Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

ALGEBRAS DE JORDAN-BANACH PRIMITIVAS.

TESIS DOCTORAL

Antonio Moreno Galindo.

Granada, 1.995

Tesis doctoral dirigida por los doctores D. Angel Rodríguez Palacios y Miguel A. Cabrera García, profesores del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. Antonio Moreno Galindo el día 23 de Enero de 1.995, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Rafael Payá Albert (Presidente), D. Kevin McCrimmon, D. Efim Zel'manov, D. Fernando Montaner Frutos (Vocales) y D. Juan Martínez Moreno (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto "cum laude" por unanimidad.

A Carmen, Guillermo y Alberto
A mis padres y hermanos

Contenido.

I Algebras primitivas. Algebras de Jordan-Banach **1**

I.1 Algebras asociativas primitivas. Teorema de Rickart de representación de las álgebras de Banach primitivas. . . . 3

I.2 Una primera extensión del Teorema de Rickart a álgebras de Jordan-Banach. 11

I.3 El álgebra de cocientes simétricos de Martindale de un álgebra asociativa semiprima. 23

I.4 Teorema de Whelan. Versión desespacializada de la extensión del Teorema de Rickart. 37

I.5 Escenario de la extensión del Teorema de Rickart. 41

II Algebras de Jordan primas no-degeneradas de tipo hermitiano normadas **51**

II.1 Variedades de álgebras. Algebras libres. 53

II.2 Teorema primo de Zel'manov. 57

II.3 Algebras de Jordan primas no-degeneradas de tipo hermitiano normadas. 71

III Algebras de Jordan-Banach especiales primas no-degeneradas no Clifford **85**

III.1 Extensiones de homomorfismos. 87

III.2 Algebras de Jordan-Banach especiales primas no-degeneradas no Clifford. 97

IV Algebras de Jordan-Banach primitivas **107**

IV.1 Algebras de Jordan-Banach primitivas. 109

V La continuidad del producto asociativo y la extendibilidad de la norma en ambiente simple con unidad **117**
V.1 Los problemas de la continuidad del producto asociativo y de la extensión de la norma. Antecedentes. 119
V.2 Estudio de la reversibilidad del álgebra de Jordan J(X,f). 123
V.3 El problema de la extensión de la norma en el caso simple con unidad. 129

VI El monstruo **137**
VI.1 El monstruo. 139

VII La completación del monstruo **149**
VII.1 La completación del monstruo. 151

Apéndice 1. Algebras de Cayley-Dickson reales y complejas. **165**

Apéndice 2. Teorema del cámbio de parámetro. **171**

Notas finales y posibles lineas de continuación de la investigación. **179**

Bibliografía. **183**

Indice de notación. **193**

Indice de terminología. **194**

Introducción.

Las álgebras de Jordan nacen en la década de los treinta de la mano de Pascual Jordan en una serie de trabajos ([61], [62], [63]) cuyo objetivo principal era formular una teoría matemática abstracta para la clase de los "observables" en Mecánica Cuántica. Las álgebras de Jordan constituyen un sistema algebraico que se comporta de manera similar al álgebra clásica de los observables, a saber, el espacio vectorial real de todos los operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert con el producto $a.b = \frac{1}{2}(ab+ba)$ que no es otra cosa que la simetrización del producto asociativo ab. Las identidades $x.y = y.x$ y $(x^2.y).x = x^2.(y.x)$ fueron tomadas por Jordan como fundamentales ya que parecían implicar todas las restantes propiedades algebraicas. Desde entonces el problema de la determinación de todos los sistemas algebraicos que satisfacen estos axiomas se convirtió en una linea de trabajo de amplio interés entre la comunidad matemática. En consecuencia aparece una larga serie de trabajos en este campo, entre los que destacaremos los más relevantes en cuanto a teoría de estructura se refiere, a saber:

- el de Jordan, von Neumann y Wigner [64] clasificando las álgebras de Jordan formalmente reales finito-dimensionales,

- el de Albert [1] demostrando que entre las anteriores álgebras la única "excepcional" (su producto no se puede obtener por simetrización de un producto asociativo) es una cierta álgebra de dimensión 27 de matrices hermíticas 3×3 sobre los números de Cayley,

- una serie de artículos, cuyo contenido se recoge en el libro de Jacobson [52], donde puede encontrarse perfectamente acabada una teoría de estructura de tipo Artin-Wedderburn para álgebras de Jordan,

- el artículo de McCrimmon [76] donde se prueba que las álgebras de Jordan simples con suficientes idempotentes ortogonales son necesariamente especiales,

- y finalmente el árticulo de Osborn y Racine [84] (1979) clasificando las álgebras de Jordan primas no-degeneradas con zócalo no cero.

Claramente la teoría de estructura de las álgebras de Jordan conseguida hasta 1979, aunque bella y profunda, no se sale de las cercanías de lo que podriamos llamar condiciones de finitud. Es justamente en 1979 cuando Efim Zel'manov inicia una serie de trabajos [106], [107], [109] (1979-1983) y se adelanta a su tiempo demostrando su famoso "Teorema primo" que clasifica las álgebras de Jordan primas no-degeneradas sin ninguna hipótesis adicional, problema que ni siquiera nadie se había atrevido previamente a plantear. Hablando informalmente el Teorema primo de Zel'manov afirma que no hay más álgebras de Jordan primas no-degeneradas que las excepcionales de dimensión 27, las familiares álgebras de Jordan simples asociadas a una forma bilineal, las álgebras de Jordan obtenidas por simetrización del producto de un álgebra asociativa prima, y las álgebras de Jordan de todos los elementos $*$-invariantes en un álgebra asociativa prima con una involución.

El Teorema primo de Zel'manov fue recibido de manera entusiasta por los algebristas. En cuanto a los analistas se refiere, es claro que la lectura de dicho teorema despierta inmediatamente la alegre conjetura de que (hablando de nuevo informalmente) no hay más álgebras de Jordan primas no-degeneradas normadas que las excepcionales de dimensión 27 sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, las álgebras de Jordan simples asociadas a una forma bilineal continua sobre un espacio normado real o complejo, las álgebras de Jordan obtenidas por simetrización del producto de un álgebra asociativa prima normada, y las álgebras de Jordan de todos los elementos

$*$-invariantes en un álgebra asociativa prima normada con una involución. Desgraciadamente (y siempre siguiendo hablando informalmente) la anterior conjetura está muy lejos de ser verdadera. En consecuencia, una linea razonable de trabajo en el tratamiento analítico del Teorema primo de Zel'manov consiste en probar la validez de la conjetura anterior en contextos particulares. Esto ha dado lugar a una serie de artículos [36], [26], [27] (ver también [97] y los "surveys" [28] y [95]), en los que se da respuesta afirmativa a la conjetura anterior en los siguientes ambientes: JB^*- y JB-álgebras primas, álgebras de Jordan simples normadas (completas) con unidad, y álgebras de Jordan-Banach no-degeneradamente ultraprimas. Esta serie de trabajos, a los que nos referiremos con el nombre de versiones normadas del Teorema de Zel'manov, arranca con cierta tardanza en relación con su precedente algebraico. La razón de esta tardanza podría residir en que el enunciado del Teorema primo de Zel'manov, en el intento de alcanzar una formulación lo más inteligible posible, quizás oculta alguna información crucial que se necesita en sus aplicaciones de todo tipo (en particular en las analíticas) y, en consecuencia, los analistas han necesitado tomarse un cierto tiempo en profundizar en la extremadamente difícil demostración de dicho teorema. En esta labor, el analista nunca tendrá palabras para mostrar su agradecimiento a Kevin McCrimmon quien, desde la aparición de la obra de Zel'manov, se dedica en cuerpo y alma a desarrollar las técnicas zelmanovianas en muy diversas direcciones [77], [78], [79] y [81]:

- extensión de los resultados a la característica 2 (obviamente más interesante para el algebrista que para el analista),

- clarificación y profundización en las técnicas de demostración del Teorema primo de Zel'manov,

- obtención de inesperados e importantes resultados, como los teoremas de extensión de homomorfismos de Jordan.

Nuestro trabajo se enmarca en principio en la linea anteriormente mencionada de las versiones normadas del Teorema de Zel'manov. Pero

nuestro propósito ha sido un poco más ambicioso. Concretamente los resultados que obtenemos, que se expondrán con cierto detalle a continuación, constituyen los primeros logros generales en la dirección de saber hasta donde sí y hasta donde no puede esperarse que llegue el tratamiento analítico del Teorema primo de Zel'manov.

De la anterior declaración de objetivos el lector puede sospechar que nuestro trabajo se divide en dos grandes bloques.

El primer bloque (capítulos I a IV, ambos inclusive) se dedica a la demostración de una versión normada del Teorema de Zel'manov para álgebras de Jordan-Banach primitivas. A la vista de los precedentes previamente obtenidos sin herramientas zelmanovianas [88] y siguiendo las indicaciones de [95], hemos renunciado desde un principio a obtener una versión normada "fuerte" del Teorema de Zel'manov para dichas álgebras. Entendemos por versión normada fuerte aquella que en un determinado contexto responde afirmativamente a la conjetura alegre que antes hemos formulado. Se abre así camino a las que desde ahora llamaremos versiones normadas "suaves" del Teorema de Zel'manov. Una de las características de estas versiones es que el álgebra asociativa involucrada en el enunciado algebraico del Teorema para parametrizar ciertas álgebras de Jordan es en efecto un álgebra normada pero su norma no es equivalente a la del álgebra de Jordan normada parametrizada.

Para poder relatar con cierta precisión los resultados obtenidos parece ya obligado pasar de la manera informal de hablar a otra, aunque más desagradable, más técnica y clara. Empecemos pues formulando el Teorema primo de Zel'manov.

Teorema primo de Zel'manov. *Las álgebras de Jordan primas no-degeneradas son las siguientes:*

(i) Los órdenes centrales en álgebras de Jordan simples excepcionales de dimensión 27.

(ii) Los órdenes centrales en el álgebra de Jordan simple de una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial.

(iii) Las álgebras de Jordan especiales J para las cuales existe un álgebra asociativa prima A de tal forma que J es una subálgebra de Jordan del álgebra de cocientes simétricos de Martindale de A, $Q_s(A)$, y que contiene a A como ideal. Abreviadamente,

$$A^+ \lhd J \subseteq Q_s(A)^+.$$

(iv) Las álgebras de Jordan especiales J para las cuales existe un álgebra asociativa prima con involución, $(A,*)$, de tal forma que J es una subálgebra de Jordan del álgebra de cocientes simétricos de Martindale de A, $Q_s(A)$, contenida en $H(Q_s(A),*)$ y que contiene a $H(A,*)$ como ideal. Abreviadamente,

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*).$$

Las álgebras de Jordan primitivas, cuyo estudio arranca en el artículo de Hogben y McCrimmon [44], constituyen un tipo muy especial de álgebras de Jordan primas no-degeneradas. Es en consecuencia esperable que ellas puedan ser clasificadas a la luz del teorema anterior. No sin trabajo, esta clasificación ha sido obtenida recientemente por Anquela, Montaner y Cortés [12] (ver también [102]). Con la ayuda de un Teorema de Whelan [105], el resultado de Anquela-Montaner-Cortés puede enunciarse como sigue:

Teorema de clasificación de las álgebras de Jordan primitivas. *Las álgebras de Jordan primitivas son las siguientes:*

(i) Las álgebras de Jordan simples excepcionales de dimensión 27 sobre una extensión del cuerpo base.

(ii) Las álgebras de Jordan simples de una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial sobre un cuerpo extensión del cuerpo base.

(iii) Las álgebras de Jordan J para las que existe un espacio vectorial X y una subálgebra asociativa A de $L(X)$ actuando irreduciblemente en X tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $L(X)$ conteniendo a A como ideal.

(iv) Las álgebras de Jordan J para las que existe un espacio vectorial X y una subálgebra asociativa A de $L(X)$ actuando irreduciblemente en X tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $L(X)$, la aplicación identidad en J se extiende a una involución $*$ en la subálgebra B de $L(X)$ generada por J, A está contenida en B y es $*$-invariante, $H(A,*)$ es un ideal de J y A está generada por $H(A,*)$.

En este momento podemos ya enunciar el que consideramos el resultado más importante del primer bloque de nuestro trabajo, a saber el siguiente teorema de representación de álgebras de Jordan-Banach primitivas que, por brevedad, enunciamos aquí sólo para el caso complejo. Este teorema puede y debe ser visto como la jordanización del bien conocido teorema de representación de álgebras de Banach (asociativas) primitivas ([90]; Teorema 2.2.6).

Teorema de representación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas.(Teorema *IV*.1.1). *Salvo isomorfismo topológico, las álgebras de Jordan-Banach primitivas complejas son las siguientes:*

(i) La única álgebra de Jordan excepcional simple de dimensión 27 sobre $\mathbb{C}$.

(ii) Las álgebras de Jordan-Banach de una forma bilineal simétrica no-degenerada continua sobre un espacio de Banach complejo X con $dim_{\mathbb{C}}(X) \geq 2$.

(iii) Las álgebras de Jordan-Banach complejas J para las que existe un espacio de Banach complejo X y una subálgebra asociativa A de $BL(X)$ actuando irreduciblemente en X tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $BL(X)$ conteniendo a A como ideal, y la inclusión $J \hookrightarrow BL(X)$ es continua.

(iv) Las álgebras de Jordan-Banach complejas J para las que existe un espacio de Banach complejo X y una subálgebra asociativa A de $BL(X)$ actuando irreduciblemente en X tal que J puede verse como

una subálgebra de Jordan de $BL(X)$, la inclusión $J \hookrightarrow BL(X)$ es continua, la aplicación identidad en J se extiende a una involución $*$ en la subálgebra B de $BL(X)$ generada por J, A está contenida en B y es $*$-invariante, $H(A,*)$ es un ideal de J y A está generada por $H(A,*)$.

Afortunada o desafortunadamente, y contra lo que ocurre con el precedente asociativo de Rickart citado arriba, hemos sido incapaces de demostrar el anterior teorema a partir de su correspondiente versión algebraica. De hecho el camino que nos ha permitido establecer nuestro teorema es realmente largo y complicado (aunque divertido y gratificante) y pasa por la demostración de dos resultados auxiliares de interés en sí mismo que podemos atrevernos a calificar con el nombre de versiones germinales generales normadas (incompleta y completa) del Teorema de Zel'manov. Enunciamos a continuación su formulación precisa

Versión germinal general normada del Teorema de Zel'manov. (Teorema *II*.3.9). *Sea $(J,\|.\|)$ un álgebra de Jordan normada especial prima no-degenerada que no es un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal. Entonces existe un álgebra asociativa $*$-prima normada $(A,*,|.|)$, la cual está generada algebraicamente por $H(A,*)$, tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y conteniendo $H(A,*)$ como un ideal,*

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*),$$

y satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) $\|h\| \leq |h|$ *para todo h en $H(A,*)$,*

(ii) Si $a \in A$ es tal que $aJ + Ja \subseteq A$ entonces las aplicaciones $x \mapsto ax$ y $x \mapsto xa$ de $(J,\|.\|)$ en $(A,|.|)$ son continuas,

(iii) $|a^*| = |a|$ *para todo $a \in A$, y*

(iv) Si $(\widehat{A},*)$ denota la completación de $(A,*)$ respecto a la norma $|.|$ entonces todo $*$-ideal no nulo de $\widehat{A}$ tiene intersección no nula con $H(\widehat{A},*)$.

Versión germinal general normada completa del Teorema de Zel'manov. (Teorema *III*.2.1). *Sea* $(J, \|.\|)$ *un álgebra de Jordan-Banach especial prima no-degenerada que no es un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica. Entonces existe un álgebra asociativa* $*$*-prima normada* $(A, *, |.|)$*, generada por su parte hermitiana, tal que* J *puede verse como una subálgebra de Jordan de* $Q_s(A)$ *contenida en* $H(Q_s(A), *)$ *y conteniendo a* $H(A, *)$ *como un ideal*

$$H(A, *) \lhd J \subseteq H(Q_s(A), *),$$

y satisfaciendo las siguientes propiedades

i) *Si* $a \in A$ *y satisface que* $aJ + Ja \subseteq A$*, entonces las aplicaciones* $x \to ax$ *y* $x \to xa$ *de* $(J, \|.\|)$ *en* $(A, |.|)$ *son continuas,*

ii) $|a^*| = |a|$ *para todo* a *en* A*,*

iii) *Si* $(\hat{A}, *, |.|)$ *denota la completación de* $(A, *, |.|)$*, entonces la inclusion* $A \subseteq Q_s(A)$ *se extiende de forma única a un* $*$*-monomorfismo* $\hat{A} \hookrightarrow Q_s(A)$ *llevando* $H(\hat{A}, *)$ *en* J *contractivamente, y*

iv) *Todo* $*$*-ideal no nulo de* $\hat{A}$ *tiene intersección no nula con* $H(A, *)$*.*

La demostración del Teorema *II*.3.9 involucra profundas técnicas zelmanovianas, tal como es el hecho de que para un álgebra de Jordan J en las condiciones del teorema la acción del ideal I_5 (de todos los "comedores de péntadas metidas") sobre J es distinta de cero. El Teorema *III*.2.1 se obtiene a partir del Teorema *II*.3.9 a través de varios resultados (unos conocidos y otros no) sobre extensión de homomorfismos de Jordan y homomorfismos asociativos, entre los que destacamos un profundo teorema de K. McCrimmon [79] cuya demostración también hace uso esencial de las técnicas zelmanovianas. Finalmente, nuestro resultado principal (Teorema *IV*.1.1) se obtiene ya sin grandes dificultades a partir del Teorema *III*.2.1 sin más que aplicar los resultados auxiliares que permiten a Anquela, Montaner y Cortés deducir su teorema en [12] a partir del de Zel'manov, junto con la Proposición 3.2 de [27], el ya citado Teorema de Rickart de representación de álgebras de Banach primitivas

y una versión normada del igualmente citado Teorema de Whelan [105] (Teorema *I*.4.4).

Con el anterior comentario damos por terminada la referencia al primer bloque de nuestro trabajo dedicado a saber hasta donde sí se puede llegar en el tratamiento analítico del Teorema primo de Zel'manov. Queda por el momento la duda de si nuestro resultado principal (Teorema *IV*.1.1) podría perfeccionarse hasta convertirse en una versión normada fuerte. Esta duda quedará disipada en el segundo bloque de nuestro trabajo (capítulos V a VII, ambos inclusive), dedicado a saber hasta donde no se puede llegar en el tratamiento analítico del Teorema primo de Zel'manov, y que pasamos a reseñar.

Toda versión normada fuerte del Teorema de Zel'manov pasa de una u otra manera por la consideración de las dos siguientes cuestiones:

- **Cuestión 1.**
  El problema de la continuidad del producto asociativo:
  Dada un álgebra asociativa real o compleja A y una norma $\|.\|$ en el espacio vectorial subyacente haciendo el producto Jordan $(a,b) \mapsto \frac{1}{2}(ab+ba)$ continuo, ¿es el producto asociativo de A $\|.\|$-continuo?

- **Cuestión 2.**
  El problema de la extensión de la norma:
  Dada $(A,*)$ un álgebra asociativa real o compleja con involución, generada por su parte hermitiana $H(A,*)$ y tal que todo $*$-ideal no cero de A corta a $H(A,*)$, y dada $\|.\|$ una norma de álgebra en el álgebra de Jordan $H(A,*)$ ¿existe una norma de álgebra en A cuya topología extienda la $\|.\|$-topología en $H(A,*)$?

Que sepamos la Cuestión 1 aparece tratada por primera vez en la literatura en el trabajo de S. Shirali [101], donde se da una respuesta afirmativa bajo fuertes condiciones adicionales tanto de naturaleza algebraica como analítica. Posteriormente estas condiciones fueron ostensiblemente rebajadas en [91] (véase también [93]; Proposition 3) donde se obtiene el siguiente resultado

Teorema α. *La Cuestión 1 tiene respuesta afirmativa si el álgebra A es semiprima y la norma $\|.\|$ es completa.*

La Cuestion 2 tiene una historia mucho más reciente. Una primera respuesta fue dada en [26] para ser usada como herramienta para la clasificación zelmanoviana de las álgebras de Jordan normadas simples con unidad.

Más recientemente A. Rodríguez, A. Slin'ko y E. Zel'manov [97] consideran la Cuestión 2 como un problema con interés en sí mismo e inician un estudio sistemático del problema de la extensión de la norma. La condición obviamente necesaria para la solución del problema de la extensión de la norma (a saber, la continuidad de la "aplicación tétrada" de $(H(A,*),\|.\|) \times (H(A,*),\|.\|) \times (H(A,*),\|.\|) \times (H(A,*),\|.\|)$ en $(H(A,*),\|.\|)$) se muestra en [97] que es también suficiente. Entonces se demuestra la continuidad de la tétrada bajo hipótesis razonables de tipo algebraico y analítico, obteniéndose así el siguiente teorema:

Teorema β. *La Cuestión 2 tiene respuesta afirmativa si $H(A,*)$ es semiprima y la norma $\|.\|$ en $H(A,*)$ es completa.*

En [15] y [97] se dan ejemplos que muestran que en los Teoremas α y β la hipótesis de complitud de la norma $\|.\|$ no se puede quitar en general, pero lás álgebras en estos ejemplos están muy lejos de ser primas: ellas son sumas directas infinitas de ideales simples finito dimensionales.

Bien que el interés en el segundo bloque de nuestro trabajo consiste esencialmente en encontrar respuestas negativas más finas a las Cuestiones 1 y 2, el capítulo V se puede considerar a caballo entre los dos grandes bloques de nuestro trabajo. El hecho es que nos dimos cuenta de que parte del trabajo hecho en el primer bloque (concretamente, el Teorema *II*.3.9) podría ser útil para obtener nuevas respuestas afirmativas a las Cuestiones 1 y 2. En efecto, dicho teorema, junto con la discusión que hacemos sobre la total no reversibilidad de las álgebras de Jordan simples de una forma bilineal simétrica (Proposiciones *V*.2.5 y *V*.2.7), nos han permitido obtener los dos siguientes teoremas:

Teorema γ. *La Cuestión 1 tiene respuesta afirmativa si A es simple y tiene unidad.*

Teorema δ. *La Cuestión 2 tiene respuesta afirmativa si $H(A,*)$ es simple y tiene unidad.*

En la demostración de los Teoremas γ y δ, nuestro Teorema $II.3.9$ se puede reemplazar por los argumentos de [26], pero hemos preferido utilizar el Teorema $II.3.9$ ya que así podemos deducir los Teoremas γ y δ a partir de nuevas constestaciones "casi" afirmativas a las Cuestiones 1 y 2 (véanse nuestros Teoremas $V.3.4$ y $V.3.1$, respectivamente). Queremos hacer resaltar a este respecto que, si el álgebra A en la Cuestión 1 se supone ser simple pero no necesariamente con unidad, entonces el producto de A es separadamente continuo (Corolario $V.3.5$).

El resultado principal del segundo bloque de nuestro trabajo consiste en construir un ejemplo que muestra simultaneamente que ni la hipótesis de complitud de $\|.\|$ en los Teoremas α y β ni la de existencia de unidad en los Teoremas γ y δ pueden ser suprimidas en general. Concretamente demostramos que, si $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces el álgebra $M_\infty(\mathbb{K})$, de todas las matrices numerablemente infinitas sobre $\mathbb{K}$ con sólo un número finito de entradas no cero, se puede proveer de una norma para la cual el producto de Jordan es continuo pero no lo es el asociativo. Más aún, $M_\infty(\mathbb{K})$ tiene una involución $*$ tal que la topología de la restricción de la norma anterior a $H(M_\infty(\mathbb{K}),*)$ no puede extenderse a la topología de una norma de álgebra en $M_\infty(\mathbb{K})$ (Teorema $VI.1.6$).

La esencia en la construcción del ejemplo anterior se concentra en la Proposición $VI.1.1$, que puede verse como una "máquina" general para fabricar contraejemplos a las Cuestiones 1 y 2. Cuando a la máquina se le provee de la materia prima conveniente da como producto el ejemplo anteriormente reseñado.

Una consecuencia directa de nuestro ejemplo y de la "unicidad de la envolvente $*$-ajustada" para ciertas álgebras de Jordan especiales, demostrada por McCrimmon en [79], es que una versión normada (no completa) fuerte del Teorema de Zel'manov no puede esperarse ni siquiera en el caso sangrante de las álgebras de Jordan simples con zócalo no cero.

Esto realza nuestra versión germinal general normada del Teorema de Zel'manov.

El último capítulo de nuestro trabajo lo dedicamos a probar que las versiones normadas completas fuertes del Teorema de Zel'manov tampoco se pueden esperar en general, incluso en presencia de zócalo no nulo.

Si J es un álgebra de Jordan prima no-degenerada no simple con zócalo no cero, entonces el zócalo de J es o bien de la forma A^+, donde A es un álgebra asociativa simple que coincide con su zócalo, o de la forma $H(A,*)$, donde A es un álgebra asociativa simple que coincide con su zócalo y $*$ es una involución en A [84]. En consecuencia, si J es un álgebra de Jordan-Banach prima no-degenerada no simple con zócalo no cero, y si restringimos la norma de J a su zócalo, entonces nos encontramos con situaciones particulares extremadamente sugestivas de las Cuestiones 1 y 2. Nuestro ejemplo principal no responde a esta situación, puesto que no es difícil deducir de los resultados en [84] y [88] que ni $M_\infty(\mathbb{K})^+$ ni su parte autoadjunta para cualquier involución $*$ pueden ser el zócalo de un álgebra de Jordan-Banach no-degenerada. En el último capítulo de nuestro trabajo nosotros elegimos con suficiente precisión la norma patológica en nuestro principal ejemplo $M_\infty(\mathbb{K})$ de manera que nos permite probar que el álgebra de Jordan-Banach J obtenida completando $M_\infty(\mathbb{K})^+$ (respectivamente, $H(M_\infty(\mathbb{K}),*)$) con respecto a dicha norma es prima no-degenerada y tiene zócalo no cero. Además, el zócalo de J es de la forma A^+ para una conveniente álgebra asociativa central simple sobre $\mathbb{K}$ (respectivamente, de la forma $H(A,*)$, para una conveniente álgebra asociativa central simple sobre $\mathbb{K}$ y conveniente involución $*$ en A). Como quiera que también probamos que $M_\infty(\mathbb{K})$ se queda contenido en A (respectivamente, $H(M_\infty(\mathbb{K}),*)$ se queda contenido en $H(A,*)$), se sigue que la restricción de la norma de J a su zócalo hace el producto asociativo de A discontinuo (respectivamente, la topología de la restricción de la norma de J a su zócalo no se puede extender a la topología de ninguna norma de álgebra en A). Como ya se advirtió anteriormente, utilizando de nuevo la unicidad de la envolvente $*$-ajustada para ciertas álgebras de Jordan especiales, esto muestra que en general las versiones normadas completas fuertes del Teorema de Zel'manov no se pueden es-

perar ni siquiera en presencia de zócalo no cero. Esto da especial interés a los resultados de [88] así como a nuestra versión germinal general normada completa del Teorema de Zel'manov, e incluso a nuestro Teorema de representación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas (téngase en cuenta que las álgebras de Jordan primas no-degeneradas con zócalo no nulo son primitivas [37]).

Con los comentarios anteriores concluimos la reseña de nuestro trabajo en lo que a precedentes, técnicas y resultados se refiere.

La mayor parte de los resultados obtenidos han sido expuestos en los congresos "Third international conference on nonassociative algebra and its applications" (Oviedo, 1993) y "Conferencia sobre Espacios de Banach" (Badajoz, 1994), e igualmente se recogen en tres artículos cuya publicación se está tramitando (ver [22], [23] y [24]).

Agradecimientos.

Antes de concluir esta introducción quisiera expresar mi más profundo agradecimiento a los que han sido directores de este trabajo, los profesores Angel Rodríguez Palacios y Miguel A. Cabrera García, quienes han hecho posible, con su constante apoyo, enseñanzas, y acertada dirección, la realización de esta Memoria. De su disponibilidad, paciencia e ilusión, han resultado innumerables sesiones de trabajo que, a buen seguro, han marcado mi formación matemática y mi fascinación por la investigación.

Quisiera también expresar mi más profunda gratitud a los profesores que han aceptado ser miembros del tribunal que ha de juzgar este trabajo, en especial a aquellos que habrán de hacer un gran desplazamiento por este motivo, a saber, los profesores K. McCrimmon, de la Universidad de Virginia, E. Zel'manov, de la Universidad de Chicago, y F. Montaner, de la Universidad de Zaragoza.

Gracias igualmente al profesor Juan Martínez Moreno por la lectura y comentarios que tan amablemente ha hecho tanto de la Memoria como de los artículos que de ella se han derivado.

Gracias también al director del departamento de Análisis Matemático así como a los restantes compañeros del mismo, que me han facilitado la labor, y me han apoyado y estimulado en todo momento. Finalmente, vaya mi especial gratitud para los profesores José Luis Gámez Ruiz, Jerónimo Alaminos Prats y José Luis Bueso Montero por su paciente guía y consejo en el uso del procesador de textos con el cual escribo esta Memoria.

Antonio Moreno Galindo.

Capítulo I

Algebras primitivas. Algebras de Jordan-Banach.

El principal objetivo de este primer capítulo es obtener una sugestiva extensión para álgebras de Jordan-Banach del teorema clásico de Rickart sobre representación de las álgebras de Banach primitivas. El enunciado y demostración del teorema clásico de Rickart, junto con todos los ingredientes necesarios, se exponen en la primera sección. En la segunda se aborda el problema natural de una primera extensión espacial de este teorema a contexto Jordan. La sección tercera está dedicada a exponer la teoría básica del álgebra de cocientes simétricos de Martindale para un álgebra asociativa semiprima, herramienta que, vía un teorema de Whelan, nos permitirá obtener en la sección cuarta una versión desespacializada del teorema principal del capítulo. La última sección se dedica a presentar las algebras de Jordan primitivas relatando el muy reciente teorema de clasificación de tales álgebras, que provee el marco algebraico que nos va permitir situar adecuadamente el teorema principal del capítulo.

I.1 Algebras asociativas primitivas. Teorema de Rickart de representación de las álgebras de Banach primitivas.

Como es bien conocido, en el desarrollo de la teoría de las álgebras asociativas desempeñan un papel predominante las subálgebras de las álgebras de operadores en un espacio vectorial. En especial, las subálgebras que actuan de una forma "irreducible" sobre el espacio vectorial de representación son la pieza clave de la ya clásica teoría de representación de Jacobson. En esta primera sección se presentan las álgebras asociativas primitivas y se recoge el teorema de representación de las álgebras asociativas primitivas como álgebras de operadores que actuan irreduciblemente. La sección concluye con el Teorema clásico de Rickart que provee la versión normada completa de este resultado y que constituye la motivación de la primera parte de nuestro trabajo (capítulos I a IV, ambos inclusive).

Todos los cuerpos que se cosideran en esta memoria se supondrán sin previo aviso ser de característica distinta de dos. Como norma general en

todo este trabajo el término *álgebra* se utilizará para designar un álgebra no necesariamente asociativa, esto es, un espacio vectorial A sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ acompañado de una aplicación bilineal $(a,b) \mapsto ab$ de $A \times A$ en A llamada *producto*. Así, cuando un álgebra satisfaga la identidad asociativa, $(ab)c = a(bc)$, estaremos obligados a indicarlo explícitamente y diremos que tal álgebra es un *álgebra asociativa*.

Comenzamos incluyendo algunas definiciones y comentarios que, a la vez que nos permiten fijar la notación que vamos a utilizar, ayudan a que este trabajo alcance un deseable grado de autocontenido.

Definición I.1.1 . Sea A un álgebra. Un *ideal izquierdo* de A es un subespacio vectorial I de A tal que $ax \in I$ para cualesquiera que sean a en A y x en I (abreviadamente $AI \subseteq I$). Un ideal izquierdo I de A se dice *propio* si $I \neq A$. Un ideal izquierdo propio no estrictamente incluido en ningún otro ideal izquierdo propio se dice que es un *ideal izquierdo maximal*. Análogas definiciones se hacen para ideales derechos, así como para ideales (biláteros).

Definición I.1.2. Un álgebra A tiene *unidad* si existe un elemento $\mathbf{1}$ en A tal que $\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a$ para todo a en A. Toda álgebra A puede verse inmersa en un álgebra con unidad, su *envolvente unital* A^1, definida como la misma álgebra si esta tiene unidad y en caso contrario como $A^1 := A + \mathbb{F}\mathbf{1}$, donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo base, con producto

$$(a + \alpha\mathbf{1})(b + \beta\mathbf{1}) := (ab + \alpha b + \beta a) + \alpha\beta\mathbf{1}\,.$$

Si A es un álgebra con unidad es claro que un ideal izquierdo, derecho o bilátero I es propio si y sólo si $\mathbf{1} \notin I$. Esta observación permite afirmar que para toda cadena de ideales izquierdos (resp. derechos, biláteros) propios en un álgebra con unidad existe un ideal izquierdo (resp. derecho, bilátero) propio que la mayora (a saber, la unión de todos los ideales de la cadena). Así, por el Lema de Zorn, todo ideal izquierdo, derecho ó

bilátero de un álgebra con unidad esta incluido en un ideal del mismo tipo maximal. Este resultado se extiende sin necesidad de exigir la presencia de unidad mediante la consideración de unos ideales que responden a la idea de que el álgebra tiene una "unidad" módulo ellos, y que presentamos a continuación.

Definición I.1.3. Un ideal izquierdo I de un álgebra A se dice ser un *ideal izquierdo modular* si existe un elemento e de A tal que $a - ae \in I$ ($a \equiv ae$ módulo I) para todo a en A (abreviadamente $A(1-e) \subseteq I$). En tal caso se dice que e es una *unidad modular derecha* para I y que I es *e-modular*. Un ideal izquierdo modular maximal es un ideal izquierdo modular propio que no se deja contener estrictamente en otro del mismo tipo. Análogamente se definen los conceptos de ideal derecho modular, unidad modular izquierda e ideal derecho modular maximal.

Es obvio que un ideal izquierdo modular es propio si y sólo si excluye a todas sus unidades modulares derechas, así como que todo ideal izquierdo conteniendo a otro ideal izquierdo e-modular también es e-modular. A partir de estos dos hechos se deduce que toda cadena de ideales izquierdos modulares propios está mayorada por la unión de todos los ideales de la cadena que es un ideal izquierdo modular propio. Luego, vía el Lema de Zorn, todo ideal izquierdo modular propio está incluido en un ideal izquierdo modular maximal.

Como todo subespacio vectorial de un álgebra siempre contiene al ideal nulo y la suma vectorial de una familia de ideales es un ideal, se sigue que todo subespacio de un álgebra siempre contiene un más grande ideal (a saber, la suma de todos los ideales contenidos en él). Este hecho nos permite dar la siguiente definición.

Definición I.1.4. Sea A un álgebra y sea S un subespacio vectorial de A. El *corazón* de S se define como el más grande ideal (bilátero) de A contenido en S. El corazón de S se denotará por $cor(S)$.

Todo está ya preparado para que podamos presentar ahora el concepto de álgebra primitiva. Advertimos que si bien dicho concepto tiene perfecto sentido en ambiente general, es en ambiente asociativo donde es particularmente relevante y se convierte en el germen de una rica teoría. Es por ello por lo que a continuación presentamos el concepto de primitividad únicamente en contexto asociativo.

Definición I.1.5. Un álgebra asociativa A se dice *primitiva* (izquierda) si contiene un ideal izquierdo modular maximal con corazón cero.

Con la intención de presentar un ejemplo de álgebra asociativa primitiva recordamos algunos conceptos que nos serán útiles.

Definición I.1.6. Sea X un espacio vectorial y sea A una subálgebra del álgebra $L(X)$ de todos los operadores lineales en X. Un subespacio vectorial M de X se dice ser *A-invariante* si $T(M) \subseteq M$ para todo T en A. Un vector u de X es *cíclico* (relativo a A) si el subespacio A-invariante $A(u) := \{T(u) : T \in A\}$ es la totalidad de X. El álgebra de operadores A se dice *irreducible* o que *actua irreduciblemente* en X si es no nula y $\{0\}$ y X son los únicos subespacios A-invariantes de X.

Sea X un espacio vectorial no nulo y sea A una subálgebra no nula de $L(X)$. Es obvio que si todo vector no nulo de X es cíclico entonces A actua irreduciblemente en X. Recíprocamente, si A actua irreduciblemente en X, entonces todo vector no nulo de X es cíclico. En efecto, como $M := \{x \in X : A(x) = 0\}$ es un subespacio A-invariante de X, se sigue que $M = \{0\}$ (ya que $M = X$ implica la nulidad de A), luego para todo vector no nulo u de X se tiene $u \notin M$, y por tanto $A(u) = X$.

Haciendo uso de esta caracterización de la actuación irreducible, es fácil probar que todo ideal no nulo I de un álgebra A que actúa irreduciblemente en un espacio vectorial X también actúa irreduciblemente en X. En efecto, para cada vector no nulo u de X $I(u)$ es un subespacio vectorial A-invariante que no puede ser nulo pues $\{0\} \neq I(X) = I(A(u)) \subseteq I(u)$, luego $I(u) = X$.

Dada un álgebra de operadores A en un espacio vectorial X, para un vector u de X los conjuntos $ker_A(u) := \{F \in A : F(u) = 0\}$ y $id_A(u) := \{H \in A : H(u) = u\}$ desempeñan un papel destacado en la teoría de representación. Es de comprobación inmediata que $ker_A(u)$ es un ideal izquierdo de A y que cada elemento de $id_A(u)$ es una unidad modular derecha para dicho ideal, así como que cuando u es un vector cíclico no nulo entonces $id_A(u) \neq \emptyset$ y por tanto $ker_A(u)$ es un ideal izquierdo modular propio. Veremos en seguida que en condiciones de irreducibilidad se tiene de hecho que $ker_A(u)$ es un ideal izquierdo modular maximal con corazón cero, lo que nos permitirá cumplir nuestra promesa de mostrar un ejemplo de álgebra asociativa primitiva.

Proposición I.1.7. *Toda álgebra de operadores actuando irreduciblemente en un espacio vectorial es primitiva.*

Demostración. Sea A un álgebra de operadores actuando irreduciblemente en un espacio vectorial X y sea u un vector no nulo de X. Por los comentarios previos a la proposición, $id_A(u) \neq \emptyset$ y $ker_A(u)$ es un ideal izquierdo modular propio de A. Ahora, si I es un ideal izquierdo de A que contiene estrictamente a $ker_A(u)$ entonces $I(u)$ es un subespacio A-invariante no nulo de X, y así $I(u) = X$ en virtud de la irreducibilidad de A. Pero en tal caso $I \cap id_A(u) \neq \emptyset$, luego I no excluye a todas sus unidades modulares derechas y por tanto I no es propio. Esto concluye la demostración de la maximalidad de $ker_A(u)$.

Sólo resta probar que $cor(ker_A(u)) = \{0\}$. Sea $F \in cor(ker_A(u))$. Fijado $v \in X$, utilicemos el hecho de ser u cíclico para elegir G en A tal que $G(u) = v$. Como $cor(ker_A(u))$ es un ideal contenido en $ker_A(u)$ se tiene que $FG \in ker_A(u)$, y por tanto $F(v) = FG(u) = 0$. Así, $F = 0$. ∎

Dada A un álgebra de operadores en un espacio vectorial X, para cada vector u de X denotaremos por E_u a la aplicación lineal de A en X definida por la evaluación de cada operador de A en u. Es claro que la imagen de E_u no es otra que $A(u)$ y que el núcleo de E_u no es otro

que $ker_A(u)$. En consecuencia, si A actúa irreduciblemente en X y u es no nulo, entonces E_u es sobreyectiva, y por tanto, vía el primer teorema de isomorfía, $X \simeq A/ker_A(u)$. Este isomorfismo muestra como el espacio vectorial en el que el álgebra de operadores se está viendo actuar irreduciblemente se reencuentra a partir de un cociente de dicha álgebra por uno de sus ideales izquierdos modulares maximales con corazón cero. Esta es una idea que subyace en la demostración del siguiente teorema que afirma que, salvo isomorfismo, no hay más álgebras asociativas primitivas que las que se acaban de presentar. Esto es, toda álgebra primitiva espacializa (puede verse "representada") como un álgebra irreducible de operadores en un espacio vectorial.

Definición I.1.8. Sean A un álgebra y X un espacio vectorial ambos sobre el mismo cuerpo. Una *representación* de A en X es un homomorfismo de álgebras de A en $L(X)$. Una representación se dice *fiel* si es inyectiva. Una representación φ de A en X es una representación *irreducible* si la imagen de φ es una subálgebra irreducible de $L(X)$, esto es, φ es no nula y $\{0\}$ y X son los únicos subespacios de X invariantes por $\varphi(A)$.

Teorema I.1.9. Teorema de representación de las álgebras primitivas. *Toda álgebra asociativa primitiva admite una representación fiel e irreducible sobre un conveniente espacio vectorial.*

Demostración. Sea A un álgebra asociativa primitiva y sea I un ideal izquierdo modular maximal de A con corazón nulo. Consideremos el espacio vectorial $X := A/I$. Por ser I un ideal izquierdo, para cada a en A la ley $b + I \mapsto ab + I$ determina una aplicación bien definida de X en X que denotaremos por $\varphi(a)$. Es claro que $\varphi(a)$ es un operador lineal en X y que la aplicación $\varphi : a \mapsto \varphi(a)$ es una representación de A en X.

Veamos que esta representación es irreducible. Sea e una unidad modular derecha de I. Notemos que por ser I propio Ae no está incluido

en I, y por tanto el conjunto $\{a \in A : Aa \subseteq I\}$ es distinto de A. Como quiera que dicho conjunto es un ideal izquierdo de A conteniendo a I, se sigue que éste coincide con I. De este hecho se deduce que si $a \in A \setminus I$ entonces $Aa \not\subseteq I$, luego el ideal izquierdo $Aa + I$ contiene estrictamente a I y por tanto es A. Así, si $a + I$ es un vector no nulo de X se tiene $\varphi(A)(a + I) = A/I$.

Por último, veamos que la representación φ es fiel. Es claro que $ker(\varphi) = \{a \in A : aA \subseteq I\}$. Si $a \in ker(\varphi)$, entonces $ae \in I$ y en consecuencia $a = (a - ae) + ae \in I$. Así, $ker(\varphi)$ es un ideal de A contenido en I, luego $ker(\varphi) = \{0\}$ pues $cor(I) = \{0\}$. ∎

Recordemos que una norma $\|.\|$ en un álgebra real o compleja se dice ser una *norma de álgebra* si verifica la propiedad submultiplicativa, esto es, $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ para cualesquiera a, b en el álgebra. Un *álgebra normada (completa)* es un álgebra con una norma (completa) de álgebra. A las álgebras asociativas normadas completas se les llama *álgebras de Banach*. La siguiente proposición recoge un resultado básico de la teoría de las álgebras de Banach que es bien conocido (véase por ejemplo [90]; Teorema 2.1.3 o bien [18]; Corolorio 9.3) y que será usado en la demostración del resultado final de esta sección.

Proposición I.1.10. *Los ideales uniláteros modulares maximales de un álgebra de Banach son cerrados.*

Del anterior teorema de representación se sigue que no hay más álgebras de Banach primitivas que aquellas álgebras de Banach que espacializan irreduciblemente en un conveniente espacio vectorial. Sin embargo de una tal álgebra, sea A, es posible decir algo más, a saber, su estructura analítica va a inferir una estructura analítica similar al espacio de representación, sea X, de tal forma que A puede verse de hecho incluida continuamente en $BL(X)$, el álgebra de Banach de todos los operadores lineales y continuos en X. Este es el contenido del teorema de representación de las álgebras de Banach primitivas debido a C. E. Rickart y

cuya publicación se remonta al año 1950 en el que aparece como uno de los principales resultados del artículo [89]. Este teorema fue lógicamente incluido por Rickart en su libro de álgebras de Banach [90] (Teorema 2.2.6), y hoy en día, posiblemtente sea ésta la mejor referencia que pueda darse de él. Nosotros incluimos aquí la demostración de este resultado por dos razones: una por complitud de este trabajo, y otra, posiblemente más importante, por ser inspiradora de parte de nuestro posterior tratamiento en ambiente más general.

Teorema I.1.11. Teorema de Rickart de representación de las álgebras de Banach primitivas. *Toda álgebra de Banach primitiva se representa fiel, irreducible y continuamente en un conveniente espacio de Banach. Más concretamente: Si A es un álgebra de Banach primitiva, entonces existe un espacio de Banach X tal que A puede verse como una subálgebra del álgebra de Banach $BL(X)$ actuando irreduciblemente sobre X y tal que la aplicación inclusión $A \hookrightarrow BL(X)$ es continua (de hecho, contractiva).*

Demostración. Por el teorema anterior existe un espacio vectorial X tal que A puede verse como una subálgebra de $L(X)$ que actua irreduciblemente sobre X. Fijemos un vector no nulo u en X. Gracias al primer teorema de isomorfía la aplicación E_u de A en X consistente en la evaluación de todo operador de A en u induce un isomorfismo canónico de $A/ker_A(u)$ en X dado por $T + ker_A(u) \mapsto T(u)$. Como $ker_A(u)$ es un ideal izquierdo modular maximal de A, en virtud de la proposición anterior, se tiene que $ker_A(u)$ es cerrado y por consiguiente $A/ker_A(u)$ es un espacio de Banach para la norma cociente. Trasladando esta norma a X vía el isomorfismo canónico anterior, X aparece de manera natural dotado de estructura de espacio de Banach para la norma definida por $|x| := Inf\{\|T\| : T \in A,\ T(u) = x\}$.

Ahora, fijados T en A y x en X, para todo $S \in A$ tal que $S(u) = x$ se tiene que $TS(u) = T(x)$, y por tanto $|T(x)| \leq \|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|$, de donde se deduce que $|T(x)| \leq \|T\|\,|x|$. Luego todo operador T en A es $|.|$-continuo y $|T| \leq \|T\|$. ∎

Nota I.1.12. Obsérvese que en realidad en la demostración del teorema anterior se prueba más de lo que se enuncia, ya que de hecho se consigue dotar a cualquier espacio vectorial X en el que A se represente fiel e irreduciblemente con una estructura de espacio de Banach que se ajusta a la tesis del teorema. Esta estructura aparece a partir de un prefijado vector no nulo u de X definiendo la norma

$$|x|_u := Inf\{\|T\| : T \in A,\ T(u) = x\}.$$

Si bien esta norma depende claramente de u, no ocurre lo mismo con la topología inducida por dicha norma. Esta observación es también debida a Rickart y se recoge en el Teorema 2.2.7 de su libro [90], donde se prueba aún más, a saber, que "toda norma completa $|.|'$ en X tal que A está incluida continuamente en $BL(X,|.|')$ es equivalente a la norma $|.|_u$". En efecto, si k designa la norma de la inclusión de A en $BL(X,|.|')$, dado x en X, para cada F en A con $F(u) = x$ se tiene

$$|x|' = |F(u)|' \leq |F|'|u|' \leq k\|F\||u|',$$

y por tanto

$$|x|' \leq k|x|_u|u|' . \tag{1.1}$$

Así, las normas completas $|.|_u$ y $|.|'$ son comparables y por tanto equivalentes (Teorema de los isomorfismos de Banach). Para finalizar esta nota llamamos la atención sobre el hecho de que para u y v vectores no nulos de X la expresión (1.1), teniendo en cuenta la contractividad de la inclusión de A en $(BL(X),|.|_u)$ probada en la demostración del teorema, da lugar a la siguiente "fórmula de cambio de base"

$$|x|_v \leq |x|_u|u|_v . \tag{1.2}$$

I.2 Una primera extensión del Teorema de Rickart a álgebras de Jordan Banach.

La teoría de las álgebras de Jordan tiene su origen en la primera mitad de la década de los años 30 en la que se publican una serie de trabajos debidos a Pascual Jordan ([61] ,[62] ,[63]) en los que se pretendía

formular una teoría matemática abstracta que axiomatizara la clase de "observables" de un sistema físico en Mecánica Cuántica. El nombre de "álgebras de Jordan" fue dado por A. A. Albert en 1946. Desde su origen la teoría de las álgebras de Jordan se ha desarrollado considerablemente con aplicaciones en Análisis, Geometría proyectiva, Geometría diferencial, Física matemática, etc., disponiendo en la acutalidad de excelentes monografías ([19], [52], [56], [99] y [110]) que prestan una ayuda inestimable a toda persona interesada en el estudio de estas álgebras. Como ya hemos indicado el principal resultado de este capítulo es obtener una extensión para álgebras de Jordan-Banach del Teorema de Rickart de representación de las álgebras de Banach primitivas.

Definición I.2.1. Un *álgebra de Jordan* (lineal) es un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (con producto denotado por "."), que satisface las siguientes identidades

(i) $x.y = y.x$ (Identidad conmutativa)

(ii) $(x^2.y).x = x^2.(y.x)$ (Identidad de Jordan).

Es bien sabido que toda álgebra asociativa da lugar a un álgebra de Jordan por simetrización de su producto. Concretamente, si A es un álgebra asociativa con producto denotado por yuxtaposición, entonces el espacio vectorial subyacente a A con el producto definido por $x.y := \frac{1}{2}(xy+yx)$ es un álgebra de Jordan, llamada el *álgebra simetrizada* de A y denotada por A^+. Cuando un álgebra de Jordan J es subálgebra de A^+ diremos que es una *subálgebra de Jordan* de A. Siguiendo la tradición nos referiremos a las álgebras de Jordan normadas completas con el nombre de *álgebras de Jordan-Banach.* Actualmente se cuenta con una teoría bastante elaborada de las álgebras de Jordan-Banach, campo en el que se enmarca este trabajo. Remitimos al lector interesado en conocer los últimos resultados sobre estas álgebras al muy reciente y extenso "survey" de A. Rodríguez Palacios [95] .

Permítasenos en este momento hacer una lectura informal del Teorema de Rickart de representación de las álgebras de Banach primitivas, diciendo que "toda álgebra de Banach que espacializa irreduciblemente tambien espacializa continuamente". El principal objetivo de este capítulo es obtener una primera extensión para álgebras de Jordan-Banach de este teorema. En esta sección damos la versión espacializada de dicha extensión.

Teorema I.2.2. *Sea $(J, \|.\|)$ un álgebra de Jordan-Banach y supongamos que existe un espacio vectorial X tal que J es una subálgebra de Jordan de $L(X)$ conteniendo como ideal a una subálgebra (asociativa) A de $L(X)$ que actua irreduciblemente en X. Entonces existe una norma completa $|.|$ en X tal que J está contenida en $BL(X)$ y la aplicación inclusión $(J, \|.\|) \hookrightarrow (BL(X), |.|)$ es continua.*

Distinguimos dos etapas previas a la demostración de este teorema cuyos resultados en un ambiente más general aislamos por su interés en sí mismos. Una de ellas consiste en normar completamente el espacio vectorial X siguiendo argumentos similares a los del Teorema $I.1.11$. La otra etapa muestra que en las hipótesis del Teorema $I.2.2$ hay muchos elementos de J cuyo productos asociativos por J permanecen en J y los operadores de multiplicación asociativa por dichos elementos son continuos. Nos vamos a ocupar en primer lugar de este resultado cuyo soporte algebraico nos lo dará la siguiente proposición.

Definición I.2.3. En un álgebra se definen el *conmutador* y el *asociador* respectivamente como

$$\begin{aligned} [a,b] &:= ab - ba, \\ (a,b,c) &:= (ab)c - a(bc). \end{aligned}$$

Nótese que para un álgebra asociativa su producto se puede expresar a partir de los productos "." y $[,]$ ya que $ab = a.b + \frac{1}{2}[a,b]$.

Para a, b, c en un álgebra asociativa A, notaremos por $(a, b, c)^+$ al asociador de estos elementos en el álgebra de Jordan A^+, el cual, expresándolo en términos del producto asociativo podemos relacionarlo con el conmutador como sigue:

$$(a, b, c)^+ = \frac{1}{4}(cab - acb - bca + bac) = \frac{1}{4}[[c, a], b]. \tag{1.3}$$

Proposición I.2.4. *Sean B un álgebra asociativa y A una subálgebra de B. Si J es una subálgebra de Jordan de B conteniendo a A como un ideal, entonces $A^2J + JA^2 \subseteq A$.*

Demostración. Comencemos observando que si $a \in A$ y $x \in J$ entonces $a^2x \in A$, pues

$$a^2x = a^2.x + \frac{1}{2}[a^2, x] = a^2.x + [a, a.x]$$

y A es un ideal de J. De aquí deducimos que $(a.b)x \in A$ ya que

$$(a.b)x = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right] x.$$

Como $ab = a.b + \frac{1}{2}[a, b]$, para probar que $A^2J \subseteq A$ es suficiente mostrar que $[a, b]x \in A$ cuando $a, b \in A$ y $x \in J$. Esto se sigue de las siguientes igualdades

$$[a, b]x = [a, b].x + \frac{1}{2}[[a, b], x] = [a, b].x + 2(b, x, a)^+,$$

donde para la última igualdad se ha hecho uso de la fórmula (1.3). Análogamente $JA^2 \subseteq A$. ∎

Definición I.2.5. Un álgebra A se dice *semiprima* si $\{0\}$ es el único ideal I de A tal que $I^2 = \{0\}$.

Bajo las hipótesis de la anterior proposición uno puede considerar para cada $b \in A^2$ las aplicaciones $\lambda_b : x \mapsto bx$ y $\rho_b : x \mapsto xb$ de J en A. Nuestro siguiente objetivo es demostrar que si J es semiprima y normada completa entonces estas aplicaciones son continuas. A este fin nosotros necesitamos el siguiente lema probado en [91] cuya demostración incluimos por complitud.

Definición I.2.6. Una *derivación* en un álgebra A es una aplicación lineal D de A en A tal que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

para cualesquiera a, b en A.

Recordemos que si D es una derivación en un álgebra A entonces (con el convenio $D^0 := Id_A$) se verifica la igualdad

$$D^n(ab) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} D^{n-r}(a)D^r(b) \quad (\textit{Regla de Leibnitz}),$$

para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in A$.

Lema I.2.7. ([91]; Corolario II.5). *Sea C un álgebra normada completa semiprima. Si D es una derivación de C tal que D^2 es continua, entonces D es continua.*

Demostración. Notemos en primer lugar que el subespacio separador $\mathcal{S}(D)$ de D, definido como el conjunto de elementos $x \in C$ para los cuales existe una sucesión nula $\{x_n\}$ en C con $lim\{D(x_n)\} = x$, es realmente un ideal de C (por ser D una derivación) incluido en la clausura de $D(C)$. Por el Teorema de la gráfica cerrada, para probar la continuidad de D es suficiente mostrar que $\mathcal{S}(D) = \{0\}$. Sean $y \in C$ y $x \in \mathcal{S}(D)$, consideremos una sucesión nula $\{x_n\}$ en C tal que $lim\{D(x_n)\} = x$ y usemos la regla de Leibnitz para obtener

$$D^2(x_n y) = D^2(x_n)y + 2D(x_n)D(y) + x_n D^2(y).$$

De la continuidad de D^2 se sigue que $xD(y) = 0$. Luego $\mathcal{S}(D)D(C) = \{0\}$ y por la continuidad del producto $\mathcal{S}(D)\overline{D(C)} = \{0\}$. Así, $\mathcal{S}(D)^2 \subseteq \mathcal{S}(D)\overline{D(C)} = \{0\}$ y por ser C semiprima se tiene $\mathcal{S}(D) = \{0\}$. ∎

Proposición I.2.8. *Sean J un álgebra de Jordan-Banach semiprima, B un algebra asociativa, y A una subálgebra de B, y supongamos que J es una subálgebra de Jordan de B conteniendo a A como un ideal. Entonces para cada b en A^2 las aplicaciones λ_b y ρ_b de J en A definidas por $\lambda_b(x) := bx$ y $\rho_b(x) := xb$ son continuas.*

Demostración. En vista de la Proposición I.2.4, para $b \in A^2$, la aplicación $D_b : J \to B$ definida por $D_b(x) := [b, x] = \lambda_b(x) - \rho_b(x)$ es A-valuada. Además es lineal y $D_b(x.y) = D_b(x).y + x.D_b(y)$, luego es una derivación en el álgebra de Jordan J. Como, por (1.3), $D_b^2(x) = [b, [b, x]] = -4(x, b, b)^+$ para todo $x \in J$, D_b es una derivación en el álgebra normada completa semiprima J tal que D_b^2 es continua. Luego D_b es continua por el Lema previo.

Ahora es suficiente notar que para todo $x \in J$, $\lambda_b(x) = b.x + \frac{1}{2}D_b(x)$ y $\rho_b(x) = b.x - \frac{1}{2}D_b(x)$. ∎

Nota I.2.9. Para la aplicación que haremos de la Proposición anterior, conviene hacer constar en este momento que bajo las hipótesis del Teorema *I*.2.2 el álgebra J es semiprima (bien que como se verá en la seccion I.4 J es mucho más, a saber, "primitiva"). Concretamente, si J es un álgebra de Jordan y existe un espacio vectorial X tal que J es subálgebra de Jordan de $L(X)$ conteniendo como ideal a una subálgebra A de $L(X)$ que actúa irreduciblemente en X, entonces J es semiprima. Para su demostración sea P un ideal de J tal que $P^2 = \{0\}$. Supongamos que $P \neq \{0\}$ y tomemos un elemento no nulo F de P y $u \in X$ tal que $F(u) \neq 0$. Por la actuación irreducible de A en X, existe un elemento $G \in A$ tal que $G(F(u)) = u$ y entonces

$$F(u) = F(G(F(u))) = (FGF)(u) = (2F.(G.F) - F^2.G)(u) = 0\,,$$

lo que es contradictorio.

Al objeto de cubrir la segunda etapa para la demostración del Teorema *I*.2.2 nosotros introducimos los objetos que en el contexto de las álgebras de Jordan van a desempeñar un papel análogo al que jugaban en ambiente asociativo los ideales modulares.

Definición I.2.10. Sea J un álgebra de Jordan. Para x, y en J se define $U_{x,y}$ como el operador lineal en J determinado por

$$U_{x,y}(z) := x.(z.y) + y.(z.x) - (x.y).z$$

para todo z en J. Es usual notar $U_x := U_{x,x}$, y $\{xyz\} = U_{x,z}(y)$.

Es claro que la ley $(x, y) \mapsto U_{x,y}$ es una aplicación bilineal simétrica de $J \times J$ en $L(J)$, y por tanto completamente determinada por su cuadratura, a saber

$$U_{x,y} = \frac{1}{2}[U_{x+y} - U_x - U_y]. \tag{1.4}$$

Si J es una subálgebra de Jordan de un álgebra asociativa A, entonces $U_{x,y}(z) = \frac{1}{2}(xzy + yzx)$ y $U_x(z) = xzx$.

Dado que en las álgebras de Jordan el producto $U_x(y)$ tiene dos "caras", una interna y otra externa, en 1965 N. Jacobson introduce en [50] el concepto de ideal interno, el cual se ha mostrado ser especialmente útil en la teoría de las álgebras de Jordan.

Definición I.2.11. Sea J un álgebra de Jordan. Un subespacio vectorial I de J es un *ideal interno* de J si $U_I(J^1) \subseteq I$, donde J^1 denota la envolvente unital de J. La notación $I \lhd J$ es usual para significar que I es un ideal interno de J. Un ideal interno I de J es *e-modular* para $e \in J$ si

$$U_{1-e}(J) \subseteq I, \quad U_{1-e,I}(J^1) \subseteq I \ \ y \ \ e - e^2 \in I.$$

En tal caso se dice que el elemento e es un *módulo* de I.

Si bien en la definición de ideal interno de un álgebra de Jordan se involucra a la envolvente unital de dicha álgebra, notemos que una reformulación intrínseca puede obtenerse a partir de la igualdad (1.4). En efecto, para un subespacio vectorial I de un álgebra de Jordan J las siguientes condiciones son equivalentes: 1) $U_I(J^1) \subseteq I$, 2) $U_{I,I}(J^1) \subseteq I$, y 3) $U_I(J) + I^2 \subseteq I$. Así, un ideal interno de un álgebra de Jordan J no es más que una subálgebra I de J tal que $U_I(J) \subseteq I$.

Es claro que los ideales unilateros de un álgebra asociativa A son ideales internos de A^+. Asimismo, el concepto de modularidad-Jordan que se da en la anterior definición extiende el concepto asociativo de modularidad unilátera. Así por ejemplo, si I es un ideal izquierdo modular de A con unidad modular derecha e, entonces I es un ideal interno e-modular de A^+, ya que

$$U_{1-e}(A) = (1-e)A(1-e) \subseteq (1-e)I \subseteq I,$$

$$\{(1-e)A^1I\} \subseteq (1-e)A^1I + IA^1(1-e) \subseteq (1-e)I + I \subseteq I$$

y

$$e - e^2 = e(1-e) \in A(1-e) \subseteq I.$$

Sea J un álgebra de Jordan. Si I es un ideal interno e-modular de J y $e \in I$, entonces

$$J = U_1(J) = U_{(1-e)+e}(J) = (2U_{1-e,e} + U_{1-e} + U_e)(J)$$

$$\subseteq U_{1-e,I}(J) + U_{1-e}(J) + U_I(J) \subseteq I.$$

Por consiguiente, un ideal interno modular de J es propio si, y sólo si, excluye a sus módulos. Este hecho permite deducir que, para un elemento prefijado e en J, toda cadena de ideales internos e-modulares propios está mayorada por un ideal interno e-modular propio (a saber, la unión de todos los ideales de la cadena). Luego, vía el Lema de Zorn, todo ideal interno e-modular propio está contenido en un ideal interno e-modular maximal. Esta observación da consistencia a la siguiente definición.

Definición I.2.12. Sea J un álgebra de Jordan. Dado e en J, un ideal interno I de J es *e-maximal* si es maximal en el conjunto de todos los ideales internos e-modulares propios de J. Un ideal interno I de J es *modular maximal* si es e-maximal para algún elemento e de J.

Conviene advertir que en primera instancia no está claro que los ideales internos modulares maximales de un álgebra de Jordan sean maximales en el conjunto de todos los ideales modulares propios. Esta cuestión se plantea al final del artículo pionero de L. Hogben y K. McCrimmon [44] y ha permanecido como problema abierto hasta muy recientemente. La respuesta a dicho problema es afirmativa y ha sido dada por J. A. Anquela, F. Montaner y T. Cortés en [11] (utilizando "técnicas zel'manovianas" que presentaremos más tarde). No obstante en [44] (Ejemplo 3.3) aparece el siguiente precedente que será más que suficiente para la obtención de nuestros resultados.

Proposición I.2.13. *Los ideales uniláteros modulares maximales de un álgebra asociativa A son maximales en el conjunto de todos los ideales internos modulares propios del álgebra de Jordan A^+.*

El siguiente enunciado que aparece en [34], Lemma 6.5 (véase también [87], Proposition 6) recoge la extensión a ambiente Jordan-Banach de la Proposición *I*.1.10.

Proposición I.2.14. *Los ideales internos modulares maximales de un álgebra de Jordan-Banach son cerrados.*

La siguiente Proposición dota a todo espacio vectorial en las hipótesis del Teorema *I*.2.2 de una norma completa, cubriendo así la segunda etapa previa a la demostración de dicho teorema.

Proposición I.2.15. *Sean X un espacio vectorial, J una subálgebra de Jordan de $L(X)$, y supongamos que J contiene como ideal a una subálgebra asociativa A de $L(X)$ que actua irreduciblemente en X. Entonces, para todo elemento no nulo u de X, la aplicación lineal $E_u : F \to F(u)$ de J en X es sobreyectiva y su nucleo $ker_J(u) := \{F \in J : F(u) = 0\}$ es un ideal interno modular maximal de J con conjunto de módulos $id_J(u) := \{F \in J : F(u) = u\}$. Si además suponemos que J es un álgebra de Jordan-Banach, entonces $ker_J(u)$ es un subespacio cerrado de J y por tanto X se convierte de manera natural en un espacio de Banach bajo la norma*

$$|x| := Inf\{\|F\| : F \in J,\ F(u) = x\}\ ,$$

cuya topología inducida es independiente de la elección del elemento u.

Demostración. Fijemos un elemento no nulo u en X. Como $A \subseteq J$ y A actua irreduciblemente en X, la aplicación lineal $E_u : J \to X$ es sobreyectiva y el conjunto $id_J(u)$ es no vacío. Es rutinario comprobar que $ker_J(u)$ es un ideal interno modular de J con todos los elementos de $id_J(u)$ como módulos. Veamos que en efecto se verifica que $id_J(u)$ es el conjunto de módulos de $ker_J(u)$. Sea $H \in J$ un módulo para $ker_J(u)$. Por la primera condición de modularidad tenemos que

$$(Id_X - H)F(Id_X - H)(u) = 0$$

para todo $F \in J$. Como J contiene a A, se sigue de la anterior condición que $(Id_X - H)$ se anula en $A(Id_X - H)(u)$, lo que implica que $(Id_X - H)(u) = 0$ dada la actuación irreducible de A en X. Luego $H(u) = u$, esto es, $H \in id_J(u)$.

Para probar que $ker_J(u)$ es un ideal interno modular maximal de J, fijemos $H \in A \cap id_J(u)$, y demostremos que $ker_J(u)$ es maximal en el conjunto de todos los ideales internos H-modulares propios de J. Sea P un ideal interno H-modular propio de J conteniendo a $ker_J(u)$. Como A es un ideal de J que contiene a H, se sigue inmediatamente que $P \cap A$ es un ideal interno H-modular propio del álgebra de Jordan A^+ que contiene a $ker_A(u) := \{F \in A : F(u) = 0\}$. Pero $ker_A(u)$ es un ideal izquierdo H-modular maximal de A (acaso véase la demostración de la Proposición $I.1.7$), luego un ideal interno H-modular maximal de A^+ en virtud de la Proposición $I.2.13$. En consecuencia, tenemos que $P \cap A = ker_A(u)$. Así, la inclusión $U_P(A) \subseteq P \cap A$ se reescribe $U_P(A) \subseteq ker_A(u)$, esto es, para cualesquiera que sean F en P y G en A se verifica que $FGF(u) = 0$. Esta propiedad se puede enunciar diciendo que todo elemento F de P se anula en $AF(u)$, condición que fuerza $F(u) = 0$ dado que A actúa irreduciblemente. En consecuencia $P = ker_J(u)$.

Supuesto que J es un álgebra de Jordan-Banach, por la proposición anterior $ker_J(u)$ es un subespacio cerrado de J, y por tanto $J/ker_J(u)$ es un espacio de Banach para la norma cociente. Trasladando esta estructura a X vía la biyección lineal canónica de $J/ker_J(u)$ en X inducida por la aplicación evaluación E_u, X aparece como espacio de Banach para la norma dada en el enunciado.

Finalmente probamos que la topología en X inducida por la norma $|.|_u$ con la que acabamos de dotar a X, no depende de la elección de u. En otras palabras, dados dos vectores $u, v \in X \setminus \{0\}$ se verifica que las normas $|.|_u, |.|_v$ son equivalentes. Como A actúa irreduciblemente en X y A^2 es un ideal no nulo de A, también A^2 actúa irreduciblemente, y por tanto podemos elegir un elemento T en A^2 tal que $T(u) = v$. Entonces, por la continuidad de $\rho_T : J \to A$ dada por la Proposición $I.2.8$, se verifica para todo S en J que

$$\|ST\| = \|\rho_T(S)\| \leq \|\rho_T\| \, \|S\| \, .$$

En consecuencia, tomando ínfimos en la anterior expresión cuando S varía en J y $S(v) = x$ obtenemos

$$|x|_u \leq \|\rho_T\| \, |x|_v. \tag{1.5}$$

∎

Ahora todo está preparado para la demostración del principal resultado de la sección, el Teorema $I.2.2$.

Demostración del Teorema $I.2.2$. Fijemos un elemento no nulo u en X. Por la Proposición $I.2.15$ el espacio vectorial X es un espacio de Banach para la norma

$$|x| := Inf\{\|F\| : F \in J, \ F(u) = x\}.$$

Dados $G \in A^2$ y $x \in X$, para cualquier F en J se tiene por la Proposición $I.2.8$ que $GF \in A$ y $\|GF\| \leq \|\lambda_G\| \, \|F\|$. Luego, para cualquier F en J con $F(u) = x$ se tiene $|G(x)| = |GF(u)| \leq \|GF\| \leq \|\lambda_G\| \, \|F\|$, y por tanto $|G(x)| \leq \|\lambda_G\| \, |x|$. Así, todo elemento G de A^2 es un operador lineal continuo en $(X, |.|)$ y $|G| \leq \|\lambda_G\|$.

Veamos ahora que $J \subseteq BL(X, |.|)$. Sea $G \in J$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión nula en X tal que $\{G(x_n)\}$ converge a $y \in X$. Como A^3 y (por la Proposición $I.2.4$) A^3J están contenidos en A^2 y por tanto en $BL(X)$,

se sigue que para todo $F \in A^3$ la sucesión $\{(FG)(x_n)\} = \{F(G(x_n))\}$ converge a 0 y a $F(y)$. Luego $F(y) = 0$ para todo $F \in A^3$ y así $y = 0$, pues A^3 actúa irreduciblemente en X. Por el Teorema de la Gráfica Cerrada G es un operador lineal continuo en $(X, |.|)$.

Solo queda probar que la inmersión $(J, \|.\|) \hookrightarrow (BL(X), |.|)$ es continua. Sea $\{F_n\}$ una sucesión nula en $(J, \|.\|)$ y tal que $|.|$-converge a F en $(BL(X), |.|)$. A partir de la $\|.\|$-convergencia a cero de $\{F_n\}$, para $x \in X$ obtenemos que $\{F_n(x)\}$ $|.|$-converge a cero, ya que por (1.5), para $x \in X \setminus \{0\}$ existe una constante positiva k_x tal que para todo G en J se verifica que

$$|G(x)| \leq k_x |G(x)|_x \leq k_x \|G\|.$$

Como por otra parte $\{F_n\}$ converge a F en la norma de operadores, y por tanto puntualmente, se sigue que $F(x) = 0$ para todo $x \in X$. El Teorema de la Gráfica Cerrada concluye la demostración. ∎

I.3 El álgebra de cocientes simétricos de Martindale de un álgebra asociativa semiprima.

En esta sección presentamos el álgebra de cocientes simétricos de Martindale de un álgebra asociativa semiprima. El anillo de cocientes (unilátero) de un anillo primo fue introducido por W. S. Martindale en [73] como una herramienta para el estudio de anillos satisfaciendo una identidad polinomial. El concepto fue extendido a anillos semiprimos por S. A. Amitsur en [7] y usado por V. K. Kharchenko en sus investigaciones en la teoría de Galois de anillos semiprimos ([67] y [68]). El anillo de cocientes de Martindale es una extensión "demasiado grande" del anillo de partida y además está definido asimétricamente, lo que motivó la aparición de una versión simétrica del anillo de cocientes dada por Kharchenko en [68]. D. S. Passman llevó a cabo un estudio sistemático del anillo simétrico de cocientes de anillos primos en [85], referencia obligada en este tema. Recientemente K. McCrimmon en [80] hace un amplio y detallado estudio

del álgebra de cocientes simétricos de Martindale.

Dada un álgebra asociativa semiprima, la primera extensión natural de ella, más pequeña que el álgebra de cocientes simétricos, es el álgebra de los multiplicadores que fué introducida por G. Hochschild en [43]. El estudio sistemático del álgebra de los multiplicadores para un álgebra asociativa, incluso de Banach, se inició en la década de los sesenta con una serie de artículos de B. E. Johnson ([58], [59] y [60]). También es cita obligada el artículo de R. C. Busby [20] en el que se inicia el estudio del álgebra de los multiplicadores para C^*-álgebras que hoy en día es una de las herramientas básicas para la K-teoría.

Definición I.3.1. Sea A un álgebra asociativa semiprima. Un *doble centralizador* en A es una pareja (λ, ρ) de aplicaciones lineales de A en A verificando las propiedades $\lambda(ab) = \lambda(a)b$, $a\lambda(b) = \rho(a)b$ y $\rho(ab) = a\rho(b)$ para cualesquiera a, b en A. El conjunto $Mult(A)$ de todos los dobles centralizadores en A con las operaciones definidas por

$$\begin{aligned}(\lambda,\rho)+(\lambda',\rho') &:= (\lambda+\lambda',\rho+\rho'),\\ \alpha(\lambda,\rho) &:= (\alpha\lambda,\alpha\rho),\ (\alpha \textit{ un escalar}),\\ (\lambda,\rho)(\lambda',\rho') &:= (\lambda\lambda',\rho'\rho),\end{aligned}$$

es claramente un álgebra asociativa con unidad (Id_A, Id_A) y A puede verse como una subálgebra de $Mult(A)$ vía la inmersión $a \mapsto (L_a, R_a)$, donde L_a (resp. R_a) denota el operador de multiplicación izquierda (resp. derecha) por a. Al álgebra $Mult(A)$ se le llama el *álgebra de los multiplicadores* de A.

A modo de reflexión sobre el tamaño de esta extensión, hacemos notar que si A no tiene unidad entonces $Mult(A)$ puede ser considerablemente mayor que A^1 (véase si acaso [82]; Ejemplos 3.1.2 y 3.1.3). Por el contrario, si A tiene unidad y (λ, ρ) es un doble centralizador en A entonces $(\lambda, \rho) = (L_{\lambda(1)}, R_{\lambda(1)})$ y así $A = Mult(A)$.

Sea $m = (\lambda, \rho)$ en $Mult(A)$. Para a en A se tiene que $\lambda L_a = L_{\lambda(a)}$ y $R_a\rho = R_{\lambda(a)}$, y por tanto $(\lambda, \rho)(L_a, R_a) = (L_{\lambda(a)}, R_{\lambda(a)})$, esto es $ma = \lambda(a)$. Análogamente $am = \rho(a)$. Estas igualdades nos permiten afirmar

que A es un ideal de $Mult(A)$, así como que si $mA = Am = \{0\}$ entonces necesariamente $m = 0$. Por consiguiente, si I es un ideal de $Mult(A)$ tal que $I \cap A = \{0\}$, de la inclusión $IA + AI \subseteq I \cap A$, se deduce que $I = \{0\}$. La información que acabamos de obtener se codifica diciendo que A es un ideal "esencial" de $Mult(A)$ según la siguiente definición.

Definición I.3.2. Un ideal I de un álgebra A es un *ideal esencial* si para cualquier ideal no nulo I' de A se verifica que $I \cap I' \neq \{0\}$.

Dado que para cualesquiera dos ideales I, I' de un álgebra A se tienen las inclusiones $(I \cap I')^2 \subseteq II' + I'I \subseteq I \cap I'$, se deduce que cuando A es semiprima son equivalentes $II' = \{0\}$, $I \cap I' = \{0\}$, e $I'I = \{0\}$. Este hecho permite reformular en ambiente semiprimo el concepto de ideal esencial en función del producto.

Damos ahora una muy utilizada caracterización de la semiprimidad de un álgebra asociativa.

Proposición I.3.3. (Caracterización de la semiprimidad de un álgebra asociativa). *Sea A un álgebra asociativa e I un ideal esencial de A. Entonces son equivalentes:*

(i) I es un álgebra semiprima.

(ii) A es un álgebra semiprima.

(iii) Si a es un elemento de A tal que $aIa = \{0\}$, entonces $a = 0$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Si P es un ideal de A tal que $P^2 = \{0\}$, entonces $P \cap I$ es un ideal de I de cuadrado cero, luego por la semiprimidad de I se tiene $P \cap I = \{0\}$, de donde se deduce que $P = \{0\}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea a en A tal que $aIa = \{0\}$. Si denotamos por (a) al ideal generado en A por el elemento a, tenemos que $((a) \cap I)^4 \subseteq (a)I(a) = \{0\}$, luego por la semiprimidad de A $(a) \cap I = \{0\}$, de donde se obtiene $(a) = \{0\}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sea Q un ideal de I tal que $Q^2 = \{0\}$. Entonces para todo a en Q se tiene que $aIa \subseteq Q^2 = \{0\}$, luego $a = 0$. ∎

Teniendo en cuenta que si A es un álgebra asociativa semiprima entonces A es un ideal esencial de $Mult(A)$, de la anterior caracterización se sigue el siguiente resultado.

Corolario I.3.4. *El álgebra de los multiplicadores de un álgebra asociativa semiprima es semiprima.*

La siguiente proposición muestra que $Mult(A)$ es la mayor álgebra asociativa que contiene a A como ideal esencial.

Proposición I.3.5. (Propiedad universal de $Mult(A)$). *Sea A un álgebra asociativa semiprima. $Mult(A)$ es, salvo isomorfismo, la única álgebra asociativa (semiprima unital) que verifica*

(i) Contiene a A como ideal, y

(ii) Para toda álgebra asociativa B que contiene a A como un ideal, existe un único homomorfismo de álgebras $\varphi : B \to Mult(A)$ que extiende la inclusión de A en $Mult(A)$.

Además, este homomorfismo es inyectivo si, y sólo si, A es un ideal esencial de B, hecho que permite ver a $Mult(A)$ como la más grande álgebra extensión de A que la contiene como ideal esencial.

Demostración. Como ya se ha probado anteriormente, $Mult(A)$ es un álgebra asociativa que contiene a A como un ideal. esto es, verifica *(i)*. Veamos que $Mult(A)$ verifica *(ii)*. Sea B un álgebra asociativa que contiene a A como ideal. Si φ es un homomorfismo de B en $Mult(A)$ que extiende la inclusión de A en $Mult(A)$, entonces para cualesquiera que sean b en B y a en A se tiene

$$\varphi(b)a = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba) = ba$$

y análogamente $a\varphi(b) = ab$, por lo que $\varphi(b) = (L_b^A, R_b^A)$, donde por L_b^A (resp. R_b^A) estamos denotando al operador en A determinado por la multiplicación por la izquierda (resp. derecha) por b. Este hecho establece la unicidad del homomorfismo φ, a la vez que nos indica cómo

hemos de proceder para abordar el problema de la existencia. En efecto, es rutinario comprobar que la aplicación $\varphi : B \to Mult(A)$ definida por $\varphi(b) = (L_b^A, R_b^A)$ es un homomorfismo que deja invariantes los elementos de A.

Ahora, para probar que estas condiciones caracterizan a $Mult(A)$ supongamos que C es un álgebra verificando dichas condiciones. Tenemos entonces dos homomorfismos $\varphi_1 : Mult(A) \to C$ y $\varphi_2 : C \to Mult(A)$ dejando fijos los elementos de A y por tanto $\varphi_2\varphi_1$ es un endomomorfismo de $Mult(A)$ cuya restricción a A es la identidad. Como quiera que la identidad en $Mult(A)$ es un endormorfismo de $Mult(A)$ que extiende la inclusión de A en $Mult(A)$, se tiene, en virtud de la unicidad, que $\varphi_2\varphi_1 = Id_{Mult(A)}$. Análogamente $\varphi_1\varphi_2 = Id_C$ y por tanto φ_1 es un isomorfismo entre $Mult(A)$ y C fijando los elementos de A.

Finalmente, sea B un álgebra asociativa conteniendo a A como un ideal y φ el único homomorfismo de B en $Mult(A)$ que fija los elementos de A. Para demostrar que φ es inyectivo si y sólo si A es un ideal esencial de B es suficiente probar que $ker(\varphi)$ es el mayor ideal de B con intersección nula con A. Es claro que $ker(\varphi)$ es un ideal de B y que por ser $\varphi_{|A} = Id_A$ se tiene $A \cap ker(\varphi) = \{0\}$. Sea I un ideal de B tal que $I \cap A = \{0\}$ y x un elemento de I. Entonces $\varphi(x).A = \varphi(xA) \subseteq \varphi(I \cap A) = \varphi(\{0\}) = \{0\}$, luego, por la Proposición $I.3.3$, $\varphi(x) = 0$ y por tanto $I \subseteq ker(\varphi)$. ∎

Recordemos los conceptos fundamentales de centro y centroide en un álgebra.

Definición I.3.6. Sea A un álgebra sobre $\mathbb{F}$. El *centro* $Z(A)$ de A es el conjunto de los elementos de A que conmutan y asocian con todos los elementos de A, esto es

$$Z(A) := \{z \in A : [z, a] = (z, a, b) = (a, z, b) = 0 \quad \forall a, b \in A\}.$$

$Z(A)$ es una subálgebra asociativa y conmutativa de A.

El *centroide* $\Gamma(A)$ de A es el conjunto de todas las aplicaciones lineales T de A en A tales que $T(ab) = T(a)b = aT(b)$ para cualesquiera que

sean a, b en A. $\Gamma(A)$ es una subálgebra unital del álgebra $L(A)$ y la aplicación $\alpha \mapsto \alpha Id_A$ es una inmersión del cuerpo base en $\Gamma(A)$. Cuando $\Gamma(A) = \mathbb{F}Id_A$ diremos que A es un álgebra *central*.

La aplicación $z \mapsto L_z$ es un homomorfismo de $Z(A)$ en $\Gamma(A)$ (el cual es inyectivo si A es semiprima y sobreyectivo si A tiene unidad).

Es frecuente encontrar en la literatura la definición del centroide de un álgebra asociativa semiprima como el centro del algebra de los multiplicadores, hecho este que está justificado por la siguiente proposición.

Proposición I.3.7. *Si A es un álgebra asociativa semiprima, entonces la aplicación $\phi : T \mapsto (T, T)$ de $\Gamma(A)$ en $Mult(A)$ es un homomorfismo inyectivo con imagen $Z(Mult(A))$.*

Demostración. Comenzamos notando que ϕ es claramente lineal e inyectiva. Ahora, si $T \in \Gamma(A)$ y $(\lambda, \rho) \in Mult(A)$ entonces para cualesquiera a, b en A se tiene

$$\begin{aligned}(T\lambda)(a)b &= T(\lambda(a))b &&= \lambda(a)T(b) &&= \lambda(aT(b)) \\ &= \lambda(T(a)b) &&= \lambda(T(a))b &&= (\lambda T)(a)b\,,\end{aligned}$$

de donde, por la semiprimidad de A, se obtiene que $T\lambda = \lambda T$, y dualmente $T\rho = \rho T$. De este hecho se deduce que ϕ es un homomorfismo de álgebras con imagen incluida en $Z(Mult(A))$. Finalmente, para todo elemento $m = (\lambda, \rho)$ en $Z(Mult(A))$ se tiene $\lambda(a) = ma = am = \rho(a)$ para todo a en A, y por consiguiente (λ, ρ) está en la imagen de ϕ. ∎

Sea A un álgebra asociativa semiprima. Puesto que todo ideal esencial I de A es un álgebra semiprima (Proposición $I.3.3$), se sigue de la propiedad universal del álgebra de los multiplicadores que A puede verse como una subálgebra del álgebra $Mult(I)$. Así, nos encontramos con la siguiente familia de extensiones algebraicas de A

$$\{Mult(I) \,:\, I \text{ ideal esencial de } A\}.$$

Pues bien, el álgebra de cocientes simétricos de A que vamos a construir a continuación se verá que es un universo común para todas las extensiones de la anterior familia.

Definición I.3.8. Sea A un álgebra asociativa semiprima. Un *doble centralizador esencialmente definido* (d.c.e.d.) en A es una terna (I, λ, ρ) donde I es un ideal esencial de A y λ y ρ son aplicaciones lineales de I en A verificando $\lambda(xa) = \lambda(x)a$, $x\lambda(y) = \rho(x)y$ y $\rho(ax) = a\rho(x)$ para cualesquiera x, y en I y a en A. Denotaremos por $DCED(A)$ al conjunto de todos los d.c.e.d. en A.

Bien que a partir de las reglas usuales para sumar, multiplicar por un escalar, y componer operadores parcialmente definidos en un espacio vectorial, se está invitado a considerar las correspondientes operaciones en el conjunto $DCED(A)$, hay que decir que estas no permiten dotar a $DCED(A)$ de una estructura algebraica mínimamente satisfactoria. Si embargo, se puede comprobar fácilmente que dichas operaciones son compatibles con la relación de equivalencia que vamos a definir a continuación y que pasadas a cociente determinan una estructura de álgebra. Como se verá enseguida, nosotros hemos preferido en esta exposición presentar estas operaciones en el ámbito cociente.

Definición I.3.9. Sea A un álgebra asociativa semiprima. Diremos que dos d.c.e.d. (I, λ, ρ) y (I', λ', ρ') son equivalentes, lo que se denotará por $(I, \lambda, \rho) \sim (I', \lambda', \rho')$, cuando se verifique que

$$\lambda_{|I\cap I'} = \lambda'_{|I\cap I'} \quad \text{y} \quad \rho_{|I\cap I'} = \rho'_{|I\cap I'} .$$

Es claro que esta relación binaria en $DCED(A)$ verifica las propiedades reflexiva y simétrica. El siguiente lema nos da una reformulación equivalente de dicha relación, de la cual se sigue fácilmente la transitividad.

Lema I.3.10. *Sea A un álgebra asociativa semiprima. Si (I, λ, ρ) es un d.c.e.d. en A tal que $\lambda_{|M} = 0$ o $\rho_{|M} = 0$ para algún ideal esencial M de A contenido en I, entonces $\lambda = \rho = 0$. Como consecuencia dos d.c.e.d. (I, λ, ρ) y (I', λ', ρ') son equivalentes si y sólo si $\lambda_{|M} = \lambda'_{|M}$ o $\rho_{|M} = \rho'_{|M}$ para algún ideal esencial M de A contenido en $I \cap I'$.*

Demostración. Si (I, λ, ρ) es un d.c.e.d. en A para el que existe un ideal esencial M de A contenido en I tal que $\lambda_{|M} = 0$, entonces para todo x en I tenemos que

$$\lambda(x)M\lambda(x) \subseteq \lambda(M)\lambda(x) = \{0\} \quad \text{y} \quad \rho(x)M\rho(x) \subseteq x\lambda(M)\rho(x) = \{0\},$$

luego, por la semiprimidad de A, $\lambda(x) = \rho(x) = 0$, y así $\lambda = \rho = 0$. Finalmente, para la obtención de la consecuencia aplíquese lo anterior al d.c.e.d. $(I \cap I', \lambda - \lambda', \rho - \rho')$. ∎

Estamos ya en condiciones de definir el álgebra de cocientes simétricos de Martindale de un álgebra asociativa semiprima.

Definición I.3.11. Sea A un álgebra asociativa semiprima. El conjunto cociente $Q_s(A) := DCED(A)/\sim$ con las leyes definidas por

$$\begin{aligned} [(I,\lambda,\rho)] + [(I',\lambda',\rho')] &:= [(I \cap I', \lambda + \lambda', \rho + \rho')], \\ \alpha[(I,\lambda,\rho)] &:= [(I, \alpha\lambda, \alpha\rho)], \quad (\alpha \textit{ un escalar}) \\ [(I,\lambda,\rho)]\,[(I',\lambda',\rho')] &:= [(I'I, \lambda\lambda', \rho'\rho)], \end{aligned}$$

es un álgebra asociativa con unidad la clase $[(A, Id_A, Id_A)]$ y que contiene a A como una subálgebra vía la aplicación $a \to [(A, L_a, R_a)]$. Al álgebra $Q_s(A)$ se le llama el *álgebra de cocientes simétricos de Martindale del álgebra A.*

Proposición I.3.12. (Propiedad universal de $Q_s(A)$). *Sea A un álgebra asociativa semiprima. $Q_s(A)$ es, salvo isomorfismo, la más grande álgebra asociativa (con unidad) Q que extiende a A y verifica*

(i) Para todo q en Q existe un ideal esencial I de A tal que $qI + Iq \subseteq A$, y

(ii) Si q es un elemento de Q tal que para un ideal esencial I' de A se tiene $qI' = \{0\}$, entonces $q = 0$.

Demostración. Comenzamos probando que $Q_s(A)$ satisface las propiedades *(i)* y *(ii)*.

(i). Sea q en $Q_s(A)$ y sea (I, λ, ρ) en q. Para cualquier x en I

$$\begin{aligned} qx &= [(I,\lambda,\rho)][(A, L_x, R_x)] &&= [(AI, \lambda L_x, R_x\rho)] \\ &= [(AI, L_{\lambda(x)}, R_{\lambda(x)})] &&= \lambda(x)\,, \end{aligned}$$

y análogamente $xq = \rho(x)$, así que $qI \subseteq A$ y $Iq \subseteq A$.

(ii). Sean $q = [(I, \lambda, \rho)]$ e I' un ideal esencial de A tales que $qI' = \{0\}$. Entonces $I \cap I'$ es un ideal esencial de A contenido en I tal que $\lambda(I \cap I') = q(I \cap I') = \{0\}$, luego por el lema $I.3.10$ $\lambda = \rho = 0$, y por tanto $q = 0$.

Ahora veamos que para cada álgebra asociativa Q conteniendo a A como subálgebra y verificando *(i)* y *(ii)* existe un único homomorfismo inyectivo de Q en $Q_s(A)$ extendiendo Id_A. Para cada q en Q, por *(i)*, existe un ideal esencial I_q de A tal que $qI_q + I_q q \subseteq A$ y por consiguiente podemos considerar las aplicaciones $\lambda_q, \rho_q : I_q \to A$ definidas por $\lambda_q(x) := qx$ y $\rho_q(x) := xq$. Claramente (I_q, λ_q, ρ_q) es un d.c.e.d. en A y $\varphi : q \mapsto [(I_q, \lambda_q, \rho_q)]$ es un homomorfismo de Q en $Q_s(A)$ que extiende Id_A y que es inyectivo en virtud de *(ii)*. Además, si $\psi : Q \to Q_s(A)$ es un homomorfismo de álgebras que extiende Id_A, entonces para cada q en Q y para todo x en I_q se tiene que

$$(\varphi(q) - \psi(q))x = \varphi(q)x - \psi(q)x = \varphi(qx) - \psi(qx) = qx - qx = 0,$$

luego por la propiedad *(ii)*, $\varphi(q) = \psi(q)$ y así $\varphi = \psi$. En particular, $Id_{Q_s(A)}$ es el único endomorfismo de $Q_s(A)$ que extiende Id_A.

Finalmente, para probar la unicidad de $Q_s(A)$ supongamos que C es un álgebra extensión maximal de A verificando *(i)* y *(ii)*. Tenemos entonces dos homomorfismos $\varphi_1 : Q_s(A) \to C$ y $\varphi_2 : C \to Q_s(A)$ dejando fijos los elementos de A y por tanto $\varphi_2\varphi_1$ es un endomomorfismo de $Q_s(A)$ cuya restricción a A es la identidad, luego $\varphi_2\varphi_1 = Id_{Q_s(A)}$. Análogamente $\varphi_1\varphi_2 = Id_C$ y por tanto φ_1 es un isomorfismo entre $Q_s(A)$ y C fijando los elementos de A. ∎

Corolario I.3.13. *Sea A un álgebra asociativa semiprima. Si M es un ideal esencial de A y q es un elemento de $Q_s(A)$ tal que $qMq = 0$, entonces $q = 0$. Como consecuencia, $Q_s(A)$ es semiprima.*

Demostración. Sea I un ideal esencial de A tal que $qI + Iq \subseteq A$. Así, para todo x en I se tiene que $(qx)M(qx) = q(xM)qx = 0$, luego $qx = 0$ (por la actuación semiprima de A sobre sus ideales esenciales), esto es, $qI = \{0\}$ y por tanto $q = 0$. ∎

Comprobemos ahora que $Q_s(A)$ es un universo común para todas las álgebras de multiplicadores $Mult(I)$ con I un ideal esencial de A. Por un lado, como $Mult(I)$ es un álgebra asociativa extensión de A que verifica las propiedades *(i)* y *(ii)* de la propiedad universal de $Q_s(A)$ podemos ver $Mult(I) \subseteq Q_s(A)$. Pero como además I es un ideal de $Mult(I)$ entonces

$$Mult(I) \subseteq \{q \in Q_s(A) : qI + Iq \subseteq I\}.$$

Por otro lado $\{q \in Q_s(A) : qI + Iq \subseteq I\}$ es una subálgebra de $Q_s(A)$ conteniendo a I como ideal esencial (úsese la Proposición I.3.12 *(ii)*) por lo que por la Propiedad universal de $Mult(I)$ obtenemos que

$$Mult(I) \supseteq \{q \in Q_s(A) : qI + Iq \subseteq I\}.$$

En resumen, podemos identificar $Mult(I)$ como el "idealizador" de I en $Q_s(A)$, o sea

$$Mult(I) = \{q \in Q_s(A) : qI + Iq \subseteq I\}.$$

Es usual definir el *centroide extendido* de un álgebra asociativa semiprima como el centro de su álgebra de cocientes simétricos. El concepto de centroide extendido fue introducido por W. S. Martindale [73] en el caso de álgebras asociativas primas y posteriormente fue generalizado para álgebras primas y semiprimas no necesariamente asociativas ([32] y [16] respectivamente). Son referencias obligadas para el estudio del centroide extendido para álgebras normadas [13], [25], [30], [75], [98] y para tener una visión global del mismo [94].

Aunque por ganar en generalidad hemos hecho el desarrollo de $Mult(A)$ y $Q_s(A)$ para un álgebra asociativa semiprima A, nuestro interés se centra en los casos particulares en los que el álgebra A es prima o $*$-prima. Pasamos ahora a exponer brevemente las perfecciones adicionales en estos dos ambientes más ricos.

Definición I.3.14. Un álgebra A es *prima* si para cualesquiera dos ideales I, I' de A tales que $II' = \{0\}$ se verifica que $I = \{0\}$ o $I' = \{0\}$.

Es claro que todo ideal no nulo de un álgebra prima es esencial. El resultado análogo al de la Proposición $I.3.3$ en ambiente primo se enuncia a continuación y no damos su demostración pues básicamente es la misma.

Proposición I.3.15. (Caracterización de la primidad de un álgebra asociativa). *Sea A un álgebra asociativa e I un ideal esencial de A. Entonces son equivalentes:*

(i) I es un álgebra prima.

(ii) A es un álgebra prima.

(iii) Para cualesquiera a, b en A tales que $aIb = \{0\}$ se tiene $a = 0$ o $b = 0$.

Corolario I.3.16. *El álgebra de los multiplicadores de un álgebra asociativa prima es prima.*

Este resultado también se deduce de la siguiente proposición.

Proposición I.3.17. *Sea A un álgebra asociativa prima. Si M es un ideal no nulo de A y q_1, q_2 son elementos de $Q_s(A)$ tales que $q_1 M q_2 = 0$ entonces, $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$. Como consecuencia, el álgebra de cocientes simétricos de Martindale de un álgebra asociativa prima es prima.*

Demostración. Sea I un ideal no nulo de A tal que $q_1I + Iq_1 \subseteq A$ y $q_2I + Iq_2 \subseteq A$. Entonces, para cualesquiera x, y en I se verifica que $(q_1x)M(q_2y) = q_1(xM)q_2y = \{0\}$ y por la Proposición I.3.15 se tiene que $q_1I = \{0\}$ o $q_2I = \{0\}$, luego $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$. ∎

Comentaremos ahora el hecho de que las involuciones de toda álgebra asociativa semiprima se extienden (de forma única) a su álgebra de multiplicadores y a su álgebra de cocientes simétricos de Martindale. Si bien es usual en Análisis trabajar con involuciones conjugado-lineales en un álgebra compleja, en este trabajo únicamente aparecerán involuciones lineales, por lo que nos vamos a centrar en estas únicamente.

Definición I.3.18. Una *involución (lineal de álgebra)* en un álgebra A es una aplicación lineal $*$ de A en A de cuadrado la identidad verificando $(ab)^* = b^*a^*$ para cualesquiera a, b en A.

Si A es un álgebra asociativa semiprima con una involucion $*$, entonces dicha involución se extiende (de manera única) a $Mult(A)$ y a $Q_s(A)$. Dichas extensiones, por abuso de notación, se siguen denotando $*$ y vienen determinadas respectivamente por

$$(\lambda, \rho)^* := (\rho^*, \lambda^*) \quad y \quad [(I, \lambda, \rho)]^* := [(I^*, \rho^*, \lambda^*)],$$

donde λ^* y ρ^* son las aplicaciones definidas por $\lambda^*(a) := (\lambda(a^*))^*$ y $\rho^*(a) := (\rho(a^*))^*$.

Por último estudiamos el caso en el que el álgebra A es $*$-prima. Comenzamos dando su definición y observando a continuación que toda álgebra $*$-prima es semiprima.

Definición I.3.19. Sea $(A, *)$ un álgebra con una involución $*$. Un *$*$-ideal* I de A es un ideal de A tal que $I^* = I$. Decimos que $(A, *)$ es *$*$-prima* si para cualesquiera dos $*$-ideales I, I' de A tales que $II' = \{0\}$ se verifica que $I = \{0\}$ o $I' = \{0\}$.

Sea A un álgebra $*$-prima. Si I es un ideal de A tal que $I^2 = \{0\}$, entonces $I \cap I^*$ es un $*$-ideal de cuadrado nulo, luego $I \cap I^* = \{0\}$, y asímismo $I + I^*$ es un $*$-ideal de A tal que

$$(I + I^*)^2 \subseteq I^2 + (I^2)^* + (I \cap I^*) = \{0\},$$

luego también $I + I^* = \{0\}$ y en consecuencia $I = \{0\}$. Así pues, A es semiprima.

La caracterización de las álgebras asociativas $*$-primas, análoga a las dadas para álgebras semiprimas y primas, es la siguiente.

Proposición I.3.20 . (Caracterización de la $*$-primidad de un álgebra asociativa.) *Sea $(A, *)$ un álgebra asociativa con una involución $*$ e I un $*$-ideal esencial de A. Entonces son equivalentes:*

(i) I es un álgebra $*$-prima.

(ii) A es un álgebra $*$-prima.

(iii) Para cualesquiera a, b en A tales que $aIb = aIb^* = \{0\}$ se tiene $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración. La demostración de $(i) \Rightarrow (ii)$ y $(iii) \Rightarrow (i)$ es análoga a la de los casos semiprimo y primo.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que A es $*$-prima y por tanto semiprima. Si $aIb + aIb^* = \{0\}$ entonces $(a)(IbI + Ib^*I) = \{0\}$. De aquí se sigue que el ideal $(IbI + Ib^*I)(a)$ de A tiene cuadrado cero, luego por ser A semiprima $(IbI + Ib^*I)(a) = \{0\}$. Así, $(a) + (a^*)$ y $IbI + Ib^*I$ son dos $*$-ideales de A de producto cero, luego por ser A $*$-prima se tiene que $(a) + (a^*) = \{0\}$ o $(IbI + Ib^*I) = \{0\}$. En el primer caso $a = 0$ y en el segundo de $(bIb)I(bIb) \subseteq IbI = \{0\}$, se sigue por la caracterización de la semiprimidad, que $bIb = \{0\}$ y de ahí, $b = 0$. ∎

Corolario I.3.21 . *Sea A un álgebra asociativa $*$-prima. Si M es un $*$-ideal esencial de A y q_1, q_2 son elementos de $Q_s(A)$ tales que $q_1 M q_2 = q_1 M q_2{}^* = \{0\}$, entonces $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$. Como consecuencia, $Mult(A)$ y $Q_s(A)$ son $*$-primas.*

Demostración. Sea I un $*$-ideal esencial de A tal que $q_1I + Iq_1 \subseteq A$ y $q_2I + Iq_2 \subseteq A$. Entonces, para cualesquiera x, y en I se verifica que $(q_1x)M(q_2y) = q_1(xM)q_2y = \{0\}$ y $(q_1x)M(q_2y)^* = q_1(xMy^*)q_2^* = \{0\}$. Así, por la Proposición anterior se tiene que $q_1I = \{0\}$ o $q_2I = \{0\}$, luego $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$. ∎

Aunque para la construcción del álgebra de cocientes simétricos de Martindale de un álgebra asociativa A se ha supuesto que A es semiprima y se ha considerado el conjunto de todos los ideales esenciales para definir los d.c.e.d., puede hacerse una construcción más general como puede verse en [80] y que esbozamos a continuación someramente.

Definición I.3.22. En un álgebra A se define el *anulador* de un subconjunto S de A como $An_A(S) := \{a \in A : aS = Sa = 0\}$. Es inmediato comprobar que en un álgebra asociativa el anulador de un ideal es un ideal.

Definición I.3.23. Sea A un álgebra asociativa. Un *filtro de denominadores* $\mathcal{F}$ en A es una familia no vacía de ideales de A verificando las dos siguientes propiedades:

(1) Si I está en $\mathcal{F}$ entonces $An_A(I) = \{0\}$.

(2) Para cada dos ideales I_1, I_2 en $\mathcal{F}$ existe un ideal $I_1\#I_2$ en $\mathcal{F}$ tal que $I_1\#I_2 \subseteq I_1I_2$.

Obsérvese que los ideales de un filtro de denominadores en un álgebra asociativa son esenciales. En un álgebra asociativa semiprima A los principales ejemplos de filtros de denominadores son el filtro de todos los ideales esenciales con $I_1\#I_2 = I_1I_2$ y si A tiene una involución $*$, el filtro de todos los $*$-ideales esenciales con $I_1\#I_2 = I_1I_2 \cap I_2I_1$.

Dada un álgebra asociativa A y un filtro de denominadores $\mathcal{F}$ en A, se construye (véase [80]; pag. 164) el álgebra de cocientes simétricos de Martindale de A respecto a $\mathcal{F}$ que denotaremos por $Q_s(A, \mathcal{F})$.

Decimos que $\mathcal{F}_1$ es un filtro de denominadores *más fino* que $\mathcal{F}_2$, lo que notamos $\mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2$, si para cada ideal I_2 en $\mathcal{F}_2$ existe un ideal I_1 en $\mathcal{F}_1$ tal que $I_1 \subseteq I_2$. Dos filtros de denominadores $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son *cofinales*, lo que notamos $\mathcal{F}_1 <> \mathcal{F}_2$, si cada uno es más fino que el otro, $\mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_2$. Se demuestra que si $\mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2$ entonces $Q_s(A, \mathcal{F}_1) \supseteq Q_s(A, \mathcal{F}_2)$. Como consecuencia, dos filtros cofinales dan lugar a la misma álgebra de cocientes simétricos de Martindale. Por ejemplo, en un álgebra asociativa $*$-prima el filtro de todos los $*$-ideales no nulos y el filtro de todos los ideales esenciales son cofinales (pues todo $*$-ideal no nulo es esencial e inversamente si I es un ideal esencial entonces $I \cap I^*$ es un $*$-ideal no nulo contenido en I), luego ambos dan lugar a la misma álgebra de cocientes simétricos de Martindale. Por ello si A es un álgebra asociativa $*$-prima es usual trabajar con el filtro de los $*$-ideales no nulos.

I.4 Teorema de Whelan. Versión desespacializada de la extensión del Teorema de Rickart.

Una vez presentada el álgebra de cocientes simétricos de Martindale de un álgebra asociativa semiprima, el objetivo de esta sección es obtener una reformulación desespacializada del Teorema I.2.2. Este resultado se cimenta en un teorema algebraico debido a E. A. Whelan y en la versión normada que del mismo obtenemos.

Al igual que la semiprimidad, primidad o $*$-primidad de un álgebra asociativa se transmitía a su álgebra de cocientes simétricos, el teorema de Whelan afirma que también la primitividad se transmite, más concretamente, toda representación fiel e irreducible de un álgebra asociativa se extiende a su álgebra de cocientes simétricos. Por complitud nosotros damos una demostración de este resultado en nuestro ambiente.

Hemos de ver previamente que toda álgebra asociativa primitiva es prima y por tanto podemos construir su álgebra de cocientes simétricos de Martindale.

Proposición I.4.1. *Toda álgebra asociativa primitiva es prima.*

Demostración. Sea A un álgebra asociativa primitiva. Sea X un espacio vectorial tal que A puede verse como una subálgebra de $L(X)$ actuando irreduciblemente. Sean F, G en A tales que $FAG = \{0\}$. Si $G \neq 0$ entonces existe un elemento no nulo u en X tal que $G(u) \neq 0$, de donde $AG(u) = X$ y así $F(X) = F(AG(u)) = FAG(u) = \{0\}$, o sea $F = 0$. ∎

Teorema I.4.2 . ([105]; Theorem 3.1). *Sea A un álgebra asociativa primitiva. Entonces toda representación fiel e irreducible de A en un espacio vectorial se extiende de manera única a una representación fiel (e irreducible) de $Q_s(A)$.*

Demostración. Sea X un espacio vectorial en el que A se ve como una subálgebra de $L(X)$ actuando irreduciblemente y fijemos un vector no nulo u del espacio vectorial X. Supongamos que φ es una representación de $Q_s(A)$ en X extendiendo la inmersión de A en $L(X)$. Dado q en $Q_s(A)$ y fijado un ideal no nulo I de A tal que $qI + Iq \subseteq A$, entonces para x en X y F en I con $F(u) = x$ se tiene

$$\varphi(q)(x) = \varphi(q)(F(u)) = (\varphi(q)F)(u) = \varphi(qF)(u) = (qF)(u)$$

lo que demuestra que φ está determinada de forma única. La anterior expresión nos sugiere la forma que ha de tener la representación de $Q_s(A)$ en $L(X)$ que extiende la inclusión de A, caso de que exista.

Sean q en $Q_s(A)$ y x en X. Dados I, I' dos ideales no nulos de A tal que $qI + Iq \subseteq A, qI' + I'q \subseteq A$ y $F \in I, F' \in I'$ con $F(u) = F'(u) = x$, entonces para todo G en $I \cap I'$ se tiene

$$G[(qF)(u) - (qF')(u)] = (Gq)F(u) - (Gq)F'(u) = 0,$$

de donde $(I \cap I')[(qF)(u) - (qF')(u)] = 0$ y por la actuación irreducible del ideal no nulo $I \cap I'$ se tiene que $(qF)(u) = (qF')(u)$. Esto nos permite definir la función $\varphi : Q_s(A) \to L(X)$ dada por $\varphi(q)(x) = (qF)(u)$, donde F está en un ideal no nulo I de A tal que $qI + Iq \subseteq A$ y $F(u) = x$.

Probemos ahora que φ es un homomorfismo de álgebras. Es claro que $\varphi(\lambda q) = \lambda\varphi(q)$. Sean ahora q_1, q_2 en $Q_s(A)$, I_1, I_2 ideales no nulos de A tales que $q_iI_i + I_iq_i \subseteq A$ $(i = 1,2)$, x en X y F en I_2I_1 tal que $F(u) = x$, entonces

$$\varphi(q_1 + q_2)(x) = ((q_1 + q_2)F)(u) = (q_1F)(u) + (q_2F)(u) = [\varphi(q_1) + \varphi(q_2)](x)$$

y

$$\varphi(q_1q_2)(x) = ((q_1q_2)F)(u) = (q_1(q_2F))(u) = \varphi(q_1)((q_2F)(u)) = \varphi(q_1)\varphi(q_2)(x).$$

Es claro que este homomorfismo extiende la inclusion de A en $L(X)$. Finalmente probemos que φ es inyectiva. Si q es un elemento de $Q_s(A)$ tal que $\varphi(q) = 0$, entonces fijado un ideal no nulo I de A tal que $qI + Iq \subseteq A$ y para todo F en I se tiene $(qF)(u) = 0$. Usando que $X = A(u)$ se tiene que $(qI)(X) = \{0\}$, esto es, $qI = \{0\}$ y por tanto $q = 0$. ∎

El siguiente resultado es la versión normada del anterior teorema, a saber, si A puede verse como un álgebra irreducible de operadores lineales y continuos en un espacio de Banach entonces $Q_s(A)$ también.

Teorema I.4.3. *Sea A un álgebra asociativa real (compleja) primitiva. Entonces toda representación fiel e irreducible φ de A en un espacio de Banach X real (complejo) tal que $\varphi(A) \subseteq BL(X)$ se extiende de manera única a una representación fiel de $Q_s(A)$ en X con imagen contenida en $BL(X)$.*

Demostración. Sea $(X, |.|)$ un espacio de Banach y veamos A como una subálgebra de $BL(X)$. Por el teorema anterior la inclusión de A en $L(X)$ se extiende de manera única a una inclusión de $Q_s(A)$ en $L(X)$. Probemos que todo elemento F en $Q_s(A)$ es un operador $|.|$-continuo en X haciendo uso del Teorema de la Gráfica Cerrada. Sea $\{x_n\}$ una sucesión nula de X tal que $\{F(x_n)\} \to x$. Sea I un ideal no nulo de A tal que $FI + IF \subseteq A$. Entonces para todo G en I se tiene que $\{(GF)(x_n)\} = \{G(F(x_n))\}$ converge simultáneamente a 0 y a $G(x)$ pues GF y G están en A y por tanto son operadores continuos. Así $G(x) = 0$

para todo G en I, de donde por la actuación irreducible de I se sigue que $x = 0$. ∎

Podemos ya enunciar y demostrar la versión desespacializada del Teorema $I.2.2$.

Teorema I.4.4. *Sea $(J, \|.\|)$ un álgebra de Jordan-Banach y supongamos que existe un álgebra asociativa primitiva A tal que J es subálgebra Jordan de $Q_s(A)$ conteniendo a A como ideal. Entonces existe un espacio de Banach $(X, |.|)$ tal que $Q_s(A)$ puede verse como una subálgebra de $BL(X)$, A actúa irreduciblemente en X y la aplicación inclusión $(J, \|.\|) \hookrightarrow (BL(X), |.|)$ es continua.*

Demostración. Por ser A primitiva existe un espacio vectorial X en el que A se representa fiel e irreduciblemente, representación que se extiende a $Q_s(A)$ por el resultado de Whelan probado en el Teorema $I.4.2$. Entonces estamos en las condiciones para poder aplicar el Teorema $I.2.2$ y por tanto existe una norma completa $|.|$ en X tal que J es una subálgebra de Jordan del álgebra $BL(X)$ y la aplicación inclusión $(J, \|.\|) \hookrightarrow (BL(X), |.|)$ es continua. Además, por el teorema anterior, $Q_s(A)$ se ve como una subálgebra de $BL(X)$. ∎

Finalmente, a partir de este último Teorema podemos demostrar el Teorema $I.2.2$, siendo por tanto cada uno de ellos reformulación del otro. Para ello hemos de ver que, si J es un álgebra de Jordan y existe un espacio vectorial X tal que J es una subálgebra de Jordan de $L(X)$ conteniendo como ideal a una subálgebra (asociativa) A de $L(X)$ que actua irreduciblemente en X entonces, J es una subálgebra Jordan de $Q_s(A)$. Ello se deduce de la siguiente proposición pues claramente $L(X)$ "actúa primamente" sobre A.

Proposición I.4.5. *Sean B un álgebra asociativa prima y A una subálgebra de B sobre la que B actúa primamente, esto es, para cualesquiera b_1, b_2 en B tales que $b_1 A b_2 = \{0\}$ se tiene que $b_1 = 0$ o $b_2 = 0$. Si J es una subálgebra de Jordan de B que contiene a A como un ideal, y R denota*

la subálgebra de B generada por J, entonces la inclusión de A en $Q_s(A)$ se extiende de forma única a un monomorfismo de R en $Q_s(A)$.

Demostración. Puesto que todo elemento de R es combinación lineal de productos de elementos de J, por la Proposición $I.2.4$, para todo r en R existe un ideal no nulo I de A (de hecho una conveniente potencia de A) tal que $rI + Ir \subseteq A$. Además si r es un elemento de R e I un ideal esencial de A tal que $rI = \{0\}$ entonces $r = 0$. En efecto, tomando $x \in I \setminus \{0\}$ se tiene $rAx \subseteq rAI \subseteq rI = \{0\}$ y por la actuación prima de B en A se sigue que $r = 0$. Así R es un álgebra asociativa extensión de A verificando las dos propiedades caracterícticas de $Q_s(A)$, luego la inclusión de A en $Q_s(A)$ se extiende de forma única a R. ∎

I.5 Escenario de la extensión del Teorema de Rickart.

En este capítulo hemos establecido dos versiones de una extensión Jordan del teorema clásico de Rickart. El principal cometido de esta sección es presentar el marco "zelmanoviano" en el que se sitúa dicho teorema y plantear el esquema de un teorema "zelmanoviano" de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach "primitivas". Avanzaremos en esta clasificación algunos pasos y determinaremos qué queda por realizar en los posteriores capítulos.

En realidad el álgebra de Jordan que se involucra en el Teorema $I.2.2$ es sólo uno de los tipos de álgebras de Jordan primitivas. Las álgebras de Jordan primitivas fueron introducidas por E. I. Zel'manov en [106] y ampliamente estudiadas por L. Hogben y K. McCrimmon en [44]. Un teorema de clasificación de las álgebras de Jordan primitivas fue anunciado por Skosyrskii en *Materials of the Soviet algebraic conference* en L'vov (1987) y probado independientemente por A. Anquela, F. Montaner y T. Cortés [12] y por V. G. Skosyrskii [102].

Comenzamos esta sección dando la definición de álgebra de Jordan primitiva y presentando los prototipos de las mismas.

Definición I.5.1. Un álgebra de Jordan J es *primitiva* si contiene un ideal interno modular maximal I con corazón nulo. En tal caso decimos que I es un *primitivizador* para J.

El lector, a la vista de nuestro Teorema $I.2.2$, podría pensar que toda álgebra de Jordan primitiva puede verse como subálgebra de Jordan de conveniente álgebra asociativa primitiva. Despues de la siguiente definición veremos que ello no es así.

Definición I.5.2. Un álgebra de Jordan J se llama *especial* si existe un monomorfismo de J en el álgebra simetrizada de un álgebra asociativa. Las álgebras de Jordan que no son especiales se llaman *excepcionales*.

Nuestro primera gama de álgebras de Jordan primitivas consta precisamente de álgebras de Jordan excepcionales. Estos ejemplos vienen parametrizados en función de un álgebra de Cayley-Dickson (un álgebra de composición de dimensión ocho). En el Apéndice 1 el lector puede encontrar un resumen sobre las álgebras de composición.

Ejemplo 1. Sea C un álgebra de Cayley-Dickson sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, y consideremos el álgebra de las matrices 3×3 con elementos en C

$$M_3(C) := \{X = (x_{ij}) : \ x_{ij} \in C, \ i,j = 1,2,3\}.$$

Dados $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ escalares no nulos, la matriz diagonal

$$\Gamma = diag\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

determina una involución en $M_3(C)$ dada por la aplicación $X \mapsto X^* := \Gamma^{-1}\overline{X}^t\Gamma$, donde $\overline{X}^t := (\overline{x_{ji}})$ si $X = (x_{ij})$ y $x \mapsto \overline{x}$ es la involución

cayleyana en C. El conjunto $H_3(C,\Gamma) := H(M_3(C),*)$ de todas las matrices hermitianas bajo esa involución con el producto simetrizado del producto usual de matrices es un álgebra de Jordan excepcional 27-dimensional ([110], Theorems 3.1 y 3.2).

Teniendo en cuenta que en C se tiene que $x = \overline{x}$ si, y sólo si, $x \in \mathbb{F}\mathbf{1}$, se ve que los elementos de $H_3(C,\Gamma)$ son las matrices 3×3 de la forma

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_3 & \gamma_1^{-1}\gamma_3\overline{c_2} \\ \gamma_2^{-1}\gamma_1\overline{c_3} & \alpha_2 & c_1 \\ c_2 & \gamma_3^{-1}\gamma_2\overline{c_1} & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ están en el cuerpo $\mathbb{F}$ y c_1, c_2, c_3 están en el álgebra de Cayley-Dickson C sobre $\mathbb{F}$.

$H_3(C,\Gamma)$ es un álgebra central simple sobre $\mathbb{F}$ con unidad, luego primitiva.

Albert demostró en [3] y [4] que toda álgebra de Jordan simple excepcional finito-dimensional tiene una extensión escalar isomorfa a $H_3(C) := H_3(C,I)$ donde I es la matriz identidad. Así, el estudio de las álgebras de Jordan excepcionales se reduce en gran medida al estudio de las álgebras $H_3(C)$.

Las tres restantes gamas de ejemplos de álgebras de Jordan primitivas sí son especiales. Presentamos a continuación la segunda gama.

Ejemplo 2. Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con una forma bilineal simétrica $f : X \times X \to \mathbb{F}$. El espacio vectorial suma directa $\mathbb{F}\mathbf{1} \oplus X$ con el producto dado por

$$(\alpha\mathbf{1} + x).(\beta\mathbf{1} + y) := (\alpha\beta + f(x,y))\mathbf{1} + (\alpha y + \beta x)$$

es un álgebra de Jordan unital que denotaremos por $J(X,f)$ y a la que llamaremos el *álgebra de Jordan asociada a la forma bilineal simétrica f sobre X*. $J(X,f)$ es un álgebra de Jordan especial como se verá en detalle en el capítulo V.§2. Asimismo, es un álgebra cuadrática, esto es, tiene unidad y todo elemento $a = \alpha\mathbf{1} + x$ satisface el siguiente polinomio genérico de grado dos

$$a^2 - t(a)a + n(a)\mathbf{1} = 0,$$

donde $t(a) = 2\alpha$ y $n(a) = \alpha^2 - f(x,x)$. Si $dim(X) \geq 2$ y la forma bilineal f es no-degenerada entonces $J(X,f)$ es un álgebra de Jordan central simple sobre $\mathbb{F}$ ([19]; Satz VII.3.5), luego primitiva.

La tercera gama de ejemplos de álgebras de Jordan primitivas está constituida por las álgebras de Jordan involucradas en el teorema principal del capítulo, el Teorema *I*.2.2.

Ejemplo 3. Sea J un álgebra de Jordan tal que existe un álgebra asociativa primitiva A de tal forma que J es subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ y contiene a A como ideal. Entonces J es un álgebra de Jordan primitiva.

Este resultado se sigue de los dos siguientes hechos: Si A es un álgebra asociativa primitiva entonces A^+ es un álgebra de Jordan primitiva ([44]; Example 5.6) y si un álgebra de Jordan prima J contiene un ideal no nulo que es primitivo, entonces J es primitiva ([12]; Theorem 1.5).

Para dar el cuarto ejemplo presentamos ahora un importante ejemplo de álgebra de Jordan especial. Sea A un álgebra asociativa y $*$ una involución en A. Entonces el conjunto $H(A,*) := \{a \in A : a = a^*\}$ es una subálgebra de Jordan de A.

Ejemplo 4. Sea J un álgebra de Jordan tal que existe un álgebra asociativa primitiva con involución, $(A,*)$, de tal forma que J es subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y contiene a $H(A,*)$ como ideal. Entonces J es un álgebra de Jordan primitiva.

En efecto, en estas hipótesis $H(A,*)$ es un álgebra de Jordan primitiva ([12]; Theorem 2.3) y entonces J también es primitiva por contener como ideal a $H(A,*)$.

Vistas estas cuatro gamas de ejemplos, podemos decir que, salvo extensión escalar del cuerpo base, no hay más álgebras de Jordan primitivas, que las presentadas anteriormente. Este es el contenido del recentísimo teorema zelmanoviano probado independientemente por A. Anquela, F. Montaner y T. Cortés [12] y por V. Skosyrskii [102], el cual enunciamos a continuación.

Teorema I.5.3. *Las álgebras de Jordan primitivas sobre un cuerpo* $\mathbb{F}$ *son las siguientes:*

(i) Las álgebras de Jordan centrales simples excepcionales 27-dimensionales sobre un cuerpo Ω *extensión de* $\mathbb{F}$.

(ii) Las álgebras de Jordan especiales simples $J(X,f)$ *asociadas a una forma bilineal simétrica no-degenerada en un espacio vectorial* X *sobre un cuerpo* Ω *extensión de* $\mathbb{F}$ *con* $dim_{\Omega}(X) \geq 2$.

(iii) Las álgebras de Jordan J *para las cuales existe un álgebra asociativa primitiva* A *sobre* $\mathbb{F}$ *de tal forma que* J *es subálgebra de Jordan del álgebra de cocientes simétricos de Martindale de* A, $Q_s(A)$, *y que contiene a* A *como ideal. Abreviadamente,*

$$A^+ \lhd J \subseteq Q_s(A)^+.$$

(iv) Las álgebras de Jordan J *para las cuales existe un álgebra asociativa primitiva sobre* $\mathbb{F}$ *con involución,* $(A,*)$, *de tal forma que* J *es subálgebra de Jordan de* $Q_s(A)$ *contenida en* $H(Q_s(A),*)$ *y que contiene a* $H(A,*)$ *como ideal. Abreviadamente,*

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*).$$

El principal objetivo de este trabajo es obtener un teorema de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas reales o complejas.

Estudiemos en primer lugar las álgebras de Jordan-Banach J que son álgebras simples excepcionales 27-dimensionales sobre un cuerpo Ω extensión de $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ó $\mathbf{C}$). Es bien conocido ([49]; pag. 290-293, [99]; pag. 14-17) que si A es un álgebra simple sobre Ω entonces $\Gamma(A)$ es un cuerpo extensión de Ω, mientras que $Z(A)$ o bien se reduce a cero o bien es un cuerpo isomorfo a $\Gamma(A)$ (en tal caso A tiene unidad). Por ser J un álgebra simple con unidad, Ω es un subcuerpo de $\Gamma(J) = Z(J)$, y entonces, como consecuencia del Teorema de Gelfand-Mazur, o bien $\Omega = \mathbb{R}$ o bien $\Omega = \mathbf{C}$.

Un bien conocido resultado de A. Albert y N. Jacobson ([52]; Theorem 1, chapter 9) establece que el álgebra de Cayley-Dickson C que coordinatiza al álgebra de Jordan simple excepcional $H_3(C,\Gamma)$ está determinada de forma única salvo isomorfismo.

Como es bien conocido y puede verse en el Apendice 1 de este trabajo, sólo existen dos álgebras de Cayley-Dickson reales: una "split" $C(\mathbb{R})$ y otra no "split" $\mathbb{O}$ (los octoniones reales de división). Y sobre $\mathbb{C}$ sólo existe una única álgebra de Cayley-Dickson $C(\mathbb{C})$ la cual es "split". Como es usual diremos que el álgebra de Jordan $H(C,\Gamma)$ es "split" cuando lo sea C. A. Albert y N. Jacobson clasifican en [6] las álgebras $H(C,\Gamma)$ en funcion de C y Γ, obteniendo los siguientes teoremas.

Teorema I.5.4. ([6]; Theorem 4). *Cualesquiera dos álgebras de Jordan simples excepcionales "split" sobre el mismo cuerpo son isomorfas.*

Teorema I.5.5. ([6]; Theorem 10). *Salvo isomorfismo, sólo hay tres álgebras de Jordan reales centrales simples excepcionales: el álgebra split $H_3(C(\mathbb{R}))$ y las álgebras $H_3(\mathbb{O})$ y $H_3(\mathbb{O}, diag\{1,-1,1\})$.*

Como consecuencia de estos teoremas y comentarios se tiene el siguiente resultado.

Resultado (i).

(i1) $H_3(C(\mathbb{C}))$ *es, salvo isomorfismo (topológico), la única álgebra de Jordan-Banach primitiva compleja excepcional.*

(i2) Las álgebras de Jordan-Banach primitivas reales excepcionales son, salvo isomorfismo (topológico) las siguientes:

- $H_3(C(\mathbb{C}))$ *vista como álgebra real, y*
- *las álgebras* $H_3(C(\mathbb{R}))$, $H_3(\mathbb{O})$ *y* $H_3(\mathbb{O}, diag\{1,-1,1\})$.

Estudiemos ahora las álgebras de Jordan-Banach primitivas que se encuentran en el caso *(ii)* del Teorema *I*.5.3. Comencemos notando que si X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbf{C}$) y f es una forma bilineal simétrica en X que es continua y con $\|f\| \leq 1$, entonces

$$\|\alpha\mathbf{1} + x\| := |\alpha| + \|x\|$$

define una norma de álgebra en el álgebra de Jordan $J(X,f)$. Al álgebra $J(X,f)$ dotada de esta norma le llamaremos el álgebra de Jordan normada de la forma bilineal simétrica continua f sobre el espacio normado X. Claramente tal álgebra es completa si, y sólo si, lo es X. El siguiente bien conocido enunciado afirma que, salvo isomorfismo topológico, no hay más álgebras de Jordan normadas asociadas a una forma bilineal que las que acabamos de presentar.

Proposición I.5.6. *Sea $(J,\|.\|)$ un álgebra de Jordan normada sobre $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ó $\mathbf{C}$) y supongamos $J = J(X,f)$ para una cierta forma bilineal simétrica f en un espacio vectorial X sobre un cuerpo Ω extensión de $\mathbb{K}$. Entonces $\Omega = \mathbf{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbf{C}$ y $\Omega = \mathbb{R}$ o $\mathbf{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Además existe una norma $|||.|||$ en X, equivalente a la restricción de $\|.\|$ a X, que convierte a X en un espacio normado sobre Ω de manera que f es continua con $|||f||| \leq 1$, y $(J,\|.\|)$ es bicontinuamente $\mathbb{K}$-isomorfa al álgebra de Jordan normada de la forma bilineal simétrica continua f en el espacio normado $(X,|||.|||)$ sobre Ω.*

Demostración. Identificando Ω con $\Omega\mathbf{1}$ se tiene, como consecuencia del Teorema de Gelfand-Mazur, que $\Omega = \mathbf{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbf{C}$ y $\Omega = \mathbb{R}$ o $\mathbf{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, así como que la multiplicación en $(J,\|.\|)$ por elementos de Ω es continua. Esta útlima afirmación sólo tiene interés en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbf{C}$, en el que se puede argumentar como en [90]; Theorem 1.3.3 para obtener que, en todo caso, existe una norma $|||.|||$ en J equivalente a $\|.\|$ y que convierte a J en un álgebra normada sobre Ω.

Consideremos $\{x_n\} \to \alpha\mathbf{1} + x$ con $x_n, x \in X$ y $\alpha \in \Omega$. Tomando un vector no nulo y de X se tiene que

$$\{x_n.y\} \to (\alpha\mathbf{1} + x).y = f(x,y)\mathbf{1} + \alpha y\,,$$

y como $x_n.y = f(x_n, y)\mathbf{1} \in \Omega\mathbf{1}$ se sigue que $\alpha y = 0$ y por tanto $\alpha = 0$. Esto prueba que X es un subespacio cerrado de J.

Además tenemos que

$$|f(x,y)|\|\mathbf{1}\| = \|x.y\| \leq \|x\|\,\|y\|,$$

esto es, la forma bilineal f es continua con $\|f\| \leq 1$. Como X es el nucleo del funcional Ω-lineal en J

$$\alpha\mathbf{1} + x \mapsto \alpha\,,$$

se sigue que dicho funcional es continuo o, equivalentemente, la proyección

$$\alpha\mathbf{1} + x \mapsto \alpha\mathbf{1}$$

es continua. En consecuencia la descomposición $J = \Omega\mathbf{1} \oplus X$ es topológica directa, en otros términos la norma $\|.\|$ en J es equivalente a la dada por

$$\alpha\mathbf{1} + x \mapsto |\,\alpha\,| + \|x\|\,.$$

∎

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Resultado (ii).

(ii1) Salvo isomorfismo topológico, las álgebras de Jordan-Banach primitivas complejas que se encuentran en el caso (ii) del Teorema I.5.3 son las álgebras de Jordan-Banach $J(X, f)$ construidas a partir de una forma bilineal simétrica no-degenerada continua f con $\|f\| \leq 1$ sobre un espacio de Banach complejo X de dimensión mayor o igual que 2.

(ii2) Salvo isomorfismo topológico, las álgebras de Jordan-Banach primitivas reales que se encuentran en el caso (ii) del Teorema I.5.3 son:

- *las complejas vistas como reales, y*
- *las álgebras de Jordan-Banach $J(X,f)$ construidas a partir de una forma bilineal simétrica no-degenerada continua f con $\|f\| \leq 1$ sobre un espacio de Banach real X de dimensión mayor o igual que 2.*

El Teorema *I*.4.4, principal resultado del capítulo, da una precisa descripción de las álgebras de Jordan-Banach reales o complejas que están en el caso *(iii)* del teorema de clasificación de las álgebras de Jordan primitivas. Así pues, los siguientes tres capítulos de la presente memoria van encaminados a conseguir la determinación de las álgebras de Jordan-Banach que se encuentran en el caso *(iv)* del Teorema *I*.5.3.

Capítulo II

Algebras de Jordan primas no-degeneradas de tipo hermitiano normadas.

En los últimos años han aparecido diversas versiones normadas del Teorema de Zel'manov de clasificación de las álgebras de Jordan primas no-degeneradas. Las técnicas zelmanovianas han sido aplicadas con éxito a las álgebras de Jordan normadas simples con unidad [26], a las $JB-$ y JB^*-álgebras primas [36] y a las álgebras de Jordan-Banach no-degeneradamente ultraprimas [27]. Sin embargo, quedaba abierta la cuestion bastante natural de la obtención de un teorema zelmanoviano para las álgebras de Jordan-Banach primitivas. Para conseguir dicho objetivo, en primer lugar obtenemos en este capítulo una versión "general" normada del teorema de Zel'manov para álgebras de Jordan primas no-degeneradas de tipo "hermitiano".

En la primera sección recordamos los conceptos y resultados necesarios sobre álgebra universal. En la segunda, siguiendo [109] y [81], se recogerán las herramientas zelmanovianas que intervienen en la demostración del mencionado teorema. Finalmente, la última sección está dedicada a cubrir el principal objetivo del capítulo, a saber, el Teorema $II.3.9$, en el que se prueba que dada $(J, \|.\|)$ un álgebra de Jordan prima no-degenerada normada que es especial y de tipo "hermitiano", existe un álgebra asociativa $*$-prima normada $(A, *, |.|)$ tal que J es una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A), *)$ y que contiene a $H(A, *)$ como ideal. Además, sobre $H(A, *)$ se tiene que $\|.\| \leq |.|$ y ambas normas "casi" son equivalentes.

II.1 Variedades de álgebras. Algebras libres.

Aunque los conceptos de identidad y variedad pueden manejarse con cierta informalidad, debido al uso que haremos de ellos hemos preferido dar la definición formal de ambos conceptos. Remitimos al lector a ([110]; capítulo I y sección 2 del capítulo II), ([52]; sección 6 del capítulo I), y [83] para las demostraciones que aquí omitimos o para obtener mayor información. Comenzamos con unas definiciones subyacentes en estos conceptos.

Fijemos un conjunto no vacío de simbolos $\mathcal{X} = \{x_\alpha\}$ al cual añadimos

dos símbolos más, "(" y ")", para obtener el conjunto $\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \cup \{(,)\}$. Definimos inductivamente el conjunto $V[\mathcal{X}]$. Primero, todos los elementos de $\mathcal{X}$ están en $V[\mathcal{X}]$. Ahora, si $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ y $u, v \in V[\mathcal{X}] \setminus \mathcal{X}$, entonces las secuencias $x_1x_2, x_1(u), (v)x_2$, y $(u)(v)$ están en $V[\mathcal{X}]$. Ninguna otra secuencia está en $V[\mathcal{X}]$. A los elementos de $V[\mathcal{X}]$ les llamaremos *palabras no-asociativas* de elementos del conjunto $\mathcal{X}$. En $V[\mathcal{X}]$ se define una operación binaria, llamada multiplicación y denotada por yuxtaposición, según las siguientes reglas: si $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ y $u, v \in V[\mathcal{X}] \setminus \mathcal{X}$, entonces

$$x_1x_2 := x_1x_2 \quad x_1u := x_1(u),$$
$$vx_2 := (v)x_2 \quad uv := (u)(v)$$

Sea ahora $\mathbb{F}$ un cuerpo y denotemos por $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $V[\mathcal{X}]$ con coeficientes en $\mathbb{F}$. Extendemos la multiplicación de $V[\mathcal{X}]$ a $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ mediante la regla

$$(\sum_i \alpha_i u_i)(\sum_j \beta_j v_j) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j(u_iv_j)$$

donde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}$ y $u_i, v_j \in V[\mathcal{X}]$. Hemos obtenido así un álgebra sobre $\mathbb{F}$ a la que llamaremos el *álgebra libre* sobre $\mathbb{F}$ engendrada por el conjunto $\mathcal{X}$.

La razón por la que $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ es llamada libre es la siguiente propiedad universal que le caracteriza.

Teorema II.1.1. ([110]; Theorem 1.1) *Si A es un álgebra sobre $\mathbb{F}$ entonces toda aplicación de $\mathcal{X}$ en A se extiende de manera única a un homomorfismo del álgebra $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ en A.*

Los elementos de $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ son llamados *polinomios no-asociativos* de elementos de $\mathcal{X}$ y un tal polinomio $\mathbf{p}$ se denotará $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ cuando queramos destacar que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ son las variables que involucra. Un polinomio no-asociativo de la forma αu, donde $\alpha \in \mathbb{F}$ y $u \in V[\mathcal{X}]$, se llama un *monomio no-asociativo.* El número de elementos de $\mathcal{X}$ (contando la multiplicidad) usados en u se llama el *grado del monomio αu.* Al máximo de los grados de los monomios que aparecen en la expresión irreducible de un polinomio le llamamos *grado del polinomio.*

Dado que todo polinomio sólo involucra a un número finito de variables, podemos limitarnos al caso en el que $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\}$ es un conjunto infinito numerable y así lo consideraremos en adelante.

Sea A un álgebra sobre $\mathbb{F}$ y sean $a_1, a_2, ..., a_n$ en A. Por el Teorema *II*.1.1 existe un único homomorfismo $\theta : \mathbb{F}[\mathcal{X}] \to A$ que lleva $\mathbf{x}_i$ en a_i para $i = 1, 2, ..., n$ y los demas elementos de $\mathcal{X}$ en cero. Denotamos la imagen del polinomio $\mathbf{p}$ bajo el homomorfismo θ por $\mathbf{p}(a_1, a_2, ..., a_n)$, y se dice que el elemento $\mathbf{p}(a_1, a_2, ..., a_n)$ se obtiene sustituyendo en el polinomio no-asociativo $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ las variables por los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$.

Si A es un álgebra sobre $\mathbb{F}$, la unión de las imagenes de un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ por todos los homomorfismos de $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ en A que extienden todas las posibles aplicaciones de $\mathcal{X}$ en A según el Teorema *II*.1.1 la denotaremos por $\mathcal{S}(A)$.

Definición II.1.2. Un polinomio $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ es una *identidad* en un álgebra A si $\mathbf{p}(A) = 0$, esto es, si $\mathbf{p}(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ para cualesquiera $a_1, a_2, ..., a_n$ en A. También diremos que A satisface la identidad $\mathbf{p}$ o que la identidad $\mathbf{p}$ es valida en A. El conjunto $I(A)$ de todas las identidades de un álgebra A es un ideal de $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$ llamado el *ideal de las identidades* del álgebra A.

Definición II.1.3. Dado un subconjunto I de $\mathbb{F}[\mathcal{X}]$, la clase $\mathcal{V}$ de todas las álgebras verificando toda identidad de I se llama la *variedad* de las álgebras definida por el conjunto de identidades I.

Por ejemplo, todas las álgebras asociativas forman la variedad definida por la identidad $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3)$, mientras que la variedad de las álgebras de Jordan está definida por las identidades $\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{p}_2 = (\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^2(\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1)$.

Definición II.1.4. Un álgebra $\mathcal{F}$ es un *álgebra libre en la variedad $\mathcal{V}$ con conjunto de generadores $\mathcal{X}$* si toda aplicación de $\mathcal{X}$ en un álgebra A de la variedad $\mathcal{V}$ se extiende de manera única a un homomorfismo del álgebra

$\mathcal{F}$ en A. Si I es el conjunto de todas las identidades que satisfacen todas las álgebras de una variedad $\mathcal{V}$ entonces, salvo isomorfismo, $\mathbb{F}[\mathcal{X}]/I$ es la única álgebra libre en la variedad $\mathcal{V}$ con conjunto de generadores $\mathcal{X}$ ([110]; Theorem 1.2).

Nosotros denotaremos por $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{X})$ al *álgebra asociativa libre* y por $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{X})$ al *álgebra de Jordan libre* con conjunto de generadores $\mathcal{X}$. En $\mathcal{A}$ existe una única involución $*$ fijando los elementos de $\mathcal{X}$ conocida con el nombre de "involución principal". La subálgebra de Jordan de $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{X}$ es el *álgebra de Jordan especial libre* con conjunto de generadores $\mathcal{X}$ y la denotaremos por $\mathcal{JS}$. Obviamente $\mathcal{JS} \subseteq H(\mathcal{A}, *)$. Cohn demostró (Theorem 3.3 de [110]) que cuando $card(\mathcal{X}) \leq 3$ entonces se tiene la igualdad y en caso contrario la inclusión es estricta. A saber, los elementos $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l + \mathbf{x}_l\mathbf{x}_k\mathbf{x}_j\mathbf{x}_i$, donde $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l \in \mathcal{X}$, están en $H(\mathcal{A}, *)$ pero no en $\mathcal{JS}$. A los elementos del álgebra asociativa libre $\mathcal{A}$ se les llama *polinomios asociativos*, y a los elementos del álgebra de Jordan especial libre $\mathcal{JS}$ se les llama *polinomios de Jordan* (son los polinomios asociativos que pueden expresarse a partir de elementos de $\mathcal{X}$ mediante la suma, el producto por escalares y el producto simetrizado "$\cdot$").

Es bien conocido (véase si acaso [71]; pag. 339) que para extender una clase de álgebras a la menor variedad que la contiene es necesario añadir primero todos los posibles productos directos, despues todas las subálgebras y finalmente las imagenes por homomorfismos. La clase de las álgebras de Jordan especiales es estable por productos directos y por paso a subálgebras, pero no lo es por paso a imágenes homomórficas. Para $card(\mathcal{X}) \geq 3$ existen imágenes homomórficas de $\mathcal{JS}$ que no son especiales (véase Theorem 3.5 de [110]), por lo que las álgebras de Jordan especiales no forman una variedad. Así la variedad generada por todas las álgebras de Jordan especiales $\mathcal{VS}$ está formada por todas las posibles imagenes homomórficas de las álgebras de Jordan especiales.

Definición II.1.5. Una *s-identidad* es una identidad satisfecha en toda álgebra de Jordan especial. Un álgebra de Jordan se llama *i-especial* (identity-special) si satisface todas las s-identidades (equivalentemente, si es imagen homomorfica de un álgebra de Jordan especial). Así, $\mathcal{VS}$,

la variedad generada por todas las álgebras especiales, es la variedad formada por las álgebras i-especiales.

Definición II.1.6.Un polinomio $\mathbf{p(x_1, x_2, ..., x_n)}$ del álgebra asociativa libre $\mathcal{A}$ se dice *admisible* si al menos uno de los coeficientes de los monomios de mayor grado es la unidad de $\mathbb{F}$. Sea ahora A un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$ y M una subálgebra de A. Decimos que M satisface una *identidad polinomial admisible* si existe un polinomio admisible $p \in \mathcal{A}$ tal que $p(m_1, ..., m_n) = 0$ para cualesquiera $m_1, ..., m_n \in M$. Si el álgebra A satisface una identidad polinomial admisible entonces diremos que A es una *PI-álgebra.*

Definición II.1.7. Un polinomio p de $\mathcal{J}$ es *esencial* si bajo el homomorfismo natural de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{JS}$ la imagen $\overline{f}$ de f es un polinomio admisible considerado como un elemento de $\mathcal{A}$. Sea ahora J un álgebra de Jordan sobre $\mathbb{F}$. Decimos que J satisface una *identidad polinomial esencial* si exsite un polinomio esencial $p \in \mathcal{J}$ tal que $p(x_1, ..., x_n) = 0$ para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in J$. Si el álgebra de Jordan J satisface una identidad polinomial esencial entonces diremos que J es una *PI-álgebra de Jordan.*

II.2 Teorema primo de Zel'manov.

En esta sección nos proponemos llevar a cabo la nada fácil tarea de recoger el Teorema de Zel'manov para álgebras de Jordan primas no-degeneradas y comentar las etapas intermedias así como las técnicas utilizadas en su demostración. De especial relevancia es el concepto de ideal zelmanoviano por lo que parte de la sección se dedica a relatar la construcción de uno de estos ideales, a saber, Q_{48}.

Comenzamos con la definición de álgebra de Jordan no-degenerada.

Definición II.2.1. Un álgebra de Jordan J es *no-degenerada* si $U_x(J) = 0$ implica que $x = 0$.

En virtud de la caracterización de la semiprimidad de un álgebra asociativa (Teorema $I.3.3$), es claro que un álgebra asociativa A es semiprima si y sólo si el álgebra de Jordan A^+ es no-degenerada. También es fácil ver que toda álgebra de Jordan no-degenerada es semiprima. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

Para toda álgebra de Jordan J existe un más pequeño ideal $\mathcal{M}(J)$, llamado el *radical no-degenerado* o *radical de McCrimmon* de J, tal que $J/\mathcal{M}(J)$ es un álgebra de Jordan no-degenerada ([110]; Proposition 14.1). Además se sabe que $\mathcal{M}(J)$ es un *nil-ideal* (todo elemento de $\mathcal{M}(J)$ es nilpotente) ([110]; Theorem 14.2). Una consecuencia inmediata de este hecho es que toda álgebra de Jordan simple con unidad es no-degenerada.

Notemos que dados dos ideales P y Q de un álgebra de Jordan no-degenerada se tiene la equivalencia $PQ = \{0\} \Leftrightarrow U_P Q = \{0\}$. Ello se sigue de

$$U_{U_{PQ}(J)}(J) = U_{PQ}U_J U_{PQ}(J) \subseteq U_P(Q) \subseteq PQ$$

y de la no-degenerancia de J. Así, un álgebra de Jordan no-degenerada es prima si, y sólo si, no tiene ideales no nulos P y Q que sean "ortogonales", esto es, verificando $U_P(Q) = \{0\}$ (definición habitual de primidad en gran parte de la literatura).

Ejemplos de álgebras de Jordan primas no-degeneradas los encontramos en los Ejemplos 1 y 2 de la sección I.5. En efecto, las álgebras $H_3(C,\Gamma)$ y $J(X,f)$ (con $dim(X) \geq 2$) son simples y por tanto primas. Veremos enseguida que aquellas álgebras de Jordan que por un proceso de "agrandamiento" resultan ser una de las anteriores, también son álgebras de Jordan primas no-degeneradas. Introducimos a continuación los conceptos de localización central, anillo de Albert y orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica.

Definición II.2.2. Sea A un álgebra sobre $\mathbb{K}$ cuyo centro $Z(A)$ es no nulo y no contiene divisores de cero en A distintos de cero y consideremos $S := Z(A) \setminus \{0\}$. Se define la *localización central* AS^{-1} de A como el conjunto cociente $A \times S/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida en $A \times S$ por

$$(a,z) \sim (a',z') \Leftrightarrow az' = a'z\,.$$

La localización central de A con las operaciones

$$\begin{aligned} [(a,z)]+[(a',z')] &= [(az'+a'z, zz')], \\ \lambda[(a,z)] &= [(\lambda a, z)], \\ [(a,z)]\,[(a',z')] &= [(aa', zz')], \end{aligned}$$

es un álgebra con unidad (la clase $[(z,z)]$) que contiene a A como subálgebra vía la aplicación $\rho_z : a \mapsto [(az,z)]$ (la cual no depende del elemento z prefijado en S). Igualmente podemos considerar la localización central $Z(A)S^{-1}$ de $Z(A)$ que claramente es un cuerpo así como una subálgebra de AS^{-1}. Concretamente se demuestra sin dificultad (véase si acaso [110]; Proposition 9.2) que $Z(AS^{-1}) = Z(A)S^{-1}$ y por consiguiente $Z(A)S^{-1}$ es un cuerpo extensión de $\mathbb{K}$ y la localización central de A es un álgebra sobre $Z(A)S^{-1}$. Además, AS^{-1} es prima (no-degenerada, semiprima) si, y sólo si, A es prima (no-degenerada, semiprima) ([110]; Proposition 9.2).

Definición II.2.3. Un álgebra de Jordan J es un *anillo de Albert* si su centro $Z(J)$ es no nulo, los elementos no nulos de $Z(J)$ no son divisores de cero en J y la localización central JS^{-1} es un álgebra de Jordan central simple excepcional 27-dimensional sobre $Z(J)S^{-1}$ donde $S := Z(J)\setminus\{0\}$.
A un anillo de Albert también se le llama un *orden central en un álgebra de Jordan excepcional 27-dimensional central simple.*

Definición II.2.4. Un álgebra de Jordan J es un *orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica* si su centro $Z(J)$ es no nulo, los elementos no nulos de $Z(J)$ no son divisores de cero en J y la localización central JS^{-1} de J (donde $S := Z(J)\setminus\{0\}$) es isomorfa al álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial sobre el cuerpo $Z(J)S^{-1}$.

Como un álgebra es prima (no-degenerada) si, y sólo si, lo es su localización central ([110]; Proposition 9.2), se tiene que son álgebras de Jordan primas no-degeneradas:

Ejemplo 1'. Los anillos de Albert.

Ejemplo 2'. Los órdenes centrales en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica $J(X,f)$ (con $dim(X) \geq 2$).

Asímismo, veremos a continuación que procesos análogos a los seguidos en los Ejemplos 3 y 4 de la sección I.5, partiendo ahora de un álgebra asociativa prima A o de un álgebra asociativa prima con involución $(A,*)$, dan lugar a sendos tipos de álgebras de Jordan primas no-degeneradas.

Sea A un álgebra asociativa prima y notemos que si p,q en $Q_s(A)$ son tales que $U_{p,q}(A) = \{0\}$ entonces $p = 0$ o $q = 0$. Para ello consideremos un ideal no nulo I de A verificando que $pI + Ip \subseteq A$ y particularicemos la identidad

$$paqbp = U_{p,q}(a)bp + paU_{p,q}(b) - U_{p,q}(apb)$$

al caso en que $a \in A$ y $b \in I$. De $U_{p,q}(A) = \{0\}$ se sigue que, $pAqIp = \{0\}$ y ahora, por la actuación prima de $Q_s(A)$ sobre todo ideal no nulo de A, se concluye que $p = 0$ o $q = 0$.

De la anterior observación se sigue que si A es un álgebra asociativa prima entonces toda subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ conteniendo a A es prima no-degenerada, lo que constituye nuestro siguiente

Ejemplo 3'. Las álgebras de Jordan J para las cuales existe un álgebra asociativa prima A de tal forma que J es subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ que contiene a A, son primas no-degeneradas.

Consideremos finalmente el caso en el que $(A,*)$ es un álgebra asociativa prima con involución.

Proposición II.2.5. *Sean $(A,*)$ un álgebra asociativa prima con involución y p,q en $H(Q_s(A),*)$. Entonces*

1) *Si I es un $*$-ideal no nulo de A tal que $pI + Ip \subseteq A$ y $pH(I,*)q = \{0\}$, entonces $p = 0$ o $q = 0$.*

2) *Si $U_{p,q}(H(A,*)) = \{0\}$, entonces $p = 0$ o $q = 0$.*

Demostración. 1). De la igualdad

$$\begin{aligned}(pxq)^*y(pxq) = \; & qx^*pyp(x+x^*)q - qx^*p[(x+y)p(x+y)^*]q + \\ & + qx^*p[xpx^* + ypy^*]q + [p(x^*px)q]^*y^*q\end{aligned}$$

particularizada para x, y en I, se sigue que $(pxq)^*I(pxq) = \{0\}$ para cualquier x en I. Aplicando dos veces la actuación prima de $Q_s(A)$ sobre todo ideal no nulo de A se obtiene en primer lugar que $pIq = \{0\}$, y posteriormente que $p = 0$ o $q = 0$, lo que prueba el primer resultado.

Para la demostración de *2)* tomemos un $*$-ideal no nulo I de A verificando que $pI + Ip \subseteq A$ y $qI + Iq \subseteq A$. De la igualdad

$$\begin{aligned}(php)k(qhq) = \; & phU_{p,q}(k)hq - U_{p,q}(h)kphq - U_{p,q}(k)hphq + \\ & + U_{p,q}(hpk + kph)hq - pkU_{p,q}(hqh) + pkqhU_{p,q}(h),\end{aligned}$$

particularizada para h, k en $H(I,*)$ y la hipótesis $U_{p,q}(H(A,*)) = \{0\}$ se sigue que $(php)k(qhq) = 0$ para cualesquiera h, k en $H(I,*)$ y por tanto $(php)H(I,*)(qhq) = \{0\}$ para todo h en $H(I,*)$. Por *1)*, para todo h en $H(I,*)$ se tiene que $php = 0$ o $qhq = 0$ y de aquí se sigue que $pH(I,*)p = \{0\}$ o $qH(I,*)q = \{0\}$ (pues en caso contrario, tómense m_1, m_2 en $H(I,*)$ tales que $pm_1p \neq 0$ y $qm_2q \neq 0$ y nótese que entonces $p(m_1+m_2)p \neq 0$ y $q(m_1+m_2)q \neq 0$, lo que es una contradicción). De nuevo por *1)*, se concluye que $p = 0$ o $q = 0$. ∎

Como consecuencia de la anterior Proposición se sigue que si $(A,*)$ es un álgebra asociativa prima con involución, entonces toda subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ conteniendo a $H(A,*)$ y contenida en $H(Q_s(A),*)$ es prima no-degenerada, lo que constituye nuestro siguiente

> **Ejemplo 4'.** Las álgebras de Jordan J para las cuales existe un álgebra asociativa prima con involución, $(A,*)$, de tal forma que J es subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y que contiene a $H(A,*)$ son primas no-degeneradas.

Zel'manov demuestra ([109]; Theorem 3) que toda álgebra de Jordan prima no-degenerada está en alguno de los cuatro casos anteriores. Obtiene así su célebre teorema de clasificación de las álgebras de Jordan

primas no-degeneradas, el cual es básico en el reciente desarrollo de la teoría "Jordan" y en particular en la parcela "Jordan-Banach" en la que este trabajo está inmerso.

Teorema II.2.6. (Teorema primo de Zel'manov). *Las álgebras de Jordan primas no-degeneradas son las siguientes:*

(i) Los anillos de Albert.

(ii) Los órdenes centrales en el álgebra de Jordan simple de una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial.

(iii) Las álgebras de Jordan especiales J para las cuales existe un álgebra asociativa prima A de tal forma que J es una subálgebra de Jordan del álgebra de cocientes simétricos de Martindale de A, $Q_s(A)$, y que contiene a A como ideal. Abreviadamente,

$$A^+ \lhd J \subseteq Q_s(A)^+.$$

(iv) Las álgebras de Jordan especiales J para las cuales existe un álgebra asociativa prima con involución, $(A,*)$, de tal forma que J es una subálgebra de Jordan del álgebra de cocientes simétricos de Martindale de A, $Q_s(A)$, contenida en $H(Q_s(A),*)$ y que contiene a $H(A,*)$ como ideal. Abreviadamente,

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*).$$

En [109], para la obtención de su Teorema de clasificación de las álgebras de Jordan primas no-degeneradas, Zel'manov procede sucesivamente por dicotomía. El punto de arranque en la obtención de dicho teorema es el siguiente Teorema de dicotomía primo que Zel'manov establece en la introducción de [109] como una consecuencia "casi" directa de resultados previamente obtenidos por él en [106] y [108].

Teorema II.2.7. (Teorema de dicotomía primo). *Toda álgebra de Jordan prima no-degenerada o es un anillo de Albert o es un álgebra i-especial (está en la variedad $\mathcal{VS}$ generada por todas las álgebras de Jordan especiales).*

Las fases en las que se consigue clasificar las álgebras de Jordan i-especiales primas no-degeneradas ponen de relieve cómo la teoría depende de que se satisfagan o no ciertas "clases" de identidades polinomiales, sin importar en absoluto la forma concreta de tales identidades.

Definición II.2.8. Un ideal $\mathcal{F}$ de $\mathcal{JS}$ se dice *formal* si es estable bajo cualquier permutación σ de $\mathcal{X}$, esto es,

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{p}(\sigma(\mathbf{x}_1), ..., \sigma(\mathbf{x}_n)) \in \mathcal{F}.$$

Un ideal formal $\mathcal{H}$ es *hermitiano* si es estable bajo $n-$tads, esto es,

$$\{\mathcal{H}.^n.\mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H},$$

donde $\{a\} := \frac{1}{2}(a + a^*)$ para todo $a \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$. Por el Teorema de Cohn, toda $n-$tad puede expresarse mediante productos Jordan y tétradas, con lo que $\mathcal{H}$ es hermitiano si, y sólo si,

$$\{\mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}.$$

Un polinomio $\mathbf{p} \in \mathcal{JS}$ es *hermitiano* si está en algún ideal hermitiano.

El término de ideal hermitiano está justificado por el hecho de que un tal ideal $\mathcal{H}$ actúa como un álgebra "universalmente hermitiana" en el sentido siguiente: si J es un álgebra de Jordan especial, entonces el ideal $\mathcal{H}(J)$ de J, obtenido evaluando en J los elementos de $\mathcal{H}$, es la parte hermítica de un álgebra asociativa con involución (véase la propiedad básica de hermitianidad en [81]; (1.3)). Con anterioridad a los trabajos de Zel'manov [107] y [109] habría sido imposible pensar en la existencia de ideales hermitianos (equivalentemente de polinomios hermitianos). Es en [109] donde se presenta por primera vez un polinomio hermitiano de grado 2.160.

Definición II.2.9. Sea J un álgebra de Jordan i-especial prima. Diremos que J es de tipo *hermitiano* si $\mathcal{H}(J) \neq 0$ para algún ideal hermitiano $\mathcal{H}$. En caso contrario se dice que J es de tipo *anti-hermitiano.*

La especialidad de las álgebras de tipo hermitiano se recoge en un teorema en ambiente semiprimo en ([81]; 3.3 Hermitian Dichotomy Theorem) y tiene como precedente el resultado probado en ([109]; Lemma 8).

Teorema II.2.10. (Teorema de especialidad hermitiana). *Toda álgebra de Jordan i-especial prima de tipo hermitiano es especial.*

El teorema de estructura de las álgebras de Jordan (i-)especiales primas de tipo hermitiano establecido en [81]; Theorem 1.6 asegura que estas álgebras son formas hermitianas: están emparedadas entre las partes hermíticas de un álgebra asociativa $*$-prima y del álgebra de cocientes simétricos de esta.

Teorema II.2.11. (Teorema de estructura hermitiana especial). *Si J es un álgebra de Jordan especial prima no-degenerada de tipo hermitiano y $\mathcal{H}$ es un ideal hermitiano tal que $\mathcal{H}(J) \neq \{0\}$, entonces existe un álgebra asociativa $*$-prima A generada por su parte hermítica tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A), *)$ y que contiene a $\mathcal{H}(J) = H(A, *)$ como ideal. Abreviadamente*

$$\mathcal{H}(J) = H(A, *) \lhd J \subseteq H(Q_s(A), *).$$

Si el álgebra asociativa $*$-prima que aparece en el teorema anterior no es prima, entonces siguiendo el desarrollo hecho por Zel'manov en [109]; pag. 81-82, se obtiene el siguiente resultado no explicitamente enunciado allí y al que dedicamos el Apendice 2.

Teorema II.2.12. (Teorema de cambio de parámetro). *Sea J un álgebra de Jordan especial prima no-degenerada de tipo hermitiano, y*

supongamos que $\mathcal{H}$ es un ideal hermitiano tal que $\mathcal{H}(J) \neq 0$ y A es un álgebra asociativa $*$-prima generada por su parte hermítica tal que

$$H(A,*) = \mathcal{H}(J) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*).$$

Si A no es prima, entonces existe una subálgebra prima B de A y un homomorfismo asociativo φ de la subálgebra R de $Q_s(A)$ generada por J en $Q_s(B)$ tales que $\varphi_{|J}$ es inyectivo y B es un ideal del álgebra de Jordan $\varphi(J)$.

Sólo queda por determinar cuales son las álgebras de Jordan especiales primas no-degeneradas de tipo anti-hermitiano.

El hecho de que el álgebra de Jordan $H(M_3(\mathbb{K}),t)$ de las matrices 3×3 que son hermitianas respecto a la transposición es estructuralmente muy diferente de las álgebras de Jordan asociadas a una forma bilineal simétrica (por ejemplo, $H(M_3(\mathbb{K}),t)$ tiene tres "idempotentes ortogonales interconectados") justifica que los polinomios de Jordan que no se anulan en $H(M_3(\mathbb{K}),t)$ deban jugar un papel destacado en la obtención de teoremas de estructura.

Definición II.2.13. Un *polinomio Clifford* es un polinomio Jordan que no se anula en el álgebra $H(M_3(\mathbb{K}),t)$ de las matrices 3×3 hermitianas sobre $\mathbb{K}$ con involución la transposición. Un álgebra de Jordan se dice que es de tipo Clifford si satisface un polinomio Clifford.

El Teorema de estructura de las álgebras de Jordan de tipo Clifford fue establecido por Zel'manov en [109]; Theorem 1 (véase [81]; Theorem 11.1).

Teorema II.2.14. (Teorema de estructura Clifford). *Si J es un álgebra de Jordan i-especial prima no-degenerada de tipo Clifford, entonces J es un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica. En consecuencia J es especial.*

De los teoremas de estructura hasta ahora expuestos, se concluye el Teorema primo de Zel'manov sin más que tener asegurado el hecho de que toda álgebra de tipo anti-hermitiano es un álgebra de tipo Clifford. Ello, sería consecuencia de la mera existencia de un polinomio que fuese simultaneamente hermitiano y Clifford.

Definición II.2.15. Un *polinomio zelmanoviano* es un polinomio Jordan que es simultaneamente hermitiano y Clifford. Llamaremos *ideal zelmanoviano* a todo ideal en $\mathcal{JS}$ generado por un polinomio zelmanoviano.

El resto de la sección se dedica a comentar la construcción de un ideal zelmanoviano y a dar una caracterización de las álgebras de Jordan primas no-degeneradas que son de tipo hermitiano. Aunque la forma del polinomio zelmanoviano es irrelevante, comentaremos que si

$$D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{z}) := [R_{\mathbf{x}}, R_{\mathbf{y}}](\mathbf{z}) = \mathbf{x}.(\mathbf{y}.\mathbf{z}) - \mathbf{y}.(\mathbf{x}.\mathbf{z}) = \frac{1}{4}[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}]$$

y $\mathbf{c} := D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(D^2_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{z}))^2$, el polinomio de grado 2160 construido por Zel'manov en [109] es $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) := \mathbf{c}^{180}$ y el ideal zelmanoviano $\mathcal{T}$ utilizado es el generado en $\mathcal{JS}$ por $\mathbf{f}$ y todas sus linealizaciones. Ahora comentaremos la construcción de un polinomic de grado 48 en el álgebra de Jordan libre especial $\mathcal{JS}$, $\mathbf{q}_{48}$, el cual se demuestra que es un polinomio zelmanoviano.

Comenzamos con la construcción de ideales hermitianos.

Definición II.2.16. Un elemento $\mathbf{p}(\mathbf{y}_1,...\mathbf{y}_m)$ del álgebra de Jordan libre especial $\mathcal{JS}(\mathcal{X})$ es un *comedor de n-tads* si colocado en la última posición de una n-tad "la mastica y escupe un polinomio Jordan", esto es, si existe un polinomio $\mathbf{p}'$ en $\mathcal{JS}$ en $n-1+m$ indeterminadas tal que para cualesquiera $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1}$ en $\mathcal{X}$ se tiene

$$\{\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_{n-1}\mathbf{p}(\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_m)\} = \mathbf{p}'(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{y}_1,...,\mathbf{y}_m). \qquad (2.1)$$

Denotamos por E_n al subespacio vectorial de $\mathcal{JS}(\mathcal{X})$ formado por todos los comedores de n-tads.

Como toda aplicación de $\mathcal{X}$ en la unitización de $\mathcal{JS}$ se extiende a un único $*$-homomorfismo de $\mathcal{A}$ en su unitización, todo elemento $\mathbf{x}_i$ de $\mathcal{X}$ en la expresión (2.1) puede ser reducido formalmente a la unidad. Así, todo comedor de n-tads es un comedor de $(n-1)$-tads. Luego

$$E_1 = E_2 = E_3 = \mathcal{JS} \supseteq E_4 \supseteq E_5 \supseteq \ldots$$

Si $T_n := cor(E_n)$ (el más grande ideal de $\mathcal{JS}$ incluido en E_n) entonces se tiene

$$T_1 = T_2 = T_3 = \mathcal{JS} \supseteq T_4 \supseteq T_5 \supseteq \ldots$$

Notemos que si K es un ideal de $\mathcal{JS}$ y $\mathbf{p}$ es un comedor de n-tads, entonces $\{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{p}\}$ queda en K si algún $\mathbf{x}_i$ está en K. En efecto, ello se sigue de la homogeneidad del polinomio $\mathbf{p}'$ en la expresión (2.1). Como consecuencia de esta observación y del Teorema de Cohn se sigue que todo ideal de $\mathcal{JS}$ contenido en E_4 es hermitiano. En particular T_4 es un ideal hermitiano. El siguiente teorema muestra una descripción precisa de dicho ideal.

Teorema II.2.17 . ([81]; Theorem 12.5) *El ideal hermitiano de los comedores de tétradas coincide con el conjunto de todos los comedores de péntadas, esto es,* $T_4 = T_5 = E_5$.

Haciendo uso de la siguiente fórmula

$$\{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-2}\mathbf{p}\mathbf{x}_{n-1}\} = 2\{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-2}\mathbf{p}\}.\mathbf{x}_{n-1} - \{\mathbf{x}_{n-1}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-2}\mathbf{p}\}$$

y teniendo en cuenta que todo comedor de n-tads es un comedor de (n-1)-tads se sigue que todo comedor de n-tads come n-tads independientemente del lugar que ocupe,

$$\mathbf{p} \in E_n \Rightarrow \{\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{k-1}\mathbf{p}\mathbf{y}_k \ldots \mathbf{y}_{n-1}\} \in \mathcal{JS} \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\}\,.$$

Esto invita a presentar la siguiente definición.

Definición II.2.18. Un elemento $\mathbf{p}$ en $\mathcal{JS}$ (envolviendo m indeterminadas, por ejemplo $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m$) es un *comedor de n-tads metidas* si existe un número natural k y elementos $\mathbf{p}_j^i$ $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq 3)$ de $\mathcal{JS}$ en $m+n-1$ indeterminadas (algún $\mathbf{p}_j^i$ puede ser formalmente la unidad) tales que, para cualesquiera $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$ en $\mathcal{X}$, se tiene en $\mathcal{A}$ la siguiente igualdad

$$\{\mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_r \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{p} \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_s\} = \sum_{i=1}^{k} \{\mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_r p_1^i p_2^i p_3^i \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_s\}, \quad (2.2)$$

donde por brevedad en el segundo miembro de la igualdad hemos escrito p_j^i en lugar de $\mathbf{p}_j^i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m)$.

Notemos que, como los elementos de $\mathcal{A}$ son combinaciones lineales de productos asociativos de elementos de $\mathcal{X}$ y la función traza $\{a\} = \frac{1}{2}(a+a^*)$ es lineal, un elemento $\mathbf{p}$ de $\mathcal{JS}$ es un comedor de n-tads metidas si, y sólo si, existen un número natural k y elementos $\mathbf{p}_j^i$ $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq 3)$ de $\mathcal{JS}$ en $m+n-1$ indeterminadas (algún $\mathbf{p}_j^i$ puede ser formalmente la unidad) tales que, para cualesquiera $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}$ en $\mathcal{X}$ y $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ en $\mathcal{A}$ se tiene

$$\{\mathbf{r}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1} \mathbf{p} \mathbf{s}\} = \sum_{i=1}^{k} \{\mathbf{r} p_1^i p_2^i p_3^i \mathbf{s}\}.$$

El conjunto IE_n de todos los comedores de n-tads metidas es un subespacio vectorial de $\mathcal{JS}$ y notaremos $I_n := cor(IE_n)$. Al igual que para los comedores de n-tads, todo elemento de $\mathcal{X}$ en la expresión (2.2) puede ser reducido formalmente a la unidad, por tanto $IE_n \subseteq E_n$,

$$IE_1 = IE_2 = IE_3 = \mathcal{JS} \supseteq IE_4 \supseteq IE_5 \supseteq \ldots,$$

y

$$I_1 = I_2 = I_3 = \mathcal{JS} \supseteq I_4 \supseteq I_5 \supseteq \ldots$$

La estrategia que se sigue en [81] para la construcción de un polinomio zelmanoviano es parecida a la seguida por Zel'manov en [109]

para la construcción del antes citado polinomio zelmanoviano $\mathbf{f}$, y consiste en "apilar" suficiente número de dobles conmutadores ($D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{4}[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}]$). Así, en ([81]; (14.1)) se muestra un polinomio Jordan de grado 16 que es un comedor de tétradas metidas

$$\mathbf{p}_{16}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) := [[D^2_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{z})^2, D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{w})], D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{w})]\,,$$

y a partir de una linealización de él (véase [8]; pag. 182), en ([81]; (14.2)) se construye un polinomio zelmanoviano de grado 48, que pertenece a I_5, a saber

$$\mathbf{q}_{48} := \Big[[\mathbf{p}_{16}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_1,\mathbf{w}_1;\tilde{\mathbf{w}}_1), \mathbf{p}_{16}(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_2,\mathbf{w}_2;\tilde{\mathbf{w}}_2)], \mathbf{p}_{16}(\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_3,\mathbf{z}_3,\mathbf{w}_3;\tilde{\mathbf{w}}_3)\Big]\,,$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{16}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w};\tilde{\mathbf{w}}) = {} & [[D^2_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{z})^2, D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{w})], D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{w}})] + \\ & + [[D^2_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{z})^2, D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{w}})], D_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{w})]\,.\end{aligned}$$

Es usual denotar por Q_{48} al ideal (zelmanoviano) generado por el polinomio $\mathbf{q}_{48}$.

Finalmente, daremos una caracterización de las álgebras de Jordan primas no-degeneradas que son de tipo hermitiano, a saber, el ideal hermitiano I_5 distingue las álgebras de tipo hermitiano de las de tipo antihermitiano. Uno de los resultados en los que se cimenta la demostración de este hecho es la igualdad $T_4 = I_5$. Esta igualdad es consecuencia de una cadena de observaciones que esbozamos a continuación:

1.- Todo comedor de tétradas metidas las come independientemente de la posición que ocupe en la tétrada metida.

Basta tener en cuenta la igualdad

$$\begin{aligned}\{\mathbf{z}_1\dots\mathbf{z}_r\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{p}\mathbf{x}_3\mathbf{u}_1\dots\mathbf{u}_s\} = {} & 2\{\mathbf{z}_1\dots\mathbf{z}_r\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\{\mathbf{p}\mathbf{x}_3\}\mathbf{u}_1\dots\mathbf{u}_s\} - \\ & - \{\mathbf{z}_1\dots\mathbf{z}_r\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{p}\mathbf{u}_1\dots\mathbf{u}_s\}\end{aligned}$$

para deducir que si $\mathbf{p}$ come tétradas metidas en cuarta posición también las come en tercera posición. Ahora la simetría de la función traza nos permite añadir las posiciones primera y segunda.

2.- $E_4 = IE_4$, y por tanto $T_4 = I_4$.

Claramente $E_4 \supseteq IE_4$. Para probar la otra inclusión, dado $\mathbf{p}$ en E_4, desarróllese la expresión

$$\{\mathbf{z}_1 \dots \mathbf{z}_r \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{p} \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_s\}$$

expresando $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{p}$ según la identidad

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4 = \quad & \{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\} + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\{\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\} - \mathbf{x}_1\{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4\}\mathbf{x}_3 + \\ & + \{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4\}\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4\{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\}\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4\mathbf{x}_2\{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3\} - \\ & - \mathbf{x}_4\{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\}\mathbf{x}_1 \,.\end{aligned}$$

3.- $E_5 = IE_5$, y por tanto $T_5 = I_5$.

Claramente $E_5 \supseteq IE_5$. Para probar la otra inclusión, dado $\mathbf{p}$ en E_5, desarróllese la expresión

$$\{\mathbf{z}_1 \dots \mathbf{z}_r \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \mathbf{p} \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_s\}$$

expresando $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\mathbf{p}$ según la identidad

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\mathbf{x}_5 = \quad & \{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\mathbf{x}_5\} - \mathbf{x}_5\mathbf{x}_4\mathbf{x}_3\{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1\} + \\ & + \mathbf{x}_5\mathbf{x}_4\{\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1\}\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_5\{\mathbf{x}_4\mathbf{x}_1\}\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 + \\ & + \{\mathbf{x}_5\mathbf{x}_1\}\mathbf{x}_4\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\{\mathbf{x}_5\mathbf{x}_4\}\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2 + \\ & + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_4\{\mathbf{x}_5\mathbf{x}_3\}\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\mathbf{x}_4\mathbf{x}_3\{\mathbf{x}_5\mathbf{x}_2\} + \\ & + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_4\{\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2\}\mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_1\{\mathbf{x}_4\mathbf{x}_2\}\mathbf{x}_3\mathbf{x}_5 + \\ & + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\{\mathbf{x}_4\mathbf{x}_3\}\mathbf{x}_5 \,,\end{aligned}$$

y téngase en cuenta que $E_5 = T_5 = T_4$ (Teorema $II.2.17$), $T_4 = I_4$ (observación anterior), y en consecuencia los elementos $\{\mathbf{x}_i\mathbf{p}\}$ pertenecen al ideal I_4 de los comedores de tétradas metidas, y por último úsese reiteradamente la observación 1.

Como consecuencia, de la última observación y del Teorema $II.2.17$ se sigue que $I_5 = T_4$. A pesar de esta igualdad y de que la presentación del

ideal T_4 es más sencilla, nosotros preferimos en esta memoria referirnos a este ideal con el nombre de I_5.

Recordamos en este momento que todo ideal I de un álgebra de Jordan J determina una cadena decreciente de *ideales derivados*, los cuales se definen inductivamente por $I^{(0)} = I$ y $I^{(n+1)} = U_{I^{(n)}}(I^{(n)})$. En el caso en que J sea prima no-degenerada e I sea un ideal no nulo, un argumento de inducción muestra que $I^{(n)} \neq \{0\}$ para todo n.

Proposición II.2.19. *Sea J un álgebra de Jordan especial prima no-degenerada. Entonces J es de tipo hermitiano si, y sólo si, $I_5(J) \neq \{0\}$.*

Demostración. Obviamente la condición es suficiente pues I_5 es un ideal hermitiano (está contenido en E_4). Sea ahora $\mathcal{H}$ un ideal hermitiano tal que $\mathcal{H}(J) \neq \{0\}$. Por ser J prima no-degenerada se tiene que $\mathcal{H}(J)^{(3)} \neq \{0\}$. Puesto que $\mathcal{H}^{(3)} \subseteq T_4$ en virtud de ([81]; (12.5)), y $T_4 = I_5$ por los comentarios previos a la proposición, el resultado es consecuencia de la siguiente cadena de inclusiones

$$\{0\} \neq \mathcal{H}(J)^{(3)} \subseteq \mathcal{H}^{(3)}(J) \subseteq T_4(J) = I_5(J).$$

∎

II.3 Algebras de Jordan primas no-degeneradas de tipo hermitiano normadas.

En esta sección se obtiene el principal resultado del capítulo: una versión normada del Teorema de estructura hermitiana especial (Teorema $II.2.11$). Si $(J, \|.\|)$ es un álgebra de Jordan especial prima no-degenerada de tipo hermitiano normada, entonces existe un álgebra asociativa $*$-prima normada con involución isométrica $(A, *, \|.\|)$, tal que A está generada por $H(A,*)$ y

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*),$$

las normas $|.|$ y $\|.\|$ "casi" coinciden sobre $H(A,*)$, y la completación de $(A,*,|.|)$ está "ajustada". La demostración de esta última propiedad envolverá un "principio" de renormación que permite pasar de una norma en A para la que una cierta propiedad se verifica "aproximadamente" en la completación a una norma en A para la que la completación verifica la propiedad "exactamente". El soporte sobre el que se construye el parámetro asociativo normado A será el ideal de J, $I_5(J)$, donde I_5 es el ideal de todos los comedores de péntadas metidas. En este proceso la norma de A surgirá vía una representación fiel de A en el álgebra de los operadores lineales y continuos sobre conveniente espacio normado.

Comenzamos con un resultado puramente algebraico que afirma que el subespacio vectorial de los "comedores de pentadas metidas en $\mathcal{A}$" es realmente una subálgebra asociativa de $\mathcal{A}$.

Definición II.3.1. Un elemento $\mathbf{p}$ en $\mathcal{A}$ es un *comedor de péntadas metidas* si existen un número natural n y elementos $\mathbf{p}_j^i$ $(1 \leq i \leq n,$ $1 \leq j \leq 3)$ de $\mathcal{JS}$, tales que, para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ en $\mathcal{X}$ y $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ en $\mathcal{A}$ se tiene

$$\{\mathbf{r}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\mathbf{p}\mathbf{s}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{r}\mathbf{p}_1^i\mathbf{p}_2^i\mathbf{p}_3^i\mathbf{s}\},$$

donde en el miembro derecho de la igualdad hemos escrito p_j^i en lugar de $\mathbf{p}_j^i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k)$ siendo $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k$ las indeterminadas involucradas por $\mathbf{p}$.
Notaremos por $IE_5^{\mathcal{A}}$ al conjunto de los elementos de $\mathcal{A}$ que comen pentadas metidas.

Claramente $\mathcal{JS} \cap IE_5^{\mathcal{A}} = IE_5$.

Lema II.3.2. *$IE_5^{\mathcal{A}}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$. Como consecuencia $IE_5^{\mathcal{A}}$ contiene a $\mathcal{A}_5$, la subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por I_5.*

Demostración. Claramente $IE_5^{\mathcal{A}}$ es un subespacio de $\mathcal{A}$. Sean dos elementos $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n)$ y $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m)$ en $IE_5^{\mathcal{A}}$. Entonces existen $\mathbf{p}_j^i$ en $\mathcal{JS}$ tales que, para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ en $\mathcal{X}$ y $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ en $\mathcal{A}$, se tiene

$$\{\mathbf{r}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{s}\} = \sum_i \{\mathbf{r}p_1^i p_2^i p_3^i \mathbf{p}'\mathbf{s}\} ,$$

donde $p_j^i := \mathbf{p}_j^i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n)$. Igualmente para $\mathbf{p}'$ existen $\mathbf{q}_j^k$ en $\mathcal{JS}$ tales que, para cualesquiera $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ en $\mathcal{X}$ y $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ en $\mathcal{A}$, se tiene

$$\{\mathbf{r}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{p}'\mathbf{s}\} = \sum_k \{\mathbf{r}q_1^k q_2^k q_3^k \mathbf{s}\} ,$$

donde $q_j^k := \mathbf{q}_j^k(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m)$. Ahora, fijando $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ diferentes entre sí en $\mathcal{X}$ y también diferentes de las indeterminadas involucradas en los polinomios $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ y $\mathbf{p}'$, y usando para cada i el $*$-endomorfismo de $\mathcal{A}$ que fija todos los elementos de $\mathcal{X}\backslash\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y lleva $\mathbf{u}_1 \mapsto p_1^i, \mathbf{u}_2 \mapsto p_2^i$ y $\mathbf{u}_3 \mapsto p_3^i$, obtenemos

$$\{\mathbf{r}p_1^i p_2^i p_3^i \mathbf{p}'\mathbf{s}\} = \sum_k \{\mathbf{r}q_1^{i,k} q_2^{i,k} q_3^{i,k} \mathbf{s}\} ,$$

donde $q_j^{i,k} := \mathbf{q}_j^k(p_1^i, p_2^i, p_3^i, \mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m)$. Ahora, se invita al lector a buscar elementos $\mathbf{q}_j^{i,k}$ en $\mathcal{JS}$ (involucrando $n+m+4$ indeterminadas) tales que, para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ en $\mathcal{X}$ y $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ en $\mathcal{A}$, se verifique

$$q_j^{i,k} = \mathbf{q}_j^{i,k}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m)$$

y

$$\{\mathbf{r}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{s}\} = \sum_{i,k} \{\mathbf{r}q_1^{i,k} q_2^{i,k} q_3^{i,k} \mathbf{s}\} .$$

Luego $\mathbf{p}\mathbf{p}'$ está en $IE_5^{\mathcal{A}}$.

Como por definición $\mathcal{A}_5$ es la subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $I_5 \subset IE_5 = \mathcal{JS} \cap IE_5^{\mathcal{A}}$ se sigue que $\mathcal{A}_5 \subseteq IE_5^{\mathcal{A}}$. ∎

Recordamos ahora los conceptos de envolvente asociativa y de envolvente $*$-ajustada para un álgebra de Jordan especial.

Definición II.3.3. Un álgebra asociativa A es una *envolvente* (asociativa) de un álgebra de Jordan especial J si $J \subseteq A$ y A está generada como álgebra asociativa por J. Un álgebra asociativa con involución $(A,*)$ es una *$*$-envolvente* de un álgebra de Jordan J si $J \subseteq H(A,*)$ y A está generada como álgebra asociativa por J. Una *envolvente $*$-ajustada* de un álgebra de Jordan especial J es una $*$-envolvente $(A,*)$ de J tal que todo $*$-ideal no nulo de A tiene intersección no nula con J.

Como consecuencia de la siguiente Proposición veremos que toda álgebra asociativa $*$-prima $(A,*)$ generada por su parte hermítica es una envolvente $*$-ajustada de $H(A,*)$.

Proposición II.3.4. *Si $(A,*)$ es un álgebra asociativa semiprima con involución entonces todo $*$-ideal no nulo de A tiene intersección no nula con $H(A,*)$.*

Demostración. Sea I un $*$-ideal de A tal que $I \cap H(A,*) = \{0\}$. Entonces todo elemento $x \in I$ es antihermítico pues $x + x^* \in I \cap H(A,*) = \{0\}$. De aquí se sigue que el producto de dos elementos x, y de I es anticonmutativo

$$xy = (-x)(-y) = x^*y^* = (yx)^* = -yx\,.$$

Utilizando este hecho tenemos que $xyz = -yxz = yzx = -xyz$ para cualesquiera x, y, z en I, esto es $I^3 = \{0\}$. Finalmente por la semiprimidad de A se tiene que $I = \{0\}$. ∎

Como toda álgebra asociativa $*$-prima es semiprima, se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario II.3.5. *Si $(A,*)$ es un álgebra asociativa $*$-prima generada por su parte hermítica, entonces $(A,*)$ es una envolvente $*$-ajustada de $H(A,*)$.*

Si B es un álgebra asociativa con unidad $\mathbf{1}$ y J es una subálgebra de Jordan de B, entonces podemos considerar la subálgebra de Jordan

unital de B generada por J que está definida por $J^1 := J + \mathbb{K}\mathbf{1}$ (donde $\mathbb{K}$ denota el cuerpo base de J). Así, $J^1 = J$ si $\mathbf{1} \in J$, mientras que $J^1 := J \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$ en otro caso. Recordemos además que toda álgebra normada con unidad $\mathbf{1}$ se puede renormar equivalentemente de manera que $\|\mathbf{1}\| = 1$ (basta considerar la norma definida por el funcional de Minkowsky de la envolvente absolutamente convexa de $B_1 \cup \{\mathbf{1}\}$, donde B_1 designa la bola unidad cerrada para la norma inicial).

Volviendo al ambiente en el que queremos centrar la atención, notemos que si J es una subálgebra de Jordan de un álgebra asociativa B con unidad $\mathbf{1}$, y si $\|.\|$ es una norma de álgebra en J, entonces existe una norma de álgebra en J^1 que induce en J la misma topología que $\|.\|$, y tal que $\|\mathbf{1}\| = 1$. En efecto, si $\mathbf{1} \in J$ nos bastará con renormar equivalentemente J de manera que $\|\mathbf{1}\| = 1$, mientras que si $\mathbf{1} \notin J$, entonces será suficiente considerar en J^1 la norma definida por $\|x + \lambda\mathbf{1}\| := \|x\| + |\lambda|$.

Teorema II.3.6. *Sea J un álgebra de Jordan especial normada para la que $I_5(J) \neq \{0\}$ y tal que existe un álgebra asociativa $*$-prima $(A,*)$ generada por su parte hermitiana $H(A,*)$ y tal que*

$$I_5(J) = H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*).$$

Denotemos por J^1 la subálgebra de Jordan unital de $Q_s(A)$ generada por J, y sea $\|.\|$ una norma en J^1 tal que $\|\mathbf{1}\| = 1$ y que induce en J la misma topología que la norma de J.
También, para q en $Q_s(A)$ denotemos por T_q a la aplicación trilineal de $J^1 \times J^1 \times J^1$ en $H(Q_s(A),*)$ definida por $T_q : (x,y,z) \mapsto \{xyzq\}$. Si definimos $\mathbf{T}$ como el conjunto de todos los elementos q en la subálgebra de $Q_s(A)$ generada por J^1 para los cuales T_q está valuada en J^1 y es continua para la topología de la norma $\|.\|$ y para todo q en $\mathbf{T}$ definimos $|\, q \,| := \|T_q\|$, entonces

(i) $\mathbf{T}$ es un subespacio vectorial de $Q_s(A)$ y $|\,.\,|$ es una norma en $\mathbf{T}$.

(ii) $J^1A\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}$ y, para todo a en A, la aplicación bilineal $(x,q) \mapsto xaq$ de $(J^1, \|.\|) \times (\mathbf{T}, |\,.\,|)$ en $(\mathbf{T}, |\,.\,|)$ es continua. Como consecuencia, $A\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}$ y, para todo a en A, la aplicación $\Lambda_a : q \mapsto aq$ es un operador lineal continuo en $(\mathbf{T}, |\,.\,|)$.

(iii) $AJ^1\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}$ *y, para toto* a *en* A, *la aplicación bilineal* $(x,q) \mapsto axq$ *de* $(J^1, \|.\|) \times (\mathbf{T}, |\,.\,|)$ *en* $(\mathbf{T}, |\,.\,|)$ *es continua.*

Demostración. Claramente $\mathbf{T}$ es un subespacio vectorial de $Q_s(A)$ y $|\,.\,|$ es una seminorma en $\mathbf{T}$. Con anterioridad al hecho de que $|\,.\,|$ es una norma en $\mathbf{T}$ vamos a probar *(ii)*. Notemos previamente que como A está generada por $H(A,*)$ y $H(A,*) \subseteq J^1$, A está contenida en la subálgebra de $Q_s(A)$ generada por J^1 y por tanto lo mismo puede decirse de $J^1A\mathbf{T}$ y $AJ^1\mathbf{T}$.

(ii). Fijemos a en A. Como A está generada por $H(A,*) = I_5(J)$ se sigue que $A = \mathcal{A}_5(J)$, y por tanto existe $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k)$ en $\mathcal{A}_5$ tal que $a = \mathbf{p}(y_1, ..., y_k)$ para convenientes $y_1, ..., y_k$ en J. Como $\mathcal{A}_5 \subseteq IE_5^{\mathcal{A}}$ (Lema $II.3.2$), existen un número natural n y elementos $\mathbf{p}_j^i$ $(1 \leq i \leq n,$ $1 \leq j \leq 3)$ en $\mathcal{JS}$ tales que, para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ en $\mathcal{X}$ y $\mathbf{s}$ en $\mathcal{A}$ se tiene

$$\{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4\mathbf{p}\mathbf{s}\} = \sum_{i=1}^{n} \{p_1^i p_2^i p_3^i \mathbf{s}\}\,, \tag{2.3}$$

donde $p_j^i = \mathbf{p}_j^i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k)$. Dado q en $\mathbf{T}$, de la inclusión $\mathbf{T} \subseteq \mathcal{A}(J^1)$ se sigue que existen $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m)$ en $\mathcal{A}$ y $z_1, ..., z_m$ en J^1 tales que $q = \mathbf{s}(z_1, ..., z_m)$. Ahora nótese que, salvo conveniente cambio de las indeterminadas si ello fuese necesario, podemos suponer que $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m$ son todas diferentes de $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k$. Para x, y, z, t en J^1, eligiendo las indeterminadas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ diferentes entre sí y diferentes de $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m$, y considerando el $*$-homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}(J^1)$ que lleva $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m$ en $y, z, t, x, y_1, ..., y_k, z_1, ..., z_m$ respectivamente, la expresión (2.3) se convierte en

$$T_{xaq}(y,z,t) = \{yztxaq\} = \sum_{i=1}^{n} \{\tilde{p}_1^i \tilde{p}_2^i \tilde{p}_3^i q\} = \sum_{i=1}^{n} T_q(\tilde{p}_1^i, \tilde{p}_2^i, \tilde{p}_3^i),$$

donde $\tilde{p}_j^i := \mathbf{p}_j^i(y, z, t, x, y_1, ..., y_k)$ son elementos de J^1. Como T_q es J^1-valuada, se sigue que, para todo x en J^1, T_{xaq} es también J^1-valuada.

Puesto que p_j^i son polinomios Jordan y J^1 es un álgebra de Jordan normada, las acciones de estos sobre J^1 son continuas, luego existen constantes positivas M_j^i tales que

$$\|\mathrm{p}_j^i(y,z,t,x,y_1,...,y_k)\| \leq M_j^i \ ,$$

para cualesquiera x,y,z,t en la bola unidad cerrada de J^1. Si denotamos por $\alpha_a := \sum_{i=1}^n M_1^i M_2^i M_3^i$, entonces, para x fijo en J^1 y para cualesquiera y,z,t en la bola unidad cerrada de J^1, se tiene

$$\begin{aligned} \|T_{xaq}(y,z,t)\| &= \|\textstyle\sum_{i=1}^n T_q(\tilde{p}_1^i,\tilde{p}_2^i,\tilde{p}_3^i)\| \\ &\leq \|T_q\| \textstyle\sum_{i=1}^n M_1^i M_2^i M_3^i \|x\| \\ &= \alpha_a \|x\| \ \|T_q\|. \end{aligned}$$

Luego $xaq \in \mathbf{T}$ y

$$| \, xaq \, | \leq \alpha_a \|x\| \ \ | \, q \, | \, . \tag{2.4}$$

Así, $J^1 A\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}$ y, para a en A, la aplicación bilineal $(x,q) \mapsto xaq$ de $(J^1, \|.\|) \times (\mathbf{T}, |\, . \,|)$ en $(\mathbf{T}, |\, . \,|)$ es continua. Como consecuencia (tómese $x = \mathbf{1}$), $A\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}$ y, para a en A, la aplicación lineal $\Lambda_a : q \mapsto aq$ en $(\mathbf{T}, |\, . \,|)$ es continua.

(i). Veamos que el subespacio anulador N de $|\, . \,|$ se reduce a cero, y que por tanto $|\, . \,|$ es una norma. Por (2.4) claramente $AN \subseteq N$, y por tanto $A \cap N$ es un ideal izquierdo de A. Como para todo q en N se tiene $0 = T_q(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) = \{q\} = \frac{1}{2}(q + q^*)$, se sigue que N está contenido en la parte antisimétrica $S(Q_s(A),*) := \{q \in Q_s(A) : q^* = -q\}$ de $Q_s(A)$, y así $A \cap N$ es un ideal izquierdo de A contenido en $S(A,*)$. En consecuencia $A \cap N$ es un $*$-ideal de A con intersección nula con $H(A,*)$. Pero, puesto que por el Corolario $II.3.5$ $(A,*)$ es una envolvente $*$-ajustada de $H(A,*)$, se sigue que $A \cap N = \{0\}$. Usando la caracterización de $Q_s(A)$, si q está en N podemos considerar un $*$-ideal no nulo I de A tal que $Iq \subseteq A$ y notemos que entonces $Iq \subseteq A \cap N = \{0\}$, luego $q = 0$. Así $N = \{0\}$ y por tanto $|\, . \,|$ es una norma en $\mathbf{T}$.

(iii). Comencemos notando la validez en toda álgebra asociativa con involución $(B,*)$ de la identidad

$$\{hb_1...b_n\} + \{b_1...b_nh\} = 2\{h\{b_1...b_n\}\}$$

para cualesquiera $b_1, ..., b_n$ en B y h en $H(B,*)$. Usando reiteradamente esta identidad se tiene para q en $Q_s(A)$ y x, y, z en J^1 que

$$\begin{aligned}
&T_{q*}(x,y,z) = \{xyzq^*\} = \{qzyx\} \\
&= -\{xqzy\} + 2\{x\{qzy\}\} \\
&= \{yxqz\} - 2\{y\{xqz\}\} - 2\{x\{yqz\}\} + 4\{x\{y\{qz\}\}\} \\
&= -\{zyxq\} + 2\{z\{yxq\}\} + 2\{y\{zxq\}\} - 4\{y\{z\{xq\}\}\} \\
&\quad +2\{x\{zyq\}\} - 4\{x\{z\{yq\}\}\} - 4\{x\{y\{zq\}\}\} + 8\{x\{y\{z\{q\}\}\}\} \\
&= -T_q(z,y,x) + 2\{zT_q(y,x,1)\} + 2\{yT_q(z,x,1)\} \\
&\quad -4\{y\{zT_q(x,1,1)\}\} + 2\{xT_q(z,y,1)\} - 4\{x\{zT_q(y,1,1)\}\} \\
&\quad -4\{x\{yT_q(z,1,1)\}\} + 8\{x\{y\{zT_q(1,1,1)\}\}\} .
\end{aligned}$$

De este desarrollo y por ser la subálgebra de $Q_s(A)$ generada por J^1 $*$-invariante se sigue que $\mathbf{T}$ es $*$-invariante, esto es, si $q \in \mathbf{T}$ entonces $q^* \in \mathbf{T}$ y además $\mid q^* \mid \leq 27 \mid q \mid$. Como consecuencia, $\{q\} \in \mathbf{T}$ cuando $q \in \mathbf{T}$ y

$$\mid \{q\} \mid \leq 14 \mid q \mid . \tag{2.5}$$

Para a en A, x, y, z, t en J^1 y q en $\mathbf{T}$, se tiene

$$T_{axq}(y,z,t) = \{yztaxq\} = -\{yztxa^*q\} + 2\{yzt\{xa^*\}q\} .$$

Ahora, aplicando al último sumando de la anterior expresión la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\{h_1h_2h_3h_4b\} = \; &\{\{h_1h_2h_3h_4\}b\} + \{h_1h_2\{h_3h_4\}b\} - \{h_1\{h_2h_4\}h_3b\} \\
&+\{\{h_1h_4\}h_2h_3b\} - \{h_4\{h_1h_2\}h_3b\} \\
&+\{h_4h_2\{h_1h_3\}b\} - \{h_4\{h_2h_3\}h_1b\},
\end{aligned}$$

la cual es cierta en toda álgebra asociativa con involución $(B,*)$ y cualesquiera h_1,h_2,h_3,h_4 en $H(B,*)$ y b en B, obtenemos

$$\begin{aligned}T_{axq}(y,z,t) = \; & -\{yztxa^*q\}+2\Big[\;\{\{yzt\{xa^*\}\}q\}+\{yz\{t\{xa^*\}\}q\}\\ & -\{y\{z\{xa^*\}\}tq\}+\{\{y\{xa^*\}\}ztq\}-\{\{xa^*\}\{yz\}tq\}\\ & +\{\{xa^*\}z\{yt\}q\}-\{\{xa^*\}\{zt\}yq\}\;\Big].\end{aligned}$$

Por la inclusión $J^1A\mathbf{T}\subseteq\mathbf{T}$ demostrada en *(ii)* se tiene que $xa^*q\in\mathbf{T}$. Como $T_1(x,y,z)=x.(y.z)+z.(y.x)-(x.z).y$, claramente $1\in\mathbf{T}$ (con $\mid 1\mid\leq 3$), y por tanto también a^* y xa^* están en $\mathbf{T}$. Luego $\{xa^*\}=T_{a^*}(x,1,1)\in J^1$ y, por ser $\mathbf{T}$ $*$-invariante, también $\{xa^*\}\in\mathbf{T}$. Ahora podemos reescribir la anterior expresión como sigue

$$\begin{aligned}&T_{axq}(y,z,t)=\\ &-T_{xa^*q}(y,z,t)+2\Big[\;T_q(T_{\{xa^*\}}(y,z,t),1,1)+T_q(y,z,T_{\{xa^*\}}(t,1,1))\\ &-T_q(y,T_{\{xa^*\}}(z,1,1),t)+T_q(T_{\{xa^*\}}(y,1,1),z,t)-T_q(\{xa^*\},\{yz\},t)\\ &+T_q(\{xa^*\},z,\{yt\})-T_q(\{xa^*\},\{zt\},y)\;\Big]\end{aligned}$$

demostrando ostensiblemente que $axq\in\mathbf{T}$ y que

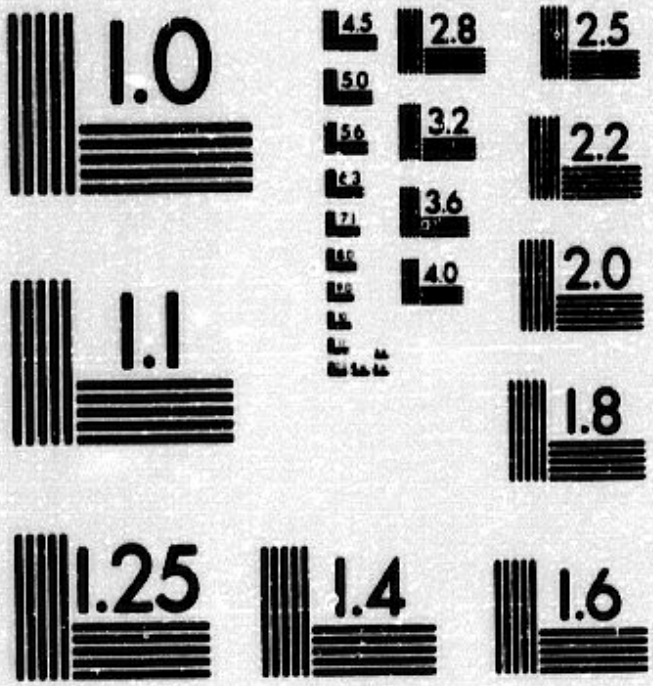
$$\mid axq\mid\leq\mid xa^*q\mid+2\mid q\mid\Big[\;4\mid\{xa^*\}\mid+3\|\{xa^*\}\|\Big]\;.$$

Como $\|\{xa^*\}\|=\|T_{a^*}(x,1,1)\|\leq\mid a^*\mid\|x\|$, de (2.5) y (2.4) se sigue que

$$\mid\{xa^*\}\mid\leq 14\mid xa^*\mid\leq 14\alpha_{a^*}\|x\|\;\mid 1\mid\leq 42\alpha_{a^*}\|x\|\;.$$

Usando de nuevo (2.4), a partir de las dos cadenas de desigualdades anteriores obtenemos que

$$\mid axq\mid\leq\alpha_{a^*}\|x\|\;\mid q\mid+2\mid q\mid\Big[\;168\alpha_{a^*}\|x\|+3\mid a^*\mid\|x\|\Big]=\beta_a\|x\|\;\mid q\mid \tag{2.6}$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

la cual es cierta en toda álgebra asociativa con involución $(B,*)$ y cualesquiera h_1,h_2,h_3,h_4 en $H(B,*)$ y b en B, obtenemos

$$\begin{aligned}T_{axq}(y,z,t) = \; & -\{yztxa^*q\}+2\Big[\;\{\{yzt\{xa^*\}\}q\}+\{yz\{t\{xa^*\}\}q\}\\ & -\{y\{z\{xa^*\}\}tq\}+\{\{y\{xa^*\}\}ztq\}-\{\{xa^*\}\{yz\}tq\}\\ & +\{\{xa^*\}z\{yt\}q\}-\{\{xa^*\}\{zt\}yq\}\;\Big].\end{aligned}$$

Por la inclusión $J^1A\mathbf{T}\subseteq\mathbf{T}$ demostrada en *(ii)* se tiene que $xa^*q\in\mathbf{T}$. Como $T_1(x,y,z)=x.(y.z)+z.(y.x)-(x.z).y$, claramente $\mathbf{1}\in\mathbf{T}$ (con $|\,\mathbf{1}\,|\leq 3$), y por tanto también a^* y xa^* están en $\mathbf{T}$. Luego $\{xa^*\}=T_{a^*}(x,\mathbf{1},\mathbf{1})\in J^1$ y, por ser $\mathbf{T}$ $*$-invariante, también $\{xa^*\}\in\mathbf{T}$. Ahora podemos reescribir la anterior expresión como sigue

$$\begin{aligned}&T_{axq}(y,z,t)=\\ &-T_{xa^*q}(y,z,t)+2\Big[\;T_q(T_{\{xa^*\}}(y,z,t),\mathbf{1},\mathbf{1})+T_q(y,z,T_{\{xa^*\}}(t,\mathbf{1},\mathbf{1}))\\ &-T_q(y,T_{\{xa^*\}}(z,\mathbf{1},\mathbf{1}),t)+T_q(T_{\{xa^*\}}(y,\mathbf{1},\mathbf{1}),z,t)-T_q(\{xa^*\},\{yz\},t)\\ &+T_q(\{xa^*\},z,\{yt\})-T_q(\{xa^*\},\{zt\},y)\;\Big]\end{aligned}$$

demostrando ostensiblemente que $axq\in\mathbf{T}$ y que

$$|\,axq\,|\leq|\,xa^*q\,|+2\,|\,q\,|\left[\;4\,|\,\{xa^*\}\,|+3\|\{xa^*\}\|\right].$$

Como $\|\{xa^*\}\|=\|T_{a^*}(x,\mathbf{1},\mathbf{1})\|\leq|\,a^*\,|\;\|x\|$, de (2.5) y (2.4) se sigue que

$$|\,\{xa^*\}\,|\leq 14\,|\,xa^*\,|\leq 14\alpha_{a^*}\|x\|\;\;|\,\mathbf{1}\,|\leq 42\alpha_{a^*}\|x\|\,.$$

Usando de nuevo (2.4), a partir de las dos cadenas de desigualdades anteriores obtenemos que

$$|\,axq\,|\leq\alpha_{a^*}\|x\|\;\;|\,q\,|+2\,|\,q\,|\left[\;168\alpha_{a^*}\|x\|+3\,|\,a^*\,|\,\|x\|\right]=\beta_a\|x\|\;\;|\,q\,| \tag{2.6}$$

donde $\beta_a := 337\alpha_{a^*} + 6 \mid a^* \mid$.
Luego $AJ^1\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}$ y, para a en A, la aplicación bilineal $(x,q) \mapsto axq$ de $(J^1, \|.\|) \times (\mathbf{T}, |\,.\,|)$ en $(\mathbf{T}, |\,.\,|)$ es continua. ∎

Para una etapa en la demostración del teorema principal del capítulo, aislaremos en la siguiente Proposición un argumento que ya ha sido bastante explotado en la literatura (véase [26] ; Theorem 2 o [97] ; Theorem 2).

Proposición II.3.7. *Sea $(A, \|.\|, *)$ un álgebra asociativa normada con involución isométrica y tal que todo $*$-ideal no nulo de A tiene intersección no nula con $H(A,*)$. Entonces existe una norma de álgebra $|.|$ en A verificando:*

(a) $|h| = \|h\|$ para todo h en $H(A,*)$,

(b) $|a| \leq \|a\|$ para todo a en A,

(c) $|a^*| = |a|$ para todo a en A, y

(d) Si $(\hat{A}, |.|, *)$ denota la completación de $(A, |.|, *)$ entonces todo $*$-ideal no nulo de $\hat{A}$ tiene intersección no nula con $H(\hat{A},*)$.

El argumento básico en la demostración de esta Proposición lleva a un principio general que vamos a aislar, y que informalmente puede enunciarse como sigue: Si un álgebra asociativa normada con involución isométrica es tal que su completación es "ajustable" para cierta propiedad que cumplía el álgebra de partida, entonces puede reemplazarse la norma inicial por otra más pequeña, que sigue haciendo la involución isométrica, y que cuenta con la ventaja de que el álgebra completación satisface la referida propiedad. Más formalmente:

Proposición II.3.8. *Sea $(A, \|.\|, *)$ un álgebra asociativa normada con involución isométrica y denotemos por $(B, \|.\|, *)$ a su completación. Si I es un $*$-ideal cerrado de B tal que $I \cap A = \{0\}$, entonces la aplicación $\phi : a \mapsto a + I$ de $(A, \|.\|, *)$ en $(B/I, \|.\|, *)$ es un $*$-monomorfismo contractivo con rango denso, por lo que definiendo $|a| := \|a + I\|$ se obtiene una norma de álgebra en A tal que:*

i) $|a| \leq \|a\|$ *para todo* a *en* A,

ii) $|a^*| = |a|$ *para todo* a *en* A, *y*

iii) La completación de $(A, |.|, *)$, $(\hat{A}, |.|, *)$, *es, vía la única extensión continua de* ϕ, *totalmente isomorfa al álgebra de Banach* $(B/I, \|.\|, *)$.

Demostración. La aplicación ϕ es la composición de la inclusión de A en B con la aplicación cociente de B sobre B/I, por lo que claramente ϕ es un $*$-homomorfismo contractivo. La inyectividad de ϕ se sigue del hecho $I \cap A = \{0\}$. Como A es denso en B y la aplicación cociente de B sobre B/I es sobreyectiva, se sigue que ψ tiene rango denso. Ahora, $|.|$, definida como en el enunciado, no es otra cosa que la traslación por ϕ de la norma cociente de B/I, por lo que claramente es una norma de álgebra en A que verifica las propiedades *i)* y *ii)*. Finalmente, puesto que el $*$-monomorfismo ϕ de $(A, |.|, *)$ en $(B/I, \|.\|, *)$ es isométrico por definición y tiene rango denso, este se extiende por continuidad a un $*$-isomorfismo isométrico de $(\hat{A}, |.|, *)$ en $(B/I, \|.\|, *)$. ∎

Demostración de la Proposición II.3.7. Sea $(B, \|.\|, *)$ la completación de $(A, \|.\|, *)$. Puesto que la involución $*$ es isométrica, $S(B, *)$ es un subespacio cerrado de B, y en consecuencia, su corazón (el más grande ideal contenido en él), llámese I, es un $*$-ideal cerrado de B. Además, como $I \cap A$ es un $*$-ideal de A cuya intersección con $H(A, *)$ es $(I \cap A) \cap H(A, *) \subseteq S(B, *) \cap H(B, *) = \{0\}$ se tiene que por hipótesis $I \cap A = \{0\}$. Por la Proposición anterior la aplicación $\phi : a \mapsto a + I$ de $(A, \|.\|, *)$ en $(B/I, \|.\|, *)$ es un $*$-monomorfismo con rango denso, y en consecuencia $|a| := \|\phi(a)\|$ define una norma de álgebra en A verificando *(b)* y *(c)*, y tal que la completación de $(A, |.|, *)$ es totalmente isomorfa al álgebra de Banach $(B/I, \|.\|, *)$.

Si $h \in H(A, *)$, se tiene para todo $s \in S(B, *)$ que

$$\begin{array}{lll} \|h\| & = \|\frac{1}{2}[(h+s)+(h-s)]\| & \leq \frac{1}{2}[\|h+s\| + \|h-s\|] \\ & = \frac{1}{2}[\|h+s\| + \|(h+s)^*\|] & = \|h+s\|. \end{array}$$

Luego $\|h\| \leq |h|$, que junto con *(b)* nos da $\|h\| = |h|$ para todo h en $H(A,*)$, que es la propiedad *(a)*.

Finalmente, veamos la propiead *(d)*. Puesto que para un subespacio $*$-invariante de B, el estar contenido en $S(B,*)$ es equivalente a tener corte nulo con $H(B,*)$, se sigue de la definición de I que todo $*$-ideal de B que contenga estrictamente a I corta a $H(B,*)$. Este hecho junto con que todo $*$-ideal de B/I no nulo es la proyección de un $*$-ideal de B que contiene estrictamente a I, permite deducir que todo $*$-ideal no nulo de B/I tiene corte no nulo con $H(B/I,*)$. Ahora *(d)* es consecuencia del isomorfismo algebraico de $(\widehat{A},*)$ y $(B/I,*)$. ∎

Estamos ya en condiciones de probar el principal resultado del capítulo.

Teorema II.3.9. *Sea $(J,\|.\|)$ un álgebra de Jordan especial prima no-degenerada de tipo hermitiano normada. Entonces existe un álgebra asociativa $*$-prima normada $(A,*,|.|)$, la cual está generada algebraicamente por $H(A,*)$, tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y conteniendo $H(A,*)$ como un ideal,*

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*),$$

y satisfaciendo las siguientes propiedades:

(i) $\|h\| \leq |h|$ *para todo h en $H(A,*)$,*

(ii) Si $a \in A$ es tal que $aJ + Ja \subseteq A$ entonces las aplicaciones $x \mapsto ax$ y $x \mapsto xa$ de $(J,\|.\|)$ en $(A,|.|)$ son continuas,

(iii) $|a^*| = |a|$ *para todo $a \in A$, y*

(iv) Si $(\widehat{A},*)$ denota la completación de $(A,*)$ respecto a la norma $|.|$ entonces todo $*$-ideal no nulo de $\widehat{A}$ tiene intersección no nula con $H(\widehat{A},*)$.

Demostración. En virtud de la Proposición $II.2.19$, por ser J de tipo hermitiano se tiene que $I_5(J) \neq \{0\}$. Por el Teorema de estructura hermitiana y el Corolario $II.3.5$ existe un álgebra asociativa $*$-prima $(A,*)$ la cual es una envolvente $*$-ajustada de $H(A,*)$ y tal que

$$I_5(J) = H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*).$$

A partir del hecho inmediato de que $k\|.\|$ es una norma de álgebra en A siempre que $k \geq 1$ y $\|.\|$ sea una norma de álgebra en A, se deduce en seguida la validez del enunciado del teorema siempre que, para alguna renormación equivalente de J se consiga una norma de álgebra en A para la que se verifique el enunciado.

Sea J^1 la subálgebra de Jordan unital de $Q_s(A)$ generada por J, y consideremos una norma de álgebra $\|.\|$ en J^1 que induzca en J la misma topología que la norma inicial y tal que $\|\mathbf{1}\| = 1$. Denotemos, para todo q en $Q_s(A)$, por T_q a la aplicación de $J^1 \times J^1 \times J^1$ en $Q_s(A)$ definida por $T_q(x,y,z) := \{xyzq\}$. Por el Teorema $II.3.6$ se verifica que

$$T := \{q \in Q_s(A) : T_q \text{ es } J^1\text{-valuada y } \|.\|\text{-continua}\}$$

es un subespacio vectorial de $Q_s(A)$, $|\ q\ | := \|T_q\|$ $(q \in T)$ define una norma en T, $J^1AT \subseteq T$, $AJ^1T \subseteq T$, y para todo a en A las aplicaciones $(x,q) \mapsto xaq$ y $(x,q) \mapsto axq$ de $(J^1,\|.\|) \times (T,|\ .\ |)$ en $(T,|\ .\ |)$ son continuas. Como consecuencia $AT \subseteq T$ y, para todo a en A, la ley $\Lambda_a : q \mapsto aq$ determina un operador lineal continuo en $(T,|\ .\ |)$. Es claro que la aplicación $a \mapsto \Lambda_a$ es un homomorfismo de álgebras de A en el álgebra asociativa normada $BL(T,|\ .\ |)$ de todos los operadores lineales y continuos en $(T,|\ .\ |)$. Además, ya que $A \subseteq T$ (téngase en cuenta que $\mathbf{1} \in T$), la anterior representación de A en $BL(T,|\ .\ |)$ es inyectiva: si $\Lambda_a = 0$, entonces $aA = \{0\}$, y en consecuencia $a = 0$ por ser A semiprima (en realidad $*$-prima). Denotando por $|\ .\ |_{op}$ la norma de operadores en $BL(\mathbf{T},|\ .\ |)$ correspondiente a la norma $|\ .\ |$ en $\mathbf{T}$ y definiendo para a en A $\|\!|a|\!\| := 3Max\{|\ \Lambda_a\ |_{op}, |\ \Lambda_{a^*}\ |_{op}\}$ obtenemos una norma de álgebra en A haciendo la involución $*$ isométrica. Además, para h en $H(A,*)$ se tiene

$$\|h\| = \|\{111h\}\| \leq \|T_h\| = |\, h \,| = |\, \Lambda_h(1) \,| \leq |\, \Lambda_h \,|_{op} |\, 1 \,| \leq 3 \,|\, \Lambda_h \,|_{op} = \|\!|h|\!\|.$$

También, si a está en A y verifica $aJ + Ja \subseteq A$, de la continuidad de las aplicaciones $(x,q) \mapsto xaq$ y $(x,q) \mapsto a^*xq$ de $(J^1, \|.\|) \times (T, |\,.\,|)$ en $(T, |\,.\,|)$ se sigue la existencia de $\alpha_a, \beta_{a^*} \geq 0$ (acaso véanse las desigualdades (2.4) y (2.6)) tales que para todo x en J

$$|\, \Lambda_{xa} \,|_{op} \leq \alpha_a \|x\| \text{ and } |\, \Lambda_{(xa)^*} \,|_{op} \leq \beta_{a^*} \|x\| \,,$$

así $\|\!|xa|\!\| \leq 3Max\{\alpha_a, \beta_{a^*}\}\|x\|$ y la aplicación $x \mapsto ax$ de $(J, \|.\|)$ en $(A, \|\!|.|\!\|)$ es continua. Puesto que $\|\!|.|\!\|$ hace la involución isométrica, se sigue inmediatamente que también la aplicación $x \mapsto xa$ de $(J, \|.\|)$ en $(A, \|\!|.|\!\|)$ es continua.

De esta forma, si nosotros tomamos $|\!|.|\!| := \|\!|.|\!\|$ entonces se verifican las propiedades *(i)*, *(ii)*, y *(iii)* del enunciado del teorema, pero no necesariamente la propiedad *(iv)*. Para obtener la norma deseada $|\!|.|\!|$ basta aplicar la Proposición *II*.3.7. ∎

Capítulo III

Algebras de Jordan-Banach especiales primas no-degeneradas no Clifford.

Dada un álgebra de Jordan prima no-degenerada de tipo hermitiano normada $(J, \|.\|)$, el Teorema $II.3.9$ nos asegura la existencia de un álgebra asociativa $*$-prima normada con una involución isométrica $(A, *, |.|)$ verificando ciertas propiedades, dos de ellas de buena avenencia entre las dos normas que nos dicen que sobre $H(A,*)$ son "casi" equivalentes. Esta álgebra asociativa A tiene dos agrandamientos naturales: uno de tipo puramente algebraico, el álgebra de cocientes simétricos de Martindale $Q_s(A)$ que contiene a J como subálgebra de Jordan, y otro de naturaleza analítica, su completación $(\widehat{A}, |.|, *)$. En esta situación general no conocemos ninguna relación entre ambos agrandamientos. En este capítulo probaremos que si el álgebra de Jordan normada $(J, \|.\|)$ es además Banach y si de hecho no es un orden central en un álgebra de Jordan de una forma bilineal, entonces existe un álgebra asociativa $*$-prima normada con involución isometrica $(A, *, |.|)$ manteniendo las propiedades *(i)-(iv)* del Teorema $II.3.9$ y tal que su completación $\widehat{A}$ puede verse naturalmente como una $*$-subalgebra de $Q_s(A)$ y la parte hermítica de la completación de A está metida continuamente en J.

Para su demostración son necesarios diversos resultados sobre extensiones de homomorfismos asociativos y de Jordan de los que nos ocuparemos en la primera sección. En la sección segunda se probará el principal resultado del capítulo, ya comentado en el parrafo anterior, el Teorema $III.2.1$.

III.1 Extensiones de homomorfismos.

En esta sección, se presentan en ambiente asociativo varios resultados sobre extensiones de homomorfismos que involucran al álgebra de los multiplicadores y al álgebra de cocientes simétricos de álgebras semiprimas y $*$-primas. En ambiente Jordan se recoge un resultado probado por K. McCrimmon, sobre extensiones de epimorfismos Jordan a $*$-epimorfismos asociativos entre envolventes $*$-ajustadas.

Comenzamos la sección con un resultado sobre extensión de homomorfismos asociativos que supone una mejora de la condición *(ii)* de la propiedad universal del álgebra de los multiplicadores de un álgebra aso-

ciativa semiprima (Proposición I.3.5).

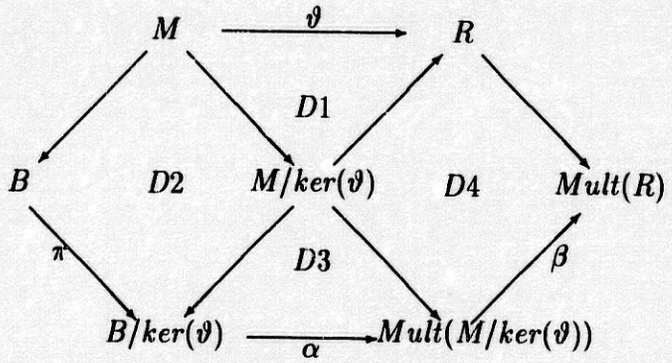
Proposición III.1.1 . *Sean B y R álgebras asociativas con R semiprima, sea M un ideal de B y ϑ un epimorfismo de M en R. Entonces ϑ se extiende de forma única a un homomorfismo $\widehat{\vartheta}$ de B en el álgebra $Mult(R)$ de los multiplicadores de R. Además, si B y R tienen una involución $*$, si M es $*$-invariante y ϑ es un $*$-homomorfismo, entonces $\widehat{\vartheta}$ es también un $*$-homomorfismo.*

Demostración. Comenzamos probando la unicidad supuesta la existencia. Sean ϑ_1, ϑ_2 dos homomorfismos de B en $Mult(R)$ extendiendo ϑ. Para b en B y m en M se tiene

$$[\vartheta_1(b) - \vartheta_2(b)]\vartheta(m) = \vartheta_1(bm) - \vartheta_2(bm) = \vartheta(bm) - \vartheta(bm) = 0.$$

Por ser $\vartheta(M) = R$, para todo b en B se tiene $[\vartheta_1(b) - \vartheta_2(b)]R = \{0\}$, y de aquí se sigue que $\vartheta_1(b) = \vartheta_2(b)$ pues R es un ideal esencial del álgebra semiprima $Mult(R)$.

Para probar la existencia del homomorfismo extensión de ϑ utilizaremos la conmutatividad de cuatro diagramas que están recogidos en la figura adjunta.



En primer lugar, vía el primer teorema de isomorfía, descomponemos el epimorfismo ϑ, que aparece como la composición de la aplicación cociente de M en $M/ker(\vartheta)$ y del isomorfismo que induce de $M/ker(\vartheta)$ en R. Esta descomposición de ϑ origina la conmutatividad del diagrama $D1$.

Veamos ahora que $ker(\vartheta)$ es un ideal de B. Dados b en B y m en $ker(\vartheta)$, para todo m' en M se tiene que

$$\vartheta(m')\vartheta(bm) = \vartheta(m'bm) = \vartheta(m'b)\vartheta(m) = 0$$

y

$$\vartheta(mb)\vartheta(m') = \vartheta(mbm') = \vartheta(m)\vartheta(bm') = 0.$$

Usando de nuevo la sobreyectividad de ϑ se tiene $R\vartheta(bm) = \{0\}$ y $\vartheta(mb)R = \{0\}$, y por tanto $bm, mb \in ker(\vartheta)$ dada la semiprimidad de R. Así, $ker(\vartheta)$ es un ideal de B, lo que permite ver $M/ker(\vartheta)$ como un ideal de $B/ker(\vartheta)$ y obsérvese que entonces la aplicación cociente de B sobre $B/ker(\vartheta)$ es una extensión de la aplicación cociente de M sobre $M/ker(\vartheta)$, lo que origina la conmutatividad del diagrama $D2$. $M/ker(\vartheta) \cong R$ es un álgebra semiprima, luego por la propiedad universal del álgebra de los multiplicadores la inclusión de $M/ker(\vartheta)$ en $Mult(M/ker(\vartheta))$ se extiende (de forma única) a un homomorfismo α de $B/ker(\vartheta)$ en $Mult(M/ker(\vartheta))$ que determina la conmutatividad del diagrama $D3$. Ahora consideramos el isomorfismo $\beta : Mult(M/Ker(\vartheta)) \cong Mult(R)$ inducido por el isomorfismo $M/Ker(\vartheta) \cong R$, para obtener el diagrama conmutativo $D4$. Como fruto del trabajo realizado se obtiene que definiendo $\widehat{\vartheta} := \beta \circ \alpha \circ \pi$ se consigue un homomorfismo de B en $Mult(R)$ que extiende a ϑ.

Finalmente, si además B y R tienen una involución $*$, M es $*$-invariante y ϑ es un $*$-homomorfismo, entonces la aplicación $b \mapsto (\widehat{\vartheta}(b^*))^*$ es también un homomorfismo de B en $Mult(R)$ que extiende ϑ. Como anteriormente hemos probado la unicidad de la extensión, obtenemos que $\widehat{\vartheta}$ es un $*$-homomorfismo. ∎

La observación de que el resultado anterior sigue siendo válido cuando

el álgebra de los multiplicadores se sustituye por el álgebra de cocientes simétricos es el contenido del siguiente corolario.

Corolario III.1.2. *Sean B y R álgebras asociativas con R semiprima, sea M un ideal de B y ϑ un epimorfismo de M en R. Entonces ϑ se extiende de forma única a un homomorfismo $\widehat{\vartheta}$ de B en el álgebra $Q_s(R)$ de los cocientes simétricos de Martindale de R. Además, si B y R tienen una involución $*$, M es $*$-invariante y ϑ es un $*$-homomorfismo, entonces $\widehat{\vartheta}$ es también un $*$-homomorfismo.*

Demostración. Puesto que $Mult(R)$ es una subálgebra de $Q_s(R)$, la existencia del homomorfismo extensión se sigue directamente de la Proposición. Para probar la unicidad, notemos que si $\vartheta' : B \to Q_s(R)$ es un homomorfismo que extiende a ϑ, entonces para todo b en B se verifica que

$$\vartheta'(b)R = \vartheta'(b)\vartheta'(M) = \vartheta'(bM) \subseteq \vartheta'(M) = R,$$

y análogamente, $R\vartheta'(b) \subseteq R$. Así,

$$\vartheta'(B) \subseteq \{q \in Q_s(R) : qR + Rq \subseteq R\} = Mult(R),$$

y en consecuencia ϑ' puede verse como la composición de un homomorfismo de B en $Mult(R)$ que extiende a ϑ con el homomorfismo inclusión de $Mult(R)$ en $Q_s(R)$. Este hecho hace que también la unicidad de la extensión se siga directamente de la Proposición. ∎

Otro resultado sobre extensión de homomorfismos que necesitamos es un resultado que se puede considerar clásico en la teoría de anillos simétricos de cocientes y que básicamente se encuentra recogido en la Proposition 3.1 del artículo pionero de D. S. Passman [85]. Su contenido expresa el hecho de que los ideales esenciales de un álgebra asociativa semiprima contienen suficiente información como para reconstruir el anillo simétrico de cocientes del álgebra y por tanto "de alguna manera" la propia álgebra. Hablando coloquialmente, si A es un álgebra semiprima e I es un ideal esencial de A, entonces $Q_s(A) = Q_s(I)$. Esta es la razón que justifica plenamente el apelativo de Teorema Memoria

(Asociativo) dado por K. McCrimmon en [80]; Theorem 4.1 a este resultado.

Teorema III.1.3. (Teorema Memoria Asociativo). *Sea A un álgebra asociativa semiprima. Si I es un ideal esencial de A, entonces la inclusión $I \subseteq A$ se extiende de forma única a un isomorfismo de $Q_s(I)$ en $Q_s(A)$. Si además A es involutiva e I es un $*$-ideal, entonces el isomorfismo de $Q_s(I)$ en $Q_s(A)$ que extiende la inclusión de I en A es de hecho un $*$-isomorfismo.*

Un "Teorema Memoria Jordan" muy general asegurando que las envolventes asociativas de "sistemas triples Jordan" están implícitas en convenientes ideales Jordan es obtenido por K. McCrimmon en [80]; Therorem 4.2. Nuestro próximo objetivo es establecer un resultado que debe ser considerado como un Teorema Memoria Jordan, bien que es independiente del obtenido por K. McCrimmon. El punto de arranque para la obtención de este resultado lo proporciona la siguiente proposición establecida en [27]; Proposition 3.2, cuya demostración nosotros incluimos por complitud, y que no es más que la versión involutiva de la Proposición *I*.2.4.

Proposición III.1.4. *Sean B un álgebra asociativa con una involución $*$, A una $*$-subálgebra de B, x en $H(B,*)$ tal que $x.H(A,*) \subseteq A$, y denotemos por C la subálgebra de A generada por $H(A,*)$. Entonces el conjunto $P_x := \{c \in C : cx, xc \in A\}$ es un $*$-ideal de C que contiene al conjunto $\{h^2 : h \in H(A,*)\}$.*

Demostración. Obsérvese que

$$S := \{a \in A : ax + xd \in A \text{ para algún } d \text{ en } A\}$$

es una subálgebra de A. Claramente S es un subespacio vectorial de A, y nótese que si $a, a' \in A$ con $ax + xd, a'x + xd' \in A$ para convenientes $d, d' \in A$, entonces $(aa')x + x(-dd') \in A$. Además, puesto que por hipótesis $x.H(A,*) \subseteq A$, se sigue inmediatamente que la subálgebra S de A contiene a $H(A,*)$, y por tanto también S contiene a C.

Sean ahora p en P_x y c en C. Es obvio que $x(pc) = (xp)c \in A$. Por otro lado, como $c \in C \subseteq S$ existe d en A tal que $cx + xd \in A$ y así $(pc)x = p(cx) = p(cx + xd) - p(xd) = p(cx + xd) - (px)d \in A$. En resumen, $pc \in P_x$. Como consecuencia P_x es un ideal derecho de C. Pero como P_x y C son $*$-invariantes se tiene que P_x es un $*$-ideal de C.

Por último veamos que $\{h^2 : h \in H(A,*)\} \subseteq P_x$. Si $h \in H(A,*)$ entonces también $h^2 \in H(A,*)$ y por tanto $xh^2 + h^2x = 2x.h^2 \in A$, ya que por hipótesis $x.H(A,*) \subseteq A$. Además $xh^2 - h^2x = (xh + hx)h - h(xh + hx) \in A$. Por tanto $xh^2, h^2x \in A$, o sea $h^2 \in P_x$. ∎

Atendiendo a la definición de álgebra de cocientes simétricos de un álgebra asociativa $*$-prima A sabemos que para todo elemento q en $Q_s(A)$ existe un $*$-ideal no nulo I_q de A tal que $qI_q + I_qq \subseteq A$. Supuesta la generación de A por su parte hermítica, la siguiente consecuencia de la anterior proposición establece la existencia de un $*$-ideal no nulo de A universal para todos los elementos de cualquier álgebra de Jordan J en la situación $H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*)$.

Corolario III.1.5. *Sea A un álgebra asociativa $*$-prima generada por $H(A,*)$. Si J es una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y conteniendo a $H(A,*)$ como un ideal, entonces existe un $*$-ideal no nulo P de A tal que $PJ + JP \subseteq A$.*

Demostración. El álgebra asociativa con involución B que ambienta la proposición anterior se va a fijar ahora igual a $Q_s(A)$, el álgebra de los cocientes simétricos de Martindale de A. Puesto que A se supone generada por $H(A,*)$, el álgebra C de la proposición coincide en este caso con A. Sea J una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y conteniendo a $H(A,*)$ como un ideal. Entonces, para cada x en J se verifica que $x.H(A,*) \subseteq H(A,*) \subseteq A$, y en consecuencia, por la proposición anterior podemos elegir un $*$-ideal P_x de A que contiene a $\{h^2 : h \in H(A,*)\}$ y tal que $P_xx + xP_x \subseteq A$. Definiendo $P := \cap_{x \in J} P_x$ obtenemos un $*$-ideal de A que contiene a $\{h^2 : h \in H(A,*)\}$ y tal que $PJ + JP \subseteq A$. Como quiera que $4h.k = (h + k)^2 - (h - k)^2$ para cualesquiera h, k en $H(A,*)$, se tiene que la nulidad de P repercute en que

el álgebra de Jordan $H(A,*)$ es de producto cero, lo que es contradictorio pues $H(A,*)$ es prima ([33]; Theorem 9 y Corollary). Así, P satisface todas las condiciones requeridas en el enunciado. ∎

El anterior corolario es el punto de aranque de la demostración de la siguiente proposición.

Proposición III.1.6. *Sea A un álgebra asociativa $*$-prima generada por $H(A,*)$ y sea L una $*$-subálgebra de $Q_s(A)$ generada por $H(L,*)$ y tal que $H(A,*)$ es un ideal de $H(L,*)$. Entonces la inclusión $L \subseteq Q_s(A)$ se extiende de forma única a un $*$-isomorfismo de $Q_s(L)$ en $Q_s(A)$.*

Demostración. Comencemos notando que como consecuencia del Corolario *I*.3.21 L es un álgebra $*$-prima, lo que justifica la consideración en el enunciado del álgebra de cocientes simétricos de L. Por el corolario anterior existe un $*$-ideal no nulo P de A tal que $PH(L,*) + H(L,*)P \subseteq A$. Por otro lado, para cualesquiera h_1, h_2, h_3, h_4 en $H(L,*)$ se tiene

$$h_1h_2h_3h_4 = \{h_1h_2h_3h_4\} + h_1h_2\{h_3h_4\} - h_1\{h_2h_4\}h_3 +$$
$$\{h_1h_4\}h_2h_3 - h_4\{h_1h_2\}h_3 + h_4h_2\{h_1h_3\} - h_4\{h_2h_3\}h_1 ,$$

y como L está generada por su parte hermítica, se sigue que

$$L = H(L,*) + H(L,*)^2 + H(L,*)^3.$$

Como consecuencia de ambos hechos, $K := P^3$ es un $*$-ideal no nulo de A tal que $KL + LK \subseteq A$. Este ideal K es el motor que nos va a permitir construir un "ascensor" que trabaja entre los conjuntos de los $*$-ideales no nulos de A y L, y que resultará una máquina básica a lo largo de la demostración.

"Bajada del ascensor": Si M es un $*$-ideal no nulo de L, entonces $M_K := KMK$ es un $*$-ideal no nulo de A. Es claro que M_K es un $*$-ideal de A contenido en M. La no nulidad se sigue de la Proposición *I*.3.20.

"Subida del ascensor": Si I es un $*$-ideal no nulo de A, entonces $I^K := LKIKL$ es un $*$-ideal no nulo de L contenido en I. Efectivamente,

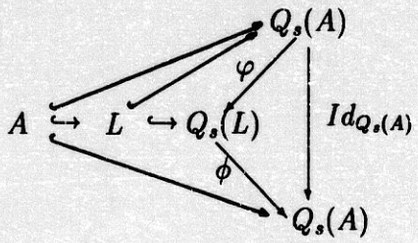
I^K es un $*$-ideal de L conteniendo a $(K \cap I)^5$, el cual es no nulo porque A es un álgebra $*$-prima, y además $I^K := LKIKL \subseteq AIA \subseteq I$.

Veamos en primer lugar la unicidad de la extensión supuesta la existencia. Sean ϕ y ϕ' dos $*$-homomorfismos de $Q_s(L)$ en $Q_s(A)$ extendiendo la inclusión $L \subseteq Q_s(A)$. Dados q en $Q_s(L)$ y M $*$-ideal no nulo de L tales que $qM + Mq \subseteq L$, para todo m en M se verifica en el álgebra $Q_s(A)$ que

$$[\phi(q) - \phi'(q)]m = \phi(qm) - \phi'(qm) = 0\,.$$

Así, $[\phi(q) - \phi'(q)]M = \{0\}$, luego $[\phi(q) - \phi'(q)]M_K = \{0\}$, y por tanto $\phi(q) = \phi'(q)$ ya que M_K es un $*$-ideal no nulo de A.

El proceso que se seguirá para la demostración de la existencia de tal $*$-isomorfismo se ilustra en la figura adjunta.



Ahora, notemos que para todo q en $Q_s(A)$ y cualquier $*$-ideal no nulo I de A tal que $qI + Iq \subseteq A$, se verifica que I^K es un $*$-ideal no nulo de L tal que $qI^K + I^K q \subseteq L$. Además, si q es un elemento de $Q_s(A)$ y M es un $*$-ideal no nulo de L tal que $qM = \{0\}$, entonces $q = 0$ ya que M_K es un $*$-ideal no nulo de A contenido en M. Así, $Q_s(A)$ es un álgebra $*$-prima extensión de L satisfaciendo las propiedades para las que $Q_s(L)$ es maximal. Luego existe un único $*$-homomorfismo inyectivo φ de $Q_s(A)$ en $Q_s(L)$ extendiendo la inclusión de L en $Q_s(L)$.

Por otro lado, para todo q en $Q_s(L)$ y todo $*$-ideal no nulo M de L tal que $qM + Mq \subseteq L$, se verifica que M_K es un $*$-ideal no nulo de A tal que $qM_K + M_K q \subseteq A$. Además, si q es un elemento de $Q_s(L)$

e I es un $*$-ideal no nulo de A tal que $qI = \{0\}$, entonces I^K es un $*$-ideal no nulo de L contenido en I, luego $qI^K = \{0\}$, y así $q = 0$. Se sigue como antes que existe un único $*$-homomorfismo inyectivo ϕ de $Q_s(L)$ en $Q_s(A)$ extendiendo la inclusión A en $Q_s(A)$. Como $\phi \circ \varphi$ restringida a A es la aplicación identidad en A se tiene que $\phi \circ \varphi$ es la aplicación identidad en $Q_s(A)$. Luego ϕ también es sobreyectiva y extiende la inclusión $L \subseteq Q_s(A)$, ya que

$$\phi(l) = \phi(\varphi(l)) = Id_{Q_s(A)}(l) = l$$

para todo l en L. ∎

Con un esfuerzo adicional la Proposición anterior puede reformularse en unos términos en los que se resalta su carácter de resultado memoria. Observemos previamente que si $(L, *)$ es un álgebra asociativa $*$-prima entonces el álgebra de Jordan $H(L, *)$ es prima ([33]; Theorem 9 y Corollary) y no-degenerada. Esto último se sigue de la $*$-primidad de L y de las igualdades siguientes

$$\begin{aligned}(hah)b(hah) = \; & h(a+a^*)hbhah - ha^*h(b+b^*)hah + \\ & + ha^*hb^*h(a+a^*)h - h[a^*hb^* + bha]ha^*h + hbhaha^*h\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(hah)^*b(hah) = \; & ha^*hbh(a+a^*)h - ha^*h[(a+b)h(a+b)^*]h + \\ & + ha^*h[(aha^*) + (bhb^*)]h + h(a^*ha)hb^*h\,,\end{aligned}$$

válidas para cualesquiera h en $H(L, *)$ y a, b en L.

Teorema III.1.7. (Teorema Memoria Jordan). *Sean L un álgebra asociativa $*$-prima generada por $H(L, *)$ y A una $*$-subálgebra de L generada por $H(A, *)$ tal que $H(A, *)$ es un ideal no nulo de $H(L, *)$. Entonces A es un álgebra $*$-prima y la inclusión $A \subseteq L$ se extiende de forma única a un $*$-isomorfismo de $Q_s(A)$ en $Q_s(L)$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que A es $*$-prima. Como L es un álgebra asociativa $*$-prima generada por su parte hermítica, se verifica que $H(L,*)$ es un álgebra de Jordan prima no-degenerada y L es una envolvente $*$-ajustada de $H(L,*)$ (Corolario II.3.5). Por [81]; Lemma 1.5, para álgebras de Jordan primas no-degeneradas la propiedad de $*$-ajustamiento de una envolvente se hereda a las subálgebras de ésta generadas por los ideales de aquella, así que, en nuestro caso, A es una envolvente $*$-ajustada de $H(A,*)$. En [109]; Lemma 19, E. Zel'manov prueba que todo ideal no nulo de un álgebra de Jordan prima no-degenerada es un álgebra de Jordan prima no-degenerada, por lo que $H(A,*)$ es un álgebra de Jordan prima no-degenerada. Finalmente, A es $*$-prima por ser una envolvente $*$-ajustada de un álgebra de Jordan prima no-degenerada ([81];(0.19)).

La demostración ahora se concluye aplicando la Proposición III.1.6 una vez que se prueba que L puede verse como una $*$-subálgebra de $Q_s(A)$. Esto es una consecuencia directa del Teorema Memoria Jordan de K. McCrimmon, bien que por otra parte es fácilmente deducible a partir de la Proposición III.1.4. En efecto, dicha Proposición da la existencia de un $*$-ideal no nulo P de A tal que $PH(L,*)+H(L,*)P \subseteq A$, hecho que es el punto de arranque de la Proposición III.1.6, en la que se demuestra más de lo que en este momento necesitamos, a saber que $Q_s(L)$ puede verse como una $*$-subálgebra de $Q_s(A)$. ∎

También necesitaremos un resultado probado por K. McCrimmon [[79]; Theorem 2.2] sobre la extensión de un homomorfismo Jordan de una naturaleza profundamente zelmanoviana. El estudio de los homomorfismos Jordan entre álgebras asociativas tiene una larga historia. El problema estandar es determinar bajo qué condiciones un homomorfismo Jordan entre álgebras asociativas es de hecho un homomorfismo o antihomomorfismo asociativo. Desde 1942 muchos resultados en esta dirección han sido obtenidos por G. Ancochea [10], I. Kaplanski [65], L. K. Hua [45], N. Jacobson y C. E Rickart [57], I. N. Herstein [40] y [41], M. F. Smyle [104], W. Martindale [72] y N. Jacobson [54] (ver [79] para más detalles sobre la evolución de estos resultados).

Teorema III.1.8. ([[79]; Theorem 2.2], [[9]; Theorem 4.1]). *Si J es un álgebra de Jordan prima especial con $\mathfrak{q}_{48}(J) \neq 0$, entonces todo epimorfismo (Jordan) de un álgebra de Jordan especial $\tilde{J}$ en J se extiende de manera única a $*$-epimorfismo (asociativo) de cualquier $*$-envolvente de $\tilde{J}$ a cualquier envolvente $*$-ajustada de J.*

III.2 Algebras de Jordan-Banach especiales primas no-degeneradas no Clifford.

Haciendo uso de las diversas extensiones de homomorfismos que hemos considerado en la anterior sección, vamos a probar el principal resultado del capítulo, el siguiente teorema.

Teorema III.2.1. *Sea $(J, \|.\|)$ un álgebra de Jordan-Banach especial prima no-degenerada que no es un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica. Entonces existe un álgebra asociativa $*$-prima normada $(A, *, |.|)$, generada por su parte hermitiana, tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A), *)$ y conteniendo a $H(A, *)$ como un ideal*

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*),$$

y satisfaciendo las siguientes propiedades

i) Si $a \in A$ y satisface que $aJ + Ja \subseteq A$, entonces las aplicaciones $x \to ax$ y $x \to xa$ de $(J, \|.\|)$ en $(A, |.|)$ son continuas,

ii) $|a^*| = |a|$ para todo a en A,

iii) Si $(\hat{A}, *, |.|)$ denota la completación de $(A, *, |.|)$, entonces la inclusion $A \subseteq Q_s(A)$ se extiende de forma única a un $*$-monomorfismo $\hat{A} \hookrightarrow Q_s(A)$ llevando $H(\hat{A}, *)$ en J contractivamente, y

iv) Todo $*$-ideal no nulo de $\hat{A}$ tiene intersección no nula con $H(A, *)$.

Antes de proceder a la demostración del Teorema vamos a aislar algunos rsultados que nos serán de utilidad. El primero del que nos vamos a ocupar es una sustaciosa generalización del Corolario $II.3.5$, y, coloquialmente hablando, este resultado afirma que las $*$-subálgebras del álgebra de cocientes simétricos de un álgebra asociativa $*$-prima que la contienen permanecen "ajustadas".

Proposición III.2.2. *Si $(A,*)$ es un álgebra asociativa $*$-prima y L es una $*$-subálgebra de $Q_s(A)$ conteniendo a A, entonces todo $*$-ideal no nulo de L tiene intersección no nula con $H(A,*)$.*

Demostración. Sea M un $*$-ideal de L tal que $M \cap H(A,*) = \{0\}$. Entonces $M \cap A$ es un $*$-ideal de A con intersección nula con $H(A,*)$. Por la Proposición $II.3.4$ $M \cap A = \{0\}$. Ahora, como para cualquier q en M existe un $*$-ideal no nulo I de A tal que $qI \subseteq A$, obtenemos que $qI \subseteq M \cap A = \{0\}$, luego $q = 0$ y por tanto $M = \{0\}$. ∎

Otro resultado que necesitamos para la demostración del Teorema $III.2.1$ es un resultado clásico que se recoge en las primeras páginas del libro de I.N. Herstein sobre anillos con involución [42], y que nosotros recogemos en detalle ahora, dado que este será de utilidad varias veces a lo largo de la presente memoria.

Definición III.2.3. Un subespacio vectorial U de un álgebra asociativa A es un *ideal Lie* de A si $[U,A] \subseteq U$, esto es, para cualesquiera que sean u en U y a en A se verifica que $[u,a] := ua - au$ pertenece a U.

Teorema III.2.4. ([42];Theorem 2.1.2). *Sea B un álgebra asociativa. Si A es simultaneamente una subálgebra asociativa de B y un ideal Lie de B, entonces A contiene el ideal $B[A,A]B$ de B. En consecuencia, si adicionalmente B es semiprima y A es no conmutativa, entonces A contiene un ideal no nulo de B.*

De especial interés para nosotros es el Corolario que se obtiene en ambiente con involución a partir del siguiente ejemplo estandar de ideal Lie.

Ejemplo III.2.5. ([42]; Example 2 en página 59 o [69]; Lemma 1.1). *Si $(B,*)$ es un álgebra asociativa con involución, entonces la subálgebra de B generada por $H(B,*)$ es un ideal Lie de B.*

Corolario III.2.6. *Si $(B,*)$ es un álgebra asociativa con involución y A denota la subálgebra de B generada por $H(B,*)$, entonces A contiene el $*$-ideal $B[A,A]B$ de B.*

En la siguiente Proposición aislamos otro resultado que nos será de utilidad.

Proposición III.2.7. *Sean $(A,*)$ un álgebra asociativa $*$-prima y J una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y conteniendo a $H(A,*)$ como ideal. Si $H(A,*)$ es un orden central en un álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal, entonces J también es un orden central en un álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal.*

Demostración. De la definición de orden central en un álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal, se tiene que $Z(H(A,*)) \neq \{0\}$. El Teorema 3.16 de [16] asegura que para toda álgebra asociativa semiprima con involución $(R,*)$ se verifica que el anillo $H(C(R),*)$ es naturalmente isomorfo al centroide extendido del álgebra de Jordan semiprima $H(R,*)$, por lo que en nuestro ambiente particular, contamos con la identificación $C(H(A,*)) \simeq H(C(A),*)$. En consecuencia,

$$\{0\} \neq Z(H(A,*)) \subseteq C(H(A,*)) \simeq H(C(A),*) \subseteq C(A) = Z(Q_s(A)),$$

y así también $\{0\} \neq Z(H(A,*)) \subseteq Z(J)$. De esta inclusión y por ser $H(A,*)$ un ideal de J se sigue ([110]; Proposition 9.2 (5)) que las localizaciones centrales de $H(A,*)$ y J coinciden, y de esta forma J es también un orden central en un álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal simétrica. ∎

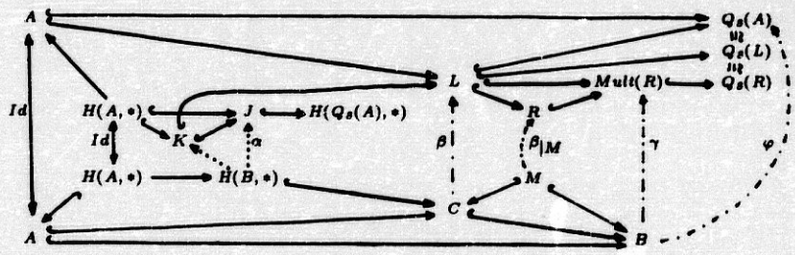
Demostración del Teorema III.2.1. Por el Teorema *II*.3.9, existe un álgebra asociativa $*$-prima normada $(A, *, |||.|||)$, generada por su parte hermitiana, tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A), *)$ y conteniendo a $H(A, *)$ como un ideal, y verificando las siguientes propiedades:

I) $\|h\| \leq |||h|||$ para todo h en $H(A, *)$,

II) Si $a \in A$ y satisface que $aJ + Ja \subseteq A$, entonces las aplicaciones $x \mapsto ax$ y $x \mapsto xa$ de $(J, \|.\|)$ en $(A, |||.|||)$ son continuas, y

III) $|||a^*||| = |||a|||$ para todo a en A.

Nuestro primer objetivo ahora es demostrar que, si $(B, |||.|||, *)$ denota la completación de $(A, |||.|||, *)$, entonces existe un único $*$-homomorfismo (posiblemente no inyectivo) φ de B en $Q_s(A)$ que deja fijos los elementos de A y que aplica contractivamente $H(B, *)$ en J. Este objetivo se consigue como producto final de una cadena de extensiones algebraicas únicas y que tiene como primer eslabón la extensión analítica de la inclusión de $H(A, *)$ en J, lo que garantizará las propiedades requeridas a φ. En la figura adjunta se recogen cada una de estas extensiones que detallamos posteriormente en etapas sucesivas.



Primera etapa: una extensión analítica. Puesto que por la propiedad (III) $*$ es $|||.|||$-continua, se sigue inmediatamente de la $|||.|||$-densidad de A en B que $H(A, *)$ es $|||.|||$-denso en $H(B, *)$. Este hecho, junto con la hipótesis de complitud de J, permite afirmar la existencia de un único

homomorfismo continuo $\alpha : (H(B,*), |||.|||) \to (J, \|.\|)$ que extiende la inclusión de $H(A,*)$ en J. Además es claro que la contractividad de esta inclusión dada por la propiedad (I) se transfiere a α.

Segunda etapa: una extensión algebraica. Como α es un homomorfismo de $H(B,*)$ en J que fija los elementos de $H(A,*)$, su imagen $K := \alpha(H(B,*))$ es una subálgebra de J que contiene a $H(A,*)$. Dado que $H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*)$, se sigue que K es una subálgebra de Jordan de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A),*)$ y conteniendo a $H(A,*)$ como un ideal, y en consecuencia K es un álgebra de Jordan prima nodegenerada. Si denotamos por L a la subálgebra de $Q_s(A)$ generada por K, como $K \supseteq H(A,*)$ y $H(A,*)$ genera A se tiene que $L \supseteq A$, y así, por la Proposición $III.2.2$ L es una envolvente $*$-ajustada de K. Por otro lado, veamos que $\mathfrak{q}_{48}(K) \neq 0$. En caso contrario, se tendría que $\mathfrak{q}_{48}(H(A,*)) = 0$ y, por el teorema de estructura Clifford (Teorema $II.2.14$), $H(A,*)$ sería un orden central en el álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal y en igual situación se encontraría J por la Proposición $III.2.7$, en contradicción con la hipótesis de que J no es un orden central en un álgebra de Jordan de una forma bilineal. Estamos en condiciones de aplicar el Teorema $III.1.8$ de K. McCrimmon sobre extensión de homomorfismos Jordan para obtener que el epimorfismo $\alpha : H(B,*) \to K$ se extiende de forma única a un $*$-epimorfismo β de la subálgebra C de B generada por $H(B,*)$ en la subálgebra L de $Q_s(A)$ generada por K. Como α fija los elementos de $H(A,*) \subseteq J$ y A está generada por $H(A,*)$, también β fija los elementos de A. Además, como claramente $H(B,*) = H(C,*)$ y los $*$-epimorfismos entre álgebras con involución llevan sobreyectivamente la parte hermítica del álgebra dominio en la parte hermítica del álgebra codominio, se tiene

$$H(A,*) \lhd K = \alpha(H(B,*)) = \beta(H(B,*)) = \beta(H(C,*)) = H(L,*).$$

Tercera etapa: una restricción. Como C es la $*$-subálgebra de B generada por $H(B,*)$, por el Corolario $III.2.6$, C contiene al $*$-ideal $M := B[C,C]B$ de B. Veamos que M es no nulo. Puesto que la localización central de un álgebra asociativa y conmutativa es un cuerpo, y por

tanto un álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal (sobre el espacio vectorial cero), y por la Proposición $III.2.7$ el álgebra de Jordan $H(A,*)$ no puede ser un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal, se sigue que $H(A,*)$ es necesariamente no asociativa. Como consecuencia se obtiene que A no es conmutativa, ya que en caso contrario $A = A^+$ y $H(A,*)$ sería asociativa. Así tenemos que $[A,A] \neq \{0\}$, y por semiprimidad $A[A,A]A \neq \{0\}$, y en consecuencia M es no nulo ya que

$$\{0\} \neq A[A,A]A \subseteq B[C,C]B = M\,.$$

Como β es un $*$-epimorfismo de C en L que deja fijos los elementos de A, se desprende, teniendo en cuenta la anterior inclusión, que $R := \beta(M)$ es un $*$-ideal de L no nulo. Como L es un álgebra $*$-prima (por ejemplo, por el Corolario $I.3.21$), se tiene que R es un álgebra $*$-prima (Proposición $I.3.20$). Así, concluimos la etapa con la consideración del $*$-epimorfismo $\beta_{|M}$ del $*$-ideal M del álgebra involutiva B sobre el álgebra $*$-prima R.

Cuarta etapa: nueva extensión algebraica. Por la Proposición $III.1.1$, la restricción de β a M se extiende de forma única a un $*$-homomorfismo γ de B en $Mult(R)$. Como R es un $*$-ideal no nulo del álgebra $*$-prima L, por la propiedad universal del álgebra de los multiplicadores, podemos ver L como una $*$-subálgebra del álgebra $Mult(R)$. Teniendo en cuenta este hecho, veamos que γ es la única extensión de β a un $*$-homomorfismo de B en $Mult(R)$. Puesto que β y $\gamma_{|C}$ son $*$-homomorfismos de C en $Mult(R)$ que extienden a $\beta_{|M}$, por la Proposición $III.1.1$ (aplicada ahora con C desempeñando el papel de B) obtenemos que $\beta = \gamma_{|C}$, esto es, γ es una extensión de β. Además es única, ya que sabemos que γ es la única extensión de $\beta_{|M}$.

Quinta etapa: última extensión algebraica. Finalmente, componiendo γ con la inclusión $Mult(R) \hookrightarrow Q_s(A)$, y con las identificaciones naturales $Q_s(R) \simeq Q_s(L)$ y $Q_s(L) \simeq Q_s(A)$, dadas por el Teorema memoria asociativo $III.1.3$ y la Proposición $III.1.6$ respectivamente, obtenemos un $*$-homomorfismo φ de B en $Q_s(A)$ que extiende a γ. Además, φ es la única extensión de γ como consecuencia del Corolario $III.1.2$.

Resumiendo, como producto final de nuestra cadena de extensiones hemos obtenido un $*$-homomorfismo φ de B en $Q_s(A)$ que fija los elemen-

tos de A (esto ya lo hacía β), y que aplica contractivamente $H(B,*)$ en J (esto ya lo hacía α). Además, φ está determinado de forma única por estas dos condiciones, dado que estas determinan únicamente a α, y cada una de las extensiones de la cadena $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \varphi$ está determinada únicamente por la que le precede.

La demostración concluye con la consideración de la norma que aparece "ajustando" φ vía el principio general dado por la Proposición $II.3.8$. Tomemos $I := ker(\varphi)$. I es un $*$-ideal de B por ser φ un $*$-homomorfismo, e $I \cap A = \{0\}$ ya que φ fija los elementos de A. Veamos que I es cerrado. Como φ es un $*$-homomorfismo que fija los elementos de A, su imagen $\varphi(B)$ es una $*$-subálgebra de $Q_s(A)$ que contiene a A, luego por la Proposición $III.2.2$, todo $*$-ideal no nulo de $\varphi(B)$ tiene corte no nulo con $H(A,*)$, y en consecuencia, todo $*$-ideal de B que contiene estrictamente a I tiene corte no nulo con $H(A,*)$. Por otra parte, ya que la involución de B es isométrica y φ aplica contractivamente $H(B,*)$ en J, se tiene para h en $H(B,*)$ y c en I que

$$\|h+c\| = \|\frac{h+c}{2}\| + \|\frac{h+c^*}{2}\| \geq \|h+\frac{1}{2}(c+c^*)\| \geq$$

$$\|\varphi(h+\frac{1}{2}(c+c^*))\| = \|\varphi(h)\|,$$

luego

$$\|h+I\| \geq \|\varphi(h)\| \tag{3.1}$$

para todo h en $H(B,*)$. Como consecuencia,

$$\|h+I\| = 0 \Rightarrow \|\varphi(h)\| = 0 \Rightarrow \varphi(h) = 0 \Rightarrow h \in I,$$

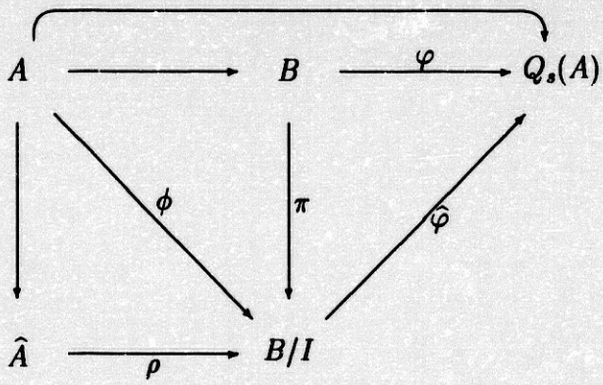
esto es, $H(B,*) \cap \overline{I} \subseteq I$, donde $\overline{I}$ designa el cierre en B de I. Dado que $I \cap A = \{0\}$, la anterior inclusión lleva a $H(A,*) \cap \overline{I} = \{0\}$. Así, $\overline{I}$ es un $*$-ideal de B que tiene corte nulo con $H(A,*)$, y por lo anterior, $\overline{I} = I$, esto es, I es cerrado. Por la Proposición $II.3.8$, $\phi : a \mapsto a+I$ de $(A, \|.\|, *)$ en $(B/I, \|.\|, *)$ es un $*$-monomorfismo contractivo con rango denso, por lo que definiendo $|a| := \|a+I\|$ se obtiene una norma de álgebra en A tal que:

a) $|a| \leq \|a\|$ para todo a en A,

b) $|a^*| = |a|$ para todo a en A, y

c) La completación de $(A, |.|, *)$ es totalmente isomorfa al álgebra de Banach $(B/I, \|.\|, *)$, vía el $*$-isomorfismo isométrico, llámese ρ, que aparece al considerar la extensión por continuidad de ϕ.

La verificación por la norma $|.|$ de las propiedades *i)* y *ii)* del enunciado es inmediata a partir de la propiedad (II) de $\|.\|$ y de las propiedades *a)* y *b)* anteriores. Para probar la propiedad *iii)* del enunciado nos será de ayuda el diagrama adjunto, donde π designa la aplicación cociente de B sobre B/I y $\hat{\varphi}$ designa la aplicación inducida por φ de B/I en $Q_s(A)$.



Es claro que $\hat{\varphi}$ es un $*$-monomorfismo tal que $\hat{\varphi} \circ \phi$ extiende la inclusión de A en $Q_s(A)$ y que, gracias a (3.1), aplica contractivamente $H(B/I, *)$ en J. Puesto que ρ es un $*$-isomorfismo isométrico que extiende a ϕ, se sigue inmediatamente que $\hat{\varphi} \circ \rho$ es un $*$-monomorfismo de $\hat{A}$ en $Q_s(A)$ que extiende la inclusión $A \subseteq Q_s(A)$ y que aplica contractivamente $H(\hat{A}, *)$ en J. Además, estas propiedades determinan únicamente a $\hat{\varphi} \circ \rho$, ya que si χ es un $*$-monomorfismo de $\hat{A}$ en $Q_s(A)$ que extiende la inclusión $A \subseteq Q_s(A)$ y que aplica contractivamente $H(\hat{A}, *)$ en J, entonces $\chi \circ \rho^{-1} \circ \pi$ es un $*$-homomorfismo de B en $Q_s(A)$ que extiende la inclusión $A \subseteq Q_s(A)$ y que aplica contractivamente $H(B, *)$ en J. Puesto que φ

estaba determinado de forma única por estas propiedades, se tiene que $\chi \circ \rho^{-1} \circ \pi = \varphi$, y en consecuencia

$$\chi \circ \rho^{-1}(b+I) = \chi \circ \rho \circ \pi(b) = \widehat{\varphi}(b+I)$$

para todo b en B, luego $\chi \circ \rho^{-1} = \widehat{\varphi}$, o equivalentemente $\chi = \widehat{\varphi} \circ \rho$. Este hecho concluye la demostración de la propiedad *iii)* del enunciado del teorema. Finalmente, la propiedad *iv)* es una consecuencia directa de la Proposición $III.2.2$, una vez que vía $\widehat{\varphi} \circ \rho$ se ve $\widehat{A}$ como una subálgebra de $Q_s(A)$ que contiene a A. ∎

Capítulo IV

Algebras de Jordan-Banach primitivas.

IV.1 Algebras de Jordan-Banach primitivas.

En este tema se consigue la obtención de un Teorema de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas (reales o complejas) que responde al espíritu zel'manoviano del Teorema de clasificación de las álgebras de Jordan primitivas (Teorema *I*.5.3) y que provee una extensión satisfactoria a ambiente Jordan del Teorema de Rickart de representación de las álgebras de Banach primitivas. Para la obtención de este Teorema de clasificación, que representa el principal resultado del primer bloque de esta memoria, se utilizará de manera esencial el Teorema *III*.2.1 de descripción de las álgebras de Jordan-Banach especiales primas no-degeneradas de tipo no Clifford, así como los resultados obtenidos en el capítulo I para las álgebras de Jordan-Banach primitivas reales o complejas que se encuentran en los tres primeros tipos del teorema algebraico de clasificación. El teorema zel'manoviano de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas reales o complejas tiene el siguiente enunciado.

Teorema IV.1.1.
(C) Teorema de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas complejas. *Salvo isomorfismo topológico, las álgebras de Jordan-Banach primitivas complejas son las siguientes:*

c1) $H_3(C(\mathbf{C}))$, *el álgebra de Jordan de las matrices* 3×3 *hermitianas sobre los octoniones complejos.*

c2) Las álgebras de Jordan-Banach construidas a partir de una forma bilineal simétrica no-degenerada continua sobre un espacio de Banach complejo X *con* $\dim_{\mathbf{C}} X \geq 2$.

c3) Las álgebras de Jordan-Banach complejas J *para las que existe un espacio de Banach complejo* X *y una subálgebra asociativa* A *de* $BL(X)$ *actuando irreduciblemente en* X *tal que* J *puede verse como una subálgebra de Jordan de* $BL(X)$ *conteniendo a* A *como ideal, y la inclusión* $J \hookrightarrow BL(X)$ *es continua.*

c4) Las álgebras de Jordan-Banach complejas J para las que existe un espacio de Banach complejo X y una subálgebra asociativa A de $BL(X)$ actuando irreduciblemente en X tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $BL(X)$, la inclusión $J \hookrightarrow BL(X)$ es continua, la aplicación identidad en J se extiende a una involución (lineal de álgebra) $*$ en la subálgebra B de $BL(X)$ generada por J, A está contenida en B y es $*$-invariante, $H(A,*)$ es un ideal de J y A está generada por $H(A,*)$.

($\mathbb{R}$) Teorema de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas reales. *Salvo isomorfismo topológico, las álgebras de Jordan-Banach primitivas reales son las siguientes:*

r1) Las álgebras de Jordan simples excepcionales: $H_3(C(\mathbb{C}))$ vista como álgebra real y las álgebras centrales $H_3(C(\mathbb{R}))$, $H_3(\mathbb{O})$ y $H_3(\mathbb{O}, diag\{1,-1,1\})$, donde $C(\mathbb{R})$ es el álgebra de Cayley-Dickson real "split" y $\mathbb{O}$ es el álgebra de los octoniones reales de división.

r2) Las álgebras de Jordan-Banach complejas del caso c2) vistas como reales y las álgebras de Jordan-Banach reales construidas a partir de una forma bilineal simétrica no-degenerada continua sobre un espacio de Banach real X con $dim_{\mathbb{R}}(X) \geq 2$.

r3) Las álgebras de Jordan-Banach reales J para las que existe un espacio de Banach real X y una subálgebra asociativa A de $BL(X)$ actuando irreduciblemente en X tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $BL(X)$ conteniendo a A como ideal, y la inclusión $J \hookrightarrow BL(X)$ es continua.

r4) Las álgebras de Jordan-Banach reales J para las que existe un espacio de Banach real X y una subálgebra asociativa A de $BL(X)$ actuando irreduciblemente en X tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $BL(X)$, la inclusión $J \hookrightarrow BL(X)$ es continua, la aplicación identidad en J se extiende a una involución (lineal de álgebra) $*$ en la subálgebra B de $BL(X)$ generada por J, A está contenida en B y es $*$-invariante, $H(A,*)$ es un ideal de J y A está generada por $H(A,*)$.

Antes de iniciar la demostración del teorema vamos a recoger algunos bien conocidos resultados que necesitaremos. El primero de ellos afirma que los anillos de Albert y los órdenes centrales en las álgebras de Jordan de una forma bilineal son PI-álgebras.

Proposición IV.1.2. ([56]; pp. 7.36-7.37).

- *Si J es un anillo de Albert entonces satisface la identidad polinomial esencial*

$$P_{3,3}(x,y)(z) = [[[L_{x^3}, L_y], [L_x, L_y]], [[L_{x^2}, L_y], [L_x, L_y]]](z) ,$$

donde L_x denota el operador de multiplicación asociado al elemento x.

- *Si J es un orden central en un álgebra de Jordan asociada a una forma bilineal simétrica no-degenerada entonces satisface la identidad polinomial esencial*

$$P_{2,2}(x,y)(z) = [[L_{x^2}, L_y], [L_x, L_y]](z) .$$

Al igual que para la demostración del teorema de clasificación de las álgebras de Jordan primitivas ([12]; pág. 673 o [102]; pág. 115) el punto de arranque de nuestra demostración lo constituye el siguiente PI-teorema obtenido por Zel'manov en su célebre artículo [109].

Teorema IV.1.3. ([109]; Theorem 8). *Toda PI-álgebra de Jordan primitiva es simple.*

Asímismo se utilizará el siguiente resultado sobre la relación entre la primitividad de un álgebra de Jordan prima y la de sus ideales no nulos.

Teorema IV.1.4. ([12]; Theorems 1.1 y 1.5 o [102]; Proposition 11). *Sea J un álgebra de Jordan prima e I un ideal no nulo de J. Entonces J es primitiva si, y sólo si, I es un álgebra primitiva.*

Igualmente, en ambiente especial la primitividad Jordan y la primitividad asociativa están estrechamente relacionadas como muestran los siguientes dos enunciados.

Teorema IV.1.5. ([12]; Theorem 2.2 o [102]; Corollary 5). *Sea A un álgebra asociativa. Entonces A es primitiva (izquierda o derecha) si, y sólo si, A^+ es primitiva.*

Teorema IV.1.6. ([12]; Theorem 2.3 o [102]; Corollary 6). *Sea $(A,*)$ un álgebra asociativa prima con una involución. Entonces A es primitiva si, y sólo si, $H(A,*)$ es primitiva.*

*Demostración del Teorema IV.*1.1. Todas las álgebras de Jordan-Banach del enunciado del teorema están incluidas dentro de los cuatro ejemplos de álgebras de Jordan primitivas presentados en la sección 5 del capítulo I, y por tanto son primitivas.

Probemos ahora que toda álgebra de Jordan-Banach primitiva real o compleja se encuentra recogida en el teorema de clasificación correspondiente. Sea $(J,\|.\|)$ un álgebra de Jordan-Banach primitiva sobre $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$.

Supongamos en primer lugar que J es un anillo de Albert o un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica. Entonces J es una PI-álgebra de Jordan (Proposición *IV.*1.2), y por tanto J es simple (Teorema *IV.*1.3). Así, el centro $Z(J)$ de J es un cuerpo extensión de $\mathbb{K}$, y por tanto J coincide con su localización central. Por el Teorema de Zel'manov, J es un álgebra de Jordan simple excepcional 27-dimensional sobre $Z(J)$ o J es un álgebra de Jordan (simple) de una forma bilineal simétrica no-degenerada f en un espacio vectorial X sobre $Z(J)$. Notemos que por el Teorema de Gelfand-Mazur se verifica que $Z(J) = \mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mientras que $Z(J) = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como una consecuencia inmediata se sigue que cuando $J = Z(J)$ (el álgebra de Jordan de la forma bilineal simétrica no degenerada definida sobre el $Z(J)$-espacio vectorial nulo), entonces J se encuentra simultaneamente en los casos *(iii)* y *(iv)* (con involución la identidad) del correspondiente $\mathbb{K}$-Teorema. Si J es un álgebra de Jordan simple excepcional 27-dimensional sobre su centro, entonces por el Resultado (i) en I.5 se sigue que J se encuentra en el caso *(i)* del correspondiente $\mathbb{K}$-teorema, mientras que si J es el álgebra de Jordan-Banach de una forma bilineal simétrica no-degenerada sobre

un espacio vectorial sobre $Z(J)$ de dimensión mayor o igual que dos, entonces por el Resultado (ii) en I.5 se sigue que J se encuentra en el caso *(ii)* del correspondiente $\mathbb{K}$-Teorema.

Si J no es un anillo de Albert ni un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal, entonces por el Teorema III.2.1 existe un álgebra asociativa $*$-prima normada $(A, *, |.|)$, generada por su parte hermitiana, tal que J puede verse como una subálgebra de $Q_s(A)$ contenida en $H(Q_s(A), *)$ y conteniendo a $H(A, *)$ como un ideal, y satisfaciendo las siguientes propiedades:

I) Si a está en A y $aJ + Ja \subseteq A$, entonces la aplicación $x \mapsto ax$ de $(J, \|.\|)$ en $(A, |.|)$ es continua, y

II) Si $(\hat{A}, |.|)$ denota la completación de $(A, |.|)$, entonces la inclusión $A \subseteq Q_s(A)$ se extiende de forma única a un monomorfismo $\hat{A} \hookrightarrow Q_s(A)$.

Supongamos en primer lugar que A es prima. Entonces por ser $H(A, *)$ un ideal no nulo del álgebra de Jordan primitiva J se sigue que $H(A, *)$ es primitiva (Teorema IV.1.4), y asímismo que A es primitiva (Teorema IV.1.6). Luego existe un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ tal que A puede verse como una subálgebra de $L(X)$ actuando irreduciblemente en X. Por el Teorema de Whelan (Teorema I.4.2) la inclusión $A \subseteq L(X)$ se extiende de forma única a un monomorfismo $Q_s(A) \hookrightarrow L(X)$. Entonces, por (II), $\hat{A}$ puede verse como una subálgebra de $L(X)$ actuando irreduciblemente en X, y por tanto, $\hat{A}$ es un álgebra de Banach primitiva. Por el Teorema de Rickart (Teorema I.1.11), existe una norma completa $|\ .\ |$ en X tal que la inclusión de $\hat{A}$ en $L(X)$ es de hecho una inclusión contractiva de $(\hat{A}, |.|)$ en el álgebra de Banach $BL(X, |\ .\ |)$. Veamos ahora que J está contenida en $BL(X, |\ .\ |)$ y que la inclusión $(J, \|.\|) \hookrightarrow BL(X, |\ .\ |)$ es continua. Ambos resultados se probarán vía el Teorema de la Gráfica Cerrada, y en la argumentación que seguimos jugará un papel esencial la existencia de un ideal no nulo P de A tal que $PJ + JP \subseteq A$ dada por el Corolario III.1.5. Sea x en J. Si $\{\xi_n\}$ es una sucesión nula en X tal que $\{x(\xi_n)\}$ $|\ .\ |$-converge a $\eta \in X$ entonces,

puesto que $PJ \subseteq A \subseteq \hat{A} \subseteq BL(X,|\,.\,|)$, para todo a en P, la sucesión $\{(ax)(\xi_n)\} = \{a(x(\xi_n))\}$ $|\,.\,|$-converge simultaneamente a 0 y a $a(\eta)$, y por tanto $a(\eta) = 0$. Como P actua irreduciblemente en X, se sigue que $\eta = 0$, luego x visto como operador lineal en X es $|\,.\,|$-continuo, y así J está contenida en $BL(X,|\,.\,|)$. Probemos ahora que la inclusión $(J,\|.\|) \hookrightarrow BL(X,|\,.\,|)$ es continua. Si $\{x_n\}$ es una sucesión nula en $(J,\|.\|)$ que es $|\,.\,|_{op}$-convergente a x in $BL(X,|\,.\,|)$ (donde $|\,.\,|_{op}$ denota la norma de operadores en $BL(X,|\,.\,|)$ correspondiente a la norma $|\,.\,|$ en X), entonces, para todo a en P, la sucesión $\{ax_n\}$ $\|.\|$-converge a 0 (por (I)) y claramente $|\,.\,|_{op}$-converge a ax. Como $|\,.\,|_{op} \leq \|.\|$ en A (la inclusión $(A,\|.\|) \hookrightarrow BL(X,|\,.\,|)$ es contractiva), se sigue que $ax = 0$ para todo a en P, así $x = 0$, y la inclusión $(J,\|.\|) \hookrightarrow BL(X,|\,.\,|)$ es continua de nuevo por el Teorema de la Gráfica Cerrada. Sea B la subálgebra de $BL(X)$ generada por J. Como $J \subseteq Q_s(A) \subseteq L(X)$, se sigue que B coincide con la subálgebra de $Q_s(A)$ generada por J y como $J \subseteq H(Q_s(A),*)$, automáticamente B es una $*$-subálgebra de $Q_s(A)$. Por consiguiente B aparece naturalmente con una involución (lineal de álgebra) que fija los elementos de J y cuya restricción a A es la involución de partida. Así, J se encuentra en el correspondiente caso *(iv)* del enunciado del IK-Teorema.

Por último, si A no es prima, por el Teorema del cambio de parámetro (Teorema II.2.12), existe un álgebra asociativa prima B tal que J puede verse como una subálgebra de Jordan de $Q_s(B)$ conteniendo a B como ideal. Por ser B un ideal no nulo del álgebra de Jordan primitiva J se sigue que B es un álgebra de Jordan primitiva (Teorema IV.1.4) y asímismo que o bien B o bien su revertida es un álgebra asociativa primitiva (Teorema IV.1.5). Salvo cambio de B por su revertida si ello fuese necesario, una aplicación directa del Teorema I.4.4 permite afirmar que J se encuentra en el correspondiente caso *(iii)* del enunciado del IK-Teorema. ∎

Para finalizar este capítulo queremos recoger algunos comentarios que se hacen en la sección F de [95] cuando se conjetura el teorema que acabamos de establecer ([95] ; Conjecture F.19). En contraste con los teoremas normados de Zel'manov previos a esta memoria, el Teo-

rema *IV*.1.1 debe ser considerado como una versión "light" del Teorema primo de Zel'manov. El apelativo "light" se debe a que las álgebras de Jordan-Banach primitivas en los casos *3)* y *4)* del teorema se consiguen representar continuamente en parámetros asociativos normados, si bien esta inmersión no es necesariamente topológica. Este hecho no debe de conducir a la sospecha de que el Teorema *IV*.1.1 no es del todo satisfactorio. Bien que en capítulo VII daremos una respuesta contundente, permítasenos de momento esgrimir las siguientes dos "razones". En primer lugar téngase en cuenta que el propio Teorema de Rickart de representación de las álgebras de Banach primitivas es "light" en el sentido que le estamos dando a esta palabra. En segundo lugar, recordar que incluso bajo la hipótesis adicional de "zócalo no nulo" no se obtienen mejoras en este sentido. Téngase en cuenta que para álgebras de Jordan no-degeneradas con zócalo no nulo, la primidad es equivalente a la primitividad ([37] ; Theorem 12), y véase el Teorema de estructura de las álgebras de Jordan-Banach primas no-degeneradas con zócalo no nulo obtenido en [[88] ; Theorem 1.1], el cual debe ser considerado como un precedente de nuestro Teorema *IV*.1.1.

Finalmente, queremos asímismo hacer constar el carácter "light" de las versiones "generales" del Teorema de Zel'manov para álgebras de Jordan primas no-degeneradas normadas (Teorema *II*.3.9) y normadas completas (Teorema *III*.2.1).

Capítulo V

La continuidad del producto asociativo y la extendibilidad de la norma en ambiente simple con unidad.

Una vez cubierto en el capítulo anterior uno de los principales objetivos de esta memoria, la obtención del Teorema de Zel'manov para álgebras de Jordan-Banach primitivas, se inicia en este capítulo la segunda fase de la memoria cuyo contenido gira en torno a la construcción en el capítulo siguiente de un álgebra asociativa simple con idempotentes minimales y con una norma de álgebra de Jordan para la que el producto asociativo no es continuo.

El objetivo de este capítulo es responder afirmativamente en ambiente simple con unidad los problemas de continuidad del producto asociativo y de extensión de la norma. La primera sección tiene un carácter introductorio y se dedica a plantear estos dos problemas "clásicos" en la teoría de las álgebras de Jordan normadas, así como a recoger los resultados que sobre ellos se conocen. La sección segunda es de naturaleza puramente algebraica y tiene como objetivo demostrar que las álgebras de Jordan de una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial de dimensión "grande" son universalmente no "reversibles". Este resultado y el Teorema *II*.3.9 son las herramientas claves que nos permiten obtener en la sección tercera los teoremas simples con unidad de continuidad del producto asociativo y de extensión de la norma.

V.1 Los problemas de la continuidad del producto asociativo y de la extensión de la norma. Antecedentes.

La búsqueda de versiones normadas del Teorema de Zel'manov incide en situar en primera linea de interés los siguientes dos problemas que surgen naturalmente en la teoría de las álgebras de Jordan normadas y que deben ser considerados como problemas "clásicos", bien que como veremos el segundo de ellos no ha sido explícitamente planteado hasta muy recientemente.

1. **El problema de la continuidad del producto asociativo:** Dada un álgebra asociativa real o compleja A y una norma $\|.\|$ en el espacio vectorial subyacente haciendo el producto de Jordan

$(a,b) \mapsto \frac{1}{2}(ab+ba)$ continuo, ¿es el producto asociativo de A $\|.\|$-continuo?

2. **El problema de la extensión de la norma:**
Dada $(A,*)$ un álgebra asociativa real o compleja con involución que es una envolvente $*$-ajustada de su parte hermitiana $H(A,*)$ y dada una norma de álgebra $\|.\|$ en el álgebra de Jordan $H(A,*)$ ¿existe una norma de álgebra en A cuya topología extienda la $\|.\|$-topología en $H(A,*)$?

Que nosotros sepamos, el problema de la continuidad del producto asociativo aparece tratado por primera vez en la literatura en el trabajo de S. Shirali [101], donde se da una respuesta afirmativa bajo muy fuertes condiciones adicionales tanto de naturaleza algebraica como analítica (A es un álgebra asociativa compleja con unidad $\mathbf{1}$ y se supone dotada con una involución conjugado-lineal $*$ tal que A es $*$-semisimple y $\|.\|$ es una norma completa en A para la que $*$ es isométrica y $\|\mathbf{1}\| = 1$). Posteriormente estas condiciones fueron ostensiblemente rebajadas por A. Rodríguez en [91] (véase también [93]; Proposition 3) donde se obtiene el siguiente resultado

Teorema V.1.1. (Teorema completo de continuidad del producto asociativo). *Si A es un álgebra asociativa real o compleja semiprima cuyo espacio vectorial subyacente es de Banach, entonces la continuidad del producto Jordan implica la continuidad del producto asociativo.*

También en [91] se da un contraejemplo que demuestra que en el anterior teorema la semiprimidad no puede suprimirse en general. Más recientemente han aparecido en ([15]; Example 3.3) y en ([97]; Example 1) ejemplos de álgebras semisimples y no simples que demuestran que la complitud no puede suprimirse como hipótesis en el anterior teorema.

La Cuestion 2 tiene una historia mucho más reciente. Una primera respuesta fue dada por M. Cabrera y A. Rodríguez en [26]; Lemma 1, para ser usada como herramienta para la clasificación zelmanoviana de las álgebras de Jordan normadas simples con unidad. El siguiente enunciado recoge la respuesta dada en [26]; Lemma 1.

Proposición V.1.2. *Sea $(A,*)$ un álgebra asociativa real o compleja con unidad dotada de una involución. Si A es una envolvente $*$-ajustada de su parte hermitiana $H(A,*)$ e $I_5(H(A,*)) = H(A,*)$, entonces para cualquier norma de álgebra $\|.\|$ en $H(A,*)$ existe una norma de álgebra en A que hace la involución isométrica y cuya restricción a $H(A,*)$ es equivalente a $\|.\|$.*

Más recientemente en [97] se considera la Cuestion 2 como un problema con interés en sí mismo y se inicia un estudio sistemático del problema de la extensión de la norma. La condición obviamente necesaria para la solución del problema de la extensión de la norma, a saber, la continuidad de la aplicación tétrada

$$(x,y,z,t) \mapsto \{xyzt\} := \frac{1}{2}(xyzt + tzyx)$$

de $(H(A,*),\|.\|) \times (H(A,*),\|.\|) \times (H(A,*),\|.\|) \times (H(A,*),\|.\|)$ en $(H(A,*),\|.\|)$ se muestra en [97] que es también suficiente. Después se prueba que si $H(A,*)$ es semiprima y la norma en $H(A,*)$ es completa entonces la aplicación tétrada es continua, y por tanto la Cuestión 2 tiene una respuesta afirmativa. Concretamente en [97]; Theorem 2 se establece:

Teorema V.1.3. (Teorema completo de extensión de la norma). *Sea $(A,*)$ un álgebra asociativa semiprima con involución que es una envolvente $*$-ajustada de su parte hermitiana. Entonces para toda norma de álgebra completa $\|.\|$ en $H(A,*)$ existe una norma de álgebra $|.|$ en A haciendo la involución isométrica y satisfaciendo las siguientes propiedades:*

1) *La restricción de $|.|$ a $H(A,*)$ es equivalente a $\|.\|$.*

2) *Si $\widehat{A}$ denota la completación de $(A,|.|)$ y si $*$ es la única extensión continua (automáticamente isométrica) de la involución a $\widehat{A}$, entonces $H(A,*) = H(\widehat{A},*)$.*

3) *Todo $*$-ideal no nulo de $\widehat{A}$ tiene intersección no nula con $H(A,*)$.*

También se construye en ([97]; Example 2) un ejemplo basado en un álgebra semisimple no simple con el que se pone de manifiesto que la hipótesis de complitud no puede suprimirse en el anterior teorema de extensión de la norma.

La siguiente proposición recoge un resultado positivo en ambiente no completo del problema de extensión de la norma y que es obtenido asimismo en [97]; Proposition 2.

Proposición V.1.4. *Sea $(A,*)$ un álgebra asociativa con involución que es envolvente $*$-ajustada de su parte hermitiana $H(A,*)$. Si $\|.\|$ es una norma en el álgebra de Jordan $H(A,*)$ tal que existe un número positivo k de forma que $k\|h\|^2 \leq \|h^2\|$ para todo h en $H(A,*)$, entonces existe una norma de álgebra en A para la que la involución es isométrica y cuya restricción a $H(A,*)$ es una norma equivalente a $\|.\|$.*

El anterior resultado carece de interés si el álgebra A es compleja pues en este caso el álgebra de Jordan $H(A,*)$ es asociativa ([92]; Proposition 3.1). Si se piensa que en un prefijado ambiente debe ser más fácil dar respuesta al problema de la continuidad del producto que al problema de la extensión de la norma, se dá la paradoja de que el primero de estos problemas no ha sido abordado en el ambiente de la anterior proposición. De subsanar este "olvido" nos ocupamos ahora.

Proposición V.1.5. *Sea A un álgebra asociativa real o compleja y sea $\|.\|$ una norma en el espacio vectorial de A haciendo el producto Jordan continuo. Si existe un número positivo K tal que $K\|a\|^2 \leq \|a^2\|$ para todo a en A, entonces la norma $\|.\|$ hace el producto asociativo continuo. Si además A es compleja entonces A es conmutativa.*

Demostración. Podemos suponer que para cualesquiera a, b en A se tiene $\|a.b\| \leq \|a\|\|b\|$ (si $\|a.b\| \leq N\|a\|\|b\|$ con $N > 1$ tómese como nueva norma $N\|.\|$). Como para a y b en A se tienen las siguientes igualdades

$$aba = 2a.(a.b) - a^2.b \quad y \quad [a,b]^2 = 2a.(bab) - ab^2a - ba^2b\,,$$

nosotros tenemos de hecho

$$K\|[a,b]\|^2 \leq \|[a,b]^2\| \leq 12\|a\|^2\|b\|^2 .$$

Luego $\|ab\| = \|a.b + \frac{1}{2}[a,b]\| \leq M\|a\|\|b\|$, donde $M := 1 + (\frac{3}{K})^{1/2}$, y por tanto, el producto asociativo de A es continuo.

Ahora $|.| := M\|.\|$ es una norma de álgebra en A la cual verifica $\frac{K}{M}|a|^2 \leq |a^2|$ para todo a en A, luego, si A es compleja, entonces A es conmutativa por ([18]; Corollary 15.8). ∎

Comentemos finalmente que pecualiares respuestas afirmativas a las cuestiones planteadas en esta sección pueden encontrarse en ([93]; Theorems 2 y 5), ([36]; Propositions 1.3 y 1.4), ([27]; Proposition 3.6) y ([97]; Proposition 3). Asimismo recogemos el hecho de que una variante del problema de extensión de la norma en el ambiente de álgebras topológicas sobre cuerpos extraños fue contestada por la negativa en [103].

V.2 Estudio de la reversibilidad del álgebra de Jordan J(X,f).

Esta sección tiene un contenido puramente algebraico y está dedicada a proveer una de las herramientas que nos permitirán en la sección siguiente abordar con éxito los problemas de continuidad del producto asociativo y de la extensión de la norma en ambiente simple con unidad. El principal cometido de esta sección es establecer la "universal no reversibilidad" de las álgebras de Jordan especiales de una forma bilineal simétrica $J(X,f)$ cuando la dimensión de X es "grande" (4 o mayor o igual que 6).

Comenzaremos la sección recordando la construcción del álgebra de Clifford de una forma bilineal simétrica y recogiendo la teoría de estructura de tales álgebras.

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Recordemos que el *álgebra tensor* $T(X)$ de X está definida como el álgebra asociativa (graduada) cuyo espacio vectorial subyacente es

$$T(X) := \mathbb{F}\mathbf{1} \oplus X \oplus (X \otimes X) \oplus (X \otimes X \otimes X) \oplus \cdots$$

y cuyo producto tiene a $\mathbf{1}$ como unidad y está determinado por las relaciones

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)(x_{n+1} \otimes \ldots \otimes x_m) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes \ldots \otimes x_m \ .$$

Si f es una forma bilineal simétrica no-degenerada sobre X se define el *álgebra de Clifford de* (X, f) como el álgebra cociente

$$C(X, f) := T(X)/K_f \,,$$

donde K_f es el ideal de $T(X)$ generado por todos los elementos de la forma $x \otimes x - f(x)\mathbf{1}$, donde para todo x en X, estamos denotando $f(x) := f(x, x)$.

Es bien conocido, así como fácil de probar (acaso véase [55]; pág. 229) que el álgebra asociativa $C(X, f)$ está caracterizada por la siguiente propiedad universal: Si σ es una aplicación lineal del espacio vectorial X en un álgebra asociativa A con unidad $\mathbf{1}$ tal que $\sigma(x)^2 = f(x)\mathbf{1}$ para todo x en X, entonces existe un único homomorfismo de álgebras η de $C(X, f)$ en A que preserva las unidades y tal que $\eta(x + K_f) = \sigma(x)$ para todo x en X.

Notemos ahora la existencia de un homomorfismo natural del álgebra de Jordan $J(X, f)$ en el álgebra simetrizada del álgebra asociativa $C(X, f)$. Concretamente la aplicación σ_u de $J(X, f)$ en $C(X, f)$ definida por

$$\sigma_u : \alpha\mathbf{1} + x \mapsto \alpha\mathbf{1} + x + K_f$$

es un homomorfismo de álgebras de Jordan tal que $\sigma_u(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Para ver esto nos bastará probar que $\sigma_u(x.y) = \sigma_u(x).\sigma_u(y)$ para cualesquiera x, y en X, lo que se consigue en el siguiente desarrollo:

$$\sigma_u(x.y) = \sigma_u(f(x,y)1) = f(x,y)1 + K_f =$$
$$\tfrac{1}{2}[f(x+y) - f(x) - f(y)]1 + K_f =$$
$$\tfrac{1}{2}[(x+y)\otimes(x+y) - x\otimes x - y\otimes y] + K_f =$$
$$\tfrac{1}{2}(x\otimes y + y\otimes x) + K_f = \tfrac{1}{2}(x+K_f).(y+K_f) = \sigma_u(x).\sigma_u(y)$$

Si A es un álgebra asociativa con unidad, y σ es un homomorfismo de $J(X,f)$ en A^+ que preserva las unidades y tal que $\sigma(x)^2 = f(x)1$ para todo x en X, entonces por la propiedad universal de $C(X,f)$ se sigue inmediatamente que existe un único homomorfismo de álgebras η de $C(X,f)$ en A tal que $\eta \circ \sigma_u = \sigma$. Atendiendo a la definición que daremos en seguida, el hecho que acabamos de comentar se expresa diciendo que $(C(X,f),\sigma_u)$ es "la" envolvente universal especial unital del álgebra de Jordan $J(X,f)$.

Definición V.2.1. Sea J un álgebra de Jordan con unidad. Una pareja $(S_1(J),\sigma_u)$ formada por un álgebra asociativa con unidad $S_1(J)$ y un homomorfismo σ_u de J en $S_1(J)^+$ que preserva las unidades es una *envolvente universal especial unital* de J si para toda álgebra asociativa A con unidad y para todo homomorfismo de álgebras σ de J en A^+ que preserva las unidades, existe un único homomorfismo η de $S_1(J)$ en A tal que $\eta \circ \sigma_u = \sigma$.

La existencia de una envolvente universal especial unital $(S_1(J),\sigma_u)$ para J, la unicidad (salvo isomorfismo), el hecho de que $S_1(J)$ está generada por 1 y $\sigma_u(J)$, y la existencia de una única involución $*$ en $S_1(J)$ (llamada la *involución principal*) que fija los elementos de $\sigma_u(J)$, son algunas de las propiedades que pueden verse en [52]; pp. 65-75.

Recordemos ahora en los siguientes dos teoremas la teoría de estructura de las álgebras de Clifford, la cual puede verse en detalle en [52]; VII §1 y en [55]; §4.8. El primer teorema pone de relieve el carácter especial de las álgebras de Jordan asociadas a una forma bilineal simétrica y describe un procedimiento para la obtención en ambiente finito-dimensional de bases para el álgebra de Clifford.

Teorema V.2.2. ([52]; Theorem 7.1), ([55]; Theorem 4.12). *Sean X un espacio vectorial y f una forma bilineal simétrica sobre X. Entonces el homomorfismo (envolvente-universal) σ_u de $J(X,f)$ en $C(X,f)$ es inyectivo. Si adicionalmente* $\dim(X) = n < \infty$, *entonces* $\dim(C(X,f)) = 2^n$, *y si $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base de X, entonces una base para $C(X,f)$ está formada por los vectores $v_1^{\varepsilon_1} v_2^{\varepsilon_2} ... v_n^{\varepsilon_n}$ donde $v_i = \sigma_u(u_i) = u_i + K_f$, $\varepsilon_i = 0, 1$ y $v_i^0 = 1$, $v_i^1 = v_i$.*

El teorema de descripción de las álgebras de Clifford pone de relieve cómo las álgebras cuaterniónicas (álgebras de composición de dimensión 4) son los bloques básicos de su estructura.

Teorema V.2.3. ([52]; Theorem 7.2), ([55]; Theorem 4.12). *Sean X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y f una forma bilineal simétrica no-degenerada sobre X. Si* $\dim(X)$ *es par o infinita, entonces $C(X,f)$ es central simple, y es isomorfa a un producto tensorial de álgebras cuaterniónicas. Si* $\dim(X)$ *es impar, entonces $C(X,f)$ es isomorfa al producto tensorial de su centro (que es un álgebra 2-dimensional sobre $\mathbb{F}$) y de un álgebra central simple, la cual es producto tensorial de álgebras cuaterniónicas.*

Una vez que hemos llamado la atención acerca de las propiedades de las álgebras de Clifford vamos a presentar el concepto de reversibilidad de un álgebra de Jordan en un álgebra asociativa envolvente, y a iniciar el estudio en detalle de esta propiedad en las álgebras de Jordan $J(X,f)$.

Definición V.2.4. Si A es un álgebra asociativa y J es una subálgebra de Jordan de A, diremos que J es *reversible* en A si J es estable por la aplicación tétrada, esto es, si para cualesquiera x, y, z, t en J se tiene que

$$\{xyzt\} := \frac{1}{2}(xyzt + tzyx) \in J\,.$$

Obviamente, si A es un álgebra asociativa con una involución $*$ entonces el álgebra de Jordan $H(A,*)$ es reversible en A.

Proposición V.2.5. *Sean X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ con $\dim(X) = 4$ o $\dim(X) \geq 6$, f una forma bilineal simétrica no-degenerada en X y A un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$ conteniendo a $J(X,f)$ como subálgebra de Jordan. Entonces $J(X,f)$ no es reversible en A.*

Demostración. Claramente podemos suponer que A está generada por $J(X,f)$. En tal caso, la unidad 1 de $J(X,f)$ es también la unidad de A. En efecto, $1A1$ es una subálgebra de A tal que $J(X,f) = U_1(J(X,f)) \subseteq U_1(A) = 1A1$, luego $A = 1A1$, y en consecuencia 1, que es un idempotente en A ($11 = 1.1 = 1$), es la unidad de A. Razonemos por reducción al absurdo y por tanto supongamos que $\{xyzt\}$ queda en $J := J(X,f)$ cuando x, y, z, t están en J. En particular tomando x_1, x_2, x_3, x_4 en X con $f(x_i, x_j) = 0$ si $i \neq j$ y $f(x_i, x_j) \neq 0$ si $i = j$, tenemos que $t := \{x_1x_2x_3x_4\} \in J(X,f)$. Como $x_i.x_j = f(x_i, x_j) = 0$ si $i \neq j$, los vectores x_1, x_2, x_3, x_4 anticommutan entre sí en A, luego $x_1x_2x_3x_4 = x_4x_3x_2x_1 = t$ y por tanto $t^2 (= f(x_1,x_1)f(x_2,x_2)f(x_3,x_3)f(x_4,x_4)1)$ está en $\mathbb{F}1 \setminus \{0\}$. Pero t no puede pertenecer a $\mathbb{F}1$ porque, si $t = \lambda 1$ con λ en $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ entonces x_4 sería inversible en A con inverso $x_4^{-1} = \lambda^{-1}x_1x_2x_3 = \lambda^{-1}x_3x_2x_1$, lo que no es posible porque $x_1x_2x_3 = -x_3x_2x_1$. Ahora, de la caracterización intrínseca de X en $J(X,f)$ dada por

$$X = \{0\} \cup \{y \in J(X,f) \setminus \mathbb{F}1 \ : \ y^2 \in \mathbb{F}1\}$$

concluimos que t está realmente en X. Usando de nuevo que x_1, x_2, x_3, x_4 anticommutan entre sí en A, para $i = 1, 2, 3, 4$ se tiene

$$f(t, x_i)1 = t.x_i = \frac{1}{2}(tx_i + x_it) = \frac{1}{2}(x_1x_2x_3x_4x_i + x_ix_1x_2x_3x_4) = 0,$$

y por tanto t es un vector no nulo en X el cual es ortogonal al subespacio generado por x_1, x_2, x_3 y x_4. Esto implica que t es linealmente independiente de x_1, x_2, x_3 y x_4, hecho que es una contradicción cuando $\dim(X) = 4$, concluyendo así la prueba en este caso.

Supongamos ahora $\dim(X) \geq 6$ y continuemos nuestra discusión escribiendo $x_5 := t$ y eligiendo x_6 en X con $f(x_6, x_6) \neq 0$ y $f(x_6, x_i) = 0$

para $i = 1, ..., 5$. Entonces, para $i, j = 1, ..., 6$, se tiene que $f(x_i, x_j) = 0$ si $i \neq j$ y $f(x_i, x_j) \neq 0$ si $i = j$. En consecuencia $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ son linealmente independientes, y si Y denota el subespacio 6-dimensional de X que generan, entonces Y es f-no-isotrópico y $\mathbb{F}1 \oplus Y$ es una subálgebra de J isomorfa a $J(Y, g)$, donde g denota la restricción de f a $Y \times Y$. Por la propiedad universal de la envolvente universal especial unital $C(Y, g)$ de $J(Y, g)$, existe un único homomorfismo asociativo $\eta : C(Y, g) \to A$ extendiendo la inclusión $J(Y, g) \hookrightarrow J(X, f)$.

Como $C(Y, g)$ es simple (Teorema V.2.3) η es injectiva. Por tanto, viendo η como una inclusión, la situación es la siguiente: $C(Y, g)$ es una subálgebra asociativa de A, $J(X, f)$ es una subálgebra de Jordan de A y $J(Y, g)$ es una subálgebra de Jordan de $C(Y, g)$ contenida en J. Ahora la contradicción es flagrante porque nosostros sabemos que la igualdad $x_1x_2x_3x_4 = x_5$ es cierta en A mientras que tal igualdad es imposible en $C(Y, g)$ en vista del Teorema V.2.2 en relación con la construcción de bases en las álgebras de Clifford finito-dimensionales. ∎

Nota V.2.6 .El anterior resultado no es cierto si $\dim(X) = 1, 2, 3,$ o 5 (véase [39]; Theorem 6.2.5).

Proposición V.2.7 . *Sean X un espacio vectorial complejo con $\dim_{\mathbf{C}}(X) = 4$ o $\dim_{\mathbf{C}}(X) \geq 6$, $f : X \times X \to \mathbf{C}$ una forma $\mathbf{C}$-bilineal simétrica no-degenerada y A un álgebra asociativa real conteniendo a $J(X, f)$ como subálgebra de Jordan. Entonces $J(X, f)$ no es reversible en A.*

Demostración. Como en la prueba de la Proposición V.2.5 nosotros podemos suponer que A está generada por $J := J(X, f)$ y, en consecuencia que la unidad $\mathbf{1}$ de J es también la unidad para A. Consideremos la complexificación $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$ de A, la cual contiene a la complexificación $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ de J como una subálgebra de Jordan. Entonces los elementos $e_1 := \frac{1}{2}(1 \otimes \mathbf{1} - i \otimes (i\mathbf{1}))$ y $e_2 := \frac{1}{2}(1 \otimes \mathbf{1} + i \otimes (i\mathbf{1}))$ de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ son idempotentes centrales (pertenecen al centro de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$) mutuamente

complementarios (de producto cero y suma la unidad $1 \otimes 1$). En consecuencia, los conjuntos $e.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$ y $f.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$ son ideales mutuamente complementarios de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$, esto es,

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J = e.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J) \oplus f.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J) .$$

Las aplicaciones $u \mapsto e.(1 \otimes u)$ de J en $e.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$ y $v \mapsto f.(1 \otimes v)$ de J en $f.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$ son isomorfismos de álgebras complejo-lineal y conjugado-complejo-lineal, respectivamente. Como A está generada por J como álgebra real, $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$ está generada por $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ como álgebra compleja, y por tanto e y f son idempotentes centrales (y mutuamente ortogonales) en $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$. [En efecto, para cualquier α en $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ por estar e en el centro de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ se tiene $e.(e.\alpha) = (e.e).\alpha = e.\alpha$, lo que puede reescribirse en términos del producto asociativo de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$ como $2e\alpha e = e\alpha + \alpha e$, y multiplicando esta igualdad por la izquierda (respectivamente, por la derecha) por e obtenemos $e\alpha e = e\alpha$ (respectivamente, $e\alpha e = \alpha e$), y así e conmuta con todo elemento de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ en $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$, y por tanto e está en el centro de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$ ya que $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ genera $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$.] Ahora, si J fuese reversible en A entonces $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J$ sería reversible en $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$, y por tanto $e.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$ sería reversible en el álgebra compleja $e(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A)$ (ya que $e(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A)$ y $f(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A)$ son ideales mutuamente complementarios de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} A$ conteniendo a $e.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$ y $f.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$, respectivamente). Pero esto es imposible por la Proposición *V*.2.5 ya que $e.(\mathbf{C} \otimes_{\mathbb{R}} J)$ es una copia de J. ∎

V.3 El problema de la extensión de la norma en el caso simple con unidad.

En esta sección se consiguen los dos principales resultados del capítulo, a saber, dar respuesta afirmativa en ambiente simple con unidad a los problemas de la continuidad del producto asociativo y de la extendibilidad de la norma. Bien que ambos se podrían haber obtenido a partir de los resultados de la sección anterior y de la teoría zelmanoviana para álgebras de Jordan normadas simples con unidad establecida en [26], hemos preferido

obtener estos resultados vía nuestro Teorema *II*.3.9, dado que de esta forma surgen dos nuevos e interesantes resultados en los que se dan respuestas "casi" afirmativas en ambiente simple (sin unidad) a los citados problemas.

Teorema V.3.1. *Sea $(A,*)$ un álgebra asociativa real o compleja con involución que es una envolvente $*$-ajustada de su parte hermítica, $H(A,*)$, la cual es un álgebra de Jordan simple. Entonces para toda norma de álgebra $\|.\|$ en $H(A,*)$ existe una norma de álgebra $|.|$ en A verificando las siguientes propiedades:*

(i) $\|h\| \leq |h|$ *para todo* h *en* $H(A,*)$,

(ii) Para todo a *en* A *las aplicaciones* $x \mapsto ax$ *y* $x \mapsto xa$ *de* $(H(A,*),\|.\|)$ *en* $(A,|.|)$ *son continuas,*

(iii) $|a^*| = |a|$ *para todo* $a \in A$, *y*

(iv) Si $(\widehat{A},*,|.|)$ *denota la completación de* $(A,*,|.|)$ *entonces todo* $*$-*ideal no nulo de* $\widehat{A}$ *tiene intersección no nula con* $H(\widehat{A},*)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $H(A,*)$ no es un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal. Teniendo en cuenta que toda álgebra de Jordan simple es prima y no-degenerada [108] y que I_5 contiene un polinomio zelmanoviano, se sigue del Teorema de estructura clifford (Teorema *II*.2.14) que $I_5(H(A,*)) \neq \{0\}$, y por tanto $H(A,*)$ es de tipo hermitiano. Pero $I_5(H(A,*)) = H(A,*)$ por simplicidad, y por hipótesis A es una envolvente de $H(A,*)$, luego $I_5(H(A,*))$ genera asociativamente a A. Ahora, nuestro resultado se sigue por aplicación directa del Teorema *II*.3.9 y su demostración.

Supongamos ahora que $H(A,*)$ es un orden central en el álgebra de Jordan de una forma bilineal. Probaremos entonces que A es finito-dimensional y como consecuencia que cualquier norma en el espacio vectorial subyacente, convenientemente retocada, puede convertirse en una norma de álgebra en A verificando los requisitos del enunciado del teorema. Como $H(A,*)$ es simple con unidad, su centro $Z(H(A,*))$ es un

cuerpo extensión del cuerpo base $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), luego la localización central "trivializa", y así $H(A,*)$ es de hecho el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica no-degenerada en un espacio vectorial sobre $Z(H(A,*))$. Por otro lado, tenemos que por el Teorema de Gelfand-Mazur, $Z(H(A,*)) = \mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o $Z(H(A,*)) \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $Z(H(A,*)) = \mathbb{K}$ aplicamos la Proposición *V*.2.5, mientras que si $Z(H(A,*)) = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aplicamos la Proposición *V*.2.7, obteniendo en ambos casos que $dim_{\mathbb{K}}(H(A,*)) < \infty$ pues $H(A,*)$ es obviamente reversible en A. Como para cualesquiera h_1, h_2, h_3, h_4 en $H(A,*)$ se tiene que

$$h_1h_2h_3h_4 = \{h_1h_2h_3h_4\} + h_1h_2(h_3.h_4) - h_1(h_2.h_4)h_3 +$$
$$(h_1.h_4)h_2h_3 - h_4(h_1.h_2)h_3 + h_4h_2(h_1.h_3) - h_4(h_2.h_3)h_1,$$

y A está generada por $H(A,*)$, se sigue que $A = H(A,*)H(A,*)H(A,*)$, y por tanto también $dim_{\mathbb{K}}(A) < \infty$. Ahora toda norma $\|.\|$ en el espacio vectorial de A, multiplicada si fuese necesario por un número positivo suficientemente grande, es una norma de álgebra en A verificando la propiedad *i)* del enunciado. Si la involución $*$ no fuese isométrica reemplazariamos la norma $\|.\|$ por $Max\{\|.\|, \|.^*\|\}$, verificándose así la propiedad *iii)*, mientras que las propiedades *ii)* y *iv)* son automáticas por la finito-dimensionalidad de A. ∎

Nota V.3.2. En la primera parte de la demostración del teorema anterior, cuando hemos necesitado utilizar el Teorema *II*.3.9, nos hemos visto obligados a acudir incluso a la demostración de éste, para lo que previamente nos hemos tenido que asegurar del hecho de que A está generada por $I_5(H(A,*))$. Esto pone de relieve que el enunciado del Teorema *II*.3.9 esconde información, hecho que no debe sorprender demasiado, por presentarse con bastante asiduidad en la teoría zelmanoviana. No obstante, en el argumento que estamos comentando se puede evitar tener que acudir a la demostración del Teorema *II*.3.9, eso sí, haciendo uso del Teorema de unicidad de la envolvente $*$-ajustada, el cual es un resultado profundo debido a McCrimmon [79] que recogeremos en

el capítulo siguiente (véase el Teorema $VI.1.7$) en el que se utilizará de manera esencial.

Estamos ya en condiciones de dar una respuesta afirmativa al problema de extensión de la norma en el caso simple con unidad.

Teorema V.3.3. (Teorema simple con unidad de la extensión de la norma). *Sea $(A,*)$ un álgebra asociativa real o compleja simple con unidad y dotada con una involución para la que es una envolvente $*$-ajustada de su parte hermitiana, $H(A,*)$. Entonces para toda norma de álgebra $\|.\|$ en $H(A,*)$ existe una norma de álgebra $|.|$ en A cuya topología extiende la inducida por $\|.\|$ en $H(A,*)$. Si además la norma $\|.\|$ en $H(A,*)$ es completa entonces la norma de álgebra $|.|$ en A puede escogerse completa.*

Demostración. Como $H(A,*)$ genera A se tiene que la unidad $\mathbf{1}$ de $H(A,*)$ es también la unidad de A (véase si acaso el comienzo de la demostración de la Proposición $V.2.5$). Así, el primer resultado del teorema se sigue directamente del teorema anterior ya que como consecuencia de la propiedad *i)* y la particularización de la propiedad *ii)* tomando $a = \mathbf{1}$, se sigue que la restricción a $H(A,*)$ de la norma $|.|$ en el anterior teorema es equivalente a $\|.\|$.

Supongamos ahora que la norma de álgebra $\|.\|$ en el álgebra de Jordan simple $H(A,*)$ es completa. Si A es commutativa entonces $a.b = ab$ y $H(A,*)$ es una subálgebra asociativa de A, luego $A = H(A,*)$ (porque A está generada por $H(A,*)$), y no hay nada que probar. Supongamos pues adicionalemente que A no es commutativa. De nuevo, sea $|.|$ la norma en A dada por el teorema anterior, y sea $(\widehat{A},*)$ la completación de $(A,*)$ con respecto a la norma $|.|$. De la complitud de $\|.\|$ y de la equivalencia de $|.|$ y $\|.\|$ en $H(A,*)$ se sigue que $H(\widehat{A},*) = H(A,*)$. Así, todo $*$-ideal no nulo P de $\widehat{A}$ contiene a $H(A,*)$ (pues por la propiedad *iv)* del anterior teorema $P \cap H(A,*) \neq \{0\}$ y por la simplicidad de $H(A,*)$ se tiene que $P \cap H(A,*) = H(A,*)$). Y además para un tal P, como $H(A,*)$ genera a A, resulta que $P \supseteq A$ y por tanto P es denso en $\widehat{A}$. Puesto que los ideales densos de un álgebra de Banach con unidad deben

coincidir con la totalidad del álgebra ([18]; Theorem 9.3(ii)) se sigue de lo anterior que $\hat{A}$ es $*$-simple, y en particular semiprima. Por el Corolario $III.2.6$ A contiene el $*$-ideal no nulo $\hat{A}[A,A]\hat{A}$ de $\hat{A}$. Como $\hat{A}$ es *-simple concluimos que $A = \hat{A}$. ∎

Nos ocupamos ahora de conseguir una respuesta "casi" afirmativa del problema de la continuidad del producto asociativo en ambiente simple, que puede verse como el resultado análogo al ya previamente obtenido en el Teorema $V.3.1$ para el problema de la extensión de la norma.

Teorema V.3.4. *Sea A un álgebra asociativa real o compleja simple y sea $\|.\|$ una norma en el espacio vectorial de A haciendo el producto de Jordan continuo. Entonces existe una norma de álgebra $|.|$ en A verificando las siguientes propiedades:*

(i) $\|a\| \leq |a|$ *para todo a en A, y*

(ii) Para todo a en A las aplicaciones $x \mapsto ax$ y $x \mapsto xa$ de $(A, \|.\|)$ en $(A, |.|)$ son continuas.

Demostración. Si A es conmutativa, entonces el producto de Jordan coincide con el producto asociativo, y por tanto bastará tomar $|.| = \|.\|$.

Supongamos adicionalmente que A no es conmutativa. Construiremos un álgebra a la que sea aplicable el Teorema $V.3.1$ y en la que A^+ se vea como su parte hermítica. Denotemos por $B := A \times A^{op}$ el álgebra producto directo de A y su *álgebra opuesta* A^{op} con la involución intercambio $(a_1, a_2)^* := (a_2, a_1)$. Claramente B es un álgebra asociativa semiprima, y por tanto todo $*$-ideal no nulo de B tiene intersección no nula con $H(B,*)$ (Proposición $II.3.4$). Además, B es $*$-simple por ser A simple, y $H(B,*)$ es un subconjunto no conmutativo de B por no ser A conmutativa. En consecuencia, por el Corolario $III.2.6$, B está generada por su parte hermítica $H(B,*)$. Por otro lado la aplicación $\varphi : a \mapsto (a,a)$ es un isomorfismo del álgebra de Jordan A^+ en $H(B,*)$. Como A es simple entonces A^+ es simple ([42]; Corollary en pag. 57), y como consecuencia del isomorfismo anterior, $H(B,*)$ también es un álgebra de Jordan simple. Además la aplicación $x \mapsto \|\varphi^{-1}(x)\|$ de $H(B,*)$ en $\mathbb{R}$ es una

norma de álgebra en $H(B,*)$. Estamos pues en condiciones de aplicar el Teorema *V*.3.1 por el cual podemos afirmar que existe una norma de álgebra $|\!|.|\!|$ en B satisfaciendo las siguientes propiedades:

1) $\|\varphi^{-1}(h)\| \leq |\!|h|\!|$ para todo h en $H(B,*)$,

2) Para todo b en B las aplicaciones $h \mapsto bh$ y $h \mapsto hb$ de $(H(B,*), \|\varphi^{-1}(.)\|)$ en $(B, |\!|.|\!|)$ son continuas, y

3) $|\!|b^*|\!| = |\!|b|\!|$ para todo b en B.

Entonces la aplicación $a \mapsto |\!|a|\!| := 2|\!|(a,0)|\!|$ de A en $\mathbb{R}$ es claramente una norma de álgebra en A y, por las propiedades 1) y 3), satisface la propiedad *i)* del enunciado:

$$\begin{aligned}\|a\| = \|\varphi^{-1}(a,a)\| &\leq |\!|(a,a)|\!| = |\!|(a,0)+(0,a)|\!| \\ &\leq |\!|(a,0)|\!| + |\!|(0,a)|\!| = 2|\!|(a,0)|\!| = |\!|a|\!|.\end{aligned}$$

Para probar la propiedad *(ii)* en el enunciado del teorema fijemos a en A. Entonces, por la propiedad 2) de la norma $|\!|.|\!|$, existe un número real no negativo M_a verificando $|\!|(a,0)h|\!| \leq M_a\|\varphi^{-1}(h)\|$ y $|\!|h(a,0)|\!| \leq M_a\|\varphi^{-1}(h)\|$ para todo h en $H(B,*)$. Por tanto, para todo x en A se tiene

$$|\!|ax|\!| = 2|\!|(ax,0)|\!| = 2|\!|(a,0)(x,x)|\!| \leq 2M_a\|\varphi^{-1}((x,x))\| = 2M_a\|x\|\,,$$

y análogamente se obtendría $|\!|xa|\!| \leq 2M_a\|x\|$, lo que concluye la prueba de la propiedad *ii)* del enunciado del teorema. ∎

Como corolario del anterior teorema vamos a obtener la continuidad separada del producto asociativo en ambiente simple.

Corolario V.3.5. *Sea A un álgebra asociativa real o compleja simple y sea $\|.\|$ una norma en el espacio vectorial de A haciendo el producto de Jordan continuo. Entonces el producto asociativo de A es separadamente $\|.\|$-continuo.*

Demostración. Sea $|.|$ la norma en A dada por el anterior teorema y fijemos a en A. Por la propiedad *ii)* de dicho teorema, existe un número real no negativo K_a verificando $|ax| \leq K_a\|x\|$ y $|xa| \leq K_a\|x\|$ para todo x en A. Aplicando la propiedad *i)*, obtenemos $\|ax\| \leq K_a\|x\|$ y $\|xa\| \leq K_a\|x\|$ para todo x en A. ∎

Bajo la existencia de unidad en ambiente simple se consigue a partir del anterior teorema dar respuesta afirmativa al problema de la continuidad del producto asociativo.

Teorema V.3.6. (Teorema simple con unidad de la continuidad del producto asociativo). *Sea A un álgebra asociativa real o compleja simple con unidad. Entonces toda norma $\|.\|$ en el espacio vectorial de A haciendo el producto de Jordan continuo también hace el producto asociativo continuo.*

Demostración. El resultado se sigue directamente del Teorema *V*.3.4 a partir de la propiedad *i)* y la particularización de la propiedad *ii)* tomando $a = 1$. ∎

Nota V.3.7. Se sigue fácilmente del Teorema *V*.3.6 (respectivamente, Teorema *V*.3.3) que el problema de la continuidad del producto asociativo (respectivamente, el problema de la extensión de la norma) tiene respuesta afirmativa cuando A (respectivamente, $H(A,*)$) es suma directa finita de ideales simples con unidad. El resultado no es cierto para sumas directas infinitas como ponen de manifiesto los contraejemplos dados en [15] y [97] (respectivamente, [97]).

Capítulo VI

El monstruo.

VI.1 El monstruo.

En este capítulo se construye un ejemplo, el "monstruo", de un álgebra asociativa simple $\mathcal{M}$ con idempotentes minimales, con una norma de álgebra de Jordan $|.|$, y con una involución lineal $*$ tales que la $|.|$-topología en la parte hermitiana $H(\mathcal{M},*)$ no puede extenderse a una topología de norma de álgebra asociativa sobre $\mathcal{M}$, y en particular el producto asociativo de $\mathcal{M}$ no es $|.|$-continuo. Este ejemplo demostrará que tanto la complitud de la norma en los Teoremas completos de continuidad del producto asociativo y de extensión de la norma (Teoremas *V*.1.1 y *V*.1.3) como la existencia de unidad en los Teoremas simples con unidad de continuidad del producto asociativo y de extensión de la norma (Teoremas *V*.3.3 y *V*.3.6) son condiciones que no se pueden suprimir. Concretamente, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ entonces el álgebra $M_\infty(\mathbb{K})$ de todas las matrices numerablemente infinitas sobre $\mathbb{K}$ con solo un número finito de elementos no nulos puede dotarse de una norma para la cual el producto de Jordan es continuo y el producto asociativo es discontinuo. Además en $M_\infty(\mathbb{K})$ determinamos una involución lineal $*$ para la que la topología de la restricción de la anterior norma a $H(M_\infty(\mathbb{K}),*)$ no puede extenderse a una topología asociada a una norma de álgebra (asociativa) en $M_\infty(\mathbb{K})$.

Notación. Dada un álgebra B, se denota por $M_\infty(B)$ el álgebra de todas las matrices numerablemente infinitas sobre B con únicamente un número finito de elementos no nulos. Para n en $\mathbb{N}$, identificaremos el álgebra $M_n(B)$ de todas las matrices $n \times n$ sobre B con la subálgebra de $M_\infty(B)$ de las matrices $(b_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ en $M_\infty(B)$ satisfaciendo $b_{ij} = 0$ cuando $i > n$ o $j > n$.

Si B es un álgebra con involución $*$ entonces $M_\infty(B)$ tiene una involución "canónica" (también denotada por $*$) cuya acción sobre una matriz dada se calcula transponiendo y aplicando la involución de B a cada elemento de la matriz.

En la siguiente proposición se construye una "máquina" general para fabricar contraejemplos a los problemas de continuidad del producto asociativo y de extensión de la norma.

Proposición VI.1.1. *Sea $(B, \|.\|)$ un álgebra normada cuya simetrizada B^+ contiene una subálgebra cerrada J que no es subálgebra de B. Entonces existe una norma $|.|$ en el espacio vectorial de $M_\infty(B)$ para la cual el producto simetrizado es continuo y el producto es discontinuo. Si además B es asociativa y J es no reversible en B entonces la anterior norma $|.|$ puede escogerse de tal forma que la aplicación tétrada $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \{\alpha\beta\gamma\delta\}$ de $M_\infty(B) \times M_\infty(B) \times M_\infty(B) \times M_\infty(B)$ en $M_\infty(B)$ es discontinua. Además, si B es un álgebra asociativa con una involución $*$, J es no reversible en B y J está contenida en $H(B,*)$, entonces la norma $|.|$ puede escogerse de tal forma que la topología de su restricción a $H(M_\infty(B),*)$ no pueda extenderse a la topología de una norma de álgebra en $M_\infty(B)$.*

Antes de iniciar la demostración vamos a recoger un lema de [97] de naturaleza elemental, que será pieza clave en un determinado momento.

Lema VI.1.2. ([97]; Lema 3). *Sea B un álgebra normada, y sea X una subálgebra de B. Si para cada b en B denotamos*

$$\|b + X\| := Inf\{\|b + x\| : x \in X\} ,$$

entonces se verifica

$$\|bc + X\| \leq \|b\| \, \|c + X\| + \|b + X\| \, \|c\| + \|b + X\| \, \|c + X\|$$

para cualesquiera que sean b y c en B.

Demostración. Dados x, y en X se tiene que

$$\begin{aligned} \|bc + X\| &\leq \|bc - xy\| = \|b(c + y) - (b + x)y\| \\ &\leq \|b\| \, \|c + y\| + \|b + x\| \, \|y\| \\ &\leq \|b\| \, \|c + y\| + \|b + x\|(\|c\| + \|c + y\|) . \end{aligned}$$

Ahora, tomando ínfimos en x e y se obtiene el enunciado. ∎

Demostración de la Proposición VI.1.1. Sea $\|.\|$ una norma de álgebra en $M_\infty(B)$ minorada por la norma del máximo y mayorada por la norma de la suma, esto es

$$Max_{i,j}\{\|b_{ij}\|\} \leq \|(b_{ij})\| \leq \sum_{i,j} \|b_{ij}\|$$

Un ejemplo de tal norma es la norma de la suma:

$$\|(b_{ij})\| := \sum_{i,j} \|b_{ij}\| \,.$$

Nótese que una tal norma en $M_\infty(B)$ necesariamente extiende la norma de partida de $B = M_1(B)$.

Para un elemento α en $M_\infty(B)$ y un subespacio P de $M_\infty(B)$ (no necesariamente $\|.\|$-cerrado), definimos

$$\|\alpha + P\| := Inf\{\|\alpha + \beta\| \ : \ \beta \in P\} \,,$$

y así la aplicación $\alpha \mapsto \|\alpha + P\|$ es una seminorma en el espacio $M_\infty(B)$. Por comodidad, veremos $M_\infty(B)$ como $M_\infty(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} B$, donde $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ o $\mathbf{C}$) es el cuerpo base de B. Denotemos por e_n ($n \in \mathbb{N}$) al elemento (λ_{ij}) en $M_\infty(\mathbb{K})$ dado por $\lambda_{ij} = 0$ cuando $(i,j) \neq (n,n)$ y $\lambda_{nn} = 1$. Entonces, llamando $\mathcal{J}_n := M_{n-1}(\mathbb{K}) \otimes B + e_n \otimes J$ ($n \in \mathbb{N}$), donde $M_0(\mathbb{K}) := 0$, podemos definir una norma $|.|$ en el espacio vectorial de $M_\infty(B)$ dada por

$$|\alpha| := \|\alpha\| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{5^n} \|\alpha + \mathcal{J}_n\|$$

para todo α en $M_\infty(B)$ (nótese que, para cada α en $M_\infty(B)$, la serie anterior sólo tiene un número finito de términos no nulos). Para $k = 0, 1, 2, ...$, y α en $M_\infty(B)$, definimos inductivamente $|\alpha|_k$ por $|\alpha|_0 := \|\alpha\|$ y $|\alpha|_{k+1} := |\alpha|_k + 2^{5^{k+1}} \|\alpha + \mathcal{J}_{k+1}\|$, y así, para α en $M_\infty(B)$, la sucesión $\{|\alpha|_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es casi-constante con límite $|\alpha|$. Claramente tenemos $|\alpha.\beta|_0 \leq |\alpha|_0 |\beta|_0$ para cualesquiera α, β en $M_\infty(B)$. Supongamos que para k en $\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad $|\alpha.\beta|_k \leq |\alpha|_k |\beta|_k$ para cualesquiera α, β en $M_\infty(B)$. Entonces, como $\mathcal{J}_k$ es una subálgebra de $M_\infty(\mathcal{J})^+$, aplicando el lema anterior, para cualesquiera α, β en $M_\infty(B)$ obtenemos

$$|\alpha.\beta|_{k+1} := |\alpha.\beta|_k + 2^{5^{k+1}}\|\alpha.\beta + \mathcal{J}_{k+1}\| \leq$$

$$\leq |\alpha.\beta|_k + 2^{5^{k+1}}(\|\alpha\|\,\|\beta + \mathcal{J}_{k+1}\| + \|\alpha + \mathcal{J}_{k+1}\|\,\|\beta\| + \|\alpha + \mathcal{J}_{k+1}\|\,\|\beta + \mathcal{J}_{k+1}\|) \leq$$

$$\leq |\alpha|_k|\beta|_k + 2^{5^{k+1}}(|\alpha|_k\|\beta + \mathcal{J}_{k+1}\| + \|\alpha + \mathcal{J}_{k+1}\||\beta|_k) +$$

$$+(2^{5^{k+1}})^2\|\alpha + \mathcal{J}_{k+1}\|\,\|\beta + \mathcal{J}_{k+1}\| =$$

$$= (|\alpha|_k + 2^{5^{k+1}}\|\alpha + \mathcal{J}_{k+1}\|)(|\beta|_k + 2^{5^{k+1}}\|\beta + \mathcal{J}_{k+1}\|) = |\alpha|_{k+1}|\beta|_{k+1}\,.$$

Hemos probado que la desigualdad $|\alpha.\beta|_k \leq |\alpha|_k|\beta|_k$ es cierta para cualesquiera α, β en $M_\infty(B)$ y todo k en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego tenemos que $|\alpha.\beta| \leq |\alpha|\,|\beta|$ para cualesquiera α, β en $M_\infty(B)$, y por tanto $|.|$ hace el producto simetrizado de $M_\infty(B)$ continuo.

Sean ahora b en B y k, n en $\mathbb{N}$. Entonces, ya que la norma $\|.\|$ en $M_\infty(B)$ mayora a la norma del máximo y está mayorada por la de la suma, se tiene que

$$\|e_k \otimes b + \mathcal{J}_n\| = \begin{cases} \|b\| & si\ n < k \\ \|b + J\| & si\ n = k \\ 0 & si\ n > k \end{cases}$$

y por tanto

$$|e_k \otimes b| = (1 + 2^5 + \ldots + 2^{5^{k-1}})\|b\| + 2^{5^k}\|b + J\|\,.$$

Como J no es una subálgebra de B, existen x, y en J con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $xy \notin J$ y, por ser J cerrada en B, $\|xy + J\| \neq 0$. Para k en $\mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{|\,(e_k \otimes x)(e_k \otimes y)\,|}{|\,e_k \otimes x\,|\,|\,e_k \otimes y\,|} = \frac{|\,e_k \otimes (xy)\,|}{|\,e_k \otimes x\,|\,|\,e_k \otimes y\,|} =$$

$$= \frac{(1+2^5+\ldots+2^{5^{k-1}})\|xy\|+2^{5^k}\|xy+J\|}{(1+2^5+\ldots+2^{5^{k-1}})^2} \geq \frac{2^{5^k}\|xy+J\|}{(1+2^5+\ldots+2^{5^{k-1}})^2} \geq$$

$$\geq \frac{2^{5^k}}{k^2(2^{5^{k-1}})^2}\|xy+J\| = \frac{(2^{5^{k-1}})^3}{k^2}\|xy+J\| \longrightarrow_{k\to\infty} \infty .$$

Luego $|.|$ hace el producto de $M_\infty(B)$ discontinuo.

Supongamos ahora que B es asociativa y que J es no reversible en B. Entonces existen x,y,z,t en J con $\|x\| = \|y\| = \|z\| = \|t\| = 1$ y $\|\{xyzt\}+J\| \neq 0$, y, para k en $\mathbb{N}$, se tiene

$$\frac{|\,\{(e_k\otimes x)(e_k\otimes y)(e_k\otimes z)(e_k\otimes t)\}\,|}{|\,e_k\otimes x\,||\,e_k\otimes y\,||\,e_k\otimes z\,||\,e_k\otimes t\,|} =$$

$$= \frac{|\,e_k\otimes\{xyzt\}\,|}{|\,e_k\otimes x\,||\,e_k\otimes y\,||\,e_k\otimes z\,||\,e_k\otimes t\,|} =$$

$$= \frac{(1+2^5+\ldots+2^{5^{k-1}})\|\{xyzt\}\|+2^{5^k}\|\{xyzt\}+J\|}{(1+2^5+\ldots+2^{5^{k-1}})^4} \geq$$

$$\geq \frac{2^{5^k}\|\{xyzt\}+J\|}{(1+2^5+\ldots+2^{5^{k-1}})^4} \geq$$

$$\geq \frac{2^{5^k}}{k^4(2^{5^{k-1}})^4}\|\{xyzt\}+J\| = \frac{2^{5^{k-1}}}{k^4}\|\{xyzt\}+J\| \longrightarrow_{k\to\infty} \infty .$$

Luego en este caso la norma $|.|$ hace la aplicación tétrada en $M_\infty(B)$ discontinua.

Supongamos finalmente que B es un álgebra asociativa con una involución $*$, que J es no reversible en B y que J está contenida en $H(B,*)$. Entonces, para x,y,z,t como antes y para k en $\mathbb{N}$, se tiene que $e_k\otimes x, e_k\otimes y, e_k\otimes z, e_k\otimes t$ están en $H(M_\infty(B),*)$, y el último argumento demuestra que la restricción de la aplicación tétrada a

$H(M_\infty(B),*)\times H(M_\infty(B),*)\times H(M_\infty(B),*)\times H(M_\infty(B),*)$ es discontinua para la topología de la norma $|.|$. Esto hace imposible encontrar una norma de álgebra en $M_\infty(B)$ extendiendo la topología de la restricción de $|.|$ a $H(M_\infty(B),*)$. ∎

Nota VI.1.3 . Para un álgebra normada B en las condiciones de la proposición anterior, el punto de arranque en la demostración de dicha proposición es la elección de una norma de álgebra en $M_\infty(B)$ minorada por la norma del máximo y mayorada por la de la suma. Además de la norma de la suma podemos encontrar otras muchas normas en esas condiciones. En el siguiente capítulo utilizaremos en ambiente asociativo una de las normas que describimos a continuación.

Supongamos pues que $(B,\|.\|)$ es un álgebra asociativa normada. Es bien conocido que B puede verse isométricamente metida en el álgebra normada $BL(X)$ para conveniente espacio normado X ([90]; pag. 4). [Concretamente, una tal representación es la representación regular izquierda de B en su unitización normada B_1 definida por $\Lambda : b \mapsto \Lambda_b$ de B en $BL(B_1)$, donde para b en B $\Lambda_b(x) = bx$ para todo x en B_1.] Entonces podemos convertir el espacio vectorial $c_{00}(X)$ de todas las sucesiones casinulas en X en un espacio normado fijando $1 \leq p \leq \infty$ y definiendo, para $\{x_n\}$ en $c_{00}(X)$,

$$\|\{x_n\}\|_p := \begin{cases} (\sum_n \|x_n\|^p)^{1/p} \ si\ p < \infty \\ Max\{\|x_n\| \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ si\ p = \infty. \end{cases}$$

Finalmente la metedura $B \hookrightarrow BL(X)$ induce naturalmente una metedura $M_\infty(B) \hookrightarrow BL(c_{00}(X))$ y es suficiente restringir a $M_\infty(B)$ la norma de $BL(c_{00}(X))$ para obtener una norma de álgebra en $M_\infty(B)$ que extiende la norma de $B = M_1(B)$ y satisface

$$\| \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \|_{n+m} = Max\{\|\alpha\|_n, \|\beta\|_m\}$$

para cualesquiera n, m en $\mathbb{N}$, α en $M_n(B)$ y β en $M_m(B)$, donde $\|.\|_n$ denota la restricción de $\|.\|$ a $M_n(B)$. Claramente la norma construida

es una norma de álgebra que mayora la norma del máximo y que está mayorada por la de la suma.

Nota VI.1.4. En relación con la nota anterior vamos a presentar en este momento una amplia gama de normas de álgebra en $M_\infty(B)$ que responden a las exigencias en el comiennzo de la demostración de la proposición. Sea $(B, \|.\|)$ un álgebra no necesariamente asociativa normada y para un prefijado $p: 1 \leq p \leq \infty$ consideremos naturalmente el álgebra $M_\infty(\mathbb{K})$ como una subálgebra normada del álgebra de Banach $BL(\ell_p)$. Viendo el álgebra $M_\infty(B)$ como el producto tensorial algebraico $M_\infty(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} B$, consideramos $M_\infty(B)$ como un álgebra normada con la norma tensor proyectivo dada por

$$\|\alpha\| := Inf\{\sum_i \|a_i\| \, \|b_i\| : \alpha = \sum_i a_i \otimes b_i\}$$

donde el ínfimo se toma en todas las representaciones (finitas) de α en $M_\infty(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} B$ ([18]; Proposition 42.18). Claramente esta norma está mayorada por la de la suma, pues si e_{ij} es el elemento $(\lambda_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de $M_\infty(\mathbb{K})$ dado por $\lambda_{mn} = 0$ cuando $(m,n) \neq (i,j)$ y $\lambda_{ij} = 1$, entonces para un elemento $\alpha = (b_{ij})$ en $M_\infty(B)$ se tiene

$$\|\alpha\| = \|\sum_{i,j} e_{ij} \otimes b_{ij}\| \leq \sum_{i,j} \|e_{ij}\| \, \|b_{ij}\| = \sum_{i,j} \|b_{ij}\| \, .$$

Recordemos ahora que la norma tensorial débil de un elemento $\alpha = \sum_i a_i \otimes b_i$ en $M_\infty(B)$ está definida por

$$w(\alpha) := Sup\{|\sum_i f(a_i)g(b_i)| : f \in M_\infty(\mathbb{K})', \|f\| \leq 1, g \in B', \|g\| \leq 1\}$$

(donde hemos denotado por $M_\infty(\mathbb{K})'$ y B' los espacios duales de $M_\infty(\mathbb{K})$ y B respectivamente), $w(\alpha) \leq \|\alpha\|$ y ambas normas son normas cruz, esto es, $w(a \otimes b) = \|a \otimes b\| = \|a\| \, \|b\|$ para cualesquiera a en $M_\infty(\mathbb{K})$ y b en B (ver [18]; Definitions 42.7 y 42.15 y Lemma 42.10). Si $\alpha = (b_{ij})$

es un elemento de $M_\infty(B)$, y para r, s en $\mathbb{N}$ definimos $f_{rs} \in M_\infty(\mathbb{K})$ por $f_{rs}((\lambda_{ij})) = \lambda_{rs}$, entonces para todo g en B' con $\|g\| \leq 1$ tenemos que

$$\|\alpha\| \geq w(\alpha) = w(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes b_{ij}) \geq |\sum_{i,j} f_{rs}(e_{ij}) g(b_{ij})| = |g(b_{rs})|,$$

y por tanto, por el Teorema de Hanh-Banach, $\|\alpha\| \geq \|b_{rs}\|$. En conclusión hemos llegado a que $Max_{ij}\{\|b_{ij}\|\} \leq w(\alpha) \leq \|\alpha\|$ como queriamos probar.

Nota VI.1.5. Sean A un álgebra sobre $\mathbb{K}$ y $|.|$ una norma en A. Si el producto de A es $|.|$-discontinuo pero su producto simetrizado es $|.|$-continuo, entonces la aplicación $(a, b) \mapsto \gamma ab + \delta ba$ es $|.|$-discontinua para cualesquiera γ, δ en $\mathbb{K}$ con $\gamma \neq \delta$. Esto se sigue de la igualdad $\gamma ab + \delta ba = (\gamma - \delta)ab + 2\delta a.b$.

Ha llegado ahora el momento de suministrar a la máquina construida en la proposición anterior una concreta álgebra normada con involución para obtener como producto el ejemplo anunciado como el principal resultado del capítulo.

Teorema VI.1.6. *Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces existe una norma $|.|$ en el espacio vectorial $M_\infty(\mathbb{K})$ verificando las siguientes propiedades:*

i) $|\alpha.\beta| \leq |\alpha||\beta|$ para cualesquiera α, β en $M_\infty(\mathbb{K})$.

ii) Existe una involución $*$ en $M_\infty(\mathbb{K})$ para la cual no existe una norma de álgebra en $M_\infty(\mathbb{K})$ cuya restricción a $H(M_\infty(\mathbb{K}), *)$ sea equivalente a la restricción de $|.|$ a $H(M_\infty(\mathbb{K}), *)$.

Como consecuencia de i), la restricción de $|.|$ al álgebra de Jordan $H(M_\infty(\mathbb{K}), *)$ es una norma de álgebra, mientras que, como consecuencia de ii), el producto asociativo de $M_\infty(\mathbb{K})$ es discontinuo para la topología de la norma $|.|$.

Demostración. Sea B el álgebra asociativa $M_4(\mathbb{K})$ vista como álgebra normada respecto de una norma arbitraria y sea $*$ la involución "simpléctica" de B, a saber, para b en B, $b^* := s^{-1}b^t s$, donde b^t denota la transpuesta de b y $s := diag\{q,q\}$ con $q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Los elementos x, y, z, t en $H(B,*)$ dados por

$$x = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad y = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$z = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad t = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

anticommutan entre sí y satisfacen $x^2 = y^2 = 1$ y $z^2 = t^2 = -1$. Se sigue que, denotando por J la envolvente lineal de $\{1, x, y, z, t\}$, J es una subálgebra de Jordan de B contenida en $H(B,*)$ y es isomorfa al álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica no-degenerada f sobre un espacio vectorial 4-dimensional sobre $\mathbb{K}$ (donde f está determinada por la matriz $diag\{1,1,-1,-1\}$). Además J es cerrada en B ya que B es finito-dimensional, y no reversible en B (por ejemplo en vista del Lema V.2.5, o bien comprobando que $\{xyzt\} = xyzt = diag\{-1,-1,1,1\} \notin J$). Ahora basta aplicar la Proposición anterior y tener en cuenta que $M_\infty(B)$ es isomorfa a $M_\infty(\mathbb{K})$. ∎

La especialización del Teorema primo de Zel'manov a las álgebras de Jordan simples ([109]; Theorem 4) asegura que, si J es un álgebra de Jordan simple entonces J está en alguno de los siguientes casos:

i) Un álgebra de Jordan simple excepcional 27-dimensional sobre su centro,

ii) Un álgebra de Jordan simple asociada a una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial sobre el centro de J,

iii) $J = A^+$, donde A es un álgebra asociativa simple, y

iv) $J = H(A,*)$, donde A es un álgebra asociativa simple y $*$ es una involución en A.

Recordemos ahora el Teorema sobre la "unicidad de la envolvente $*$-ajustada" para las álgebras de Jordan primas J con $\mathbf{q}_{48}(J) \neq 0$ demostrado por K. McCrimmon.

Teorema VI.1.7. ([79]; Theorem 2.3). *Todas las envolventes $*$-ajustadas de un álgebra de Jordan prima especial J con $\mathbf{q}_{48}(J) \neq 0$ son isomorfas. Esto es, si J_i $(i = 1,2)$ son álgebras de Jordan primas especiales con $\mathbf{q}_{48}(J_i) \neq 0$ entonces todo isomorfismo $J_1 \to J_2$ se extiende de forma única a un $*$-isomorfismo $A_1 \to A_2$ entre las respectivas envolventes $*$-ajustadas.*

Aplicando este teorema a las álgebras de Jordan simples que no están ni en el caso i) ni ii), podemos afirmar que si J es un álgebra de Jordan simple en el caso iii) (respectivamente en el caso iv)) entonces J no está en el caso iv) (respectivamente en el caso iii)). Además A y A^{op} son las únicas álgebras asociativas simples B satisfaciendo $J = B^+$ (respectivamente, $(A,*)$ es la única álgebra asociativa simple con involución $(B,*)$ satisfaciendo $J = H(B,*)$).

Ahora, si J denota el álgebra de Jordan simple $M_\infty(\mathbb{K})^+$ (respectivamente, $H(M_\infty(\mathbb{K}),*)$), entonces J no está ni en el caso i) ni en el caso ii) pero sí en el caso iii) (respectivamente, caso iv)), luego cuando J se dota de la norma "monstruosa" $|.|$ dada en el Teorema anterior, resulta imposible obtener la topología de esta norma a partir de una norma de álgebra en la esencialmente única envolvente asociativa simple de J pues en tal caso el producto asociativo sería $|.|$-continuo (respectivamente, la topología de $|.|$ se podría extender a la topología de una norma de álgebra asociativa). Se sigue que, como se anunciaba en [95], una versión normada "fuerte" del Teorema de Zel'manov, semejante a la obtenida en ([26]; Theorem 1) para álgebras de Jordan normadas simples con unidad, no es posible en el caso simple sin unidad incluso en presencia de "zócalo" no nulo.

Capítulo VII

La completación del monstruo.

VII.1 La completación del monstruo.

En este capítulo estudiamos la completación del "monstruo" $M_\infty(\mathbb{K})$ respecto a la norma de álgebra de Jordan $|.|$ construida en el capítulo anterior (Teorema $VI.1.6$), lo que nos permitirá obtener nuevas respuestas negativas a las cuetiones planteadas en el capítulo quinto y también estudiar la conexión entre este contraejemplo y las versiones normadas completas del teorema primo de Zel'manov para álgebras de Jordan.

Lema VII.1.1. *Sean A un álgebra asociativa con anulador nulo y J una subálgebra de Jordan simple de A. Supongamos que J no es isomorfa al álgebra de Jordan de una forma bilineal y que J genera A. Entonces o bien $J = A^+$ y A es simple, o bien existe una involución $*$ en A, $J = H(A,*)$ y A es $*$-simple. Además la primera posibilidad se da si, y sólo si, existen x,y en J tal que $[x,y] \in J \setminus \{0\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = (S(J), \sigma_u)$ la envolvente universal especial de J (por abuso veremos σ_u como la inmersión de J en $\mathcal{A}$) y $*$ la involución "principal" en $\mathcal{A}$ (la única que fija los elementos de J [52];Theorem II.1.1). Entonces $J = Q_{4s}(J)$ por ser J simple y $Q_{4s}(J) = H(\mathcal{A},*)$ en virtud de la propiedad de hermitianidad básica ([81]; (1.3) en pag. 145); así $J = H(\mathcal{A},*)$.

Sea I el mayor (automaticamente $*$-) ideal de $\mathcal{A}$ contenido en la parte antisimétrica de $\mathcal{A}$. Entonces $IJ = JI = \{0\}$ pues para x en I e y en J se tiene que $xy = -(xy)^* = -y^*x^* = yx$ y por tanto

$$xy = x.y \in I \cap J \subseteq S(\mathcal{A},*) \cap H(\mathcal{A},*) = \{0\}.$$

Como $\mathcal{A}$ está generada por J, se sigue que $IA = AI = \{0\}$ y por tanto I está contenido en el anulador de $\mathcal{A}$. Como también A está generada por J, el único homomorfismo asociativo $\Phi : \mathcal{A} \to A$ extendiendo la inclusión de J en A es sobreyectivo, y como A tiene anulador nulo se tiene, $\Phi(I) = 0$.

A partir de la $(*)$-envolvente universal especial $\mathcal{A}$ vamos a contruir la "envolvente $*$-ajustada universal especial" $\mathcal{B}$. Denotando por

$(\mathcal{B},*) := (\mathcal{A},*)/I$ y teniendo en cuenta que $J = H(\mathcal{A},*)$ y $J \cap I = \{0\}$, nosotros podemos ver J como $H(\mathcal{B},*)$. Claramente $\mathcal{B}$ está generada por J y todo $*$-ideal de $\mathcal{B}$ tiene intersección no nula con J, esto es, $\mathcal{B}$ es una envolvente $*$-ajustada de J. Como J es simple, esto implica que $\mathcal{B}$ es $*$-simple.

Sea Ψ el homomorfismo de $\mathcal{B}$ en A inducido por Φ, $\Psi(a+I) = \Phi(a)$. Si Ψ es injectiva, entonces Ψ es un isomorfismo de $\mathcal{B}$ en A cuya restricción a J es la identidad en J. Luego podemos trasladar la involución de $\mathcal{B}$ a A de tal forma que A sea $*$-simple y $J = H(A,*)$. Supongamos ahora que Ψ no es injectiva. Entonces, denotando por $P := (Ker(\Psi))^*$, por ser $\mathcal{B}$ $*$-simple, P es un ideal simple de $\mathcal{B}$ satisfaciendo que $\mathcal{B} = Ker(\Psi) \oplus Ker(\Psi)^*$. Ahora $\Psi_{|P}$ es un isomorfismo de P en A. Sea a en A. Entonces, denotando $p := (\Psi_{|P})^{-1}(a)$, tenemos que $p + p^*$ está en J y por tanto

$$a = \Psi(p) = \Psi(p+p^*) = p + p^* \in H(\mathcal{B},*) = J.$$

Luego $A \subseteq J$ y $J = A^+$. A es obviamente simple porque J es un álgebra de Jordan simple.

Si existen x e y en J con $[x,y] \in J\backslash\{0\}$, entonces $J = A^+$ porque en caso contrario $J = H(A,*)$ para conveniente involución $*$ en A y $0 \neq [x,y] \in H(A,*) \cap S(A,*) = \{0\}$, contradicción. Recíprocamente, si $J = A^+$, entonces, como J es simple y no isomorfa al álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica, J no es asociativa (pues en tal caso $J = Z(J)$ es un cuerpo). Luego A no es conmutativa y por tanto existen x, y en A con $[x,y] \in J\backslash\{0\}$. ∎

NOTACION. En lo que sigue $(B, \|.\|)$ denotará el álgebra de Banach $M_4(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) vista como el álgebra de todos los operadores lineales y continuos en el espacio de Hilbert $X := \mathbb{K}^4$. Entonces, viendo el espacio de Hilbert infinito-dimensional separable H sobre $\mathbb{K}$ como la ℓ_2-suma de la familia infinito numerable de copias de X, $H = \bigoplus^{\ell_2}_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (donde $X_n = X$ para todo n en $\mathbb{N}$), podemos ver el "monstruo" $\mathcal{M} := M_\infty(\mathbb{K}) \cong M_\infty(B)$ como subálgebra asociativa del álgebra $BL(H)$ y sus elementos son operadores lineales continuos de

rango finito. La norma de operadores en $BL(H)$ también denotada por $\|.\|$ verifica que su restricción a $\mathcal{M}$ extiende la norma de B y verifica que $\| \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \|_{n+m} = Max\{\|\alpha\|_n, \|\beta\|_m\}$ para cualesquiera n, m en $\mathbb{N}$, α en $M_n(B)$ y β en $M_m(B)$, donde $\|.\|_n$ denota la restricción de $\|.\|$ a $M_n(B)$. En particular la norma $\|.\|$ en $M_\infty(B)$ está minorada por la norma del máximo y mayorada por la norma de la suma, tal como se exige al principio de la demostración de la Proposición $VI.1.1$. Adoptaremos la notación empleada en la demostración del Teorema $VI.1.6$: $*$ denotará la involución simpléctica en B dada por $b^* := s^{-1}b^t s$, donde b^t denota la transpuesta de b y $s := diag\{q, q\}$ con $q := \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$; dicha involución conmuta con el paso al operador adjunto $\#$ en el espacio de Hilbert X (transponer y conjugar cada elemento de la matriz); J (la envolvente lineal de $\{1, x, y, z, t\}$) es una subálgebra de Jordan no reversible (cerrada) de B contenida en $H(B, *)$ y J es un subconjunto auto-adjunto de la C^*-álgebra $B = BL(X)$. Para n en $\mathbb{N}$, $\mathcal{J}_n := M_{n-1}(\mathbb{K}) \otimes B + e_n \otimes J$ (con $M_0(\mathbb{K}) := \{0\}$) es una subálgebra de Jordan finito-dimensional de $\mathcal{M}$. Finalmente, recordemos la "norma monstruosa" $|\!|\!|.|\!|\!|$ en $\mathcal{M}$ dada por

$$|\!|\!|\alpha|\!|\!| := \|\alpha\| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{5^n} \|\alpha + \mathcal{J}_n\|$$

para cualquier α en $\mathcal{M}$. Así $|\!|\!|.|\!|\!|$ es una norma de álgebra en $\mathcal{M}^+$ y la topología de la restricción de $|\!|\!|.|\!|\!|$ a $H(\mathcal{M}, *)$ no puede extenderse a la topología de una norma de álgebra en $\mathcal{M}$ (luego, en particular, $|\!|\!|.|\!|\!|$ hace el producto asociativo de $\mathcal{M}$ discontinuo). Ahora la involución $*$ en $\mathcal{M}$ es la involución canónica en $\mathcal{M}$ respecto a la involución simpléctica en B, esto es, transponer por cajas 4×4 y aplicar a cada caja la involución simpléctica de B.

HECHO 1. *El conjunto $\mathcal{J}$ de todos los operadores F en $BL(H)$ para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{5^n} \|F + \mathcal{J}_n\| < \infty$ es una subálgebra de Jordan autoadjunta de $BL(H)$ que contiene a $\mathcal{M}$ y los elementos de $\mathcal{J}$ son operadores*

compactos en H. Además, si para F en $\mathcal{J}$ definimos

$$|F| := \|F\| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{5^n} \|F + \mathcal{J}_n\| ,$$

entonces $|.|$ es una norma de álgebra completa en $\mathcal{J}$ extendiendo la norma monstruosa en $\mathcal{M}$ y verificando que $|F^\#| = |F|$ para todo F en $\mathcal{J}$, donde $F^\#$ denota el operador adjunto de F.

Demostración. Como J es un subconjunto auto-adjunto de B, $\mathcal{J}_n$ es un subconjunto auto-adjunto de $BL(H)$ y así, para F en $BL(H)$ se tiene que $\|F + \mathcal{J}_n\| = \|F^\# + \mathcal{J}_n\|$ para todo n en $\mathbb{N}$. Luego $F^\#$ pertenece a $\mathcal{J}$ cuando F está en $\mathcal{J}$ y, en tal caso, $|F^\#| = |F|$.

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ y F en $BL(H)$ definimos inductivamente $|F|_k$ por $|F|_0 := \|F\|$ y $|F|_{k+1} := |F|_k + 2^{5^{k+1}} \|F + \mathcal{J}_{k+1}\|$, así que F está en $\mathcal{J}$ si, y sólo si, la sucesión monótona creciente $\{|F|_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es convergente, en cuyo caso, $|F|_k \longrightarrow_{k \to \infty} |F|$. Como en la demostración de la Proposición $VI.1.1$ se tiene la desigualdad $|F.G|_k \leq |F|_k |G|_k$ para cualesquiera F, G en $BL(H)$ y para todo k en $\mathbb{N}$. Luego, si F y G están en $\mathcal{J}$, entonces $F.G$ queda en $\mathcal{J}$ y $|F.G| \leq |F||G|$. Como $\mathcal{J}$ es claramente un subespacio de $BL(H)$, esto demuestra que $\mathcal{J}$ es una subálgebra de Jordan de $BL(H)$ y que $|.|$ es una norma de álgebra en $\mathcal{J}$.

Por supuesto $\mathcal{M}$ está contenida en $\mathcal{J}$ y $|.|$ extiende la norma monstruosa de $\mathcal{M}$.

Para F en $\mathcal{J}$, claramente se tiene $\|F + \mathcal{J}_n\| \longrightarrow_{n \to \infty} 0$ y por tanto, como $\mathcal{J}_n$ está contenida en $\mathcal{M}$ cuyos elementos son operadores compactos, F es compacto. Sea ahora, $\{F_n\}$ una sucesión $|.|$-Cauchy en $\mathcal{J}$. Como $\|.\| \leq |.|$, entonces $\{F_n\}$ es $\|.\|$-Cauchy en $BL(H)$, luego $\|.\|$-converge a un operador F en $BL(H)$. Para $\varepsilon > 0$, sea p en $\mathbb{N}$ tal que $|F_n - F_m| \leq \varepsilon$ para $n, m \geq p$. Entonces para cualesquiera k, n, m en $\mathbb{N}$ con $n, m \geq p$ se tiene que $|F_n - F_m|_k \leq \varepsilon$ y, como $|.|_k$ es $\|.\|$-continua pues $|F|_k \leq (1 + 2^5 + \ldots + 2^{5^k})\|F\|$, haciendo tender m a ∞ obtenemos $|F_n - F|_k \leq \varepsilon$. Ahora, para $n \geq p$, $F_n - F$ pertenece a $\mathcal{J}$ y $|F_n - F| \leq \varepsilon$. Luego F queda en $\mathcal{J}$ y $F = |.| - \lim_{n \to \infty} \{F_n\}$, esto es, $|.|$ es una norma de álgebra completa en $\mathcal{J}$. ∎

Nota VII.1.2. Recordemos que toda subálgebra asociativa autoadjunta de la C^*-álgebra $BL(H)$ es semiprima, pues partiendo de la igualdad $\|F^\#F\| = \|F\|^2$ válida para todo F en $BL(H)$ se tiene que

$$\|F\|^4 = \|F^\#F\|^2 = \|F^\#FF^\#F\| \leq \|F\|\,\|FF^\#F\| \leq \|F\|^4$$

y de ahí $\|FF^\#F\| = \|F\|^3$. Ahora, sea A una subálgebra asociativa autoadjunta de $BL(H)$ y sea F en A tal que $FAF = \{0\}$. Entonces, tenemos en particular que $FF^\#F = 0$ y por tanto $F = 0$. Luego A es semiprima. Notemos que ni el álgebra de Jordan-Banach $(\mathcal{J}, |\!|.|\!|)$ del Hecho 1, ni ninguna de sus subálgebras $|\!|.|\!|$-cerradas que contienen a $\mathcal{M}$, pueden ser subálgebras asociativas de $BL(H)$. En efecto, en caso de serlo, como toda subálgebra asociativa autoadjunta de $BL(H)$ es semiprima, se tendría un álgebra semiprima completa con la norma $|\!|.|\!|$ haciendo el producto Jordan continuo, luego por el Teorema V.1.1 el producto asociativo en $\mathcal{M}$ sería $|\!|.|\!|$-continuo, lo que contradice el Teorema VI.1.6.

En adelante, la teoría del zócalo para álgebras asociativas semiprimas y para las álgebras de Jordan no-degeneradas resultará crucial, por lo que recogemos a continuación las definiciones y resultados necesarios en esta teoría. Para un mayor conocimiento del zócalo remitimos al lector a [51] y [34].

Definición VII.1.3. Sea A un álgebra asociativa semiprima sobre $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Un elemento e de A se dice *idempotente* si $e^2 = e \neq 0$. Si además verifica que eAe es un álgebra de división diremos que e es un *idempotente minimal.*

Si A contiene un ideal izquierdo minimal $L \neq 0$ entonces $L = Ae$ para algún idempotente minimal e en A. Además eA es un ideal derecho minimal. Recíprocamente, si e es un idempotente minimal entonces Ae es un ideal izquierdo minimal y eA es un ideal derecho minimal.

Definición VII.1.4. El *zócalo* de un álgebra asociativa semiprima A, $soc(A)$, se define como la suma de todos los ideales izquierdos (o derechos) minimales. El zócalo de A es un ideal bilátero de A.

Con el fin de enunciar el teorema de estructura de las álgebras asociativas primas con zócalo no nulo, recordamos la siguiente definición.

Definición VII.1.5. Dada un álgebra de división Δ, un *par dual* de espacios vectoriales es una terna $(X, Y, <.,.>)$, donde X es un espacio vectorial izquierdo sobre Δ, Y es un espacio vectorial derecho sobre Δ, y $<.,.>$ es una aplicación Δ-bilineal de $X \times Y$ en Δ. $L_Y(X)$ denotará el álgebra de todos los operadores en X que tienen adjunto respecto a $<.,.>$ (tales operadores son automáticamente Δ-lineales), mientras que $FL_Y(X)$ denotará el conjunto de los elementos de $L_Y(X)$ que tienen rango finito.

Teorema VII.1.6.([51]; Structure theorem, pag. 75) *Un álgebra asociativa A sobre $\mathbb{K}$ es prima con zócalo no nulo si, y sólo si, existe un álgebra de división Δ sobre $\mathbb{K}$ y un par dual de espacios vectoriales sobre Δ $(X, Y, <.,.>)$ tal que A es subálgebra de $L_Y(X)$ conteniendo a $FL_Y(X)$. En tal caso, $soc(A) = FL_Y(X)$.*

En el caso en que A tenga además una involución $*$ entonces X es un espacio auto-dual respecto a una forma hermitiana o alternada como se define a continuación.

Definición VII.1.7.Un *espacio vectorial auto-dual* sobre Δ, $(X, <.,.>)$, es un espacio vectorial izquierdo X sobre Δ junto con una aplicación $<.,.>$ de $X \times X$ en Δ, donde o bien Δ es una álgebra de división con involución $\overline{}$ y $<.,.>$ es una forma hermitiana no-degenerada (Δ-lineal en la primera variable y $\overline{<x,y>} = <y,x>$), o bien Δ es un cuerpo extensión del cuerpo base y $<.,.>$ es una forma alternada no-degenerada (Δ-bilineal y $<x,x> = 0$). En ambos casos el álgebra $L_X(X)$ de todos los operadores lineales en X con adjunto respecto a $<.,.>$ es un álgebra con involución igual al paso al operador adjunto.

Teorema VII.1.8. ([51]; Theorem 2, pag. 83 y [47]; Theorem 9 , pag. 270) *Un álgebra asociativa A sobre $\mathbb{K}$ es prima con involución y zócalo no nulo si, y sólo si, existe un espacio vectorial auto-dual $(X, <.,.>)$ sobre Δ tal que A es una subálgebra autoadjunta de $L_X(X)$ conteniendo a $FL_X(X)$, donde, como antes, o bien Δ es un álgebra de división sobre $\mathbb{K}$ con involución y $<.,.>$ es hermitiana, o bien Δ es un cuerpo extensión de $\mathbb{K}$ y $<.,.>$ es alternada. En ambos casos, la involución de A es el paso al operador adjunto y $soc(A) = FL_X(X)$.*

Osborn y Racine han definido la noción de zócalo para álgebras de Jordan no-degeneradas y han obtenido los siguientes resultados entre los que incluimos el teorema de estructura de las álgebras de Jordan primas no-degeneradas con zócalo no nulo [84].

Definición VII.1.9. El *zócalo* de un álgebra de Jordan no-degenerada J, $soc(J)$, es la suma de todos los ideales internos minimales.

El zócalo de un álgebra de Jordan no-degenerada J es un ideal de J. Si e es un *idempotente minimal* de J (es decir, $U_e(J)$ es de división), entonces el ideal de J engendrado por e es un álgebra de Jordan simple contenida en $soc(J)$, y $soc(J)$ es la suma directa del conjunto de los ideales obtenidos de esta forma [84]. En consecuencia, si J es prima, entonces $soc(J)$ es un ideal simple de J, luego contenido en cualquier otro ideal no nulo de J. Esto implica que las álgebras de Jordan normadas primas no-degeneradas con zócalo denso son topológicamente simples. Si A es un álgebra asociativa semiprima entonces $soc(A^+) = soc(A)$. Además, si A tiene una involución $*$ entonces $soc(H(A,*)) = H(soc(A),*)$ ([34]; Prop. 2.6).

Al igual que en el caso asociativo, bajo la hipótesis de zócalo no nulo un álgebra de Jordan es prima si, y sólo si, es primitiva ([37]; Theorem 18).

Las álgebras de Jordan primas no-degeneradas con zócalo no nulo fueron clasificadas por Osborn y Racine .

Teorema VII.1.10.([84]; Theorem 18, véase también [35]; Theorem 3) *Un álgebra de Jordan J es prima no-degenerada con zócalo no nulo si, y sólo si, está en alguno de los siguientes casos:*

(a) J es un álgebra de Jordan excepcional 27-dimensional simple sobre su centro.

(b) J es el álgebra de Jordan simple asociada a una forma bilineal simétrica no-degenerada.

(c) Existe un par dual de espacios vectoriales $(X, Y, <.,.>)$ sobre un álgebra de división Δ tal que J es una subálgebra de Jordan de $L_Y(X)$ conteniendo como ideal a $FL_Y(X)$. En tal caso $soc(J) = FL_Y(X)$.

(d) Existe un espacio vectorial auto-dual $(X, <.,.>)$ sobre un álgebra de división Δ con una forma no-degenerada hermitiana o alternada tal que J es una subálgebra de Jordan de $L_X(X)$ contenida en $H(L_X(X), *)$ y conteniendo como ideal a $H(FL_X(X), *)$, donde $*$ es la involución paso al operador adjunto. En tal caso $soc(J) = H(FL_X(X), *)$.

Recordemos ahora la construcción de dos importantes subálgebras del álgebra $BL(H)$ de todos los operadores lineales continuos en el espacio de Hilbert infinito-dimensional separable.

Definición VII.1.11 .Sea H el espacio de Hilbert infinito-dimensional separable y $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base hilbertiana de H. Se define la norma *Hilbert-Schmidt* como $\|F\|_\sigma := (\sum_{i\in\mathbb{N}} \|F(e_i)\|^2)^{\frac{1}{2}}$, la cual (se demuestra) es independiente de la base hilbertiana elegida y por tanto $\|.\| \leq \|.\|_\sigma$. Se define el conjunto de los operadores Hilbert-Schmidt como $\mathcal{HS}(H) := \{F \in L(H) : \|F\|_\sigma < \infty\}$, que es una subálgebra de $BL(H)$.

Definición VII.1.12. Sea H el espacio de Hilbert infinito-dimensional separable. Se define $FL(H)$ como la subálgebra de los operadores continuos en H de rango finito.

Si $(.|.)$ denota el producto escalar en H, dados x, y en H, el operador $x \otimes y$ se define como $(x \otimes y)(z) = (z|y)x$. Obviamente $x \otimes y$ es un operador de rango finito. Si F es un operador continuo de rango finito en H, tomando $\{x_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $F(H)$ y ampliándola a una base hilbertiana de H, se tiene que $F = \sum_{i=1}^n x_i \otimes F^{\#}(x_i)$. Así, $FL(H) = \{\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : x_i, y_i \in H\}$. De aquí, y teniendo en cuenta que $\|x \otimes y\| = \|x\| \, \|y\| = \|x \otimes y\|_\sigma$ se sigue que $FL(H) \subset \mathcal{HS}(H)$.

Es bien conocido [100] que el $\|.\|$-cierre de $FL(H)$ es $KL(H)$, la subálgebra de $BL(H)$ de todos los operadores compactos, y que el $\|.\|_\sigma$-cierre de $FL(H)$ es $\mathcal{HS}(H)$. Probaremos ahora que $\mathcal{M}$ es $\|.\|$-denso en $KL(H)$.

Lema VII.1.13. *$\mathcal{M}$ es $\|.\|$-denso en $KL(H)$.*

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la base hilbertiana "natural" de H. Como $FL(H)$ es $\|.\|$-denso en $KL(H)$, nos bastará demostrar que dado F en $FL(H)$ y $\varepsilon > 0$ existe M en $\mathcal{M}$ tal que $\|F - M\|_\sigma \leq \varepsilon$ (pues en tal caso $\|F - M\| \leq \varepsilon$).

Como $\|F\|_\sigma := \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} \|F(e_i)\|^2} < \infty$, existe un número natural m tal que $\sum_{i>m} \|F(e_i)\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Ahora tomemos un natural n tal que $\sum_{j>n} |(F(e_i)|e_j)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2m}$ para todo $i = 1, 2, ..., m$. Con esta elección de n y m definimos $M = (\lambda_{ij})$ como $\lambda_{ij} = (F(e_i)|e_j)$ si $i \leq n$ y $j \leq m$ y $\lambda_{ij} = 0$ en caso contrario. Así, para $i = 1, 2, ..., m$ se tiene que $\|(F - M)(e_i)\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2m}$ y

$$\begin{aligned} \|F - M\|_\sigma &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \|(F - M)(e_i)\|^2 + \sum_{i>m} \|(F - M)(e_i)\|^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \|(F - M)(e_i)\|^2 + \sum_{i>m} \|F(e_i)\|^2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

∎

HECHO 2. *Sea $\mathcal{K}$ una subálgebra de Jordan autoadjunta de $BL(H)$ conteniendo a $\mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{K}$ es prima no-degenerada y tiene zócalo no nulo. Más precisamente, $soc(\mathcal{K})$ es una subálgebra asociativa simple de $BL(H)$ conteniendo a $\mathcal{M}$. Si además todos los elementos de $\mathcal{K}$ son operadores compactos, entonces $soc(\mathcal{K})$ es central simple sobre* $\mathbb{K}$.

Demostración. $\mathcal{K}$ es no-degenerada porque, para F en $\mathcal{K}\backslash\{0\}$, se tiene $F^{\#} \in \mathcal{K}$ y $U_F(F^{\#}) = FF^{\#}F \neq 0$ (pues $\|FF^{\#}F\| = \|F\|^3 \neq 0$).

Por otro lado en $\mathcal{M}$ hay muchos idempotentes minimales de $\mathcal{K}$, luego el zócalo de $\mathcal{K}$, $soc(\mathcal{K})$, es no nulo. Más concretamente, para un idempotente minimal e en $\mathcal{M}$, el ideal Q de $\mathcal{K}$ generado por e es un ideal simple de $\mathcal{K}$ contenido en $soc(\mathcal{K})$. Como $Q \cap \mathcal{M}$ es un ideal no nulo (contiene a e) del álgebra de Jordan $\mathcal{M}$, la cual es simple ([42]; Theorem 2.1.1 y Corollary), se tiene que $Q \cap \mathcal{M} = \mathcal{M}$ y por tanto $\mathcal{M} \subset Q (\subset soc(\mathcal{K}))$.

Para probar la primidad de $\mathcal{K}$, sea ahora P un ideal no nulo de $\mathcal{K}$ y Q el ideal de $\mathcal{K}$ generado en $\mathcal{K}$ por un idempotente minimal e . Entonces $P \cap Q$ es un ideal de Q no nulo (pues en tal caso $\{0\} = P.Q \supset P.\mathcal{M}$ y por tanto $P = \{0\}$), luego $P \cap Q = Q$ y $P \supset Q \supset \mathcal{M}$, de donde se sigue la primidad de $\mathcal{K}$.

Finalmente, como $\mathcal{K}$ es prima y no-degenerada, $soc(\mathcal{K})$ es una subálgebra de Jordan simple de $BL(H)$ y claramente contiene a $[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \neq 0$. Además la subálgebra asociativa A de $BL(H)$ generada por $J := soc(\mathcal{K})$ tiene anulador nulo en ella (por ser $\#$-invariante y $\|FF^{\#}\| = \|F\|^2$). Se sigue del Lema $VII.1.1$ (primera posibilidad, $J = A^+$) que $soc(\mathcal{K})$ es una subálgebra asociativa de $BL(H)$.

Para concluir la prueba supongamos que $\mathcal{K}$ está contenida en el álgebra $KL(H)$ de todos los operadores compactos en H. Entonces, como $KL(H)$ es centralmente cerrada sobre $\mathbb{K}$ ([74]; Theorem 12) y $soc(\mathcal{K})$ es $\|.\|$-denso en $KL(H)$ (nótese que por el Lema $VII.1.13$, $\mathcal{M}$ es $\|.\|$-denso en $KL(H)$), podemos aplicar [96]; Lemma 4 para obtener que el álgebra simple $soc(\mathcal{K})$ es central sobre $\mathbb{K}$. ∎

Tomando $\mathcal{K}$ en el Hecho 2 igual a la completación del monstruo respecto a la norma monstruosa, esto es, la clausura de $\mathcal{M}$ en $(\mathcal{J}, |.|)$ (ver Hecho 1), obtenemos inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema VII.1.14 .*Sea* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. *Existe un álgebra de Jordan-Banach* $\mathcal{K}$ *sobre* $\mathbb{K}$ *topológicamente simple (luego prima) no-degenerada, cuyo zócalo es de la forma* A^+, *donde* A *es un álgebra asociativa central simple sobre* $\mathbb{K}$, *y la restrición de la norma de* $\mathcal{K}$ *a* A *hace discontinuo el producto asociativo de* A.

Definición VII.1.15 .Un *apareamiento de Banach complejo* consiste en un par de espacios de Banach complejos (Y, Z) junto con una forma bilineal no-degenerada continua $< ., . >: Y \times Z \to \mathbf{C}$. Para un tal apareamiento de Banach complejo, denotaremos por $L_Z(Y)$ al álgebra asociativa de todos los operadores lineales $F : Y \to Y$ que tienen un adjunto $F^* : Z \to Z$ relativo a $< ., . >$, y por $FL_Z(Y)$ al ideal simple de $L_Z(Y)$ de todos los operadores de rango finito en $L_Z(Y)$.

Por el Teorema de la Gráfica Cerrada, tanto los operadores en $L_Z(Y)$ como sus adjuntos son automáticamente continuos, y $L_Z(Y)$ es un álgebra de Banach compleja bajo la norma $\mid F \mid := \max\{\|F\|, \|F^*\|\}$ (ver por ejemplo [18]).

Teniendo en cuenta los resultados en [84] y [88], el último teorema enunciado tiene el siguiente corolario.

Corolario VII.1.16 . *Existe un apareamiento de Banach complejo* $(Y, Z, < ., . >)$, *una subálgebra de Jordan* $\mathcal{K}$ *de* $L_Z(Y)$ *conteniendo a* $FL_Z(Y)$, *y una norma de álgebra completa* $|.|$ *en* $\mathcal{K}$ *tal que la inclusión* $(\mathcal{K}, |.|) \hookrightarrow (L_Z(Y), \mid . \mid)$ *es continua, y la restricción de* $|.|$ *a* $FL_Z(Y)$ *hace discontinuo el producto asociativo de* $FL_Z(Y)$.

En lo que sigue necesitamos extender la involución $*$ de $\mathcal{M}$ a $BL(H)$ con convenientes propiedades como se recoge en el siguiente lema.

Lema VII.1.17 . *La involución* $*$ *en* $\mathcal{M}$ *puede extenderse a una involución (también denotada por* $*$*) en* $BL(H)$ *commutando con el paso al operador adjunto* $\#$, *el álgebra de Jordan* $\mathcal{J}$ *(Hecho 1) es* $*$*-invariante y la involución* $*$ *es* $|.|$*-isométrica en* $\mathcal{J}$.

Demostración. Consideremos la aplicación j de $X = \mathbb{K}^4$ en X definida por $j(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (\overline{\lambda}_2, -\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_4, -\overline{\lambda}_3)$ (donde, para λ en $\mathbb{K}$, $\overline{\lambda}$ denota el conjugado de λ) y k la aplicación de $H = \bigoplus^{\ell_2}_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (donde $X_n = X$ para todo n en $\mathbb{N}$) en H dada por $k((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (j(x_1), j(x_2), j(x_3), \ldots)$. Entonces, como $b^* = j^{-1} \circ b^\# \circ j$ para todo b en $B = BL(X)$ (nótese que $j(x) = \overline{s(x)}$ para todo x en X, donde $s := diag\{q, q\}$ con $q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\overline{s(x)}$ denota el conjugado en cada componente), se tiene que $\alpha^* = k^{-1} \circ \alpha^\# \circ k$ para todo α en $\mathcal{M} = M_\infty(B)$, y por tanto la aplicación $F \mapsto k^{-1} \circ F^\# \circ k$ es una involución en $BL(H)$ extendiendo la involución $*$ en $\mathcal{M}$ y conmutando con $\#$. La $*$-invarianza de $\mathcal{J}$ y la $|.|$-isometría de $*$ en $\mathcal{J}$ se sigue de las definiciones de $\mathcal{J}$ y $|.|$. ∎

HECHO 3. *Sea $\mathcal{K}$ una subálgebra de Jordan auto-adjunta de $BL(H)$ contenida en $H(BL(H), *)$ y conteniendo a $H(\mathcal{M}, *)$. Entonces $\mathcal{K}$ es prima no-degenerada y tiene zócalo no nulo. Si A denota la (automaticamente $*$-invariante) subálgebra asociativa de $BL(H)$ generada por el zócalo de $\mathcal{K}$, entonces A es simple, $\mathcal{M}$ está contenida en A, y $soc(\mathcal{K}) = H(A, *)$. Si además $\mathcal{K}$ contiene sólo operadores compactos entonces A es central simple sobre $\mathbb{K}$.*

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la base hilbertiana "natural" de H. Como en la prueba del Hecho 2, se llega a que $\mathcal{K}$ es no-degenerada. Denotando por

$$e := \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right),$$

$e = (e_1 \otimes e_1) + (e_2 \otimes e_2)$ resulta ser un idempotente en $H(\mathcal{M}, *)$. Además si $F = F^*$ se tiene que $k \circ F = F^\# \circ k$ y, usando que $k(e_1) = -e_2$, $k(e_2) = e_1$ y que k es conjugado-lineal isométrica, se obtiene que

$$(F(e_1)|e_1) = (F(e_2)|e_2)\ ,\quad (F(e_2)|e_1) = (F(e_1)|e_2) = 0$$

y por tanto $eFe = (F(e_1)|e_1)e \in \mathbb{K}e$. Así $U_e(\mathcal{K}) = \mathbb{K}e$ lo que implica que $\mathcal{K}$ tiene zócalo no nulo.

Ahora, como en la demostración del Hecho 2 (cámbiese $\mathcal{M}$ por $H(\mathcal{M},*)$) se prueba que $\mathcal{K}$ es prima (luego $soc(\mathcal{K})$ es simple) y que $soc(\mathcal{K})$ contiene a $H(\mathcal{M},*)$.

Sea A la subálgebra asociativa de $BL(H)$ generada por $J := soc(\mathcal{K})$. Entonces A tiene anulador nulo en ella misma (por ser autoadjunta) y es imposible encontrar x,y en $soc(\mathcal{K})$ tal que $[x,y] \in soc(\mathcal{K})\backslash\{0\}$ (pues $soc(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K} \subseteq H(BL(H),*)$ y $[x,y] \in S(BL(H),*)$). Se sigue del Lema VII.1.1 (segunda posibilidad) que existe una involución $\Box$ en A tal que A es $\Box$-simple y $soc(\mathcal{K}) = H(A,\Box)$. Pero $\Box$ y $*$ coinciden en A porque ambas involuciones fijan los elementos de $soc(\mathcal{K})$ y $soc(\mathcal{K})$ genera A. Por otro lado, como $H(A,*)$ contiene a $H(\mathcal{M},*)$ y genera a A, A debe contener a $\mathcal{M}$ porque $H(\mathcal{M},*)$ genera $\mathcal{M}$ (véase Corolario III.2.6). Ahora A es prima (consecuencia del Hecho 2) y $*$-simple, luego A es simple (si P es un ideal no nulo de A entonces $PP^* + P^*P$ es un $*$-ideal no nulo, luego $A = PP^* + P^*P \subset P \cap P^*$ y $P = A$).

El hecho de que A es central simple sobre $\mathbb{K}$ cuando $\mathcal{K}$ está contenida en $KL(H)$ se sigue de la $\|.\|$-densidad de A en $KL(H)$ por los mismos argumentos que en la conclusión del Hecho 2. ∎

Tomando $\mathcal{K}$ en el Hecho 3 igual a la completación de $H(\mathcal{M},*)$ respecto a la norma monstruosa, la clausura de $H(\mathcal{M},*)$ en $(\mathcal{J},\|.\|)$ (ver Hecho 1), obtenemos el siguiente teorema.

Teorema VII.1.18. *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Existe un álgebra de Jordan-Banach topológicamente simple no-degenerada $\mathcal{K}$ sobre $\mathbb{K}$ cuyo zócalo es de la forma $H(A,*)$, donde A es un álgebra asociativa central simple sobre $\mathbb{K}$ con una involución $*$, y la topología de la restricción de la norma de $\mathcal{K}$ a $H(A,*)$ no puede extenderse a una topología de una norma de álgebra en A.*

Definición VII.1.19. Un *autoapareamiento de Banach complejo* no es más que un apareamiento Banach complejo $(Y,Z,<.,.>)$ con $Z = Y$

y tal que la forma bilineal continua no-degenerada $< ., . >$ en Y es simétrica o alternada. En tal caso el paso al operador adjunto es una involución en el álgebra $L_Y(Y)$ dejando invariante a $FL_Y(Y)$.

Teniendo en cuenta los resultados en [84] y [88], el último teorema tiene el siguiente corolario.

Corolario VII.1.20. *Existe un autoapareamiento de Banach complejo* $(Y, < ., . >)$, *una subálgebra de Jordan* $\mathcal{K}$ *de* $L_Y(Y)$ *contenida en* $H(L_Y(Y), *)$ *y conteniendo a* $H(FL_Y(Y), *)$, *y una norma completa de álgebra* $\|.\|$ *en* $\mathcal{K}$ *tal que al inclusión* $(\mathcal{K}, \|.\|) \hookrightarrow (L_Y(Y), |\ .\ |)$ *es continua mientras que la restricción de* $\|.\|$ *al álgebra de Jordan simple* $H(FL_Y(Y), *)$ *no puede extenderse a una topología de norma de álgebru en* $FL_Y(Y)$.

Nota VII.1.21. En el mismo sentido que los comentarios finales del capítulo sexto, enfatizamos que los resultados obtenidos anteriormente demuestran que una versión normada "fuerte" del Teorema de Zel'manov para las álgebras de Jordan-Banach primas no-degeneradas no puede esperarse incluso si se supone adicionalmente la existencia de zócalo no nulo. Esto da especial relevancia a los resultados "light" en este campo tales como el Teorema *III*.2.1 (en álgebras de Jordan-Banach primas no-degeneradas) y [88]; Theorem 1.1 (en álgebras de Jordan-Banach primas no-degeneradas con zócalo no nulo). Teniendo en cuenta que las álgebras de Jordan primas no-degeneradas con zócalo no nulo son primitivas, se sigue que el Teorema *IV*.1.1 de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas no puede ser mejorado en general.

Apéndice 1. Algebras de Cayley-Dickson reales y complejas.

En este apéndice definimos el concepto de álgebra de Cayley y desarrollamos el proceso de Cayley-Dickson para estas álgebras. Este proceso es aplicable a las álgebras de composición obteniendose las álgebras de Cayley-Dickson. Por útlimo describimos todas las álgebras de Cayley-Dickson reales y complejas.

Definición A1.1. Un *álgebra de Cayley* A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un álgebra con unidad sobre $\mathbb{K}$, poseyendo una involución lineal $a \mapsto \overline{a}$, llamada *involución cayleyana*, tal que para todo elemento a de A se verifica que

$$a + \overline{a} \in \mathbb{K}1 \quad y \quad a\overline{a} \in \mathbb{K}1.$$

Por ejemplo, $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ y el álgebra de las matrices 2×2 sobre $\mathbb{K}$ con las involuciones $\overline{a} = a$, $\overline{(a,b)} = (b,a)$ y $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ respectivamente son ejemplos de álgebras de Cayley.

Necesitamos ahora recordar las siguientes definiciones.

Sea A un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $q : A \to \mathbb{K}$ es una *forma cuadrática* si

(1) $q(\lambda a) = \lambda^2 q(a)$ para cualesquiera a en A y λ en $\mathbb{K}$,

(2) la función $q(a,b) := \frac{1}{2}[q(a+b) - q(a) - q(b)]$ es una forma bilineal en A.

Una forma cuadrática es *no-degenerada* si la forma bilineal asociada es no-degenerada.

Definición A1.3. Un álgebra A sobre $\mathbb{K}$ con unidad se llama *cuadrática* si todo elemento a en A satisface una ecuación cuadrática

$$a^2 + \alpha a + \beta 1 = 0$$

con α, β en $\mathbb{K}$.

Si A es un álgebra de Cayley, las aplicaciones t y n de A en $\mathbb{K}$ definidas por

$$t(a) := a + \overline{a} \quad y \quad n(a) := a\overline{a}$$

se llaman respectivamente *traza* y *norma cayleyanas* de A. Se demuestra sin dificultad que t es lineal y que n es una forma cuadrática. Además A es cuadrática pues para todo elemento a de A se verifica que

$$a^2 - t(a)a + n(a)1 = 0\,.$$

Sea A un álgebra de Cayley sobre $\mathbb{K}$. Por el *proceso de Cayley-Dickson* ([110]; pag. 28) podemos construir una nueva álgebra con involución que contiene a A como subálgebra y además si $dim(A) = n$ entonces la dimensión de la nueva álgebra es $2n$.

Para realizar dicho proceso fijemos un escalar no nulo α en $\mathbb{K}$ y denotemos por $A(\alpha)$ al conjunto de todos los pares ordenados (a_1, a_2), con a_1, a_2 en A, con las operaciones suma y multiplicación por un escalar definidas puntualmente y con producto

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) := (a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2}, \overline{a_1}a_4 + a_3a_2)\,.$$

Es rutinario comprobar que $A(\alpha)$ es un álgebra sobre $\mathbb{K}$, el elemento $(1,0)$ es la unidad para $A(\alpha)$ y que $A' = \{(a,0) : a \in A\}$ es una

subálgebra de $A(\alpha)$ isomorfa a A. Si llamamos $v = (0,1)$, entonces $v^2 = \alpha(1,0)$ y $A(\alpha)$ es suma directa de los espacios vectoriales A' y vA'. Si identificamos A con A' entonces todo elemento de $A(\alpha)$ se expresa en la forma $x = a_1 + va_2$ (con a_i en A unívocamente determinados por x) y el producto viene dado por

$$(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2}) + v(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2)\,.$$

Para un elemento arbitrario $x = a_1 + va_2$ en $A(\alpha)$ definimos $\overline{x} = \overline{a_1} - va_2$ y tenemos así una involución en $A(\alpha)$ tal que $x + \overline{x} = t(a_1)$, $x\overline{x} = n(a_1) - \alpha n(a_2)$ quedan en $\mathbb{K}$. Por tanto $A(\alpha)$ es una nueva álgebra de Cayley conteniendo a A como subálgebra y si $dim(A) = n$ entonces $dim(A(\alpha)) = 2n$.

Aplicaremos ahora este proceso a un tipo de álgebras de Cayley de importante relevancia histórica: las álgebras de composición. Estas aparecen como una generalización natural de los complejos, los cuaterniones y los octoniones y juegan un importante papel en la teoría de las álgebras alternativas y de Jordan.

Definición A1.4. Sea A un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una forma cuadrática q en A se dice que *admite composición* si existe un producto (composición) ab en A tal que

$$q(ab) = q(a)q(b)\,.$$

El *problema de Hurwitz* consiste en la determinación de las formas cuadráticas no degeneradas que admiten composición. Aunque este problema ha sido tratado por muchos autores ([46], [2], [38], [70], [29]), en los artículos [66] de I. Kaplansky y [48] de N. Jacobson se da la solución general para álgebras con unidad, esto es, se estudian las álgebras de composición según la siguiente definición.

Definición A1.5. Un *álgebra de composición* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un álgebra con unidad A sobre $\mathbb{K}$ para la que existe una forma cuadrática no-degenerada q tal que $q(ab) = q(a)q(b)$ para cualesquiera a y b en A.

Para la descripción de las álgebras de composición necesitamos la siguiente definición.

Definición A1.6. Un álgebra A es llamada *alternativa* si $a^2b = a(ab)$ y $ba^2 = (ba)a$ para cualesquiera a, b en A.

Toda álgebra de composición es alternativa ([110]; Lemma 2.1) y con la involución $a \mapsto \overline{a} := 2f(1,a)1 - a$ es un álgebra de Cayley ([110]; Lemma 2.2). Inversamente, toda álgebra alternativa de Cayley es un álgebra de composición ([48]; pag. 58).

Por ser toda álgebra de composición un álgebra de Cayley le es aplicable el proceso de Cayley-Dickson. ¿Cuándo al aplicar el proceso de Cayley-Dickson a un álgebra de composición A se obtiene que $A(\alpha)$ es un álgebra de composición?. En virtud de la caracterización anterior de las álgebras de composición y dado que siempre $A(\alpha)$ es de Cayley, la anterior cuestión es equivalente a preguntarse ¿cuándo $A(\alpha)$ es alternativa?, de manera que la respuesta a la cuestión se sigue de los siguientes resultados (véase [53]; pag. 423-424):

a) $A(\alpha)$ es alternativa $\Leftrightarrow$ A es asociativa,

b) $A(\alpha)$ es asociativa $\Leftrightarrow$ A es asociativa y conmutativa,

c) $A(\alpha)$ es conmutativa $\Leftrightarrow$ A es conmutativa, asociativa y con involución la identidad.

Luego nosotros podemos construir cuatro clases de álgebras de composición partiendo del cuerpo $\mathbb{K}$ y la identidad como involución mediante el proceso de Cayley-Dickson:

(i) $A_0 = \mathbb{K}\mathbf{1}$, y tomando un escalar no nulo α_1 obtenemos

(ii) $A_1 = \mathbb{K}(\alpha_1)$, conmutativa y de dimensión 2; tomando $\alpha_2 \neq 0$ obtenemos

(iii) $A_2 = \mathbb{K}(\alpha_1, \alpha_2)$, denominada *álgebra de cuaterniones sobre* $\mathbb{K}$, la cual es asociativa no conmutativa y de dimensión 4; y tomando $\alpha_3 \neq 0$ obtenemos

(iv) $A_3 = \mathbb{K}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, denominada *álgebra de octoniones sobre* $\mathbb{K}$ o *álgebra de Cayley-Dickson*, la cual es alternativa pero no asociativa (véase la tabla de su producto en [110], pag. 34) y de dimensión 8.

El Teorema de Hurwitz generalizado ([52]; pag. 164 o [53]; pag. 425-427) afirma que sobre un cuerpo de característica distinta de 2 estas son las cuatro clases de álgebras de composición.

Podemos pues decir que las álgebras de Cayley-Dickson sobre $\mathbb{K}$ son las álgebras de composición de dimensión 8 sobre $\mathbb{K}$. Estas álgebras son simples ([110]; Lemma 2.3) y centrales sobre $\mathbb{K}$ ([110]; Theorem 2.5).

Daremos en este apéndice una materialización concreta de las álgebras de Cayley-Dickson reales y complejas siguiendo [21] páginas 46-52. Hemos de hacer notar que distintas elecciones de los escalares no nulos en la aplicación del proceso de Cayley-Dickson no revierten necesariamente en la obtención de álgebras no isomorfas. Veremos que sobre $\mathbb{R}$ sólo hay, salvo isomorfismo, dos álgebras de Cayley-Dickson y sobre $\mathbb{C}$ sólo una.

Un álgebra de composición se dice *split* si satisface las siguientes dos condiciones equivalentes ([110]; Lema 2.9)

a) Existen elementos no nulos x tales que $n(x) = 0$.

b) Existen divisores de cero.

Dos álgebras de composición split de la misma dimensión sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ son isomorfas y toda álgebra de composición sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y de dimensión mayor que 1 es split ([110]; Theorem 2.5 y Corollary). De estos dos hechos se sigue que sobre $\mathbb{C}$, salvo isomorfismo, existe una única álgebra de Cayle-Dickson $C(\mathbb{C})$, la cual es "split". En $\mathbb{R}$, sin embargo, salvo isomorfismo, hay dos álgebras de Cayley-Dickson, una "split" $C(\mathbb{R})$ y otra no "split" $\mathbb{O}$ (los octoniones reales de división)([31]; Theorem 9.3.2).

Las álgebras de Cayley-Dickson "split" $C(\mathbb{K})$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ pueden ser representadas en la *forma matricial de Zorn* ([110]; Theorem 2.7) como sigue:

Los elementos de $C(\mathbb{K})$ son matrices de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}$ donde α, β están en $\mathbb{K}$ y $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ están en $\mathbb{K}^3$.

La suma de elementos de $C(\mathbb{K})$ y la multiplicación por elementos del cuerpo son las usuales. Sin embargo, la multiplicación viene dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & z \\ t & \delta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha\gamma + (x,t) & \alpha z + \delta x - y \times t \\ \gamma y + \beta t + x \times z & \beta\delta + (y,z) \end{pmatrix}$$

donde denotamos

$$(x,y) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$x \times y := (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)\ (\textit{producto vectorial}).$$

En esta concreta materialización, la involución cayleyana viene dada por

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}} := \begin{pmatrix} \beta & -x \\ -y & \alpha \end{pmatrix}$$

y por consiguiente la traza y la norma cayleyana vienen dadas por

$$t\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} = \alpha + \beta \quad n\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta - (x,y).$$

Por último los octoniones reales de división son

$$\mathbb{O} = \{\begin{pmatrix} \alpha & x \\ -\overline{x} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}\ ,\ x \in \mathbb{C}^3\}$$

donde estamos denotando por $\overline{x} := (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ la conjugación en cada componente. Así, $\mathbb{O}$ tambien puede verse como $\mathbb{O} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$, donde la suma y el producto por números reales de elementos de $\mathbb{O}$ son los usuales y el producto viene dado por

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta - (x,y)\ ,\ \alpha y + \overline{\beta}x - \overline{x} \times \overline{y}).$$

Apéndice 2. Teorema del cambio de parámetro de Zel'manov.

En este apendice vamos a dar una demostración completa de un resultado obtenido por Zel'manov en las pág. 81-82 de su famoso artículo [109] con el propósito de conseguir encasillar las álgebras de Jordan primas no-degeneradas de tipo hermitiano en los apartados iii) y iv) de su teorema primo de clasificación. El enunciado de este resultado que no se da explicitamente en [109] ha sido ya recogido en esta memoria en el Teorema *II*.2.12.

Teorema de cambio de parámetro de Zel'manov. *Sea J un álgebra de Jordan especial prima no-degenerada de tipo hermitiano, y supongamos que $\mathcal{H}$ es un ideal hermitiano tal que $\mathcal{H}(J) \neq 0$ y que A es un álgebra asociativa $*$-prima generada por su parte hermítica tal que*

$$H(A,*) = \mathcal{H}(J) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*).$$

Si A no es prima, entonces existe una subálgebra prima B de A y un homomorfismo asociativo φ de la subálgebra R de $Q_s(A)$ generada por J en $Q_s(B)$ tales que $\varphi_{|J}$ es inyectivo y B es un ideal del álgebra de Jordan $\varphi(J)$.

La demostración que damos aquí de este resultado es en esencia una parte del desarrollo seguido por Zel'manov en [109] para la obtención de su Teorema primo. No obstante en el proceso constructivo seguido

por Zel'manov juega un papel destacado un álgebra asociativa $\mathcal{R}$ que es una envolvente de J construida a partir de un "aquilatado proceso de ajustamiento" de la envolvente asociativa universal de J, y que se consige evitar en nuestro ambiente, que no es otro que el que aparece al aplicar el Teorema de estructura hermitiana especial (Teorema II.2.11).

En el siguiente enunciado se recoge un resultado que puede ser considerado folklórico y de demostración elemental.

Proposición A2.1.- *Sea B un álgebra asociativa prima, y consideremos el álgebra suma directa de B con su álgebra opuesta B^o, $B \oplus B^o$, dotada con la involución intercambio $*$. Entonces $B \oplus B^o$ es un álgebra asociativa $*$-prima y la aplicación identidad de $B \oplus B^o$ se extiende a un único $*$-isomorfismo de su anillo simétrico de cocientes $Q_s(B \oplus B^o)$ en el álgebra suma directa $Q_s(B) \oplus Q_s(B)^o$ con involución intercambio.*

Otro hecho que utilizaremos para la demostración del teorema de cambio de parámetro es el caracter hereditario de la no-degenerada primidad por paso a ideales no nulos. Este resultado, ya utilizado a lo largo de nuestro trabajo, es también debido a Zel'manov [109].

Proposición A2.2.- ([109]; Lemma 19). *Todo ideal no nulo de un álgebra de Jordan prima no-degenerada es un álgebra de Jordan prima no-degenerada.*

Actualmente esta proposición puede verse como una consecuencia directa de un teorema general obtenido por Beidar, Mikhalev y Slin'ko [17] en el que se caracteriza la no-degenerada primidad de las álgebras de Jordan en términos de los U-operadores: *Un álgebra de Jordan J es prima no-degenerada si y sólamente si $U_{x,y} = 0$ implica $x = 0$ o $y = 0$.* Bien que las técnicas envueltas en la demostración de este teorema se enmarcan en la teoría de las identidades polinomiales generalizadas, hemos de resaltar que el punto de partida de su demostración no es otro que el Teorema primo de Zel'manov.

Demostración del teorema de cambio de parámetro. Por ser A no prima, podemos elegir M y N ideales no nulos de A tales que $MN = \{0\}$. En particular, $(M \cap M^*)(N \cap N^*) = \{0\}$. Por ser A $*$-prima, al

menos uno de ellos ha de reducirse a cero. Supongamos que $M \cap M^* = \{0\}$, y consideremos el $*$-ideal no nulo de A, $M \oplus M^*$. Por el Teorema memoria asociativo (Teorema $III.1.3$), la aplicación inclusión de $M \oplus M^*$ en A se extiende a un único $*$-isomorfismo de $Q_s(M \oplus M^*)$ en $Q_s(A)$. Por otra parte, $M \oplus M^*$ es un álgebra $*$-prima (Proposición $I.3.20$), y como consecuencia inmediata M es un álgebra prima, luego estamos en condiciones de aplicar la anterior Proposición A2.1, y asegurar que la aplicación identidad de $M \oplus M^*$ se extiende a un único $*$-isomorfismo de $Q_s(M \oplus M^*)$ en $Q_s(M) \oplus Q_s(M)^*$. Componiendo los dos $*$-isomorfismos anteriores obtenemos una identificación $Q_s(A) \cong Q_s(M) \oplus Q_s(M)^*$, que nos permite ver A como una subálgebra de $Q_s(M) \oplus Q_s(M)^*$. Claramente $A \cap Q_s(M)$ es un ideal de A que contiene a M, y notemos que no supone pérdida de generalidad exigir que

$$M = A \cap Q_s(M) \,, \qquad (A2.1)$$

ya que en otro caso nos bastará con reemplazar el ideal M por $A \cap Q_s(M)$.

Definimos A_{imp} como el subespacio vectorial de A generado por los productos de un número impar de elementos de $\mathcal{H}(J)$, esto es

$$A_{\text{imp}} := \text{Lin}\{h_1 ... h_{2n+1} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, h_1, ..., h_{2n+1} \in \mathcal{H}(J)\} \,.$$

Notemos que para todo $n \geq 3$ se verifica que $\mathcal{H}(J)^n \subseteq A_{\text{imp}}$. Esto es consecuencia de la estabilidad por n-tads de $\mathcal{H}(J)$, y de la validez de la siguiente identidad para todo natural $n \geq 4$

$$h_1h_2h_3h_4h_5...h_n = \{h_1h_2h_3h_4\}h_5...h_n + h_1h_2\{h_3h_4\}h_5...h_n -$$

$$-h_1\{h_2h_4\}h_3h_5...h_n + \{h_1h_4\}h_2h_3h_5...h_n -$$

$$-h_4\{h_1h_2\}h_3h_5...h_n + h_4h_2\{h_1h_3\}h_5...h_n - h_4\{h_2h_3\}h_1h_5...h_n.$$

Puesto que $\mathcal{H}(J)$ genera A, se sigue de las inclusiones que acabamos de esbozar que $\mathcal{H}(J)^2 A \subseteq A_{\mathrm{imp}}$. Como una consecuencia, se tiene que $\mathcal{H}(J)^2 M \subseteq A_{\mathrm{imp}} \cap M$. Si $m \in M$ es tal que $\mathcal{H}(J)^2 m = \{0\}$, entonces, por estar A generada por $\mathcal{H}(J)$, se sigue que $A^2 m = \{0\}$, de donde $m = 0$ en vista de la semiprimidad de A. Esta observación, junto con la no nulidad de M, nos permiten deducir de la última inclusión que $A_{\mathrm{imp}} \cap M \neq \{0\}$. Puesto que $\mathcal{H}(J)$ es un ideal de J, se sigue de la expresión

$$x.(\mathrm{h}_1 \ldots \mathrm{h}_{2n+1}) = \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} \mathrm{h}_1 \ldots \mathrm{h}_{i-1} (\mathrm{h}_i.\mathrm{x}) \mathrm{h}_{i+1} \ldots \mathrm{h}_{2n+1}$$

para x en J y $h_1, \ldots, h_{2n+1}$ en $\mathcal{H}(J)$, que $J.A_{\mathrm{imp}} \subseteq A_{\mathrm{imp}}$. A partir de esta inclusión y de la inclusión obvia $J.Q_s(M) \subseteq Q_s(M)$ se deduce teniendo en cuenta $(A2.1)$ que

$$J.(A_{\mathrm{imp}} \cap M) \subseteq A_{\mathrm{imp}} \cap M\,. \qquad (A2.2)$$

Veamos ahora que $K := \{a + a^* : a \in A_{\mathrm{imp}} \cap M\}$ es un ideal no nulo de J. Claramente K es un subespacio de $H(A, *)$, luego de J. Por $(A2.2)$, para a en $A_{\mathrm{imp}} \cap M$ y x en J se verifica que $x.(a + a^*) = x.a + x.a^* = x.a + (x.a)^* \in K$, y por tanto K es un ideal de J. Si $a \in A_{\mathrm{imp}} \cap M$ es tal que $a + a^* = 0$, entonces $a = -a^* \in M \cap M^* = \{0\}$, y por tanto $a = 0$. En consecuencia, la no nulidad de K se sigue de la no nulidad de $A_{\mathrm{imp}} \cap M$.

Definimos ahora $B := (A_{\mathrm{imp}} \cap M)(A_{\mathrm{imp}} \cap M)(A_{\mathrm{imp}} \cap M)$. Claramente B es un subespacio de A. Asímismo, es inmediato que para probar que B es una subálgebra de A bastará probar que el producto de seis elementos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ de $A_{\mathrm{imp}} \cap M$ se queda en B. Puesto que $a_1 a_2 a_3 a_5^* a_4^* a_6 \in M \cap M^* = \{0\}$, se sigue que

$$\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3\mathrm{a}_4\mathrm{a}_5\mathrm{a}_6 = \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3(\mathrm{a}_4\mathrm{a}_5 + \mathrm{a}_5^*\mathrm{a}_4^*)\mathrm{a}_6 - \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3\mathrm{a}_5^*\mathrm{a}_4^*\mathrm{a}_6 = \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3\{\mathrm{a}_4\mathrm{a}_5\}\mathrm{a}_6\,,$$

y por tanto

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \in a_1a_2a_3\mathcal{H}(J)a_6 = a_1a_2[a_3\mathcal{H}(J)a_6] \subseteq B,$$

donde hemos utilizado que $\{a_4a_5\} \in \mathcal{H}(J)$ (lo que es cierto por ser $\mathcal{H}(J)$ estable por n-tads) y que $a_3\mathcal{H}(J)a_6 \subseteq A_{\text{imp}} \cap M$ (lo que es cierto por ser M un ideal, y por el hecho obvio de que el producto de un número impar de elementos de $\mathcal{H}(J)$ por un elemento de $\mathcal{H}(J)$ y por un número impar de elementos de $\mathcal{H}(J)$ da como resultado el producto de un número impar de elementos de $\mathcal{H}(J)$). Veamos ahora que $B \neq \{0\}$. En otro caso, puesto que para cualesquiera que sean a_1, a_2, a_3 en $A_{\text{imp}} \cap M$, se verifica que

$$(a_1 + a_1^*)(a_2 + a_2^*)(a_3 + a_3^*) = a_1a_2a_3 + a_1^*a_2^*a_3^* =$$

$$= a_1a_2a_3 + (a_3a_2a_1)^* \in B + B^*$$

(donde hemos utilizado que $MM^* = \{0\}$), tendríamos que $K^3 = \{0\}$, lo que contradice la no-degenerada primidad de J. A partir de $(A2.2)$ y de la igualdad

$$x.(a_1a_2a_3) = (x.a_1)a_2a_3 - a_1(x.a_2)a_3 + a_1a_2(x.a_3)$$

para x en J y a_1, a_2, a_3 en $A_{\text{imp}} \cap M$, obtenemos la inclusión

$$J.B \subseteq B\,. \qquad (A2.3)$$

Definimos $I := \{b + b^* : b \in B\}$. Claramente I es un subespacio de $H(A, *)$, y por tanto de J. De $(A2.3)$ se sigue que para x en J y b en B

$$x.(b + b^*) = x.b + x.b^* = x.b + (x.b)^* \in I\,,$$

y por consiguiente I es un ideal de J. Además, si $b \in B$ es tal que $b + b^* = 0$, entonces $b = -b^* \in M \cap M^* = \{0\}$, y por tanto $b = 0$. Este comentario lleva a la inyectividad de la aplicación $b \mapsto b + b^*$ de B en I, y en particular a la no nulidad de I. Además es claro que esta aplicación es lineal, sobreyectiva, y verifica que $(b_1 + b_1^*).(b_2 + b_2^*) = b_1.b_2 +$

$(b_1.b_2)^*$ para cualesquiera que sean b_1, b_2 en B. Esto es, dicha aplicación es un isomorfismo del álgebra de Jordan B^+ sobre I. Puesto que, por la Proposición A2.2, I es un álgebra de Jordan prima no-degenerada, se sigue inmediatamente del anterior isomorfismo que el álgebra asociativa B es prima.

Veamos en este momento que el ideal B^3 de B es un "dominio de doble-centralización" para todos los elementos de J, esto es

$$xB^3 + B^3x \subseteq B \text{ para todo } x \text{ en } J. \qquad (A2.4)$$

Para x en J y b en B, utilizando $(A2.3)$, se tiene que

$$xb^2 = (xb + bx)b - bxb = 2(x.b)b - U_b(x) \in B,$$

y análogamente $b^2x \in B$. Por linealización se deduce enseguida que $x(b_1.b_2), (b_1.b_2)x \in B$ para cualesquiera b_1, b_2 en B, y a partir de este hecho y de la identidad $b_1b_2b_3 = (b_1b_2).b_3 - (b_3b_1).b_2 + (b_2b_3).b_1$ válida para b_1, b_2, b_3 en B, se sigue que también $xb_1b_2b_3$ y $b_1b_2b_3x$ pertenecen a B.

Sea R la $(*)$-subálgebra de $Q_s(A) \cong Q_s(M) \oplus Q_s(M)^*$ generada por J. Como A está generada por $H(A,*)$ y $H(A,*) \subseteq J$, se sigue que A está incluida en R, y en consecuencia R es un álgebra $*$-prima (Corolario $I.3.21$ y Proposición $I.3.20$). De la información recogida en $(A2.4)$ y de la definición de R se sigue inmediatamente que para todo c en R existe un número natural m tal que $cB^m + B^mc \subseteq B$. Este hecho hace que podamos asociar a todo elemento c de R un doble centralizador parcialmente definido en B, (B^m, λ_c, ρ_c), donde B^m es una conveniente potencia de B y λ_c, ρ_c son las aplicaciones de B^m en B determinadas por las multiplicaciones izquierda y derecha de c respectivamente. Esto hace que podamos considerar la aplicación $\varphi : c \mapsto \varphi(c) := [(B^m, \lambda_c, \rho_c)]$ de R en $Q_s(B)$. Es claro que φ es un homomorfismo de álgebras que fija los elementos de B y que aplica en cero los elementos de B^*. De la inclusión de B en M se deduce que $B(R \cap Q_s(M))^* = (R \cap Q_s(M))^*B = \{0\}$, y que por tanto $(R \cap Q_s(M))^* \subseteq Ker(\varphi)$. Nuestro siguiente objetivo es probar que esta inclusión es de hecho una igualdad. Comenzemos probando

que si $p \in Q_s(M)$ es tal que $pB = \{0\}$, entonces para todo número natural n se verifica que $pJ^nI = \{0\}$. Antes de iniciar la inducción, notemos que para un tal p se verifica que $pI = \{0\}$ ya que $p(B + B^*) \subseteq pB + pM^* = \{0\}$. Ahora, si $x \in J$ e $y \in I$, entonces $pxy = 2p(x.y) - pyx \in pI - pIx = \{0\}$, lo que establece la validez de la anterior aserción para $n = 1$. Supuesto que $pJ^nI = \{0\}$, y dados $x_1, ..., x_{n+1} \in J$ e $y \in I$ se verifica que

$$px_1...x_{n+1}y = 2px_1...x_n(x_{n+1}.y) - px_1...x_nyx_{n+1} \in pJ^nI - pJ^nIx_{n+1} = \{0\},$$

lo que concluye la demostración del proceso de inducción. Puesto que R está generada por J se sigue de lo anterior que, si $p \in Q_s(M)$ es tal que $pB = \{0\}$, entonces $pRI = \{0\}$. Dado que $I = I^* \neq \{0\}$ y R es $*$-prima, por la Proposición $I.3.20$ podemos asegurar que, si $p \in Q_s(M)$ es tal que $pB = \{0\}$, entonces $p = 0$. Supongamos en este momento que $c \in Ker(\varphi)$, es decir, c es un elemento de R tal que $cB^n = \{0\}$ para algún número natural n. Entonces, dado que para p en $R \cap Q_s(M)$ se verifica que $pc, pcB, ..., pcB^{n-1}$ están incluidos en $R \cap Q_s(M)$, aplicando reiteradamente la propiedad que acabamos de demostrar se sigue que $pc = 0$. En consecuencia, tenemos que $(R \cap Q_s(M))Ker(\varphi) = \{0\}$, y en particular $MKer(\varphi) = \{0\}$, de donde se deduce que $Ker(\varphi) \subseteq R \cap Q_s(M)^* = (R \cap Q_s(M))^*$.

Finalmente, $\varphi_{|J}$ es inyectiva pues

$$J \cap Ker(\varphi) = J \cap (R \cap Q_s(M))^* = \{0\}.$$

Además, puesto que para todo b en B se verifica que $\varphi(b + b^*) = \varphi(b) + \varphi(b^*) = \varphi(b)$, se sigue inmediatamente que φ induce un isomorfismo de álgebras de Jordan de I sobre B^+, lo que concluye la demostración. ∎

Notas finales y posibles líneas de continuación de la investigación.

Los principales resultados obtenidos en esta Memoria han servido ya como base para ulteriores desarrollos. Así, el Teorema de clasificación de las álgebras de Jordan-Banach primitivas (Teorema *IV*.1.1), ha sido utilizado por A. Villena como una herramienta básica para dar respuesta afirmativa al problema de la continuidad automatica de las derivaciones de las álgebras de Jordan-Banach semiprimitivas, resultado que se recoge en el siguiente preprint:

A. R. VILLENA, *Derivations on Jordan-Banach algebras.* Preprint. Universidad de Granada, 1994.

También podemos citar el siguiente resultado que hemos obtenido recientemente con la colaboración de Efim Zel'manov refinando las técnicas para la construcción de la norma patológica en $M_\infty(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) (Teorema *VI*.1.6).

TEOREMA.- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Para todo polinomio asociativo no-Jordan p existe una norma de álgebra de Jordan $|.|$ en el álgebra asociativa simple $M_\infty(\mathbb{K})$ tal que la acción de p en $M_\infty(\mathbb{K})$ es $|.|$-discontinua.

Dicha norna depende sólo del grado del polinomio y del número de variables que involucra, y la $|.|$-discontinuidad de p puede centrarse en $H(M_\infty(\mathbb{K}), *)$ para conveniente involución $*$ en $M_\infty(\mathbb{K})$.

Como consecuencia, los polinomios Jordan son precisamente aquellos polinomios asociativos que actúan continuamente en toda álgebra asociativa con una norma de álgebra de Jordan.

Este resultado se recoge en el siguiente preprint:

M. CABRERA, A. MORENO, A. RODRIGUEZ and E. ZEL'MANOV, *Jordan polynomials can be analytically recognized.* Preprint.

En cuanto a nuevos problemas abiertos, estamos ahora interesados en la obtención de versiones normadas "light" del teorema primo de Zelmanov, donde no conocemos resultados definitivos generales y donde tenemos alguna conjetura precisa en el caso de las álgebras de Jordan normadas simples.

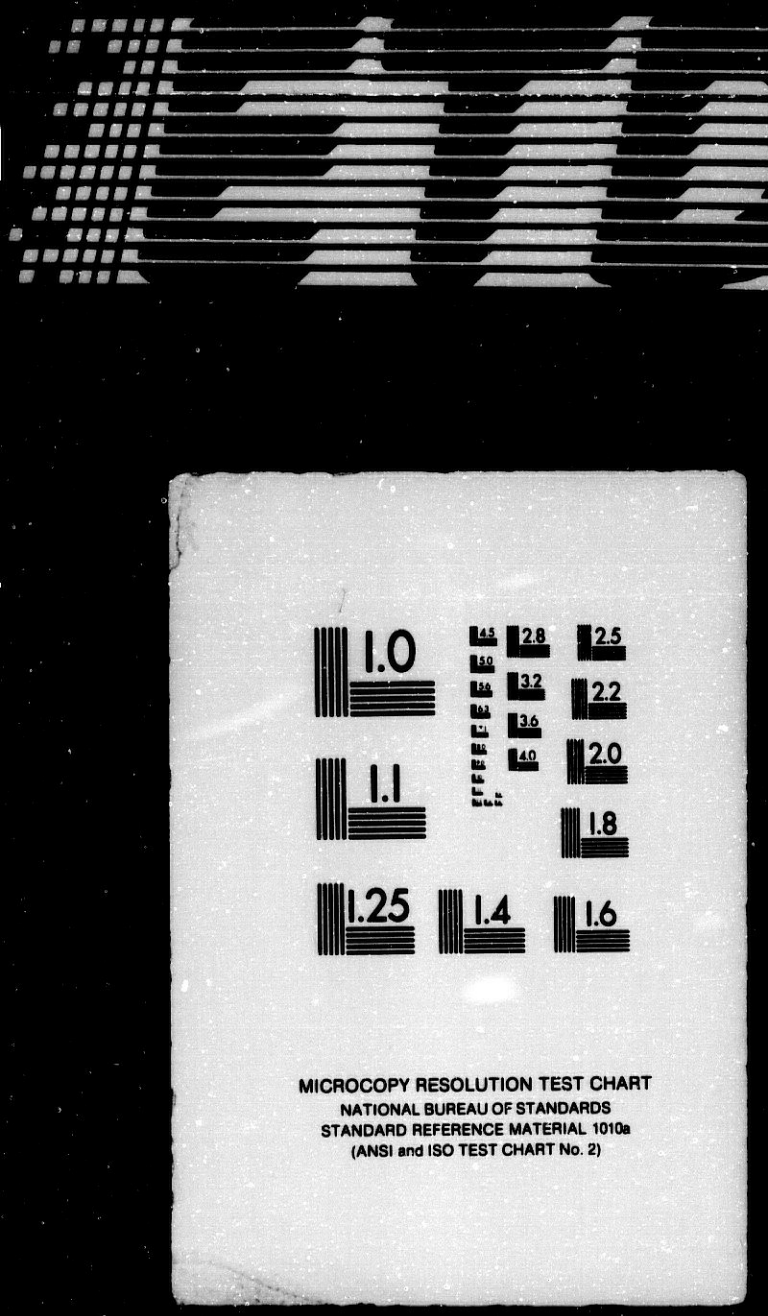
´Qué entendemos por versión normada light del Teorema primo de Zel'manov?. Una tal versión debería contener una razonable descripción de los anillos de Albert normados así como de las álgebras de Jordan normadas que son órdenes centrales en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica no-degenerada. En particular nos prodriamos preguntar ´cuales son las álgebras de Jordan-Banach primas no-degeneradas excepcionales?.

Igualmente, en relación con la deseable versión general (obligadamente light) del Teorema primo de Zel'manov, para un álgebra de Jordan normada $(J, \|.\|)$ para la que existe un álgebra asociativa $*$-prima $(A, *)$ tal que

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*)$$

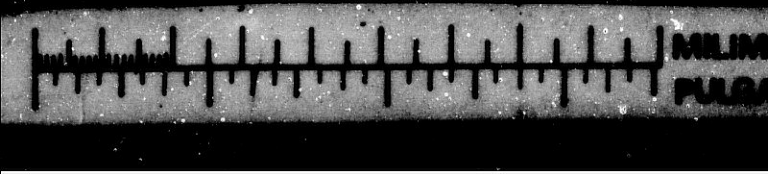
desearíamos encontrar una norma de álgebra $|.|$ en la subálgebra B de $Q_s(A)$ generada por J de manera que la inclusión $(J, \|.\|) \hookrightarrow (B, |.|$, sea continua.

Así, por ejemplo en el caso sangrante de las álgebras de Jordan normadas simples, nosotros tenemos la siguiente conjetura, donde la cuestión a resolver está en los casos (iii) y (iv):



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

1:24



Como consecuencia, los polinomios Jordan son precisamente aquellos polinomios asociativos que actúan continuamente en toda álgebra asociativa con una norma de álgebra de Jordan.

Este resultado se recoge en el siguiente preprint:

M. CABRERA, A. MORENO, A. RODRIGUEZ and E. ZEL'MANOV, *Jordan polynomials can be analytically recognized.* Preprint.

En cuanto a nuevos problemas abiertos, estamos ahora interesados en la obtención de versiones normadas "light" del teorema primo de Zelmanov, donde no conocemos resultados definitivos generales y donde tenemos alguna conjetura precisa en el caso de las álgebras de Jordan normadas simples.

´Qué entendemos por versión normada light del Teorema primo de Zel'manov?. Una tal versión debería contener una razonable descripción de los anillos de Albert normados así como de las álgebras de Jordan normadas que son órdenes centrales en el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica no-degenerada. En particular nos prodriamos preguntar ´cuales son las álgebras de Jordan-Banach primas no-degeneradas excepcionales?.

Igualmente, en relación con la deseable versión general (obligadamente light) del Teorema primo de Zel'manov, para un álgebra de Jordan normada $(J, \|.\|)$ para la que existe un álgebra asociativa $*$-prima $(A, *)$ tal que

$$H(A,*) \lhd J \subseteq H(Q_s(A),*)$$

desearíamos encontrar una norma de álgebra $|.|$ en la subálgebra B de $Q_s(A)$ generada por J de manera que la inclusión $(J, \|.\|) \hookrightarrow (B, |.|)$ sea continua.

Así, por ejemplo en el caso sangrante de las álgebras de Jordan normadas simples, nosotros tenemos la siguiente conjetura, donde la cuestión a resolver está en los casos (iii) y (iv):

CONJETURA.- Si $(J, \|.\|)$ es un álgebra de Jordan normada compleja simple entonces J responde a uno de los siguientes casos:

(i) $J = H_3(C(\mathbf{C}))$,

(ii) $J = J(X, f)$ con X espacio normado complejo con $dim(X) \geq 2$ y f una forma bilineal simétrica no-degenerada continua en X

(iii) Existe un álgebra asociativa normada simple $(A, |.|)$ tal que $J = A^+$ y $(J, \|.\|) \hookrightarrow (A, |.|)$ es continua,

(iv) Existe un álgebra asociativa normada simple con involución $(A, |.|, *)$ tal que $J = H(A, *)$ y $(J, \|.\|) \hookrightarrow (A, |.|)$ es continua.

Bibliografía.

1. A. A. ALBERT, On a certain algebra of quantum mechanics. *Ann. of Math.* **35** (1934), 65-73.

2. A. A. ALBERT, Quadratic forms permitting composition. *Ann. of Math.* **43** (1942), 161-177.

3. A. A. ALBERT, A structure theory for Jordan algebras. *Ann. of Math.* **48** (1947), 446-467.

4. A. A. ALBERT, A theory of power associative commutative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **69** (1950), 503-527.

5. A. A. ALBERT, A construction of exceptional Jordan division algebras. *Ann. of Math.* **67** (1958), 1-28.

6. A. A. ALBERT y N. JACOBSON, On reduced exceptional simple Jordan algebras. *Ann. of Math.* **66** (1957), 400-417.

7. S.A. AMITSUR, On rings of quotients. *Sympos. Math.* **8** (1972), 149-164.

8. A. D'AMOUR, Zel'manov polynomials in Quadratic Jordan Triple Systems. *J. Algebra* **140** (1991), 160-183.

9. A. D'AMOUR, Jordan triple homomorphisms of associative structures. *Commun. Algebra* **19** (1991), 1229-1247.

10. G. ANCOCHEA, Le thereme de von Staudt en geometrie proyective quaternionienne. *J. Math.* **184** (1942), 192-198.

11. J. A. ANQUELA, F. MONTANER y T. CORTES, On maximal modular inner ideals in Jordan algebras. *Commun. Algebra* **21** (1993), 2537-2554.

12. J. A. ANQUELA, F. MONTANER y T. CORTES, On primitive Jordan algebras. *J. Algebra* **163** (1994), 663-674.

13. P. ARA, Extended centroid of C^*-algebras. *Archiv. der Math.* **54** (1990), 358-364.

14. P. ARA, On the symmetric ring of quotients of semiprime rings. *Alxebra* **54** (1990), 11-15.

15. R. ARENS, M. GOLDBERG y W. A. J. LUXEMBURG, Multiplicativity factors for seminorms II. *J. Math. Anal. Appl.* **170** (1992), 401-413.

16. W. E. BAXTER y W. S. MARTINDALE 3RD, Central closure of semiprime nonassociative rings. *Commun. Algebra* **7** (1979), 1103-1132.

17. K. I. BEIDAR, A. V. MIKHALEV y A. M. SLIN'KO, A criterion for primeness of nondegenerate alternative and Jordan algebras. *Trans. Moscow Math. Soc.* **50** (1988), 129-137.

18. F. F. BONSALL y J. DUNCAN. *Complete normed algebras.* Springer-Verlang, Berlín, 1973.

19. H. BRAUN y M. KOECHER. *Jordan Algebren.* Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1966.

20. R. C. BUSBY, Double centralizers and extensions of C^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **132** (1968), 79-99.

21. M. CABRERA. *H^*-álgebras no asociativas reales. H^*-álgebras de Malcev complejas y reales.* Tesis doctoral. Universidad de Granada. 1987.

22. M. CABRERA, A. MORENO y A. RODRIGUEZ, On primitive Jordan-Banach algebras. En *Non-Associative Algebra and Its Applications* (ed. por S. González), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, pp. 54-59.

23. M. CABRERA, A. MORENO y A. RODRIGUEZ, Zel'manov's theorem for primitive Jordan-Banach algebras. Preprint. Universidad de Granada, 1993.

24. M. CABRERA, A. MORENO y A. RODRIGUEZ, On the behaviour of Jordan-algebra norms on associative algebras. *Studia Math.* (por aparecer).

25. M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, Extended centroid and central closure of semiprime normed algebras: a first approach. *Commun. Algebra* **18** (1990), 2293-2326.

26. M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, Zel'manov's theorem for normed simple Jordan algebras with a unit. *Bull. London Math. Soc.* **25** (1993), 59-63.

27. M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, Nondegenerately ultraprime Jordan-Banach algebras: a Zel'manovian treatment. *Proc. London Math. Soc.* **69** (1994), 576-604.

28. M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, Zel'manov's theorem for nondegenerately ultraprime Jordan-Banach algebras. En *Non-Associative Algebra and Its Applications* (ed. por S. González), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, pp. 60-65.

29. C. CHEVALLEY. *The Algebraic Theory of Spinors.* New York, 1954.

30. M. A. COBALEA y A. FERNANDEZ, Prime noncommutative Jordan algebras and central closure. *Algebras, Groups and Geometries* **5** (1988), 129-136.

31. H.-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL y R. REMMERT. *Numbers.* Graduate Texts in Mathematics **123**, Springer-Verlag, New-York, 1988.

32. T. S. ERICKSON, W. S. MARTINDALE 3rd y J. M. OSBORN, Prime nonassociative algebras. *Pacific J. Math.* **60** (1975), 49-63.

33. T. S. ERICKSON y S. MONTGOMERY, The prime radical in special Jordan rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **156** (1971), 155-164.

34. A. FERNANDEZ, Modular annihilator Jordan algebras. *Commun. Algebra* **13** (1985), 2597-2613.

35. A. FERNANDEZ, Prime nondegenerate Jordan algebras with nonzero socle and the symmetric Martindale algebra of quotients. *Collect. Math.* **39** (1988), 249-256.

36. A. FERNANDEZ, E. GARCIA Y A. RODRIGUEZ, A Zel'manov prime theorem for JB^*-algebras. *J. London Math. Soc.* **46** (1992), 319-335.

37. A. FERNANDEZ y A. RODRIGUEZ, Primitive noncommutative Jordan algebras with nonzero socle. *Proc. Amer. Math. Soc.* **96** (1986), 199-206.

38. H. FREUDENTHAL. *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie.* Utrecht, 1951.

39. H. HANCHE-OLSEN y E. STORMER. *Jordan operator algebras.* Monograph Stud. Math. **21** , Pitman, 1984.

40. I. N. HERSTEIN, Jordan homomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **81** (1956), 331-341.

41. I. N. HERSTEIN, Jordan derivations of prime rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 1104-1110.

42. I. N. HERSTEIN. *Rings with involution.* Chicago Lectures in Mathematics. The University of Chicago Press. Chicago, 1976.

43. G. HOCHSCHILD, Cohomology and representations of associative algebras. *Duke Math. J.* **14** (1947), 921-948.

44. L. HOGBEN y K. McCRIMMON, Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra. *J. Algebra* **68** (1981), 155-169.

45. L. K. HUA, On the automorphisms of a field. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949), 386-389.

46. A. HURWITZ, Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Gott. Nachrichten*, (1989), 309-316.

47. N. JACOBSON. *Lecture in Abstract Algebra II.* Linear Algebra, New York, 1953.

48. N. JACOBSON, Composition algebras and their automorphisms. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **7** (1958), 55-88.

49. N. JACOBSON. *Lie algebras.* Dover Publication Inc., New York, 1962.

50. N. JACOBSON, Structure theory for a class of Jordan algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **55** (1966), 243-251.

51. N. JACOBSON. *Structure of rings.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **37**, Providence, Rhode Island, 1968.

52. N. JACOBSON. *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **39**, Providence, Rhode Island, 1968.

53. N. JACOBSON. *Basic Algebra I.* Freeman, New-York, 1974.

54. N. JACOBSON, Structure groups and Lie algebras of Jordan algebras of symmetric elements of associative algebras with involution. *Adv. in Math.* **20** (1976), 106-150.

55. N. JACOBSON. *Basic Algebra II.* Freeman, San Francisco, 1980.

56. N. JACOBSON. *Structure theory of Jordan algebras.* The University of Arkansas, Lecture notes in Math. **5**, Fayetteville, 1981.

57. N. JACOBSON y C. E. RICKART, Jordan homomorphisms of rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **69** (1950), 479-502.

58. B. E. JOHNSON, An introduction to the theory of centralisers. *Proc. London Math. Soc.* **14** (1964), 299-320.

59. B. E. JOHNSON, Centralisers on certain topological algebras. *J. London Math. Soc.* **39** (1964), 603-614.

60. B. E. JOHNSON, Continuity of centralisers on Banach algebras. *J. London Math. Soc.* **41** (1966), 639-640.

61. P. JORDAN, Über eine Klasse nicht assoziatiever-hyperkomplexen Algebren. *Gtt. Nachr.* (1932), 569-575.

62. P. JORDAN, Über Verallgemeinerungsmglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik. *Gtt. Nachr.* (1933), 209-217.

63. P. JORDAN, Über die Multiplikation quantenmechanischen Grossen. *Z. Phys.* **80** (1933), 285-291.

64. P. JORDAN, J. VON NEUMANN y E. WIGNER, On a algebraic genealization of the quantum mechanical formalism. *Ann. of Math.* **36** (1934), 29-64.

65. I. KAPLANSKY, Semi-automorphisms of rings. *Duke Math. J.* **14** (1947), 521-527.

66. I. KAPLANSKY, Infinite dimensional quadratic forms permitting composition. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 956-960.

67. V. K. KHARCHENKO, Generalized identities with automorphisms. *Algebra i Logika* **14** (1975), 215-237; English transl., (1976), 132-148.

68. V. K. KHARCHENKO, Galois theory of semiprime rings. *Algebra i Logika* **16** , (1977), 313-363; English transl., (1978), 208-258.

69. C. LANSKI, On the relationship of a ring and the subring generated by its symmetric elements. *Pacific J. Math.* **44** (1973), 581-592.

70. Y. V. LINNIK, Quaternions and Cayley numbers; some applications of the arithmetic of quaternions. *Uspehi Matem. Nauk.* **4** (1949), 49-98.

71. A. I. MAL'CEV. *Algebraic Systems.* Nauka, 1970.

72. W. MARTINDALE, Jordan homomorphisms of the symmetric elements of a ring with involution. *J. Algebra* **5** (1967), 232-249.

73. W. S. MARTINDALE, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. *J. Algebra* **12** (1969), 576-584.

74. W. S. MARTINDALE, 3rd., Lie isomorphisms of prime rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **142** (1969), 437-455.

75. M. MATHIEU, The symmetric algebra of quotients of an ultraprime Banach algebra. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **50** (1991), 75-87.

76. K. McCRIMMON, Jordan algebras with interconnected idempotents. *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 1327-1336.

77. K. McCRIMMON, Zel'manov prime theorem for quadratic Jordan algebras. *J. Algebra* **76** (1982), 297-326.

78. K. McCRIMMON, The russian revolution in Jordan algebras. *Algebras, Groups and Geometries* **1** (1984), 1-61.

79. K. McCRIMMON, The Zelmanov approach to Jordan homomorphisms of associative algebras. *J. Algebra* **123** (1989), 457-477.

80. K. McCRIMMON, Martindale systems of symmetric quotients. *Algebras, Groups and Geometries* **6** (1989), 153-237.

81. K. McCRIMMON y E. ZEL'MANOV, The Structure of Strongly Prime Quadratic Jordan Algebras. *Adv. in Math.* **69** (1988), 133-222.

82. G. J. MURPHY. *C^*-algebras and operator theory.* Academic Press, San Diego, 1990.

83. J. M. OSBORN, Varieties of algebras. *Adv. in Math.* **8** (1972), 163-369.

84. J. M. OSBORN y M. L. RACINE, Jordan rings with nonzero socle. *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979), 375-387.

85. D. S. PASSMAN, Computing the symmetric ring of quotients. *J. Algebra* **105** (1987), 207-235.

86. S. V. PCHELINTSEV, Example of prime Jordan algebras generated by absolute zero divisors. *Seventeenth All-Union Algebra Conf., Abstracs of Reports*, Part I, Inst. Mat. Akad. Nauk BSSR, Minsk, (1983), 158 (En ruso).

87. J. PEREZ, L. RICO y A. RODRIGUEZ, Full subalgebras of Jordan Banach algebras and algebra norms on JB^*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), 1133-1143.

88. J. PEREZ, L. RICO, A. RODRIGUEZ y A. R. VILLENA, Prime Jordan-Banach algebras with nonzero socle. *Commun. Algebra* **20** (1992), 17-53.

89. C. E. RICKART, The uniqueness of norm problem in Banach algebras. *Ann. of Math.* **51** (1950), 615-628.

90. C. E. RICKART. *General theory of Banach algebras.* Krieger, New York 1974.

91. A. RODRIGUEZ, La continuidad del producto de Jordan implica la del ordinario en el caso completo semiprimo. En *Contribuciones en Probabilidad, Estadística Matemática, Enseñanza de la Matemática*

y Análisis 280-288. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada, 1979.

92. A. RODRIGUEZ, A Vidav-Palmer theorem for Jordan C^*-algebras and related topics. *J. London Math. Soc.* **22** (1980), 318-332.

93. A. RODRIGUEZ, Jordan axioms for C^*-algebras. *Manuscripta Math.* **61** (1988), 297-314.

94. A. RODRIGUEZ, Primitive nonassociative normed algebras and extended centroid. En *Nonassociative algebraic models* (ed. por S. González y H. Ch. Myung), Nova Science Publishers, New York, 1992, pp. 233-243.

95. A. RODRIGUEZ. Jordan structures in Analysis. En *Proceedings of the 1992 Oberwolfach Conference on Jordan algebras.* Walter de Gruyter, Berlin, 1994, pp. 97-186.

96. A. RODRIGUEZ, Continuity of densely valued homomorphisms into H^*-algebras. *Quart. J. Math. Oxford* (por aparecer).

97. A. RODRIGUEZ, A. SLIN'KO y E. ZEL'MANOV, Extending the norm from Jordan-Banach algebras of hermitian elements to their associative envelopes. *Commun. Algebra* **22** (1994), 1435-1455.

98. A. RODRIGUEZ y A. R. VILLENA, Centroid and extended centroid of JB^*-algebras. En *Nonassociative algebraic models* (ed. por S. González y H. Ch. Myung), Nova Science Publishers, New York, 1992, pp. 223-232.

99. R. D. SCHAFER. *An introduction to nonassociative algebras.* Academic Press, New York, 1966.

100. R. SCHATTEN. *Norms ideals of completely continuous operators.* Springer-Verlag, 1970.

101. S. SHIRALI, On the Jordan structure of complex Banach $*$-algebras. *Pacific J. Math.* **27** (1968), 397-404.

102. V. G. SKOSYRSKII, Primitive Jordan algebras. *Algebra and Logic*, **31** (1993), 110-120.

103. A. M. SLIN'KO, On topological rings with involution. *Uspehi Mat. Nauk SSSR* **41** (1986), 197-198.

104. M. F. SMYLE, Jordan homomorphisms onto prime rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **84** (1957), 426-429.

105. E. A. WHELAN, The symmetric ring of quotients of a primitive ring is primitive. *Commun. Algebra* **18** (1990), 615-633.

106. E. I. ZEL'MANOV, On prime Jordan algebras. *Algebra i Logika* **18** (1979), 162-175.

107. E. I. ZEL'MANOV, Jordan division algebras. *Algebra i Logika* **18** (1979), 286-310.

108. E. I. ZEL'MANOV, Absolute zero-divisors and algebraic Jordan algebras. *Siberian Math. J.* **23** (1982), 100-116.

109. E. I. ZEL'MANOV, On prime Jordan algebras II. *Siberian Math. J.* **24** (1983), 89-104.

110. K. A. ZHEVLAKOV, A. M. SLINKO, I. P. SHESTAKOV y A. I. SHIRSHOV. *Rings that are nearly associative*. Academic Press, New York, 1982.

INDICE DE NOTACION.

A^1	4	$J(X,f)$	43
A^+	12	$L(X)$	6
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{X})$	56	L_a	24
$BL(X)$	9	$L_Y(X)$	156
$C(\mathbb{K})$	169	$L_X(X)$	156
$cor(S)$	5	$L_Z(Y)$	161
E_n	66	$Mult(A)$	24
$FL(H)$	159	$M_3(C)$	42
$FL_Y(X)$	156	$M_\infty(B)$	139
$FL_X(X)$	156	$\mathcal{M}$	137, 152
$FL_Z(Y)$	161	$\mathbb{O}$	169
$H(A,*)$	44	$\mathbf{p}_{16}$	69
$H_3(C,\Gamma)$	42	$\mathbf{q}_{48}$	69
$\mathcal{HS}(H)$	158	$Q_s(A)$	30
$I^{(n)}$	71	$Q_s(A,\mathcal{F})$	36
I_n	68	R_a	24
IE_n	68	T_n	66
IE_5^A	72	U_x	17
$id_A(u)$	7	$U_{x,y}$	17
$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{X})$	56	$Z(A)$	27
$\mathcal{JS} = \mathcal{JS}(\mathcal{X})$	56	$\Gamma(A)$	27

INDICE DE TERMINOLOGIA.

A

A^1 4
A^+ 12
$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{X})$ 56
actuación irreducible 6
admitir composición 167
álgebra alternativa 168
— asociativa libre 56
— central 27
— cuadrática 166
— de Banach 9
— de Cayley 165
— de Cayley-Dickson 169
— de Clifford 124
— de cocientes simtricos de Martindale 30
— de composición 167
álgebra de Jordan 12
— de Jordan asociada a una forma bilineal simétrica 43
— de Jordan-Banach 12
— de Jordan especial 42
— de Jordan excepcional 42
— de Jordan libre 56
— de Jordan libre especial 56
— de Jordan no-degenerada 57
— de Jordan primitiva 41
álgebra de los multiplicadores 24
— prima 33
— *-prima 34
— semiprima 15
— simetrizada 12
— split 169
— i-especial 57
— irreducible 6
— libre 54
— normada 9
— primitiva 6
— reversible 126
— tensor 123
anillo de Albert 59
anulador 35
apareamiento de Banach complejo 161
asociador 13
autoapareamiento de Banach complejo 163

B

$BL(X)$ 9

C

$C(\mathbb{K})$ 169
centro 27
centroide 27
— extendido 32
comedor de n-tads 66
— de n-tads metidas 68
— de péntadas metidas 72
conmutador 13
corazón 5
$cor(S)$ 5
cuaterniones 168

D

derivación 15
doble centralizador 24
d.c.e.d. 28
doble centralizador esencialmente definido 28

E

E_n 66
elemento cíclico 6
envolvente 73
$*$-envolvente 73
envolvente $*$-ajustada 73
envolvente universal especial unital 125
envolvente unital 4
espacio vectorial auto-dual 156

F

$FL(H)$ 159
$FL_Y(X)$ 156
$FL_X(X)$ 156
$FL_Z(Y)$ 161
filtro de denominadores 36
forma cuadrática 165
— no degenerada 166

H

$H(A,*)$ 44
$H_3(C,\Gamma)$ 42
Hilbert-Schmidt 158
$\mathcal{HS}(H)$ 158
Hurwitz 167

I

$I^{(n)}$ 71
I_n 68
IE_n 68
IE_5^A 72
$id_A(u)$ 7
ideal 4
$*$-ideal 34

ideal derivado 71
— esencial 25
— formal 63
— hermitiano 63
— interno 18
— interno e-maximal 19
— interno e-modular 18
— interno modular maximal 19
— izquierdo modular 5
— Lie 98
— propio 4
— zelmanoviano 66
idempotente 155
— minimal 155, 157
identidad 55
— de Jordan 12
— polinomial admisible 57
— polinomial esencial 57
involución 34
— principal 125

J

$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{X})$ 56
$\mathcal{JS} = \mathcal{JS}(\mathcal{X})$ 56
$J(X, f)$ 43

K

$ker_A(u)$ 7

L

$L(X)$ 6
L_a 24
$L_Y(X)$ 156
$L_X(X)$ 156
$L_Z(Y)$ 161
localización central 58

M

$Mult(A)$ 24
$M_3(C)$ 42
$M_\infty(B)$ 139
$\mathcal{M}$ 139, 152
mdulo 18

N

nil-ideal 58
norma cayleyana 166

O

$\mathbb{O}$ 169
octoniones 169
orden central 59

P

p_{16} 69
par dual 156

PI-álgebra 57
PI-álgebra de Jordan 57
polinomio asociativo 56
— Clifford 65
— de Jordan 56
— hermitiano 63
— zelmanoviano 66
primitivizador 41
proceso de Cayley-Dickson 166

Q

$Q_s(A)$ 30
$Q_s(A, \mathcal{F})$ 36
$\mathbf{q}_{48}$ 69

R

R_a 24
radical de McCrimmon 58
radical no-degenerado 58
Regla de Leibnitz 15
representación 8
— fiel 8
— irreducible 8

S

s-identidad 57
split 169
subálgebra de Jordan 12
subespacio A-invariante 6

T

T_n 66
Teorema de representación de las álgebras primitivas 8
Teorema de Rickart 10
Teorema de Whelan 37
traza 166

U

U_x 17
$U_{x,y}$ 17
unidad modular 5

V

variedad 55

Z

$Z(A)$ 27
zócalo 156, 157