

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

FACULTAD DE CIENCIAS



DEPARTAMENTO DE ÓPTICA

**NUEVO MODELO DE FIBRAS ÓPTICAS:  
GUÍAS DE ONDAS PLANAS EN ROTACIÓN**

Tesis Doctoral

Memoria de Doctorado  
Antonio Manuel Peña García  
Granada 2008





# **NUEVO MODELO DE FIBRAS ÓPTICAS: GUÍAS DE ONDAS PLANAS EN ROTACIÓN**

Directores de la Tesis

Fdo.: Dr. Francisco Pérez Ocón  
Catedrático de Escuela Universitaria  
Departamento de Óptica  
Universidad de Granada

Fdo.: José Ramón Jiménez Cuesta  
Catedrático de Universidad  
Departamento de Óptica  
Universidad de Granada



El Dr. Francisco Pérez Ocón y el Dr. José Ramón Jiménez Cuesta, ambos pertenecientes al Departamento de Óptica de la Universidad de Granada

CERTIFICAN:

Que el trabajo de investigación que se recoge en la presente Memoria, titulada **“NUEVO MODELO DE FIBRAS ÓPTICAS: GUÍAS DE ONDAS PLANAS EN ROTACIÓN”** presentada por D. Antonio Manuel Peña García para optar al grado de Doctor por la Universidad de Granada con suplemento de Doctor Europeus, ha sido realizado en su totalidad bajo nuestra dirección en el Departamento de Óptica de la Universidad de Granada.

Dr. Francisco Pérez Ocón  
Catedrático de Escuela Universitaria

Dr. José Ramón Jiménez Cuesta  
Catedrático de Universidad



Trabajo presentado para aspirar al grado de  
Doctor por la Universidad de Granada.

Fdo.: Antonio Manuel Peña García





El tribunal nombrado por el Mgfco. y Exmo. Sr. Rector de la Universidad de Granada:

**Presidente:** Dr.

**Primer Vocal:** Dr.

**Segundo Vocal:** Dr.

**Tercer Vocal:** Dr.

**Secretario:** Dr.

Realizado el acto de defensa y lectura de la tesis el día        de        de  
2008 en Granada, acuerda otorgarle la calificación de



**A Cristina,  
a Caco y a Jesús**



*Y en las sombras del foque abría su lírico  
floripondio de ceceles el negro catedrático:*

*Navega, velelo mío  
sin temol,  
que ni enemigo navío,  
ni tolmenta ni bonanza,  
a tolcel tu lumbo alcanza  
ni a sujetal tu valol*

*Ramón del Valle-Inclán*



## **AGRADECIMIENTOS**

Sucede con frecuencia que al tratar de ubicar en el tiempo el punto de partida de un proyecto, nos encontramos con serias dificultades debido a que, o bien ha pasado mucho tiempo, o bien el germen de dicho proyecto han sido varias ideas separadas entre sí. Sin embargo, en el caso que nos ocupa y aunque sólo valga para el anecdotario, la idea fundamental en la que se basan tanto esta memoria como los trabajos a partir de los cuales ha surgido, tiene un origen bien definido en el espacio y en el tiempo.

Fue a finales de octubre de 2001 cuando, a propósito de un curso sobre Fibras Ópticas y Elementos Ópticos Integrados, el profesor Pérez-Ocón comentaba a sus alumnos las dificultades que la geometría cilíndrica de las fibras ópticas plantea a la hora de obtener ciertos parámetros fundamentales de los rayos propagados, especialmente de los denominados oblicuos.

Tras mucho pensar en la forma de sortear aquellas dificultades, el autor de este trabajo propuso un enfoque radicalmente distinto al del método clásico para tratar la propagación de rayos en fibras ópticas. La buena acogida de la idea por parte del Profesor Pérez-Ocón (“Me gusta. Creo que de aquí puede salir algo”), unida a su profundo conocimiento de las fibras ópticas y a la pasión que ambos hemos puesto en este trabajo, posibilitaron que poco a poco esta memoria fuese adquiriendo cuerpo.

Por esta razón y como no podía ser de otro modo, no puedo sino comenzar expresando mi eterno agradecimiento al Profesor Pérez-Ocón, Paco por su confianza incondicional en mi trabajo en general y en este proyecto en particular. Sin su generosa implicación, su seguridad a la hora de encauzar mis ideas cuando éstas surgían de forma torrencial y desordenada y su amistad, esta memoria jamás habría salido a la luz.

Gracias también al Profesor José Ramón Jiménez Cuesta por su confianza en mi trabajo y por la solidez que sus comentarios y sugerencias han aportado a este trabajo.

Mi infinito agradecimiento a los profesores Antonio Espín Estrella y Fernando Aznar Dols, trabajadores infatigables y pacientes maestros en mis primeros pasos en el complejo mundo docente. Los apasionantes retos que el trabajo junto a ellos me ha planteado a lo largo de estos años, han sacado lo mejor de mi mismo a la vez que me han descubierto nuevos horizontes profesionales.

A mis padres, gracias por haberme enseñado las cosas más importantes que conozco y por haberme inculcado con su ejemplo inigualable la constancia y la tenacidad en el trabajo. A mis hermanos Pablo y Javier, gracias por estar siempre orgullosos de mí. El tratar de ser un ejemplo para ellos me ha obligado a superarme cada día. Gracias también a Ana por poner cordura siempre que falta.

Y a Cristina, Caco y Jesús, las grandes pasiones de mi vida. Por mucho que busque jamás encontraré palabras para expresar lo que significáis para mí. Gracias, lógicamente a una más que a otros, por vuestra paciencia sin medida. Sin vosotros no sólo me habrían faltado el ánimo y la inspiración para culminar esta tesis sino que mi vida no tendría sentido.





## **RESUMEN**

La presente memoria recopila y completa una serie de trabajos publicados en Optics Express y European Journal of Physics. En ellos se presentó un modelo físico-matemático según el cual, bajo ciertas condiciones, una guía plana de ondas en rotación es equivalente a una fibra óptica por la que se propaga un rayo de energía radiante con unas determinadas características.

A lo largo del trabajo se presentan los principales resultados de este modelo en paralelo con los resultados equivalentes arrojados por el modelo clásico.

Finalmente se esbozan las líneas futuras de investigación basadas en este modelo.

## **ABSTRACT**

This work, summarizes and completes a set of papers published in Optics Express and European Journal of Physics. In these works, we presented a physical-mathematical model in which one planar waveguide is equivalent, under certain conditions, to a fiber optics in whose interior one ray of radiant energy with some given characteristics is propagated.

The main results of this model are presented in this thesis in parallel with the equivalent outcomes arising from the classical model.

Finally, future lines of research based on this model are sketched.



# **ÍNDICE**

INTRODUCCIÓN / INTRODUCTION .....	1
MODELO CLÁSICO .....	7
OBJETIVOS .....	21
CAPÍTULO I: MODELO .....	25
CAPÍTULO II: RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....	37
CAPÍTULO III: CONCLUSIONES / CONCLUSIONS .....	45
CAPÍTULO IV: BIBLIOGRAFÍA .....	49

## **INTRODUCCIÓN**

No cabe duda de que uno de los mayores hitos en la Historia de la Física fue la caracterización de los fenómenos naturales mediante el lenguaje preciso e inequívoco de las matemáticas. Este hecho, que tuvo su origen en el siglo XVII con Galileo y Newton [1-2], ha tenido tal impacto en nuestra manera de entender la Física que, hoy en día, resulta imposible concebir la descripción de ningún fenómeno físico sin recurrir al aparato matemático. En este sentido, el número de problemas que pueden resolverse dentro de esta disciplina sin emplear el formalismo matemático es ciertamente reducido por no decir nulo.

La situación inversa, es decir, la demostración de teoremas y la resolución de problemas matemáticos mediante principios y razonamientos físicos, aunque menos frecuente, también ha sido objeto de estudio. De hecho, pueden encontrarse en la literatura brillantes demostraciones de importantes teoremas de la Geometría, el Álgebra o el Análisis que recurren a razonamientos basados en el Primer

## **INTRODUCTION**

Without any kind of doubt, one of the main milestones in the History of Physics was the characterization of natural phenomena by means of the precise and unequivocal language of Mathematics. This fact, whose origin took place in the 17<sup>th</sup> Century with Galileo and Newton [1-2], had such a deep impact in our way to understand Physics that, nowadays, it is absolutely impossible to conceive the description of any physical phenomenon without appealing to the mathematical language. In this sense, the amount of Physical problems that can be solved without using the mathematical formalism is really small or null.

The inverse situation, that is, the demonstration of theorems and resolution of mathematical problems by means of physical principles and reasoning, although less frequent, has also been matter of research. In fact, we can find brilliant demonstrations of some important theorems of Geometry, Algebra or Mathematical Analysis that are based on the First Principle of Thermodynamics or the

Principio de la Termodinámica o el de mínima Energía Potencial [3-4].

Ya en el dominio de la Física, es frecuente que desde una de sus ramas se recurra a analogías con otras áreas de esta Ciencia para abordar problemas de forma más intuitiva. En este sentido, el propio Maxwell empleó en el siglo XIX analogías mecánicas para explicar el concepto de campo electromagnético [5].

Sin embargo, la teoría electromagnética no es la única rama de la Física que se sirve de los potentes e intuitivos métodos de la Mecánica, sino que encontramos otros símiles con esta ciencia en otras disciplinas de la Física como la teoría elemental de circuitos [6].

Son precisamente las analogías entre Mecánica y Óptica las que dan cuerpo a esta memoria, que tiene por objetivo la presentación de un modelo mecánico de fibra óptica, cuya utilidad y aplicaciones quedarán plenamente justificadas a lo largo de los siguientes capítulos desde varios puntos de vista.

Principle of minimum of Potential Energy [3-4].

Within the domain of Physics there are many situations in which one given field uses analogies with other areas of this Science to solve one problem in an easier and more intuitive way. Thus, in the 19<sup>th</sup> Century, Maxwell introduced some mechanical analogies in order to explain the concept of electromagnetic field [5].

Nevertheless, electromagnetic theory is not the only branch of Physics that appeals to the powerful and intuitive methods of Mechanics. Instead we find other símiles with this science in other fields of Physics such as circuit theory [6].

These analogies between Mechanics and Optics are just the main body of this work, whose main target is to introduce a mechanical model of fibre optics whose utility and applications will be fully justified through the next chapters from several points of view.

La importancia de las fibras ópticas en el mundo actual se encuentra hoy por hoy fuera de toda duda y sería difícil concebir nuestro modo de vida sin su existencia. Su vital presencia en campos tan dispares como la Medicina [7], las Telecomunicaciones [8] o la Automoción ha propiciado que, una vez conocidos sus fundamentos físicos [9-10], la mayoría de las investigaciones, se centran en las aplicaciones sin prestar demasiada atención a sus aspectos más básicos. En este sentido, el estudio geométrico de los rayos confinados en fibras ópticas ocupa un lugar de especial preponderancia.

Una de las principales razones de esta importancia, es que el estudio y caracterización de la radiación óptica como una onda o modo de propagación en fibras ópticas no es sencillo ni intuitivo y, en general, resulta difícil de entender. A este hecho hay que añadir la necesidad de métodos de cálculo, en algunos casos complejos [11-13], para obtener los principales parámetros de las fibras y los rayos guiados por ellas. Esta dificultad para “ver” cómo una radiación electromagnética se propaga dentro

Importance of fibre optics in the current society is nowadays out of doubt and it would be rather difficult to imagine our way of life without their existence. Their important role in so different fields such as Medicine [7], Telecommunications [8] or Automotive Industry has made that, once their physical fundamentals [9-10] have been known, the vast majority of researchers have been focussed on their applications without paying much attention to basic aspects. In this sense, the geometric study of guided rays within fibre optics is especially important.

One of the main reasons of this importance, is that the study and characterization of luminous radiation as a wave or mode of propagation within fibre optics is not easy nor intuitive and, most of the times, it is difficult to understand. Furthermore, we must consider the necessity of methods of calculation, complex in some cases [11-13], to obtain the main parameters of both fibres and guided rays. This difficulty to “see” how the electromagnetic radiation is propagated within one confined body

de un medio confinado como es una fibra óptica, disminuye si recurrimos al modelo de rayo luminoso, más intuitivo y comprensible. Por tanto, un estudio previo de la Óptica Geométrica de las fibras, hace que el modelo ondulatorio sea mucho más fácil de comprender ya que, de hecho, este modelo ha de recurrir al geométrico para simplificar el aparato matemático necesario para su descripción.

Sin embargo, un tratamiento en detalle de este modelo ha sido, por el momento y salvo escasísimas excepciones [14], objeto de poca atención en la literatura científica.

Precisamente, la escasez de estudios detallados en este campo, unida a la evidencia de que numerosos avances en Física e Ingeniería han tenido su origen en el replanteamiento de cuestiones básicas, nos ha impulsado a indagar sobre la influencia de la geometría de la fibra en el comportamiento de los rayos guiados, así como a buscar enfoques alternativos que permitan simplificar los complejos resultados de situaciones tan generales como la propagación de rayos oblicuos en fibras con perfil de índice gradual.

like a fibre optics, diminishes if we use the model of the luminous ray, which is more intuitive and comprehensible. Thus, a previous study of Geometric Optics in fibre optics makes the ondulatory model easier to understand and, indeed, this model uses the geometric one to simplify the complex mathematical treatment necessary for its description.

Nevertheless, a deep research on this field is, with some exceptions [14], difficult to find in the scientific literature so far.

It is just the lack of featured works on this field, together with the evidence that many important advances in Physics and Engineering have arisen from a deep review of basic questions, what has encouraged us to wonder about the influence of the geometry of fibre optics on the behaviour of guided rays and look for alternative points of view that might allow us to simplify the huge complexness of results arising from the most general situations such as skew rays in profile graded index profile fibres.



Como consecuencia de todo lo anterior, el objetivo de la presente memoria es al mismo tiempo científico y didáctico. Por un lado, el nuevo tratamiento propuesto para los rayos confinados en fibras ópticas, permite llegar a interesantes conclusiones sobre su comportamiento y, por otro, se presenta el estudio geométrico de las fibras ópticas desde un punto de vista complementario al clásico. A nuestro entender, el modelo introducido es mucho más intuitivo que el clásico en los casos más complejos, ahorra tiempo de resolución de problemas, es más simple desde una perspectiva matemática y proporciona otra visión del problema físico. De este modo, puede abrirse la mente de los estudiantes de Física o Ingeniería para resolver problemas desde diferentes puntos de vista, o recurriendo a otras disciplinas como se apuntaba al comienzo de esta sección.

In summary, as mentioned above, the targets of this work are both scientific and pedagogic: on one hand, the new treatment proposed for guided rays allows us to get interesting outcomes about their behaviour and, in parallel, it allows us to introduce the geometric study of fibre optics from another point of view complementary to the classic one. To our understanding, the new model is much more intuitive than the classic one in the most complex situations, it saves time when solving problems, it is simpler from a mathematical perspective and shows another perspective of the physical problem. Thus, the minds of students of Physics or Engineering can be open to solve problems from different points of view or using other physical disciplines as mentioned at the beginning of this section.



## **MODELO CLÁSICO**

### **1.- INTRODUCCIÓN**

Según la Óptica Física, una onda electromagnética, transportada por una fibra óptica, no es más que un tren de ondas (esférica, plana, ...) Un frente de ondas, se define como el lugar geométrico de todos los puntos de un tren de ondas que tienen la misma fase. Cuando estamos lejos de la fuente radiante, normalmente, el frente de ondas se puede considerar plano. Si la longitud de onda de la radiación es mucho más pequeña que los objetos que “ilumina”, la onda electromagnética se puede representar por un rayo, que no es más que la perpendicular al frente de ondas y que es paralelo al vector de Poynting, que indica la dirección en la que fluye la energía. Los efectos ópticos tangibles como son la reflexión y la refracción, por tanto, se pueden analizar de forma muy simple, desde el punto de vista de la Óptica Geométrica, sólo teniendo en cuenta el trazado de rayos.

Para que una onda se guíe dentro de una fibra óptica, hay que imponer dos condiciones, una, que las ondas deben sufrir reflexión total interna dos veces consecutivas en la interfase núcleo-revestimiento. La otra condición de onda guiada, es que tras las dos reflexiones internas consecutivas, el cambio de fase de las ondas sea un múltiplo entero de  $2\pi$ . Para estudiar la reflexión total interna, debemos considerar los principios de la Óptica Geométrica, es decir, la ley de Snell en el caso más simple, o la ecuación eikonal, en las situaciones más complejas [15-17].

Como ya se apuntaba en la Introducción, la Óptica Geométrica permite obtener los mismos resultados que la Óptica Ondulatoria de forma más sencilla en algunas aplicaciones tales como el cálculo de índices de refracción, las fibras ópticas curvadas, el cálculo de transmisión y absorción o el cálculo del índice de refracción equivalente.

En el sentido del párrafo anterior al plantear el diseño de una fibra óptica, el estudio de la transmisión de la radiación dentro de dicha fibra, es fundamental para obtener los índices de refracción del núcleo y del revestimiento, lo cual en este caso, simplifica el problema y proporciona una solución fácil y rápida. En este caso, el modelo de la Óptica Geométrica se introduce como alternativa al modelo ondulatorio, e incluso, en muchos casos, ambos modelos son equivalentes [18-19].

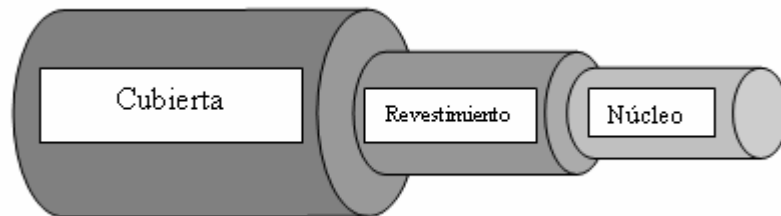
Otra situación compleja e importante es el estudio de las curvaturas en fibras ópticas. La forma de abordar este problema desde el punto de vista de la Óptica Física, es estudiar los haces que se ajustan a las distribuciones Hermite-Gauss en la reflexión y la transmisión de la radiación óptica en las interfases, pero existen otros procedimientos por medio del análisis complejo de rayos en dicha reflexión y transmisión [20] sin tener que recurrir al modelo ondulatorio, que es mucho más complicado.

Otro ámbito en el que la Óptica Geométrica se emplea con éxito es el estudio de las propiedades de absorción y transmisión de las ondas evanescentes y más en concreto en las fibras en forma de embudo (fibres taper) [21].

También existen modelos basados en el trazado de rayos que permiten calcular un índice de refracción equivalente en las denominadas guías de ondas de núcleo hueco "hollow core". Este índice de refracción complejo se determina mediante la minimización de la diferencia entre la reflectividad de un material virtual monocapa y un sustrato metálico recubierto con una película dieléctrica. Empleando esta técnica es posible calcular las pérdidas de transmisión de un sistema formado por una fibra de núcleo hueco y una guía de ondas de núcleo hueco [22].

## **2.- GENERALIDADES DE LAS FIBRAS ÓPTICAS**

La fibra óptica es un medio que, aprovechando el fenómeno de la reflexión total interna, es capaz de transportar energía radiante. Una fibra óptica está compuesta por dos elementos básicos: el núcleo (core) y el revestimiento (cladding). Por lo general existe también una cubierta o recubrimiento (coating) que protege al conjunto núcleo-revestimiento. Tanto el núcleo como el revestimiento están contruidos a partir de estratos concéntricos de material transparente a la radiación electromagnética que transporta.



**Figura 1.** Esquema de una fibra óptica.

Los tamaños de las fibras ópticas pueden ser muy variables según el fin para el que estén diseñadas. De este modo, una fibra óptica destinada a las comunicaciones puede tener un diámetro que oscile entre los 125 $\mu\text{m}$  y los 500 $\mu\text{m}$  mientras que las fibras empleadas para iluminación (en la industria automovilística, adornos ...) pueden tener un diámetro de hasta 6mm o más.

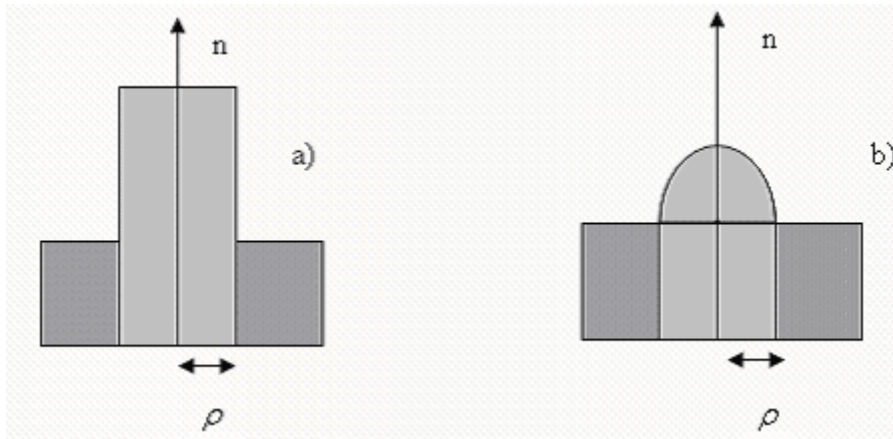
## **3.- TIPOS DE FIBRAS ÓPTICAS**

Las fibras ópticas pueden clasificarse de distintas formas, bien atendiendo a la variación del índice de refracción, o bien según el número de modos que puedan propagarse en su interior.

### **3.1.- PERFILES**

En cuanto a su estructura, podemos clasificar las fibras como:

- **Perfil de salto de índice:** en ellas el índice de refracción del núcleo es constante.
- **Perfil de índice gradual:** el índice del núcleo, del revestimiento, o ambos, varían radialmente de forma continua.

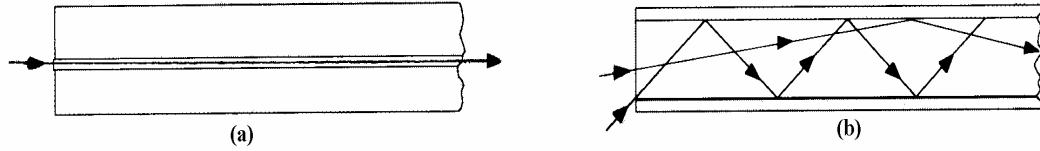


**Figura 2.** Perfiles típicos en una fibra óptica: a) Salto de índice b) Índice gradual.

### 3.2.- MODOS

En cuanto al número de modos que puedan transportar:

- **Multimodo** (multimode): presentan núcleos grandes por los que se propagan muchos rayos o modos. En ellas se produce una alta dispersión.
- **Monomodo** (single-mode): presentan núcleos pequeños por los que se propaga un rayo o un solo modo. Las dimensiones de su núcleo son comparables a la longitud de onda de la luz propagada. En ellas apenas se produce dispersión.



**Figura 3.** Esquema del trazado de los rayos en las fibras ópticas. (a) La fibra es monomodo, sólo se propaga un rayo (modo). (b) La fibra es multimodo, se pueden propagar más de un rayo (modo) y lo hacen de forma diferente, cada uno sigue una trayectoria distinta.

Una forma posible de distinguir una fibra óptica multimodo de una monomodo es medir el diámetro del núcleo, ya que no podemos distinguirlas a simple vista. Las multimodo cumplen la condición:

$$\frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_{co}^2 - n_{cl}^2) \gg 1 \quad (1)$$

donde:

$\rho$  es el radio del núcleo de la fibra óptica.

$\lambda$  es la longitud de la onda en el vacío.

$n_{co}$  y  $n_{cl}$  son el índice de refracción del núcleo y del revestimiento respectivamente.

Las dimensiones típicas de las fibras se muestran a continuación en la tabla 2.1, donde se define

$$2\Delta = \left(1 - \frac{n_{cl}^2}{n_{co}^2}\right) \approx \frac{n_{co} - n_{cl}}{n_{co}} \quad (2)$$

como la diferencia relativa de índice de refracción.

FIBRAS MULTIMODO	FIBRAS MONOMODO
$12,5\mu\text{m} < \rho < 100\mu\text{m}$	$2\mu\text{m} < \rho < 5\mu\text{m}$
$0,8\mu\text{m} < \lambda < 1,6\mu\text{m}$	$0,8\mu\text{m} < \lambda < 1,6\mu\text{m}$
$0,01 < \Delta < 0,03$	$0,003 < \Delta < 0,01$

**Tabla 1.** Parámetros típicos de las fibras ópticas.

La propagación de una onda electromagnética a lo largo de una fibra óptica viene perfectamente especificada por las ecuaciones de Maxwell. La Óptica Geométrica proporciona una descripción aproximada de la propagación de la radiación electromagnética, donde el índice de refracción varía ligeramente con la distancia cuando ésta es comparable con la longitud de onda. En una primera aproximación, es la manera más intuitiva de saber cómo se propaga la radiación electromagnética dentro de una fibra óptica (que en general, cuando trabajemos con Óptica Geométrica, consideraremos multimodo).

#### **4.- ESTRUCTURA DE LOS CABLES DE FIBRA ÓPTICA**

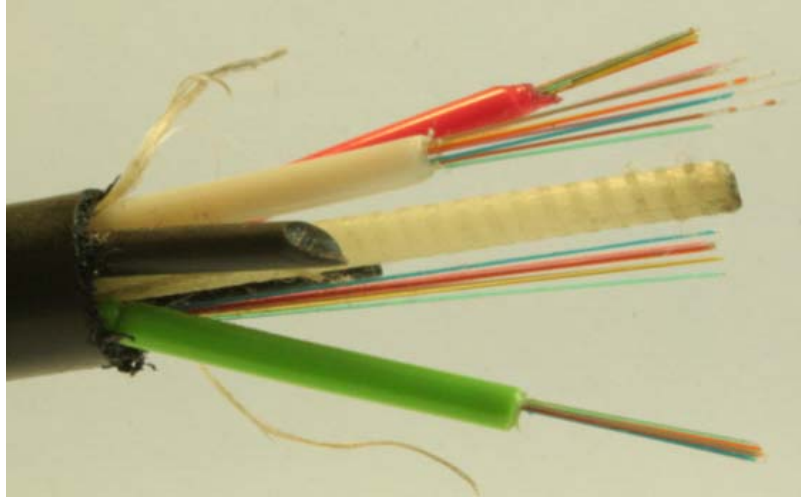
Si atendemos a la estructura de las fibras podemos diferenciar entre:

- **Estructura ajustada:** es la protección secundaria de la fibra óptica. Está constituida por un tubo de plástico en cuyo interior se encuentra alojada la fibra óptica. Al ser ajustada, no existe ningún hueco entre la protección secundaria y la primaria. Pueden ser cables tanto monofibra, como bifibra, trifibra ... . Pueden formar parte de un conjunto más grande, como puede ser un cable o un monocordón.
- **Estructura holgada:** como en el caso de la estructura ajustada, la holgada también es una protección secundaria. La protección es más grande que la ajustada y en el espacio entre la protección secundaria y la fibra, se suele rellenar de un líquido hidrófugo (vaselina, glicerina ...) para evitar la entrada de agua. Se utilizan normalmente como monocordón, como los que utiliza Telefónica S. A.

Normalmente, los cables están formados por muchas fibras ópticas. Dichas fibras, dentro del cable, pueden poseer estructura ajustada u holgada, incluso, en algunos cables, mezcla de ambas estructuras. Aunque existen muchos y variados tipos de cables de fibras ópticas, dependiendo del uso (cable aéreo, terrestre,



submarino, de interior, etc.) a modo de ejemplo, en la figura 4, se muestra un cable estándar utilizado en comunicaciones ópticas.



**Figura 4.** Cable de fibra óptica utilizada en comunicaciones.

## **5.- PARÁMETROS DE LAS FIBRAS ÓPTICAS**

Existe una serie de parámetros que relacionan la estructura de una fibra óptica con su capacidad para recolectar energía para transportar. Obviamente, estos parámetros son independientes de las características de los rayos que penetran en la fibra y de su valor dependerá el que un rayo sea guiado o se refracte abandonando la fibra.

- **Ángulo límite:** es el ángulo a partir del cual se produce la reflexión total interna de un rayo en la interfase núcleo-revestimiento. En una fibra óptica de salto de índice con índices de refracción  $n_{co}$  y  $n_{cl}$  para núcleo y revestimiento respectivamente, el ángulo límite vendría dado según la ley de Snell por la expresión:

$$\theta_l = \arcsin\left(\frac{n_{cl}}{n_{co}}\right) \quad (3)$$

En fibras con perfil de índice gradual, para las que existe un número arbitrario de interfases entre estratos con índices de refracción distintos, el ángulo límite para los rayos que incidan en una de estas interfases (por ejemplo entre los estratos “*i*” y “*j*” (donde se puede definir sólo el ángulo límite local) vendrá dado por:

$$\theta_{i,j} = \arcsin\left(\frac{n_j}{n_i}\right) \quad (4)$$

- **Ángulo de aceptación:** es el ángulo máximo para el que los rayos que penetren en la fibra sufrirán reflexión total interna. Dicho de otra forma, si un rayo entra en una fibra formando con el eje de ésta un ángulo inferior al de aceptación será guiado. En caso contrario, sufrirá refracción en la interfase núcleo-revestimiento y escapará de la fibra. Dependiendo del valor de este ángulo, una fibra podrá guiar más o menos rayos.

Teniendo en cuenta la definición anterior y la expresión para el ángulo límite puede deducirse su expresión:

$$\theta_a = \arcsin\left(\sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2}\right) \quad (5)$$

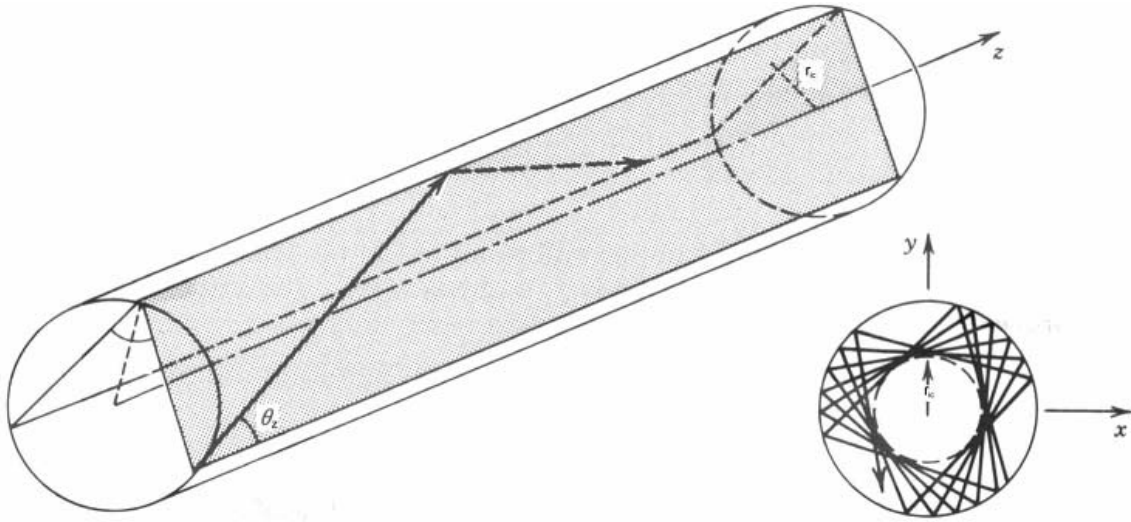
- **Apertura numérica:** al igual que el anterior, este parámetro nos informa sobre la capacidad de la fibra para recoger luz. Se define como

$$AN = n_0 \sin \theta_a \quad (6)$$

donde  $n_0$  es el índice de refracción del medio del que proviene el rayo antes de entrar a la fibra.

## 6.- TIPOS DE RAYOS EN FIBRAS ÓPTICAS

Si definimos dos planos perpendiculares, H-H y H-V, que intersecten en el eje de la fibra, cualquier rayo estará completamente definido por dos parámetros, el ángulo  $\theta_z$  que forma el propio rayo con el plano H-H y el ángulo  $\theta_\phi$  entre la tangente a la superficie de incidencia y la proyección de la trayectoria del rayo tal y como se muestran en las figuras 5 y 6.



**Figura 5.** Propagación de un rayo oblicuo en una fibra con perfil de salto de índice.

Atendiendo a los valores de  $\theta_\phi$  [14] podemos clasificar los rayos propagados en una fibra en:

- **Rayos meridionales:** en ellos  $\theta_\phi = \pi/2 \Rightarrow r = 0$ .

Estos rayos intersectan con el eje de la fibra y se reflejan siempre en el mismo plano sin cambiar su plano de incidencia.

- **Rayos oblicuos:** en ellos  $\theta_\phi \neq \pi/2 \Rightarrow r \neq 0$ .

Estos rayos se reflejan siempre en planos con el mismo  $\theta_\phi$  dibujando una trayectoria helicoidal confinada dentro de una región anular de radios  $r$  y  $\rho$  (ver figura 5.)

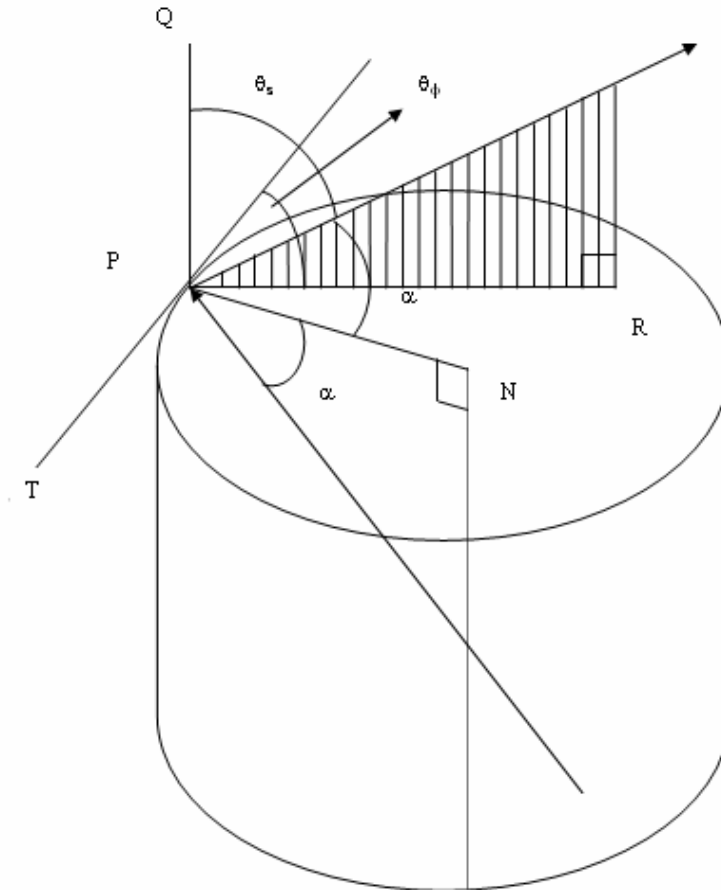


Figura 6. Ángulo  $\theta_\phi$  en una fibra óptica.

## **7.- PARÁMETROS DE LOS RAYOS**

Además de los parámetros definidos en el apartado 3, que dependen únicamente de las características de la fibra que estamos estudiando, existen otros parámetros básicos en el estudio geométrico de los rayos propagados en fibras ópticas y que, además de las características de la fibra en cuestión, dependen de los ángulos con los que cada rayo se propaga a lo largo de éstas.

Sea un rayo que se propaga por una fibra óptica cuyo núcleo tiene un radio  $\rho$ . En principio y por simplificación supondremos que el perfil es de salto de índice según los esquemas que aparecen en las Figuras 4 o 5. A partir de la observación de estas figuras podemos aplicar los principios elementales de la Trigonometría para deducir una serie de parámetros de capital importancia.

- **Invariantes del rayo:** son dos parámetros,  $\bar{\beta}$  y  $\bar{l}$  relacionados respectivamente con la invarianza trasnacional y rotacional de las fibras ópticas y cuya expresión para el caso de un perfil de salto de índice es:

$$\bar{\beta} = n_{co} \cos \theta_z; \quad \bar{l} = n_{co} \sin \theta_\phi \cos \theta_\phi \quad (7)$$

De la expresión anterior se deduce que en los rayos meridionales,  $\bar{l} = 0$  mientras que en los oblicuos,  $\bar{l} > 0$ . Puede encontrarse un tratamiento detallado de estos invariantes así como su deducción en [14].

- **Longitud de la trayectoria  $L_p$  entre dos puntos:** se define como el camino recorrido por un rayo entre dos puntos. A diferencia de la siguiente, ésta es una magnitud puramente geométrica.

$$L_p = 2\rho \frac{\sin \theta_\phi}{\sin \theta_z} = 2\rho n_{co} \frac{\sqrt{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2}}{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2} \quad (8)$$

- **Longitud de camino óptico:** es la longitud de la trayectoria ponderada con el índice de refracción de la fibra que atravesase. Es una magnitud óptica.

$$L_0 = n_{co} L_p = 2\rho n_{co} \frac{\sin \theta_\phi}{\sin \theta_z} = 2\rho n_{co}^2 \frac{\sqrt{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2}}{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2} \quad (9)$$

- **Semiperiodo del rayo:** es la distancia medida sobre el eje de la fibra entre dos reflexiones totales consecutivas.

$$z_p = L_p \cos \theta_z = 2\rho \frac{\sin \theta_\phi}{\text{tg} \theta_z} = 2\rho \bar{\beta} \frac{\sqrt{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 - \bar{l}^2}}{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2} \quad (10)$$

**- Número de reflexiones por unidad de longitud de la fibra:**

$$N = \frac{1}{z_p} \quad (11)$$

**- Tiempo de tránsito del rayo:** es el tiempo que tarda un rayo en avanzar una distancia  $z$  a lo largo del eje de la fibra óptica.

$$t = \frac{z}{z_p} \frac{L_0}{c} = \frac{z}{c} \frac{n_{co}}{\cos \theta_z} = \frac{z}{c} \frac{n_{co}^2}{\beta} \quad (12)$$

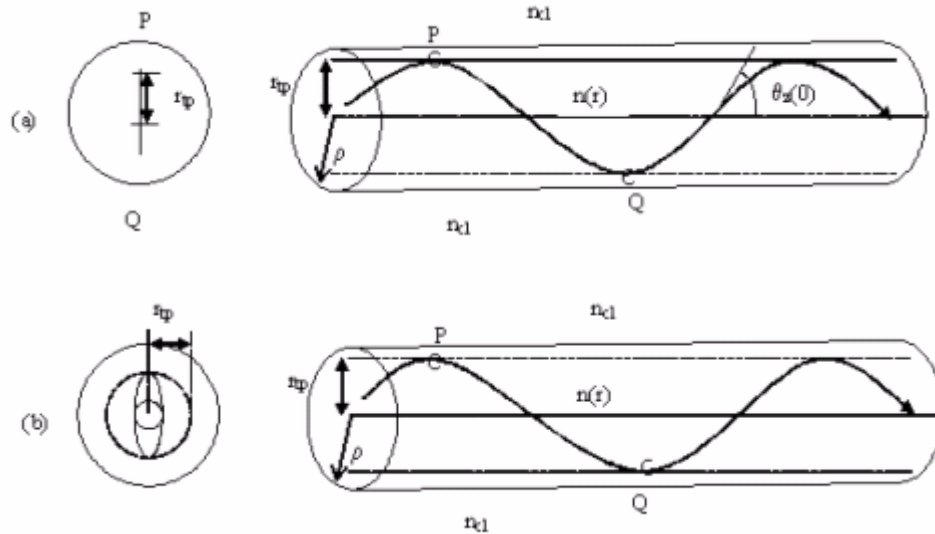
**- Puntos límite (Turning points):** son aquellos puntos en los que el rayo sufre una reflexión total interna en la parte más externa de la fibra óptica. Determinan la cáustica externa (Fig. 7 (a) y (b)) correspondiente a la propagación de un rayo dentro de una fibra óptica. Su expresión obtenida mediante el modelo clásico de propagación de rayos en fibras ópticas con perfil de salto de índice viene dada por:

$$r_{pl} = \frac{\rho}{2n_{co}\sqrt{\Delta}} \sqrt{\left(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2\right) + \sqrt{\left(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2\right)^2 - 8\Delta \bar{l}^2 n_{co}^2}} \quad (13)$$

**- Puntos de la cáustica interna:** se definen igual que los puntos límites anteriores de la cáustica externa, pero en la parte más interna de la fibra (Fig. 7) y determinan la cáustica interna (Fig. 7 (b)) correspondiente a la propagación de un rayo dentro de una fibra óptica de perfil de salto de índice.

$$r_{ci} = \frac{\rho}{2n_{co}\sqrt{\Delta}} \sqrt{\left(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2\right) - \sqrt{\left(n_{co}^2 - \bar{\beta}^2\right)^2 - 8\Delta \bar{l}^2 n_{co}^2}} \quad (14)$$

Evidentemente, estos puntos sólo tienen sentido para rayos oblicuos pues los rayos meridionales atraviesan el eje de la fibra tras cada reflexión interna y por tanto para este tipo de rayos  $r_{ci} = 0$ .



**Figura 7.** Trayectoria de diversos rayos dentro de una fibra de perfil de índice gradual con puntos límite en P y Q; en (a) se representa un rayo meridional con su cáustica externa (la interna tiene radio 0) y en (b) uno oblicuo con sus cáusticas interna y externa.

## **8.- PRINCIPALES VENTAJAS DE LAS FIBRAS ÓPTICAS EN COMUNICACIONES**

Aunque la transmisión de información mediante fibras ópticas no es objeto de este trabajo, es obligado mencionar las inmensas posibilidades de las fibras en comunicaciones. Dentro de este campo, las fibras presentan grandes ventajas sobre otros medios de transmisión de información más tradicionales como pueden ser el par trenzado o el coaxial. Algunas de las ventajas más notables son:

- Ancho de banda: la capacidad potencial de transportar información crece con el ancho de banda del medio de transmisión y con la frecuencia de portadora. Las fibras ópticas tienen un ancho de banda de alrededor de 1THz que, aunque está lejos de poder ser explotado hoy día, supera ampliamente al de los cables de cobre.
- Bajas pérdidas: las pérdidas indican la distancia a la cual la información puede ser enviada. En un cable de cobre, la atenuación crece con la frecuencia de

modulación. En una fibra óptica, las pérdidas son las mismas para cualquier frecuencia de la señal hasta muy altas frecuencias.

- Inmunidad electromagnética: la fibra no irradia ni es sensible a las radiaciones electromagnéticas, ello las hace un medio de transmisión ideal cuando el problema a considerar son las EMI.

- Seguridad: es extremadamente difícil intervenir una fibra, y virtualmente imposible hacer la intervención indetectable, por ello es altamente utilizada en aplicaciones militares.

- Bajo peso: los cables de fibra óptica son más ligeros que los conductores de cobre.



## **OBJETIVOS**

El objetivo de la presente memoria es doble. Por una parte, el modelo propuesto pretende dar solución a problemas puramente científicos, por lo que este trabajo tiene una vertiente investigadora, pero también pretende resolver problemas de índole didáctica que se presentan en cualquier curso de fotónica o fibras ópticas.

### **1.- OBJETIVOS CIENTÍFICOS**

Como se ha visto en el capítulo anterior, la resolución de la ecuación eikonal en los casos más generales de propagación de rayos guiados (rayos oblicuos en fibras de índice gradual), es realmente compleja incluso para los perfiles de fibra que presentan soluciones exactas. Además, las ecuaciones obtenidas incorporan gran cantidad de parámetros que en la mayoría de los casos requieren largos cálculos computacionales a la hora de obtener cualquier resultado para un rayo concreto en una fibra concreta.

Por tanto, el objetivo científico de esta memoria es la obtención de un modelo cuyos resultados sean similares a los del modelo clásico, más manejables y físicamente interpretables, sin recurrir a la resolución de complejas ecuaciones que requieran la aplicación de métodos numéricos y computacionales. Un modelo que cumpla estos objetivos, permitirá no perder de vista el significado físico de los parámetros involucrados, con la consiguiente ventaja a la hora de buscar resultados y aplicaciones de forma mucho más sencilla que el modelo clásico.

### **2.- OBJETIVOS DIDÁCTICOS**

La experiencia de numerosos profesores que imparten cursos de fibras ópticas a estudiantes de Física e Ingeniería, demuestra que los alumnos tienen problemas a la hora de visualizar la propagación de rayos oblicuos en fibras

ópticas, especialmente en las fibras de índice gradual. Esta dificultad contribuye negativamente a la interpretación de las ecuaciones y parámetros obtenidos incluso en los cálculos más sencillos. Este trabajo pretende dar otro punto de vista, otro formalismo matemático para explicar la Óptica Geométrica de las fibras ópticas, y así, ofrecer un modelo alternativo al clásico.

La introducción de un modelo que no requiera una visualización en tres dimensiones, facilita enormemente la comprensión de cómo se propagan realmente los rayos oblicuos en las fibras ópticas ya que, para comprender los efectos producidos por la rotación de una fibra óptica, es suficiente considerar su sección transversal y por tanto el alumno evita la inclusión de una dimensión en su abstracción.

Además, si el parámetro fundamental del modelo es bien conocido por los alumnos tal y como sucede con la velocidad angular, la facilidad a la hora de comprender los resultados derivados de dicho modelo será aún mayor.

A partir de aquí, pues, el trabajo presentado se estructura en cuatro capítulos, siendo el compendio de los trabajos previos que han dado origen a esta memoria de Tesis Doctoral.

En el Capítulo I, “*Modelo*”, se introduce el modelo propiamente dicho de una guía plana de ondas en rotación. Se muestra el cuerpo matemático formal y se complementa con el significado físico de las ecuaciones utilizadas y que constituyen la alternativa al modelo clásico.

En el Capítulo II, “*Resultados y Discusión*”, se presentan los resultados y las consecuencias de nuestro modelo cuando lo aplicamos a casos reales y son comparados con los resultados del modelo clásico. Este capítulo es el “control de calidad” de nuestro modelo.

En el Capítulo III, “*Conclusiones*”, se enumeran las consecuencias más relevantes del trabajo, las innovaciones y las líneas de investigación futuras.

Por último, en el capítulo IV, “*Bibliografía*”, se indican las referencias bibliográficas que se han utilizado para el desarrollo de la presente memoria de Tesis Doctoral.

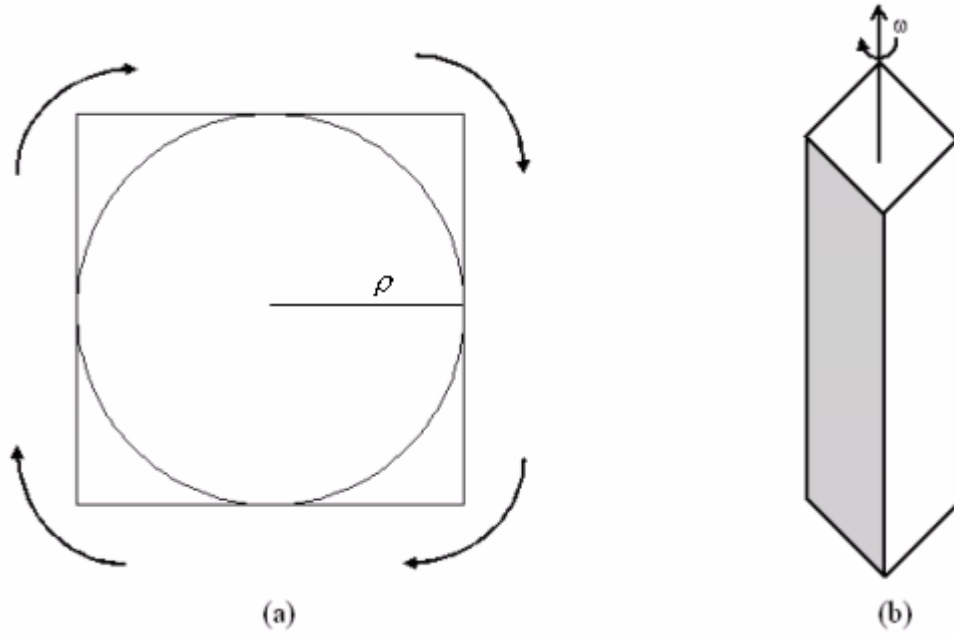


## **CAPÍTULO I: MODELO**

Tras repasar someramente algunos conceptos básicos sobre la propagación de rayos en fibras ópticas desde el punto de vista de la Óptica Geométrica que es el que aparece en la escasa literatura al respecto, pasamos a exponer el modelo desarrollado según el cual cualquier fibra óptica es equivalente a una guía plana de ondas en rotación. Como veremos, esta consideración nos permitirá simplificar enormemente el engorroso aparato matemático necesario para estudiar la propagación de rayos en fibras ópticas a la vez que nos permitirá obtener los principales parámetros de éstos.

Sea un rayo, en principio meridional, que se propaga a través de una guía plana de ondas de sección cuadrada y simétrica. La condición para que el rayo sea guiado [14], es que se produzca reflexión total interna. Sin embargo, si la guía de ondas rotase sobre su eje con una velocidad angular  $\omega$  [23-24], podría conseguirse, si el valor de  $\omega$  fuese el adecuado, que cada rayo se reflejase siempre sobre una misma línea recta de la misma cara de la guía. Veremos a continuación cómo esta consideración tan simple puede aplicarse a las fibras ópticas cuya geometría cilíndrica hace que cualquier cálculo sea mucho más complejo que en guías de ondas de sección cuadrada.

Sea una guía plana de ondas que circunscribe a una fibra óptica por la que se propaga un rayo como el anterior y cuya semi-altura es igual al radio  $\rho$  de dicha fibra. Consideremos que esta guía de ondas puede rotar con una velocidad angular  $\omega$  sobre el eje de la fibra (que a su vez coincide con el eje de la propia guía de ondas) según se ilustra en la Figura 1.1 de tal modo que el plano de incidencia del rayo guiado incluya siempre a la misma línea recta sobre la guía independientemente de la distancia del frente del rayo al eje de la fibra. De manera más gráfica podríamos decir que la guía “sigue” al rayo a lo largo de su propagación a través de la fibra [23].



**Figura 1.1.** Fibra óptica circunscrita por una guía de ondas en rotación.

Para satisfacer esta condición, la guía de ondas habrá de rotar con una velocidad angular que, dependiendo del tipo de fibra óptica que estemos considerando, será constante (fibras de salto de índice) o bien tendrá un valor distinto según el índice de refracción del estrato que atravesase en cada momento (fibras de índice gradual) A continuación se calcularán las velocidades de rotación para ambos tipos de fibra para posteriormente demostrar que el primer caso no es sino un caso particular del segundo.

### **1.- FIBRAS DE SALTO DE ÍNDICE**

A la vista de las figuras definiciones del capítulo anterior resulta inmediato que el tiempo transcurrido entre dos reflexiones totales consecutivas de un rayo meridional vendrá dado por:

$$t_r = \frac{2\rho n_{co}}{c \sin \theta_z} \quad (1.1)$$

donde  $\rho$  es el radio de la fibra.

Si, como hemos avanzado en el apartado anterior, consideramos que la fibra óptica por la que se propaga en rayo está inscrita en una guía de ondas de igual sección que rota entorno al eje común de forma que el rayo rebote siempre sobre la misma cara de la guía, para un rayo meridional el tiempo de tránsito del rayo y el periodo de rotación de la guía de ondas quedarían relacionados mediante la expresión:

$$t_r = \frac{T}{2} \quad (1.2)$$

Si en lugar de un rayo meridional, para el cual el ángulo entre el plano de incidencia entre dos reflexiones consecutivas es  $\pi$ , consideramos un rayo oblicuo para el que los planos de incidencia entre dos reflexiones totales consecutivas forman un ángulo arbitrario,  $2\gamma$ , (fig. 4.2) el factor de proporcionalidad entre tiempo de tránsito y periodo de rotación de la guía de ondas, no sería  $1/2$  sino  $\gamma/2\pi$  y por tanto tendríamos:

$$t_r = \frac{\gamma}{2\pi} T \quad (1.3)$$

*Estas dos últimas expresiones constituyen el auténtico punto de partida del modelo propuesto pues relacionan parámetros de la trayectoria de un rayo en una fibra óptica con una magnitud asociada a la rotación de una hipotética guía de ondas que inscribiese a dicha fibra óptica.*

### **1.1. RAYOS MERIDIONALES**

De las expresiones anteriores, el periodo de rotación de nuestra guía plana de ondas en torno a una fibra óptica de estructura salto de índice por la que se propaga un rayo meridional vendría dada por:

$$T = \frac{4\rho n_{co}}{c \sin \theta_z} \quad (1.4)$$

como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.5)$$

Obtenemos la expresión para la velocidad de rotación de nuestra guía de ondas:

$$\omega = \frac{\pi c \sin \theta_z}{2\rho n_{co}} \quad (1.6)$$

La expresión anterior significa que cuando un rayo meridional se propaga por una fibra salto de índice, la situación es equivalente a la de un rayo, también meridional que se propagase por el interior de una guía de ondas planas en rotación con la velocidad angular dada por la ec. (1.6).

## **1.2. RAYOS OBLICUOS**

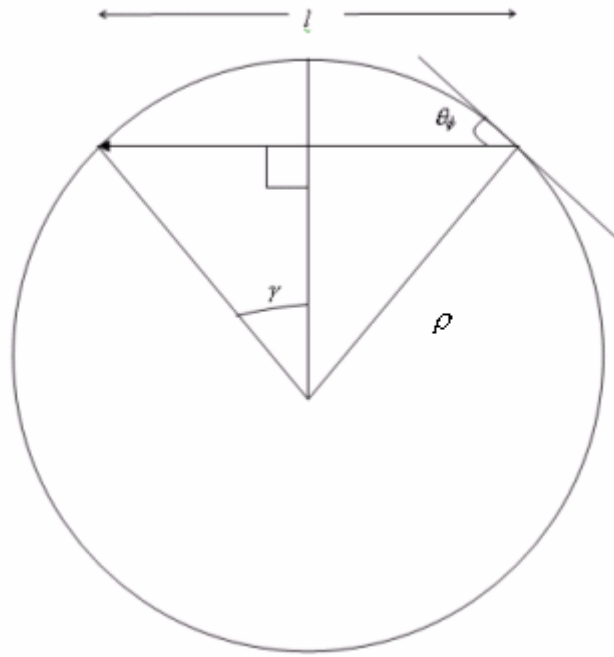
El comportamiento de los rayos oblicuos es más complejo debido a la geometría cilíndrica de las fibras ópticas. Con el objeto de ilustrar mejor los pasos intermedios, comenzaremos considerando la situación en un corte transversal de la fibra, es decir, en dos dimensiones, para después pasar a estudiar el comportamiento de un rayo oblicuo en tres dimensiones.

### *- Proyección bidimensional*

Si consideramos el corte transversal de una fibra óptica de radio  $\rho$  según la figura 4.2, la longitud de la proyección del rayo sobre este corte será



$$l = 2\rho \sin \theta_\phi \quad (1.7)$$



**Figura 1.2.** Proyección de la trayectoria de un rayo oblicuo sobre un corte transversal de una fibra óptica.

A la vista de la figura anterior, es inmediata la relación  $\gamma = \theta_\phi$  por lo que la fracción angular de circunferencia barrida entre dos reflexiones totales consecutivas será  $2\gamma/2\pi = 2\theta_\phi/2\pi$  y, por tanto,  $t_r = \theta_\phi T / \pi$ . Así, para el caso bidimensional, en el que sólo está involucrado el ángulo  $\theta_\phi$ , tendremos

$$t_r = \frac{l}{v} = \frac{2\rho n_{co} \sin \theta_\phi}{c} = \frac{\theta_\phi T}{\pi} \quad (1.8)$$

donde  $v$  es la velocidad del rayo dentro del medio. Sustituyendo en la ec. (1.5), tendremos finalmente

$$\omega = \frac{c \theta_\phi}{\rho n_{co} \sin \theta_\phi} \quad (1.9)$$

- Generalización a 3D

Dado que la situación real es una fibra óptica con una longitud determinada, tendremos que extender la expresión anterior a tres dimensiones lo cual nos obliga a introducir el ángulo  $\theta_z$  en nuestras ecuaciones. En este sentido, la longitud de la trayectoria del rayo entre dos reflexiones totales consecutivas sería según vimos en el modelo clásico:

$$L_p = \frac{2\rho \sin \theta_\phi}{\sin \theta_z} \quad (1.10)$$

con lo cual, según las ecuaciones (1.5) y (1.8) anteriores, obtendríamos el siguiente valor para la velocidad de rotación de nuestra guía plana de ondas:

$$\omega = \frac{c \theta_\phi \sin \theta_z}{\rho n_{co} \sin \theta_\phi} \quad (1.11)$$

Si multiplicamos (1.11) por  $n_{co}/n_{co}$ , obtendremos tras una sencilla operación matemática una expresión similar que incluye al invariante  $\bar{\beta}$ :

$$\omega = \frac{c \theta_\phi \sqrt{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2}}{\rho n_{co}^2 \sin \theta_\phi} \quad (1.12)$$

## **2.- FIBRAS CON PERFIL DE ÍNDICE GRADUAL**

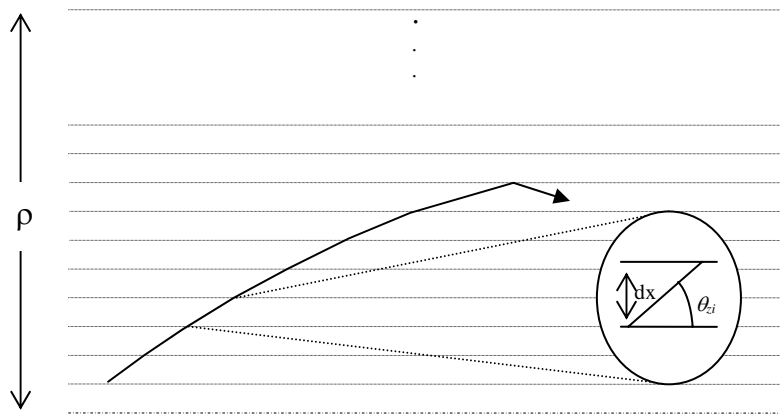
Las fibras de perfil de índice gradual son aquellas en las que el índice de refracción no es constante sino que decrece gradualmente con la distancia al eje de la fibra y por tanto es de la forma  $n = n(x)$ . Esto significa que, a efectos de cálculos, una fibra de índice gradual puede considerarse como una fibra de salto de índice en las que el núcleo tiene infinitos estratos, de espesor diferencial, de diferentes índices de refracción a través de los cuales se refractan los rayos

luminosos hasta que en una de las interfases entre estratos de distinto índice se produce finalmente una reflexión total interna.

Según la forma en que varíe el índice de refracción, distinguiremos entre distintos tipos de fibras de índice gradual (perfil parabólico, potencial de revestimiento...).

### 2.1. RAYOS MERIDIONALES

Sea un rayo meridional que se propaga por una fibra con perfil de índice gradual según el esquema de la figura 1.3.



**Figura 1.3.** Trayectoria de un rayo meridional en una fibra de índice gradual. Detalle de un estrato.

A la vista de la figura anterior puede deducirse la longitud de la trayectoria recorrida por el rayo dentro del estrato “ $i$ ”, que vendrá dada por:

$$dL_i = \frac{dx}{\sin \theta_{zi}} \sin \theta_{\phi i} \quad (1.13)$$

y el tiempo que permanece un rayo determinado en ese estrato “ $i$ ” será

$$dt_i = \frac{dL_i}{v_i} = \frac{n_i dx}{c \sin \theta_{zi}} \sin \theta_{\phi i} \quad (1.14)$$

Consideremos, al igual que en el apartado anterior, nuestra hipotética guía de ondas plana que inscribe a la fibra óptica en cuestión y rota sobre el eje común. Al tratarse de una fibra de índice gradual, el rayo no se desplaza en línea recta por el interior de la fibra sino que va variando su trayectoria conforme pasa de un estrato a otro. Para que la reflexión total interna del rayo se produzca siempre sobre la misma recta de una misma cara de la guía, exigiremos que la guía de ondas vaya “siguiendo” al rayo de modo que dicha recta, el frente del rayo y el eje de la fibra estén siempre en un mismo plano. Para que esto sea posible, la velocidad angular de la guía de ondas variará según el estrato de la fibra que el rayo atraviese en cada momento, es decir,  $\omega = \omega_i$ . La expresión de la velocidad vendrá dada por

$$\omega_i \rightarrow \omega(x) = \frac{d\theta_\phi(x)}{dt} \quad (1.15)$$

donde se ha considerado una separación continua e infinitesimalmente pequeña entre los estratos con distinto índice de refracción. Por esta razón, dado que el número de estratos tenderá a infinito, consideraremos que las magnitudes implicadas serán continuas en la coordenada  $x$  que expresa la distancia radial al eje de la fibra es decir,  $\theta_{zi} \rightarrow \theta_z(x)$ ,  $\theta_{\phi i} \rightarrow \theta_\phi(x)$  y  $\omega_i \rightarrow \omega(x)$ . Es necesario incidir en que esta consideración ( $N \rightarrow \infty$ ) no es en realidad una restricción, al contrario, podemos adoptarla sin pérdida de generalidad y nos permitirá manejar con facilidad el gran número de estratos existente en una fibra de índice gradual.

Si introducimos  $dx$  en el numerador y el denominador de la ec. (1.15), obtendremos la expresión de la velocidad de rotación para un rayo meridional en una fibra de índice gradual:

$$\omega(x) = \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \frac{c \sin \theta_z(x)}{n(x) \sin \theta_\phi(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > dx \\ \frac{\pi c \sin \theta_z(x)}{n(x) 2dx} & \text{si } x < dx \end{cases} \quad (1.16)$$

donde hemos considerado que

$$\frac{d\theta_{\phi}(x)}{dx} = \frac{\pi}{2dx} \quad (1.17)$$

ya que para los rayos meridionales, el ángulo  $\theta_{\phi}$  cambia de  $\pi/2$  a  $-\pi/2$  al cortar el eje de la fibra. Nótese que en la expresión anterior,  $2dx$  es el espesor del estrato central (que en el caso de una fibra con perfil de salto de índice correspondería al diámetro del núcleo  $2\rho$ ).

El significado de la ec. (1.16) es que mientras el rayo meridional esté viajando por fuera del estrato central (aquella que contiene al eje de la fibra), nuestra hipotética guía plana de ondas permanecerá en reposo pero cuando penetre en dicho estrato, la guía comenzará a rotar con una velocidad angular tal que al salir el rayo de este estrato, la guía de ondas ya esté posicionada de forma que la reflexión total interna (independientemente del estrato donde ésta tenga lugar), se produzca siempre en la misma recta de la misma cara de la guía de ondas. El sentido de esta rotación (horario o antihorario) es indiferente ya que los resultados de este modelo no dependen de él puesto que estamos dentro del dominio de la Óptica Geométrica. Como avance, aunque no es el propósito de esta tesis, un giro en sentido horario o antihorario significaría que tenemos dos polarizaciones diferentes dentro de un mismo modo de propagación.

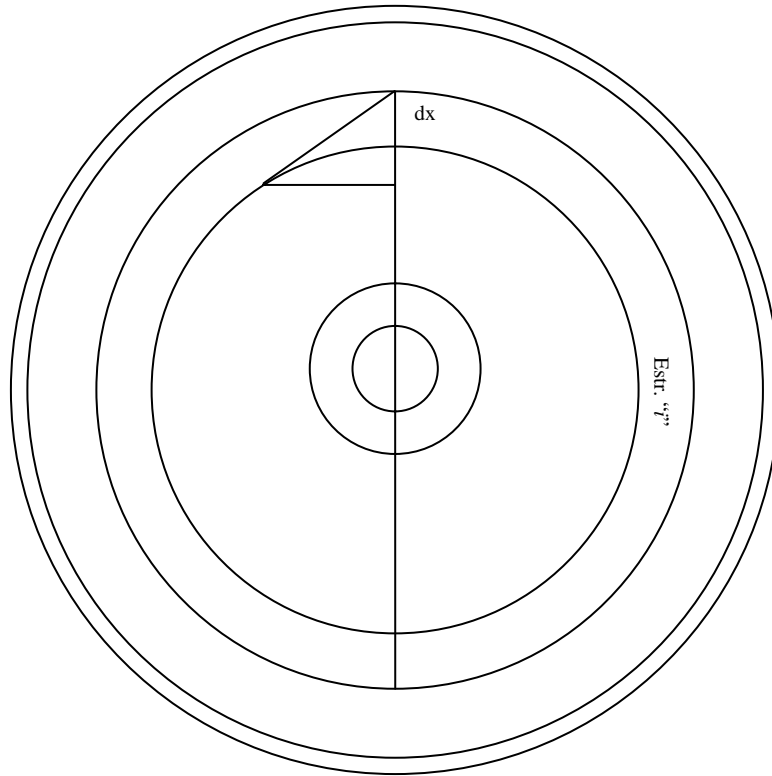
Este resultado es idéntico al obtenido para rayos meridionales en fibras salto de índice si consideramos al núcleo de éstas de igual modo que al estrato central de una fibra de índice gradual. Esto sirve de “control de calidad” del modelo propuesto, pues las fibras de salto de índice son un caso particular de las fibras de índice gradual en la que  $n(x) = n_{co} = cte$ .

## **2.2. RAYOS OBLICUOS**

Consideremos, al igual que hacíamos con las fibras salto de índice, una sección de la fibra óptica perpendicular a su eje. Dado que en las fibras de índice gradual el índice de refracción cambia de forma continua, el espesor de cada

estrato tenderá a cero ( $dx \rightarrow 0$ ) y por tanto, la longitud de la proyección de la trayectoria de cada rayo oblicuo a su paso por el estrato “ $i$ ” puede verse en la figura 1.4 y cuantitativamente mediante la ecuación siguiente:

$$dL_i = \sin \theta_{\phi_i} dx \quad (1.18)$$



**Figura 1.4.** Sección de una fibra de índice gradual sobre un plano perpendicular al eje. Proyección de la trayectoria del rayo dentro del estrato “ $i$ ”.

Si consideramos la fibra completa, la longitud total de la trayectoria recorrida por el rayo dentro del estrato “ $i$ ” será

$$dL_i = \frac{\sin \theta_{\phi_i} dx}{\sin \theta_{z_i}} \quad (1.19)$$

y, por tanto el tiempo que el rayo permanece en este estrato vendrá dado por:

$$dt_i = \frac{dL_i}{v_i} = \frac{n_i \sin \theta_{\phi_i} dx}{c \sin \theta_{z_i}} \quad (1.20)$$

Al igual que en el caso anterior, consideraremos un cambio continuo del índice de refracción con la distancia al eje por lo que todos los parámetros involucrados pasarán a depender de la coordenada  $x$ .

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, obtendremos finalmente:

$$\omega(x) = \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \frac{c \sin \theta_z(x)}{n(x) \sin \theta_\phi(x)} \quad (1.21)$$

Dado que el índice de refracción decrece desde los estratos más internos hacia los más externos, de la ecuación anterior, se deduce que la velocidad angular  $\omega$  se incrementará conforme el rayo viaje hacia los estratos más externos. Tras la reflexión total interna, el rayo comenzará a avanzar hacia el eje de la fibra y, por tanto,  $\omega$  decrecerá hasta que vuelva a producirse un cambio de monotonía en el índice de refracción de los estratos que atraviesa.

En la próxima sección veremos, entre otros resultados, cómo este hecho se aprovecha para calcular los puntos límite, los puntos de la cáustica interna y, por tanto, las cáusticas interna y externa.

En resumen, el modelo propuesto asocia una velocidad angular  $\omega$  a cada rayo guiado dentro de cada fibra óptica. Esta correspondencia entre elementos tan dispares (conjunto rayo-fibra y velocidad angular), proporciona una imagen más intuitiva de la propagación de los rayos oblicuos dentro de las fibras ópticas pues la asocia a una magnitud mecánica fácilmente observable en dos dimensiones y, además, nos permitirá obtener con facilidad algunos parámetros básicos en fibras ópticas.





## **CAPÍTULO II: RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Una vez establecido el modelo, hemos obtenido la velocidad angular de la guía plana de ondas equivalente al conjunto fibra-rayo en las cuatro situaciones posibles (ecuaciones 1.6, 1.11, 1.16 y 1.21):

1.- Rayo meridional en fibras de perfil de salto de índice

$$\omega = \frac{\pi c \sin \theta_z}{2 \rho n_{co}} \quad (2.1)$$

2.- Rayo oblicuo en fibras de perfil de salto de índice

$$\omega = \frac{c \theta_\phi \sin \theta_z}{\rho n_{co} \sin \theta_\phi} \quad (2.2)$$

3.- Rayo meridional en fibras de perfil de índice gradual

$$\omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > dx \\ \frac{\pi c \sin \theta_z(x)}{2n(x)dx} & \text{si } x < dx \end{cases} \quad (2.3)$$

4.- Rayo oblicuo en fibras de perfil de índice gradual

$$\omega(x) = \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \frac{c \sin \theta_z(x)}{n(x) \sin \theta_\phi(x)} \quad (2.4)$$

En este capítulo, demostraremos como partiendo de estas expresiones pueden obtenerse muchos de los parámetros básicos de la propagación de rayos en fibras ópticas. Para ello sólo habrá que tener en cuenta algunos conceptos básicos del movimiento circular acelerado y de la monotonía de funciones.

## **1.- PUNTOS LÍMITE Y PUNTOS DE LA CÁUSTICA INTERNA**

Como vimos en el Capítulo II, los puntos límite o turning points son aquellos puntos de una fibra de perfil de índice gradual en los que se produce la reflexión total interna de un determinado rayo. En las fibras de salto de índice, estos puntos coinciden con la frontera núcleo-revestimiento para todo rayo guiado pero en fibras de índice gradual los puntos límite se encuentran en la frontera entre dos estratos determinados y su situación varía según los parámetros de cada rayo, es decir, es obvio que para cada rayo, existe un conjunto de puntos límite y por tanto, una cáustica interna y externa.

Dado que esta memoria se centra en fibras ópticas con simetría axial, los puntos límite para la propagación de un rayo determinado formarán una circunferencia entorno al eje de la fibra y por tanto definiremos su posición en términos de la coordenada radial  $x$ . De entre todos los puntos límite correspondientes a los diferentes rayos que pueden ser guiados por una fibra determinada, el más alejado del eje de dicha fibra determinará la cáustica externa de dichos rayos. Como ya se apuntó en el Capítulo II, la cáustica externa es la envolvente más externa de todas las trayectorias posibles de rayos dentro de una fibra óptica.

Los puntos de la cáustica interna son aquellos en los que la distancia entre la trayectoria de un rayo determinado y el eje de la fibra es mínima. Al igual que en el caso de la cáustica externa, habrá un rayo que presente una cáustica interna cuya distancia al eje sea mínima y siendo ésta la cáustica interna de los rayos guiados en una fibra óptica determinada.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, queda plenamente justificada la importancia de conocer los puntos límite y de la cáustica interna y, por consiguiente, sus correspondientes cáusticas dada la valiosa información que estos parámetros nos aportan sobre la capacidad de una fibra óptica para transportar energía y por dónde. Veamos a continuación cómo el modelo introducido permite obtener estos puntos.

Sea un rayo arbitrario guiado a lo largo de una fibra óptica con perfil de índice gradual. Si consideramos la guía plana de ondas introducida por este modelo, es evidente que su velocidad de rotación para que el rayo esté siempre sobre una misma línea recta de una de sus caras, habrá de aumentar conforme éste avanza hacia el exterior de la fibra dado que el índice de refracción en estos estratos más externos es menor. Cuando el rayo sufra una reflexión total interna en el punto límite, al invertir éste su trayectoria de nuevo hacia estratos más internos, se producirá un cambio en la monotonía de la velocidad de rotación que pasará a disminuir hasta que vuelva a encontrarse con un gradiente positivo de índices de refracción, lo cual sucederá en los puntos de la cáustica interna.

El modelo presentado nos permitirá calcular estos puntos debido a que un cambio en la monotonía de  $\omega$  implica que la aceleración angular  $\alpha$  se anule [24]:

$$\alpha = \frac{d\omega(x)}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

Si sustituimos la ecuación (1.21) en (2.5) obtendremos la siguiente condición:

$$\alpha = \frac{d\omega(x)}{dt} = \frac{d\omega(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{c \sin \theta_z(x)}{n(x) \sin \theta_\phi(x)} \frac{d\omega(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\omega(x)}{dx} = 0 \quad (2.6)$$

Desarrollándola:

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{c \sin \theta_z(x)}{n(x) \sin \theta_\phi(x)} \frac{d^2 \theta_\phi(x)}{dx^2} + \quad (2.7)$$

$$+ c \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \left[ \frac{n(x) \sin \theta_\phi(x) \cos \theta_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} - \sin \theta_z(x) \left[ \sin \theta_\phi(x) \frac{dn(x)}{dx} + n(x) \cos \theta_\phi(x) \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \right]}{n^2(x) \sin^2 \theta_\phi(x)} \right] = 0$$

obtendremos finalmente la siguiente ecuación diferencial:

---

$$\frac{d^2\theta_\phi(x)}{dx^2} + \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \left[ \cot g\theta_z(x) \frac{d\theta_z(x)}{dx} - \cot g\theta_\phi(x) \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} - \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \right] = 0 \quad (2.8)$$

El significado físico de alguno de los términos de la ecuación interior, permitirá que se anulen en los puntos límite y de la cáustica interna. Estos términos son:

-  $\frac{d^2\theta_\phi(x)}{dx^2}$ : esta derivada segunda representa la tasa de cambio de la variación de  $\theta_\phi(x)$  conforme el rayo se propaga a través de los distintos estratos. Dado que esta tasa pasará de aumentar a disminuir en los puntos límite de la cáustica externa (y de disminuir a aumentar en los puntos de la cáustica interna), este término se anulará en dichos puntos.

-  $\frac{d\theta_z(x)}{dx}$ : este término representa el cambio del ángulo  $\theta_z(x)$  conforme el rayo va atravesando los sucesivos estratos de la fibra. Debido a la reflexión total interna, este ángulo tendrá un mínimo en los puntos límite de la cáustica externa y un máximo en los puntos de la cáustica interna por lo que su derivada primera en estos puntos se anulará.

Tras introducir estas consideraciones en la ecuación (2.8) llegamos a finalmente a la siguiente expresión:

$$\cot g\theta_\phi(x) \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} + \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} = 0 \quad (2.9)$$

que, una vez integrada, queda finalmente de la siguiente forma simple y elegante:

$$n(x) \sin \theta_\phi(x) = 1 \quad (2.10)$$

**1.1.- PUNTOS LÍMITE Y DE LA CÁUSTICA INTERNA EN UNA FIBRA CON PERFIL PARABÓLICO**

Sea un perfil del tipo [14]:

$$n^2(x) = n_{co}^2 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

Si lo introducimos en la ecuación (2.10), obtendremos

$$n^2(x) \sin^2 \theta_\phi(x) = 1 \Rightarrow \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 = \frac{1}{2\Delta} \left( 1 - \frac{1}{n_{co}^2 \sin^2 \theta_\phi(x)} \right) \quad (2.12)$$

de donde podemos despejar finalmente el valor de  $x$ :

$$x = \frac{\rho}{n_{co} \sqrt{2\Delta}} \sqrt{n_{co}^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta_\phi(x)}} \quad (2.13)$$

Aparentemente hemos obtenido una única solución cuando, en realidad, deberíamos haber obtenido dos, una para los puntos de la cáustica interna y otro para los de la externa, sin embargo, a continuación veremos que este resultado tiene sentido y es una muy buena aproximación bajo ciertas condiciones.

Consideremos las expresiones obtenidas a partir del modelo clásico para los puntos límite y de la cáustica interna [14]:

$$r_{ci} = \frac{\rho}{2n_{co} \sqrt{\Delta}} \sqrt{\left( n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 \right) - \sqrt{\left( n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 \right)^2 - 8\Delta \bar{l}^2 n_{co}^2}} \quad (2.14)$$

$$r_{pl} = \frac{\rho}{2n_{co} \sqrt{\Delta}} \sqrt{\left( n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 \right) + \sqrt{\left( n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 \right)^2 - 8\Delta \bar{l}^2 n_{co}^2}} \quad (2.15)$$

Si suponemos que el diámetro de la fibra  $\rho$  es muy grande y que la apertura numérica (y por tanto  $\Delta$ ) es muy pequeña, entonces el invariante  $\bar{l} = r^2/\rho n(r)(d\phi/ds) = (r/\rho)n(r)\sin\theta_z(r)\cos\theta_\phi(r)$  será muy pequeño y, por tanto,  $8\Delta\bar{l}^2 n_{co}^2 \rightarrow 0$ . Llevando estas consideraciones a las ecuaciones (2.14) y (2.15) anteriores, podremos simplificarlas notablemente ya que quedarán en la forma [23-24]:

$$r_{ci} = \frac{\rho}{2n_{co}\sqrt{\Delta}} \sqrt{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 - n_{co}^2 + \bar{\beta}^2} = 0 \quad (2.16)$$

$$r_{pl} = \frac{\rho}{2n_{co}\sqrt{\Delta}} \sqrt{n_{co}^2 - \bar{\beta}^2 + n_{co}^2 - \bar{\beta}^2} = \frac{\rho}{n_{co}\sqrt{2\Delta}} \sqrt{n_{co}^2 - \frac{1}{2}(\bar{\beta}^2 - \bar{\beta})} \quad (2.17)$$

El resultado anterior para los puntos de la cáustica interna es lógico ya que para valores grandes del diámetro de la fibra, el diámetro de la cáustica interna resulta insignificante. Del mismo modo, el valor de los puntos límite en esta aproximación de radio grande y apertura numérica pequeña, coincidirá con el valor arrojado por el modelo propuesto, siempre y cuando se cumplan dos condiciones:

$$n_{co} > \frac{1}{|\sin\theta_\phi(x)|} \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta_\phi(x)} = \frac{1}{2}(\bar{\beta}^2 - \bar{\beta}) \quad (2.19)$$

Estas dos condiciones requieren valores de  $\cos\theta_z(x)$  y  $\sin\theta_\phi(x)$  muy cercanos a la unidad es decir,  $\theta_z(x)$  debe ser pequeño y  $\theta_\phi(x)$  debe ser próximo a  $\pi/2$ . De hecho, estamos suponiendo fibras con radios grandes o apertura numérica pequeña lo que automáticamente se traduce en valores pequeños de  $\theta_z(x)$  algo bastante común en las fibras ópticas.

Podría parecer que son sólo una aproximación pero, dado que sólo los rayos contenidos en el cono subtendido por pequeños ángulos  $\theta_z(x)$  pueden propagarse por las fibras ópticas, consideramos que los resultados obtenidos son similares a los obtenidos en el modelo clásico.

## **2.-RELACIÓN ENTRE APERTURA NUMÉRICA DE UNA FIBRA ÓPTICA Y LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA GUÍA DE ONDAS EN ROTACIÓN EQUIVALENTE**

Sea una fibra de perfil de índice gradual cuya guía plana de ondas equivalente rota con una velocidad angular dada por la ec. (1.21).

Si tenemos en cuenta que en el momento de la reflexión total interna, según el modelo propuesto, en los puntos límite se cumple la condición  $n(x)\sin\theta_\phi(x) = 1$ , deducimos que en estos puntos, la velocidad angular de la guía de ondas equivalente vendrá dada por:

$$\omega(x) = \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} c \sin\theta_l(x) \quad (2.20)$$

donde  $\theta_l$  es el ángulo límite definido en la ec. (2.3).

Ahora bien, dado que la apertura numérica en el modelo clásico se relaciona con el ángulo máximo de aceptación mediante la expresión  $AN = n_0 \sin\theta_a$ , donde:

$$n_0 \sin\theta_a = n(x_p) \sin\theta_l(x_p) \quad (2.21)$$

tenemos entonces que para la velocidad angular en los puntos límite se cumple la relación:

$$\omega(x_p) = \frac{d\theta_\phi(x)}{dx} \frac{c}{n(x_p)} AN \quad (2.22)$$

para fibras de perfil de índice gradual mientras que para fibras salto de índice obtenemos:

$$\omega = \frac{2c\theta_\phi}{\rho n_{co}^2 \sin \theta_\phi} AN \quad (2.23)$$

Podemos ver cómo se deduce este parámetro clásico mediante nuestro modelo. La apertura numérica es importante por varios motivos, entre otros, sirve para saber, a priori, cómo va a ser el acoplamiento entre las fibras ópticas y las fuentes de radiación habituales (LEDS y Láseres) para conocer, también a priori, las pérdidas por acoplamiento entre fibras, etc.

Hasta aquí hemos visto cómo, empleando métodos matemáticos básicos (trigonometría, optimización de funciones), nuestro modelo puede dar buena cuenta de parámetros fundamentales como los puntos límite y de la cáustica externa o de la apertura numérica.

Estos resultados se han centrado en fibras con perfil de salto de índice y de índice gradual en el caso especial del perfil parabólico pero estos perfiles no son ni mucho menos los únicos que pueden darse en fibras ópticas. Además, la lista de parámetros básicos implicados en la propagación de rayos en fibras ópticas no acaba aquí sino que existen otros cuya importancia no es en absoluto desdeñable.

En este sentido, la obtención de estos parámetros para distintos perfiles de fibras ópticas, que ya es objeto de nuestro trabajo, irá demostrando en futuros trabajos las posibilidades y versatilidad del método presentado.



## ***CAPÍTULO III: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS / CONCLUSIONS AND FUTURE RESEARCH***

### **CONCLUSIONES**

1.- En esta memoria se ha presentado un modelo físico-matemático según el cual, cualquier fibra óptica es equivalente a una guía plana de ondas que rota sobre su eje con una velocidad angular determinada.

2.- La principal ventaja de este modelo reside en que en él se sustituye un concepto geométrico y, en cierto modo, “estático” (la forma de las trayectorias de los rayos no depende del tiempo) por un concepto mecánico muy simple y bien conocido, como es la rotación de un polígono regular entorno a su eje central, en el que, de forma intuitiva, la guía de ondas ha de seguir en su movimiento al frente del rayo. De esta forma se puede comprobar que, partiendo de dos formalismos distintos en Física (Óptica) podemos llegar a resultados similares.

3.- Este modelo no se limita a una mejor comprensión de la situación física sino que, efectivamente, los cálculos requeridos para obtener los parámetros básicos de la propagación

### **CONCLUSIONS**

1.- A physical-mathematical model has been introduced in this work. According to this model, any fiber optics is equivalent to a planar waveguide rotating around its axis with a given angular velocity.

2.- The main advantage of this model is that a geometrical and, in some sense, “static” concept (the shape of paths does not depend on time) is replaced by a very simple and well known mechanical concept like rotation of a regular polygonal around its central axis in which, in an intuitive way, the planar waveguide must follow the front of the ray through its displacement. Thus, it can be proved that, departing from two different formalisms in Physics (Optics) we can reach similar outcomes.

3.- This model is not limited only to a better comprehension of the physical situation but, instead, the required calculation to obtain the basic parameters in propagation of a

de un rayo en una fibra son mucho más simples pues no se basan en la resolución de la ecuación eikonal en coordenadas cilíndricas sino en la trigonometría básica y en un principio de mínimo.

4.- A la vista de los resultados anteriores, vemos que no es necesario crear un formalismo específico para los rayos oblicuos, estos surgen de manera natural al aplicar una rotación a una guía plana de ondas. De este modo, a cada velocidad angular corresponderá un rayo por lo que el modelo da cuenta de los rayos oblicuos existentes en las fibras ópticas. La introducción de una velocidad angular simplifica notablemente el formalismo teórico encontrado hasta este momento en la literatura.

5.- Aunque no es propiamente una conclusión, pues los resultados ya son conocidos, se corrobora que las leyes de la Óptica Geométrica son invariantes bajo rotación.

ray within an optical fiber are much simpler since they are not based on the resolution of eikonal equation in cylindrical coordinates but in basic trigonometry and in one principle of minimum.

4.- Looking at the results above, we realize that it is not necessary to develop an specific formalism for skew rays because these arise in a natural manner when applying a rotation to a planar waveguide. Thus, there will be one ray corresponding to each angular velocity and, therefore, the model takes account of the skew rays going through fibre optics. The introduction of angular velocity notably simplifies the theoretical formalism found in the literature up to date.

5.- Although this is not a proper conclusion since the results are already known, it is confirmed that the laws of Geometric Optics are invariant under rotation.

## **TRABAJOS FUTUROS**

Dado que ningún modelo está nunca totalmente cerrado y completo, el nuestro, aunque muy avanzado y efectivo en resultados, puede dar aún más de sí en el sentido indicado al final del Capítulo 2. En trabajos futuros que ya están en curso, se calcularán el resto de parámetros “menores” de las fibras ópticas. Posteriormente se abordará la inclusión de la Óptica Ondulatoria en este modelo.

## **FUTURE RESEARCH**

Since no model is ever fully closed nor complete, this one, although quite advanced and effective in results, can be even more enhanced in the sense pointed out at the end of Chapter 2. In future works that are already under preparation, the remaining “lesser parameters” of fiber optics will be calculated. The inclusion of Wave Optics in this model will be considered after.



## **CAPÍTULO IV: BIBLIOGRAFÍA**

1. P. A. Kroes, "Newton's Mathematization of Physics in Retrospect in Newton's Scientific and Philosophical Legacy", *Arch. Int. Hist. Idées* 123, 253-267 (1988).
2. M. Paty, "Einstein y el rol de las Matemáticas en la Física", *Praxis Filosófica* 22, 5-27 (2006).
3. V. A. Uspenski, "Algunas aplicaciones de la Mecánica a las Matemáticas", *MIR* (1979).
4. L. A. Lusternik, "Líneas más cortas", *MIR* (1979)
5. J. A. Acevedo, "El papel de las analogías en la creatividad de los científicos: la teoría del campo electromagnético de Maxwell como caso paradigmático de la historia de las ciencias", *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 1, 188-205 (2004).
6. A. Gómez, J. Martínez, R. Macías, "Fundamentos de Teoría de Circuitos", Thomson Paraninfo, 1ª Ed. (2007).
7. F. Pérez-Ocón, A. Abarca, J. M. Abril, J. L. Nieves, E. Hita, "Optical Measurement of the cardiac rhythm using PC with telediagnosis possibilities", *Journal of Biomedical Optics* 6, 90-96 (2001).
8. H. Jardón, R. Linares, "Sistemas de Comunicaciones por Fibras Ópticas", Alfaomega, 1ª Ed. (1995).
9. J. Casas, "Óptica", Pons, 7ª Ed. (1994).
10. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, "Fundamental of Photonics", John Wiley & Sons Inc. (1994).
11. F. Pérez-Ocón, J. Campos, P. Corredera, J. R. Jiménez, E. Hita, "Calculation of the field-intensity pattern in optical planar waveguide by the finite-differences time-domain", *Journal of Optical Communications* 20, 202-209 (1999).
12. F. Pérez-Ocón, J. R. Jiménez, A. M. Pozo, "Exponential discretization of the Perfectly Matched Layer (PML) absorbing boundary condition simulation in FD-TD 3D", *Optik* 113, 354-360 (2002).

13. F. Pérez-Ocón, A. M. Pozo, J. R. Jiménez, E. Hita, "Fast Single-Mode Characterization of Optical Fiber by the Finite-Difference Time-Domain Method", *Journal of lightwave technology* 24, 3129-3136 (2006).
14. F. Pérez-Ocón, J. R. Jiménez, "Fibras Ópticas: Estudio Geométrico", Universidad de Granada, 1ª Ed. (2001).
15. A. W. Snyder, J. D. Love, "Optical waveguide theory" (Chapman and Hall, New York, 1983).
16. E. M. Dianov, A. B. Grudinin, A. N. Gurjanov, D. D. Gusovsky, Z. E. Harutjunian, S. V. Ignatjev, and O. B. Smirnov, "Circular Core Polarization-Maintaining Optical Fibers with Elliptical Stress-Induced Cladding," *J. Lightwave Technol.* 10, 118-124 (1992).
17. H. Hung-chia, "Practical circular-polarization-maintaining optical fiber," *Appl. Opt.* 36, 6968-6975 (1997).
18. M. Eve and J. H. Hannay, "Ray theory and random mode coupling in an optical fibre waveguide I", *Optical and Quantum Electronics*, 8, 503-508 (1976).
19. M. Eve and J. H. Hannay, "Ray theory and random mode coupling in an optical fibre waveguide II", *Optical and Quantum Electronics*, 8, 509-512 (1976).
20. T. Kudou, M. Yokota, O. Fukumitsu, "Complex Ray Analysis of Reflection and Transmission of Hermite Gaussian Beam at Curved Interface", *Electronics Letters*, 24, 1519-1520 (1988).
21. Shangping Guo and Sacharia Albin, "Transmission property and evanescent wave absorption of cladded multimode fiber tapers", *Optics Express*, 11, 215-223 (2003).
22. Katsumasa Iwai, Yukio Abe, Yuji Matsuura, and Mitsunobu Miyagi, "Equivalent complex refractive indices for ray-tracing evaluation of dielectric-coated hollow waveguides", *Optical Engineering*, 41, 1471-1472, (2002).
23. F. Pérez-Ocón, A. Peña, J. R. Jiménez, J. A. Díaz, "A simple model for fibre optics: planar dielectric waveguides in rotation", *Eur. J. Phys.* 27, 657-665 (2006).

24. A. Peña García, F. Pérez-Ocón, and J. R. Jiménez, "Planar dielectric waveguides in rotation are optical fibers: comparison with the classical model", *Opt. Express* 16, 927-936 (2008)