[a,b]$, y cualquier $t\in[a,b]$

2) Para cada proceso x, la función

$$|||x|||_p(\cdot)$$

es creciente en $[a,b]$.

. Se extienden inmediatamente al caso n-dimensional los conceptos de proceso <u>P-continuo</u>, <u>L_p-continuo</u>, <u>L_p-acotado</u>, <u>con aplicación global acotada c. s.</u>, definidos en (I.3.1), sin más que considerar en todos los casos el módulo $|\cdot|$, definido por

$$|y|=\left(\sum_{i=1}^{n}|y^i|^p\right)^{1/p}$$

para cada $y=(y^1,\dots y^n)\in R^n$.

Análogamente, se extiende el concepto de proceso <u>muestralmente continuo (c.s.)</u>, introducido en (II.4.1).

Se comprueba fácilmente que un proceso cualquiera R^n-valuado verifica alguna de las condiciones anteriores si y solo si dicha condición es verificada por todas sus componentes.

. Podemos extender las definiciones de H_F^p, H_F^*, H_F^{p*} dadas en (I.3.4) al caso n-dimensional. Así pues, <u>dentro de la clase de todos los procesos definidos sobre [a,b] y R^n-valuados, consideraremos las siguientes subclases:</u> para cada $p\in R^+$, definimos

$H^p_{F,n}$: clase de procesos F-medibles

L_p-acotados en T y

L_p-continuos en c.t.p. de $[a,b]$

$H^*_{F,n}$: clase de procesos F-medibles

con aplicación global acotada c.s., y

P-continuos en c.t.p. de $[a,b]$

$H^{p*}_{F,n}$: clase de procesos que se pueden descomponer como producto (definido como el producto componente a componente) de dos procesos, pertenecientes respectivamente a $H^p_{F,n}$ y $H^*_{F,n}$.

Definimos también para cada p la clase $CL(H^{p*}_{F,n})$ de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $H^{p*}_{F,n}$:

$$CL(H^{p*}_{F,n}) = \bigcup_{m\in N}(H^{p*}_{F,n} + \overset{m}{\ldots} + H^{p*}_{F,n})$$

$H^p_{F,n}$, $H^*_{F,n}$ y $CL(H^{p*}_{F,n})$, con las operaciones suma y producto por un escalar usuales para funciones, constituyen espacios vectoriales.

NOTA IMPORTANTE: En el resto de este capítulo y en el siguiente consideraremos siempre procesos definidos sobre $[a,b]$. Así, todos los resultados y definiciones enunciados anteriormente en los que intervenga T, con $[a,b]\subset T\subset R$, se aplicarán con $T\equiv[a,b]$. (Obviamente, las definiciones de $|||\cdot|||$ y de las clases anteriores, se podrían haber dado también considerando en general $[a,b]\subset T\subset R$, pero esto no tiene utilidad para nuestro estudio en ecuaciones integrales estocásticas. Una nota sobre este aspecto puede verse en Elworthy [4,p.90].

. Análogamente a como hicimos en (II.4.1) definimos para cualquier clase H de procesos (R^n-valuados y definidos sobre $[a,b]$), las clases Reg(H) , EReg(H).

Las proposiciones (II.4.2.-I-II) se extienden inmediatamente al caso n-dimensional.

. Conviene observar que un proceso x pertenece a $H^p_{F,n}$ (resp. $H^*_{F,n}$, $H^{p*}_{F,n}$, $CL(H^{p*}_{F,n})$) si y solo si cada una de sus componentes x^i pertenece a H^p_F (resp. H^*_F, H^{p*}_F, $CL(H^{p*}_F)$). Lo mismo se puede afirmar considerando la subclase de procesos regulares y estrictamente regulares en cada una de las -

anteriores.

. Sean x e y dos procesos R^n-valuados definidos sobre $[a,b]$:

Diremos que x e y son equivalentes si para cada t existe un conjunto - $N_t \subset \Omega$ P-nulo tal que

$$x(t,\omega)=y(t,\omega)$$

para cada $\omega\in\Omega - N_t$. Notaremos $x\sim y$

Diremos que x e y son iguales c.s. si existe un conjunto $N\subset\Omega$ P-nulo - tal que

$$x(.,\omega)\equiv y(.,\omega)$$

para cada $\omega \in \Omega-N$. (Evidentemente, esto implica la equivalencia de x e y). Notaremos $x \underset{c.s.}{\equiv} y$

Es inmediato que x e y son equivalentes (resp. iguales c.s.) si y solo si lo son sus componentes x^i e y^i, para todo $i\in\{1,...n\}$

. Por último, dada cualquier clase H de procesos (R^n-valuados y definidos sobre $[a,b]$), definimos las siguientes clases asociadas:

$$\bar{H}\equiv H\cup\{x(\text{proceso}):\ \exists y\in H/x\sim y\}$$

$$\tilde{H}\equiv\bar{H}/_{\sim}$$

. Se demuestra que $(\tilde{H}^p_{F,n}, |||\cdot|||_p)$ es un subespacio de Banach de $(L^p(\Omega,[a,b];R^n),\ |||\cdot|||_p)$.

(Esto será esencial en el estudio de la existencia y unicidad de solución de S.E.I.E.'s en el caso fuerte, es decir, cuando la c.i. pertenezca a -- $H^2_{F,n}$, como veremos en (II.6.4), para poder aplicar *el teorema del punto* - fijo de Fomin y Kolmogorov (v. apartado (II.6.3.1)). Además, los casos -- más generales que consideramos se obtienen por extensión del anterior a - través del método de truncamiento).

II.6.2.- Hipótesis comunes y casos a estudiar.

En todos los casos que hemos estudiado, cuya exposición hacemos en los -- apartados que siguen con los resultados fundamentales que aportamos en este capítulo en cuanto a existencia y unicidad de solución en S.E.I.E.'s, y que difie ren esencialmente por la clase a que ha de pertenecer la condición inicial, - considerararemos siempre el siguiente conjunto de hipótesis comunes, que afec-- tan fundamentalmente a los procesos que intervienen en las integrales que aparecen en las ecuaciones (integradores e integrandos):

[HE]: "1) (Ω,A,P) es un espacio de probabilidad completo.

$[a,b]$ es un intervalo cerrado contenido en R.

2) $F=\{F_\tau;\tau\epsilon[a,b]\}$ es una filtración completa en el espacio medible (Ω,A).

3) Cada proceso z, con o sin afijos, pertenece a Z_F^4.

4) Cada función $f\epsilon\{g,h:(i,p,\sigma)\}$ está definida sobre $[a,b]\times R^n\times\Omega$ en R, y existe una v.a. finita c.s. $L(\omega)$ tal que para toda $f\epsilon\{g,h:(i,p,\sigma)\}$, todo $t\epsilon[a,b]$, todo $\omega\epsilon\Omega$ y todo $x_1,x_2\epsilon R^n$

$$|f(t,x_1,\omega)-f(t,x_2,\omega)| \leq L(\omega)|x_1-x_2|$$

$$|f(t,0,\dots 0,\omega)| \leq L(\omega)$$

5) Para cada v.a. $X(\omega)$ R^n-valuada y L_2-integrable, $f(t,X(\omega),\omega)$ es un - proceso P-continuo en c.t.p. de $[a,b]$; para cada $x\epsilon R^n$, $f(t,x,\omega)$ es - un proceso separable.

6) Para cada proceso $X(t,\omega)$ F-medible, $f(t,X(t,\omega),\omega)$ es un proceso F-medible".

NOTA: El requerimiento de que el espacio (Ω,A,P) sea completo obedece simplemente a disponer de cierta comodidad en el lenguaje. Asímismo ocurre con el requerimiento de que F sea completa. En efecto, no es relevante tal suposición, teniendo en cuenta la proposición (II.1.2.3) y que todo proceso - F-medible es también $\bar{F}$-medible, aunque conviene destacar que en el caso - general las conclusiones en los resultados habrían de referirse a $\bar{F}$.

Estudiamos S.E.I.E.'s del tipo $E[\alpha,g,h]$ y verificando las hipótesis [HE], en los siguientes casos, progresivamente:

. CASO A: $\alpha\epsilon H^2_{F,n}$ y $L(\omega)\equiv L_o$ (cte.) c.s.

. CASO B: $\alpha\epsilon H^{2*}_{F,n}$

Dentro de éste, consideraremos el siguiente:

CASO B': $\alpha \in H^{*}_{F,n}$

. CASO C: $\alpha \in CL(H^{2*}_{F,n})$

En cada uno de los tres casos anteriores estudiaremos el caso especial en que los integradores son procesos regulares y la condición inicial es un proceso regular (CASOS A-Reg, B-Reg, C-Reg).

Analizaremos finalmente el caso particular en que la condición inicial no depende de t, es decir, es una v.a. F_a-medible.

II.6.3.- Lemas.

Haremos uso de los siguientes resultados (de tipo determinístico):

II.6.3.1.- El primero es un teorema del punto fijo debido a Fomin-Kolmogorov [3

LEMA:

"Si T es un operador definido sobre un espacio métrico completo E en sí mismo, y T^n es una contracción para algún n (entero positivo), entonces T tiene un único punto fijo".

NOTA: Dados dos espacios métricos E_1 y E_2, y un operador $T:E_1 \to E_2$, se dice que T es una contracción si existe una constante positiva k<1 tal que

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq k.d(x_1,x_2)$$

para todo, x_1, $x_2 \in E_1$

Usaremos este resultado en el caso A.

II.6.3.2.- El siguiente, es una versión del lema de Gronwall, tomado de Yor [17] (quien, a su vez, cita a Neveu [12] como origen):

LEMA:

"Sea $f:[a,b] \subset R \to R^+$ tal que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que para todo $t \in [a,b]$

$$f(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t f(s)ds$$

Entonces, para todo $t \in [a,b]$

$$f(t) \leq C_1 . e^{C_2(t-a)} ."$$

<u>NOTA</u>: En realidad, el resultado original está dado para $f:R^+\to R^+$ y a=0, pero el anterior se obtiene a partir de aquél mediante un simple cambio de variable.

Usaremos este resultado en una de las demostraciones alternativas que proponemos para establecer la unicidad de solución en los casos B y C. Así mismo, tendrá gran utilidad en los teoremas fundamentales del capítulo III.

II.6.4.- <u>CASO A: La condición inicial pertenece a $H^2_{F,n}$, y $L(\omega)\equiv L_o$ c.s..</u>

La situación considerada en este caso tiene especial interés, puesto que permite el tratamiento de expresiones mediante la L_2-norma, así como establecer la existencia y unicidad de solución verificándose que las integrales en $E[\alpha,g,h]$ existen en el sentido de la L_2-convergencia. Esto permite la aplicación del <u>método de Picard</u>.

A partir de este caso se obtienen por extensión los casos B y C.

II.6.4.1.- El resultado que a continuación establecemos, se debe considerar, pues, el <u>teorema fundamental</u> sobre existencia y unicidad:

<u>TEOREMA</u>:

"Sean las hipótesis [HE], con $L(\omega)\equiv L_o$ (cte.) c.s.. Sea $\alpha\epsilon H^2_{F,n}$.

Entonces, existe un único proceso x^* (salvo equivalencia) en $H^2_{F,n}$, que es solución de $E[\alpha,g,h]$".

Demostración:

Consideremos un operador T definido sobre $H^2_{F,n}$ tal que a cada elemento $X\epsilon H^2_{F,n}$ asocie un nuevo vector

$$((TX)^1,\ldots,(TX)^n)$$

donde $(TX)^i$, para cada i, es un proceso definido por

$$(1)\quad (TX)^i(t,\omega)=\alpha^i(t,\omega)+\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g_\rho^i(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)\ +$$
$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t h_{\rho\sigma}^i(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)$$

para alguna elección de versiones de las integrales que aparecen en la expresión anterior (supuesta su existencia). T tendrá, pues, posiblemente, distintas versiones, según cada elección concreta en el sentido anterior.

Vamos a ver que

a) T está bien definido

b) T aplica $H^2_{F,n}$ en sí mismo

c) T es lipschitziano

d) T^k es contractivo, para algún $k\in N$.

a) <u>T está bien definido</u>:

Sea $x\in H^2_{F,n}$. Vamos a ver que existen todas las integrales que aparecen en Tx, definido por (1). Para ello, bastará demostrar que para cualquier $f\in\{g,h:(i,\rho,\sigma)\}$, el proceso

$$f(t,x(t,\omega),\omega)$$

pertenece a H^2_F, y aplicar los teoremas (I.3.6.1) y (I.3.7.1). (Téngase en cuenta que $H^2_F\subset H^1_F$).

Sea Q el conjunto de los racionales en R. Sea $G\subset[a,b]$ el conjunto de puntos de $[a,b]$ en que todos los procesos

$$f(t,x(u,\omega),\omega)\qquad u\in[a,b]\cap Q$$

son P-continuos. G^c tiene medida Lebesgue 0 en $[a,b]$.

El conjunto G' definido por

$$G'=G\cap\{t\in[a,b]:x \text{ es } L_2\text{-continuo en } t\}$$

tendrá, también, pues, complementario Lebesgue-nulo en $[a,b]$.

Puesto que para cada $v\in[a,b]$, casi seguramente

$$|f(t,x(v,\omega),\omega)|\leq L_0(1+|x(v,\omega)|)$$

para todo $t\in[a,b]$ (por [HE-4]), el lema (I.3.5.4) asegura que para todo

$u\varepsilon[a,b]\cap Q$, el proceso

$$f(t,x(u,\omega),\omega)$$

es L_2-continuo en G'.

Ahora, dado $t_o \varepsilon G'$ escribimos, para cualquier $u\varepsilon[a,b]$

$$\|f(t,x(t,\omega),\omega)-f(t_o,x(t_o,\omega),\omega)\| \leq$$
$$\leq \|f(t,\omega),\omega)-f(t,x(u,\omega),\omega)\|+\|f(t,x(u,\omega),\omega)-f(t_o,x(u,\omega),\omega)\|+$$
$$+\|f(t_o,x(u,\omega),\omega)-f(t_o,x(t_o,\omega),\omega)\| \leq$$
$$\leq L_o\|x(t,\omega)-x(u,\omega)\|+\|f(t,x(u,\omega),\omega)-f(t_o x(u,\omega),\omega)\|+$$
$$+ L_o\|x(u,\omega)-x(t_o,\omega)\|$$

Así,

$$\lim_{t\to t_o} \|f(t,x(t,\omega),\omega)-f(t_o,x(t_o,\omega),\omega)\| \leq 2L_o\|x(t_o,\omega)-x(u,\omega)\|$$

Haciendo tender ahora u a t_o ($u\varepsilon[a,b]\cap Q$), tenemos que el límite anterior (independiente de u) es cero.

Así $f(t,x(t,\omega),\omega)$ es L_2-continuo en c.t.p. de $[a,b]$. También es L_2-acotado, puesto que x lo es y, casi seguramente

$$|f(t,x(t,\omega),\omega)| \leq L_o(1+|x(t,\omega)|)$$

Por último, es también F-medible, por [HE-6].

b) <u>T aplica $H^2_{F,n}$ en sí mismo:</u>

Puesto que la clase $H^2_{F,n}$ es cerrada para la suma, y $\alpha\varepsilon H^2_{F,n}$, bastará ver que dado $x\varepsilon H^2_{F,n}$, las integrales que aparecen en $(Tx)^i$ definido por (1) (para cada i) son elementos de H^2_F.

Sea $f\varepsilon\{g,h:(i,\rho,\sigma)\}$. Supongamos que f es una de las g^i_ρ y z el correspondiente z^ρ. Entonces, cualquier versión de la integral

$$\int_a^t f(s,x(s,\omega),\omega)dz(\omega)$$

es un proceso F-medible, por la proposición (II.1.2.5), y L_2-continuo en todo punto de $[a,b]$ (y, por tanto, L_2-acotado), puesto que por [HE-3], para cada (s,ω)

$$\|f(s,x(s,\omega),\omega)\| \le L_o(1+\|x(s,\omega)\|) \le L_o(1+|||x|||)$$

y, por el corolario (I.4.1.4), con $C=2K(b-a)^{½}+K^{½}$

$$\left\|\int_s^t f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)dz(\tau,\omega)\right\| \le CL_o(1+|||x|||)(t-s)^{½}$$

para todo $s,t\varepsilon[a,b]$ ($s\le t$). (Análogamente se haría si f fuese una de las $h^i_{\rho\sigma}$).

Así, la integral (cualquier versión), pertenece a H^2_F.

c) <u>T es Lipschitziano</u>:

Sean $x_1,x_2\varepsilon H^2_{F,n}$. Para cada i, y cada t

$$\|(Tx_1)^i(t,\omega)-(Tx_2)^i(t,\omega)\|^2 \le$$

$$\le (r+r^2)\left[\sum_{\rho=1}^r \left\|\int_a^t [g^i_\rho(s,x_1(s,\omega),\omega)-g^i_\rho(s,x_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)\right\|^2 +\right.$$

$$\left.+\sum_{\rho,\sigma=1}^r \left\|\int_a^t [h^i_{\rho\sigma}(s,x_1(s,\omega),\omega)-h^i_{\rho\sigma}(s,x_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)\right\|^2\right] \le$$

(2) $\le (r+r^2)^2C^2L_o^2\int_a^t |||x_1-x_2|||(s)ds \le (r+r^2)^2C^2L_o^2\int_a^t |||x_1-x_2|||(t)ds=$

(3) $=(r+r^2)^2C^2L_o^2|||x_1-x_2|||(t)(t-a)$

Sumando en i y tomando supremos en t, tenemos

$$|||Tx_1-Tx_2|||^2 \le n(r+r^2)^2C^2L_o^2(b-a)|||x_1-x_2|||^2$$

d) <u>T^k es contractivo, para algún k</u>:

Vamos a ver por recurrencia que para cualquier $k\varepsilon N$:

$$|||T^kx_1-T^kx_2|||^2(t) \le [n(r+r^2)^2C^2L_o^2(t-a)]^k \frac{1}{k!}|||x_1-x_2|||(t)$$

En efecto:

<u>k=1:</u> A partir de (3) en el apartado anterior, con s en lugar de t, y sumando en i y tomando supremos en $[a,t]$ en lugar de $[a,b]$, obtenemos,

$$|||Tx_1-Tx_2|||^2(t) \le n(r+r^2)^2C^2L_o^2(t-a)|||x_1-x_2|||^2(t)$$

<u>k→k+1:</u> Para cada i y cada $s\varepsilon[a,b]$, por (2) se tiene que

$$\|(T^{k+1}x_1)^i(s,\omega)-(T^{k+1}x_2)^i(s,\omega)\|^2 \le (r+r^2)^2C^2L_o^2\int_a^s |||T^kx_1-T^kx_2|||^2(\tau)d\tau \le$$

$$\le (r+r^2)^2C^2L_o^2[n(r+r^2)^2C^2L_o^2]^k \frac{1}{k!}\int_a^s (\tau-a)^k|||x_1-x_2|||^2(\tau)d\tau \le$$

$$\leq n^k [(r+r^2)^2 C^2 L_o^2]^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} (s-a)^{k+1} |||x_1 - x_2|||^2(s)$$

Sumando en i y tomando supremos en $s\varepsilon[a,t]$ se tiene la expresión inicial para k+1.

Puesto que

$$\nu_k = [n(r+r^2)^2 C^2 L_o^2 (b-a)]^k \frac{1}{k!}$$

tiende a 0 cuando $k\to\infty$, existirá $k_o \varepsilon N$ tal que

$$\nu_{k_o} < 1$$

siendo T^{k_o}, pues, una contracción.

Una vez demostrados los puntos a), b), c) y d), aún no estamos en condiciones de aplicar el teorema del punto fijo, pues $(H^2_{F,n} |||\cdot|||)$ no es un espacio métrico, sino sólo pseudométrico.

Sea el operador

$$\tilde{T}: \tilde{H}^2_{F,n} \longrightarrow \tilde{H}^2_{F,n}$$
$$\tilde{x} \longrightarrow \tilde{T}\tilde{x}$$

donde, para cada $\tilde{x}\varepsilon\tilde{H}^2_{F,n}$, $\tilde{T}\tilde{x}$ se define como la clase de equivalencia a que pertenece Tx, para cualquier $x\varepsilon\tilde{x}$ y cualquier T resultante de cualquier elección de versiones de las integrales que aparecen en (1),

$$\tilde{T}\tilde{x} = (\widetilde{Tx})$$

$\tilde{T}$ está bien definida, y de forma unívoca, por la propiedad (I.2.1), deduciéndose de b), c) y d) que:

$\tilde{b}$) $\tilde{T}$ aplica $\tilde{H}^2_{F,n}$ en sí mismo

$\tilde{c}$) $\tilde{T}$ es lipschitziano

$\tilde{d}$) $\tilde{T}^k$ es contractivo para algún k.

(considerando la norma $|||\cdot|||$ inducida sobre $\tilde{H}^2_{F,n}$ como espacio cociente).

A partir de $\tilde{b}$) y $\tilde{d}$), el lema (II.6.3.1) permite afirmar que <u>$\tilde{T}$ tiene un único punto fijo $\tilde{x}^*\varepsilon\tilde{H}^2_{F,n}$</u>:

$$\tilde{T}\tilde{x}^* = \tilde{x}^*$$

Así, por la proposición (II.5.3.3), cualquier $x^{*}\varepsilon\tilde{x}^{*}$ es solución de -- $E[\alpha,g,h]$, y no existe ningún otro elemento de $H^2_{F,n}$ que verifique ---- $E[\alpha,g,h]$.

II.6.4.2.- A partir del punto b) de la demostración anterior podemos establecer el siguiente corolario:

COROLARIO:

"Bajo las condiciones del teorema (II.6.4.1), si x^{*} es cualquier versión de la solución, el proceso $x^{*}-\alpha$ es L_2-continuo en todo punto de $[a,b]$. Es decir, x^{*} y α tienen las mismas L_2-discontinuidades en $[a,b]$"

NOTA: Como consecuencia se obtiene el caso considerado por Elworthy [4] (α L_2-continuo en todo punto de $[a,b]$, obteniéndose una solución también L_2-continua en todo punto de $[a,b]$).

II.6.4.3.- Caso A-Reg: α regular y $z^{\rho}(\rho=1,\ldots r)$ regulares:

Los teoremas (II.4.4) y (II.4.5) permiten establecer en el caso de continuidad muestral de la condición inicial y los integradores, que tal propiedad es transmitida a la solución de $E[\alpha,g,h]$, bajo las condiciones consideradas - en el teorema (II.6.4.1):

COROLARIO:

"Bajo las condiciones del teorema (II.6.4.1), se verifica que:

a) Si x_1^{*} y x_2^{*} son versiones de la solución pertenecientes a $Reg(H^2_{F,n})$, - entonces x_1^{*} y x_2^{*} son iguales c.s.

b) Si $z^{\rho}\varepsilon Reg(Z^4_F)$ $(\rho=1,\ldots r)$, entonces existe una versión de la solución tal que $x^{*}-\alpha\varepsilon EReg(H^2_{F,n})$

c) Si $z^{\rho}\varepsilon Reg(Z^4_F)$ $(\rho=1,\ldots r)$ y $\alpha\varepsilon Reg(H^2_{F,n})$, entonces existe una versión - de la solución que pertenece a $EReg(H^2_{F,n})$".

Demostración:

La conclusión b) del enunciado es inmediata a partir de los teoremas -- (II.4.4) y (II.4.5).

También c) es inmediato a partir de b), teniendo en cuenta que podemos dar un valor arbitrario a cualquier conjunto P-nulo de trayectorias de la solución.

La demostración de a) es conocida: En efecto, puesto que x_1^* y x_2^* han de ser equivalentes por (II.6.4.1), se tiene que

$$P[x_1^*(t,\omega)=x_2^*(t,\omega)]=1$$

Luego

$$P[x_1^*(t,\omega)=x_2^*(t,\omega),\ \text{para todo } t\varepsilon[a,b]\cap Q]=1$$

Y, puesto que casi todas las trayectorias de x_1^* y x_2^* son continuas

$$P[x_1^*(t,\omega)=x_2^*(t,\omega),\ \text{para todo } t\varepsilon[a,b]]=1$$

Es decir

$$x_1^* \underset{c.s.}{\equiv} x_2^*$$

como queríamos demostrar.

II.6.5.- CASO B: La condición inicial α pertenece a $H^{2*}_{F,n}$.

En este caso establecemos la existencia y unicidad de solución teniendo ésta al menos una versión perteneciente a $H^{2*}_{F,n} + H^{*}_{F,n}$. En el caso particular en que α pertenezca a $H^{*}_{F,n}$, podremos asegurar entonces la existencia de una versión de la solución en $H^{*}_{F,n}$.

Esta situación no permite manejar los procesos de partida mediante la L_2-norma, y es necesario establecer la existencia de solución en términos de la medida P. Sin embargo, el método de truncamiento (v.corolario I.3.5.5) nos permite apoyarnos en el teorema fundamental (II.6.4.1) para obtener una solución de forma constructiva en este caso, a partir de ciertas soluciones parciales obtenidas en el caso fuerte.

La unicidad de solución es probada aparte. Proponemos dos demostraciones alternativas en tal sentido: la primera, por reducción al absurdo, y la segunda, a través del lema de Gronwall (II.6.3.2).

II.6.5.1.- En el siguiente lema, replanteamos la hipótesis [HE-4] de un modo - más conveniente para la aplicación del método de truncamiento, sustituyendo -- $L(\omega)$ por un cierto proceso F-medible (v.McShane [10]):

<u>LEMA</u>:

"Sean las hipótesis [HE]. Sea Ω_L el conjunto definido por

$$\Omega_L=\{\omega:\ L(\omega)<\infty\}$$

$(P(\Omega_L)=1)$. Entonces, existe un proceso $L_1(t,\omega)$ definido sobre $[a,b]$ y -- $\bar{R}^n$-valuado tal que

a) L_1 es F-medible

b) Para toda $f\varepsilon\{g,h:(i,\rho,\sigma)\}$, todo $x,x'\varepsilon R^n$, todo $t\varepsilon[a,b]$ y todo $\omega\varepsilon\Omega_L$

$$|f(t,x',\omega)-f(t,x,\omega)|\leq L_1(t,\omega)|x-x'|$$

$$|f(t,0,\ldots 0,\omega)|\leq L_1(t,\omega)$$

c) $L_1(t,\omega)$ es creciente en t, para cada $\omega\varepsilon\Omega$

d) Para todo $\omega\varepsilon\Omega$

$$L_1(b,\omega)\leq L(\omega)"$$

Demostración:

Sea D un subconjunto numerable denso en R^n. Para cada $f\varepsilon\{g,h:(i,\rho,\sigma)\}$ y cada $x\varepsilon R^n$, el proceso

$$f(t,x,\omega)$$

es separable y F-medible, por [HE-5-6].

Definimos $L_1(t,\omega)$, para cada $t\varepsilon[a,b]$ y cada $\omega\varepsilon\Omega$, como el supremo

$$\sup\ \{\frac{|f(s,x,\omega)-f(s,x',\omega)|}{|x-x'|},\ |f(s,0,\ldots 0,\omega)|\}$$

tomado en $s\varepsilon[a,t]$; $x,x'(\neq)\varepsilon D$; $f\varepsilon\{g,h:(i,\rho,\sigma)\}$.

Puesto que, para cada $t\varepsilon[a,b]$ y cada $\omega\varepsilon\Omega_L$, $f(t,x,\omega)$ es una función continua respecto de x en R^n, podemos escribir

$$|f(t,x',\omega)-f(t,x,\omega)|\leq L_1(t,\omega)|x-x'|$$

$$|f(t,0,\ldots 0,\ )|\leq L_1(t,\omega)$$

para cada $f\varepsilon\{g,h:(i,\rho,\sigma)\}$; $x,x'\varepsilon R^n$; $t\varepsilon[a,b]$; $\omega\varepsilon\Omega_L$. Así puede probarse b). L_1 es F-medible, por la forma en que se ha definido, a partir de procesos F-medibles quedando probado a). Por último, por construcción y por (HE-4), se observa inmediatamente que para cada $\omega\varepsilon\Omega$ y cada $s,t\varepsilon[a,b]$, con $s\leq t$

$$L_1(s,\omega)\leq L_1(t,\omega)\leq L(\omega)$$

lo que establece c) y d).

II.6.5.2.- A continuación establecemos el <u>teorema de existencia y unicidad</u> de solución en la situación planteada:

<u>TEOREMA</u>:

"Sean las hipótesis [HE]. Sea $\alpha\varepsilon H^{2*}_{F,n}$.
Entonces, existe un único elemento $\tilde{x}^*$ en $\tilde{H}^{2*}_{F,n}+\tilde{H}^{*}_{F,n}$ tal que cualquier $x^*\varepsilon\tilde{x}^*$ es solución de $E[\alpha,g,h]$."

NOTAS: 1) Téngase en cuenta que, en general,

$$H^{2*}_{F,n}\not\equiv \bar{H}^{2*}_{F,n}\qquad\qquad H^{*}_{F,n}\not\equiv \bar{H}^{*}_{F,n}.$$

2) En el enunciado bastaría exigir que $\tilde{\alpha}\varepsilon\tilde{H}^{2*}_{F,n}$, según hemos visto en la proposición (II.5.2.4).

3) En realidad, la unicidad se extiende a la clase $CL(\tilde{H}^{2*}_{F,n})$, como vemos en el teorema (II.6.6.1). No obstante, como observamos allí, cualqui solución en $CL(\tilde{H}^{2*}_{F,n})$ pertenecerá, en particular, en este caso, a $\tilde{H}^{2*}_{F,}$ $\tilde{H}^{*}_{F,n}$.

Demostración:

a) <u>Existencia</u>: Vamos a ver que existe un proceso $x^*\varepsilon H^{2*}_{F,n}+H^{*}_{F,n}$ que verifica $E[\alpha,g,h]$. Para ello utilizaremos el método de truncamiento (en α y L_1) y no apoyaremos en el teorema (II.6.4.1).

Sea, para cada i

$$\alpha^i\equiv b^i.y^i\quad\text{con}\quad b^i\varepsilon H^{*}_{F}\ ,\ y^i\varepsilon H^{2}_{F}$$

Sea B una variable aleatoria finita c.s. tal que para cada $\omega\varepsilon\Omega$

$$|b^i(t,\omega)|\leq B(\omega)$$

para todo $t\epsilon[a,b]$ y todo $i\epsilon\{1,...n\}$.

Sea, para cada $M\epsilon N$, el conjunto

$$\Omega_M=\{\omega: \max\{B(\omega),\ L(\omega)\}\leq M\}$$

$\{\Omega_M\}_{M\epsilon N}$ es una sucesión creciente de elementos de A y además

$$P(\Omega_M)\uparrow 1$$

cuando M tiende a ∞.

A partir del lema (II.6.5.1) definimos para cada $M\epsilon N$ el proceso Φ_M del siguiente modo: para cada $t\epsilon[a,b]$ y cada $\omega\epsilon\Omega$

$$\Phi_M(t,\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_1(t,\omega)\leq M \\ 0 & \text{si } L_1(t,\omega)>M \end{cases}$$

Φ_M es F-medible. Es P-continuo en $[a,b]$, salvo a lo sumo en un conjunto numerable de puntos, pues

$$1\geq E[\Phi_M(t,\omega)]\geq P(\Omega_M)$$

y $E[\Phi_M(t,\omega)]$ es no decreciente en t. Además, $\Phi_M(t,\omega)$ es separable, trivialment

Entonces, $\Phi_M.f$ satisface las hipótesis [HE-4-5-6],M en lugar de $L(\omega)$, par cada $f\epsilon\{g,h;(i,\rho,\sigma)\}$.

Sea, para cada $M\epsilon N$ y cada i,el proceso b_M definido para cada $t\epsilon[a,b]$ y cada $\omega\epsilon\Omega$ por

$$b^i_M(t,\omega)=\text{med}\{b^i(t,\omega),M,-M\}$$

Entonces, el proceso α_M definido para cada i por

$$\alpha^i_M\equiv b^i_M.y^i$$

pertenece a $H^2_{F,n}$, por el corolario (I.3.5.5)

Por el teorema fundamental (II.6.4.1), el sistema

$$E[\alpha_M,\ \Phi_M g,\ \Phi_M h]$$

posee una única solución (salvo equivalencia) en $H^2_{F,n}$, que notaremos x^*_M.

Construimos el proceso

$$x^*:[a,b]\times\Omega \to R^n$$

del siguiente modo: para cada $t\varepsilon[a,b]$, $\omega\varepsilon\Omega$

$$x^*(t,\omega)=\begin{cases} x^*_M(t,\omega) & \text{si } \omega\varepsilon\Omega_M-\Omega_{M-1} \quad (M=1,2,\dots) \\ 0 & \text{si } \omega\varepsilon\Omega-(\bigcup_M \Omega_M) \end{cases}$$

(se supone $\Omega_o = \emptyset$).

Veamos que x^* es solución de $E[\alpha,g,h]$. En efecto:

Sea $\varepsilon>0$. Sea M' tal que $P(\Omega_{M'})>1-\varepsilon/2$. Entonces, existirá $\delta>0$ tal que para todo $i\varepsilon\{1,\dots n\}$, todo $M\varepsilon\{1,\dots M'\}$, todo $t\varepsilon[a,b]$ y toda $\pi\varepsilon B([a,b])$ con $\operatorname{eng}(\pi)<\delta$

$$P\{\omega\,\varepsilon\, \Omega_M-\Omega_{M-1}:|x^{*i}_M(t,\omega)-\alpha^i_M(t,\omega)-\sum_{\rho=1}^{r} S(\pi_t;\Phi_M g^i_\rho(t,x^*_M);z^\rho)(\omega)-$$

$$-\sum_{\rho,\sigma=1}^{r} S(\pi_t;\Phi_M h^i_{\rho\sigma}(t,x^*_M);z^\rho,z^\sigma)(\omega)|\geq\varepsilon\}\leq \frac{\varepsilon}{2M'}$$

Pero, si $\omega\varepsilon\Omega_M-\Omega_{M-1}$, se tiene que

$$\Phi_M(\cdot,\omega)\equiv 1$$

$$\alpha_M(\cdot,\omega)\equiv\alpha\ (\cdot,\omega)$$

$$x^*_M(\cdot,\omega)\equiv x^*(\cdot,\omega)$$

Así, sumando en $M=1,\dots M'$ obtenemos

$$P\{\omega\,\varepsilon\,\Omega_{M'}:|x^{*i}(t,\omega)-\alpha^i(t,\omega)-\sum_{\rho=1}^{r} S(\pi_t;g^i_\rho(t,x^*);z^\rho)(\omega)-$$

$$-\sum_{\rho,\sigma=1}^{r} S(\pi_t;h^i_{\rho\sigma}(t,x^*);z^\rho,z^\sigma)(\omega)|>\varepsilon\}\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

Como $P(\Omega_{M'})>1-\varepsilon/2$, podemos escribir

$$P\{\omega:|x^{*i}(t,\omega)-\alpha^i(t,\omega)-\sum_{\rho=1}^{r} S(\pi_t;g^i_\rho(t,x^*),z^\rho)(\omega)-$$

$$-\sum_{\rho,\sigma=1}^{r} S(\pi_t;h^i_{\rho\sigma}(t,x^*);z^\rho,z^\sigma)(\omega)|>\varepsilon\}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Es decir, x^* satisface $E[\alpha,g,h]$, como queríamos demostrar.

Veamos que x^* pertenece a $\bar{H}^{2*}_{F,n}+\bar{H}^{*}_{F,n}$, es decir, que tiene una versión en $H^{2*}_{F,n}+H^{*}_{F,n}$.

Basta ver que $I[g,h;x^*]$ pertenece a $\bar{H}^*_{F,n}$. En efecto, puesto que $x^*_M \varepsilon H^2_{F,n}$ (para cada M), se tiene que

$$f(t,x^*_M(t,\omega),\omega)\varepsilon H^2_F$$

para cada $f\varepsilon\{g,h;(i,\rho,\sigma)\}$, según hemos visto en la demostración del teorema -(II.6.4.1). Entonces, por los teoremas (II.3.5.3) y (II.3.6.3), podemos elegir para cada integral indefinida en $I[g,h;x^*_M]$ una versión perteneciente a H^*_F y separable. Puesto que las integrales en $I[g,h;x^*_M]$ coinciden c.s., para cada t, con las respectivas integrales en $I[g,h;x^*]$, al menos en $\Omega_M-\Omega_{M-1}$ (por la propiedad (I.2.3)),el proceso I definido para cada $\omega\varepsilon\Omega$ por

$$I(.,\omega)\equiv\begin{cases} I[g,h;x^*_M](.,\omega) & \text{si } \omega\varepsilon\Omega_M-\Omega_{M-1} \quad (M=1,\dots) \\ 0 & \text{si } \omega\varepsilon\Omega-(\bigcup_M \Omega_M) \end{cases}$$

es una versión de $I[g,h;x^*]$. I es separable, y tiene aplicación global acotada c.s. puesto que para cada M

$$\sup_{[a,b]} I[g,h;x^*_M](t,\omega) \underset{c.s.}{<} \infty$$

y entonces

$$\sup I(t,\omega) \underset{c.s.}{<} \infty$$

Además, I es P-continuo y F-medible, por los corolarios (II.2.4-I-II).

En definitiva, $x^*\varepsilon \bar{H}^{2*}_{F,n} + \bar{H}^*_{F,n}$. Cualquier elemento $x\varepsilon \tilde{x}{}^*$ es también solució de $E[\alpha,g,h]$, por la proposición (II.5.2.3)

b) Unicidad: Veamos que si x^*_1, $x^*_2 \varepsilon \bar{H}^{2*}_{F,n} + \bar{H}^*_{F,n}$ son soluciones de $E[\alpha,g,h$ entonces $x^*_1 \sim x^*_2$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que x^*_1, $x^*_2 \varepsilon H^{2*}_{F,n} + H^{2*}_{F,n}$, por la proposición (II.5.2.3):

$$x^*_1 \equiv b_1.y_1+d_1$$

$$x^*_2 \equiv b_2.y_2+d_2$$

siendo y_1, $y_2 \varepsilon H^2_{F,n}$, y b_1, b_2, d_1, $d_2 \varepsilon H^*_{F,n}$. (En realidad, se podría suponer que $b_1\equiv b_2\equiv b$ e $y_1\equiv y_2\equiv y$, siendo $\alpha\equiv by$; pero esto no es necesario)

Sea B_0 una variable aleatoria $\bar{R}$-valuada finita c.s. que acote simultánea mente las trayectorias de b_1^i, b_2^i, d_1^i, d_2^i, para todo $i\in\{1,\dots n\}$.

Sea, para cada $V\in N$, el conjunto

$$\Omega^V=\{\omega:B_o(\omega)<V\}$$

y sea para cada $M\in N$ el conjunto Ω_M definido como en a):

$$\Omega_M=\{\omega:\max\{B(\omega),L(\omega)\}<M\}$$

siendo B una v.a. R-valuada finita c.s. que acota las trayectorias del factor b en la condición inicial α.

Se comprueba inmediatamente que

$$P(\Omega^V)\uparrow 1 \quad \text{cuando } V \text{ tiende a } \infty, \text{ y}$$

$$P(\Omega_M)\uparrow 1 \quad \text{cuando } M \text{ tiende a } \infty.$$

Por reducción al absurdo: Supongamos que existe $t\in[a,b]$ tal que

$$P[x_1^*(t,\omega)\neq x_2^*(t,\omega)]>0$$

Entonces existirán V_o y M_o tales que el conjunto

$$\Delta\equiv\Omega^{V_o}\cap\Omega_{M_o}\cap\{x_1^*(t,\omega)\neq x_2^*(t,\omega)\}$$

tiene medida $P(\Delta)>0$

Truncamos b_1, b_2, d_1 y d_2 en $\pm V_o$, como es usual, y definimos correspondientemente $x_{1V_o}^*$ y $x_{2V_o}^*$. Tales procesos serán, pues, elementos de $H_{F,n}^2$.

Sobre Ω^{V_o}, $x_{1V_o}^*$ y $x_{2V_o}^*$ coinciden respectivamente con x_1^* y x_2^*.

Por otra parte, en Ω_{M_o} la solución es única (salvo equivalencia) en $H_{F,n}^2$, como hemos visto en la demostración del teorema (II.6.4.1).

Por tanto, $x_{1V_o}^*$ y $x_{2V_o}^*$ han de coincidir c.s. en Δ con la única solución (salvo equivalencia) de $E[\alpha,g,h]$ en Δ y, por tanto, entre sí. Pero entonces, habría de ser $P(\Delta)=0$, y llegamos así a una contradicción.

Por tanto, x_1^* y x_2^* han de ser equivalentes.

b') Unicidad: Una vía alternativa particularmente interesante que proponemos también para probar la unicidad de solución, basándonos en el lema de Gronwall (II.6.3.2), es la siguiente:

Sean x_1^* y x_2^* definidos como en el punto anterior, y supongamos que los procesos b_1, b_2, d_1 y d_2 se han elegido separables (esto es posible teniendo en cuenta las proposiciones (II.3.2) y (II.5.2.4)).

Sea, para cada $M\in N$ y cada $t\in[a,b]$, el conjunto

$$\Omega_M(t)=\{\omega:\ \max\{\sup_{\substack{\alpha=1,2\ [a,t]\\ i=1,\dots n}}|b_\alpha^i(s,\omega)|,\ \sup_{[a,t]}|d_\alpha^i(s,\omega)|,L_1(t,\omega)\}\leq M\}$$

donde L_1 viene definido por el lema (II.6.5.1).

Entonces, dado $\varepsilon>0$ existirá $M\in N$ tal que

$$P[\Omega_M(b)]>1-\varepsilon$$

Sea, para cada $M\in N$, el proceso ϕ_M definido para cada $t\in[a,b]$ y $\omega\in\Omega$ por:

$$\phi_M(t,\omega)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \omega\in\Omega_M(t)\\ 0 & \text{si} \quad \omega\notin\Omega_M(t)\end{cases}$$

y sea $\bar{\phi}_M\equiv(\phi_M,\overset{n}{\dots}\phi_M)$.

Se comprueba fácilmente que $\phi_M\in H_F^*\cap H_F^2$. Además, si $a\leq s\leq t\leq b$, se tiene que

$$\phi_M(t,.)\equiv\phi_M(t,.).\phi_M(s,.)$$

Puesto que cada $\bar{\phi}_M.x_\alpha^*$ $(\alpha=1,2)$ es P-continuo en c.t.p. de $[a,b]$, y

$$|\phi_M x_\alpha^{*i}|\leq|\phi_M b_\alpha^i y_\alpha^i|+|\phi_M d_\alpha^i|\leq|y_\alpha^i|.M+M$$

el lema (I.3.5.4) permite afirmar que $\bar{\phi}_M x_\alpha^*$ pertenece a $H_{F,n}^2$.

También, para cada $f\in\{g,h;(i,\rho,\sigma)\}$

$$\phi_M(t,\omega).f(t,x_\alpha^*(t,\omega),\omega)$$

pertenecerá a H_F^2. En efecto: se observa que

$$\phi_M(t,\omega).f(t,x_\alpha^*(t,\omega),\omega)=\phi_M(t,\omega).f(t,\bar{\phi}_M(t,\omega).x_\alpha^*(t,\omega),\omega)$$

y, puesto que

$$f(t,\bar{\phi}_M(t,\omega)x^*(t,\omega),\omega)$$

es L_2-continuo en c.t.p. de $[a,b]$ (según vimos en el punto a) de la demostración del teorema (II.6.4.1)) y $\phi_M(t,\omega)$ es P-continuo en c.t.p. de $[a,b]$ y acotado por 1, por el lema (I.3.5.4) se tiene que

$$\phi_M(t,\omega).f(t,\bar{\phi}_M(t,\omega).x^*_\alpha(t,\omega),\omega)$$

pertenece a H^2_F.

Entonces, podemos escribir, para cada $t\in[a,b]$

$$\|\phi_M(t,\omega)[x^{*i}_1(t,\omega)-x^{*i}_2(t,\omega)]\|^2\leq$$

$$\leq\|\phi_M(t,\omega)\{\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t[g^i_\rho(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-g^i_\rho(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)+$$

$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t[h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)\|^2\leq$$

$$\leq\|\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t\phi_M(s,\omega)[g^i_\rho(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-g^i_\rho(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)+$$

$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t\phi_M(s,\omega)[h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)\|^2\leq$$

$$\leq(r+r^2)\{\sum_{\rho=1}^{r}\|\int_a^t\phi_M(s,\omega)[g^i_\rho(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-g^i_\rho(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)\|^2+$$

$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\|\int_a^t\phi_M(s,\omega)[h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]dz^\rho(s,\omega)dz^\rho(s,\omega)\|^2\}\leq$$

$$\leq(r+r^2)C^2\{\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t\|\phi_M(s,\omega)[g^i_\rho(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-g^i_\rho(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]\|^2dt+$$

$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t\|\phi_M(s,\omega)[h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_1(s,\omega),\omega)-h^i_{\rho\sigma}(s,x^*_2(s,\omega),\omega)]\|^2dt\}\leq$$

$$\leq(r+r^2)C^2M^2\int_a^t\|\bar{\phi}_M(s,\omega)[x^*_1(s,\omega)-x^*_2(s,\omega)]\|^2dt$$

(C se define como en el lema (I.3.5.2))

Sumando en i=1,...n y notando $C'=(r+r^2)^2C^2M^2n$ tenemos que

$$\|\bar{\phi}_M(s,\omega)[x^*_1(t,\omega)-x^*_2(t,\omega)]\|^2\leq C'\int_a^t\|\bar{\phi}_M(s,\omega)[x^*_1(s,\omega)-x^*_2(s,\omega)]\|^2dt$$

Aplicando el lema de Gronwall (II.6.3.2), tenemos que

$$\|\bar{\phi}_M(t,\omega)[x^*_1(t,\omega)-x^*_2(t,\omega)]\|^2=0$$

Es decir, para cada $t\in[a,b]$

$$\bar{\phi}_M(t,.).x^*_1(t,.)\equiv\bar{\phi}_M(t,.).x^*_2(t,.)\qquad \text{c.s.}$$

Esto quiere decir que para cada t

$$x_1^*(t,\omega)=x_2^*(t,\omega)$$

al menos para cada $\omega\epsilon\Omega_M(t)$.

Puesto que para cada t

$$P[x_1^*(t,\omega)=x_2^*(t,\omega)]\geq P[\Omega_M(t)]\geq P[\Omega_M(b)]$$

llegamos a la conclusión de que para cada $\varepsilon>0$

$$P[x_1^*(t,\omega)=x_2^*(t,\omega)]>1-\varepsilon$$

es decir, ha de ser

$$P[x_1^*(t,\omega)=x_2^*(t,\omega)]=1$$

Por tanto, x_1^* y x_2^* son equivalentes.

II.6.5.3.- A partir de la demostración del teorema anterior obtenemos el siguiente corolario. El apartado b) corresponde al <u>caso B'</u> que planteamos en (II.6.2).

<u>COROLARIO</u>:

"Bajo las condiciones del teorema (II.6.5.2), si x^* es la solución (salvo equivalencia) de $E[\alpha,g,h]$, se verifica que:

a) La clase definida por $\tilde{x}^*-\tilde{\alpha}$ pertenece a $\tilde{H}^*_{F,n}$

b) Si $\tilde{\alpha}\,\epsilon\,\tilde{H}^*_{F,n}$, entonces $\tilde{x}^*$ pertenece a $\tilde{H}^*_{F,n}$

c) x^* y α tienen los mismos puntos de P-discontinuidad, (siendo x^* cualquier versión de la solución)."

Demostración:

El apartado a) se deduce de la última parte del punto a) en la demostración del teorema (II.6.5.2).

Puesto que la clase $H^*_{F,n}$ es cerrada para la suma, se tiene inmediatamente el apartado b) a partir de a).

Por último, c) es cierto como consecuencia de que $x^*-\alpha$, que es igual c.s. a $I[g,h;x^*]$, es P-continuo en todo punto de $[a,b]$, por los corolarios (II.2.4-I-II).

Por tanto, siempre podremos encontrar una versión de la solución en $H^{2*}_{F,n}$ + $H^{*}_{F,n}$, y en el caso correspondiente a b), en $H^{*}_{F,n}$.

II.6.5.4.- Caso B-Reg: α regular y z^{ρ} ($\rho=1,\ldots r$) regulares:

Análogamente a como hicimos en el caso A, en el caso de regularidad de la condición inicial y los integradores podemos establecer el siguiente resultado

COROLARIO:

"Bajo las condiciones del teorema (II.6.5.2), se verifica que:

a) Si x^{*}_{1} y x^{*}_{2} son versiones de la solución pertenecientes a Reg($H_{F,n}$), entonces x^{*}_{1} y x^{*}_{2} son iguales c.s.

b) Si $z^{\rho}\varepsilon \mathrm{Reg}(z^{4}_{F})$ ($\rho=1,\ldots r$), entonces existe una versión x^{*} de la solución tal que $x^{*}-\alpha\varepsilon \mathrm{EReg}(H_{F,n})$

c) Si $z^{\rho}\varepsilon \mathrm{Reg}(z^{4}_{F})$ ($\rho=1,\ldots r$) y $\alpha\varepsilon \mathrm{Reg}(H_{F,n})$, entonces existe una versión de la solución que pertenece a EReg($H_{F,n}$)."

Demostración:

El apartado a) se demuestra exactamente igual que en el corolario (II.6.4.3), teniendo en cuenta que x^{*}_{1} y x^{*}_{2} han de ser equivalentes, puesto que por la proposición (II.4.2.1)

$$\mathrm{Reg}(H_{F,n}) \subset H^{*}_{F,n}$$

y la última clase está contenida en $H^{2*}_{F,n}$ + $H^{*}_{F,n}$, clase en la que hemos probado la unicidad de solución.

El apartado b) del enunciado es consecuencia inmediata de los teoremas (II.4.4) y (II.4.5) sobre continuidad muestral en integrales retardadas indefinidas.

Por último, c) se deduce inmediatamente a partir de b).

II.6.6.- Caso C: La condición inicial α pertenece a CL($H^{2*}_{F,n}$)

Este caso constituye en realidad una extensión del caso B cuyo estudio realizamos mediante los mismos procedimientos usados en éste con simples modoficaciones. Su interés, más que en el aspecto matemático radica, pues, en cuestiones de interpretación de la condición inicial, que aquí se puede considerar como el cúmulo de distintas informaciones provenientes de varias fuentes diferentes, siempre que cada una de ellas venga representada por un proceso perteneciente a $H^{2*}_{F,n}$.

Evidentemente, este caso es más general que los anteriores, a los que engloba como casos particulares. No obstante, los resultados se obtienen sin dificultad una vez obtenidos los correspondientes a los casos A y B.

II.6.6.1.- Teniendo en cuenta que la clase $CL(H^{2*}_{F,n})$ es cerrada para la suma, establecemos el siguiente teorema de existencia y unicidad de solución:

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [HE]. Sea $\alpha\varepsilon CL(H^{2*}_{F,n})$.

Entonces, existe un único elemento $\tilde{x}^*$ en $CL(\tilde{H}^{2*}_{F,n})$ tal que cualquier $x^*\varepsilon\tilde{x}$ es solución de $E[\alpha,g,h]$."

NOTAS: 1) Como en (II.6.5.2), téngase en cuenta que, en general

$$CL(H^{2*}_{F,n}) \not\equiv CL(\bar{H}^{2*}_{F,n}).$$

2) En el enunciado en realidad bastaría exigir que $\tilde{\alpha}\varepsilon CL(\tilde{H}^{2*}_{F,n})$, según se deduce de la proposición (II.5.2.4)

Demostración:

La prueba es similar a la del teorema (II.6.5.2), con ciertas modificaciones formales:

a) Existencia: Supongamos que para cada $i\varepsilon\{1,\ldots n\}$ (y con m independiente de i)

$$\alpha^i \equiv \sum_{j=1}^{m} b^i_j . y^i_j \quad ,$$

siendo $b_j \varepsilon H^*_{F,n}$, $y_j \varepsilon H^2_{F,n}$, para todo $j\varepsilon\{1,\ldots m\}$.

Sea B una variable aleatoria finita c.s. tal que para cada $\omega\varepsilon\Omega$

$$|b^i_j(t,\omega)| \leq B(\omega)$$

para todo $t\varepsilon[a,b]$, todo $i\varepsilon\{1,\ldots n\}$ y todo $j\varepsilon\{1,\ldots m\}$.

Definimos Ω_M como en el punto a) de la demostración del teorema (II.6.5.2). Análogamente, definimos exactamente como allí el proceso Φ_M, (para cada $M\in N$).

Para cada $M\in N$, cada $i\in\{1,...n\}$ y cada $j\in\{1,...m\}$, definimos el proceso b^i_{jM} tal que para cada $t\in[a,b]$ y cada $\omega\in\Omega$

$$b^i_{jM}(t,\omega)=\text{med }\{b^i_j(t,\omega),\ M,-M\}$$

y definimos

$$\alpha^i_M \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{jM}.y_j$$

Así, α^i_M pertenecerá a $H^2_{F,n}$, por el corolario (I.3.5.5) y puesto que la clase $H^2_{F,n}$ es cerrada para la suma.

Por el teorema (II.6.4.1), el sistema

$$E[\alpha_M,\Phi_M g,\Phi_M h]$$

tiene solución única (salvo equivalencia) en $H^2_{F,n}$, que notamos x^*_M.

Construimos el proceso x^* exactamente igual que en la demostración de (II.6.5.2) apartado a)), a partir de los valores que forman las soluciones parciales x^*_M en los conjuntos $\Omega_M-\Omega_{M-1}$, respectivamente (para M=1,2,...). Se comprueba exactamente igual que allí que x^* satisface $E[\alpha ,g,h]$. Es decir

$$x^*\equiv\alpha+I[g,h;x^*] \qquad \text{(c.s.)}$$

Como en la demostración de (II.6.5.2), se prueba que $I[g,h;x^*]\in\bar{H}^*_{F,n}$, a pa tir de los teoremas (II.3.5.3) y (II.3.6.3), y los corolarios (II.2.4.-I-II).

b) <u>Unicidad</u>: Para probar la unicidad podemos seguir cualquiera de las víe alternativas que propusimos en la demostración del teorema (II.6.5.2), con sim ples modificaciones.

Por ejemplo, si tomamos la vía b'), correspondiente a la aplicación del] ma de Gronwall, la prueba será exactamente igual que allí sin más que considerar ahora

$$x^{*i}_1 \equiv \sum_{j=1}^{q} b^i_{1j}.y^i_{1j}$$

$$x^{*i}_2 \equiv \sum_{j=1}^{q} b^i_{2j}.y^i_{2j}$$

con $b^i_{\alpha j}\varepsilon H^*_F$, $y^i_{\alpha j}\varepsilon H^2_F$ (para $\alpha=1,2$; $j=1,\ldots q$; $i=1,\ldots n$) (Si q fuese distinto para ambas sumas, bastaría completar una de ellas con ceros para que fuese común a las dos), y definir, para cada $t\varepsilon[a,b]$ y cada $M\varepsilon N$

$$\Omega_M(t)=\{\omega:\ \max_{\substack{\alpha=1,2\\ i=1,\ldots n\\ j=1,\ldots q}} \{\sup_{[a,t]} |b^i_{\alpha j}(s,\omega)|,\ L_1(t,\omega)\}\leq M\}$$

concluyendo que x^*_1 y x^*_2 son equivalentes.

(Obsérvese que en realidad, a partir del apartado anterior se podrían considerar más concretamente

$$x^{*i}_1 \equiv \alpha^i+d^i_1$$
$$x^{*i}_2 \equiv \alpha^i+d^i_2$$

con $d_1, d_2\varepsilon H^*_{F,n}$).

<u>Observación</u>: En el enunciado del teorema se podrá precisar aún más: Si α pertenece a

$$\bar{H}^{2*}_{F,n} \overset{m}{+ \cdots +} \bar{H}^{2*}_{F,n}$$

la solución (salvo equivalencia) x^* pertenecerá a

$$(\bar{H}^{2*}_{F,n} \overset{m}{+ \cdots +} \bar{H}^{2*}_{F,n}) + \bar{H}^*_{F,n}$$

puesto que

$$x^* \equiv \alpha + I[g,h;x^*] \qquad (c.s.)$$

y para cualquier $x\varepsilon CL(\bar{H}^{2*}_{F,n})$ se puede comprobar, como en el punto a) de la demostración de (II.6.5.2), por truncamiento, que $I[g,h;x^*]\ \varepsilon\ \bar{H}^*_{F,n}$.

II.6.6.2.- El <u>caso B'</u> se obtiene también, evidentemente, como particularización del caso C.

De hecho, <u>los apartados a), b) y c) del corolario (II.6.5.3) se verifican exactamente en los mismos términos bajo las condiciones del teorema (II.6.6.1)</u>

II.6.6.3.- <u>Caso C-Reg: α regular y z^ρ ($\rho=1,\ldots r$) regulares</u>.

En virtud de la proposición (II.4.2.2), el caso C-Reg <u>coincide con el caso</u>

B-Reg, puesto que

$$\mathrm{Reg}(\mathrm{CL}(H^{2*}_{F,n})) \equiv \mathrm{Reg}(H_{F,n}) \subset H^{*}_{F,n}$$

Es más, los apartados a), b) y c) del corolario (II.6.5.4) se verifican - exactamente en los mismos términos bajo las condiciones del teorema(II.6.5.2), como puede observarse fácilmente.

II.6.7.- Caso particular: La condición inicial α no depende de t.

Un caso particular especialmente importante en S.E.I.E.'s es aquel en que la condición inicial α en $E[\alpha,g,h]$ es una variable aleatoria, que, por tanto, determina casi seguramente el valor de cualquier solución del sistema en el -- instante origen sin aportar más información respecto a instantes posteriores - sobre la evolución de la misma. Dicha información adicional, sobre la dependencia directa respecto del tiempo de la magnitud cuya evolución se quiere estu-- diar a través del planteamiento y resolución del sistema correspondiente, vendrá dada, pues, en términos de una función que mida la "sensibilidad" de tal - magnitud respecto del transcurso del tiempo, y que aparecerá, pues, como una - de las funciones integrando g^{i}_{ρ} en $E[\alpha,g,h]$.

Este es, en realidad, el planteamiento original hecho por McShane en [10], basado en el planteamiento hecho anteriormente por Itô, y que se considera frecuentemente al estudiar sistemas estocásticos interpretados según distintos -- conceptos de integral estocástica (Itô, McShane, Fisk-Stratonovich,...), con - ciertas particularidades en cada caso. De hecho, el concepto de "condición inicial" en su sentido original correspondería al considerado en este caso, es decir, al de "valor de la magnitud en el instante inicial" mientras que nosotros adoptamos un contenido más general (considerado también con frecuencia; p.e., York [17], Elworthy [4],...), que engloba al anterior y que podría interpretarse como "valor de la magnitud en ausencia de perturbaciones externas" (si entendemos por éstas aquéllas a las que se asocia una cierta función de "sensibilidad incluido el caso en que una de las perturbaciones pueda ser el tiempo). McShar [10] considera, concretamente, el caso en que los integradores en $E[\alpha,g,h]$ sor regulares y α es una variable aleatoria, primero L_2-integrable y luego sin res tricción (F_a-medible, en cualquier caso).

En los siguientes puntos analizamos los casos en que α es una variable --

aleatoria L_2-integrable o cualquiera, y como caso particular, el estudiado por McShane (integradores regulares), a través de los resultados obtenidos en --- (II.6.4) y (II.6.5).

II.6.7.1.- <u>α es una v.a. F_a-medible L_2-integrable, y $L(\omega)\equiv L_o$ c.s.:</u>

Esto equivale a considerar que α es un proceso de trayectorias constantes es decir, siendo para cada $\omega\in\Omega$

$$\alpha(.,\omega)\equiv\alpha_a(\omega)$$

y siendo α_a una variable aleatoria F_a-medible tal que

$$||\alpha_a(\omega)|| < \infty$$

Por tanto, se puede afirmar que

$$\alpha\in \mathrm{EReg}(H^2_{F,n}) \subset H^2_{F,n}$$

y nos encontramos, pues, en el <u>caso A</u>, siendo aplicable el teorema (II.6.4.1). Además, puesto que α es L_2-continuo en todo punto de $[a,b]$, podremos asegurar, por el corolario (II.6.4.2) que la única solución (salvo equivalencia) x^* de - $E[\alpha,g,h]$ (en $H^2_{F,n}$), es un proceso L_2-continuo en todo punto de $[a,b]$.

Por otra parte, en el caso en que además, los integradores en $E[\alpha,g,h]$ - sean procesos regulares estaremos en el caso A-Reg y, por tanto, podremos afirmar por el corolario (II.6.4.3-c) que existe una versión muestralmente conti-- nua de la solución

II.6.7.2.- <u>α es una v.a. F_a-medible cualquiera:</u>

Evidentemente, este caso engloba el anterior y, por tanto, las consideraciones que aquí hacemos se aplicaron también a aquél.

En este caso podemos afirmar que

$$\alpha\in \mathrm{EReg}(H_F) \subset H^*_{F,n}$$

Así pues, nos encontramos en el <u>caso B'</u>. Podemos afirmar pues, por el corolari (II.6.5.3), que existe una versión de la solución que pertenece a $H^*_{F,n}$. Además cualquier versión de la solución será P-continua en todo punto de $[a,b]$, por - serlo α.

Por otra parte, en el caso en que además los integradores en $E[\alpha,g,h]$ sea procesos regulares, estaremos en el caso B-Reg y, por tanto podremos asegurar partir del corolario (II.6.5.4.-c) que existe una versión muestralmente contin de la solución.

CAPITULO III: SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS DE McSHANE CON COEFICIENTES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

III.0.- Introducción.

En la bibliografía existente sobre integración estocástica, se plantean problemas muy diversos que versan, bajo alguna forma concreta, sobre cómo la solución en un sistema de ecuaciones integrales estocásticas (posiblemente una sola ecuación, como se considera usualmente) se ve afectada por determinadas variaciones en los elementos que intervienen en éste. Bajo esta idea general, se suele adoptar la denominación común de "problema de regularidad" para cualquier problema cuyo planteamiento responda de algún modo a la misma.

En este capítulo, considerando la integración estocástica en el sentido de McShane, tratamos uno de los problemas clásicos de mayor interés sobre regularidad de soluciones, y que no ha sido aun tratado (salvo alguna escueta alusión) en la bibliografía conocida por nosotros sobre integrales estocásticas retardadas: la dependencia de la solución respecto de los coeficientes del sistema (condición inicial e integrandos), o más concretamente, variación de la solución respecto de los coeficientes del sistema cuando éstos dependen de un parámetro.

El estudio realizado en el capítulo anterior acerca de la existencia y unicidad de solución en sistemas de ecuaciones integrales estocásticas con integrales retardadas, en el que hemos abordado tal problema progresivamente en diversos casos, en lo que se refiere fundamentalmente a la clase a la que pertenece la condición inicial, servirá como base para el estudio del problema de regularidad considerado en este capítulo. De hecho, aquí se supondrán de partida las hipótesis que aseguran la existencia y unicidad de solución, y, por otra parte, consideraremos los mismos casos generales allí planteados, aunque en este caso se obtendrán algunas particularizaciones propias de especial interés.

Dentro del problema de regularidad concreto a que nos referimos, es posible (de hecho, esto se constata inmediatamente a la vista de la bibliografía existente al respecto) plantear el mismo desde distintos puntos de vista, según el tipo de convergencia utilizado para dar sentido al concepto de aproximación. En nuestro caso, tratamos el problema bajo dos formas diferantes: en primer lugar, en términos de L_2-convergencia uniforme (caso A), y, al extender a los casos más generales (casos B y C), en términos de P-convergencia uniforme; en segundo lugar, a partir de los resultados obtenidos en la primera etapa, estudiamos el problema bajo consideraciones algo más restrictivas (que afectarán sólo a la condición inicial) en términos de P-convergencia muestral uniforme (conjuntamente todos los casos anteriores).

A continuación explicamos con mayor detalle el desarrollo concreto -- realizado en cada uno de los cuatro apartados de que consta el capítulo.

En el primer apartado, planteamos formalmente el problema de regularidad considerado, definimos los tipos fundamentales de convergencia utilizados al respecto e introducimos los casos concretos en que será abordado el mismo, así como las hipótesis previas a considerar conjuntamente sobre los elementos de los sistemas considerados (a partir de las establecidas en el capítulo II al estudiar la existencia y unicidad de solución)

En el segundo, establecemos, como primera introducción en el problema, un resultado particular sobre dependencia de la solución respecto de la condición inicial, poniendo de manifiesto el carácter lipschitziano de tal dependencia.

En el tercer apartado, enunciamos y demostramos los teoremas fundamentales sobre regularidad de la solución que proponemos en los distintos casos considerados. Como en el capítulo anterior, el estudio se ha desarrollado de forma progresiva, por extensión de unos casos a otros, principalmente a través del método de truncamiento. En tal sentido, conviene señalar cómo a medida que se consideran casos más generales, una de las mayores dificultades en el planteamiento estriba en determinar la formalización directa de las hipótesis a exigir acerca del modo de convergencia en la parte de los sistemas correspondiente a la condición inicial. Por otra parte, la condición de convergencia a imponer sobre los integrandos podrá tomar distintas formas alternativas, como mostramos a través de un lema -- previo, al comienzo del apartado. Atendiendo a tales motivaciones, realizamos al final de cada teorema una discusión sobre las hipótesis que en él se exigen,de gran interés para su interpretación y posibles aplicaciones, en que consideramos distintas formas de plantear dichas hipótesis, y algu nos casos especiales en que las mismas son satisfechas. En lo que se refiere a los casos B y C, analizamos también distintos subcasos de especial interés cuyo planteamiento se obtiene, principalmente, al considerar ciertos factores constantes (o con un valor concreto) en la aproximación, entre los que definen formalmente los procesos que intervienen como condi ción inicial.

Finalmente, en el apartado cuarto, a partir de los resultados obteni dos en el apartado anterior, y aprovechando las interesantes desigualdades establecidas en el apartado (II.3), vemos cómo exigiendo una condición adicional sobre los procesos que intervienen como condición inicial, en el sentido de la que hemos denominado "P-convergencia muestral uniforme", es posible establecer el mismo tipo de convergencia para las correspondientes soluciones. Tal forma de convergencia tendrá especial importan cia. De hecho, permitirá asegurar la convergencia uniforme (en el sentido ordinario) de casi todas las funciones definidas como trayectorias, a las trayectorias de alguna solución concreta que se quiera aproximar, para al guna sucesión de valores del parámetro considerado; en el caso de aproximación de una solución mediante soluciones muestralmente continuas, ello tendrá un evidente interés, ya que permitirá asegurar también la continui dad muestral de la solución que se aproxima.

III.1.- Planteamiento del problema.

En este apartado, formalizamos el problema concreto que hemos abordado so bre regularidad de soluciones de sistemas de ecuaciones integrales estocástica del tipo considerado en el capítulo II. (Debe diferenciarse bien el concepto d regularidad que manejamos en este capítulo del concepto de "proceso regular", usado con frecuencia en el capítulo anterior; en efecto, mediante "regularidad de la solución" nos referimos a "variación de la solución en función de algún tipo de variación de determinados elementos que intervienen en el S.E.I.E." ; la coincidencia de términos se origina debido a que tal "variación" se concre za en una cierta forma de "dependencia continua").

Así mismo, determinamos los diversos casos (en cuanto a las propiedades y forma de la condición inicial) en los que hemos investigado el problema.

III.1.1.- S.E.I.E. con coeficientes dependientes de un parámetro.

Consideramos el sistema de ecuaciones integrales estocásticas

$$x_\lambda^i(t,\omega)=\alpha_\lambda^i(t,\omega)+\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g_{\lambda,\rho}^i(s,x_\lambda(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)+$$
$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t h_{\lambda,\rho\sigma}^i(s,x_\lambda(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega) \qquad (i=1,\dots n)$$

donde los coeficientes $\alpha_\lambda, g_{\lambda,\rho}, h_{\lambda,\rho\sigma}$ dependen de un cierto parámetro λ perten ciente a algún espacio topológico Λ.

Para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, tenemos, pues, un sistema del tipo considerado en(II.5.1.

Así pues, suponemos un conjunto de perturbaciones determinadas z^ρ (ρ=1,. ...r) cuyos incrementos se conocen, y suponemos que el resto de la informació disponible sobre el sistema, es decir, la condición inicial y las funciones d "sensibilidad" respecto de las perturbaciones de la magnitud que se mide, pue de variar y viene determinado en función del valor de un cierto parámetro λ.

NOTA: No abordamos en este estudio el problema de regularidad, propiamente de estabilidad del sistema, de la variación de la solución respecto de la riación de las perturbaciones. McShane [10] trata este problema en un ca particular.

III.1.2.- Planteamiento del problema. Tipos de convergencia.

El problema que se plantea, ya clásico, es el de estudiar la variación de la solución de $E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]$ respecto de la variación de $\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda$, en función de λ.

Concretamente, si se sabe que $\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda$ se aproximan en algún sentido a los coeficientes $\alpha_{\lambda_o}, g_{\lambda_o}, h_{\lambda_o}$, cuando $\lambda \to \lambda_o$, se trata de ver si la solución x^*_λ de $E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]$ se aproxima y en qué sentido lo hace a la solución $x^*_{\lambda_o}$ de $E[\alpha_{\lambda_o}, g_{\lambda_o}, h_{\lambda_o}]$.

En la bibliografía existente sobre el tema pueden encontrarse distintas formas de abordar el problema, que varían, aparte de por el tipo de integral y ecuaciones consideradas, por el tipo de convergencia considerado para concretizar el concepto de "aproximación". En efecto, se suelen considerar formas de convergencia de tipo estocástico, que varían desde convergencias más débiles (como la convergencia en probabilidad) hasta convergencias más fuertes que incluso pueden suponer la convergencia puntual, según las condiciones exigidas.

Nosotros, según los casos considerados en el estudio de la existencia y unicidad de solución, en el capítulo anterior, tratamos el problema fundamentalmente adoptando un concepto de aproximación basado en la P-convergencia uniforme o L_2-convergencia uniforme en el intervalo $[a,b]$:

Dada una sucesión de procesos $\{x_n\}_{n \in N}$, y un proceso x, definidos sobre $[a,b]$ y R (o R^n)-valuados, decimos que:

. x_n <u>converge en probabilidad a x uniformemente</u> en $[a,b]$ si para todo $\varepsilon>0$

$$\sup_{[a,b]} P[\,|x_n(t,\omega)-x(t,\omega)|>\varepsilon\,] \longrightarrow 0$$

cuando $n\to\infty$. <u>Notaremos</u>: $x_n \xrightarrow{P.n.} x$.

. x_n <u>converge en L_p-distancia en x uniformemente en $[a,b]$</u> si

$$\sup_{[a,b]} E\{[x_n(t,\omega)-x(t,\omega)]^p\} \longrightarrow 0$$

cuando $n\to\infty$; es decir, si

$$|||x_n - x|||_p \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$. Notaremos: $x_n \xrightarrow{|||\cdot|||_p} x$.

Posteriormente extendemos los resultados obtenidos, considerando un tipo de convergencia más fuerte que la P-convergencia uniforme: la P-convergencia - muestral uniforme (v.apartado (III.4)).

III.1.3.- Hipótesis previas y casos estudiados

III.1.3.1.- En los resultados que exponemos en este capítulo exigiremos siempı las hipótesis consideradas en el capítulo II para la existencia y unicidad de solución.

Así pues, mediante $[HE(\lambda)]$ notaremos al conjunto de hipótesis $[HE]$ (cons: deradas en (II.6.2)), referidas al sistema $E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]$. Como hemos observado ‹ el punto (III.1.1), suponemos que $z^\rho(\rho=1,\dots r)$ no dependen de λ. También supoı dremos (esto es importante) que $L(\omega)$ no depende de λ.

III.1.3.2.- Casos estudiados

En correspondencia con los casos A,B y C estudiados en el capítulo ante-- rior al tratar el problema de existencia y unicidad de solución, consideraremı en el nuevo problema los casos $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ y $C(\lambda)$ que a continuación definimos y en los que así mismo especificamos ciertos subcasos de particular interés:

. CASO $A(\lambda)$: $\alpha_\lambda \in H^2_{F,n}$ y $L(\omega) \equiv L_o$ (cte) c.s.

. CASO $B(\lambda)$: $\alpha_\lambda \in H^{2*}_{F,n}$

Dentro de éste, y suponiendo que $\alpha_\lambda \equiv b_\lambda . y_\lambda$, con $b_\lambda \in H^*_{F,n}$, $y_\lambda \in H^2_{F,\text{ı}}$ consideraremos los siguientes:

.CASO B.1(λ): $b_\lambda \equiv b$ (independiente de λ)

.CASO B.2(λ): $y_\lambda \equiv y$ (independiente de λ)

y como caso particular de éste:

.CASO B.2.1 (λ): $\alpha_\lambda \in H^*_{F,n}$

.CASO $C(\lambda)$: $\alpha_\lambda \in CL(H^{2*}_{F,n})$

Dentro de éste, y suponiendo que

$$\alpha_\lambda \equiv \sum_{j=1}^{m_\lambda} b_{\lambda_j} \cdot y_{\lambda_j} \qquad b_{\lambda_j} \in H^{*}_{F,n},\ y_{\lambda_j} \in H^{2}_{F,n}$$

consideraremos los siguientes:

.<u>CASO C.1(λ)</u>: $m_\lambda \equiv m$ (independiente de λ)

.<u>CASO C.2(λ)</u>: $b_{\lambda_j} \equiv b_j$ (independiente de λ)

.<u>CASO C.3(λ)</u>: $y_{\lambda_j} \equiv y_j$ (independiente de λ)

Exponemos el desarrollo de los resultados obtenidos correspondientes a lc casos anteriores en el apartado (III.3), y en apartado (III.4) una extensión c los mismos en conjunto, en el sentido antes indicado en (III.1.2).

Previamente, en el apartado (III.2), y como primera etapa en el estudio de problema, tratamos el caso particular en que sólo la condición inicial es vari ble estudiando la dependencia continua de la solución respecto de la misma. Es ta situación tiene especial interés, pues se establece en el caso correspondie te a $A(\lambda)$ el carácter Lipschitziano de tal dependencia, como veremos. En los - demás casos, se obtienen resultados que finalmente son particularizaciones de los obtenidos en el caso general (dependencia respecto de todos los coeficien- tes) y que, por ello, no demostramos.

<u>NOTA</u>: Esta última situación da lugar al planteamiento de un problema de regul ridad de distinto carácter: el de la diferenciabilidad de la solución respect de la condición inicial. Pueden verse como ejemplo, dos formas diferentes de plantear y resolver el problema en trabajos de Yor [17] (en el caso de la inte- gral de Itô y con condición inicial no estocástica ni temporal) y Elworthy [4 (tratamiento a través de derivadas direccionales, considerando la integral de McShane). Este problema concreto escapa a los objetivos de este estudio.

III.2.- Dependencia continua de la solución respecto de la condición inicial.

Consideremos sistemas del tipo $E[\alpha,g,h]$, con α variable y el resto de los elementos fijos. Vamos a ver cómo la solución obtenida bajo las condiciones de existencia y unicidad consideradas en el capítulo II depende continuamente de la condición inicial α.

III.2.1.- Carácter lipschitziano de la dependencia (Caso A):

Bajo las condiciones consideradas en el caso A estudiado en (II.6.4), establecemos el carácter lipschitziano de la dependencia de la solución respecto de la condición inicial.

TEOREMA:

"Sea el sistema $E[\alpha,g,h]$, donde α se considera variable.

Sean las hipótesis $\{HE\}$ (definidas en II.6.2), con $L(\omega)\equiv L_0$ c.s. Definimos la siguiente función:

$$F: \tilde{H}^2_{F,n} \longrightarrow \tilde{H}^2_{F,n}$$

que asocia a cada elemento $\tilde{\alpha}$ (clase de equivalencia) de $\tilde{H}^2_{F,n}$ la correspondiente clase solución $\tilde{x}^*$ de $E[\alpha,g,h]$

$$F(\tilde{\alpha}) = \tilde{x}^*$$

Entonces, la función F es lipschitziana sobre $\tilde{H}^2_{F,n}$, es decir, existe una constante $M\in R^+$ tal que

$$|||F(\tilde{\alpha}_1)-F(\tilde{\alpha}_2)|||\leq M\,|||\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2|||$$

para todo par de elementos $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2 \in \tilde{H}^2_{F,n}$".

Demostración:

Sean $\alpha_1,\alpha_2 \in H^2_{F,n}$. Sean x^*_1, x^*_2 versiones de las respectivas soluciones (existen y son únicas en cada caso, por el teorema (II.6.4.1)).

Aplicando las estimaciones establecidas en (I.4) y las hipótesis del teorema, se tiene que para cada $t\in[a,b]$

$$\| x_1^{*i}(t,\omega)-x_2^{*i}(t,\omega)\|^2 \leq$$

$$\leq (1+r+r^2)[\|\alpha_1^i(t,\omega)-\alpha_2^i(t,\omega)\|^2+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{r}\left\|\int_a^t [g_\rho^i(s,x_1^*(s,\omega),\omega)-g_\rho^i(s,x_2^*(s,\omega),\omega)]\,dz^\rho(s,\omega)\right\|^2+$$

$$+\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\left\|\int_a^t [h_{\rho\sigma}^i(s,x_1^*(s,\omega),\omega)-h_{\rho\sigma}^i(s,x_2^*(s,\omega),\omega)]\,dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)\right\|^2] \leq$$

$$\leq (1+r+r^2)[\|\alpha_1^i(t,\omega)-\alpha_2^i(t,\omega)\|^2+$$

$$+(r+r^2)C^2L_o^2\int_a^t \|x_1^*(s,\omega)-x_2^*(s,\omega)\|^2 ds]$$

Sumando en $i=1,\ldots n$ y tomando el supremo en $[a,b]$ en el término correspo diente a la condición inicial, se tiene que

$$\|x_1^*(t,\omega)-x_2^*(t,\omega)\|^2 \leq$$

$$\leq (1+r+r^2)[|||\alpha_1-\alpha_2|||^2+ n(r+r^2)C^2L_o^2\int_a^t \|x_1^*(s,\omega)-x_2^*(s,\omega)\|^2 ds]$$

Aplicando el lema de Gronwall (II.6.3.2),

$$\|x_1^*(t,\omega)-x_2^*(t,\omega)\|^2 \leq (1+r+r^2)e^{n(1+r+r^2)C^2L_o^2(t-a)}|||\alpha_1-\alpha_2|||$$

Tomando ahora supremos en $[a,b]$ en ambos miembros y con

$$M=(1+r+r^2)e^{n(1+r+r^2)C^2L_o^2(b-a)}$$

tenemos que

$$|||x_1^*-x_2^*|||^2 \leq M^2|||\alpha_1-\alpha_2|||^2$$

como queríamos demostrar.

III.2.2.- Extensiones (Casos B y C).

Aplicando el método de truncamiento podemos establecer resultados sobre pendencia continua de la solución respecto de la condición inicial, en térmi de la P-convergencia uniforme, para los casos B y C (v. punto(II.6.4)).Tales sultados no recogen ya ningún carácter lipschitziano de la dependencia, y se tienen como caso particular de resultados que demostramos en (III.3), por lo no los repetimos aquí. (En efecto, bastará para escribirlos omitir en el enu do la hipótesis correspondiente a convergencia de los coeficientes que inter nen como integrando (g_λ,h_λ)).

III.3.- Dependencia continua de la solución respecto de los coeficientes (I)

En este apartado exponemos detalladamente los resultados obtenidos en los diversos casos especificados en el apartado (III.1.3), siguiendo el orden en que allí se escriben. En todos los casos, $\{E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]; \lambda\varepsilon\Lambda\}$ representará una familia de S.E.I.E.'s con coeficientes dependientes de un parámetro λ perteneciente a algún espacio topológico Λ.

III.3.1.- Lema.

El siguiente resultado se refiere a las funciones que intervienen como integrando en los sistemas, es decir, $g_{\lambda,\rho}$ y $h_{\lambda,\rho\sigma}$ $(\rho,\sigma=1,\ldots r)$. En él ofrecemos dos formas alternativas de imponer la condición de convergencia respecto al parámetro λ para tales coeficientes con el fin de probar posteriormente la regularidad de la solución.

LEMA:

"Sean $\{f_\lambda\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$ funciones verificando las hipótesis $[HE(\lambda)]$ (definidas por la hipótesis (4)), con $L(\omega)\equiv L_o$ c.s.. Sea $x\varepsilon H^p_{F,n}$. Sean $r\varepsilon R^+$ y $\lambda_o\varepsilon\Lambda$.

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

condición $a[x]$: Para todo $t\varepsilon[a,b]-N$ (N Lebesgue-nulo)

$$f_\lambda(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$.

condición $b[x;p,r]$:

$$\int_a^b \|f_\lambda(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)\|_p^r dt \longrightarrow 0$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$."

NOTA: En realidad, en el lema son superfluas las hipótesis $[HE(\lambda)-2-3-6]$. Asímismo, se podrían debilitar las hipótesis $[HE(\lambda)-4]$ y $x\varepsilon H^p_{F,n}$. Pero, para nuestros propósitos en este trabajo, el lema es suficiente tal y como se ha enunciado.

Demostración:

<u>$a[x] \Rightarrow b[x;p,r]$</u>: En efecto, por $[HE(\lambda)-4]$, para cada $t\varepsilon[a,b]$, y cada $\lambda\varepsilon\Lambda$

$$|f_{\lambda}(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)| \leq 2L_o(1+|x(t,\omega)|)$$

casi seguramente (en realidad, no importará lo que ocurra en un subconjunto nulo de trayectorias).

Por ser x L_p-acotado, aplicando una consecuencia del teorema de L_p-convergencia (v. Loève [ ]), y por $a[x]$, deducimos que para cada $t\varepsilon[a,b]-N$

$$\|f_{\lambda}(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)\|_p^r \longrightarrow 0$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$.

Puesto que $\|2L_o(1+|x(t,\omega)|)\|_p^r$ es Riemann-integrable sobre $[a,b]$, por ser $x\varepsilon H^p_{F,n}$, es también Lebesgue-integrable sobre $[a,b]$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, las integrales de Lebesgue

$$\int_a^b \|f_{\lambda}(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)\|_p^r dt \longrightarrow 0$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$. Además, las integrales existen como integrales de Riemann, puesto que, por el lema (I.3.5.4), por $[HE(\lambda)-5]$ y por ser

$$2L_o(1+|x(t,\omega)|)\varepsilon H^p_F$$

se tiene que

$$f_{\lambda}(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)$$

es L_p-continuo en c.t.p. de $[a,b]$ (v. procedimiento usado en el apartado (a) de la demostración del teorema (II.6.4.1)), y es L_2-acotado, por la primera desigualdad en esta demostración.

<u>$b[x;p,r] \Rightarrow a[x]$</u>: Puesto que la función integrando en $b[x;p,r]$ es no negativa, ha de ser

$$\|f_{\lambda}(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)\|_p^r \longrightarrow 0$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$, para casi todo $t\varepsilon[a,b]$.

y de aquí se deduce automáticamente a[x].

III.3.2.- Caso $A(\lambda)$: α_λ pertenece a $H^2_{F,n}$ y $L(\omega)\equiv L_o$ c.s..

De acuerdo con lo establecido en el teorema (II.6.4.1) y en el lema anterior, establecemos el siguiente teorema fundamental sobre dependencia continua de la solución respecto de los coeficientes del sistema, que constituye la base a partir de la cual se obtendrán por extensión los restantes casos, aplicando el método de truncamiento.

TEOREMA:

"Sea $\{E[\alpha_\lambda,g_\lambda,h_\lambda];\lambda\varepsilon\Lambda\}$ una familia de S.E.I.E.'s verificando las hipótesis $[HE(\lambda)]$ con $L(\omega)\equiv L_o$ c.s.. Supongamos que $\alpha_\lambda\varepsilon H^2_{F,n}$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$. Sea x^* la única solución (salvo equivalencia) del sistema $E[\alpha_\lambda,g_\lambda,h_\lambda]$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$.

Sea $\lambda_o\varepsilon\Lambda$, y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

a) Para cada $x\varepsilon H^2_{F,n}$ existe $N_x\subset R$ Lebesgue-nulo tal que, para cada $t\varepsilon[a,b]-N_x$

$$g^i_{\lambda,\rho}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} g^i_{\lambda_o,\rho}(t,x(t,\omega),\omega)$$

$$h^i_{\lambda,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega)$$

(para cada $i=1,\dots n;\rho,\sigma=1,\dots r$), cuando $\lambda\to\lambda_o$.

b) $$\alpha_\lambda \xrightarrow{|||\cdot|||} \alpha_{\lambda_o}$$

cuando $\lambda\to\lambda_o$.

Entonces

$$x^*_\lambda \xrightarrow{|||\cdot|||} x^*_{\lambda_o}$$

cuando $\lambda\to\lambda_o$".

NOTAS: 1) La condición (a) del enunciado significa que para cada $x\varepsilon H^2_{F,n}$, el conjunto de familias

$$\{g^i_{\lambda,\rho}\}_{\lambda\varepsilon\Lambda} \qquad \{h^i_{\lambda,\rho\sigma}\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$$

(para cada $1=1,\ldots n;\rho,\sigma=1,\ldots r$) verifican la condición $a[x]$. Por tanto, por el lema (III.3.1), dicha condición se puede sustituir por la de que para cada $x\varepsilon H^2_{F,n}$, dichas familias verifiquen la -- condición $b[x;2,2]$, forma más conveniente que usaremos en la demostración.

2) Como también veremos en la demostración, bastará exigir la condición (a) del enunciado para $x^*_{\lambda_o}$, es decir, $a[x^*_{\lambda_o}]$ ó $b[x^*_{\lambda_o};2,2]$. Esta obsevación puede ser util para aquellos casos en que se disponga de información conveniente acerca de $x^*_{\lambda_o}$.

Demostración:

Sea $t\varepsilon[a,b]$. De acuerdo con las estimaciones obtenidas en (I.4) podemos escribir:

$$\|x^{*i}_{\lambda}(t,\omega)-x^{*i}_{\lambda_o}(t,\omega)\|^2 \leq$$

$$\leq (1+r+r^2)\{\|\alpha^i_\lambda(t,\omega)-\alpha^i_{\lambda_o}(t,\omega)\|^2 +$$

$$+ C^2\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t\|g^i_{\lambda,\rho}(s,x^*_\lambda(s,\omega),\omega)-g^i_{\lambda_o,\rho}(s,x^*_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)\|^2ds +$$

$$+ C^2\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t\|h^i_{\lambda,\rho\sigma}(s,x^*_\lambda(s,\omega),\omega)-h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(s,x^*_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)\|^2ds\}\leq$$

$$\leq (1+r+r^2)\{\|\alpha^i_\lambda(t,\omega)-\alpha^i_{\lambda_o}(t,\omega)\|^2 +$$

$$+ 2C^2\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t\|g^i_{\lambda,\rho}(s,x^*_\lambda(s,\omega),\omega)-g^i_{\lambda,\rho}(s,x^*_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)\|^2ds +$$

$$+ 2C^2\sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t\|g^i_{\lambda,\rho}(s,x^*_{\rho_o}(s,\omega),\omega)-g^i_{\lambda_o,\rho}(s,x^*_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)\|^2ds +$$

$$+ 2C^2\sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t\|h^i_{\lambda,\rho\sigma}(s,x^*_\lambda(s,\omega),\omega)-h^i_{\lambda,\rho\sigma}(s,x^*_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)\|^2ds +$$

$$+ 2C^2 \sum_{\rho,\sigma=1}^{r} \int_a^t \| h^i_{\lambda,\rho\sigma}(s, x^*_{\lambda_o}(s,\omega),\omega) - h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(s, x^*_{\lambda_o}(s,\omega),\omega) \|^2 ds \}$$

LLamamos $J^i_1(t)$, $J^i_2(t)$, $J^i_3(t)$, $J^i_4(t)$ a los cuatro últimos términos en la expresión anterior, respactivamente, en el orden correspondiente.

Aplicando en $J^i_1(t)$ y $J^i_3(t)$ la condición $[HE(\lambda)-4]$, obtenemos que

$$\| x^{*i}_{\lambda}(t,\omega) - x^{*i}_{\lambda_o}(t,\omega) \|^2 \leq$$

$$\leq (1+r+r^2) \{ \| \alpha^i_{\lambda}(t,\omega) - \alpha^i_{\lambda_o}(t,\omega) \|^2 +$$

$$+ J^i_2(t) + J^i_4(t) + 2(r+r^2) C^2 L^2_o \int_a^t \| x^*_{\lambda}(s,\omega) - x^*_{\lambda_o}(s,\omega) \|^2 ds \}$$

Sumando en $i=1,\dots n$, y con

$$C_1 = (||| \alpha_{\lambda} - \alpha_{\lambda_o} |||^2 + J_2 + J_4)(1+r+r^2) n$$

$$\text{siendo} \quad J_k = \sum_{i=1}^{n} J^i_k(b) \qquad (k=2,4)$$

$$C_2 = 2(1+r+r^2)(r+r^2) C^2 L^2_o n$$

obtenemos que, para cada $t \varepsilon [a,b]$

$$\| x^*_{\lambda}(t,\omega) - x^*_{\lambda_o}(t,\omega) \|^2 \leq C_1 + C_2 \int_a^t \| x^*_{\lambda}(s,\omega) - x^*_{\lambda_o}(s,\omega) \|^2 ds$$

Aplicando el lema de Gonwall (II.6.3.2), tenemos que

$$\| x^*_{\lambda}(t,\omega) - x^*_{\lambda_o}(t,\omega) \|^2 \leq C_1 e^{C_2(t-a)}$$

y, tomando supremos en $t \varepsilon [a,b]$

$$||| x^*_{\lambda} - x^*_{\lambda_o} |||^2 \leq C_1 e^{C_2(b-a)}$$

Por la hipótesis (a) del enunciado y por el lema (III.3.1), se tiene que

$$J_2 + J_4 \longrightarrow 0$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$. Teniendo en cuenta además la hipótesis (b), se deduce que

$$C_1 \longrightarrow 0$$

y así

$$|||x^*_\lambda - x^*_{\lambda_o}||| \longrightarrow 0$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$, lo que concluye la demostración.

III.3.3.- Caso B(λ): α_λ pertenece a $H^{2*}_{F,n}$.

Aplicando el método de truncamiento, podemos extender el teorema (II.3.2.1) al caso más general en que cada α_λ pertenece a $H^{2*}_{F,n}$. Tal extensión comporta ciertas dificultades adicionales que no existían al hacer lo correspondiente en el caso del problema de existencia y unicidad de solución, puesto que al tratarse ahora de un problema de convergencia será necesario determinar ciertas condiciones de uniformidad a exigir en cuanto a las hipótesis sobre los coeficientes, cuya forma estará condicionada asímismo por el procedimiento de demostración seguido. En el apartado (III.3.3.3) discutimos este aspecto.

III.3.3.1.- Desigualdades básicas.

Por mayor comodidad en el seguimiento del desarrollo de la demostración del resultado principal correspondiente al caso que nos ocupa en este apartado, recordamos previamente algunas desigualdades elementales conocidas cuyo uso será fundamental en aquélla (pueden verse, p.e., en Loève [9]):

Sean X, Y variables aleatorias.

(1) c_r-Desigualdad:

$$E[|X+Y|^r] \leq c_r E[|X|^r] + c_r E[|Y|^r]$$

donde $c_r = 1$ ó 2^{r-1}, según que sea $r \leq 1$ ó $r \geq 1$

(2) Desigualdad de Hölder:

$$E[|XY|] \leq \{E[|X|^r]\}^{1/r} . \{E[|Y|^r]\}^{1/s}$$

donde $r>1$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$

(3) <u>Desigualdad de Markov (tchebichev)</u>:

$$\frac{E[|X|^r]-a^r}{\sup|X|^r \text{ c.s.}} \leq P[|X|\geq a] \leq \frac{E[|X|^r]}{a^r}$$

para cada $a>0$, con $r>0$. (En realidad se suele llamar"desigualdad de Markov" a la desigualdad de la derecha, denominándose"desigualdad de Tchebichev cuando $r=2$)

III.3.3.2.- El siguiente lema se refiere a la demostración del teorema (II.6.5.2) (apartado (a)), en el que establecemos la existencia de solución en la situación correspondiente al caso B por un procedimiento constructivo.

<u>LEMA</u>:

"Sean las hipótesis del teorema (II.6.5.2). Sea el proceso solución x^* y, para cada $M\varepsilon N$, el conjunto Ω_M y el proceso solución x_M^*, definidos como en el apartado (a) de la demostración.

Entonces, para cada $M\varepsilon N$ y para cada $t\varepsilon[a,b]$ se verifica que

$$x^*(t,\omega) = x_M^*(t,\omega)$$

para cada $\omega\varepsilon\Omega_M - N_{M,t}$ ($N_{M,t}$ P-nulo)".

Demostración:

Basta ver que, si $M'>M$, entonces $x_{M'}^*(t,.)$ y $x_M^*(t,.)$ coinciden para cada $t\varepsilon[a,b]$ casi seguramente al menos en Ω_M.

En efecto, siguiendo la notación usada en el apartado (a) de la demostración de (II.6.5.2), si $M'>M$, se tiene que

$$\alpha_M(.,\omega) \equiv \alpha_{M'}(.,\omega) \equiv \alpha(.,\omega)$$

$$\Phi_M(.,\omega) \equiv \Phi_{M'}(.,\omega) \equiv 1$$

para cada $\omega\varepsilon\Omega_M$. Aplicando el corolario (II.5.2.5-I), se tiene el resultado.

III.3.3.3.- A continuación, enunciamos y demostramos el teorema general de regularidad que proponemos para la situación correspondiente al caso $B(\lambda)$. Al final del teorema, discutimos algunos aspectos acerca de las hipótesis que hemos considerado en el mismo, y ofrecemos algunas formas alternativas en que pueden ser planteadas, según el procedimiento de demostración que hemos seguido.

TEOREMA:

"Sea $\{E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda];\lambda\varepsilon\Lambda\}$ una familia de S.E.I.E.'s verificando las hipótesis $[HE(\lambda)]$. Supongamos que $\alpha_\lambda \varepsilon H^{2*}_{F,n}$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$. Sea x^* la única solución (salvo equivalencia) del sistema $E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$.

Sea $\lambda_o\varepsilon\Lambda$, y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

a) Para cada $x\varepsilon H^2_{F,n}$, existe N_x R Lebesgue-nulo tal que, para cada $t\varepsilon[a,b]-N_x$

$$g^i_{\lambda,\rho}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} g^i_{\lambda_o,\rho}(t,x(t,\omega),\omega)$$

$$h^i_{\lambda,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega)$$

(para cada $i=1,\ldots n;\rho,\sigma=1,\ldots r$), cuando λ tiende a λ_o.

b) Para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, α_λ se puede descomponer como

$$\alpha_\lambda \equiv b_\lambda . y_\lambda \qquad \text{con } b\ \varepsilon H^*_{F,n},\ y_\lambda\varepsilon H^2_{F,n}$$

de tal modo que:

b.1) $b_\lambda \xrightarrow{P.u.} b_{\lambda_o}$

$y_\lambda \xrightarrow{|||\cdot|||} y_{\lambda_o}$

cuando λ tiende a λ_o.

b.2) Cada proceso b_λ, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, está muestralmente acotado por alguna variable aleatoria $B_\lambda(\omega)$ $\bar{R}$-valuada finita c.s., de forma que

$$\lim_{M\to\infty}\{\limsup_{\lambda \longrightarrow \lambda_o} P[B_\lambda(\omega)>M]\} = 0$$

b.3) Existe $r_o>1$ en R tal que el proceso y_{λ_o} es L_{2r_o}-acotado en $[a,b]$.

Entonces, se verifica que

$$x^*_\lambda \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o}$$

cuando λ tiende a λ_o".

Demostración:

Sea para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$ y cada $M\varepsilon N$ el conjunto $\Omega_{\lambda,M}$ definido por

$$\Omega_{\lambda,M} = \{\omega:\ \max\{B_\lambda(\omega),L(\omega)\}\leq M\}$$

Para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, la sucesión $\{\Omega_{\lambda,M}\}_{M\varepsilon N}$ es creciente y $P[\Omega_{\lambda,M}]\uparrow 1$ cuando M tiende a ∞.

Sea para cada $M\varepsilon N$ el proceso Φ_M definido como en el apartado (a) de la demostración del teorema (II.6.5.2).

Para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$ y cada $M\varepsilon N$, definimos el proceso $\alpha_{\lambda,M}$ por

$$\alpha^i_{\lambda,M} \equiv b^i_{\lambda,M}.y^i_\lambda$$

siendo, para cada $t\varepsilon[a,b]$,

$$b^i_{\lambda,M}(t,\omega) = \mathrm{med}\{M,-M,b^i_\lambda(t,\omega)\}$$

Así, por el teorema (II.6.4.1), se tiene que para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$ el sistema $E[\alpha_{\lambda,M},\Phi_M g_\lambda,\Phi_M h_\lambda]$ tiene una solución única (salvo equivalencia) $x^*_M\varepsilon H^2_{F,1}$

Vamos a ver que para cada $M\varepsilon N$

$$\alpha_{\lambda,M} \xrightarrow{|||\cdot|||} \alpha_{\lambda_o,M}$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$. En efecto, podemos escribir

$$|b^i_{\lambda,M}y^i_\lambda - b^i_{\lambda_o,M}y^i_{\lambda_o}| \leq$$

$$\leq |b^i_{\lambda,M}|\cdot|y^i_\lambda - y^i_{\lambda_o}| + |b^i_{\lambda,M} - b^i_{\lambda_o,M}|\cdot|y^i_{\lambda_o}| \leq$$

$$\leq M|y^i_\lambda - y^i_{\lambda_o}| + |b^i_{\lambda,M} - b^i_{\lambda_o,M}|\cdot|y^i_{\lambda_o}|$$

El primer término en el miembro derecho converge a cero en L_2-distancia uniformemente en $[a,b]$, cuando $\lambda \to \lambda_o$. En cuanto al segundo, puesto que

$$|b^i_{\lambda,M} - b^i_{\lambda_o,M}| \leq |b^i_\lambda - b^i_{\lambda_o}|$$

se tiene que

$$b^i_{\lambda,M} \xrightarrow{P.u.} b^i_{\lambda_o,M}$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$.

Aplicando el miembro izquierdo de la desigualdad de Markov, teniendo en cuenta que los procesos $b^i_{\lambda,M}$ están uniformemente acotados por M, -- tendremos que para cualquier $\varepsilon>0$ y cualquier $p\in R^+$, y para cada $t\in[a,b]$

$$\|b^i_{\lambda,M}(t,\omega) - b^i_{\lambda_o,M}(t,\omega)\|^p_p \leq$$

$$\leq P[|b^i_{\lambda,M}(t,\omega) - b^i_{\lambda_o,M}(t,\omega)| \geq \varepsilon](2M)^p + \varepsilon^p$$

Sumando en $i=1,\ldots n$, tomando supremos en $t\in[a,b]$ y tomando límites, primero cuando λ tiende a λ_o y luego cuando ε tiende a 0, se deduce que para todo $p>0$

$$b_{\lambda,M} \xrightarrow{|||\cdot|||p} b_{\lambda_o,M}$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$.

Ahora bien, por la <u>desigualdad de Hölder</u>, se tiene que para cada $t\in[a,b]$

$$\|[b^i_{\lambda,M}(t,\omega) - b^i_{\lambda_o,M}(t,\omega)]y^i_{\lambda_o}(t,\omega)\|^2 \leq$$

$$\leq \|b^i_{\lambda,M}(t,\omega) - b^i_{\lambda_o,M}(t,\omega)\|^2_{2p}\|y^i_{\lambda_o}(t,\omega)\|^2_{2r}$$

para cada r, p tales que r>1 y $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=1$. Tomando

$$p_o = \frac{r_o}{r_o-1}$$

y sumando en i=1,...n, tomando supremos en [a,b] y teniendo en cuenta que por hipótesis

$$|||y_{\lambda_o}|||_{2r_o} < \infty$$

concluimos a partir de lo anterior que

$$[b_{\lambda,M}-b_{\lambda_o,M}]y_{\lambda_o} \xrightarrow{|||\cdot|||} 0$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$.

Finalmente, por la c_r-desigualdad , con r=2, concluimos que

$$b_{\lambda,M}y_\lambda \xrightarrow{|||\cdot|||} b_{\lambda_o,M}y_{\lambda_o}$$

es decir

$$\alpha_{\lambda,M} \xrightarrow{|||\cdot|||} \alpha_{\lambda_o,M}$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$, como queríamos demostrar.

Por otra parte, si $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es cualquiera de las familias

$$\{g^i_{\lambda,\rho}\}_{\lambda\in\Lambda} \qquad \{h^i_{\lambda,\rho\sigma}\}_{\lambda\in\Lambda} \qquad (\text{para } 1=1,\dots n;\rho,\sigma=1,\dots r)$$

es fácil comprobar que para cada $x\in H^2_{F,n}$ y cada $M\in N$, la familia $\{\Phi_M f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ verifica la condición a[x] del lema (III.3.1). En efecto, esto es inmediato a partir de la desigualdad

$$|\Phi_M(t,\omega)[f_\lambda(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)]| \leq$$

$$\leq |f_\lambda(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x(t,\omega),\omega)|$$

(para cada $t\in[a,b]$, $\omega\in\Omega$).

Entonces, por el teorema (III.3.2)

$$x^*_{\lambda,M} \xrightarrow{|||\cdot|||} x^*_{\lambda_o,M}$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$.

Aplicando ahora la desigualdad de Tchebichev, para cada $\varepsilon>0$, cada $t\varepsilon[a,b]$, cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, cada $i=1,\ldots n$ y cada $M\varepsilon N$, tendremos que

$$P[\,|x^{*i}_{\lambda,M}(t,\omega)-x^{*i}_{\lambda_o,M}(t,\omega)|\geq\varepsilon] \leq$$

$$\leq \frac{E\{[x^{*i}_{\lambda,M}(t,\omega)-x^{*i}_{\lambda_o,M}(t,\omega)]^2\}}{\varepsilon^2}$$

y el miembro derecho tiende a 0 cuando $\lambda \to \lambda_o$, uniformemente en t.

Así,
$$x^*_{\lambda,M} \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o,M}$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$.

Sea ahora $\varepsilon>0$. Podemos escribir

$$P[\,|x^*_{\lambda}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[\,|x^*_{\lambda}(t,\omega)-x^*_{\lambda,M}(t,\omega)|>0] + P[\,|x^*_{\lambda,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)|>\varepsilon] +$$

$$+ P[\,|x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>0]$$

Tomando supremos en $[a,b]$, y teniendo en cuenta que, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, $x^*_{\lambda}(t,.)$ y $x^*_{\lambda,M}(t,.)$ coinciden c.s. en $\Omega_{\lambda,M}$, para cada $t\varepsilon[a,b]$ (por el lema (III.3.3.2), tenemos que

$$\sup_{[a,b]} P[\,|x^*_{\lambda}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[\Omega^c_{\lambda,M}] + \sup_{[a,b]} P[\,|x^*_{\lambda,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)|>\varepsilon] + P[\Omega^c_{\lambda_o,M}]$$

Tomando en ambos miembros el límite superior cuando $\lambda \to \lambda_o$,

$$\limsup_{\lambda\to\lambda_o}\{\sup_{[a,b]} P[\,|x^*_{\lambda}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq \limsup_{\lambda\to\lambda_o} P[\Omega^c_{\lambda,M}] + P[\Omega^c_{\lambda_o,M}]$$

Tomando ahora límites cuando $M \to \infty$, y teniendo en cuenta que para cada λ, M

$$P[\Omega^c_{\lambda,M}] \leq P[B_\lambda(\omega)>M] + P[L(\omega)>M]$$

y la hipótesis (b.2), tenemos finalmente que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \{\sup_{[a,b]} P[|x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon]\} = 0$$

es decir

$$x^*_\lambda \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o}$$

cuando $\lambda \to \lambda_o$, como queríamos demostrar.

<u>NOTAS</u>: DISCUSION SOBRE LAS HIPOTESIS DEL TEOREMA:

1) En este caso no es posible, en principio, sustituir directamente la hipótesis (a) del enunciado por otra equivalente en el sentido en que se indicó en una nota al teorema (III.3.2), puesto que ahora $L(\omega)$ no necesariamente es constante. Sin embargo, suponien que se conocen los procesos Φ_M (para cada $M\in N$), definidos exacta mente como en la demostración del teorema (II.6.5.2), se podrá sustituir dicha hipótesis por la siguiente alternativa:

   a) "Para cada $M\in N$ y cada $x\in H^2_{F,n}$, el conjunto de familias

   $$\{\Phi_M g^i_{\lambda,\rho}\}_{\lambda\in\Lambda} \qquad \{\Phi_M h^i_{\lambda,\rho\sigma}\}_{\lambda\in\Lambda}$$

   (para $i=1,\ldots n;\rho,\sigma=1,\ldots r$) verifican la condición $b[x;2,2]$ del lema (III.3.1)".

   En efecto, en la demostración del teorema hemos visto que dichas familias verifican la condición $a[x^*_{\lambda_o},M]$ del mismo lema, y ésta es realmente la única condición que se necesita.

2) De hecho, en el caso en que se disponga de información suficiente acerca de la solución $x^*_{\lambda_o}$ que se quiere aproximar, la hipótesis (a) se podría debilitar en el sentido en que lo señalamos pa ra el teorema (III.3.2) (v. nota 2). En efecto, teniendo en cuen-

ta que $x^{*}_{\lambda_o}(t,.)$ y $x^{*}_{\lambda_o,M}(t,.)$ coinciden para cada t, casi seguramente al menos en $\Omega_{\lambda_o,M}$ (por el lema (III.3.3.2), y la relación --- existente entre Φ^{o}_{M} y $\Omega_{\lambda_o,M}$, a través de la variable aleatoria -- $L(\omega)$, puede ser útil la siguiente forma de plantear la hipótesis (a) del enunciado del teorema:

a") "Para cada $M\epsilon N$, el conjunto de familias

$$\{\Phi_M g^{i}_{\lambda,\rho}\}_{\lambda\epsilon\Lambda} \qquad \{\Phi_M h^{i}_{\lambda,\rho\sigma}\}_{\lambda\epsilon\Lambda}$$

(para $i=1,\ldots n;\rho,\sigma=1,\ldots r$) verifican la condición $a[x^{*}_{\lambda_o,M}]$, o, equivalentemente, $b[x^{*}_{\lambda_o,M};2,2]$, del lema (III.3.1)".

3) En cuanto a la hipótesis (b.2), es fácil ver que es más débil que la siguiente:

b.2') "Cada proceso b_λ, para cada λ en algún entorno $V(\lambda_o)$ de λ_o, está acotado muestralmente por alguna v.a. $B(\omega)$ $\bar{R}$-valuada finita c.s., de tal modo que

$$\sup_{V(\lambda_o)} P[B_\lambda(\omega)\geq M] \longrightarrow 0$$

cuando M (ϵN) tiende a ∞".

Un caso particular en que también se verifica (b.2) viene expresado por la siguiente condición, que evidentemente es más fuerte:

b.2") "Existe una v.a. $B(\omega)$ $\bar{R}$-valuada finita c.s. tal que para todo λ en algún entorno $V(\lambda_o)$ de λ_o y todo $\omega\epsilon\Omega$

$$|b_\lambda(.,\omega)| \leq B(\omega)".$$

4) En el siguiente contraejemplo mostramos cómo la hipótesis (b.2") claramente no implica (b.2), aún en presencia de (b.1):

Sea $\Omega=[0,1]$ y consideremos sobre él el σ-álgebra de conjuntos de Borel y la medida de Lebesgue. Sea la sucesión de variables aleatorias

$$\{b_{nm}\}_{\substack{m,n\epsilon N\\ m\leq n}}$$

(en el orden siguiente: b_{nm} precede a $b_{n'm'}$ si $n<n'$, ó si $n=n'$ y $m<m'$), definidas por

$$b_{nm}(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } \omega\varepsilon[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se observa que

$$b_{nm} \xrightarrow{P} 0$$

cuando $n,m \to \infty$. Además

$$\sup_{n,m} P[b_{nm}(\omega)\geq M] = \frac{1}{M} \longrightarrow 0$$

cuando $M \to \infty$. Es decir, se satisface (b.2). Sin embargo, no ocurre así con (b.2'), puesto que, de hecho,

$$\limsup_{n,m} b_{nm} \equiv \infty$$

Además, aunque las b_{nm} se sustituyesen por variables aleatorias equivalentes respectivamente $\bar{b}_{nm}$, se tendría siempre que

$$\limsup_{n,m} \bar{b}_{nm} \equiv \infty$$

5) Por último, la hipótesis (b.3) del teorema se podrá sustituir -- por la siguiente alternativa:

b.3') "Existe $r_o>1$ en R tal que para todo $\lambda\varepsilon V'(\lambda_o)-\{\lambda_o\}$, siendo $V'(\lambda_o)$ algún entorno de λ_o, los procesos y_λ son L_2-acotados en $[a,b]$, uniformemente en λ".

Esta forma puede ser particularmente útil en el caso en que se -- trate de establecer algún método para aproximar una solución a -- partir de soluciones obtenidas por algún procedimiento que permi̲ta verificar (b.3'), puesto que en tal caso no es necesario exigir la condición (b.3) y se dispone de una mayor generalidad en cuanto al tipo de solución que se desea aproximar.

En efecto, para probarlo basta observar que la primera desigualdad en la demostración del teorema se puede plantear del siguien̲ te modo alternativo:

$$|b^i_{\lambda,M}y^i_\lambda - b^i_{\lambda_o,M}y^i_{\lambda_o}| \leq$$

$$\leq |b^i_{\lambda,M}-b^i_{\lambda_o,M}|\cdot|y^i_\lambda| + |b^i_{\lambda_o,M}|\cdot|y^i_\lambda - y^i_{\lambda_o}|$$

y actuar de modo análogo a como se hizo en la misma, teniendo en cuenta ahora que

$$\sup_{V'(\lambda_o)} |||y_\lambda|||_{2r_o} < \infty$$

III.3.3.4.- Caso B.1(λ): $b_\lambda \equiv b$.

En el caso particular en que los procesos α_λ se puedan descomponer como

$$\alpha_\lambda \equiv b.y_\lambda$$

es decir, se pueda encontrar un factor en $H^*_{F,n}$ común a todos los procesos α_λ (al menos en un entorno del elemento λ_o fijado), la condición --- (b.2) del teorema se verifica trivialmente. De hecho, este es un caso -- particular del teorema cuando se plantea con (b.2") en lugar de (b.2). - Pero, como veremos en el siguiente corolario, también se podrá suprimir la condición (b.3) en el teorema:

COROLARIO:

"Bajo las hipótesis iniciales del teorema (III.3.3.3), sea $\lambda_o \varepsilon \Lambda$ y supongamos ahora las siguientes condiciones:

a) Para cada $x \varepsilon H^2_{F,n}$, existe $N_x \subset R$ Lebesgue-nulo tal que para cada -- $t \varepsilon [a,b] - N_x$

$$g^i_{\lambda,\rho}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} g^i_{\lambda_o,\rho}(t,x(t,\omega),\omega)$$

$$h^i_{\lambda,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega)$$

(para cada i, ρ, σ), cuando λ tiende a λ_o.

b) Para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, α_λ se puede descomponer como

$$\alpha_\lambda \equiv b_\lambda . y_\lambda \qquad \text{con } b_\lambda \varepsilon H^*_{F,n},\ y_\lambda \varepsilon H^2_{F,n}$$

de tal modo que:

b.1) $y_\lambda \xrightarrow{|||.|||} y_{\lambda_o}$

cuando λ tiende a λ_o.

b.2) Para todo λ en algún entorno $V(\lambda_o)$ de λ_o se tiene que

$$b_\lambda \equiv b_{\lambda_o}$$

Entonces, se verifica que

$$x^*_{\lambda_o} \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o}$$

cuando λ tiende a λ_o".

Demostración:

La prueba se obtiene inmediatamente a partir de la del teorema ---- (III.3.3.3). En efecto, la desigualdad inicial en aquélla ahora se reduce a la siguiente, por la hipótesis (b.1) del enunciado del corolario:

$$|b^i_{\lambda,M} y^i_\lambda - b^i_{\lambda_o,M} y^i_{\lambda_o}| = |b^i_{\lambda_o,M}| . |y^i_\lambda - y^i_{\lambda_o}| \leq M |y^i_\lambda - y^i_{\lambda_o}|$$

(con $\lambda\varepsilon V(\lambda_o)$). Así, puesto que

$$y_\lambda \xrightarrow{|||.|||} y_{\lambda_o}$$

se tiene inmediatamente que

$$\alpha_{\lambda,M} \xrightarrow{|||.|||} \alpha_{\lambda_o,M}$$

cuando λ tiende a λ_o (y no es necesario recurrir a la condición (b.3) -- del teorema (III.3.3.3)). El resto de la demostración es exactamente --- igual que en la demostración del teorema.

NOTA: Las notas (1) y (2) al final del teorema (III.3.3.3) se aplican -- exactamente igual a este caso.

III.3.3.5.- Caso B.2(λ): $y_\lambda \equiv y$.

Supongamos ahora el caso particular del caso B(λ) en que los procesos α_λ se pueden descomponer como

$$\alpha_\lambda \equiv b_\lambda . y$$

es decir, se puede encontrar un factor en $H^2_{F,n}$ común a todos los procesos α_λ (al menos en un entorno de λ_o). Esta situación no permite debilitar sustancialmente las condiciones que se exigen en el teorema (III.3.3.3), por lo que no lo enunciamos de nuevo. Nos limitaremos a observar que un supuesto enunciado para este caso se haría igual que en el teorema, salvo la omisión de la condición de que

$$"y_\lambda \xrightarrow{|||.|||} y_{\lambda_o} \text{ , cuando } \lambda \to \lambda_o".$$

Evidentemente, las notas (1), (2) y (3) al teorema (III.3.3.3) seguirían siendo válidas para este caso, mientras que la condición (b.3') ahora es exactamente igual a la condición (b.3).

Más intersante es el caso particular de éste que analizamos en el punto siguiente.

III.3.3.6.- Caso B.2.1(λ): α_λ pertenece a $H^*_{F,n}$.

Este es un caso particular del caso B.2(λ), puesto que se puede considerar que, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, el proceso α_λ se descompone como

$$\alpha_\lambda \equiv b_\lambda . y_\lambda \qquad \text{con } b_\lambda \varepsilon H^*_{F,n},\ y_\lambda \varepsilon H^2_{F,n}$$

siendo para todo λ

$$y_\lambda \equiv 1$$

Esta situación tiene especial importancia, pues los procesos pertenecientes a la clase $H^*_{F,n}$ poseen propiedades particularmente interesantes. (En el apartado (II.3) sobre "Acotabilidad muestral" estudiamos diversos aspectos concernientes a dichos procesos, fundamentalmente relativos a integración). Por otra parte, este caso está en correspondencia con el caso B' (v. (II.6.5.3)) que consideramos al estudiar el problema de la existencia y unicidad de solución. (Un caso particular importante de éste es áquel en que cada proceso α_λ es muestralmente continuo c.s.).

COROLARIO:

"Sea $\{E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]; \lambda\varepsilon\Lambda\}$ una familia de S.E.I.E.'s verificando las hipótesis $[HE(\lambda)]$. Supongamos que $\alpha_\lambda \varepsilon H^*_{F,n}$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$.

Sea $\lambda_o \varepsilon\Lambda$, y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

a) Para cada $x\varepsilon H^2_{F,n}$, existe $N_x \subset R$ Lebesgue-nulo tal que, para cada $t\varepsilon[a,b]-N_x$

$$g^i_{\lambda,\rho}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} g^i_{\lambda_o,\rho}(t,x(t,\omega),\omega)$$

$$h^i_{\lambda,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega)$$

(para cada $1=1,\ldots n; \rho,\sigma=1,\ldots r$), cuando λ tiende a λ_o.

b.1) $$\alpha_\lambda \xrightarrow{P.u.} \alpha_{\lambda_o}$$

cuando λ tiende a λ_o.

b.2) Cada proceso α_λ, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, está muestralmente acotado -- por alguna variable aleatoria $B_\lambda(\omega)$ $\bar{R}$-valuada finita c.s. de forma que

$$\lim_{M\to\infty}\{\limsup_{\lambda\to\lambda_o} P[B_\lambda(\omega)>M]\} = 0$$

Entonces, se verifica que

$$x^*_\lambda \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o}$$

cuando λ tiende a λ_o".

No es necesario probarlo, pues se obtiene directamente como particularización a partir del enunciado del teorema (III.3.3.3), tomando $y_\lambda \equiv 1$, para todo $\lambda\varepsilon\Lambda$. Por la misma razón, son válidas aquí las consideraciones hechas en las notas (1), (2) y (3) del teorema (III.3.3.3).

III.3.4.- Caso C(λ): α_λ pertenece a $CL(H^{2*}_{F,n})$.

Siguiendo la correspondencia con los casos considerados en el capítulo II al estudiar el problema de la existencia y unicidad de solución, planteamos ahora el problema de regularidad en el caso general en que cada proceso α_λ, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, es una combinación lineal de procesos pertenecientes a la clase $H^{2*}_{F,n}$.

El resultado en este caso se obtendrá, pues, por extensión del procedimiento de truncamiento en el caso B(λ), a partir del teorema fundamental de regularidad correspondiente al caso A(λ) (III.3.2). Dicha extensión no ofrece gran dificultad (prácticamente la misma que la del caso B al caso C, en el capítulo II), si se consideran procesos α_λ combinación lineal de un mismo número, para todo $\lambda\varepsilon\Lambda$, de elementos de $H^{2*}_{F,n}$. Sin embargo, para mayor generalidad, contemplamos la posibilidad de que el número de sumandos que forman la combinación lineal que define a cada sea variable, dependiendo de λ. Esto conlleva dificultades adicionales a la hora de determinar hipótesis de convergencia convenientes sobre la -- condición inicial, que permitan obtener el resultado deseado.

III.3.4.1.- Establecemos el siguiente teorema de regularidad, para este caso:

TEOREMA:

"Sea $\{E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]; \lambda\varepsilon\Lambda\}$ una familia de S.E.I.E.'s verificando las hipótesis $[HE(\lambda)]$. Supongamos que $\alpha_\lambda \varepsilon CL(H^{2*}_{F,n})$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$. Sea x^*_λ la única solución (salvo equivalencia) del sistema $E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$.

Sea $\lambda_o\varepsilon\Lambda$, y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

a) Para cada $x\varepsilon H^2_{F,n}$, existe $N_x \subset R$ Lebesgue-nulo tal que, para cada $t\varepsilon[a,b]-N_x$

$$g^i_{\lambda,\rho}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} g^i_{\lambda_o,\rho}(t,x(t,\omega),\omega)$$

$$h^{i}_{\lambda,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} h^{i}_{\lambda_o;\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega)$$

(para cada $i=1,\ldots n;\rho,\sigma=1,\ldots r$), cuando λ tiende a λ_o.

b) Para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, α_λ se puede descomponer como

$$\alpha_\lambda \equiv \sum_{j=1}^{\infty} b_{\lambda,j}.y_{\lambda,j} \qquad \text{con } b_{\lambda,j}\ H^{*}_{F,n},\ y_{\lambda,j}\ H^{2}_{F,n}$$

existiendo en cada suma un último término no nulo (cuyo índice notamos m_λ), de tal modo que:

b.1) Para cada $j\varepsilon\{1,\ldots m_{\lambda_o}\}$

$$b_{\lambda,j} \xrightarrow{P.u.} b_{\lambda_o,j}$$

$$y_{\lambda,j} \xrightarrow{|||.|||} y_{\lambda_o,j}$$

cuando λ tiende a λ_o.

b.2) Cada proceso $b_{\lambda,j}$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$ y cada $j\varepsilon\{1,\ldots m_\lambda\}$, está muestralmente acotado por alguna variable aleatoria $B_{\lambda,j}(\omega)$ $\bar{R}$-valuada finita c.s., de forma que

$$\lim_{M\to\infty}\{\limsup_{\lambda\to\lambda_o} P(\bigcup_{j=1}^{m}[B_{\lambda,j}(\omega)>M])\} = 0$$

b.3) Existe $r_o>1$ en R tal que para todo $j=1,\ldots m_o$ el proceso $y_{\lambda_o,j}$ es L_{2r_o}-acotado en $[a,b]$.

b.4) $$\sum_{j=m_{\lambda_o}+1}^{\infty} |y_{\lambda,j}| \xrightarrow{|||.|||} 0$$

cuando λ tiende a λ_o.

Entonces, se verifica que

$$x^{*}_{\lambda_o} \xrightarrow{P.u.} x^{*}_{\lambda_o}$$

cuando λ tiende a λ_o".

NOTAS: 1) Si para algún λ y algún j, $b_{\lambda,j}$ (resp. $y_{\lambda,j}$) es nulo, se podrá suponer, si ello es conveniente, que $y_{\lambda,j}$ (resp $b_{\lambda,j}$) es nulo también.

2) Obsérvese que

$$\sum_{j=m_{\lambda_o}+1}^{\infty} |y_{\lambda,j}|$$

es un proceso unidimensional.

Demostración:

Sea, para cada $\lambda\epsilon\Lambda$, cada $j=1,\ldots m_\lambda$, y cada $M\epsilon N$, el conjunto $\Omega_{\lambda,j,M}$ definido por

$$\Omega_{\lambda,j,M} = \{\omega:\ max\{B_{\lambda,j}(\omega), L(\omega)\}\leq M\}$$

Para cada λ y cada j, la sucesión $\{\Omega_{\lambda,j,M}\}_{M\epsilon N}$ es creciente y

$$P[\Omega_{\lambda,j,M}]\uparrow 1$$

cuando M tiende a ∞.

Sea, para cada $M\epsilon N$, el proceso Φ_M definido como en el apartado (a) de la demostración del teorema (II.6.5.2).

Para cada $\lambda\epsilon\Lambda$ y cada $M\epsilon N$, definimos el proceso $\alpha_{\lambda,M}$ por

$$\alpha^i_{\lambda,M} \equiv \sum_{j=1}^{m_\lambda} b^i_{\lambda,j,M}\cdot y^i_{\lambda,j}$$

siendo, para cada $j=1,\ldots m_\lambda$, cada $t\epsilon[a,b]$ y cada $\omega\epsilon\Omega$

$$b^i_{\lambda,j,M}(t,\omega) = med\{M,-M,b^i_{\lambda,j}(t,\omega)\}$$

Por el teorema (II.6.4.1), se tiene que para cada $\lambda\epsilon\Lambda$ el sistema -- $E[\alpha_{\lambda,M}, \Phi_M g_\lambda, \Phi_M h_\lambda]$ tiene una solución única (salvo equivalencia) $x^*_M\epsilon H^2_{F,n}$.

Aplicando el mismo procedimiento usado en el teorema (III.3.3.3), se demuestra que para cada $j=1,\ldots m_{\lambda_o}$ y cada $M\epsilon N$

$$b_{\lambda,j,M}\cdot y_{\lambda,j} \xrightarrow{|||\cdot|||} b_{\lambda_o,j,M}\cdot y_{\lambda_o,j}$$

cuando λ tiende a λ_o. En efecto, en este caso se verificarán en particular las condiciones (b.1), (b.3) del teorema (III.3.3.3), a partir de -- las condiciones (b.1), (b.3) del teorema (III.3.4) que queremos demostrar.

Por tanto, podemos afirmar que

$$\sum_{j=1}^{m_{\lambda_o}} b_{\lambda,j,M}\cdot y_{\lambda,j} \xrightarrow{|||\cdot|||} \sum_{j=1}^{m_{\lambda_o}} b_{\lambda_o,j,M}\cdot y_{\lambda_o,j}$$

cuando λ tiende a λ_o.

Por otra parte, para cada λ y cada M, se comprueba que

$$\left|\sum_{j=m_{\lambda_o}+1}^{\infty} b_{\lambda,j,M}\cdot y_{\lambda,j}\right| \leq M\sum_{j=m_{\lambda_o}+1}^{\infty} |y_{\lambda,j}|$$

Por tanto, por la hipótesis (b.4) del teorema

$$\sum_{j=m_{\lambda_o}+1}^{\infty} b_{\lambda,j,M}\cdot y_{\lambda,j} \xrightarrow{|||\cdot|||} 0$$

cuando λ tiende a λ_o.

En definitiva, podemos afirmar que

$$\alpha_{\lambda,M} \xrightarrow{|||\cdot|||} \alpha_{\lambda_o,M}$$

cuando λ tiende a λ_o.

Ahora, exactamente igual que hicimos en la demostración del teorema (III.3.3.3), aplicando el teorema (III.3.2), deducimos que

$$x^*_{\lambda,M} \xrightarrow{|||\cdot|||} x^*_{\lambda_o,M}$$

y, en particular, por la desigualdad de Tchebichev, que

$$x^*_{\lambda,M} \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o,M}$$

cuando λ tiende a λ_o.

Sea $\varepsilon>0$. Podemos escribir:

$$P[|x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[|x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda,M}(t,\omega)|>0] + P[|x^*_{\lambda,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)|>\varepsilon] +$$

$$+ P[|x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>0]$$

Tomando supremos en $[a,b]$ y teniendo en cuenta que, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, $x^*_\lambda(t,.)$ y $x^*_{\lambda,M}(t,.)$ coinciden c.s. para cada $t\varepsilon[a,b]$ al menos en

$$\bigcap_{j=1}^{m_\lambda}\Omega_{\lambda,j,M}$$

(por el lema (III.3.3.2)), tenemos que

$$\sup_{[a,b]} P[|x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[\bigcup_{j=1}^{m_\lambda}\Omega^c_{\lambda,j,M}] + \sup_{[a,b]} P[|x^*_{\lambda,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)|>\varepsilon] +$$
$$+ P[\bigcup_{j=1}^{m_{\lambda_o}}\Omega^c_{\lambda_o,j,M}]$$

Tomando en ambos miembros el límite superior cuando λ tiende a λ_o, desaparecerá el segundo término del miembro derecho en la desigualdad anterior, y tomando posteriormente límites con $M\to\infty$ y teniendo en cuenta -- que para cada λ, M

$$P[\bigcup_{j=1}^{m_\lambda}\Omega^c_{\lambda,j,M}] \leq P(\bigcup_{j=1}^{m_\lambda}[B_{\lambda,j}(\omega)>M]) + P[L(\omega)>M]$$

y la hipótesis (b.2), tenemos finalmente que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o}\{\sup_{[a,b]} P[|x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon]\} = 0$$

es decir

$$x^*_\lambda \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o}$$

cuando λ tiende a λ_o, como queríamos demostrar.

<u>NOTAS</u>: DISCUSION SOBRE LAS HIPOTESIS DEL TEOREMA:

1) La nota (1) al teorema (III.3.3.3) se aplica exactamente igual al anterior.

2) Lo mismo ocurre respecto a la nota (2), considerando en lugar

2) Lo mismo ocurre respecto a la nota (2), considerando en lugar de $\Omega_{\lambda_o,M}$ el conjunto

$$\bigcap_{j=1}^{m_{\lambda_o}} \Omega_{\lambda_o,j,M}$$

3) Con respecto a la hipótesis (b.2), puesto que cada α_λ se expresa como una combinación lineal finita de elementos de $H^{2*}_{F,n}$, podemos definir para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$ la variable aleatoria $\bar{R}$-valuada finita c.s.

$$B_\lambda(.) \equiv \max_{j=1,\ldots m_\lambda} \{B_{\lambda,j}(.)\}$$

Así, (b.2) se podrá escribir, equivalentemente, del siguiente modo:

b.2') "Para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, los procesos $b_{\lambda,j}$, para todo $j=1,\ldots m_\lambda$ están muestralmente acotados por alguna variable aleatoria $B_\lambda(\omega)$ $\bar{R}$-valuada finita c.s. de forma que

$$\lim_{M\to\infty}\{\limsup_{\lambda\longrightarrow\lambda_o} P[B_\lambda(\omega)>M]\} = 0$$

Esta forma de expresar la hipótesis (b.2) del teorema tiene mayor similitud con la expresión de la hipótesis (b.2) en el teorema(III.3.3.3), y permite extender inmediatamente a este caso las formas particulares (b.2)') y (b.2") planteadas en la nota (3) al teorema (III.3.3.3) con respecto a la hipótesis (b.2), sin más -- que considerar en ellas, para cada , todos los procesos -------- $\{b_{\lambda,j}: j=1,\ldots m_\lambda\}$ en lugar de un solo proceso b .

4) Análogamente a como vimos en el teorema (III.3.3.3), la hipótesis (b.3) del que nos ocupa podrá ser sustituida por la hipótesis alternativa siguiente:

b.3') "Existe $r_o>1$ en R tal que para todo $\lambda\varepsilon V'(\lambda_o)-\{\lambda_o\}$, siendo $V'(\lambda_o)$ algún entorno de λ_o, los procesos $y_{\lambda,j}$, para todo $j=1,\ldots m_{\lambda_o}$, son L_{2r_o}-acotados en [a,b], uniformemente en λ".

III.3.4.2.- Caso C.1(λ): $m_\lambda \equiv m$.

Aunque desde el punto de vista de la generalidad es más interesante - el teorema anterior, sin embargo desde el punto de vista de las posibles - interpretaciones de los procesos "condición inicial" en el espacio ------- $CL(H^{2*}_{F,n})$, parece particularmente importante el caso en que todos los procesos α_λ se pueden expresar como combinaciones lineales finitas de elementos de $H^{2*}_{F,n}$ con un numero común de sumandos, es decir, siendo para cada -- $\lambda\varepsilon\Lambda$

$$\alpha_\lambda \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{\lambda,j} \cdot y_{\lambda,j}$$

En efecto, se podría considerar, por ejemplo, que todos los α_λ significan el cúmulo de ciertas cantidades (aleatorias) conocidas para cada α_λ, viniendo representada cada una de ellas por algún elemento de $H^{2*}_{F,n}$, -- correspondientes a un determinado número m de carácterísticas o conceptos diferentes.

En tal caso, el teorema (III.3.4.2) se convierte en una extensión directa del teorema (III.3.3.3). De hecho, la hipótesis (b.4) es superflua, y al considerar $m_\lambda \equiv m$, para cada λ (al menos en un entorno de λ_o), escribiendo además (b.2') en lugar de (b.2) (v. nota (3) al teorema (III.3.4.2) adquiere en este caso una forma muy similar a la del teorema (III.3.3.3).

III.3.4.3.- Caso C.1.1(λ): $b_{\lambda,j} \equiv b_j$.

Dentro del caso C.1(λ), consideremos ahora aquél en que para cada -- $j\varepsilon\{1,...m\}$, todos los procesos $b_{\lambda,j}$, para todo λ, son uno mismo: b_j. Esta situación está en correspondencia con la vista en el caso B.1(λ). Así --- pues, en tal situación la condición (b.1) del teorema (III.3.4.2) se simplifica, y las hipótesis (b.2), (b.3) y (b.4) desaparecen.

COROLARIO:

"Bajo las hipótesis iniciales del teorema (III.3.4.2), sea $\lambda_o\varepsilon\Lambda$ y supongamos ahora las siguientes condiciones:

a) Para cada $x \in H^2_{F,n}$, existe $N_x \subset R$ Lebesgue-nulo tal que, para cada -- $t \in [a,b]-N_x$

$$g^i_{\lambda,\rho}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} g^i_{\lambda_o,\rho}(t,x(t,\omega),\omega)$$

$$h^i_{\lambda,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega)$$

(para cada i, ρ, σ) cuando λ tiende a λ_o.

b) Para cada $\lambda \in \Lambda$, α_λ se puede descomponer como

$$\alpha_\lambda \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{\lambda,j} \cdot y_{\lambda,j} \qquad \text{con } b_{\lambda,j} \in H^*_{F,n},\ y_{\lambda,j} \in H^2_{F,n}$$

de tal modo que:

b.1) Para cada $j=1,\ldots m$

$$y_{\lambda,j} \xrightarrow{|||\cdot|||} y_{\lambda_o,j}$$

cuando λ tiende a λ_o.

b.2) Para todo λ en algún entorno $V(\lambda_o)$ de λ_o, se tiene que

$$b_{\lambda,j} \equiv b_{\lambda_o,j}$$

para todo $j=1,\ldots m$.

Entonces, se verifica que

$$x^*_{\lambda,j} \xrightarrow{P.u.} x^*_{\lambda_o,j}$$

cuando λ tiende a λ_o".

(Las consideraciones para la prueba de este corolario son análogas a las hechas en el caso B.1(λ)).

III.3.4.4.- <u>Caso C.1.2(λ): $y_{\lambda,j} \equiv y_j$.</u>

Suponiendo de nuevo que estamos en el caso C.1(λ), consideremos el caso particular en que para cada $j=1,\ldots m$, todos los procesos $y_{\lambda,j}$, para todo $\lambda\epsilon\Lambda$ (o al menos en algún entorno de λ_o) son iguales. Es decir, cada α_λ se puede expresar como

$$\alpha_\lambda \equiv \sum_{j=1}^{m} b_{\lambda,j} \cdot y_j$$

para cada λ en algún entorno $V(\lambda_o)$ de λ_o. En tal caso, aparte de omitir la condición (b.4) del teorema (III.3.4.2), por ser $m_\lambda \equiv m$, no se obtiene una simplificación notable en las hipótesis del enunciado, salvo la omisión - también de la condición de que

$$"y_{\lambda,j} \xrightarrow{\|\cdot\|} y_{\lambda_o,j} \text{ , cuando } \lambda \text{ tiende a } \lambda_o"$$

en la hipótesis (b.1).

Si además todos los procesos y_j, para todo j=1,...m, coinciden, estamos de nuevo en el caso B.2(λ), y si el valor común de tales procesos es idénticamente igual a 1, en el caso B.2.1(λ).

III.3.4.5.- Caso C.2(λ): $m_{\lambda_o} \equiv 0$.

Supongamos el caso especial en que $\alpha_{\lambda_o} \equiv 0$. En tal situación, se observa que la hipótesis (b.3) es superflua (se verifica automáticamente) y -- además desaparece la condición (b.1). Esto último es lo más significativo, puesto que ahora sólo se debe exigir la condición de convergencia sobre -- las $y_{\lambda,j}$, bajo la forma de la hipótesis (b.4) del teorema (III.3.4.2), y una condición de acotación sobre las $b_{\lambda,j}$, bajo la forma de la hipótesis (b.2) del teorema, lo que efectivamente resulta del hecho de que el cero es un elemento absorbente para el producto en R.

Osérvese también que si además cada m_λ es igual a 1, estamos en un caso particular del caso B(λ), y de hecho la hipótesis (b.4) del teorema --- (III.3.4.2) se reduce a la de que

$$y_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} y_{\lambda_o}$$

cuando λ tiende a λ_o, que es la parte de la hipótesis (b.1) del teorema --- (III.3.3.3) que habría que exigir en dicho caso particular.

III.4.- Dependencia continua de la solución respecto de los coeficientes (II).

En este apartado estudiamos el problema de regularidad planteado al inicio del presente capítulo considerando un concepto de convergencia estocástico más fuerte que el de convergencia uniforme en probabilidad, fundamental en el estudio realizado en el apartado (III.3).

Se trata ahora de establecer condiciones bajo las cuales, si x^*_λ es la solución de $E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]$ y se elige separable, para cada $\lambda\epsilon\Lambda$, se verifica que para cada $\epsilon>0$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} P[\sup_{[a,b]} |x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\epsilon] = 0$$

Los resultados obtenidos en el apartado (III.3) tendrán una importancia fundamental al respecto. En efecto, veremos que si añadimos una condición de convergencia en el sentido anterior sobre los procesos condición inicial α_λ, bajo las mismas hipótesis consideradas en los teoremas de regularidad establecidos en el apartado (III.3), obtendremos el resultado deseado. Ello es así posible gracias a las proposiciones (II.3.5.2) y (II.3.6.2), que permiten probar las condiciones de convergencia en el mismo sentido sobre las integrales que aparecen en los sistemas, bajo las mismas hipótesis que consideramos en dichos teoremas de regularidad sobre las funciones $\{g^i_{\lambda,\rho}, h^i_{\lambda,\rho\sigma}; (i,\rho,\sigma,\lambda)\}$

A continuación planteamos formalmente este último aspecto a través de algunas proposiciones previas, y establecemos posteriormente el resultado general sobre regularidad bajo el nuevo concepto de convergencia considerado, que por comodidad denominaremos "P-convergencia muestral uniforme".

III.4.1.- Resultados previos.

Establecemos a continuación tres resultados previos (el tercero consecuencia de los dos primeros), en que se pone de manifiesto la P-convergencia muestral uniforme en las integrales correspondientes a los sistemas $\{E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]: \lambda\epsilon\Lambda\}$, bajo las condiciones planteadas en los teoremas de regularidad establecidos en (III.3).

III.4.1.1.- El lema (III.3.1) junto con las proposiciones (II.3.5.2) y

(II.3.6.2), proporciona el siguiente resultado:

PROPOSICION:

"Sean $\{f_\lambda\}_{\lambda\epsilon\Lambda}$ funciones verificando las hipótesis $[HE(\lambda)]$, con $L(\omega)=L_o$

Sea $x\epsilon H^2_{F,n}$, y supongamos que dichas funciones verifican la condición $a[x]$ del lema (III.3.1). Sean z^1, z^2 procesos verificando también [HE(

Sea $\lambda_o\epsilon\Lambda$.

Entonces, eligiendo versiones separables en las integrales indefinidas que aparecen a continuación, se verifica que para cada $\epsilon > 0$

a) $P[\sup_{[a,b]} |\int_a^t f_\lambda(s,x(s,x(s,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(s,x(s,\omega),\omega)]dz(s,\omega)|>\epsilon] \to 0$

cuando $\lambda\to\lambda_o$ (con $z=z^1$ ó z^2)

b) $P[\sup_{[a,b]} |\int_a^t f_\lambda(s,x(s,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(s,x(s,\omega),\omega)]dz^1(s,\omega)dz^2(s,\omega)|>\epsilon] \to 0$

cuando $\lambda\to\lambda_o$."

Demostración:

Obsérvese que la elección de versiones separables de las integrales será sible, según se desprende de los teoremas (II.3.5.3) y (II.3.6.3).

Probemos (a). Notemos

$$G_{\lambda,\lambda_o}(x;t,\omega)=f_\lambda(t,x(t,\omega),\omega)-f_{\lambda o}(t,x(t,\omega),\omega)$$

Para cada $\epsilon>0$, por la proposición (II.3.5.2), tendremos que

$$P[\sup_{[a,b]} |\int_a^t G_{\lambda,\lambda_o}(x;s,\omega)dz(s,\omega)|>\epsilon] \leq$$

$$\leq \frac{k}{\epsilon}\int_a^b ||G_{\lambda,\lambda_o}(x;t,\omega)||dt+ \frac{k}{\epsilon^2}\int_a^b ||G_{\lambda,\lambda_o}(x;t,\omega)||^2 dt$$

Puesto que $a[x]$ es equivalente a $b[x;2,1]$ y $b[x;2,2]$, según el lema --- (III.3.1), las integrales en el miembro derecho de la desigualdad anterior t rán a 0 cuando λ tiende a λ_o. Por tanto, para cada $\epsilon>0$, el miembro izquierdc bién lo hará a 0 cuando λ tiende a λ_o, como queríamos demostrar.

La conclusión (b) se prueba exactamente igual, aplicando la proposiciór

(II.3.6.2) en lugar de la proposición (II.3.5.2).

III.4.1.2.- El siguiente resultado es una consecuencia de la hipótesis 4 exigida en [HE(λ)], y de las proposiciones (II.3.5.2) y (II.3.6.2).

PROPOSICION:

"Sean $\{f_\lambda\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$ funciones verificando la hipótesis [HE(λ)-4] con $L(\omega)\equiv L_o$ c. s. y z^1, z^2 verificando [HE-3]. Sean $\{x_\lambda\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$ procesos pertenecientes a $H^2_{F,n}$ tales que

$$x_\lambda \xrightarrow{|||\cdot|||} x_\lambda$$

cuando λ tiende a λ_o.

Entonces, eligiendo versiones separables en las integrales indefinidas que aparecen a continuación, se verifica que para cada $\varepsilon > 0$:

a) $P[\sup_{[a,b]} |\int_a^t [f_\lambda(s,x_\lambda(s,\omega),\omega)-f_\lambda(s,x_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)]dz(s,\omega)|>\varepsilon] \to 0$

cuando $\lambda\to\lambda_o$ (con $z=z'$ o z^2).

b) $P[\sup_{[a,b]} |\int_a^t [f_\lambda(s,x_\lambda(s,\omega)-f_\lambda(s,x_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)]dz^1(s,\omega)dz^2(s,\omega)|>\varepsilon] \to 0$

Demostración:

Notemos:

$$H_\lambda(x_\lambda,x_{\lambda_o};s,\omega)=f_\lambda(t,x_\lambda(t,\omega),\omega)-f_\lambda(t,x_{\lambda_o}(t,\omega),\omega)$$

Probemos (a). Por la proposición (II.3.5.2) y por [HE-4], para cada $\varepsilon>0$

$$P[\sup_{[a,b]} |\int_a^t H_\lambda(x_{\lambda_o},x_\lambda;s,\omega)dz(s,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq \frac{k}{\varepsilon}\int_a^b \|H_\lambda(x_{\lambda_o},x_\lambda;t,\omega)\|dt+ \frac{k}{\varepsilon^2}\int_a^b \|H_\lambda(x_{\lambda_o},x_\lambda;t,\omega)\|^2 dt \leq$$

$$\leq \frac{k}{\varepsilon} L(b-a)|||x_\lambda-x_{\lambda_o}|||+ \frac{k}{\varepsilon^2} L^2(b-a)|||x_\lambda-x_{\lambda_o}|||^2$$

Puesto que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} |||x_\lambda-x_{\lambda_o}|||= 0$$

se tiene el resultado (a). La conclusión (b) se probará igual, aplicando la proposición (II.3.6.2) en lugar de la proposición (II.3.5.2).

III.4.1.3.- Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores, obtenemos la siguiente:

PROPOSICION:

"Sean $\{f_\lambda\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$ funciones cumpliendo las hipótesis $[HE(\lambda)]$, con $L(\omega)\equiv L_o$ c.s..

Sean $\{x_\lambda\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$ procesos pertenencientes a $H^2_{F,n}$ tales que

$$x_\lambda \xrightarrow{|||\cdot|||} x_{\lambda_o}$$

cuando $\lambda\to\lambda_o$. Supongamos que las funciones $\{f_\lambda\}_{\lambda\varepsilon\Lambda}$ verifican la condición $a[x_{\lambda_o}]$ (v.lema (III.3.1)). Sean z^1, z^2 procesos verificando también $[HE(\lambda)]$. Sea $\lambda_o\varepsilon\Lambda$.

Entonces, eligiendo versiones separables en las integrales indefinidas que aparecen a continuación, se verifica que para cada $\varepsilon>0$

a) $P[\sup_{[a,b]}|\int_a^t [f_\lambda(s,x_\lambda(s,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(s,x_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)]dz(s,\omega)|>\varepsilon]\to 0$

cuando $\lambda\to\lambda_o$ (con $z=z^1$ ó z^2).

b) $P[\sup_{[a,b]}|\int_a^t [f_\lambda(s,x_\lambda(s,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(s,x_{\lambda_o}(s,\omega),\omega)]dz^1(s,\omega)dz^2(s,\omega)|>\varepsilon]\to 0$

cuando $\lambda\to\lambda_o$. "

Demostración:

La prueba es inmediata a partir de las proposiciones (III.4.1.1) y (III.4.1.2), teniendo en cuenta que, con la notación usada en las demostraciones de dichas proposiciones,

$$|f_\lambda(t,x_\lambda(t,\omega),\omega)-f_{\lambda_o}(t,x_{\lambda_o}(t,\omega),\omega)|\le$$

$$\le|H_\lambda(x_{\lambda_o},x;t,\omega)|+|G_{\lambda,\lambda_o}(x_{\lambda_o};t,\omega)|$$

y aplicando la definición de P-convergencia muestral uniforme.

III.4.2.- P-convergencia muestral uniforme. Teorema general de regularidad.

A la vista del resultado obtenido en la proposición (III.4.1.3), observamos que aprovechando las hipótesis de los teoremas establecidos en (III.3) y - añadiendo una condición de P-convergencia muestral uniforme relativa a las condiciones iniciales α_λ, podremos asegurar la P-convergencia muestral uniforme - de las correspondientes soluciones x^*_λ.

III.4.2.1.- En efecto, enunciamos el siguiente teorema general de regularidad, en tal sentido, para el caso más general, es decir, para el caso en que cada α_λ pertenece a $CL(H^{2*}_{F,n})$ (en correspondencia con el caso $C(\lambda)$ en (III.3)):

TEOREMA:

"Sean las hipótesis del teorema de regularidad (III.3.4.1). Supongamos -- que además, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, α_λ es separable verificándose que para cada $\varepsilon>0$

$$P[\sup_{[a,b]}|\alpha_\lambda(t,\omega)-\alpha_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon]\to 0$$

cuando λ tiende a λ_o.

Entonces, si cada x^*_λ (para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$) se elige separable, se verifica - que para cada $\varepsilon>0$

$$P[\sup_{[a,b]}|x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon]\to 0$$

cuando λ tiende a λ_o."

Demostración:

La elección de versiones separables x^*_λ de las soluciones será posible, te-- niendo en cuenta la separabilidad de cada α_λ y los teoremas (II.3.5.3) y (II.3.6.3) (v.también demostración del teorema (II.6.5.2)).

Usaremos en la prueba los mismos elementos y la misma notación utilizados - en la demostración del teorema (III.3.4.1).

Notemos, para cada λ, M

$$\Omega(\lambda,\lambda_o;M)\equiv(\bigcap_{j=1}^{m_\lambda}\Omega_{\lambda,j,M})\cup(\bigcap_{j=1}^{m_{\lambda_o}}\Omega_{\lambda,j,M})$$

teniendo en cuenta que para cada $\lambda\in\Lambda$, $x^*_\lambda(t,.)$ y $x^*_{\lambda,M}(t,.)$ coinciden c.s., para cada $t\in[a,b]$, al menos en

$$\bigcap_{j=1}^{m_\lambda}\Omega_{\lambda,j,M}$$

podemos escribir, para cada M>0

$$P[\omega:\ \sup_{[a,b]} |x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[\bigcup_{j=1}^{m_\lambda}\Omega^c_{\lambda,j,M}]+P[\bigcup_{j=1}^{m_{\lambda_o}}\Omega^c_{\lambda_o,j,M}]+$$

$$+P[\omega\in\Omega(\lambda,\lambda_o;M):\ \sup_{[a,b]} |x^*_{\lambda,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

El primer término en el miembro derecho tiende a cero cuando se toma primero el límite superior con $\lambda\to\lambda_o$ y luego el límite con $M\to 0$, por la hipótesis (b.2) del teorema (III.3.4.1) (según vimos en la demostración de dicho teorema).

El segundo también tiende a cero cuando $M\to\infty$ (v.(III.3.4.1).

Analicemos, pues, el último término. Usando la notación abreviada introducida en (II.5.1.2), tenemos que, para cada $\varepsilon>0$

$$P[\omega\in\Omega(\lambda,\lambda_o;M):\ \sup_{[a,b]} |x^*_{\lambda,M}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o,M}(t,\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[\omega\in\Omega(\lambda,\lambda_o;M):\ \sup_{[a,b]} |\alpha_{\lambda,M}(t,\omega)-\alpha_{\lambda_o,M}(t,\omega)|>\frac{\varepsilon}{2}]+$$

$$+P[\omega\in\Omega(\lambda,\lambda_o;M):\ \sup_{[a,b]} |I[\Phi_M g_\lambda,\Phi_M h_\lambda;x^*_{\lambda,M}](t,\omega)-I[\Phi_M g_{\lambda_o},\Phi_M h_{\lambda_o};x^*_{\lambda_o,M}](t,\omega)|>\frac{\varepsilon}{2}]$$

El primer término en el segundo miembro de la última desigualdad converge a cero cuando $\lambda\to\lambda_o$, teniendo en cuenta las hipótesis del teorema y que para cada - $\lambda\in\Lambda$, $\alpha_{\lambda,M}$ coincide con α_λ al menos en

$$\bigcap_{j=1}^{m_\lambda}\Omega_{\lambda,j,M}$$

En cuanto al segundo, puesto que $\{\Phi_M g^i_{\lambda,\rho}\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{\Phi_M h_{\lambda,\rho\sigma}\}_{\lambda\in\Lambda}$ (para cada i,ρ,σ satisfacen las hipótesis $[HE(\lambda)]$ con $L(\omega)\equiv M$, y también se verifica que

$$x^*_{\lambda,M} \xrightarrow{\ |||\cdot|||\ } x^*_{\lambda_o,M}$$

cuando $\lambda\to\lambda_o$, teniendo en cuenta lo establecido en la proposición (III.4.1.3) y la nota (1) al teorema (III.3.4.1) o (III.3.3.3), concluimos que dicho término también converge a cero cuando λ tiende a λ_o (independientemente del valor de M).

En definitiva, de todo lo anterior se deduce que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} P[\sup_{[a,b]} |x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] = 0$$

como queríamos demostrar.

III.4.3.- Caso particular: α_λ pertenece a $H^*_{F,n}$

Un caso particularmente interesante, según hemos visto a lo largo de nuestro estudio, tanto en este capítulo como en el anterior, es aquél en que la condición inicial pertenece a $H^*_{F,n}$ (p.e., es un proceso con casi todas sus trayectorias continuas,...). Pues bien, con respecto al problema de regularidad que nos ocupa en este apartado (III.4) este caso ofrece también una particularidad interesante, y es que las hipótesis del teorema (III.4.2.1) se simplifican notablemente, hasta el punto que podemos observar en el enunciado que escribimos a continuación.

III.4.3.1.- Establecemos, pues, el siguiente corolario

COROLARIO:

"Sea $\{E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h]; \lambda\varepsilon\Lambda$ una familia de S.E.I.E.'s verificando las hipótesis $[HE(\lambda)]$. Supongamos que para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$, el proceso α_λ pertenece a $H^*_{F,n}$ y es separable. Sea x^*_λ una versión separable de la solución única (salvo equivalencia) del sistema $E[\alpha_\lambda, g_\lambda, h_\lambda]$, para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$.

Sea $\lambda_o\varepsilon\Lambda$ y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

a) Para cada $x\varepsilon H^2_{F,n}$, existe $N\subset R$ Lebesgue-nulo tal que, para cada $t\varepsilon[a,b]-N_x$

$$g^i_{\lambda,\rho}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} g^i_{\lambda_o,\rho}(t,x(t,\omega),\omega)$$

$$h^i_{\lambda,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega) \xrightarrow{P} h^i_{\lambda_o,\rho\sigma}(t,x(t,\omega),\omega)$$

(para cada i=1,...n; $\rho,\sigma=1,\ldots r$) cuando λ tiende a λ_o.

b) Para cada $\varepsilon>0$

$$P[\sup_{[a,b]} |\alpha_\lambda(t,\omega)-\alpha_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \to 0$$

cuando λ tiende a λ_o.

Entonces, para cada $\varepsilon>0$

$$P[\sup_{[a,b]} |x^*_\lambda(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] \to 0$$

cuando λ tiende a λ_o. "

Demostración:

Lo único que hay que probar es que la hipótesis (b) del enunciado implica las hipótesis (b.1) y (b.2) del corolario (III.3.3.6), puesto que el resto es consecuencia del teorema de regularidad (III.4.2.1).

En efecto, (b.1) es evidentemente más débil que la hipótesis (b) del enunciado anterior. En cuanto a (b.2), se puede elegir para cada $\lambda\varepsilon\Lambda$

$$B_\lambda(.) \equiv \sup_{[a,b]} |\alpha_\lambda(t,.)|$$

teniendo en cuenta la separabilidad de α_λ. Podemos escribir, para cada $M>0$

$$P[B_\lambda(\omega)>M] \leq P[\sup_{[a,b]} |\alpha_\lambda(t,\omega)-\alpha_{\lambda_o}(t,\omega)|>\varepsilon] + P[B_{\lambda_o}(\omega)>M-\varepsilon]$$

Por tanto,

$$\lim_{M\to\infty} \{\lim_{\lambda\to\lambda_o} P[B_\lambda(\omega)>M]\} = 0$$

que es en realidad una condición algo más fuerte que (b.2).

III.4.4.- Convergencia puntual y continuidad muestral

Los resultados anteriores tienen una consecuencia interesante, aparte de la importancia que tienen por sí mismos, y es la siguiente: Si $\{\lambda_n\}_{n\varepsilon N}$ es una sucesión de elementos de Λ tales que

$$\lambda_n \to \lambda_o \quad \text{(cuando } n\to\infty)$$

y estamos en las condiciones del teorema (III.4.2.1), por ejemplo, podremos extraer de ella una subsucesión $\{\lambda_{\sigma(n)}\}_{n\in N}$ tal que

$$\sup_{[a,b]} |x^*_{\lambda\sigma(n)}(t,.)-x^*_{\lambda_o}(t,.)| \xrightarrow{c.s.} 0 \quad \text{(cuando } n\to\infty)$$

Es decir, para cada $\omega\in\Omega-\Omega_o$ (Ω_o P-nulo) se tiene que

$$\sup_{[a,b]} |x^*_{\lambda\sigma(n)}(t,\omega)-x^*_{\lambda_o}(t,\omega)| \to 0 \quad \text{(cuando } n\to\infty)$$

Esto es, para todo ω excepto en un subconjunto P-nulo de Ω, las trayectorias $x^*_{\lambda\sigma(n)}(.,\omega)$ convergen punto a punto uniformemente a la trayectoria $x^*_{\lambda_o}(.,\omega)$, cuando $n\to\infty$. Esto da idea de la importancia de este tipo de convergencia o aproximación. Claro está que la misma condición ha de exigirse sobre las condiciones iniciales $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. No obstante, la proposición (III.4.1.3) muestra como este mismo tipo de aproximación se da en la parte integral de los sistemas $\{E[\alpha_\lambda,g_\lambda,h_\lambda];\ \lambda\in\Lambda\}$ sin más que exigir la condición (a) común en los enunciados de los teoremas de regularidad que hemos establecido.

Tales consideraciones tienen una gran importancia para el caso particular en que interese estudiar la continuidad muestral de las soluciones. En efecto, si estamos en las condiciones del corolario anterior, y encontramos una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ de elementos de Λ que converja a λ_o tal que cada $x^*_{\lambda_n}$ sea un proceso muestralmente continuo c.s., entonces podremos asegurar que casi todas las trayectorias de $x^*_{\lambda_o}$ se pueden obtener como el límite uniforme en $[a,b]$ (en el sentido ordinario) de funciones continuas sobre $[a,b]$, y por tanto ellas mismas serán funciones continuas. Es decir, $x^*_{\lambda_o}$ será también un proceso muestralmente continuo c.s.. Este es el caso, por ejemplo, cuando los integradores z^ρ ($\rho=1,\ldots n$) son procesos muestralmente continuos c.s. y podemos encontrar una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in N}\to\lambda_o$ tal que cada α_{λ_n} es también un proceso muestralmente continuo c.s., según vimos en los resultados obtenidos en el capítulo II.

APENDICE

APENDICE:

Como complemento al estudio realizado en el capítulo II sobre existencia y unicidad de solución en S.E.I.E.'s, vamos a ver una aplicación interesante del método de Picard en que el espacio sobre el que se define el correspondiente operador (al que se considera que pertenece la condición inicial) no es completo. Naturalmente, la resolución del problema en este caso se obtiene a partir de la extensión (por continuidad) del citado operador al espacio completado del original.

El espacio en cuestión, en este caso, será el espacio que notaremos $L^2(\bar{H}^*_{F,n})$, definido por

$$L^2(\bar{H}^*_{F,n}) \equiv \bar{H}^*_{F,n} \cap L^2(\Omega,A;R^n) \equiv$$

$$\equiv \{x: x\in\bar{H}^*_{F,n} \text{ y es } L_2\text{-acotado en } [a,b]\}$$

(De modo similar se definirá $L^2(H)$ para cualquier clase de procesos H).

Consideraremos también que $L(\omega)\equiv L_o$ c.s. en [HE].

TEOREMA:

"Sean las hipótesis [HE], con $L(\omega)\equiv L_o$ c.s.. Sea $\alpha\in L^2(\bar{H}^*_{F,n})$. Entonces, existe un único proceso x^* (salvo equivalencia) en $L^2(\bar{H}^*_{F,n})$ que es solución de $E[\alpha,g,h]$".

Demostración:

En principio, nos restringiremos a $L^2(H^*_{F,n})$.

Sea el operador T definido sobre $L^2(H^*_{F.n})$ que asocia a cada $X\in L^2(H^*_{F,n})$ el vector

$$((TX)^1,...(TX)^n)$$

donde cada $(TX)^i$, para cada i, es un proceso definido (salvo equivalencia) por

$$(TX)^i(t,\omega) = \alpha^i(t,\omega) + \sum_{\rho=1}^{r}\int_a^t g^i_\rho(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega) +$$

$$+ \sum_{\rho,\sigma=1}^{r}\int_a^t h^i_{\rho\sigma}(s,X(s,\omega),\omega)dz^\rho(s,\omega)dz^\sigma(s,\omega)$$

(para cada t,ω). Vamos a ver que:

a) T está bien definido

b) T aplica $L^2(H^*_{F,n})$ en sí mismo (para alguna elección de T)

c) T es lipschitziano

d) T^k es contractivo, para algún $k\in N$.

a) <u>T está bien definido</u>:

Sea $x\in L^2(H^*_{F,n})$. Vamos a ver que

$$f(t,x(t,\omega),\omega)\in H^*_F$$

para cada $f\in\{g,h;\ (i,\rho,\sigma)\}$. En efecto, por una parte, al ser

$$|f(t,x(t,\omega),\omega)| \leq L_o(1+|x(t,\omega)|)$$

se tiene inmediatamente que $f(t,x(t,\omega),\omega)$ tiene aplicación global acotada c.s..

Por otra parte, sea $u\in[a,b]\cap Q$ (racionales) y sea $G\subset[a,b]$ el conjunto de puntos de $[a,b]$ en que todos los procesos

$$f(t,x(u,\omega),\omega) \qquad \text{con } u\in[a,b]\cap Q$$

son P-continuos. El conjunto G^c tiene medida-Lebesgue cero en $[a,b]$ Lo -- mismo ocurrirá con el complementario en $[a,b]$ del conjunto

$$G' \equiv G\cap\{t\in[a,b]:\ x \text{ es P-continuo en } t\}$$

Sea $t_o\in G'$. Podemos escribir

$$|f(t,x(t,\omega),\omega)-f(t_o,x(t_o,\omega),\omega)| \leq$$

$$\leq L_o|x(t,\omega)-x(u,\omega)| + |f(t,\ x(u,\omega),\omega)-f(t_o,x(u,\omega),\omega)| +$$

$$+ L_o|x(u,\omega)-x(t_o,\omega)|$$

Así, para cada $\varepsilon>0$

$$P[|f(t,x(t,\omega),\omega)-f(t_o,x(t_o,\omega),\omega)|>\varepsilon] \leq$$

$$\leq P[L_o|x(t,\omega)-x(u,\omega)|>\varepsilon/3] +$$

$$+ P[|f(t,x(u,\omega),\omega)-f(t_o,x(u,\omega),\omega)|>\varepsilon/3] +$$

$$+ P[L_o|x(u,\omega)-x(t_o,\omega)|>\varepsilon/3]$$

Por tanto

$$\lim_{t\to t_o} P[|f(t,x(t,\omega),\omega)-f(t_o,x(t_o,\omega),\omega)|>\varepsilon]\leq$$

$$\leq 2P[L_o|x(t_o,\omega)-x(u,\omega)|>\varepsilon/3]$$

y el último miembro converge a cero cuando u tiende a t_o en $[a,b]\cap Q$. Así, $f(t,x(t,\omega),\omega)$ es P-continuo en c.t.p. de $[a,b]$.

Además, es F-medible, por [HE-6].

En definitiva, $f(t,x(t,\omega),\omega)$ pertenece a $L^2(H^*_{F,n})$, y las integrales que definen a Tx existen.

b) <u>T aplica $L^2(H^*_{F,n})$ en sí mismo (para alguna elección de T):</u>

Cada integral que define a Tx, para cada $x\in L^2(H^*_{F,n})$ tiene al menos una versión perteneciente a H^*_F, según se desprende del apartado anterior y de los teoremas (II.3.5.3) y (II.3.6.3) (v. nota al final de cada teorema). Por otra parte, cada integral es también un proceso L_2-acotado en $[a,b]$; es más, es L_2-continuo en $[a,b]$, según se desprende de las estimaciones establecidas en los corolarios (I.4.1.4) y (I.4.2.4). Puesto que $L^2(H^*_{F,n})$ es una clase cerrada para la suma, se obtiene finalmente que T aplica dicha clase en sí misma (eligiendo las versiones de las integrales convenientemente).

c) <u>T es lipschitziano</u>:

Este punto se demuestra exactamente igual que el punto (c) de la demostración del teorema (II.6.4.1), con x_1, x_2 perteneciendo a $L^2(H^*_{F,n})$ en lugar de a $H^2_{F,n}$.

d) T^k es contractivo, para algún $k \in N$:

(Obsérvese lo mismo que en el punto anterior, pero ahora con referencia al punto (d) de la demostración de (II.6.4.1)).

Por la propiedad (I.2.1) y la proposición (II.5.2.4), todo lo anterior se puede extender inmediatamente, sin dificultad alguna, considerando el espacio $L^2(\overline{H}^*_{F.n})$ en lugar de $L^2(H^*_{F,n})$ (al que, evidentemente, contiene). Seguiremos notando, no obstante, mediante T al operador extendido al nuevo espacio.

Sea $\overline{\overline{L}}^2(\overline{H}^*_{F.n})$ el completado de $L^2(H^*_{F,n})$ respecto a la pseudo-norma $|||\cdot|||$, y sea $\overline{\overline{T}}$ la extensión de T a $\overline{\overline{L}}^2(\overline{H}^*_{F.n})$ por continuidad; es decir, si $\overline{\overline{x}} \in \overline{\overline{L}}^2(\overline{H}^*_{F,n})$, y $\{x_m\}_{m \in N}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\overline{H}^*_{F,n})$ que converge a $\overline{\overline{x}}$:

$$x_m \xrightarrow{|||\cdot|||} \overline{\overline{x}}$$

(cuando $m \to \infty$), se define (salvo equivalencia)

$$\overline{\overline{T}}\overline{\overline{x}} \equiv \lim_{|||\cdot|||} Tx_m$$

Entonces:

a) $\overline{\overline{T}}$ está bien definido:

El límite anterior existe, evidentemente (por tratarse de procesos L_2-acotados y porque, al ser $\{x_m\}_{m \in N}$ una sucesión de Cauchy y T lipschitziano, $\{Tx_m\}_{m \in N}$ es también de Cauchy. Además, es único salvo equivalencia, puesto que si $\{y_m\}_{m \in N}$ es otra sucesión de Cauchy convergente a $\overline{\overline{x}}$, se tendrá que

$$|\overline{\overline{T}}\overline{\overline{x}}-Ty_m| \leq |\overline{\overline{T}}\overline{\overline{x}}-Tx_m| + |Tx_m-Ty_m| \leq$$

$$\leq |\overline{\overline{T}}\overline{\overline{x}}-Tx_m| + L'|x_m-y_m|$$

(siendo L' una costante de Lipschitz para T), por lo que al tender m a ∞

se tiene de nuevo que

$$Ty_m \xrightarrow{|||\cdot|||} \bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}$$

b) $\bar{\bar{T}}$ aplica $\bar{\bar{L}}^2(\bar{H}^*_{F,n})$ en sí mismo:

En efecto, esto es inmediato por ser $\bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}$ el límite de una sucesión de Cauchy de elementos de $\bar{\bar{L}}^2(\bar{H}^*_{F,n})$, para cada $\bar{\bar{x}}$ en dicho espacio.

c) $\bar{\bar{T}}$ es lipschitziano:

Sean $\bar{\bar{x}}^1$ y $\bar{\bar{x}}^2$ pertenecientes a $\bar{\bar{L}}^2(\bar{H}^*_{F,n})$, y dos sucesiones de Cauchy -- $\{x^1_m\}_{m\in N}$ y $\{x^2_m\}_{m\in N}$ de elementos de $L^2(\bar{H}^*_{F,n})$ convergentes respectivamente a $\bar{\bar{x}}^1$ y $\bar{\bar{x}}^2$. El resultado se tiene inmediatamente, puesto que

$$|||\bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}^1-\bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}^2||| \leq |||\bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}^1-Tx^2_m||| + L'|||x^1_m-x^2_m||| + |||Tx^2_m-\bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}^2|||$$

y, haciendo tender n a ∞, se obtiene que

$$|||\bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}^1-\bar{\bar{T}}\bar{\bar{x}}^2||| \leq L'|||\bar{\bar{x}}^1-\bar{\bar{x}}^2|||$$

d) T^k es contractivo, para algún $k\in N$:

La prueba es análoga a la anterior, con $\bar{\bar{T}}^{k_o}$ y T^{k_o} en lugar de $\bar{\bar{T}}$ y T, y ν en lugar de L', teniendo en cuenta que T^{k_o} sea contractivo y ν sea un coeficiente de contracción para T^{k_o}.

Finalmente, todo lo anterior se puede traducir convenientemente, considerando clases de equivalencia en lugar de los procesos originales (v. final de la demostración del teorema (II.6.4.1)). Así, el espacio cociente (respecto a la relación de eauivalencia de procesos: $\sim$):

$$(\bar{\bar{L}}^2(\tilde{H}^*_{F,n}), |||\cdot|||)$$

es un espacio métrico completo, y el teorema del punto fijo de Fomin-Kolmogorov (lema (II.6.3.1)) permite afirmar que el correspondiente operador $\tilde{\bar{\bar{T}}}$ (definido a partir de $\bar{\bar{T}}$ y $\sim$) tiene un único punto fijo $\tilde{x}^*\in\bar{\bar{L}}^2(\tilde{H}^*_{F,n})$, lo que concluye la demostración.

REFERENCIAS

REFERENCIAS:

[1] ANGULO IBAÑEZ, J. M.: "Notas sobre los teoremas de existencia de integrales de McShane de primer y segundo orden". Actas del XIV Congreso Nacional de Estadística, Investigación Operativa e Informática. Vol. II, pp. 845-854. Granada, 1984.

[2] ANGULO IBAÑEZ, J. M.: "Algunas estimaciones en media cuadrática de integrales de McShane de primer y segundo orden". Cuadernos del Departamento de Estadística Matemática de Granada. Vol. 7-8 (1984), pp. 35-45.

[3] BHARUCHA-REID, A. T.: "Random Integral Equations". Ac. Press. New York, 1972.

[4] ELWORTHY, K. D.: "Stochastic Differential Equations on Manifolds". London Mathematical Society Lecture Notes Series 70. Cambridge University Press, 1982.

[5] GIHMAN, I. I.; SKOROHOD, A. V.: "Stochastic Differential Equations". Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[6] GIHMAN, I. I.; SKOROHOD, A. V.: "The Theory of Stochastic Process I". Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[7] KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V.: "Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional". Ed. MIR. Moscú, 1975.

[8] LINARES PEREZ, J.: "Contribución al estudio de los problemas de regularidad y de las difusiones en ecuaciones integrales estocásticas hilbertianas". Tesis Doctoral. Universidad de Granada, 1982.

[9] LOEVE, M.: "Teoría de la Probabilidad". Ed. Tecnos, S. A.. Madrid, 1976.

[10] McSHANE, E. J.: "Stochastic Calculus and Stochastic Models". Ac. Press. New York, 1974.

[11] MOHAMMED, S-E. A.: "Stochastic functional differential equations". Research Notes in Mathematics 99. Pitman Advanced Publishing Program. London 1984.

[12] NEVEU, J.: "Bases mathématiques du Calcul des Probabilités". Masson et Cie.. Paris, 1970.

[13] POP-STOJANOVIC, ZORAN R.: "On McShane's belated stochastic integral". SIAM Journal App. Math.. Vol.22 (Enero, 1972), pp. 27-92.

[14] PROTTER, PHILIP E.: "A comparison of stochastic integrals". The Ann. of Probability. Vol. 7 (1979), pp. 276-289.

[15] WONG, E.; ZAKAI, M.: "On the convergence of ordinary integrals to -- stochastic integrals". Ann. Math. Statist. 36 (1965), pp. 1560-1564.

[16] WONG, E.; HAJEK, B.: "Stochastic Process in Engineering Systems". -- Springer-Verlag. New York,Heidelberg, Berlin,Tokyo, 1985.

[17] YOR, M. M.: "Les intégrales stochastiques hilberthiennes. Le problème des martingales dans un espace de Hilbert". Thèse. Université de Paris, 1973.