

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**  
**Facultad de Ciencias**  
**Departamento de Matemática Aplicada**

**POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO SOBOLEV:**  
**APLICACIONES**

**Tesis Doctoral**  
**por**  
**Miguel Angel Piñar González**

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Dr. D. Francisco Marcellán Español  
Ponente: Dr. D. Jerónimo Lorente Pardo

Granada, 1992

# UNIVERSIDAD DE GRANADA

## ACTA DEL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Curso de 19 91 a 19 92

Folio 20

Número 902

Reunido en el día de la fecha el Tribunal nombrado para el Grado de Doctor de D. MIGUEL ANSEL PINAR GONZALEZ, el aspirante leyó un discurso sobre el siguiente tema, que libremente había elegido: POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO SOBOLIEV: APLICACIONES

Terminada la lectura y contestadas las objeciones formuladas por los Jueces del Tribunal, éste le calificó de Apto "cum laude" por unanimidad  
Granada 12 de Junio de 19 92

EL PRESIDENTE.

El Vocal.

El Secretario del Tribunal.

El Vocal.

El Vocal.

Firma del Graduando.

INVESTIDURA ...

En el día de la fecha se ha conferido a D. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ el Grado de Doctor en la Facultad de \_\_\_\_\_  
conforme a lo prevenido en las disposiciones vigentes.

Granada \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 19 \_\_\_\_\_

EL DECANO.

CERTIFICO: Que el Acta que antecede concuerda con la del expediente del interesado remitida a la Secretaría de la Universidad.

Granada \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 19 \_\_\_\_\_

El Catedrático Secretario.

V.º B.º  
EL DECANO

Esta Tesis Doctoral fue juzgada el día 12 de Junio de 1992, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, obteniendo la calificación de APTO CUM LAUDE por unanimidad, ante el Tribunal compuesto por:

*Presidente:* Dr. D. Victoriano Ramírez González, Catedrático de Universidad del Departamento Matemática Aplicada de la Universidad de Granada.

*Vocales:* Dr. D. Manuel Alfaro García, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Dr. D. Guillermo López Lagomasino, adscrito al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de La Habana (Cuba).

Dr. D. André Ronveaux, adscrito al Departamento de Física Matemática de la Faculté Universitaire Notre Dame de la Paix, Université de Namur (Bélgica).

*Secretario:* Dr. D. Jesús Sanchez-Dehesa Moreno-Cid, Catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Física Moderna de la Universidad de Granada.

*A Mariana y Leonor, mis dos problemas abiertos*

*Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todos aquellos que, de una u otra forma, han contribuido a la realización de este proyecto.*

*En primer lugar, y de forma destacada, reconozco mi deuda con el profesor Dr. D. Francisco Marcellán Español, Catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Carlos III de Madrid, por haber estimulado en mí el interés que siento por los temas relacionados con la materia de objeto del presente trabajo, y por su inestimable ayuda y paciencia al dirigir esta Tesis. Especialmente le agradezco sus siempre acertadas sugerencias y observaciones en cuanto al enfoque de los problemas que se estudian, y, de manera notable, sus esfuerzos y sus ideas a la hora de planificar, estructurar y organizar cada una de las fases de este trabajo.*

*Asimismo, quiero agradecer al profesor Dr. D. Manuel Alfaro García del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza su exhaustiva lectura y sus siempre amables sugerencias que han permitido mejorar notablemente la forma final de esta Memoria.*

*También es mi deseo dejar constancia expresa de la gratitud que debo a mis compañeros, profesores del Departamento de Matemática Aplicada, en particular al Director del Departamento Dr. D. Victoriano Ramírez González por el gran interés demostrado por mi trabajo, que siempre se ha concretado en las mayores facilidades posibles para su desarrollo. Y en forma muy especial, quiero agradecer su colaboración a la Profesora Teresa Pérez Fernández, cuya ayuda y acertados comentarios han sido decisivos en la elaboración final de esta Tesis.*

*Finalmente, y desde otro punto de vista, desearía cerrar este apartado de agradecimientos recordando a los miembros de mi familia por los ánimos que siempre me han dado, y en particular a mi esposa Carmen, cuya paciencia me ha permitido disponer del tiempo necesario para culminar este trabajo.*

## INDICE DE CONTENIDOS

<b>Introducción.</b>	<i>ix</i>
<b>Capítulo 1: El caso regular.</b>	1
1.1 Introducción.	3
1.2 Definiciones.	5
1.3 El problema de existencia de SPOM respecto a $\varphi$ .	8
1.4 Fórmulas de representación de los $Q_n$ .	13
1.5 Relación de recurrencia. Fórmula de Christoffel-Darboux.	17
1.6 Los núcleos.	20
1.7 Relación con la modificación polinomial asociada a $(x-c)^2$ .	23
1.8 Una relación de recurrencia a tres términos con coeficientes polinomiales.	35
<b>Capítulo 2: Casos Simétricos.</b>	41
2.1 Introducción.	43
2.2 Funcionales simétricos.	45
2.3 Una masa en el origen.	47
2.4 Dos masas situadas en puntos simétricos.	55
<b>Capítulo 3: Ejemplos Clásicos.</b>	71
3.1 Introducción.	73
3.2 El caso Jacobi.	75
3.3 El caso Laguerre.	88
3.4 El caso Hermite.	100
3.5 El caso Bessel.	112
<b>Capítulo 4: Ceros.</b>	129
4.1 Introducción.	131
4.2 Localización de ceros.	132
4.3 Propiedades de separación.	135
4.4 La última raíz de $Q_n(x)$ .	143

4.5 Una fórmula de cuadratura.	151
4.6 Comportamiento de los ceros de $Q_n(x)$ frente a $\lambda$ .	159
<b>Capítulo 5: Aplicaciones.</b>	<b>165</b>
5.1 Introducción.	167
5.2 Aproximantes racionales con coeficientes fijos en el numerador.	168
5.3 Relación con los polinomios ortogonales tipo Sobolev.	171
5.4 Asociados.	175
5.5 Relación con las fórmulas de cuadratura.	178
5.6 El caso general.	184
5.7 Un ejemplo numérico.	186
<b>Apéndice: Programas.</b>	<b>189</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>215</b>

## INTRODUCCION

## INTRODUCCION.

La atención preferente de la teoría de polinomios ortogonales se ha centrado en el caso de medidas con soporte en la recta real o en la circunferencia unidad que definen productos escalares estándar

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma} f(z) \overline{g(z)} d\mu(z)$$

Recientemente se ha considerado una extensión de la teoría a productos escalares en el espacio de los polinomios definidos mediante

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma} f^{(i)}(z) \overline{g^{(i)}(z)} d\mu_i(z)$$

El interés hacia este tipo de productos escalares está motivado, entre otras razones, por:

- a) La comparación con la teoría estándar de polinomios ortogonales en los espacios  $L^2$  (ver Szegő [66], Freud [30] y Chihara [20] como referencias clásicas para esta cuestión).
- b) La teoría espectral de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver Everitt, Littlejohn et al. [27], [28] y [29])
- c) El análisis de los métodos espectrales en el tratamiento numérico de las ecuaciones en derivadas parciales (ver Canuto y Quarteroni [17], [18]).
- d) La búsqueda de algoritmos para el cálculo de series de Fourier-Sobolev, así como la aproximación simultánea de una función y de sus derivadas en términos de polinomios ortogonales de Sobolev (Iserles et al. [34])
- e) La extensión de las fórmulas de cuadratura Gaussianas.

El caso  $p=1$  es el que más habitualmente ha sido considerado en la bibliografía disponible. No obstante, para este caso se han considerado dos aproximaciones que formalmente son muy diferentes: el llamado caso discreto (donde  $\mu_1$  es una combinación de masas de Dirac) y el caso continuo (donde  $\mu_1$

es una medida absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue). En esta última situación la información que se posee es muy reducida, explicitándose resultados en situaciones muy particulares: el caso  $d\mu_0 = dx$ ,  $d\mu_1 = \lambda dx$ , considerado por Althammer [5], Gröbner [31], Schäfke [64] y Schäfke y Wolf [65], y el caso  $d\mu_0 = e^{-x}dx$ ,  $d\mu_1 = \lambda e^{-x}dx$ , estudiado por Brenner [12]. El análisis relativo al resto de medidas clásicas (casos Jacobi y Laguerre) permanece aún abierto, en el sentido de que no se conocen representaciones de los polinomios ortogonales en términos de los polinomios clásicos, distribución de ceros, propiedades asintóticas, teoría espectral, etc.

La memoria que presentamos, se inscribe en el marco general del caso discreto, para el cual se realiza un estudio exhaustivo, con la novedosa aportación de utilizar como punto de partida funcionales cuasidefinidos o regulares (ver Chihara [20], Maroni [53]) lo cual, permite incluir el modelo Bessel, que como bien es sabido representa una "patología" en la teoría clásica (caso definido positivo).

En este sentido, los problemas que constituyen el objeto de nuestro estudio son los siguientes:

En el capítulo 1, dado un funcional regular  $u$ , definido sobre el espacio de los polinomios  $\mathbb{P}$ , se considera la forma bilineal  $\varphi$  sobre  $\mathbb{P}$ :

$$\varphi(p,q) = \langle u, pq \rangle + \lambda f'(c)g'(c)$$

donde  $\lambda$  es un número real no nulo y  $c$  es punto arbitrario de la recta real. Este tipo de formas bilineales se caracterizan por el carácter no autoadjunto del operador de desplazamiento, lo cual implica que los resultados clásicos acerca de polinomios ortogonales estándar dejan de ser válidos. Así, la primera cuestión que se nos plantea es la existencia de sucesiones de polinomios ortogonales respecto a la forma bilineal  $\varphi$ , y en caso afirmativo, su relación con los polinomios ortogonales asociados a  $u$ . En este sentido damos una condición necesaria y suficiente para la existencia de sucesiones de

## INTRODUCCION.

La atención preferente de la teoría de polinomios ortogonales se ha centrado en el caso de medidas con soporte en la recta real o en la circunferencia unidad que definen productos escalares estándar

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma} f(z) \overline{g(z)} d\mu(z)$$

Recientemente se ha considerado una extensión de la teoría a productos escalares en el espacio de los polinomios definidos mediante

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^p \int_{\Gamma} f^{(i)}(z) \overline{g^{(i)}(z)} d\mu_i(z)$$

El interés hacia este tipo de productos escalares está motivado, entre otras razones, por:

- a) La comparación con la teoría estándar de polinomios ortogonales en los espacios  $L^2$  (ver Szegő [66], Freud [30] y Chihara [20] como referencias clásicas para esta cuestión).
- b) La teoría espectral de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver Everitt, Littlejohn et al. [27], [28] y [29])
- c) El análisis de los métodos espectrales en el tratamiento numérico de las ecuaciones en derivadas parciales (ver Canuto y Quarteroni [17], [18]).
- d) La búsqueda de algoritmos para el cálculo de series de Fourier-Sobolev, así como la aproximación simultánea de una función y de sus derivadas en términos de polinomios ortogonales de Sobolev (Iserles et al. [34])
- e) La extensión de las fórmulas de cuadratura Gaussianas.

El caso  $p=1$  es el que más habitualmente ha sido considerado en la bibliografía disponible. No obstante, para este caso se han considerado dos aproximaciones que formalmente son muy diferentes: el llamado caso discreto (donde  $\mu_1$  es una combinación de masas de Dirac) y el caso continuo (donde  $\mu_1$

polinomios ortogonales con respecto a  $\varphi$ , así como diferentes expresiones en términos de los polinomios ortogonales asociados a  $u$ .

De la definición de  $\varphi$ , se deduce inmediatamente el carácter autoadjunto de un operador de desplazamiento asociado a la multiplicación por el polinomio  $(x-c)^2$ , y como consecuencia se obtiene una relación de recurrencia a cinco términos para los polinomios ortogonales asociados a  $\varphi$ , así como diversas propiedades para los núcleos, que generalizan las de los polinomios ortogonales estándar.

Considerando el funcional  $u_1 = (x-c)^2 u$ , obtenemos una interesante interpretación de los polinomios ortogonales asociados a  $\varphi$ , como polinomios cuasi-ortogonales de orden dos con respecto a  $u_1$  y por tanto son expresables como combinación lineal de tres polinomios ortogonales consecutivos asociados a  $u_1$ . Finalmente deducimos una relación de recurrencia a tres términos con coeficientes polinómicos, verificada por los polinomios ortogonales asociados a  $\varphi$ .

Los problemas tratados en este capítulo han sido considerado por diversos autores en el caso definido positivo (ver Marcellán y Ronveaux [50], Bavinck y Meijer [8], Alfaro et al. [3])

En el capítulo 2, consideraremos funcionales lineales regulares y simétricos, esto es, funcionales lineales tales que todos los momentos de orden impar son nulos, y analizaremos formas bilineales similares a las del capítulo 1 que conserven la simetría. Así, en primer lugar, consideraremos la forma bilineal:

$$\varphi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda f'(0) g'(0)$$

para la cual obtendremos condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales existen sucesiones de polinomios ortogonales con respecto a  $\varphi$ . De la simetría de  $u$  se deducirá que los polinomios ortogonales asociados a  $\varphi$  son funciones pares o impares de acuerdo con la paridad de su grado. Si consideramos separadamente los términos pares e impares de la sucesión de polinomios ortogonales, observamos que los polinomios ortogonales tipo Sobolev asociados a  $\varphi$  se construyen a partir de dos sucesiones de polinomios ortogonales

estándar. De nuevo como consecuencia de la simetría, veremos que las relaciones de recurrencia adquieren una estructura particularmente simple. Estos resultados, en el caso definido positivo, han sido estudiados por Alfaro y otros ([2]).

A continuación, dado un funcional  $u$  regular y simétrico, consideramos la forma bilineal y simétrica definida por:

$$\psi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda[f'(c)g'(c) + f'(-c)g'(-c)].$$

Igual que en el caso anterior, obtenemos una condición necesaria y suficiente para que  $\psi$  sea no degenerada y los polinomios ortogonales asociados a  $\psi$  verificarán las mismas condiciones de simetría; sin embargo, en este caso las sucesiones de polinomios de grado par e impar se construyen a partir de sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a formas bilineales tipo Sobolev como las consideradas en el capítulo 1.

De la estructura de la forma bilineal  $\psi$ , deducimos fácilmente que el operador de multiplicación por el polinomio  $(x^2 - c^2)^2$  es autoadjunto para  $\psi$ . De esta forma los polinomios asociados a  $\psi$  verifican una relación de recurrencia a nueve términos.

La anterior relación de recurrencia no es minimal en el número de términos debido a que la multiplicación por el polinomio  $x^3 - 3c^2x$  constituye también un operador autoadjunto para la forma  $\psi$ . Así, podemos encontrar una relación de recurrencia a siete términos para los polinomios asociados a  $\psi$ .

Estos resultados aparecen ya en el caso definido positivo. El estudio de tales formas bilineales fue introducido por Bavinck y Meijer ([7] y [8]) para el funcional asociado a los polinomios de Gegenbauer y  $c=1$ . En un trabajo posterior ([9]) los mismos autores generalizan los resultados para funciones peso simétricas en el intervalo  $[-1,1]$  y masas puntuales situadas en los extremos del intervalo. Recientemente Alfaro y otros ([2]) han estudiado el mismo problema pero sin restricciones acerca del intervalo y la posición de las masas puntuales.

En el capítulo 3 se analizan en detalle los polinomios de tipo Sobolev en los casos Jacobi, Laguerre, Hermite y Bessel. Situaciones particulares de

estos casos han sido estudiadas por Marcellán y Ronveaux [50], Koekoek y Meijer [40] y Alfaro, Marcellán, Rezola y Ronveaux [3]. En estos ejemplos la elección del punto  $c$  viene dictada por el deseo de conservación de algunas propiedades: en los casos Jacobi, Laguerre y Bessel el punto  $c$  se elige de forma que los polinomios asociados al funcional  $u_1$  sigan siendo clásicos y en el caso Hermite se considera el punto  $c=0$  para conservar la simetría.

Los problemas que se consideran son los siguientes:

- a) Coeficientes de la relación de recurrencia a cinco términos y su comportamiento asintótico.
- b) Coeficientes de la expresión en términos de los polinomios asociados al funcional  $u_1$ .
- c) Existencia de análogos a las fórmulas de Rodrigues.
- d) Ecuación diferencial de segundo orden.

El objetivo del capítulo 4 es el análisis de las propiedades de los ceros de los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar  $\varphi$ , cuando  $u$  es un funcional lineal definido positivo con soporte en un intervalo  $I$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

En primer lugar se estudian propiedades de localización para los ceros de los polinomios ortogonales respecto al producto tipo Sobolev, probando que si  $c \in I$ , el polinomio ortogonal de grado  $n$  posee  $n$  ceros reales y simples, de los cuales, al menos  $n-1$  se encuentran en el interior de  $I$ .

A continuación se estudian propiedades de entrelazamiento y separación con respecto de los ceros de los polinomios ortogonales asociados a los funcionales  $u$  y  $u_1$ .

En el caso de un intervalo acotado, se demuestra que para  $c \geq \text{Sup } I$  los polinomios ortogonales de grado suficientemente grande poseen exactamente una raíz a la derecha de  $c$ ; la cual converge hacia  $c$  cuando  $n$  diverge, convirtiéndose  $c$  en un atractor para el último cero de los polinomios ortogonales.

Posteriormente, se estudia una fórmula de cuadratura para el funcional  $u_1 = (x-c)^2 u$ , basada en los ceros de los polinomios ortogonales tipo Sobolev. A partir de esta fórmula de cuadratura será posible probar una cierta

propiedad de entrelazamiento entre los ceros de dos polinomios ortogonales consecutivos.

Finalmente se estudia el comportamiento de los ceros frente al parámetro  $\lambda$ , probándose que, cuando  $c \geq \text{Sup } I$ , los ceros de los polinomios ortogonales son una función creciente y acotada de  $\lambda$ .

En el capítulo 5, proponemos una aplicación para los polinomios ortogonales tipo Sobolev a la aproximación racional; en concreto, se considera la construcción de aproximantes racionales para una serie formal de potencias con algunos coeficientes fijos en el numerador, específicamente los de las potencias de mayor grado. En primer lugar consideraremos la posibilidad de construir aproximantes racionales con un número fijo,  $k$ , de coeficientes nulos en su numerador.

Mostraremos que estos aproximantes pueden construirse a partir de unos aproximantes de tipo Padé (ver Brezinski [13]), en los cuales los denominadores verifican unas ciertas condiciones de ortogonalidad. Estas condiciones nos permitirán relacionarlos con los Polinomios Ortogonales tipo Sobolev asociados a una forma bilineal:

$$\varphi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda f^{(k)}(0)g^{(k)}(0)$$

Analizaremos algunas de las propiedades de los Polinomios Ortogonales de tipo Sobolev para la forma  $\varphi$ , en concreto se considera su existencia, expresiones en términos de los polinomios ortogonales estándar y las relaciones de recurrencia.

La construcción de estos aproximantes racionales nos conduce al concepto de *asociados* a la sucesión de polinomios ortogonales tipo Sobolev. Mostraremos que estos asociados, a partir de un determinado índice, verifican la misma relación de recurrencia que los polinomios de tipo Sobolev, pero con distintas condiciones iniciales.

A continuación, se muestra cómo los aproximantes racionales contruidos a partir de los polinomios ortogonales tipo Sobolev se relacionan con las fórmulas de cuadratura introducidas en el capítulo 4, en forma análoga a la relación existente entre los aproximantes de Padé y las cuadraturas

Gaussianas.

Por último, se incluye un apéndice en el que, utilizando el programa de cálculo simbólico MATHEMATICA<sup>TM</sup>, se estudian ejemplos concretos relativos a las anteriores cuestiones.

Cada uno de los cinco capítulos que componen la memoria se presenta estructurado en diversos apartados, comenzando siempre por una introducción en la que se incluyen los antecedentes y referencias bibliográficas correspondientes, así como una descripción general de los contenidos del capítulo.

Para cada capítulo y para cada sección se ha adoptado una numeración independiente, de forma que, por ejemplo, la notación *Proposición 1.4.2*, representa la segunda proposición, del apartado cuarto, del capítulo 1. Las fórmulas se han numerado de idéntico modo, y así el símbolo (3.5.1) representa la primera fórmula, del quinto apartado, del capítulo 3.

## CAPITULO 1

### El Caso Regular

- 1.1 Introducción.
- 1.2 Definiciones.
- 1.3 El problema de existencia de SPOM respecto a  $\varphi$ .
- 1.4 Fórmulas de representación de los  $Q_n$ .
- 1.5 Relación de recurrencia. Fórmula de Christoffel-Darboux.
- 1.6 Los núcleos.
- 1.7 Relación con la modificación polinomial asociada a  $(x-c)^2$ .
- 1.8 Una relación de recurrencia a tres términos con coeficientes polinomiales.

## 1.1 INTRODUCCION.

Sea  $u$  un funcional regular sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales  $\mathbb{P}$ , esto es, un funcional tal que los menores principales de la matriz de Hankel

$$H = (u_{i+j})_{i,j}$$

asociada a la sucesión de momentos  $u_n = \langle u, x^n \rangle$ , tengan determinante no nulo. Es bien conocido (por ejemplo, ver Chihara [20], pag. 21-22) que toda sucesión  $\{P_n(x)\}_n$  de polinomios ortogonales con respecto a la forma bilineal definida por:

$$(p,q)_u := \langle u, pq \rangle$$

verifica una relación de recurrencia a tres términos de la forma:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \\ P_0(x) &= C_0 ; P_{-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

donde  $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\} \subset \mathbb{R}$  y  $A_n \neq 0, C_n \neq 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). La obtención de esta relación de recurrencia se basa en la igualdad:

$$(xp(x), q(x))_u = (p(x), xq(x))_u$$

verificada por cualesquiera dos polinomios  $p, q$ . Así las propiedades usuales de los polinomios ortogonales son consecuencia del carácter autoadjunto del operador de desplazamiento para la forma bilineal  $(\dots)_u$ .

En los últimos años, han aparecido diversas publicaciones acerca de polinomios ortogonales con respecto a productos escalares de tipo Sobolev de la forma:

$$(p,q) = \int_I p(x)q(x)d\mu(x) + \sum_{k=1}^{m_1} M_k p(c_k)q(c_k) + \sum_{k=1}^{m_2} N_k p'(d_k)q'(d_k) \quad (1.1.1)$$

donde  $I$  es un intervalo de la recta real,  $\mu$  es una medida de Borel finita y

positiva, definida en  $I$ ,  $M_k \geq 0$ ,  $N_k \geq 0$  y  $c_k, d_k$  son puntos de  $\mathbb{R}$  (no necesariamente contenidos en  $I$ ). Ver, por ejemplo, los artículos de Meijer [55], [56], [57], Koekoek [36], [37], Marcellán y Ronveaux [50], Alfaro y otros [3]. Todos estos trabajos están influenciados, en mayor o menor medida, por un importante artículo de Krall [43] en el que se considera la adjunción de dos masas puntuales en los extremos del intervalo  $[-1,1]$  a la medida absolutamente continua asociada a los polinomios de Legendre con el fin de obtener nuevos polinomios ortogonales verificando ciertas ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Este trabajo fue generalizado por T. H. Koornwinder [41] para pesos de Jacobi y masas en los extremos del intervalo  $[-1,1]$ .

Es evidente que para los productos escalares de la forma (1.1.1) deja de ser cierta la relación:

$$(xp(x),q(x)) = (p(x),xq(x))$$

cualesquiera que sean los polinomios  $p$  y  $q$ . Sin embargo, en los mencionados artículos se prueba la existencia de polinomios  $h(x)$ , de grado  $m$ , verificando:

$$(h(x)p(x),q(x)) = (p(x),h(x)q(x))$$

para todo par de polinomios  $p$  y  $q$ , y de aquí, se deduce que la familia  $\{Q_n(x)\}_n$  de polinomios ortogonales con respecto al producto escalar (1.1.1) verifica una relación de recurrencia con  $2m+1$  términos de la forma:

$$h(x)Q_n(x) = \sum_{k=n-m}^{n+m} b_{n,k} Q_k(x) \quad (n = m, m+1, \dots).$$

Obsérvese que la relación se verifica también para  $n < m$ , pero el hecho distintivo es que para  $n \geq m$  el número de sumandos es exactamente  $2m+1$ .

En un reciente trabajo de Evans y otros [26], se han completado los resultados anteriores probando que, dado un producto escalar de Sobolev de la forma:

$$(p, q)_w = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x)$$

definido en el espacio de los polinomios reales, donde las  $\mu_k$  son medidas de Borel finitas y positivas, la existencia de un polinomio  $h(x)$  de grado mayor o igual que 1 verificando:

$$(h(x)p(x), q(x))_w = (p(x), h(x)q(x))_w$$

implica que las medidas  $\mu_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) son necesariamente discretas (suma finita de masas de Dirac) con soportes asociados a las raíces del polinomio  $h$  y de sus derivadas sucesivas.

En nuestro caso, dado un funcional regular  $u$ , definido sobre el espacio de los polinomios  $\mathbb{P}$  reales, se considera la forma bilineal en  $\mathbb{P}$ :

$$(p, q)_w = \langle u, pq \rangle + \sum_{k=1}^m M_{1k} p'(c_k) q'(c_k) + \dots + \sum_{k=1}^m M_{nk} p^{(n)}(c_k) q^{(n)}(c_k).$$

donde  $M_{ij} \geq 0$ ,  $\forall i, j$

El primer problema que se plantea es la existencia de polinomios ortogonales respecto a la misma, y en caso afirmativo, su relación con los polinomios ortogonales asociados a  $u$ .

Por motivos de simplicidad analizamos en detalle el caso  $m=n=1$ . Concretamente se han obtenido diferentes caracterizaciones para los polinomios ortogonales, así como relaciones de recurrencia y propiedades de los núcleos, que generalizan las obtenidas en el caso definido positivo.

## 1.2.- DEFINICIONES.

Sea  $u$  un funcional lineal regular definido sobre  $\mathbb{P}$  y sea  $\{P_n\}_n$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos definidos por  $u$ . Entonces:

$$\langle u, P_n P_m \rangle = k_n \delta_{nm}$$

con  $k_n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dados  $c \in \mathbb{R}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , consideramos la forma bilineal  $\varphi: \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$\varphi(p, q) = \langle u, pq \rangle + \lambda p'(c)q'(c). \quad (1.2.1)$$

Una característica de esta forma bilineal es que el operador de desplazamiento no es autoadjunto, de hecho, en general se verifica:

$$\varphi(xp(x), q(x)) \neq \varphi(p(x), xq(x)).$$

Sin embargo, el operador de desplazamiento asociado a la multiplicación por el polinomio  $(x-c)^2$  cumple:

**Proposición 1.2.1.-** *Dados  $p, q \in \mathbb{P}$ , se tiene:*

$$\varphi((x-c)^2 p(x), q(x)) = \varphi(p(x), (x-c)^2 q(x)) = \langle u, (x-c)^2 p(x)q(x) \rangle. \quad (1.2.2)$$

**Demostración.-** Inmediata.  $\square$

**Definición 1.2.2.-** Una sucesión de polinomios  $\{Q_n\}_n$  se denomina *una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a  $\varphi$*  si:

- i)  $\text{grado}(Q_n(x)) = n$ ,
- ii)  $\varphi(Q_n, Q_m) = \tilde{k}_n \delta_{nm}$ , con  $\tilde{k}_n \neq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Si los polinomios  $Q_n$  son mónicos diremos que  $\{Q_n\}_n$  es la *sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM)* con respecto a  $\varphi$ .

Como es bien conocido, la existencia de una familia de polinomios ortogonales con respecto a la forma bilineal  $\varphi$  es equivalente al carácter no degenerado de la restricción de  $\varphi$  a  $\mathbb{P}_n$ , es decir, a la no singularidad de los menores principales de la matriz de Gram asociada a  $\varphi$ . Si se verifica esta

condición diremos que  $\varphi$  es no degenerada. Dicha matriz de Gram, en la base  $\{1, x, x^2, \dots\}$  es de la forma  $\nabla = (c_{ij})_{ij}$  donde

$$c_{ij} = \varphi(x^i, x^j) = \begin{cases} \langle u, x^{i+j} \rangle & \text{si } i+j < 2, \\ \langle u, x^{i+j} \rangle + \lambda ij c^{i+j-2} & \text{si } i+j \geq 2. \end{cases}$$

Así,  $\nabla$  es simétrica pero no es de Hankel.

Eligiendo una base adecuada para  $\mathcal{P}$ , se puede conseguir una estructura más simple para  $\nabla$ , en concreto si se considera la base

$$\mathcal{B} = \{1, (x-c), (x-c)^2, (x-c)^3, \dots\}$$

los momentos correspondientes a  $\varphi$  en la base anterior vendrán dados por:

$$u'_{i+j} = \begin{cases} u_{i+j} + \lambda & \text{para } i=j=1 \\ u_{i+j} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $u_{i+j} = \langle u, (x-c)^{i+j} \rangle$ .

Así la matriz de Gram en esta base es una perturbación de una matriz de Hankel añadiendo  $\lambda$  en la posición (1,1):

$$\nabla' = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_n & \dots \\ u_1 & u_2 + \lambda & u_3 & \dots & u_{n+1} & \dots \\ u_2 & u_3 & u_4 & \dots & u_{n+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ u_n & u_{n+1} & u_{n+2} & \dots & u_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Como es usual, si existen, los polinomios ortogonales mónicos pueden ser expresados en forma de cociente de determinantes:

Proposición 1.2.3.-

$$Q_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 + \lambda & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & \dots & u_{2n-1} \\ 1 & (x-c) & \dots & (x-c)^n \end{vmatrix}$$

donde  $D_{n-1} = \det(\nabla'_{n-1})$ .

### 1.3.- EL PROBLEMA DE EXISTENCIA DE SPOM RESPECTO A $\varphi$ .

Aun siendo regular el funcional  $u$ , no podemos asegurar a priori la existencia de SPOM con respecto a la forma bilineal  $\varphi$ . Sin embargo, podemos dar una condición necesaria y suficiente para que la forma bilineal  $\varphi$  sea no degenerada en términos de la sucesión  $\{P_n\}_n$  de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $u$ . Designaremos, como es habitual, por

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^n \frac{P_j(x)P_j(y)}{\langle u, P_j^2 \rangle}$$

al  $n$ -ésimo núcleo asociado a la SPOM  $\{P_n\}_n$ , y por

$$K_n^{(r,s)}(x,y) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} K_n(x,y)$$

a las derivadas parciales de dichos núcleos. Para estos, es bien conocido que, dado un polinomio  $p(x)$  de grado menor o igual que  $n$ , se verifica la relación:

$$\begin{aligned} \langle u, K_n^{(0,s)}(x,y)p(x) \rangle &= \langle u, \sum_{j=0}^n \frac{P_j(x)P_j^{(s)}(y)p(x)}{\langle u, P_j^2 \rangle} \rangle = \\ &= \sum_{j=0}^n \alpha_j P_j^{(s)}(y) = p^{(s)}(y) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

donde  $\alpha_j$  es el  $j$ -ésimo coeficiente de Fourier del polinomio  $p(x)$ . Esta igualdad es conocida con el nombre de *propiedad reproductora de los núcleos*.

**Teorema 1.3.1.-** Condición necesaria y suficiente para que exista la SPOM con respecto a  $\varphi$  es que:

$$1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) \neq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (1.3.2)$$

en cuyo caso:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda \frac{P_n'(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c). \quad (1.3.3)$$

**Demostración.-** Supongamos que existe SPOM con respecto a  $\varphi$ . Entonces estos polinomios admiten una expresión en términos de los  $\{P_j\}_j$ :

$$Q_n(x) = P_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_{nj} P_j(x)$$

donde

$$a_{nj} = \frac{\langle u, Q_n P_j \rangle}{\langle u, P_j^2 \rangle} = \frac{\varphi(Q_n, P_j) - \lambda Q_n'(c) P_j'(c)}{\langle u, P_j^2 \rangle} = -\lambda \frac{Q_n'(c) P_j'(c)}{\langle u, P_j^2 \rangle}$$

y así

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda Q_n'(c) K_{n-1}^{(0,1)}(x,c).$$

Si derivamos la expresión anterior y evaluamos en  $x = c$ , obtenemos:

$$Q'_n(c) [1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)] = P'_n(c). \quad (1.3.4)$$

Supongamos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$1 + \lambda K_{n_0-1}^{(1,1)}(c,c) = 0,$$

entonces, por (1.3.4),  $P'_{n_0}(c) = 0$ , luego

$$1 + \lambda K_{n_0}^{(1,1)}(c,c) = 0,$$

y volviendo a usar (1.3.4),  $P'_{n_0+1}(c) = 0$ . De esta forma:

$$P'_n(c) = 0, \quad n \geq n_0.$$

Por otro lado, derivando la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios  $\{P_n\}_n$  y sustituyendo en el punto  $c$ , se tiene:

$$cP'_n(c) + P_n(c) = P'_{n+1}(c) + \beta_n P'_n(c) + \gamma_n P'_{n-1}(c)$$

así,  $P'_{n+1}(c) = P'_{n+2}(c) = \dots = 0$ ,  $n \geq n_0$ , lo cual contradice el hecho de que dos polinomios ortogonales estándar consecutivos no pueden tener raíces comunes.

Para demostrar la condición suficiente, basta ver que la sucesión de polinomios dada por

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda \frac{P'_n(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

que son mónicos y están bien definidos, son ortogonales respecto a  $\varphi$ . En efecto, dado cualquier polinomio  $p(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$

$$\varphi(Q_n(x), p(x)) = \langle \mu, Q_n(x)p(x) \rangle + \lambda Q'_n(c)p'(c)$$

y utilizando la expresión (1.3.3),

$$\begin{aligned} \varphi(Q_n(x), p(x)) &= \langle u, P_n(x)p(x) \rangle - \lambda \frac{P_n'(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} \langle u, K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)p(x) \rangle \\ &+ \lambda \left[ P_n'(c) - \lambda \frac{P_n'(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) \right] p'(c) = 0 \end{aligned}$$

debido a las propiedades reproductoras de los núcleos.  $\square$

Dado que el conjunto  $\{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c): n \geq 1\}$  es numerable, existe una infinidad de valores de  $\lambda$  para los cuales  $\varphi$  es no degenerada. En concreto si  $u$  es definido positivo, se tiene

$$K_n^{(1,1)}(c,c) > 0$$

y por tanto basta tomar  $\lambda \geq 0$  para obtener una forma bilineal  $\varphi$  no degenerada, aunque existen valores de  $\lambda < 0$  para los que  $\varphi$  es no degenerada. Basta tener presente que

$$1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq - \frac{1}{K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}.$$

En las condiciones descritas en el teorema 1.3.1, aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base de Hamel para  $\mathbb{P}$ , podemos construir una base de polinomios ortogonales con respecto a  $\varphi$ . Dichos polinomios son ortogonales con respecto a  $\varphi$ , pero no son ortogonales en el sentido estándar del término. Así, la mayor parte de los resultados relativos a los polinomios ortogonales estándar dejan de ser aplicables en este caso: relación de recurrencia a tres términos, relación de Christoffel-Darboux, etc.

**Corolario 1.3.2.-** En las condiciones (1.3.2):

$$Q_n'(c) = \frac{P_n'(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}.$$

**Definición 1.3.3.-** En adelante notaremos por:

$$\lambda_n = 1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c),$$

$$k_n = \langle u, P_n^2(x) \rangle,$$

$$\tilde{k}_n = \varphi(Q_n, Q_n).$$

**Corolario 1.3.4.-** Con las notaciones anteriores:

$$\tilde{k}_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} k_n.$$

**Demostración.-**

En efecto, basta multiplicar, utilizando la expresión del corolario 1.3.2:

$$\begin{aligned} \varphi(Q_n, Q_n) &= \varphi(Q_n, P_n) = \langle u, P_n(x) Q_n(x) \rangle + \lambda Q_n'(c) P_n'(c) = \\ &= \langle u, P_n^2(x) \rangle + \lambda \frac{P_n'(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} P_n'(c) = \\ &= \langle u, P_n^2(x) \rangle \left[ 1 + \frac{\lambda}{\langle u, P_n^2(x) \rangle} \frac{[P_n'(c)]^2}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} \right] = \\ &= \langle u, P_n^2(x) \rangle \frac{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}. \quad \square \end{aligned}$$

1.4.- FORMULAS DE REPRESENTACION DE LOS  $Q_n$ .

En las hipótesis del teorema 1.3.1, se tiene la expresión:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda \frac{P'_n(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c). \quad (1.4.1)$$

La fórmula anterior puede escribirse:

$$P_n(x) - Q_n(x) = \lambda \frac{P'_n(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) \quad (1.4.2)$$

y, por otro lado, de la definición se tiene que:

$$K_n^{(0,1)}(x,c) = K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) + \frac{P_n(x)P'_n(c)}{\langle u, P_n^2 \rangle}.$$

Considerando la fórmula (1.4.2) para  $n+1$  y teniendo en cuenta la relación anterior, obtenemos:

$$P_{n+1}(x) - Q_{n+1}(x) = \lambda \frac{P'_{n+1}(c)}{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c)} \left[ K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) + \frac{P_n(x)P'_n(c)}{\langle u, P_n^2 \rangle} \right] \quad (1.4.3)$$

Eliminando entre (1.4.2) y (1.4.3)  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ , se obtiene por simplificación de  $1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c)$ :

$$P'_n(c)P_{n+1}(x) - P'_{n+1}(c)P_n(x) = P'_n(c)Q_{n+1}(x) - \frac{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c)} P'_{n+1}(c)Q_n(x)$$

Teniendo en cuenta el corolario 1.3.2, la anterior relación puede ser escrita mediante determinantes, en la forma siguiente:

**Proposición 1.4.1.-**

$$\begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) \\ P'_n(c) & P'_{n+1}(c) \end{vmatrix} = \lambda_{n-1} \begin{vmatrix} Q_n(x) & Q_{n+1}(x) \\ Q'_n(c) & Q'_{n+1}(c) \end{vmatrix}. \quad (1.4.4)$$

De la Fórmula de Christoffel-Darboux

$$(x-y) K_{n-1}(x,y) = \frac{1}{k_{n-1}} [P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)]$$

(véase Chihara [20], pag. 23, expresión (4.11)) derivando con respecto a  $y$ , y evaluando en  $y = c$ , se obtiene:

$$(x-c)^2 K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) = \frac{1}{k_{n-1}} [P_n(x)T_1(P_{n-1},c)(x) - P_{n-1}(x)T_1(P_n,c)(x)] \quad (1.4.5)$$

donde por  $T_i(P_j,c)(x)$  notamos el polinomio de Taylor de grado  $i$  asociado a  $P_j(x)$  en el punto  $c$ .

Sustituyendo en la fórmula (1.4.1) se obtiene una expresión para  $Q_n(x)$  en función de  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$ :

**Proposición 1.4.2.-**

$$(x-c)^2 Q_n(x) = q_2(x,n)P_n(x) + q_1(x,n)P_{n-1}(x) \quad (1.4.6)$$

con  $q_i(x,n)$  polinomios de grado  $i$  ( $i=1,2$ ), que vienen dados por:

$$q_2(x,n) = (x-c)^2 - \lambda \frac{Q'_n(c)}{k_{n-1}} T_1(P_{n-1},c)(x)$$

$$q_1(x,n) = \lambda \frac{Q'_n(c)}{k_{n-1}} T_1(P_n, c)(x).$$

Utilizando la expresión para  $Q'_n(c)$  del corolario 1.3.2, los polinomios  $q_i(x,n)$  ( $i=1,2$ ) pueden ser escritos en la forma siguiente:

$$q_2(x,n) = (x-c)^2 - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-1}(c)}{k_{n-1}} (x-c) - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P'_n(c)P_{n-1}(c)}{k_{n-1}}$$

$$q_1(x,n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{[P'_n(c)]^2}{k_{n-1}} (x-c) + \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P'_n(c)P_n(c)}{k_{n-1}}$$

expresiones que muestran el papel fundamental que juegan los valores de  $P_n(c)$  y  $P'_n(c)$  en la obtención de  $Q_n(x)$ .

La proposición anterior muestra que el polinomio  $(x-c)^2 Q_n(x)$  es un polinomio cuasi-ortogonal de orden cuatro con respecto al funcional  $u$ ; de hecho, este polinomio puede expresarse como combinación lineal de cinco polinomios  $P_i(x)$  consecutivos, como establece la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.3.-** Sean  $\beta_n$  y  $\gamma_n$  los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos verificada por los P.O.  $\{P_n\}_n$ :

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

entonces, se verifica:

$$(x-c)^2 Q_n(x) = P_{n+2}(x) + \alpha_{n+1}^{(n)} P_{n+1}(x) + \alpha_n^{(n)} P_n(x) + \alpha_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + \alpha_{n-2}^{(n)} P_{n-2}(x) \quad (1.4.7)$$

donde

$$\alpha_{n+1}^{(n)} = (\beta_n - c) + (\beta_{n+1} - c) - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-1}(c)}{k_{n-1}}$$

$$\alpha_n^{(n)} = \gamma_n + \gamma_{n+1} + (\beta_n - c)^2 - [(\beta_{n-1} - c) + (\beta_n - c)] \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P_n'(c)P_{n-1}'(c)}{k_{n-1}} - \gamma_{n-1} \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P_n'(c)P_{n-2}'(c)}{k_{n-1}}$$

$$\alpha_{n-1}^{(n)} = [(\beta_{n-1} - c) + (\beta_n - c)] \gamma_n \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} + \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P_{n+1}'(c)P_n'(c)}{k_{n-1}}$$

$$\alpha_{n-2}^{(n)} = \gamma_n \gamma_{n-1} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \neq 0$$

**Demostración.-** A partir de la relación de recurrencia a tres términos verificada por los P.O.  $\{P_n\}_n$ , se deduce la igualdad:

$$(x-c)P_n(x) = P_{n+1}(x) + (\beta_n - c)P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x),$$

multiplicando por  $(x-c)$  y utilizando esta relación para  $n-1$ ,  $n$  y  $n+1$  quedaría:

$$(x-c)^2 P_n(x) = P_{n+2}(x) + (\beta_n + \beta_{n+1} - 2c)P_{n+1}(x) + [\gamma_n + \gamma_{n+1} + (\beta_n - c)^2]P_n(x) + (\beta_{n-1} + \beta_n - 2c) \gamma_n P_{n-1}(x) + \gamma_n \gamma_{n-1} P_{n-2}(x)$$

Basta sustituir estas expresiones en (1.4.6) y agrupar utilizando la relación de recurrencia a tres términos para obtener el resultado.  $\square$

**Nota.-** De la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios  $P_i(x)$  se deduce la igualdad:

$$(x-c)^2 P_n(x) = P_{n+2}(x) + (\beta_n + \beta_{n+1} - 2c)P_{n+1}(x) + [\gamma_n + \gamma_{n+1} + (\beta_n - c)^2]P_n(x) + (\beta_{n-1} + \beta_n - 2c) \gamma_n P_{n-1}(x) + \gamma_n \gamma_{n-1} P_{n-2}(x),$$

la comparación de los coeficientes muestra que los polinomios  $Q_n(x)$  pueden obtenerse mediante una perturbación no excesivamente complicada de la relación de recurrencia a cinco términos para los polinomios  $P_i(x)$ .

**1.5.- RELACION DE RECURRENCIA A CINCO TERMINOS.  
FORMULA TIPO CHRISTOFFEL-DARBOUX.**

**Proposición 1.5.1.-** La sucesión de polinomios ortogonales  $\{Q_n\}_n$  verifica la siguiente relación de recurrencia a cinco términos:

$$(x-c)^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x).$$

**Demostración.-**  $(x-c)^2 Q_n(x)$  es un polinomio de grado  $n+2$ , luego podrá expresarse en la forma:

$$(x-c)^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} c_k^{(n)} Q_k(x)$$

donde

$$c_k^{(n)} = \frac{\varphi((x-c)^2 Q_n(x), Q_k(x))}{\varphi(Q_k(x), Q_k(x))} = \frac{\varphi(Q_n(x), (x-c)^2 Q_k(x))}{\varphi(Q_k(x), Q_k(x))} = 0, \text{ si } 0 \leq k \leq n-3$$

Así,

$$(x-c)^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + \sum_{k=n-2}^{n+1} c_k^{(n)} Q_k(x). \quad \square$$

La expresión de los coeficientes  $c_i^{(n)}$  puede deducirse fácilmente del apartado anterior.

**Proposición 1.5.2.-** Los coeficientes de la relación de recurrencia a cinco términos verifican:

$$c_{n+1}^{(n)} = (\beta_n - c) + (\beta_{n+1} - c) + \frac{\lambda}{\lambda_{n+1}} \frac{P'_{n+2}(c) P'_{n+1}(c)}{k_{n+1}} - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P'_n(c) P'_{n-1}(c)}{k_{n-1}}$$

$$c_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} [\gamma_n + \gamma_{n+1} + (\beta_n - c)^2] - \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{P'_n(c) P'_{n-2}(c)}{k_n} \gamma_n \gamma_{n-1} \left[ 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] -$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{P'_n(c)P'_{n-1}(c)}{k_{n-1}} \left\{ [(\beta_{n-1}-c)+(\beta_n-c)] \left[ 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] + \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{P'_{n+1}(c)P'_n(c)}{k_n} \right\}$$

$$c_{n-1}^{(n)} = \frac{\lambda_n \lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}^2} \frac{k_n}{k_{n-1}} c_n^{(n-1)}$$

$$c_{n-2}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{\lambda_{n-3}}{\lambda_{n-2}} \frac{k_n}{k_{n-2}}$$

**Demostración.-** Por la proposición anterior, se tiene:

$$c_{n+1}^{(n)} = \frac{\varphi((x-c)^2 Q_n(x), Q_{n+1}(x))}{\tilde{k}_{n+1}},$$

y por otro lado,

$$\varphi((x-c)^2 Q_n(x), Q_{n+1}(x)) = \varphi(Q_n(x), (x-c)^2 Q_{n+1}(x)).$$

Basta utilizar la expresión (1.4.7), y agrupar convenientemente. Análogamente se deduce el valor de  $c_n^{(n)}$ . Los valores  $c_{n-1}^{(n)}$  y  $c_{n-2}^{(n)}$  se obtienen de forma inmediata.  $\square$

**Lema 1.5.3.-** Recordemos que  $\tilde{k}_j = \varphi(Q_j(x), Q_j(x))$ , y sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i=0,1,\dots,n-2$  y  $i-2 \leq j \leq i+2$ . Se verifica:

$$\frac{c_{n-i}^{(n-j)}}{\tilde{k}_{n-j}} = \frac{c_{n-j}^{(n-i)}}{\tilde{k}_{n-i}}$$

**Demostración.-** De la relación de recurrencia a cinco términos:

$$(x-c)^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x)$$

podemos escribir, para  $i=0,1,\dots,n-2$ :

$$(x-c)^2 Q_{n-i}(x) = Q_{n+2-i}(x) + c_{n+1-i}^{(n-i)} Q_{n+1-i}(x) + c_{n-i}^{(n-i)} Q_{n-i}(x) + \\ + c_{n-1-i}^{(n-i)} Q_{n-1-i}(x) + c_{n-2-i}^{(n-i)} Q_{n-2-i}(x).$$

Si  $j=i+2$ , basta multiplicar la expresión anterior por  $Q_{n-j}(x) = Q_{n-2-i}(x)$ :

$$\varphi((x-c)^2 Q_{n-i}(x), Q_{n-2-i}(x)) = c_{n-2-i}^{(n-i)} \varphi(Q_{n-2-i}(x), Q_{n-2-i}(x)) = c_{n-j}^{(n-i)} \tilde{k}_{n-j}.$$

Pero, por otro lado:

$$\varphi((x-c)^2 Q_{n-i}(x), Q_{n-2-i}(x)) = \varphi((x-c)^2 Q_{n+2-j}(x), Q_{n-j}(x)) = \\ = \varphi(Q_{n+2-j}(x), (x-c)^2 Q_{n-j}(x)) = c_{n+2-i}^{(n-j)} \varphi(Q_{n+2-j}(x), Q_{n+2-j}(x)) = c_{n-i}^{(n-j)} \tilde{k}_{n-i}$$

Si  $j=i+1$ , multiplicamos por  $Q_{n-1-i}(x)$ . Para  $j=i$ , el resultado es evidente. Por último, si  $j=i-1$ , ó  $j=i-2$ , entonces se multiplica por  $Q_{n+1-i}(x)$  ó por  $Q_{n+2-i}(x)$ , respectivamente.  $\square$

**Proposición 1.5.4.-** Se verifica la siguiente fórmula de tipo Christoffel-Darboux:

$$[(x-c)^2 - (y-c)^2] \sum_{j=0}^n \frac{Q_j(x)Q_j(y)}{\tilde{k}_j} = \frac{1}{\tilde{k}_n} [Q_{n+2}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+2}(y)] + \\ + \frac{1}{\tilde{k}_{n-1}} [Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(y) - Q_{n-1}(x)Q_{n+1}(y)] + \frac{c_{n+1}^{(n)}}{\tilde{k}_n} [Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)].$$

**Demostración.-** Escribamos la relación de recurrencia a cinco términos en las variables  $x$  e  $y$ :

$$(x-c)^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x)$$

$$(y-c)^2 Q_n(y) = Q_{n+2}(y) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(y) + c_n^{(n)} Q_n(y) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(y) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(y).$$

Multiplicamos la primera por  $Q_n(y)$ , la segunda por  $Q_n(x)$  y las restamos:

$$\begin{aligned} [(x-c)^2 - (y-c)^2] Q_n(x) Q_n(y) &= [Q_{n+2}(x) Q_n(y) - Q_n(x) Q_{n+2}(y)] + \\ &+ c_{n+1}^{(n)} [Q_{n+1}(x) Q_n(y) - Q_n(x) Q_{n+1}(y)] + c_{n-1}^{(n)} [Q_{n-1}(x) Q_n(y) - Q_n(x) Q_{n-1}(y)] + \\ &+ c_{n-2}^{(n)} [Q_{n-2}(x) Q_n(y) - Q_n(x) Q_{n-2}(y)]. \end{aligned}$$

Basta sumar, teniendo en cuenta el lema anterior.  $\square$

**Proposición 1.5.5.-** (Forma confluyente de la relación de Christoffel-Darboux)

Se verifica:

$$\begin{aligned} 2(x-c) \sum_{j=0}^n \frac{[Q_j(x)]^2}{\tilde{k}_j} &= \frac{1}{\tilde{k}_n} [Q_n(x) Q_{n+2}'(x) - Q_{n+2}(x) Q_n'(x)] + \\ &+ \frac{1}{\tilde{k}_{n-1}} [Q_{n-1}(x) Q_{n+1}'(x) - Q_{n+1}(x) Q_{n-1}'(x)] + \frac{c_{n+1}^{(n)}}{\tilde{k}_n} [Q_n(x) Q_{n+1}'(x) - Q_{n+1}(x) Q_n'(x)]. \end{aligned}$$

## 1.6.- LOS NUCLEOS.

Llamaremos *n-núcleos asociados a la SPOM*  $\{Q_n\}_n$  a los polinomios en las variables  $x$  e  $y$  dados por:

$$L_n(x,y) = \sum_{i=0}^n \frac{Q_i(x) Q_i(y)}{\tilde{k}_i}$$

y notaremos por:

$$L_n^{(r,s)}(x,y) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} L_n(x,y)$$

a las correspondientes derivadas parciales.

**Proposición 1.6.1.-**

$$i) L_n(x,y) = -\frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n & 1 \\ u_1 & u_2 + \lambda & \dots & u_{n+1} & (y-c) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} & (y-c)^n \\ 1 & (x-c) & \dots & (x-c)^n & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{donde } D_n = \det(\nabla'_n) \quad (1.6.1)$$

$$ii) \text{ Si } p(x) \in \mathbb{P}_n, \quad \varphi(L_n(x,y), p(x)) = p(y); \quad \varphi(L_n^{(0,r)}(x,y), p(x)) = p^{(r)}(y) \quad \forall r \quad (1.6.2)$$

$$iii) L_n(x,y) = L_n(y,x). \quad (1.6.3)$$

**Demostración.-** Análoga a la habitual (Szegő [66], i) pag. 377, ii) pag. 40) □

**Proposición 1.6.2.-**

$$L_n(x,y) = K_n(x,y) - \lambda \frac{K_n^{(0,1)}(x,c)K_n^{(0,1)}(y,c)}{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c)}. \quad (1.6.4)$$

**Demostración.-** Podemos considerar  $L_n$  como un polinomio en  $x$  dependiendo de un parámetro  $y$ , entonces:

$$L_n(x,y) = \sum_{j=0}^n A_j^{(n)}(y)P_j(x),$$

donde

$$A_j^{(n)}(y) = \frac{\langle u, L_n(x,y)P_j(x) \rangle}{\langle u, P_j^2 \rangle} = \frac{\varphi(L_n(x,y), P_j(x))}{\langle u, P_j^2 \rangle} - \lambda \frac{L_n^{(1,0)}(c,y)P_j'(c)}{\langle u, P_j^2 \rangle} =$$

$$= \frac{P_j(y)}{\langle u, P_j^2 \rangle} - \lambda \frac{L_n^{(0,1)}(y,c) P_j'(c)}{\langle u, P_j^2 \rangle}$$

en virtud del apartado ii) de la proposición anterior. De esta forma:

$$L_n(x,y) = K_n(x,y) - \lambda L_n^{(0,1)}(y,c) K_n^{(0,1)}(x,c).$$

Derivando esta expresión con respecto a  $x$ , y evaluando para  $x=c$ , se tiene:

$$L_n^{(0,1)}(y,c) [ 1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c) ] = K_n^{(0,1)}(y,c),$$

luego

$$L_n(x,y) = K_n(x,y) - \lambda \frac{K_n^{(0,1)}(x,c) K_n^{(0,1)}(y,c)}{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(c,c)}. \quad \square$$

**Nota.-** La expresión anterior destaca el carácter simétrico de  $L_n(x,y)$ .

Obsérvese que el núcleo  $L_n(x,y)$  puede ser expresado en términos de los polinomios ortogonales  $P_n$  y  $P_{n+1}$ , sin más que sustituir en la expresión (1.6.4) la fórmula de Christoffel-Darboux para el núcleo  $K_n(x,y)$  y la expresión (1.4.5) para las derivadas del núcleo  $K_n^{(0,1)}(x,c)$ . De este modo se obtiene:

$$L_n(x,y) = \frac{1}{k_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} - \frac{\lambda}{\lambda_n k_n} \frac{P_{n+1}(x)T_1(P_n,c)(x) - P_n(x)T_1(P_{n+1},c)(x)}{(x-c)^2} + \frac{P_{n+1}(y)T_1(P_n,c)(y) - P_n(y)T_1(P_{n+1},c)(y)}{(y-c)^2}$$

### 1.7.- RELACION CON LA MODIFICACION POLINOMIAL ASOCIADA A $(x-c)^2$ .

Dado un funcional lineal  $u$  y un polinomio  $p(x)$ , podemos definir un nuevo funcional que notaremos  $p(x)u$ , mediante la relación:

$$\langle p(x)u, q(x) \rangle = \langle u, p(x)q(x) \rangle \quad \forall q(x) \in P$$

al funcional  $p(x)u$  se le denomina *producto a la izquierda del funcional  $u$  por el polinomio  $p(x)$*  (ver Dini y Maroni [24]).

En este apartado, consideraremos los funcionales lineales  $u_1 = (x-c)^2u$  y  $u_2 = (x-c)^4u$ , y trataremos de establecer la relación entre la SPOM  $\{Q_n\}_n$  y las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a dichos funcionales. Previamente establecemos algunos resultados auxiliares.

El primer problema que se plantea es el de la regularidad de estos funcionales.

#### Proposición 1.7.1.-

- i)  $u_1$  es un funcional regular si y sólo si  $K_n(c,c) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- ii)  $u_2$  es regular si y sólo si  $K_n(c,c)K_n^{(1,1)}(c,c) - [K_n^{(0,1)}(c,c)]^2 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.-** Es una consecuencia directa de las fórmulas de Christoffel confluentes para las modificaciones polinomiales asociadas a  $(x-c)^2$  y  $(x-c)^4$  respectivamente. (S. Paszkowski, [60])  $\square$

Dados los funcionales  $u_i = (x-c)^{2i}u$  ( $i=1,2$ ), los cuales supondremos regulares de ahora en adelante, las relaciones entre los polinomios  $\{P_n(x)\}_n$  y las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos asociados a los funcionales  $u_i$  pueden resumirse en el siguiente lema.

**Lema 1.7.2.-** Sean  $\{P_n^{i,c}(x)\}$  las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos con respecto a los funcionales  $u_i = (x-c)^{2i}u$  ( $i=1,2$ ). Entonces:

### 1.7.- RELACION CON LA MODIFICACION POLINOMIAL ASOCIADA A $(x-c)^2$ .

Dado un funcional lineal  $u$  y un polinomio  $p(x)$ , podemos definir un nuevo funcional que notaremos  $p(x)u$ , mediante la relación:

$$\langle p(x)u, q(x) \rangle = \langle u, p(x)q(x) \rangle \quad \forall q(x) \in P$$

al funcional  $p(x)u$  se le denomina *producto a la izquierda del funcional  $u$  por el polinomio  $p(x)$*  (ver Dini y Maroni [24]).

En este apartado, consideraremos los funcionales lineales  $u_1 = (x-c)^2u$  y  $u_2 = (x-c)^4u$ , y trataremos de establecer la relación entre la SPOM  $\{Q_n\}_n$  y las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a dichos funcionales. Previamente establecemos algunos resultados auxiliares.

El primer problema que se plantea es el de la regularidad de estos funcionales.

#### Proposición 1.7.1.-

- i)  $u_1$  es un funcional regular si y sólo si  $K_n(c,c) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- ii)  $u_2$  es regular si y sólo si  $K_n(c,c)K_n^{(1,1)}(c,c) - [K_n^{(0,1)}(c,c)]^2 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.-** Es una consecuencia directa de las fórmulas de Christoffel confluentes para las modificaciones polinomiales asociadas a  $(x-c)^2$  y  $(x-c)^4$  respectivamente. (S. Paszkowski, [60])  $\square$

Dados los funcionales  $u_i = (x-c)^{2i}u$  ( $i=1,2$ ), los cuales supondremos regulares de ahora en adelante, las relaciones entre los polinomios  $\{P_n(x)\}_n$  y las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos asociados a los funcionales  $u_i$  pueden resumirse en el siguiente lema.

**Lema 1.7.2.-** Sean  $\{P_n^{i,c}(x)\}$  las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos con respecto a los funcionales  $u_i = (x-c)^{2i}u$  ( $i=1,2$ ). Entonces:

$$i) \quad (x-c)P_{n-1}^{1,c}(x) = P_n(x) - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}(x,c) \quad (1.7.1)$$

$$ii) \quad P_{n-1}^{1,c}(c) = P_n'(c) - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) \quad (1.7.2)$$

$$iii) \quad (x-c)P_{n-2}^{2,c}(x) = P_{n-1}^{1,c}(x) - \frac{P_{n-1}^{1,c}(c)}{K_{n-2}^{1,c}(c,c)} K_{n-2}^{1,c}(x,c) \quad (1.7.3)$$

$$iv) \quad (x-c)(y-c)K_{n-1}^{1,c}(x,y) = K_n(x,y) - \frac{K_n(x,c)K_n(c,y)}{K_n(c,c)} \quad (1.7.4)$$

$$v) \quad (x-c)K_{n-1}^{1,c}(x,c) = K_n^{(0,1)}(x,c) - \frac{K_n^{(0,1)}(c,c)}{K_n(c,c)} K_n(x,c) \quad (1.7.5)$$

vi) Notemos por  $k_{n-1}^c = \langle u_1, (P_{n-1}^{1,c})^2 \rangle$ , entonces

$$k_{n-1}^c = k_n \frac{K_n(c,c)}{K_{n-1}(c,c)} \quad (1.7.6)$$

$$vii) \quad K_{n-1}(c,c) P_{n-1}^{1,c}(x) = K_{n-1}(c,c) P_n'(c) - K_n^{(0,1)}(x,c) P_n(c) \quad (1.7.7)$$

#### Demostración.-

Para probar la relación (1.7.1) es suficiente utilizar la representación de  $(x-c)P_{n-1}^{1,c}(x)$  en términos de los polinomios  $P_j(x)$  y usar las propiedades de ortogonalidad para  $P_{n-1}^{1,c}(x)$ . (1.7.3) se obtiene de forma análoga considerando ahora los polinomios  $P_{n-2}^{2,c}(x)$  y  $P_j^{1,c}(x)$ .

La fórmula (1.7.2) se obtiene derivando con respecto a  $x$  en (1.7.1) y evaluando en  $x=c$ .

La expresión (1.7.4) se deduce desarrollando  $(x-c)(y-c)K_{n-1}^{1,c}(x,y)$  en términos de los polinomios  $P_j(x)$  y utilizando la propiedad reproductora de los núcleos. Finalmente, basta derivar con respecto a  $y$  en (1.7.4) y evaluar en  $y=c$  para obtener la relación (1.7.5).

La relación (1.7.6) se obtiene a partir de la relación (1.7.1) y de las propiedades de los núcleos:

$$\begin{aligned}
 k_{n-1}^c &= \langle u_1, (P_{n-1}^{1,c})^2 \rangle = \langle u, (x-c)^2 (P_{n-1}^{1,c}(x))^2 \rangle = \\
 &= \langle u, \left[ P_n(x) - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}(x,c) \right]^2 \rangle = \\
 &= \langle u, P_n^2 \rangle + \frac{P_n(c)^2}{K_{n-1}(c,c)^2} \langle u, K_{n-1}(x,c)^2 \rangle = k_n \left[ 1 + \frac{P_n(c)^2}{k_n K_{n-1}(c,c)} \right] = \\
 &= k_n \frac{K_n(c,c)}{K_{n-1}(c,c)}
 \end{aligned}$$

Por último, para obtener la expresión (1.7.7) basta demostrar que el término de la derecha es ortogonal con respecto al funcional  $u_1$  a todo polinomio de grado menor o igual que  $n-2$ , lo cual se deduce de las propiedades reproductoras de los núcleos.  $\square$

El lema anterior permite representar los núcleos  $K_{n-1}(x,c)$  y  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$  en términos de los polinomios  $P_n(x)$ ,  $P_{n-1}^{1,c}(x)$  y  $P_{n-2}^{2,c}(x)$ , considerando estas expresiones se obtiene:

**Proposición 1.7.3.-** Sea  $c$  un punto tal que la condición

$$P_n(c)P_{n-1}^{1,c}(c) \neq 0$$

se verifica para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 Q_n(x) &= \frac{1}{\lambda_{n-1}} \left\{ [1 - \lambda A_n] P_n(x) + \lambda A_n B_n K_{n-1}(c,c) (x-c) P_{n-1}^{1,c}(x) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda B_n K_{n-1}(c,c) K_{n-2}^{1,c}(c,c) (x-c)^2 P_{n-2}^{2,c}(x) \right\}
 \end{aligned}$$

donde

$$A_n = \frac{P'_n(c)}{P_n(c)} K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) - K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) = \frac{(P_{n-1}^{1,c})'(c) K_{n-1}(c,c)}{P_n(c)} \quad (1.7.8)$$

$$B_n = \frac{P'_n(c)}{K_{n-1}(c,c) P'_n(c) - K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) P_n(c)} = \frac{P'_n(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c) K_{n-1}(c,c)} \quad (1.7.9)$$

**Demostración.-** Basta sustituir en la fórmula:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{\lambda P'_n(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

la expresión (1.7.5) para  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ :

$$K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) = (x-c)K_{n-2}^{1,c}(x,c) + \frac{K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}(x,c)$$

Utilizando las relaciones (1.7.1) y (1.7.3) se obtiene que:

$$K_{n-1}(x,c) = \frac{K_{n-1}(c,c)}{P_n(c)} \left[ P_n(x) - (x-c)P_{n-1}^{1,c}(x) \right]$$

$$K_{n-2}^{1,c}(x,c) = \frac{K_{n-2}^{1,c}(c,c)}{P_{n-1}^{1,c}(c)} \left[ P_{n-1}^{1,c}(x) - (x-c)P_{n-2}^{2,c}(x) \right]$$

Sustituyendo ambas expresiones y agrupando coeficientes se obtiene el resultado anunciado. La segunda igualdad de la relación (1.7.8) se deduce derivando en (1.7.7) y evaluando en  $x=c$ . Análogamente, para deducir (1.7.9) se utiliza la relación (1.7.2).  $\square$

**Nota.-** En el caso definido positivo, con soporte en un intervalo  $[a,b]$  la condición  $P_n(c)P_{n-1}^{1,c}(c) \neq 0$  es válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si  $c \notin (a,b)$ .

Una propiedad mucho más interesante, desde el punto de vista de las aplicaciones, puede deducirse si desarrollamos el polinomio  $Q_n(x)$  en términos de los polinomios  $\{P_j^{1,c}(x)\}$ :

**Proposición 1.7.4.-** Para todo  $n \geq 2$  se verifica:

$$Q_n(x) = P_n^{1,c}(x) + a_{n-1}^{(n)} P_{n-1}^{1,c}(x) + a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}^{1,c}(x) \quad (1.7.10)$$

donde:

$$\tilde{a}_{n-2}^{(n)} = \frac{\tilde{k}_n}{k_{n-2}^c} = \frac{\lambda_n K_{n-2}(c,c) k_n}{\lambda_{n-1} K_{n-1}(c,c) k_{n-1}} \neq 0.$$

$$a_{n-1}^{(n)} = (\beta_n - c) + \frac{P_n(c)P_{n+1}(c)}{K_n(c,c) k_n} - \lambda \frac{P_n'(c)P_{n-1}(c)}{\lambda_{n-1} k_{n-1}}$$

**Demostración.-**

Desarrollando  $Q_n(x)$  en términos de  $\{P_j^{1,c}(x)\}$  tendremos:

$$Q_n(x) = P_n^{1,c}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j^{(n)} P_j^{1,c}(x)$$

donde

$$a_j^{(n)} = \frac{\langle u_1, Q_n P_j^{1,c} \rangle}{\langle u_1, (P_j^{1,c})^2 \rangle} \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Puesto que

$$\langle u_1, Q_n P_j^{1,c} \rangle = \langle u, (x-c)^2 Q_n P_j^{1,c} \rangle = \phi(Q_n, (x-c)^2 P_j^{1,c}),$$

de la ortogonalidad de  $Q_n(x)$  se deduce que  $a_j^{(n)} = 0, \forall j < n-2$ .

En cuanto al coeficiente  $a_{n-2}^{(n)}$  tendremos:

$$a_{n-2}^{(n)} = \frac{\langle u_1, Q_n P_{n-2}^{1,c} \rangle}{\langle u_1, (P_{n-2}^{1,c})^2 \rangle} = \frac{\langle u, (x-c)^2 Q_n P_{n-2}^{1,c} \rangle}{\langle u_1, (P_{n-2}^{1,c})^2 \rangle} = \frac{\varphi(Q_n, (x-c)^2 P_{n-2}^{1,c})}{\langle u_1, (P_{n-2}^{1,c})^2 \rangle} = \frac{\tilde{k}_n}{k_{n-2}^c} \neq 0$$

debido a la hipótesis de regularidad para la forma bilineal  $\varphi$ . Por otra parte, usando la relación (1.7.6) se tendrá:

$$a_{n-2}^{(n)} = \frac{\tilde{k}_n}{k_{n-2}^c} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{k_n}{k_{n-2}^c} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{K_{n-2}(c,c)}{K_{n-1}(c,c)} \frac{k_n}{k_{n-1}} \neq 0.$$

Para el cálculo del coeficiente  $a_{n-1}^{(n)}$  consideramos la expresión (1.3.2) para el polinomio  $Q_n(x)$  y la expresión dada por el lema 1.7.2 para el polinomio  $(x-c)P_{n-1}^{1,c}(x)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \langle u_1, Q_n P_{n-1}^{1,c} \rangle &= \langle u, (x-c)^2 Q_n P_{n-1}^{1,c} \rangle = \\ &= \langle u, \left[ P_n(x) - \frac{\lambda P_n'(c)}{\lambda_{n-1}} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) \right] (x-c) \left[ P_{n-1}(x) - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}(x,c) \right] \rangle = \\ &= \langle u, (x-c) P_n(x)^2 \rangle - \frac{\lambda P_n'(c)}{\lambda_{n-1}} \langle u, (x-c) P_n(x) K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) \rangle - \\ &\quad - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} \langle u, (x-c) P_n(x) K_{n-1}(x,c) \rangle + \frac{\lambda P_n'(c) P_n(c)}{\lambda_{n-1} K_{n-1}(c,c)} \langle u, (x-c) K_{n-1}(x,c) K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) \rangle \\ &= \langle u, (x-c) P_n(x)^2 \rangle - \frac{P_n(c) P_{n-1}(c) k_n}{K_{n-1}(c,c) k_{n-1}} - \lambda \frac{P_n'(c) P_{n-1}(c) k_n}{\lambda_{n-1} k_{n-1}} \left[ 1 + \frac{P_n(c)^2}{K_{n-1}(c,c) k_n} \right] \end{aligned}$$

y usando de nuevo la relación (1.7.6), se deduce:

$$a_{n-1}^{(n)} = \frac{\langle u_1, Q_n P_{n-1}^{1,c} \rangle}{\langle u_1, (P_{n-1}^{1,c})^2 \rangle} = \frac{K_{n-1}(c,c)}{K_n(c,c)} (\beta_n - c) - \frac{P_n(c) P_{n-1}(c)}{K_n(c,c) k_{n-1}} - \lambda \frac{P_n'(c) P_{n-1}(c)}{\lambda_{n-1} k_{n-1}} =$$

$$= \left[ 1 - \frac{P_n(c)^2}{K_n(c,c) k_n} \right] (\beta_n - c) - \frac{P_n(c)P_{n-1}(c)}{K_n(c,c) k_{n-1}} - \lambda \frac{P'_n(c)P'_{n-1}(c)}{\lambda_{n-1} k_{n-1}}$$

Finalmente, a partir de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios  $P_n(x)$  en el punto  $c$ , deducimos la expresión para  $a_{n-1}^{(n)}$ .  $\square$

**Nota.-** Como consecuencia de esta proposición los polinomios  $Q_n(x)$  son cuasi-ortogonales de orden 2 con respecto al funcional lineal regular  $u_1$ .

**Corolario 1.7.5.-** Se verifica:

$$Q_n(x) = [x - (\beta_{n-1}^c - a_{n-1}^{(n)})] P_{n-1}^{1,c}(x) - (\gamma_{n-1}^c - a_{n-2}^{(n)}) P_{n-2}^{1,c}(x) \quad (1.7.11)$$

donde  $\beta_{n-1}^c$  y  $\gamma_{n-1}^c$  son los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios  $\{P_j^{1,c}(x)\}$ .

**Demostración.-**

Basta considerar la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios  $\{P_j^{1,c}(x)\}$ :

$$P_n^{1,c}(x) = (x - \beta_{n-1}^c) P_{n-1}^{1,c}(x) - \gamma_{n-1}^c P_{n-2}^{1,c}(x)$$

y sustituir en la expresión de la proposición anterior.  $\square$

**Nota.-** Este corolario muestra que los polinomios  $Q_n(x)$  pueden obtenerse perturbando la relación de recurrencia a tres términos de los polinomios ortogonales con respecto al funcional  $u_1$ .

Recíprocamente, los polinomios  $P_n^{1,c}(x)$  pueden obtenerse a partir de tres polinomios  $Q_i(x)$  consecutivos:

**Proposición 1.7.6.-** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se verifica:

$$(x-c)^2 P_n^{1,c}(x) = Q_{n+2}(x) + b_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + b_n^{(n)} Q_n(x) \quad (1.7.12)$$

donde

$$b_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1} K_{n+1}(c,c)}{\lambda_{n+1} K_{n-1}(c,c)} a_{n-1}^{(n+1)} \neq 0$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{\lambda_n K_{n+1}(c,c)}{\lambda_{n+1} K_n(c,c)} a_n^{(n+1)}$$

**Demostración.-**

Desarrollemos el polinomio  $(x-c)^2 P_n^{1,c}(x)$  en términos de los polinomios  $\{Q_i(x)\}$ :

$$(x-c)^2 P_n^{1,c}(x) = Q_{n+2}(x) + \sum_{i=0}^{n+1} b_i^{(n)} Q_i(x)$$

De la ortogonalidad de los  $\{Q_i(x)\}$  se deduce que:

$$b_i^{(n)} = \frac{\varphi(Q_i, (x-c)^2 P_n^{1,c})}{\varphi(Q_i, Q_i)} \quad i = 0, \dots, n+1$$

Ahora bien:

$$\varphi(Q_i, (x-c)^2 P_n^{1,c}) = \langle u, Q_i (x-c)^2 P_n^{1,c} \rangle = \langle u_1, Q_i P_n^{1,c} \rangle = 0 \quad i = 0, \dots, n-1$$

y así  $(x-c)^2 P_n^{1,c}(x)$  sólo depende de los polinomios  $Q_{n+2}(x)$ ,  $Q_{n+1}(x)$  y  $Q_n(x)$ .

El coeficiente  $b_n^{(n)}$  se obtiene de:

$$b_n^{(n)} = \frac{\varphi(Q_n, (x-c)^2 P_n^{1,c})}{\varphi(Q_n, Q_n)} = \frac{\langle u_1, Q_n P_n^{1,c} \rangle}{\varphi(Q_n, Q_n)} = \frac{k_n^c}{\tilde{k}_n} = \frac{\lambda_{n-1} K_{n+1}(c,c) k_{n+1}}{\lambda_n K_n(c,c) k_n}$$

sin más que utilizar la relación (1.7.6), e identificando adecuadamente los

factores se tiene:

$$b_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1} K_{n+1}(c,c)}{\lambda_{n+1} K_{n-1}(c,c)} a_{n-1}^{(n+1)} \neq 0$$

Para el coeficiente  $b_{n+1}^{(n)}$ , se tiene:

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{\varphi(Q_{n+1}, (x-c)^2 P_n^{1,c})}{\varphi(Q_{n+1}, Q_{n+1})} = \frac{\langle u_1, Q_{n+1} P_n^{1,c} \rangle}{\varphi(Q_{n+1}, Q_{n+1})} = a_n^{(n+1)} \frac{k_n^c}{\tilde{k}_{n+1}}$$

y utilizando de nuevo la expresión (1.7.6), después de operar convenientemente se obtiene la expresión anunciada.  $\square$

A partir de estos resultados podemos deducir de una forma distinta los coeficientes de la relación de recurrencia a cinco términos verificada por los polinomios  $\{Q_n(x)\}$ :

**Teorema 1.7.7.-** *La sucesión de polinomios ortogonales  $\{Q_n\}_n$  verifica la relación de recurrencia a cinco términos:*

$$(x-c)^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x)$$

donde para  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} c_{n+1}^{(n)} &= b_{n+1}^{(n)} + a_{n-1}^{(n)} \\ c_n^{(n)} &= b_n^{(n)} + a_{n-1}^{(n)} b_n^{(n-1)} + a_{n-2}^{(n)} \\ c_{n-1}^{(n)} &= a_{n-1}^{(n)} b_{n-1}^{(n-1)} + a_{n-2}^{(n)} b_{n-1}^{(n-2)} \\ c_{n-2}^{(n)} &= a_{n-2}^{(n)} b_{n-2}^{(n-2)} \end{aligned} \tag{1.7.13}$$

**Demostración.-** De la proposición 1.7.4 se deduce:

$$(x-c)^2 Q_n(x) = (x-c)^2 P_n^{1,c}(x) + a_{n-1}^{(n)} (x-c)^2 P_{n-1}^{1,c}(x) + (x-c)^2 a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}^{1,c}(x).$$

Sustituyendo la relación:

$$(x-c)^2 P_i^{1,c}(x) = Q_{i+2}(x) + b_{i+1}^{(i)} Q_{i+1}(x) + b_i^{(i)} Q_i(x)$$

para  $i = n, n-1, n-2$ , obtendremos:

$$\begin{aligned} (x-c)^2 Q_n(x) &= Q_{n+2}(x) + (b_{n+1}^{(n)} + a_{n-1}^{(n)}) Q_{n+1}(x) + \\ &+ (b_n^{(n)} + a_{n-1}^{(n)} b_n^{(n-1)} + a_{n-2}^{(n)}) Q_n(x) + \\ &+ (a_{n-1}^{(n)} b_{n-1}^{(n-1)} + a_{n-2}^{(n)} b_{n-1}^{(n-2)}) Q_{n-1}(x) + \\ &+ a_{n-2}^{(n)} b_{n-2}^{(n-2)} Q_{n-2}(x) \end{aligned}$$

y el resultado es evidente sin más que identificar los coeficientes.  $\square$

Utilizando un razonamiento similar al empleado en el resultado anterior, podemos probar que los coeficientes de las relaciones (1.7.10) y (1.7.12) se pueden calcular de una forma recursiva a partir de los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios  $\{P_n^{1,c}(x)\}$ .

**Teorema 1.7.8.-** *Los coeficientes de las relaciones (1.7.10) y (1.7.12) verifican:*

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{(n+2)} + b_{n+1}^{(n)} &= \beta_{n+1}^c + \beta_n^c - 2c \\ a_n^{(n+2)} + b_{n+1}^{(n)} a_n^{(n+1)} + b_n^{(n)} &= \gamma_{n+1}^c + (\beta_n^c - c)^2 + \gamma_n^c \\ b_{n+1}^{(n)} a_{n-1}^{(n+1)} + b_n^{(n)} a_{n-1}^{(n)} &= \gamma_n^c (\beta_n^c + \beta_{n-1}^c - 2c) \\ b_n^{(n)} a_{n-2}^{(n)} &= \gamma_n^c \gamma_{n-1}^c \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

**Demostración.-** Sustituyendo en la relación:

$$(x-c)^2 P_n^{1,c}(x) = Q_{n+2}(x) + b_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + b_n^{(n)} Q_n(x)$$

las expresiones de  $Q_i(x)$  para  $i=n, n+1, n+2$  se obtiene:

$$\begin{aligned} (x-c)^2 P_n^{1,c}(x) &= P_{n+2}^{1,c}(x) + (a_{n+1}^{(n+2)} + b_{n+1}^{(n)}) P_{n+1}^{1,c}(x) + \\ &+ (a_n^{(n+2)} + b_{n+1}^{(n)} a_n^{(n+1)} + b_n^{(n)}) P_n^{1,c}(x) + \\ &+ (b_{n+1}^{(n)} a_{n-1}^{(n+1)} + b_n^{(n)} a_{n-1}^{(n)}) P_{n-1}^{1,c}(x) + \\ &+ b_n^{(n)} a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}^{1,c}(x) \end{aligned}$$

Por otra parte, si escribimos la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios  $P_n^{1,c}(x)$ , en la forma:

$$(x-c)P_n^{1,c}(x) = P_{n+1}^{1,c}(x) + (\beta_n^c - c)P_n^{1,c}(x) + \gamma_n^c P_{n-1}^{1,c}(x)$$

tendremos:

$$\begin{aligned} (x-c)^2 P_n^{1,c}(x) &= (x-c) \left[ P_{n+1}^{1,c}(x) + (\beta_n^c - c)P_n^{1,c}(x) + \gamma_n^c P_{n-1}^{1,c}(x) \right] = \\ &= P_{n+2}^{1,c}(x) + (\beta_{n+1}^c + \beta_n^c - 2c) P_{n+1}^{1,c}(x) + \\ &+ (\gamma_{n+1}^c + (\beta_n^c - c)^2 + \gamma_n^c) P_n^{1,c}(x) + \\ &+ (\gamma_n^c (\beta_n^c + \beta_{n-1}^c - 2c)) P_{n-1}^{1,c}(x) + \\ &+ \gamma_n^c \gamma_{n-1}^c P_{n-2}^{1,c}(x) \end{aligned}$$

y el resultado es evidente sin más que identificar los coeficientes.  $\square$

**Nota.-** Los resultados precedentes constituyen la base de un algoritmo recursivo para el cálculo de los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$ , a partir de los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales  $\{P_n^{1,c}(x)\}_n$ . Nótese que las ecuaciones (1.7.14) permiten calcular los coeficientes  $b_n^{(n)}$ ,  $b_{n+1}^{(n)}$ ,  $a_n^{(n+2)}$  y  $a_{n+1}^{(n+2)}$  a partir de  $a_{n-2}^{(n)}$ ,  $a_{n-1}^{(n)}$ ,  $a_{n-1}^{(n+1)}$  y  $a_n^{(n+1)}$ , para todo  $n \geq 2$ ; para ello basta despejar y obtendríamos:

$$b_n^{(n)} = \frac{1}{a_{n-2}^{(n)}} \gamma_n^c \gamma_{n-1}^c$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{a_{n-1}^{(n+1)}} [\gamma_n^c (\beta_{n+1}^c + \beta_n^c - 2c) - b_n^{(n)} a_{n-1}^{(n)}] \quad (1.7.15)$$

$$a_n^{(n+2)} = \gamma_{n+1}^c + (\beta_n^c - c)^2 + \gamma_n^c - b_{n+1}^{(n)} a_n^{(n+1)} - b_n^{(n)}$$

$$a_{n+1}^{(n+2)} = \beta_{n+1}^c + \beta_n^c - 2c - b_{n+1}^{(n)}$$

De este modo, basta dar las condiciones iniciales apropiadas para poder generar recursivamente los coeficientes.

Si escribimos:

$$Q_1(x) = P_1^{1,c}(x) + a_0^{(1)} P_0^{1,c}(x)$$

un razonamiento idéntico al del teorema 1.7.8 demuestra que se verifican las relaciones

$$(x-c)^2 P_0^{1,c}(x) = P_2^{1,c}(x) + (a_1^{(2)} + b_1^{(0)}) P_1^{1,c}(x) + (a_0^{(2)} + b_1^{(0)} a_0^{(1)} + b_0^{(0)}) P_0^{1,c}(x)$$

$$(x-c)^2 P_1^{1,c}(x) = P_3^{1,c}(x) + (a_2^{(3)} + b_2^{(1)}) P_2^{1,c}(x) + (a_1^{(3)} + b_2^{(1)} a_1^{(2)} + b_1^{(1)}) P_1^{1,c}(x) + (b_2^{(1)} a_0^{(2)} + b_1^{(1)} a_0^{(1)}) P_0^{1,c}(x)$$

y por tanto se tendrá:

$$a_1^{(2)} + b_1^{(0)} = \beta_1^c + \beta_0^c - 2c$$

$$a_0^{(2)} + b_1^{(0)} a_0^{(1)} + b_0^{(0)} = \gamma_1^c + (\beta_0^c - c)^2$$

así como:

$$a_2^{(3)} + b_2^{(1)} = \beta_2^c + \beta_1^c - 2c$$

$$a_1^{(3)} + b_2^{(1)} a_1^{(2)} + b_1^{(1)} = \gamma_2^c + (\beta_1^c - c)^2 + \gamma_1^c$$

$$b_2^{(1)} a_0^{(2)} + b_1^{(1)} a_0^{(1)} = \gamma_1^c (\beta_2^c + \beta_1^c - 2c)$$

Por lo tanto, estas ecuaciones nos permitirían calcular todos los coeficientes, si partimos de  $a_0^{(1)}$ ,  $b_0^{(0)}$  y  $b_1^{(0)}$ , los cuales se calculan mediante las expresiones:

$$a_0^{(1)} = (\beta_1 - c) + \frac{P_1(c) P_2(c)}{K_1(c,c) k_1}$$

$$b_0^{(0)} = \frac{k_0^c}{k_0}$$

$$b_1^{(0)} = a_0^{(1)} \frac{k_0^c}{k_1}$$

### 1.8.- UNA RELACION DE RECURRENCIA A TRES TERMINOS CON COEFICIENTES POLINOMIALES.

Deduciremos en este apartado una relación de recurrencia a tres términos para la SPOM asociada a  $\varphi$ . Esta posee coeficientes polinómicos, a diferencia de la relación de recurrencia de los polinomios ortogonales estándar. Antes de establecer dicha relación necesitamos algunos resultados previos. Primero, veamos que entre los  $\{Q_n\}_n$  y los  $\{P_n^{1,c}\}_n$  existen relaciones análogas a las relaciones de Christoffel establecidas entre los  $\{P_n\}_n$  y los  $\{P_n^{1,c}(x)\}_n$ .

Lema 1.8.1.-

$$i) P_{n-1}^{1,c}(x) = \tilde{k}_{n-1} \frac{\begin{vmatrix} L_{n-1}(x,c) & Q_n(c) \\ L_{n-1}^{(0,1)}(x,c) & Q_n'(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q_{n-1}'(c) & Q_n'(c) \end{vmatrix}}$$

$$ii) (x-c)^2 P_{n-1}^{1,c}(x) = \frac{\begin{vmatrix} Q_{n-1}(x) & Q_n(x) & Q_{n+1}(x) \\ Q_{n-1}(c) & Q_n(c) & Q_{n+1}(c) \\ Q_{n-1}'(c) & Q_n'(c) & Q_{n+1}'(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q_{n-1}'(c) & Q_n'(c) \end{vmatrix}}$$

**Demostración.-**

i) El cociente de la derecha, que denotaremos  $A_{n-1}(x)$ , es un polinomio mónico de grado  $n-1$ . Dado un polinomio  $p(x) \in \mathcal{P}_{n-2}$ , considerando la expresión de  $(x-c)^2 p(x)$  en términos de la familia  $\{Q_n\}_n$

$$(x-c)^2 p(x) = \sum_{k=0}^n a_k Q_k(x)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi((x-c)^2 p(x), A_{n-1}(x)) &= \frac{\tilde{k}_{n-1}}{\begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q_{n-1}'(c) & Q_n'(c) \end{vmatrix}} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \begin{vmatrix} \varphi(Q_k(x), L_{n-1}(x,c)) & Q_n(c) \\ \varphi(Q_k(x), L_{n-1}^{(0,1)}(x,c)) & Q_n'(c) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\tilde{k}_{n-1}}{\begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q_{n-1}'(c) & Q_n'(c) \end{vmatrix}} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \begin{vmatrix} Q_k(c) & Q_n(c) \\ Q_k'(c) & Q_n'(c) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

debido a las propiedades reproductoras de los núcleos y a que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k Q_k(c) = -a_n Q_n(c) \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q'_k(c) = -a_n Q'_n(c)$$

y por tanto  $A_{n-1}(x) = P_{n-1}^{1,c}(x)$ , debido a que (1.8.1) equivale a

$$\langle u_1, p(x) A_{n-1}(x) \rangle = 0$$

ii) Basta utilizar un razonamiento clásico: el miembro de la derecha es un polinomio de grado  $n+1$ , mónico, con un cero doble en  $c$ , y por ser una combinación lineal de  $Q_{n-1}(x)$ ,  $Q_n(x)$  y  $Q_{n+1}(x)$ , es ortogonal a  $\mathbb{P}_{n-2}$  con respecto a  $\varphi$ . Así, será de la forma  $(x-c)^2 B_{n-1}(x)$ , con  $B_{n-1}(x)$  mónico y verificando:

$$\varphi((x-c)^2 B_{n-1}(x), p(x)) = 0, \quad \text{para todo } p \in \mathbb{P}_{n-2} \quad (1.8.2)$$

esto es,  $B_{n-1}(x) = P_{n-1}^{1,c}(x)$ , puesto que (1.8.2) es equivalente a

$$\langle u_1, p(x) B_{n-1}(x) \rangle = 0. \quad \square$$

**Nota.-** La propiedad expresada en la parte ii) del lema anterior es sólo una forma distinta de expresar la proposición 1.7.6. Además, como consecuencia de este resultado, de la fórmula confluyente de Christoffel y de la proposición 1.4.1 se obtiene la siguiente relación en términos de determinantes:

$$\begin{vmatrix} P_{n-1}(x) & P_n(x) & P_{n+1}(x) \\ P_{n-1}(c) & P_n(c) & P_{n+1}(c) \\ P'_{n-1}(c) & P'_n(c) & P'_{n+1}(c) \end{vmatrix} = \lambda_{n-2} \begin{vmatrix} Q_{n-1}(x) & Q_n(x) & Q_{n+1}(x) \\ Q_{n-1}(c) & Q_n(c) & Q_{n+1}(c) \\ Q'_{n-1}(c) & Q'_n(c) & Q'_{n+1}(c) \end{vmatrix}$$

relación en la misma línea de la obtenida en la proposición 1.4.1.

**Lema 1.8.2.-** Se verifica:

$$Q_{n+1}(x) = (x-c-B_n)Q_n(x) - C_n Q_{n-1}(x) + D_n P_{n-1}^{1,c}(x) \quad (1.8.3)$$

$$Q_1(x)=0, Q_1(x)=1$$

donde

$$B_n = \frac{\varphi((x-c)Q_n(x), Q_n(x))}{\tilde{k}_n}, \quad C_n = \frac{\tilde{k}_n}{\tilde{k}_{n-1}}, \quad D_n = \frac{\lambda K_{n-1}(c, c)}{\lambda_{n-1}}$$

**Demostración.-**

Escribamos:

$$(x-c)Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^n a_{n,i} Q_i(x)$$

entonces, los coeficientes  $a_i$  son

$$a_{n,i} = \frac{\varphi((x-c)Q_n(x), Q_i(x))}{\tilde{k}_i}, \quad 0 \leq i \leq n$$

esto es:

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{\varphi((x-c)Q_n(x), Q_n(x))}{\tilde{k}_n} \\ a_{n,n-1} &= \frac{\varphi((x-c)Q_n(x), Q_{n-1}(x))}{\tilde{k}_{n-1}} = \\ &= \frac{\varphi(Q_n(x), (x-c)Q_{n-1}(x)) - \lambda [Q_n'(c)Q_{n-1}(c) - Q_n(c)Q_{n-1}'(c)]}{\tilde{k}_{n-1}} = \\ &= \frac{\tilde{k}_n}{\tilde{k}_{n-1}} - \lambda \frac{Q_n'(c)Q_{n-1}(c) - Q_n(c)Q_{n-1}'(c)}{\tilde{k}_{n-1}} \\ a_{n,i} &= -\lambda \frac{Q_n'(c)Q_i(c) - Q_n(c)Q_i'(c)}{\tilde{k}_i}, \quad 0 \leq i \leq n-2 \end{aligned}$$

Notemos por

$$B_n = \frac{\varphi((x-c)Q_n(x), Q_n(x))}{\tilde{k}_n}, \quad C_n = \frac{\tilde{k}_n}{\tilde{k}_{n-1}}$$

y de esta forma:

$$(x-c)Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x) - \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Q_n'(c)Q_i(c) - Q_n(c)Q_i'(c)}{\tilde{k}_i} Q_i(x)$$

de donde

$$Q_{n+1}(x) = (x-c-B_n)Q_n(x) - C_n Q_{n-1}(x) + \lambda [Q_n'(c)L_{n-1}(x,c) - Q_n(c)L_{n-1}^{(0,1)}(x,c)] \quad (1.8.4)$$

por el lema 1.8.1, se llega a:

$$Q_{n+1}(x) = (x-c-B_n)Q_n(x) - C_n Q_{n-1}(x) + \frac{\lambda}{\tilde{k}_{n-1}} \begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q_{n-1}'(c) & Q_n'(c) \end{vmatrix} P_{n-1}^{1,c}(x).$$

Finalmente de la proposición 1.4.1 y de la forma confluyente de la relación de Christoffel-Darboux se deduce:

$$\begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q_{n-1}'(c) & Q_n'(c) \end{vmatrix} = \frac{k_{n-1} K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-2}} = \frac{\tilde{k}_{n-1} K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}}$$

con lo cual se obtiene el resultado buscado.  $\square$

**Proposición 1.8.3.-**(Relación de Recurrencia a Tres Términos)

Los polinomios  $\{Q_n\}_n$  verifican la siguiente relación de recurrencia a tres términos con coeficientes polinomiales:

$$[(x-c)^2 - \lambda H_n]Q_{n+1}(x) = [(x-c)^2(x-c-B_n) + \lambda G_n]Q_n(x) - [C_n(x-c)^2 - \lambda F_n]Q_{n-1}(x) \quad (1.8.5)$$

$$Q_{-1}(x)=0, \quad Q_1(x)=1$$

donde

$$F_n = \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1} b_{n-1}^{(n-1)}, \quad G_n = \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1} b_n^{(n-1)}, \quad H_n = \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1}.$$

**Demostración.-** Del lema 1.8.1, se puede deducir que

$$\begin{aligned} (x-c)^2 \tilde{k}_{n-1} [Q'_n(c)L_{n-1}(x,c) - Q_n(c)L_{n-1}^{(0,1)}(x,c)] &= \begin{vmatrix} Q_{n-1}(x) & Q_n(x) & Q_{n+1}(x) \\ Q_{n-1}(c) & Q_n(c) & Q_{n+1}(c) \\ Q'_{n-1}(c) & Q'_n(c) & Q'_{n+1}(c) \end{vmatrix} = \\ &= F_n Q_{n-1}(x) + G_n Q_n(x) + H_n Q_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

Expresaremos los coeficientes  $F_n$ ,  $G_n$  y  $H_n$  en términos de  $Q_{n-1}(x)$  y  $Q_n(x)$ . Para ello basta multiplicar adecuadamente la expresión anterior, haciendo uso de nuevo del lema 1.8.1:

$$\begin{aligned} F_n \tilde{k}_{n-1} &= \varphi((x-c)^2 \tilde{k}_{n-1} [Q'_n(c)L_{n-1}(x,c) - Q_n(c)L_{n-1}^{(0,1)}(x,c)], Q_{n-1}(x)) = \\ &= \begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q'_{n-1}(c) & Q'_n(c) \end{vmatrix} \varphi((x-c)^2 P_{n-1}^{1,c}(x), Q_{n-1}(x)) = \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1} k_{n-1}^c = \\ &= \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1} b_{n-1}^{(n-1)} \tilde{k}_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n \tilde{k}_n &= \varphi((x-c)^2 \tilde{k}_{n-1} [Q'_n(c)L_{n-1}(x,c) - Q_n(c)L_{n-1}^{(0,1)}(x,c)], Q_n(x)) = \\ &= \begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q'_{n-1}(c) & Q'_n(c) \end{vmatrix} \varphi((x-c)^2 P_{n-1}^{1,c}(x), Q_n(x)) = \\ &= \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1} \varphi((x-c)^2 P_{n-1}^{1,c}(x), Q_n(x)) = \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1} b_n^{(n-1)} \tilde{k}_n \end{aligned}$$

$$H_n = \begin{vmatrix} Q_{n-1}(c) & Q_n(c) \\ Q'_{n-1}(c) & Q'_n(c) \end{vmatrix} = \frac{K_{n-1}(c,c)}{\lambda_{n-1}} k_{n-1}$$

Por último, se multiplica por  $(x-c)^2$  en la relación (1.8.4) y se sustituyen estas expresiones, obteniéndose de este modo la relación.  $\square$

## CAPITULO 2

### Casos Simétricos

- 2.1 Introducción.
- 2.2 Funcionales simétricos.
- 2.3 Una masa en el origen.
- 2.4 Dos masas situadas en puntos simétricos.

## 2.1 INTRODUCCION.

En este capítulo, consideraremos funcionales lineales regulares y simétricos, esto es, funcionales lineales tales que todos los momentos de orden impar son nulos. En este caso particular, es bien conocido que la SPOM  $\{P_n(x)\}_n$  asociada al funcional simétrico  $u$  verifica que los polinomios de grado par son funciones pares y los polinomios de grado impar son funciones impares. Así, podremos escribir:

$$P_{2n}(x) = S_n(x^2), \quad P_{2n+1}(x) = xS_n^*(x^2) \quad (2.1.1)$$

donde  $\{S_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada al funcional lineal  $v$ , definido a partir de los momentos de orden par de  $u$  y los  $S_n^*(x)$  son los núcleos mónicos asociados a  $\{S_n(x)\}_n$  evaluados en  $(x,0)$ . De este modo las propiedades de la SPOM  $\{P_n(x)\}_n$  son deducibles de las propiedades de la SPOM  $\{S_n(x)\}_n$ . En el segundo apartado de este capítulo, resaltaremos algunas de estas propiedades y estableceremos las notaciones que serán utilizadas en las siguientes secciones.

A continuación, consideraremos la forma bilineal:

$$\varphi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda f'(0) g'(0) \quad (2.1.2)$$

definida a partir de un funcional simétrico  $u$ . Daremos una condición necesaria y suficiente bajo la cual  $\varphi$  es no degenerada, y así, podremos construir la SPOM  $\{Q_n(x)\}_n$  asociada a  $\varphi$ . De la simetría de  $u$  se deduce que

$$Q_{2n}(x) = S_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xR_n(x^2) \quad (2.1.3)$$

donde  $\{S_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a  $v$  y  $\{R_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada al funcional  $xv + \lambda\delta_0$ . Así los polinomios ortogonales tipo Sobolev asociados a  $\varphi$  se construyen a partir de dos sucesiones de polinomios ortogonales estándar, y la condición de no degenerada para la forma  $\varphi$  es equivalente a la regularidad de los funcionales  $v$  y  $xv + \lambda\delta_0$ . De nuevo, como consecuencia de la simetría, veremos que las relaciones de recurrencia adquieren una estructura particularmente simple. Estos resultados, en el caso definido positivo, han sido estudiados por Alfaro y otros ([2]).

En el apartado cuarto, dado un funcional  $u$  regular y simétrico, consideramos la forma bilineal y simétrica definida por:

$$\psi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda[f'(c)g'(c) + f'(-c)g'(-c)]. \quad (2.1.4)$$

Sea  $\{Q_n(x)\}_n$  la SPOM asociada a  $\psi$ . Igual que en el anterior apartado, daremos una condición necesaria y suficiente para que  $\psi$  sea no degenerada y así, podremos construir la SPOM  $\{Q_n(x)\}_n$  asociada a  $\psi$ . De nuevo, por la simetría de  $u$  se deduce que los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  pueden escribirse en la forma:

$$Q_{2n}(x) = U_n(x^2), \quad Q_{2n+1}(x) = xV_n(x^2) \quad (2.1.5)$$

pero en esta ocasión,  $\{U_n(x)\}_n$  y  $\{V_n(x)\}_n$  constituyen SPOM asociadas a modificaciones tipo Sobolev de los funcionales  $v$  y  $xv$ , respectivamente.

De la estructura de la forma bilineal  $\psi$ , deducimos fácilmente que el operador de multiplicación por el polinomio  $(x^2 - c^2)^2$  es autoadjunto para  $\psi$ . De esta forma los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  verifican una relación de recurrencia a nueve términos, la cual, escrita separadamente para los términos pares e impares, puede ser identificada con las relaciones de recurrencia a cinco términos verificadas por los polinomios  $\{U_n(x)\}_n$  y  $\{V_n(x)\}_n$ .

La anterior relación de recurrencia no es minimal en el número de términos debido a que la multiplicación por el polinomio  $x^3 - 3c^2x$  constituye también un operador autoadjunto para la forma  $\psi$ . Así, podemos encontrar una relación de recurrencia a siete términos para los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$ . Identificando los términos de la misma paridad en esta última relación, obtendremos expresiones para los polinomios  $\{U_n(x)\}_n$  en función de los  $\{V_n(x)\}_n$ , y viceversa.

El estudio de tales formas bilineales, en el caso definido positivo, fue introducido por Bavinck y Meijer ([7] y [8]) para el funcional asociado a los polinomios de Gegenbauer y  $c=1$ . En estos trabajos el carácter

hipergeométrico de los polinomios de Gegenbauer constituye un elemento esencial para la determinación de las propiedades de los polinomios de tipo Sobolev. En un trabajo posterior ([9]) los mismos autores generalizan los resultados para funciones peso simétricas en el intervalo  $[-1,1]$  y masas puntuales situadas en los extremos del intervalo. Recientemente, Alfaro y otros ([2]) han estudiado el mismo problema pero sin restricciones acerca del intervalo y la posición de las masas puntuales.

## 2.2 FUNCIONALES SIMÉTRICOS.

Un funcional lineal  $u$  se dice *simétrico* si todos sus momentos de orden impar son cero. Esto es, se verifica:

$$\langle u, x^{2n+1} \rangle = 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.2.1)$$

Dado un funcional lineal regular  $u$ , es bien conocido (ver Chihara [20] pag. 21) que el funcional es simétrico si y sólo si los polinomios ortogonales mónicos asociados a  $u$  verifican

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.2)$$

De este modo, puede escribirse:

$$P_{2n}(x) = S_n(x^2), \quad P_{2n+1}(x) = xT_n(x^2). \quad (2.2.3)$$

Si definimos un funcional lineal  $v$  mediante las relaciones:

$$\langle v, x^n \rangle = \langle u, x^{2n} \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.2.4)$$

entonces se verifica que (Chihara [20], pag. 41) el funcional  $u$  es regular si y sólo si son regulares los funcionales  $v$  y  $xv$ , y en este caso, dadas las sucesiones de polinomios mónicos  $\{P_n(x)\}_n$ ,  $\{S_n(x)\}_n$  y  $\{T_n(x)\}_n$ , relacionadas mediante las condiciones (2.2.3),  $\{P_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a  $u$  si y solo si  $\{S_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a  $v$  y  $\{T_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a  $xv$ .

En estas condiciones, es evidente que

$$T_n(x) = S_n^*(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.2.5)$$

esto es,  $T_n(x)$  es el núcleo mónico asociado a la SPOM  $\{S_n(x)\}_n$ , evaluado en el punto  $(x,0)$ . En consecuencia, de las relaciones (2.2.3) y (2.2.4), se deduce

$$\begin{aligned} \langle u, P_{2n}^2(x) \rangle &= \langle v, S_n^2(x) \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \langle u, P_{2n+1}^2(x) \rangle &= \langle xv, (S_n^*)^2(x) \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Por tanto, si notamos por  $K_n(x,y)$ ,  $k_n(x,y)$  y  $k_n^*(x,y)$  a los núcleos asociados a las sucesiones  $\{P_n(x)\}_n$ ,  $\{S_n(x)\}_n$  y  $\{S_n^*(x)\}_n$ , respectivamente, de la simetría se deduce que:

$$\begin{aligned} K_{2n}(x,y) &= k_n(x^2, y^2) + xy k_{n-1}^*(x^2, y^2) \\ K_{2n+1}(x,y) &= k_n(x^2, y^2) + xy k_n^*(x^2, y^2). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

La condición (2.2.2) implica que:

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P'_{2n}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.2.8)$$

y de la regularidad del funcional  $xv$  se obtiene

$$S_n(0) = P_{2n}(0) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.9)$$

Por tanto, para los núcleos se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} K_{2n}(x,0) &= K_{2n+1}(x,0) = k_n(x^2,0) \\ K_{2n-1}^{(0,1)}(x,0) &= K_{2n}^{(0,1)}(x,0) = xk_{n-1}^*(x^2,0) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

y en consecuencia:

$$K_{2n-1}^{(1,1)}(0,0) = K_{2n}^{(1,1)}(0,0) = k_{n-1}^*(0,0). \quad (2.2.11)$$

### 2.3 UNA MASA EN EL ORIGEN.

Sea  $u$  un funcional regular y simétrico sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales  $\mathbb{P}$ , consideremos la forma bilineal y simétrica definida por:

$$\varphi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda f'(0)g'(0) \quad (2.3.1)$$

Como consecuencia inmediata del teorema 1.3.1 y de la relación (2.2.11) deducimos una condición necesaria y suficiente para que la forma  $\varphi$  sea no degenerada:

**Teorema 2.3.1.-** *Condición necesaria y suficiente para que exista la SPOM con respecto a  $\varphi$  es que:*

$$1 + \lambda k_{n-1}^*(0,0) \neq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (2.3.2)$$

en cuyo caso, si notamos por  $\{Q_n(x)\}_n$  a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a la forma bilineal (2.3.1), se tiene:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{\lambda P_n'(0)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(0,0)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,0) \quad (2.3.3)$$

A partir de esta representación deducimos las siguientes propiedades para los polinomios  $Q_n(x)$ :

**Corolario 2.3.2.-**

- i)  $Q_{2n}(x) = P_{2n}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- ii)  $Q_n(-x) = (-1)^n Q_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
- iii)  $Q_n(0) = P_n(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

**Demostración.-**

i) Es trivial, pues  $P'_{2n}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

ii) Claramente, para  $n$  par se tiene  $Q_{2n}(x) = P_{2n}(x), \forall n \in \mathbb{N}$ .

Para  $n$  impar, usando las anteriores expresiones de los núcleos, se tiene:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{\lambda P'_n(0)}{1 + \lambda K_{n-2}^{(1,1)}(0,0)} K_{n-2}^{(0,1)}(x,0)$$

y el resultado se obtiene teniendo en cuenta que tanto  $P_n(x)$  como  $K_{n-2}^{(0,1)}(x,0)$  son funciones impares.

iii) Es suficiente evaluar la expresión de  $Q_n(x)$ .  $\square$

A partir de este corolario, podemos escribir:

$$Q_{2m}(x) = S_m(x^2), \quad Q_{2m+1}(x) = xR_m(x^2), \quad (2.3.4)$$

donde  $S_m(x)$  es el polinomio ortogonal mónico de grado  $m$  con respecto al funcional  $v$  y los  $R_m(x)$  son polinomios mónicos de grado  $m$ .

Puesto que obviamente  $Q'_{2m+1}(0) = R_m(0)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle xv, R_n(x)R_m(x) \rangle + \lambda R_n(0)R_m(0) &= \langle v, xR_n(x)R_m(x) \rangle + \lambda R_n(0)R_m(0) = \\ &= \langle u, x^2 R_n(x^2)R_m(x^2) \rangle + \lambda R_n(0)R_m(0) = \\ &= \langle u, Q_{2n+1}(x)Q_{2m+1}(x) \rangle + \lambda Q'_{2n+1}(0)Q'_{2m+1}(0) = \\ &= \varphi(Q_{2n+1}(x), Q_{2m+1}(x)) \end{aligned}$$

lo cual prueba que  $\{R_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a la forma lineal  $xv + \lambda\delta_0$ . Nótese que dicha forma lineal es regular si y sólo si se verifica la condición (2.3.2).

Estudiemos ahora el problema recíproco. Consideremos un funcional  $v$ , tal que  $v$  y  $xv$  sean regulares. A partir de  $v$  podemos construir un funcional simétrico  $u$  en la forma:

$$\langle u, x^{2m} \rangle = \langle v, x^m \rangle, \quad \langle u, x^{2m+1} \rangle = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.3.5)$$

Supuesto que la forma lineal  $xv + \lambda\delta_0$  es regular, definimos  $\varphi$  como la forma bilineal dada por la expresión:

$$\varphi(p, q) = \langle u, pq \rangle + \lambda p'(0)q'(0).$$

Notaremos por  $\{P_n(x)\}_n$  la SPOM respecto a  $u$ ,  $\{S_n(x)\}_n$  la SPCM asociada a  $v$  y  $\{R_n(x)\}_n$  la SPOM asociada a la forma lineal  $xv + \lambda\delta_0$ . Definamos la sucesión de polinomios:

$$Q_{2m}(x) = S_m(x^2), \quad Q_{2m+1}(x) = xR_m(x^2).$$

Nuestro objetivo es probar que la familia de polinomios mónicos  $\{Q_n(x)\}_n$  así definidos es la SPOM con respecto a la forma bilineal  $\varphi$ .

De la simetría de  $u$  se deduce directamente que

$$\varphi(Q_{2n}(x), Q_{2m+1}(x)) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Por definición,  $Q'_{2m}(0) = 0$ , luego

$$\begin{aligned} \langle v, S_n(x)S_m(x) \rangle &= \langle u, S_n(x^2)S_m(x^2) \rangle = \\ &= \langle u, Q_{2n}(x)Q_{2m}(x) \rangle + \lambda Q'_{2n}(0)Q'_{2m}(0) = \varphi(Q_{2n}(x), Q_{2m}(x)) \end{aligned}$$

y además, como  $Q'_{2m+1}(0) = R_m(0)$ ,

$$\begin{aligned} \langle xv, R_n(x)R_m(x) \rangle + \lambda R_n(0)R_m(0) &= \langle v, xR_n(x)R_m(x) \rangle + \lambda R_n(0)R_m(0) = \\ &= \langle u, x^2R_n(x^2)R_m(x^2) \rangle + \lambda R_n(0)R_m(0) = \\ &= \langle u, Q_{2n+1}(x)Q_{2m+1}(x) \rangle + \lambda Q'_{2n+1}(0)Q'_{2m+1}(0) = \end{aligned}$$

$$= \varphi(Q_{2n+1}(x), Q_{2m+1}(x))$$

concluimos que  $\{Q_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a la forma bilineal  $\varphi$ .

En resumen, hemos probado el siguiente:

**Teorema 2.3.3.-** Sean  $u$  y  $v$  funcionales lineales regulares, relacionados mediante las ecuaciones (2.3.5),  $\varphi$  la forma bilineal definida por (2.3.1) y  $\{Q_n(x)\}_n$ ,  $\{S_n(x)\}_n$  y  $\{R_n(x)\}_n$  sucesiones de polinomios mónicos relacionadas por (2.3.4). Entonces  $\varphi$  es no degenerada si y sólo si la forma lineal  $xv + \lambda\delta_0$  es regular, en cuyo caso,  $\{Q_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a  $\varphi$  si y solo si  $\{S_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a  $v$  y  $\{R_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a la forma lineal  $xv + \lambda\delta_0$ .

Por tanto las dos sucesiones de polinomios mónicos  $\{S_n(x)\}_n$  y  $\{R_n(x)\}_n$ , son sucesiones de polinomios ortogonales estándar.

Sustituyendo las expresiones (2.2.3), (2.2.10) y (2.3.4) en (2.3.3), para  $n$  impar, obtenemos una expresión para  $R_n(x)$  en términos de la SPOM  $\{S_n^*(x)\}$ :

**Proposición 2.3.4.-** Los polinomios  $R_n(x)$  verifican:

$$R_n(x) = S_n^*(x) - \frac{\lambda S_n^*(0)}{1 + \lambda k_{n-1}^*(0,0)} k_{n-1}^*(x,0).$$

Notemos que este resultado es consecuencia de ser  $R_n(x)$  ortogonal con respecto a  $xv + \lambda\delta_0$  y  $S_n^*(x)$  ortogonal con respecto a  $xv$ .

En la sección 1.5 del capítulo anterior se demostró que la SPOM  $\{Q_n(x)\}_n$  verifica una relación de recurrencia a cinco términos (proposición 1.5.1). En este caso adopta una forma más simple, pues debido a la simetría de los polinomios se tiene

$$c_{n+1}^{(n)} = c_{n-1}^{(n)} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y por tanto se obtiene:

**Proposición 2.3.5.-** La sucesión de polinomios ortogonales  $\{Q_n(x)\}_n$  verifica la siguiente relación de recurrencia a cinco términos:

$$x^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x),$$

donde:

$$c_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} [\gamma_n + \gamma_{n+1}] - \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{P_n'(0)P_{n-2}'(0)}{k_n} \gamma_n \gamma_{n-1} \left[ 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$c_{n-2}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{\lambda_{n-3}}{\lambda_{n-2}} \gamma_n \gamma_{n-1}.$$

Es de destacar que para  $n$  par (respectivamente  $n$  impar), la relación anterior se puede obtener sustituyendo  $x^2$  por  $x$  en la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales estándar  $\{S_n(x)\}_n$  (respectivamente  $\{R_n(x)\}_n$ ). De hecho, si escribimos las relaciones de recurrencia para  $\{S_n(x)\}_n$  y  $\{R_n(x)\}_n$  en la forma:

$$x S_n(x) = S_{n+1}(x) + \zeta_n S_n(x) + \eta_n S_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$x R_n(x) = R_{n+1}(x) + \xi_n R_n(x) + \nu_n R_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

se tiene:

$$\zeta_n = c_{2n}^{(2n)} = \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1}$$

$$\eta_n = c_{2n-2}^{(2n)} = \gamma_{2n} \gamma_{2n-1}$$

$$\xi_n = c_{2n+1}^{(2n+1)} =$$

$$= \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{2n+1}} [\gamma_{2n+1} + \gamma_{2n+2}] - \frac{\lambda}{\lambda_{2n+1}} \frac{P'_{2n+1}(0)P'_{2n-1}(0)}{k_{2n+1}} \gamma_{2n+1} \gamma_{2n} \left[ 1 + \frac{\lambda_{2n+1}}{\lambda_{2n}} \right]$$

$$V_n = c_{2n-1}^{(2n+1)} = \frac{\lambda_{2n+1}}{\lambda_{2n}} \frac{\lambda_{2n-2}}{\lambda_{2n-1}} \gamma_{2n+1} \gamma_{2n}$$

Continuando con el esquema del primer capítulo, podemos relacionar la SPOM  $\{Q_n(x)\}_n$  con las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos  $\{P_n^{i,0}(x)\}_n$ ,  $i=1,2$ , asociadas, respectivamente, a los funcionales lineales  $u_1 = x^2 u$  y  $u_2 = x^4 u$ . Las expresiones que relacionan estas familias de polinomios obtenidas en la sección 1.7, se simplifican en el caso simétrico. Sin embargo, la expresión (1.7.7) no puede ser deducida directamente de la proposición 1.7.3, pues como consecuencia de las expresiones (2.2.8) se tiene que  $K_n^{(0,1)}(0,0) = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

En primer lugar, reescribiremos el lema 1.7.2, teniendo en cuenta la simetría de los polinomios y tomando  $c=0$ :

**Lema 2.3.6.-** Para los polinomios  $\{P_n^{i,0}(x)\}_n$ ,  $i=1,2$ , se verifica:

$$i) \quad xP_{n-1}^{1,0}(x) = P_n(x) - \frac{P_n(0)}{K_{n-1}(0,0)} K_{n-1}(x,0),$$

en particular  $xP_{n-1}^{1,0}(x) = P_n(x)$ , para  $n$  impar.

$$ii) \quad P_{n-1}^{1,0}(0) = P'_n(0).$$

$$iii) \quad xP_{n-2}^{2,0}(x) = P_{n-1}^{1,0}(x) - \frac{P_{n-1}^{1,0}(0)}{K_{n-2}^{1,0}(0,0)} K_{n-2}^{1,0}(x,0),$$

en particular  $xP_{n-2}^{2,0}(x) = P_{n-1}^{1,0}(x)$ , para  $n$  par.

$$iv) \quad xK_{n-1}^{1,0}(x,0) = K_n^{(0,1)}(x,0), \text{ y como consecuencia } K_{n-1}^{1,0}(0,0) = K_n^{(1,1)}(0,0).$$

v) Notando, como es habitual, por  $k_{n-1}^0 = \langle u_1, (P_{n-1}^{1,0})^2 \rangle$ , se tiene

$$k_{n-1}^0 = k_n \frac{K_n(0,0)}{K_{n-1}(0,0)}$$

en particular, si  $n$  es impar se tiene  $k_{n-1}^0 = k_n$ .

**Proposición 2.3.7.-**

$$Q_n(x) = (1 - \alpha_n) P_n(x) + \alpha_n x^2 P_{n-2}^{2,0}(x)$$

donde  $\alpha_{2n} = 0$  y  $\alpha_{2n+1} = \frac{\lambda K_{2n}^{(1,1)}(0,0)}{1 + \lambda K_{2n}^{(1,1)}(0,0)}$ .

**Demostración.-**

Para  $n$  par es trivial. Para  $n$  impar se tiene:

$$Q_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(x) - \frac{\lambda P_{2n+1}'(0)}{1 + \lambda K_{2n}^{(1,1)}(0,0)} K_{2n}^{(0,1)}(x,0).$$

Del lema 2.3.6 deducimos

$$\begin{aligned} P_{2n+1}'(0) K_{2n}^{(0,1)}(x,0) &= P_{2n}^{1,0}(0) K_{2n}^{(0,1)}(x,0) = P_{2n}^{1,0}(0) \times K_{2n-1}^{1,0}(x,0) = \\ &= K_{2n-1}^{1,0}(0,0) \left[ x P_{2n}^{1,0}(x) - x^2 P_{2n-1}^{2,0}(x) \right] = K_{2n}^{(1,1)}(0,0) \left[ P_{2n+1}(x) - x^2 P_{2n-1}^{2,0}(x) \right] \end{aligned}$$

luego

$$Q_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(x) - \frac{\lambda K_{2n}^{(1,1)}(0,0)}{1 + \lambda K_{2n}^{(1,1)}(0,0)} \left[ P_{2n+1}(x) - x^2 P_{2n-1}^{2,0}(x) \right],$$

y per tanto:

$$Q_{2n+1}(x) = (1 - \alpha_{2n+1}) P_{2n+1}(x) + \alpha_{2n+1} x^2 P_{2n-1}^{2,0}(x). \quad \square$$

Para los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  se obtiene una representación en términos de los  $\{P_n^{1,0}(x)\}_n$  análoga a la de la proposición 1.7.4:

**Proposición 2.3.8.-** Para todo  $n \geq 2$  se verifica:

$$Q_n(x) = P_n^{1,0}(x) + a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}^{1,0}(x)$$

donde

$$a_{n-2}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{K_{n-2}(0,0)}{K_{n-1}(0,0)} \gamma_n \neq 0.$$

Observamos que, para  $n$  par, la expresión de este coeficiente es

$$a_{2n-2}^{(2n)} = \frac{k_{2n}}{k_{2n-1}} = \gamma_{2n} \neq 0.$$

Al ser  $u$  un funcional simétrico, el funcional  $u_1 = x^2 u$  que define la SPOM  $\{P_n^{1,0}(x)\}_n$ , es asimismo simétrico. De esta forma remitiéndonos a los resultados del apartado 2.2, podremos escribir:

$$P_{2n}^{1,0}(x) = W_n(x^2), \quad P_{2n+1}^{1,0}(x) = x W_n^*(x^2), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde  $\{W_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada al funcional  $xv$ . Así, sustituyendo  $x^2$  por  $x$  en la proposición anterior se obtiene:

**Corolario 2.3.9.-**

$$S_n(x) = W_n(x) + a_{2n-2}^{(2n)} W_{n-1}(x)$$

$$R_n(x) = W_n^*(x) + a_{2n-1}^{(2n+1)} W_{n-1}^*(x).$$

**Nota.-** Obsérvese que en las anteriores expresiones  $W_n(x) = S_n^*(x)$ .

## 2.4 DOS MASAS SITUADAS EN PUNTOS SIMÉTRICOS.

Sea  $u$  un funcional regular y simétrico sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales  $\mathbb{P}$ , sea  $\{P_n(x)\}_n$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos definidos por  $u$  y notemos por  $K_n(x,y)$  a los correspondientes núcleos.

Consideremos la forma bilineal y simétrica definida por:

$$\psi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda [f'(c)g'(c) + f'(-c)g'(-c)]. \quad (2.4.1)$$

En primer lugar, estudiamos las condiciones para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales mónicos,  $\{Q_n(x)\}_n$ , asociados a la forma bilineal (2.4.1). Nótese que, debido a la simetría de  $u$  y a la estructura del producto  $\psi$ , los polinomios  $Q_n(x)$ , si existen, verifican:

$$Q_n(-x) = (-1)^n Q_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De forma análoga al desarrollo de la sección 1.3, obtenemos:

**Teorema 2.4.1.-** *Condición necesaria y suficiente para que exista SPOM con respecto a  $\psi$  es que:*

$$\tilde{\lambda}_{n-1} = 1 + \lambda [K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) + (-1)^{n-1} K_{n-1}^{(1,1)}(c,-c)] \neq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (2.4.2)$$

en cuyo caso:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda \frac{P_n'(c)}{\tilde{\lambda}_{n-1}} [K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) + (-1)^{n-1} K_{n-1}^{(0,1)}(x,-c)] \quad (2.4.3)$$

**Demostración.-** Si existe SPOM con respecto a  $\psi$ , estos polinomios admiten una expresión en términos de los  $\{P_j(x)\}_j$ :

$$Q_n(x) = P_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_{nj} P_j(x)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{nj} &= \frac{\langle u, Q_n P_j \rangle}{\langle u, P_j^2 \rangle} = \frac{\psi(Q_n, P_j) - \lambda [Q_n'(c) P_j'(c) + Q_n'(-c) P_j'(-c)]}{\langle u, P_j^2 \rangle} \\ &= -\lambda \frac{Q_n'(c) [P_j'(c) + (-1)^{n-1} P_j'(-c)]}{\langle u, P_j^2 \rangle} \end{aligned}$$

luego

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda Q_n'(c) [K_{n-1}^{(0,1)}(x, c) + (-1)^{n-1} K_{n-1}^{(0,1)}(x, -c)].$$

Derivando la expresión anterior y evaluando en  $x = c$ , se deduce:

$$Q_n'(c) [1 + \lambda (K_{n-1}^{(1,1)}(c, c) + (-1)^{n-1} K_{n-1}^{(1,1)}(c, -c))] = P_n'(c). \quad (2.4.4)$$

Supongamos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$1 + \lambda [K_{n_0-1}^{(1,1)}(c, c) + (-1)^{n_0-1} K_{n_0-1}^{(1,1)}(c, -c)] = 0,$$

entonces, por (2.4.4),  $P_{n_0}'(c) = 0$ , luego

$$1 + \lambda [K_{n_0}^{(1,1)}(c, c) + (-1)^{n_0-1} K_{n_0}^{(1,1)}(c, -c)] = 0,$$

y volviendo a usar (2.4.4),  $P_{n_0+1}'(c) = 0$ . De esta forma:

$$P_n'(c) = 0, \quad n \geq n_0,$$

y exactamente igual que en el teorema 1.3.1 este resultado contradice el hecho de que dos polinomios ortogonales estándar consecutivos no pueden tener raíces comunes.

Recíprocamente, supuesto que  $\tilde{\lambda}_{n-1} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , veamos que la sucesión de polinomios mónicos dada por

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda \frac{P_n'(c)}{\tilde{\lambda}_{n-1}} [K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) + (-1)^{n-1} K_{n-1}^{(0,1)}(x,-c)]$$

son ortogonales respecto a  $\psi$ . Sea  $p(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$  un polinomio arbitrario. Entonces, utilizando la expresión (2.4.3) y las propiedades reproductoras de los núcleos, se tiene

$$\psi(Q_n(x), p(x)) = \langle u, Q_n(x)p(x) \rangle + \lambda Q_n'(c)[p'(c) + (-1)^{n-1} p'(-c)]$$

y utilizando la expresión (2.4.3),

$$\begin{aligned} \psi(Q_n(x), p(x)) &= \langle u, Q_n(x)p(x) \rangle + \lambda Q_n'(c)[p'(c) + (-1)^{n-1} p'(-c)] = \\ &= \langle u, P_n(x)p(x) \rangle - \lambda \frac{P_n'(c)}{\tilde{\lambda}_{n-1}} [\langle u, K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)p(x) \rangle + (-1)^{n-1} \langle u, K_{n-1}^{(0,1)}(x,-c)p(x) \rangle] + \\ &\quad + \lambda \frac{P_n'(c)}{\tilde{\lambda}_{n-1}} [p'(c) + (-1)^{n-1} p'(-c)] = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Corolario 2.4.2.-** En las condiciones (2.4.2), se tiene

$$Q_n'(c) = \frac{P_n'(c)}{\tilde{\lambda}_{n-1}}, \quad Q_n'(-c) = \frac{P_n'(-c)}{\tilde{\lambda}_{n-1}}.$$

**Corolario 2.4.3.-** Con las notaciones anteriores:

$$\psi(Q_n, Q_n) = \langle u, P_n^2(x) \rangle \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}}.$$

**Demostración.-**

Basta multiplicar, utilizando la expresión del corolario 2.4.2:

$$\begin{aligned}
\psi(Q_n, Q_n) &= \psi(Q_n, P_n) = \langle u, P_n(x) Q_n(x) \rangle + \lambda Q_n'(c) [P_n'(c) + (-1)^{n-1} P_n'(-c)] = \\
&= \langle u, P_n^2(x) \rangle + \lambda \frac{P_n'(c)}{\tilde{\lambda}_{n-1}} [P_n'(c) + (-1)^{n-1} P_n'(-c)] = \\
&= \langle u, P_n^2(x) \rangle \left[ 1 + 2\lambda \frac{P_n'(c)^2}{\langle u, P_n^2(x) \rangle \tilde{\lambda}_{n-1}} \right] = \\
&= \langle u, P_n^2(x) \rangle \left[ \frac{\tilde{\lambda}_{n-1} + 2\lambda P_n'(c)^2 / \langle u, P_n^2(x) \rangle}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \right] = \\
&= \langle u, P_n^2(x) \rangle \left[ \frac{1 + \lambda [K_{n+1}^{(1,1)}(c, c) + (-1)^{n+1} K_{n+1}^{(1,1)}(c, -c)]}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \right] = \langle u, P_n^2(x) \rangle \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}}.
\end{aligned}$$

pueso que, como consecuencia de la simetría, se tiene:

$$P_{n+1}'(c) + (-1)^{n+1} P_{n+1}'(-c) = 0. \quad \square$$

Debido a la simetría de los polinomios  $Q_n(x)$  podremos escribir:

$$Q_{2m}(x) = U_m(x^2), \quad Q_{2m+1}(x) = xV_m(x^2). \quad (2.4.5)$$

Estudiemos ahora las condiciones de ortogonalidad para los polinomios  $U_m(x)$  y  $V_m(x)$ . Si calculamos los valores  $\psi(Q_{2n}, Q_{2m})$  y  $\psi(Q_{2n+1}, Q_{2m+1})$ , utilizando las notaciones del apartado 2.2, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\psi(Q_{2n}(x), Q_{2m}(x)) &= \langle u, Q_{2n}(x) Q_{2m}(x) \rangle + 2\lambda Q_{2n}'(c) Q_{2m}'(c) = \\
&= \langle u, U_n(x^2) U_m(x^2) \rangle + 8\lambda c^2 U_n'(c^2) U_m'(c^2) = \\
&= \langle v, U_n(x) U_m(x) \rangle + 8\lambda c^2 U_n'(c^2) U_m'(c^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(Q_{2n+1}(x), Q_{2m+1}(x)) &= \langle u, Q_{2n+1}(x)Q_{2m+1}(x) \rangle + 2\lambda Q'_{2n+1}(c) Q'_{2m+1}(c) = \\
&= \langle u, x^2 V_n(x^2) V_m(x^2) \rangle + 2\lambda [V_n(c^2) + 2c^2 V'_n(c^2)] [V_m(c^2) + 2c^2 V'_m(c^2)] = \\
&= \langle xv, V_n(x) V_m(x) \rangle + [V_n(c^2), V'_n(c^2)] \begin{bmatrix} 2\lambda & 4\lambda c^2 \\ 4\lambda c^2 & 8\lambda c^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m(c^2) \\ V'_m(c^2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y de este modo  $\{U_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a la forma bilineal

$$\Psi_p(f, g) = \langle v, fg \rangle + 8 \lambda c^2 f'(c^2) g'(c^2) \quad (2.4.6)$$

y  $\{V_n(x)\}_n$  es la SPOM asociada a la forma bilineal

$$\Psi_i(f, g) = \langle xv, fg \rangle + [f(c^2), f'(c^2)] \begin{bmatrix} 2\lambda & 4\lambda c^2 \\ 4\lambda c^2 & 8\lambda c^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(c^2) \\ g'(c^2) \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

De este modo, la SPOM asociada  $\psi$  puede ser construida a partir de dos sucesiones de polinomios ortogonales de tipo Sobolev.

Es evidente que la forma bilineal  $\psi$  será no degenerada si y sólo si lo son las formas  $\Psi_p$  y  $\Psi_i$ . Si sustituimos en la condición (2.4.2) los núcleos asociados a  $u$ , según la expresión dada en la fórmula (2.2.7), obtendremos las condiciones necesarias y suficientes para que la forma  $\psi$  sea no degenerada en términos de los núcleos asociados a  $v$  y  $xv$ :

**Corolario 2.4.4.-** *Condición necesaria y suficiente para que exista la SPOM con respecto a  $\psi$  es que  $\forall n \geq 1$  simultaneamente se verifiquen:*

$$\tilde{\lambda}_{2n-1} = 1 + 8 \lambda c^2 k_{n-1}^{(1,1)}(c^2, c^2) \neq 0 \quad (2.4.8)$$

$$\tilde{\lambda}_{2n} = 1 + 2\lambda [k_{n-1}^*(c^2, c^2) + 4c^2 k_{n-1}^{*(0,1)}(c^2, c^2) + 4c^4 k_{n-1}^{*(1,1)}(c^2, c^2)] \neq 0 \quad (2.4.9)$$

Nótese, que cuando  $c=0$  obtenemos los resultados del apartado anterior, para un valor de  $\lambda$  distinto.

Como consecuencia de la expresión (2.4.3) puede obtenerse una expresión para el polinomio  $Q_n(x)$  en función de  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$ :

**Proposición 2.4.5.-** El polinomio  $Q_n(x)$  se expresa en términos de  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$  mediante la fórmula:

$$(x^2-c^2)^2 Q_n(x) = q_4(x,n) P_n(x) + q_3(x,n) P_{n-1}(x) \quad (2.4.10)$$

donde  $q_i(x,n)$  son polinomios de grado  $i$  ( $i=3,4$ ), que vienen dados por:

$$q_4(x,n) = (x^2-c^2)^2 - 2(x^2+c^2) \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P_{n-1}(c)}{k_{n-1}} - 2c(x^2-c^2) \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-1}(c)}{k_{n-1}}$$

$$q_3(x,n) = 2x \left[ 2c \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P_n(c)}{k_{n-1}} + (x^2-c^2) \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{(P'_n(c))^2}{k_{n-1}} \right].$$

**Demostración.-** Recordemos las expresiones de  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$  y  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,-c)$  en términos de los polinomios  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$ :

$$(x-c)^2 K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) = \frac{1}{k_{n-1}} \left[ P_n(x)T_1(P_{n-1},c)(x) - P_{n-1}(x)T_1(P_n,c)(x) \right]$$

$$(x+c)^2 K_{n-1}^{(0,1)}(x,-c) = \frac{1}{k_{n-1}} \left[ P_n(x)T_1(P_{n-1},-c)(x) - P_{n-1}(x)T_1(P_n,-c)(x) \right]$$

En estas expresiones, debido a la simetría de los polinomios, se tiene:

$$(-1)^{n-1} T_1(P_{n-1},-c) = (-1)^{n-1} [P_{n-1}(-c) + P'_{n-1}(-c)(x+c)] = P_{n-1}(c) - P'_{n-1}(c)(x+c)$$

$$(-1)^{n-1} T_1(P_n,-c) = (-1)^{n-1} [P_n(-c) + P'_n(-c)(x+c)] = -P_n(c) + P'_n(c)(x+c).$$

Finalmente, sustituyendo en la fórmula (2.4.3), y agrupando en  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$ , se concluye el resultado.  $\square$

Nótese que los coeficientes polinomiales de la anterior relación verifican que  $q_4(x,n)$  es una función par y  $q_3(x,n)$  es una función impar en  $x$ .

La proposición anterior muestra que el polinomio  $(x^2-c^2)^2 Q_n(x)$  es un polinomio cuasi-ortogonal de orden 8 respecto a  $u$  y por tanto puede expresarse como combinación lineal de nueve polinomios  $P_i(x)$  consecutivos, en la forma siguiente:

**Proposición 2.4.6.-**

$$(x^2-c^2)^2 Q_n(x) = P_{n+4}(x) + \alpha_{n+2}^{(n)} P_{n+2}(x) + \alpha_n^{(n)} P_n(x) + \alpha_{n-2}^{(n)} P_{n-2}(x) + \alpha_{n-4}^{(n)} P_{n-4}(x) \quad (2.4.11)$$

donde

$$\alpha_{n+2}^{(n)} = [\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 2c^2] - \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}}$$

$$\alpha_n^{(n)} = [\gamma_{n+2}\gamma_{n+1} + \gamma_n\gamma_{n-1} + (\gamma_{n+1} + \gamma_n - c^2)^2] -$$

$$- [\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 2c^2] \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}} - \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-4}(c)}{k_{n-4}}$$

$$\alpha_{n-2}^{(n)} = [\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 2c^2] \gamma_n \gamma_{n-1} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} + \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_{n+2}(c)P'_n(c)}{k_{n-2}}$$

$$\alpha_{n-4}^{(n)} = \gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \neq 0$$

**Demostración.-** Si desarrollamos  $(x^2-c^2)^2 Q_n(x)$  en términos de los  $P_i(x)$ ,

tendremos

$$(x^2 - c^2)^2 Q_n(x) = P_{n+4}(x) + \sum_{i=0}^{n+3} \alpha_i^{(n)} P_i(x)$$

donde

$$\alpha_i^{(n)} = \frac{\langle u, (x^2 - c^2)^2 Q_n(x) P_i(x) \rangle}{\langle u, P_i(x) P_i(x) \rangle} = \frac{\psi(Q_n(x), (x^2 - c^2)^2 P_i(x))}{\langle u, P_i(x) P_i(x) \rangle}$$

De este modo, por la ortogonalidad,  $\alpha_i^{(n)} = 0$ ,  $0 \leq i \leq n-5$ , y por la simetría  $\alpha_{n+3}^{(n)} = \alpha_{n+1}^{(n)} = \alpha_{n-1}^{(n)} = \alpha_{n-3}^{(n)} = 0$ , con lo que:

$$(x^2 - c^2)^2 Q_n(x) = P_{n+4}(x) + \alpha_{n+2}^{(n)} P_{n+2}(x) + \alpha_n^{(n)} P_n(x) + \alpha_{n-2}^{(n)} P_{n-2}(x) + \alpha_{n-4}^{(n)} P_{n-4}(x).$$

Para calcular los coeficientes, basta considerar la relación de recurrencia que verifican los polinomios  $\{P_n(x)\}_n$ :

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

de la cual se deduce que

$$\begin{aligned} (x^2 - c^2)^2 P_n(x) &= P_{n+4}(x) + [\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 2c^2] P_{n+2}(x) + \\ &+ [\gamma_{n+2} \gamma_{n+1} + \gamma_n \gamma_{n-1} + (\gamma_{n+1} + \gamma_n - c^2)^2] P_n(x) + \\ &+ \gamma_n \gamma_{n-1} [\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 2c^2] P_{n-2}(x) + \\ &+ \gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} P_{n-4}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Así, } \alpha_{n+2}^{(n)} &= \frac{\langle u, (x^2 - c^2)^2 Q_n(x) P_{n+2}(x) \rangle}{\langle u, P_{n+2}(x)^2 \rangle} = \\ &= \gamma_{n+2} \gamma_{n+1} [\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 2c^2] \frac{\langle u, Q_n(x) P_n(x) \rangle}{\langle u, P_{n+2}(x)^2 \rangle} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_{n+2}\gamma_{n+1}\gamma_n\gamma_{n-1} \frac{\langle u, Q_n(x)P_{n-2}(x) \rangle}{\langle u, P_{n+2}(x)^2 \rangle} = \\
& = [\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 2c^2] - \gamma_{n+2}\gamma_{n+1}\gamma_n\gamma_{n-1} \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n+2}} = \\
& = [\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 2c^2] - \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}} \\
\alpha_n^{(n)} & = \frac{\langle u, (x^2 - c^2)^2 Q_n(x)P_n(x) \rangle}{\langle u, P_n(x)^2 \rangle} = \\
& = [\gamma_{n+2}\gamma_{n+1} + \gamma_n\gamma_{n-1} + (\gamma_{n+1} + \gamma_n - c^2)^2] \frac{\langle u, Q_n(x)P_n(x) \rangle}{\langle u, P_n(x)^2 \rangle} + \\
& + \gamma_n\gamma_{n-1}[\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 2c^2] \frac{\langle u, Q_n(x)P_{n-2}(x) \rangle}{\langle u, P_n(x)^2 \rangle} + \\
& + \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\gamma_{n-3} \frac{\langle u, Q_n(x)P_{n-4}(x) \rangle}{\langle u, P_n(x)^2 \rangle} = \\
& = [\gamma_{n+2}\gamma_{n+1} + \gamma_n\gamma_{n-1} + (\gamma_{n+1} + \gamma_n - c^2)^2] - \\
& - [\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 2c^2] \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}} - \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-4}(c)}{k_{n-4}} \\
\alpha_{n-2}^{(n)} & = \frac{\langle u, (x^2 - c^2)^2 Q_n(x)P_{n-2}(x) \rangle}{\langle u, P_{n-2}(x)^2 \rangle} = [\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 2c^2] \frac{\langle u, Q_n(x)P_n(x) \rangle}{\langle u, P_{n-2}(x)^2 \rangle} + \\
& + [\gamma_n\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}\gamma_{n-3} + (\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - c^2)^2] \frac{\langle u, Q_n(x)P_{n-2}(x) \rangle}{\langle u, P_{n-2}(x)^2 \rangle} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_{n-2}\gamma_{n-3}[\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}+\gamma_{n-3}+\gamma_{n-4}-2c^2] \frac{\langle u, Q_n(x)P_{n-4}(x) \rangle}{\langle u, P_{n-2}(x)^2 \rangle} + \\
& + \gamma_{n-2}\gamma_{n-3}\gamma_{n-4}\gamma_{n-5} \frac{\langle u, Q_n(x)P_{n-6}(x) \rangle}{\langle u, P_{n-2}(x)^2 \rangle} = \\
& = [\gamma_{n+1}+\gamma_n+\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}-2c^2]\gamma_n\gamma_{n-1} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} + \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_{n+2}(c)P'_n(c)}{k_{n-2}} \\
\alpha_{n-4}^{(n)} & = \frac{\langle u, (x^2-c^2)^2 Q_n(x)P_{n-4}(x) \rangle}{\langle u, P_{n-4}(x)^2 \rangle} = \frac{\psi(Q_n(x), (x^2-c^2)^2 P_{n-4}(x))}{k_{n-4}} = \\
& = \frac{\psi(Q_n(x), Q_n(x))}{k_{n-4}} = \frac{k_n}{k_{n-4}} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} = \gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}\gamma_{n-3} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \quad \square
\end{aligned}$$

Como consecuencia del carácter autoadjunto para el operador de multiplicación por el polinomio  $(x^2-c^2)^2$ , los polinomios  $\{Q_n(x)\}$  verificarán una relación de recurrencia a nueve términos en la forma:

**Proposición 2.4.7.-** (Relación de recurrencia a nueve términos)

La sucesión de polinomios ortogonales  $\{Q_n(x)\}_n$  verifica la siguiente relación de recurrencia a nueve términos:

$$(x^2-c^2)^2 Q_n(x) = Q_{n+4}(x) + c_{n+2}^{(n)} Q_{n+2}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x) + c_{n-4}^{(n)} Q_{n-4}(x) \quad (2.4.12)$$

**Demostración.-** Puesto que  $(x^2-c^2)^2 Q_n(x)$  es un polinomio de grado  $n+4$ , podrá expresarse:

$$(x^2-c^2)^2 Q_n(x) = Q_{n+4}(x) + \sum_{k=0}^{n+3} c_k^{(n)} Q_k(x)$$

donde

$$c_k^{(n)} = \frac{\psi((x^2-c^2)^2 Q_n(x), Q_k(x))}{\psi(Q_k(x), Q_k(x))}, \quad 0 \leq k \leq n+3.$$

Debido a la ortogonalidad, se tendrá:

$$c_k^{(n)} = \frac{\psi((x^2-c^2)^2 Q_n(x), Q_k(x))}{\psi(Q_k(x), Q_k(x))} = \frac{\psi(Q_n(x), (x^2-c^2)^2 Q_k(x))}{\psi(Q_k(x), Q_k(x))} = 0, \quad \text{si } 0 \leq k \leq n-5,$$

y por la simetría:  $c_{n+3}^{(n)} = c_{n+1}^{(n)} = c_{n-1}^{(n)} = c_{n-3}^{(n)} = 0$ . Así,

$$(x^2-c^2)^2 Q_n(x) = Q_{n+4}(x) + c_{n+2}^{(n)} Q_{n+2}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x) + c_{n-4}^{(n)} Q_{n-4}(x). \quad \square$$

La expresión para los coeficientes  $c_i^{(n)}$  puede obtenerse basándose en la proposición (2.4.6):

**Proposición 2.4.8.-**

$$c_{n+2}^{(n)} = [\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2} \gamma_{n+1} + \gamma_n - 2c^2] + \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n+3}} \frac{P'_{n+4}(c)P'_{n+2}(c)}{k_{n+2}} - \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}}$$

$$c_n^{(n)} = \frac{\tilde{\lambda}_{n-1}}{\tilde{\lambda}_{n+1}} [\gamma_{n+2} \gamma_{n+1} + \gamma_n \gamma_{n-1} + (\gamma_{n+1} + \gamma_n - c^2)^2] -$$

$$- \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n+1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-4}(c)}{k_n} \gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} \left[ 1 + \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \right] -$$

$$- \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n+1}} \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}} \left\{ [\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 2c^2] \left[ 1 + \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \right] + \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_{n+2}(c)P'_n(c)}{k_n} \right\}$$

$$c_{n-2}^{(n)} = \frac{\tilde{\lambda}_{n+1} \tilde{\lambda}_{n-3}}{\tilde{\lambda}_{n-1}^2} \gamma_n \gamma_{n-1} c_n^{(n-2)}$$

$$c_{n-4}^{(n)} = \gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-3} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1} \tilde{\lambda}_{n-5}}{\tilde{\lambda}_{n-1} \tilde{\lambda}_{n-3}}$$

**Demostración.-** Por la proposición anterior, se tiene:

$$c_i^{(n)} = \frac{\psi((x^2-c^2)^2 Q_n(x), Q_i(x))}{\psi(Q_i(x), Q_i(x))}, \quad i = n-4, n-2, n, n+2$$

basta utilizar la proposición (2.4.6) y el carácter autoadjunto del polinomio  $(x^2-c^2)^2$  con respecto a la forma bilineal  $\psi$ .  $\square$

A partir de las expresiones (2.4.5) y de la relación de recurrencia pueden obtenerse las relaciones de recurrencia a cinco términos para los polinomios  $\{U_n(x)\}_n$  y  $\{V_n(x)\}_n$ , sin más que sustituir  $x$  por  $x^2$ :

**Corolario 2.4.9.-** Para las sucesiones de polinomios  $\{U_n(x)\}_n$  y  $\{V_n(x)\}_n$  se verifican las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} (x-c^2)^2 U_n(x) &= U_{n+2}(x) + c_{2n+2}^{(2n)} U_{n+1}(x) + c_{2n}^{(2n)} U_n(x) + \\ &+ c_{2n-2}^{(2n)} U_{n-1}(x) + c_{2n-4}^{(2n)} U_{n-2}(x) \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{aligned} (x-c^2)^2 V_n(x) &= V_{n+2}(x) + c_{2n+3}^{(2n+1)} V_{n+1}(x) + c_{2n+1}^{(2n+1)} V_n(x) + \\ &+ c_{2n-1}^{(2n+1)} V_{n-1}(x) + c_{2n-3}^{(2n+1)} V_{n-2}(x) \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Debemos notar que la relación de recurrencia nueve términos no es minimal, puesto que el operador de multiplicación por  $x^3-3c^2x$  es también

autoadjunto con respecto a  $\psi$  y de este modo:

$$(x^3 - 3c^2x) Q_n(x) = \sum_{i=n-3}^{n+3} d_i^{(n)} Q_i(x)$$

siendo esta última relación minimal en el número de términos que intervienen.

Comenzaremos por expresar el polinomio  $(x^3 - 3c^2x) Q_n(x)$  en términos de los polinomios  $\{P_n(x)\}_n$ :

**Proposición 2.4.10.-** El polinomio  $(x^3 - 3c^2x) Q_n(x)$  verifica:

$$(x^3 - 3c^2x) Q_n(x) = P_{n+3}(x) + \beta_{n+1}^{(n)} P_{n+1}(x) + \beta_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + \beta_{n-3}^{(n)} P_{n-3}(x) \quad (2.4.14)$$

donde:

$$\beta_{n+1}^{(n)} = [\gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 3c^2] \cdot \frac{2\lambda \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}}}{\tilde{\lambda}_{n-1}}$$

$$\beta_{n-1}^{(n)} = [\gamma_{n+1} + \gamma_n + \gamma_{n-1} - 3c^2] \gamma_n - [\gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} - 3c^2] \frac{2\lambda \frac{P'_n(c)P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} -$$

$$- \frac{2\lambda \frac{P'_n(c)P'_{n-4}(c)}{k_{n-4}}}{\tilde{\lambda}_{n-1}}$$

$$\beta_{n-3}^{(n)} = \gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}}$$

**Demostración.-** Para el polinomio  $(x^3 - 3c^2x) Q_n(x)$ , podemos escribir:

$$(x^3 - 3c^2x) Q_n(x) = P_{n+3}(x) + \sum_{k=0}^{n+2} \beta_k^{(n)} P_k(x)$$

donde

$$\beta_k^{(n)} = \frac{\langle u, (x^3 - 3c^2x) Q_n(x) P_k(x) \rangle}{\langle u, P_k^2(x) \rangle} = \frac{\psi(Q_n(x), (x^3 - 3c^2x) P_k(x))}{\langle u, P_k^2(x) \rangle}$$

Entonces, por la ortogonalidad,  $\beta_k^{(n)} = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-4$  y por la simetría  $\beta_{n-2}^{(n)} = \beta_n^{(n)} = \beta_{n+2}^{(n)} = 0$ . Así,

$$(x^3 - 3c^2x) Q_n(x) = P_{n+3}(x) + \beta_{n+1}^{(n)} P_{n+1}(x) + \beta_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + \beta_{n-3}^{(n)} P_{n-3}(x).$$

Para obtener la expresión para los coeficientes, basta sustituir la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} (x^3 - 3c^2x) P_{n+1}(x) &= P_{n+4}(x) + [\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} - 3c^2] P_{n+2}(x) + \\ &+ \gamma_{n+1} [\gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 3c^2] P_n(x) + \\ &+ \gamma_{n+1} \gamma_n \gamma_{n-1} P_{n-2}(x), \end{aligned}$$

que se obtiene a partir de la relación de recurrencia a tres términos, en las expresiones de los  $\beta_i^{(n)}$  y agrupar convenientemente.  $\square$

**Proposición 2.4.11.** (Relación de Recurrencia a siete términos)

Se verifica la siguiente relación de recurrencia a siete términos para los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$ :

$$(x^3 - 3c^2x) Q_n(x) = Q_{n+3}(x) + d_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + d_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) + d_{n-3}^{(n)} Q_{n-3}(x) \quad (2.4.15)$$

donde

$$d_{n+1}^{(n)} = [\gamma_{n+2} + \gamma_{n+1} + \gamma_n - 3c^2] - \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{P'_n(c) P'_{n-2}(c)}{k_{n-2}} + \frac{2\lambda}{\tilde{\lambda}_{n+2}} \frac{P'_{n+3}(c) P'_{n+1}(c)}{k_{n+1}}$$

$$d_{n-1}^{(n)} = \gamma_n \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{\tilde{\lambda}_{n-1}} \frac{\tilde{\lambda}_{n-2}}{\tilde{\lambda}_n} d_n^{(n-1)}$$

$$d_{n-3}^{(n)} = \gamma_n \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \frac{\tilde{\lambda}_{n+1} \tilde{\lambda}_{n-4}}{\tilde{\lambda}_{n-1} \tilde{\lambda}_{n-2}}$$

**Demostración.**- Desarrollando el polinomio  $(x^3-3c^2x) Q_n(x)$  en términos de los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  tendremos:

$$(x^3-3c^2x) Q_n(x) = Q_{n+3}(x) + \sum_{k=0}^{n+2} d_k^{(n)} Q_k(x)$$

donde

$$d_k^{(n)} = \frac{\psi((x^3-3c^2x)Q_n(x), Q_k(x))}{\psi(Q_k(x), Q_k(x))} = \frac{\psi(Q_n(x), (x^3-3c^2x)Q_k(x))}{\psi(Q_k(x), Q_k(x))}$$

De nuevo,  $d_k^{(n)}=0$ ,  $0 \leq k \leq n-4$ , por la ortogonalidad, y por la simetría  $d_{n-2}^{(n)} = d_n^{(n)} = d_{n+2}^{(n)} = 0$ . Así,

$$(x^3-3c^2x) Q_n(x) = Q_{n+3}(x) + d_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + d_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) + d_{n-3}^{(n)} Q_{n-3}(x).$$

El coeficiente  $d_{n+1}^{(n)}$  se calcula a través de la relación (2.4.14), usando el carácter autoadjunto de la multiplicación por  $x^3-3c^2x$ .

Para el coeficiente  $d_{n-1}^{(n)}$  observamos que de las expresiones anteriores se deduce

$$d_{n-1}^{(n)} = \frac{\psi((x^3-3c^2x)Q_n(x), Q_{n-1}(x))}{\psi(Q_{n-1}(x), Q_{n-1}(x))} = \frac{\psi(Q_n(x), (x^3-3c^2x)Q_{n-1}(x))}{\psi(Q_{n-1}(x), Q_{n-1}(x))}$$

y por tanto:

$$d_{n-1}^{(n)} = \gamma_n \frac{\tilde{\lambda}_{n+1} \tilde{\lambda}_{n-2}}{\tilde{\lambda}_{n-1} \tilde{\lambda}_n} d_n^{(n-1)}$$

Finalmente, la expresión para  $d_{n-3}^{(n)}$  es evidente.  $\square$

A partir de las expresiones (2.4.5) y de la relación de recurrencia a siete términos pueden obtenerse las expresiones para los polinomios  $\{U_n(x)\}_n$  en función de los  $\{V_n(x)\}_n$  (y viceversa), sin más que sustituir  $x$  por  $x^2$ :

**Corolario 2.4.12.-** Para las sucesiones de polinomios  $\{U_n(x)\}_n$  y  $\{V_n(x)\}_n$  se verifican las siguientes relaciones

$$(x-3c^2)U_n(x) = V_{n+1}(x) + d_{2n+1}^{(2n)} V_n(x) + d_{2n-1}^{(2n)} V_{n-1}(x) + d_{2n-3}^{(2n)} V_{n-2}(x) \quad (2.4.16)$$

$$(x-3c^2)V_n(x) = U_{n+1}(x) + d_{2n+2}^{(2n+1)} U_n(x) + d_{2n}^{(2n+1)} U_{n-1}(x) + d_{2n-2}^{(2n+1)} U_{n-2}(x) \quad (2.4.17)$$

## CAPITULO 3

### Ejemplos Clásicos

- 3.1 Introducción.
- 3.2 El caso Jacobi.
- 3.3 El caso Laguerre.
- 3.4 El caso Hermite.
- 3.5 El caso Bessel.

### 3.1 INTRODUCCION.

En este capítulo analizamos las propiedades de los polinomios tipo Sobolev, estudiadas en los capítulos anteriores, en algunos casos particulares; concretamente, se consideran los casos clásicos: Jacobi, Laguerre, Hermite y Bessel.

Cada ejemplo considerado es un modelo para situaciones particulares: el caso Jacobi para un funcional asociado a una medida con soporte compacto, el caso Laguerre para un funcional asociado a una medida con soporte no acotado, el caso Hermite es un caso simétrico y el caso Bessel proporciona un ejemplo de un funcional regular no definido positivo.

En estos ejemplos la elección del punto  $c$  viene dictada por el deseo de conservación de algunas propiedades: en los casos Jacobi, Laguerre y Bessel el punto  $c$  se elige de forma que los polinomios  $P_n^{1,c}(x)$  sigan siendo clásicos y en el caso Hermite se considera el punto  $c=0$  para conservar la simetría.

Los problemas que se estudian son los siguientes:

- a) Coeficientes de la relación de recurrencia a cinco términos. Comportamiento asintótico de los mismos.
- b) Coeficientes de la relación con los polinomios asociados al funcional  $u_1$ .
- c) Existencia de análogos a las fórmulas de Rodrigues.
- d) Existencia de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinomiales cuyo grado es independiente de  $n$ .

El carácter hipergeométrico de los polinomios ortogonales clásicos da lugar a la bien conocida propiedad de derivación para los polinomios clásicos: las derivadas de los polinomios clásicos son a su vez polinomios clásicos y de la misma clase. Estas propiedades de derivación, junto con las fórmulas explícitas de dichos polinomios, proporcionan expresiones fácilmente

calculables para los coeficientes de las relaciones de recurrencia.

En los casos Jacobi, Laguerre y Bessel el funcional  $u_1$  sigue siendo un funcional clásico y por tanto la expresión de los polinomios tipo Sobolev como polinomios cuasi-ortogonales de orden 2 con respecto a  $u_1$  nos va a permitir obtener, mediante unas sencillas manipulaciones algebraicas, propiedades como la existencia de un análogo a la fórmula de tipo Rodrigues o la existencia de una ecuación diferencial de segundo orden verificada por los polinomios de tipo Sobolev, con coeficientes polinomiales de grado independiente de  $n$ .

En el caso Hermite, el funcional  $u_1$  es el funcional asociado a los polinomios de Hermite generalizados, los cuales son polinomios semiclásicos. Por este motivo, en este caso es aconsejable obtener la fórmula de Rodrigues y la ecuación diferencial directamente a partir de la expresión de los polinomios de tipo Sobolev en función de los polinomios de Hermite.

El caso Hermite ha sido considerado por Marcellán y Ronveaux [50]; algunos aspectos del caso Laguerre han sido estudiados por Koekoek y Meijer [36], [40]; y Alfaro, Marcellán, Rezola y Ronveaux [3] han estudiado el caso Jacobi en la situación particular  $\alpha=\beta$ .

### 3.2 EL CASO JACOBI.

Estudiaremos en este apartado la modificación en el punto  $c = 1$  del producto escalar que define los polinomios ortogonales de Jacobi en el intervalo  $[-1, 1]$ . La condición de ortogonalidad vendrá dada por la expresión:

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \lambda f'(1)g'(1), \quad \alpha, \beta > -1. \quad (3.2.1)$$

donde  $\lambda$  es un número real y positivo.

En primer lugar consideraremos los polinomios ortogonales de Jacobi, cuya expresión explícita es:

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m$$

(ver Szegő [66], pág. 68, Chihara [20], pág. 144). Si dividimos el polinomio anterior por su coeficiente conductor:

$$k_n = 2^{-n} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}$$

obtendremos el polinomio mónico de Jacobi en el intervalo  $[-1, 1]$ , que notaremos por  $P_n^{(\alpha, \beta)}$ . Las propiedades de dichos polinomios mónicos, las cuales describimos a continuación, se obtienen sin más que ajustar los coeficientes en las correspondientes propiedades.

#### Expresión explícita.

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m \quad (3.2.2)$$

**Norma.**

Notaremos por  $k_n^{(\alpha,\beta)} = \int_{-1}^1 (P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$ . Entonces:

$$k_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{2n+\alpha+\beta+1} n! \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} \quad (3.2.3)$$

**Relación de Recurrencia a Tres Términos.**

$$xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \gamma_n^{(\alpha,\beta)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$\beta_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} \quad (3.2.4)$$

$$\gamma_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)} \quad (3.2.5)$$

**Ecuación diferencial.**

$$(1-x^2)y'' + [(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 \quad (3.2.6)$$

**Relación Diferencial.**

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) \quad (3.2.7)$$

**Fórmula de Rodrigues.**

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} D^n [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] \quad (3.2.8)$$

donde  $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ .

**Relación de Estructura.**

$$(x^2-1) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n \left[ x + \frac{\beta-\alpha}{2n+\alpha+\beta} \right] P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (3.2.9)$$

A partir de la expresión explícita y de la relación diferencial para los polinomios mónicos de Jacobi, podemos deducir los valores que toma el polinomio y su derivada en el punto  $x = 1$ :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 2^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} \quad (3.2.10)$$

$$(P_n^{(\alpha, \beta)})'(1) = n 2^{n-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+2)} \quad (3.2.11)$$

y de aquí, deducimos las relaciones que serán utilizadas más adelante en la construcción de los coeficientes polinomiales de los polinomios tipo Sobolev asociados a los polinomios de Jacobi:

**Proposición 3.2.1.-**

$$i) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{4(n+\alpha)(\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} (P_{n-1}^{(\alpha, \beta)})'(1) \quad (3.2.12)$$

$$ii) \quad (P_n^{(\alpha, \beta)})'(1) = \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} (P_{n-1}^{(\alpha, \beta)})'(1) \quad (3.2.13)$$

$$iii) \quad P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{2(\alpha+1)}{(n-1)(n+\alpha+\beta)} (P_{n-1}^{(\alpha, \beta)})'(1) \quad (3.2.14)$$

Además, haciendo uso de la fórmula de Christoffel-Darboux y las expresiones de la proposición anterior, podemos dar fórmulas explícitas para los núcleos:

**Proposición 3.2.2.-**

$$i) \quad K_n(1,1) = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+\beta+1)} \quad (3.2.15)$$

$$ii) \quad K_n^{(1,1)}(1,1) = \frac{2^{-\alpha-\beta-4}}{(n-1)!} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+3)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(n+\beta+1)} \left[ \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+3)}{\alpha+3} + \frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{\alpha+1} \right] \quad (3.2.16)$$

Notaremos por  $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}\}_n$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondientes a la modificación del producto escalar habitual asociado a los polinomios de Jacobi en el intervalo  $[-1,1]$  dada por la expresión (3.2.1).

En primer lugar obtendremos las fórmulas de representación de los polinomios  $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  en términos de los polinomios mónicos de Jacobi haciendo uso de los resultados del primer capítulo.

**Proposición 3.2.3.-**

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} (P_n^{(\alpha,\beta)})'(1) K_{n-1}^{(0,1)}(x,1)$$

donde notaremos  $\lambda_n = 1 + \lambda K_n^{(1,1)}(1,1)$ .

Asímismo, deducimos el valor de estos polinomios y de sus derivadas en el punto 1:

**Corolario 3.2.4.-**

$$i) Q_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{1}{\lambda_{n-1}} 2^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} \left[ 1 - \lambda \frac{2^{-\alpha-\beta-3}}{(n-2)!} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+3)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+4)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+\beta)} \right]$$

$$ii) (Q_n^{(\alpha,\beta)})'(1) = \frac{1}{\lambda_{n-1}} n 2^{n-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+2)}$$

Aplicando en la expresión anterior la fórmula de Christoffel-Darboux para sustituir el término  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,1)$ , se obtiene una expresión para  $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  como combinación lineal de dos polinomios consecutivos  $\{P_i^{(\alpha,\beta)}\}_i$  aunque con coeficientes polinomiales:

**Proposición 3.2.5.-**

$$(x-1)^2 Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = q_2(x, n) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + q_1(x, n) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (3.2.17)$$

donde:

$$q_2(x, n) = (x-1)^2 \cdot \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \left[ (x-1) + \frac{2(\alpha+1)}{(n-1)(n+\alpha+\beta)} \right] \quad (3.2.18)$$

$$q_1(x, n) = \frac{4n^2(n+\alpha+\beta+1)^2(n+\alpha)^2}{(n-1)^2(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \left[ (x-1) + \frac{2(\alpha+1)}{n(n+\alpha+\beta+1)} \right] \quad (3.2.19)$$

**Demostración.-** Recordemos que:

$$q_2(x, n) = (x-1)^2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(P_n^{(\alpha, \beta)})'(1)}{k_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} T_1(P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}, 1)(x) = (x-1)^2 - q_{2,1}(n)(x-1) - q_{2,2}(n)$$

$$q_1(x, n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(P_n^{(\alpha, \beta)})'(1)}{k_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} T_1(P_n^{(\alpha, \beta)}, 1)(x) = q_{1,1}(n)(x-1) + q_{1,2}(n)$$

donde  $T_i(P_j^{(\alpha, \beta)}, 1)(x)$  denota el polinomio de Taylor de grado  $i$  asociado a  $P_j^{(\alpha, \beta)}(x)$  en el punto 1. Utilizando los valores de  $q_{i,j}(n)$ , y las expresiones de la proposición 3.2.1, se tiene:

$$\begin{aligned} q_{2,1}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(P_n^{(\alpha, \beta)})'(1)(P_{n-1}^{(\alpha, \beta)})'(1)}{k_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} = \\ &= \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((P_{n-1}^{(\alpha, \beta)})'(1))^2}{k_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} = \\ &= \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \end{aligned}$$

$$q_{2,2}(n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(P_n^{(\alpha,\beta)})'(1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1)}{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}} = \frac{4n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)(\alpha+1)}{(n-1)^2(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)(n+\alpha+\beta)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$q_{1,1}(n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((P_n^{(\alpha,\beta)})'(1))^2}{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}} = \frac{4n^2(n+\alpha+\beta+1)^2(n+\alpha)^2}{(n-1)^2(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$q_{1,2}(n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(P_n^{(\alpha,\beta)})'(1)P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}} = \frac{8n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)^2(\alpha+1)}{(n-1)^2(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]. \quad \square$$

Es conocido que los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}\}_n$  verifican una relación de recurrencia a cinco términos, y aquí trataremos el comportamiento asintótico de los coeficientes de dicha relación. En primer lugar, estableceremos algunos resultados previos.

**Lema 3.2.6.-**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(1,1)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(1,1)} = 1$$

**Demostración.-**

Dado que la sucesión  $\{\lambda_n\}$  es monótona creciente y diverge positivamente, aplicando el criterio de Stolz (ver [15], pág. 414):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{(P_n^{(\alpha,\beta)})'(1)}{(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)})'(1)} \right]^2 \frac{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}}{k_n^{(\alpha,\beta)}}}{\frac{(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)})'(1)}{(P_{n-2}^{(\alpha,\beta)})'(1)} \frac{k_{n-2}^{(\alpha,\beta)}}{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2(n+\alpha+\beta+1)^2(n+\alpha)^2}{(n-1)^2(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)^2} \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)}{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 3.2.7.- Sean las sucesiones:

$$a_n = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(P_n^{(\alpha,\beta)})'(1)(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)})'(1)}{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}} = \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$b_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{(P_n^{(\alpha,\beta)})'(1)(P_{n-2}^{(\alpha,\beta)})'(1)}{k_n^{(\alpha,\beta)}} =$$

$$= \frac{(n-2)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta-2)(2n+\alpha+\beta-3)}{4n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta)(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right]$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

**Demostración.-** Demostraremos como ejemplo el primero de los límites, el otro se hace de forma análoga. En efecto, utilizando los resultados de la proposición 3.2.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(P_n^{(\alpha,\beta)})'(1)(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)})'(1)}{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((P_{n-1}^{(\alpha,\beta)})'(1))^2}{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] = 0.$$

En virtud del lema anterior.  $\square$

Haciendo uso de los dos lemas anteriores, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(\alpha,\beta)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(\alpha, \beta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n^{(\alpha, \beta)}}{k_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} = 1/4,$$

podemos deducir el comportamiento asintótico de los coeficientes de la relación de recurrencia a cinco términos, sin más que recordar las expresiones de éstos:

**Proposición 3.2.8.-** (Relación de Recurrencia a cinco términos)

Los polinomios modificados de Jacobi verifican la siguiente relación de recurrencia a cinco términos:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= Q_{n+2}^{(\alpha, \beta)}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) + c_n^{(n)} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \\ &+ c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x) \end{aligned}$$

con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}^{(n)} = -2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(n)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-2}^{(n)} = \frac{1}{16}$$

Recordemos que la sucesión de polinomios  $\{Q_n^{(\alpha, \beta)}\}$  se relaciona con la SPOM con respecto a la modificación del funcional dada por  $(x-1)^2 \omega(x)$ . En el caso Jacobi, dicha SPOM es  $\{P_n^{(\alpha+2, \beta)}\}$ . Siguiendo el esquema del primer capítulo, el polinomio  $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  se expresa como combinación lineal de tres polinomios consecutivos  $\{P_n^{(\alpha+2, \beta)}\}_n$  donde los coeficientes se calculan por las expresiones de la proposición 1.7.10:

**Proposición 3.2.9.-**

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha+2,\beta)}(x) + a_{n-1}^{(n)} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) + a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta)}(x) \quad (3.2.20)$$

donde:

$$a_{n-2}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{4n(n-1)(n+\beta)(n+\beta-1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)} \quad (3.2.21)$$

$$a_{n-1}^{(n)} = - \frac{4n(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)} - \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.2.22)$$

Utilizando la relación de recurrencia de los polinomios  $P_n^{(\alpha+2,\beta)}(x)$  se deduce el siguiente:

**Corolario 3.2.10.-**

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (x - \zeta_n) P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) - \xi_n P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta)}(x) \quad (3.2.23)$$

donde:

$$\zeta_n = \frac{2n-2+\beta-\alpha}{2n+\alpha+\beta} + \frac{2n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha)}{(n-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.2.24)$$

$$\xi_n = \frac{4(n-1)(n+\beta-1)(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)} \left[ 1 - \frac{n(n+\beta)}{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+1)} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.2.25)$$

Recíprocamente, teníamos expresados los polinomios  $\{P_n^{(\alpha+2,\beta)}\}_n$  en términos de los  $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}\}_n$  de la siguiente forma:

**Proposición 3.2.11.-**

$$(x-1)^2 P_n^{(\alpha+2,\beta)}(x) = Q_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n^{(n)} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (3.2.26)$$

donde

$$b_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{4(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+2)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+3)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+1)} \quad (3.2.27)$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{(n+\alpha+2)(n+\alpha+\beta+2)}{(n+\beta+1)(n+1)} a_n^{(n+1)}. \quad (3.2.28)$$

Además de las propiedades anteriores, estos polinomios poseen dos propiedades características que se deben al carácter clásico de los polinomios  $\{P_n^{(\alpha+2,\beta)}\}$ , que se obtienen sin más que hacer uso de las expresiones de los polinomios  $Q_n^{(\alpha,\beta)}$  en términos de los primeros. En este sentido, se deduce, en primer lugar:

**Proposición 3.2.12.-** (Una Fórmula de tipo Rodrigues)

$$(1-x)^{\alpha+2}(1+x)^\beta Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+3)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+3)} D^{n-2} \left\{ (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta-2} \rho(x;n) \right\} \quad (3.2.29)$$

donde  $\rho(x;n)$  es un polinomio de grado 2, y viene dado por:

$$\begin{aligned} \rho(x;n) = & [(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)(1+x)^2 - 2(n+\alpha+2)(n+\beta)(1-x^2) + (n+\beta)(n+\beta-1)(1-x)^2] - \\ & - a_{n-1}^{(n)} \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+\beta+2)} [(\beta-\alpha-2) - (2n+\alpha+\beta)x] + \\ & + a_{n-2}^{(n)} \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)} \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

**Demostración.-** Dada la fórmula de Rodrigues para la sucesión de polinomios  $\{P_n^{(\alpha+2,\beta)}\}_n$ , según vimos en (3.2.8), se tendrá:

$$(1-x)^{\alpha+2}(1+x)^\beta P_n^{(\alpha+2,\beta)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+3)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+3)} D^n [(1-x)^{n+\alpha+2}(1+x)^{n+\beta}]$$

Así, podemos sustituir la fórmula anterior en la expresión (3.2.20) y obtendremos:

$$\begin{aligned} (1-x)^{\alpha+2}(1+x)^{\beta} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+3)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+3)} D^n [(1-x)^{n+\alpha+2}(1+x)^{n+\beta}] + \\ &+ a_{n-1}^{(n)} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} D^{n-1} [(1-x)^{n+\alpha+1}(1+x)^{n+\beta-1}] + \\ &+ a_{n-2}^{(n)} (-1)^{n-2} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)} D^{n-2} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta-2}] \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} (1-x)^{\alpha+2}(1+x)^{\beta} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+3)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+3)} D^{n-2} \left\{ D^2 [(1-x)^{n+\alpha+2}(1+x)^{n+\beta}] - \right. \\ &- a_{n-1}^{(n)} \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+\beta+2)} D [(1-x)^{n+\alpha+1}(1+x)^{n+\beta-1}] + \\ &\left. + a_{n-2}^{(n)} \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)} (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta-2} \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Por último, podemos deducir de una forma simple una ecuación diferencial para estos polinomios cuyos coeficientes son polinomios cuyo grado es independiente de  $n$ :

**Proposición 3.2.13.-** (Ecuación Diferencial)

Los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_n$  verifican la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$A_4(x,n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + B_3(x,n) \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + C_2(x,n) Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0 \quad (3.2.31)$$

donde  $A_4(x,n)$  es un polinomio de grado 4,  $B_3(x,n)$  es de grado 3 y  $C_2(x,n)$  es de grado 2.

**Demostración.-** Tomando la relación de estructura (3.2.9) para los polinomios

$\{P_i^{(\alpha+2,\beta)}\}$  se deduce:

$$P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta)}(x) = A_{n-1}(n-1)(x+B_{n-1})P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) - A_{n-1}(x^2-1) \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x)$$

donde

$$B_{n-1} = \frac{\beta-\alpha-2}{2n+\alpha+\beta} \quad \text{y} \quad A_{n-1} = \frac{(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)}{4(n-1)(n+\alpha+1)(n+\beta-1)(n+\alpha+\beta+1)}$$

Sustituyendo esta fórmula en la expresión del corolario 3.2.10, se tiene:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \left[ x - \zeta_n - \xi_n A_{n-1}(n-1)(x+B_{n-1}) \right] P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) + \xi_n A_{n-1}(x^2-1) \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x)$$

luego

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = M_1(x,n) P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) + N_2(x,n) \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) \quad (3.2.32)$$

donde  $M_1(x,n)$  es un polinomio de grado 1 y  $N_2(x,n)$  es un polinomio de grado 2.

Derivando la fórmula anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= M_1'(x,n) P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) + \left[ M_1(x,n) + N_2'(x,n) \right] \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) + \\ &+ N_2(x,n) \frac{d^2}{dx^2} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x). \end{aligned}$$

Recordando, además, la ecuación diferencial de los polinomios de Jacobi (3.2.6), que en este caso se escribe como:

$$(x^2-1) y'' = [(\beta-\alpha-2) - (\alpha+\beta+4)x] y' + (n-1)(n+\alpha+\beta+2) y$$

y sustituyéndola en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \left[ M_1'(x,n) + \xi_n A_{n-1}(n-1)(n+\alpha+\beta+2) \right] P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) + \\ &+ \left[ M_1(x,n) + N_2'(x,n) + \xi_n A_{n-1} [(\beta-\alpha-2) - (\alpha+\beta+4)x] \right] \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) \end{aligned}$$

con lo cual:

$$\frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \tilde{M}_0(x, n) P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) + \tilde{N}_1(x, n) \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) \quad (3.2.33)$$

donde  $\tilde{M}_0(x, n)$  es una constante y  $\tilde{N}_1(x, n)$  es un polinomio de grado 1.

Las expresiones (3.2.32) y (3.2.33) constituyen un sistema de ecuaciones y aplicando la regla de Cramer se tendrá:

$$\Delta_2(x, n) P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) = \begin{vmatrix} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) & M_2(x, n) \\ \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) & \tilde{N}_1(x, n) \end{vmatrix} \quad (3.2.34)$$

$$\Delta_2(x, n) \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) = \begin{vmatrix} M_1(x, n) & Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ \tilde{M}_0(x, n) & \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) \end{vmatrix} \quad (3.2.35)$$

donde  $\Delta_2(x, n) = M_1(x, n)\tilde{N}_1(x, n) - N_2(x, n)\tilde{M}_0(x, n)$  es un polinomio de segundo grado. Derivando la ecuación (3.2.34):

$$\begin{aligned} & \Delta_2'(x, n) P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) + \Delta_2(x, n) \frac{d}{dx} P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) = \\ & = \tilde{N}_1'(x, n) Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) + [\tilde{N}_1(x, n) - N_2'(x, n)] \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) - N_2(x, n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) \end{aligned}$$

y combinándola con (3.2.35), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \Delta_2(x, n) N_2(x, n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \\ & + [\Delta_2(x, n) N_2'(x, n) - \Delta_2(x, n) \tilde{N}_1'(x, n) + \Delta_2(x, n) M_1(x, n) - \Delta_2'(x, n) N_2(x, n)] \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \\ & + [\Delta_2'(x, n) \tilde{N}_1(x, n) - \Delta_2(x, n) \tilde{M}_0(x, n) - \Delta_2(x, n) \tilde{N}_1'(x, n)] Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.3 EL CASO LAGUERRE.

En este apartado haremos un estudio de la modificación en el punto  $c = 0$  del producto escalar asociado a los polinomios ortogonales de Laguerre en el intervalo  $[0, +\infty)$ , utilizando las mismas técnicas que en el desarrollo del apartado anterior. La condición de ortogonalidad viene dado por la expresión:

$$\varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) x^\alpha e^{-x} dx + \lambda f'(0)g'(0), \quad \alpha > -1 \quad (3.3.1)$$

donde  $\lambda \geq 0$ .

Es conocido (ver Chihara [20] pag. 145, Szegö [66] pag. 101), que la expresión explícita de los polinomios de Laguerre es:

$$\varphi_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m$$

cuyo coeficiente conductor es  $k_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ .

Si notamos por  $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$  a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre, se tendrá:

$$\varphi_n^{(\alpha)}(x) = k_n L_n^{(\alpha)}$$

Partiendo de las propiedades habituales para los polinomios de Laguerre podemos obtener las siguientes propiedades para los polinomios mónicos:

#### Expresión explícita.

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m \quad (3.3.2)$$

**Norma.**

Notaremos por  $k_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty (L_n^{(\alpha)}(x))^2 x^\alpha e^{-x} dx$ . Entonces:

$$k_n^{(\alpha)} = \Gamma(n+\alpha+1) n! \quad (3.3.3)$$

**Relación de Recurrencia a Tres Términos.**

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \beta_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + \gamma_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

$$\beta_n^{(\alpha)} = 2n+\alpha+1 \quad (3.3.4)$$

$$\gamma_n^{(\alpha)} = n(n+\alpha) \quad (3.3.5)$$

**Ecuación diferencial.**

$$x y'' + [\alpha+1-x] y' + n y = 0 \quad (3.3.6)$$

**Relación Diferencial.**

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \quad (3.3.7)$$

**Fórmula de Rodrigues.**

$$x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n D^n [ x^{n+\alpha} e^{-x} ] \quad (3.3.8)$$

**Relación de Estructura.**

$$x \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = n L_n^{(\alpha)}(x) + n(n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (3.3.9)$$

La expresión explícita de los polinomios mónicos de Laguerre permite deducir los valores que toma el polinomio y su derivada en el punto 0, así como relaciones que serán útiles posteriormente:

**Proposición 3.3.1.-**

$$i) L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n} (-1)^n n! \quad (3.3.10)$$

$$ii) (L_n^{(\alpha)})'(0) = \binom{n+\alpha}{n-1} (-1)^{n-1} n! \quad (3.3.11)$$

$$iii) L_n^{(\alpha)}(0) = \frac{(n+\alpha)(\alpha+1)}{(n-1)} (L_{n-1}^{(\alpha)})'(0) \quad (3.3.12)$$

$$iv) (L_n^{(\alpha)})'(0) = - \frac{(n+\alpha)n}{(n-1)} (L_{n-1}^{(\alpha)})'(0) \quad (3.3.13)$$

$$v) L_{n-1}^{(\alpha)}(0) = - \frac{(\alpha+1)}{(n-1)} (L_{n-1}^{(\alpha)})'(0) \quad (3.3.14)$$

Utilizando la fórmula de Christoffel-Darboux y sustituyendo las expresiones de la proposición anterior, podemos dar fórmulas explícitas para los núcleos:

**Proposición 3.3.2.-**

$$i) K_{n-1}(0,0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \binom{n+\alpha}{n-1} \quad (3.3.15)$$

$$ii) K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) = \binom{n+\alpha}{n-2} \frac{1}{(\alpha+3)\Gamma(\alpha+2)} [(n-1)(\alpha+2) + 1] \quad (3.3.16)$$

Sea  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_n$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a la modificación del producto escalar habitual asociado a los polinomios de Laguerre, en el punto  $c=0$  dada por la expresión (3.3.1).

Comenzaremos por dar una representación de los polinomios  $Q_n^{(\alpha)}$  como combinación lineal de polinomios de Laguerre.

**Proposición 3.3.3.-**

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} (L_n^{(\alpha)})'(0) K_{n-1}^{(0,1)}(x,0)$$

donde notaremos  $\lambda_n = 1 + \lambda K_n^{(1,1)}(0,0)$ .

Asímismo, deducimos el valor de estos polinomios y de sus derivadas en el punto 0:

**Corolario 3.3.4.-**

$$i) Q_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n} \frac{(-1)^n n!}{\lambda_{n-1}} \left[ 1 - \lambda \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+4)} \right]$$

$$ii) (Q_n^{(\alpha)})'(0) = \binom{n+\alpha}{n-1} \frac{(-1)^{n-1} n!}{\lambda_{n-1}}$$

Sustituyendo en la expresión de la proposición 3.3.3 la fórmula de Christoffel-Darboux para sustituir el término  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,0)$ , deducimos una expresión para  $Q_n^{(\alpha)}(x)$  en términos de dos polinomios consecutivos de Laguerre con coeficientes polinomiales:

**Proposición 3.3.5.-**

$$x^2 Q_n^{(\alpha)}(x) = q_2(x,n) L_n^{(\alpha)}(x) + q_1(x,n) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (3.3.17)$$

donde:

$$q_2(x,n) = x^2 - \frac{n(n+\alpha)}{n-1} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \left[ x - \frac{\alpha+1}{n-1} \right] \quad (3.3.18)$$

$$q_1(x,n) = \frac{(n+\alpha)^2 n^2}{(n-1)^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \left[ x - \frac{\alpha+1}{n} \right] \quad (3.3.19)$$

**Demostración.-** De igual forma que en el apartado anterior escribimos:

$$q_2(x,n) = x^2 - q_{2,1}(n)x - q_{2,2}(n)$$

$$q_1(x,n) = q_{1,1}(n)x + q_{1,2}(n)$$

y deducimos los valores de  $q_{ij}(n)$  a través de las expresiones de la proposición 3.3.1:

$$q_{2,1}(n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(L_n^{(\alpha)})'(0)(L_{n-1}^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = -\frac{(n+\alpha)n}{n-1} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$q_{2,2}(n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(L_n^{(\alpha)})'(0)L_{n-1}^{(\alpha)}(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{(n+\alpha)n(\alpha+1)}{(n-1)^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$q_{1,1}(n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((L_n^{(\alpha)})'(0))^2}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{(n+\alpha)^2 n^2}{(n-1)^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$q_{1,2}(n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(L_n^{(\alpha)})'(0)L_n^{(\alpha)}(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = -\frac{(n+\alpha)^2 n(\alpha+1)}{(n-1)^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]. \quad \square$$

Los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_n$  verifican una relación de recurrencia a cinco términos, cuyos coeficientes divergen positivamente. Para ver este resultado, daremos dos lemas previos.

**Lema 3.3.6.-**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(0,0)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(0,0)} = 1$$

**Demostración.-** Dado que la sucesión  $\{\lambda_n\}$  es monótona creciente y diverge positivamente, aplicando el criterio de Stolz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(L_n^{(\alpha)})'(0)}{(L_{n-1}^{(\alpha)})'(0)} \right]^2 \frac{k_{n-1}^{(\alpha)}}{k_n^{(\alpha)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+\alpha)^2}{(n-1)^2} \frac{\Gamma(n+\alpha)(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+\alpha)}{(n-1)^2} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

**Lema 3.3.7.-** Dadas las sucesiones:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(L_n^{(\alpha)})'(0)(L_{n-1}^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = -\frac{(n+\alpha)n}{n-1} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \\ b_n &= \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{(L_n^{(\alpha)})'(0)(L_{n-2}^{(\alpha)})'(0)}{k_n^{(\alpha)}} = \frac{n-2}{n(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right] \end{aligned}$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -(\alpha+3)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

**Demostración.-**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\lambda n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+2)^2}}{1 + \lambda \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+4)\Gamma(\alpha+2)} [(n-1)(\alpha+2)+1]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{\Gamma(\alpha+2)^2}{\lambda z_n} + \frac{(n-1)(\alpha+2)+1}{n(\alpha+2)(\alpha+3)}} = -(\alpha+3) \end{aligned}$$

donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-1)} = +\infty, \quad \alpha > -1,$$

pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{b-a}{a}} \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = 1$  (ver [1], pág. 257, §6.1.46).

Para el otro límite, usamos la técnica de la proposición 3.3.5:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{(L_n^{(\alpha)})'(0)(L_{n-2}^{(\alpha)})'(0)}{k_n^{(\alpha)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{((L_n^{(\alpha)})'(0))^2}{k_n^{(\alpha)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n(n+\alpha)(n+\alpha-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right] = 0. \end{aligned}$$

Por el lema anterior.  $\square$

Haciendo uso de los dos lemas anteriores, y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \beta_n^{(\alpha)} &= O(n), \\ \gamma_n^{(\alpha)} &= \frac{k_n^{(\alpha)}}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = O(n^2), \end{aligned}$$

podemos deducir el comportamiento asintótico de los coeficientes de la relación de recurrencia a cinco términos, sin más que recordar las expresiones de éstos:

**Proposición 3.3.8.-** (*Relación de Recurrencia a cinco términos*)

Los polinomios modificados de Laguerre verifican la siguiente relación de recurrencia a cinco términos:

$$x^2 Q_n^{(\alpha)}(x) = Q_{n+2}^{(\alpha)}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) + c_n^{(n)} Q_n^{(\alpha)}(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}^{(\alpha)}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}^{(\alpha)}(x)$$

con

$$c_{n+1}^{(n)} = O(n)$$

$$c_n^{(n)} = O(n^2)$$

$$c_{n-1}^{(n)} = O(n^3)$$

$$c_{n-2}^{(n)} = O(n^4)$$

La sucesión de polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}\}$  se relaciona con la SPOM con respecto a la modificación de la función peso dada por  $x^2\omega(x)$ . En el caso Laguerre, vuelven a ser polinomios de Laguerre variando el parámetro: se trata de la SPOM  $\{L_n^{(\alpha+2)}\}$ . El polinomio  $Q_n^{(\alpha)}(x)$  se expresa como combinación lineal de tres polinomios consecutivos  $\{L_n^{(\alpha+2)}\}_n$ , cuyos coeficientes son fácilmente calculables:

**Proposición 3.3.9.-**

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+2)}(x) + a_{n-1}^{(n)} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + a_{n-2}^{(n)} L_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.3.20)$$

donde:

$$a_{n-2}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} n(n-1) \quad (3.3.21)$$

$$a_{n-1}^{(n)} = 2n + \frac{n(n+\alpha)}{(n-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.3.22)$$

Sustituyendo la relación de recurrencia a tres términos que verifican los polinomios  $L_n^{(\alpha+2)}(x)$  se deduce el siguiente:

**Corolario 3.3.10.-**

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = (x - \zeta_n) L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) - \xi_n L_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.3.23)$$

donde:

$$\zeta_n = (\alpha+1) - \frac{n(n+\alpha)}{(n-1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.3.24)$$

$$\xi_n = (n+\alpha+1)(n-1) \left[ 1 - \frac{n}{n+\alpha+1} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.3.25)$$

Recíprocamente, teníamos expresados los polinomios  $\{L_n^{(\alpha+2)}\}_n$  en términos de los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_n$  de la siguiente forma:

**Proposición 3.3.11.-**

$$x^2 L_n^{(\alpha+2)}(x) = Q_{n+2}^{(\alpha)}(x) + b_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) + b_n^{(n)} Q_n^{(\alpha)}(x) \quad (3.3.26)$$

donde

$$b_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} (n+\alpha+2)(n+\alpha+1) \quad (3.3.27)$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{n+\alpha+2}{n+1} a_n^{(n+1)}. \quad (3.3.28)$$

Además de las propiedades anteriores, estos polinomios poseen dos propiedades características que se deben al carácter clásico de los polinomios  $\{L_n^{(\alpha+2)}\}$ , sin más que hacer uso de las expresiones de los polinomios  $Q_n^{(\alpha)}$  en términos de los primeros. En este sentido, se deduce, en primer lugar:

**Proposición 3.3.12.-** (Una Fórmula de tipo Rodrigues)

$$x^{\alpha+2} e^{-x} Q_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n D^{n-2} \left\{ x^{n+\alpha} e^{-x} \rho(x;n) \right\} \quad (3.3.29)$$

donde  $\rho(x;n)$  es un polinomio de grado 2, y viene dado por:

$$\rho(x;n) = x^2 - 2(n+\alpha+2)x + (n+\alpha+2)(n+\alpha+1) - a_{n-1}^{(n)} [(n+\alpha+1)-x] + a_{n-2}^{(n)} \quad (3.3.30)$$

**Demostración.-** Sustituyendo en la expresión (3.3.20) la fórmula de Rodrigues habitual para la sucesión de polinomios  $\{L_n^{(\alpha+2)}\}_n$ , según vimos en (3.3.8) obtenemos:

$$x^{\alpha+2} e^{-x} Q_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n D^n [x^{n+\alpha+2} e^{-x}] + a_{n-1}^{(n)} (-1)^{n-1} D^{n-1} [x^{n+\alpha+1} e^{-x}] +$$

$$+ a_{n-2}^{(n)} (-1)^{n-2} D^{n-2}[x^{n+\alpha} e^{-x}]$$

Luego:

$$x^{\alpha+2} e^{-x} Q_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n D^{n-2} \left\{ D^2[x^{n+\alpha+2} e^{-x}] - a_{n-1}^{(n)} D[x^{n+\alpha+1} e^{-x}] + a_{n-2}^{(n)} x^{n+\alpha} e^{-x} \right\}. \square$$

Por último, se deduce una ecuación diferencial para estos polinomios cuyos coeficientes son polinomios de grado independiente de  $n$ :

**Proposición 3.3.13.- (Ecuación Diferencial)**

Los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}(x)\}_n$  verifican la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$A_3(x,n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha)}(x) + B_3(x,n) \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) + C_2(x,n) Q_n^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (3.3.31)$$

donde  $A_3(x,n)$  y  $B_3(x,n)$  son polinomios de grado 3, y  $C_2(x,n)$  es de grado 2.

**Demostración.-** Tomando la relación de estructura (3.3.9) para los polinomios  $\{L_i^{(\alpha+2)}\}$  se deduce:

$$L_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) = \frac{x}{(n-1)(n+\alpha+1)} \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) - \frac{1}{n+\alpha+1} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x).$$

Sustituyendo esta fórmula en la expresión del corolario 3.2.10, se tiene:

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \left[ x - \zeta_n + \xi_n \frac{1}{n+\alpha+1} \right] L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) - \xi_n \frac{x}{(n-1)(n+\alpha+1)} \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x)$$

luego

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = M_1(x,n) L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + N_1(x,n) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.3.32)$$

donde  $M_1(x,n)$  y  $N_1(x,n)$  son polinomios de grado 1.

Derivando la fórmula anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) &= M_1'(x,n) L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + [M_1(x,n) + N_1'(x,n)] \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \\ &+ N_1(x,n) \frac{d^2}{dx^2} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x). \end{aligned}$$

Recordando, además, la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre (3.3.6) y sustituyéndola en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) &= \left[ M_1'(x,n) - \xi_n \frac{1}{n+\alpha+1} \right] L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \\ &+ \left[ M_1(x,n) + N_1'(x,n) + \xi_n \frac{1}{(n-1)(n+\alpha+1)} [x - (\alpha+3)] \right] \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \end{aligned}$$

con lo cual:

$$\frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) = \tilde{M}_0(x,n) L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \tilde{N}_1(x,n) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.3.33)$$

donde  $\tilde{M}_0(x,n)$  es una constante y  $\tilde{N}_1(x,n)$  es un polinomio de grado 1.

Retomando las expresiones (3.3.32) y (3.3.33), tenemos un sistema de ecuaciones y utilizando la regla de Cramer se tendrá:

$$\Delta_2(x,n) L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) = \begin{vmatrix} Q_n^{(\alpha)}(x) & N_1(x,n) \\ \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) & \tilde{N}_1(x,n) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(x,n) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) = \begin{vmatrix} M_1(x,n) & Q_n^{(\alpha)}(x) \\ \tilde{M}_0(x,n) & \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) \end{vmatrix}$$

donde  $\Delta_2(x,n) = M_1(x,n)\tilde{N}_1(x,n) - \tilde{M}_0(x,n)N_1(x,n)$  es un polinomio de segundo grado. Derivando la primera ecuación:

$$\begin{aligned} & \Delta_2'(x,n) L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \Delta_2(x,n) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) = \\ & = \tilde{N}_1'(x,n) Q_n^{(\alpha)}(x) + [\tilde{N}_1(x,n) - N_1'(x,n)] \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) - N_1(x,n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha)}(x) \end{aligned}$$

y combinándola con la segunda llegamos a:

$$\begin{aligned} & \Delta_2(x,n) N_1(x,n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha)}(x) + \\ & + [\Delta_2(x,n) N_1'(x,n) - \Delta_2(x,n) \tilde{N}_1(x,n) + \Delta_2(x,n) M_1(x,n) - \Delta_2'(x,n) N_1(x,n)] \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) + \\ & + [\Delta_2'(x,n) \tilde{N}_1(x,n) - \Delta_2(x,n) \tilde{M}_0(x,n) - \Delta_2(x,n) \tilde{N}_1'(x,n)] Q_n^{(\alpha)}(x) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

## 3.4 EL CASO HERMITE.

En esta sección, consideraremos el producto escalar definido por:

$$\varphi(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2} dx + \lambda f'(0)g'(0) \quad (3.4.1)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Dicho producto escalar tiene la particularidad de ser simétrico y por tanto serán aplicables los resultados del capítulo 2. Algunos de los resultados de este apartado han sido obtenidos por Marcellán y Ronveaux en [50].

En este caso, los polinomios ortogonales mónicos asociados a la función peso  $e^{-x^2}$  son los llamados *Polinomios de Hermite* mónicos  $H_n(x)$ , cuyas propiedades elementales relacionamos a continuación (ver Chihara [20], Szegő [66]):

**Expresión explícita.**

$$H_n(x) = \frac{n!}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \quad (3.4.2)$$

**Norma.**

Notaremos por  $k_n = \int_{\mathbb{R}} H_n^2(x)e^{-x^2} dx$ . Entonces:

$$k_n = \frac{n!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (3.4.3)$$

**Relación de Recurrencia a Tres Términos.**

$$x H_n(x) = H_{n+1}(x) + \beta_n H_n(x) + \gamma_n H_{n-1}(x) \quad (3.4.4)$$

$$\beta_n = 0, \quad \gamma_n = \frac{n}{2} \quad (3.4.5)$$

**Ecuación diferencial.**

$$y'' - 2x y' + 2n y = 0 \quad (3.4.6)$$

**Relación Diferencial.**

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x) \quad (3.4.7)$$

**Fórmula de Rodrigues.**

$$e^{-x^2} H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} D^n(e^{-x^2}) \quad (3.4.8)$$

**Relación de Estructura.**

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x) \quad (3.4.9)$$

A partir de la expresión explícita de los polinomios mónicos de Hermite, podemos deducir los valores que toma el polinomio y su derivada en el punto 0:

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} \frac{1}{2^{2m}} \quad H_{2m+1}(0) = 0 \quad (3.4.10)$$

$$H_{2m}'(0) = 0 \quad H_{2m+1}'(0) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} \frac{1}{2^{2m}} \quad (3.4.11)$$

Como consecuencia, deducimos unas relaciones que serán utilizadas más adelante en la construcción de los coeficientes polinomiales de los polinomios tipo Sobolev asociados a los polinomios de Hermite:

**Proposición 3.4.1.-**

$$i) \quad H_{2m}(0) = -\frac{1}{2} H_{2m-1}'(0) \quad (3.4.12)$$

$$ii) H_{2m+1}'(0) = (2m+1) H_{2m}(0) \quad (3.4.13)$$

Haciendo uso de la fórmula de Christoffel-Darboux y las expresiones anteriores, podemos dar fórmulas explícitas para los núcleos:

**Proposición 3.4.2.-**

$$i) K_{2m}(0,0) = K_{2m+1}(0,0) = \frac{(2m+1)!}{2^{2m} \sqrt{\pi} (m!)^2} \quad (3.4.14)$$

$$ii) K_{2m-1}^{(1,1)}(0,0) = K_{2m}^{(1,1)}(0,0) = \frac{4m (2m+1)!}{3 \cdot 2^{2m} \sqrt{\pi} (m!)^2} \quad (3.4.15)$$

Sea  $\{Q_n\}_n$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a la modificación del producto escalar habitual de Hermite en el punto  $c=0$  dada por la expresión (3.4.1).

Como consecuencia del teorema 1.3.1 podemos dar una representación para los polinomios  $Q_n$  como combinación lineal de polinomios de Hermite:

**Proposición 3.4.3.-**

$$i) Q_{2m}(x) = H_{2m}(x) \quad (3.4.16)$$

$$ii) Q_{2m+1}(x) = H_{2m+1}(x) - \frac{\lambda}{\lambda_{2m}} (H_{2m+1})'(0) K_{2m}^{(0,1)}(x,0) \quad (3.4.17)$$

donde notaremos  $\lambda_n = 1 + \lambda K_n^{(1,1)}(0,0)$ .

Asímismo, deducimos el valor de estos polinomios y de sus derivadas en el punto 0:

**Corolario 3.4.4.-**

$$i) Q_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} \frac{1}{2^{2m}} \quad Q_{2m+1}(0) = 0 \quad (3.4.18)$$

$$ii) \quad Q'_{2m}(0) = 0 \qquad Q'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{\lambda_{2m}} \quad (3.4.19)$$

Sustituyendo en la expresión de la proposición 3.4.3 la fórmula de Christoffel-Darboux para sustituir el término  $K_{2m}^{(0,1)}(x,0)$ , deducimos una expresión para  $Q_n(x)$  en términos de dos polinomios consecutivos de Hermite con coeficientes polinomiales:

**Proposición 3.4.5.-**

$$x^2 Q_{2m+1}(x) = q_2(x, 2m+1) H_{2m+1}(x) + q_1(x, 2m+1) H_{2m}(x) \quad (3.4.20)$$

donde:

$$q_2(x, 2m+1) = x^2 - \frac{2m+1}{4m} \left[ 1 - \frac{\lambda_{2m-2}}{\lambda_{2m-1}} \right] \quad (3.4.21)$$

$$q_1(x, 2m+1) = \frac{(2m+1)^2}{4m} \left[ 1 - \frac{\lambda_{2m-2}}{\lambda_{2m-1}} \right] x \quad (3.4.22)$$

**Demostración.-** Utilizando las expresiones de la proposición 1.4.2, se tiene:

$$q_2(x, 2m+1) = x^2 - \frac{\lambda}{\lambda_{2m}} \frac{H'_{2m+1}(0)}{k_{2m}} T_1(H_{2m}, 0)(x) = x^2 - q_{2,1}(2m+1) x - q_{2,2}(2m+1)$$

$$q_1(x, 2m+1) = \frac{\lambda}{\lambda_{2m}} \frac{H'_{2m+1}(0)}{k_{2m}} T_1(H_{2m+1}, 0)(x) = q_{1,1}(2m+1) x + q_{1,2}(2m+1)$$

con  $T_1(H_j, 0)(x)$  denotando el polinomio de Taylor de grado 1 asociado a  $H_j(x)$  en el punto 0. Usando las relaciones de la proposición 3.4.1, tendremos:

$$q_{2,1}(2m+1) = \frac{\lambda}{\lambda_{2m}} \frac{H'_{2m+1}(0)H'_{2m}(0)}{k_{2m}} = 0,$$

$$q_{2,2}(2m+1) = \frac{\lambda}{\lambda_{2m}} \frac{H'_{2m+1}(0)H_{2m}(0)}{k_{2m}} = \frac{2m+1}{4m} \left[ 1 - \frac{\lambda_{2m-2}}{\lambda_{2m-1}} \right]$$

$$q_{1,1}(2m+1) = \frac{\lambda}{\lambda_{2m}} \frac{(H'_{2m+1}(0))^2}{k_{2m}} = \frac{(2m+1)^2}{4m} \left[ 1 - \frac{\lambda_{2m-2}}{\lambda_{2m-1}} \right]$$

$$q_{1,2}(2m+1) = \frac{\lambda}{\lambda_{2m}} \frac{H'_{2m+1}(0)H_{2m+1}(0)}{k_{2m}} = 0. \quad \square$$

Como consecuencia se tiene:

**Corolario 3.4.6.-**

$$x^2 Q_{2m+1}(x) = (x^2 - a_{2m}) H_{2m+1}(x) + x a_{2m} H'_{2m+1}(x)$$

donde

$$a_{2m} = \frac{2m+1}{4m} \left[ 1 - \frac{\lambda_{2m-2}}{\lambda_{2m-1}} \right]$$

**Lema 3.4.7.-**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1$$

**Demostración.-** Debido a que  $H'_{2m}(0) = 0$ , la sucesión  $\{\lambda_n\}$  verifica:  $\lambda_{2m-1} = \lambda_{2m}$ . Así, los términos pares de la sucesión  $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$  son 1. Por tanto estudiaremos el valor de dicho cociente para los términos impares. Así, calcularemos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2m+1}}{\lambda_{2m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \lambda K_{2m+1}^{(1,1)}(0,0)}{1 + \lambda K_{2m}^{(1,1)}(0,0)}$$

Aplicando el criterio de Stolz:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2m+1}}{\lambda_{2m}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2m+1} - \lambda_{2m-1}}{\lambda_{2m} - \lambda_{2m-2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{H_{2m+1}'(0)}{H_{2m-1}'(0)} \right]^2 \frac{k_{2m-1}}{k_{2m+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2m+1)^2}{4} \frac{2}{(2m+1)m} = 1 \end{aligned}$$

con lo cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1$ .  $\square$

**Corolario 3.4.8.-**  $a_{2m} \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .

Se suelen definir los *polinomios de Hermite generalizados* como la SPOM  $\{H_n^{(\mu)}\}$  con respecto al producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) |x|^{2\mu} e^{-x^2} dx$$

(ver Chihara, [20] pág. 157) Podemos utilizar ahora la simetría de los polinomios para obtener expresiones de  $Q_n(x)$  en términos de los polinomios de Hermite generalizados:

**Proposición 3.4.9.-** La SPOM  $\{Q_n\}$  asociada al producto escalar (3.4.1) verifica:

$$Q_{2n}(x) = H_{2n}(x) = L_n^{(-1/2)}(x^2)$$

$$Q_{2n+1}(x) = H_{2n+1}(x) + 2n a_{2n} H_{2n-1}^{(1)}(x)$$

**Demostración.-** Utilizando los polinomios mónicos de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$H_{2m}(x) = L_m^{(-1/2)}(x^2)$$

$$H_{2m+1}(x) = x L_m^{(1/2)}(x^2)$$

entonces, a partir del corolario 3.4.6:

$$x Q_{2m+1}(x) = (x^2 - a_{2m}) L_m^{(1/2)}(x^2) + (2m+1) a_{2m} L_m^{(-1/2)}(x^2)$$

pero por la simetría:

$$Q_{2m+1}(x) = x R_m(x^2)$$

y podemos obtener:

$$x R_m(x) = (x - a_{2m}) L_m^{(1/2)}(x) + (2m+1) a_{2m} L_m^{(-1/2)}(x).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la ecuación diferencial para  $L_m^{(-1/2)}(x)$  junto con la relación de estructura::

$$- L_m^{(1/2)}(x) + (2m+1) L_m^{(-1/2)}(x) = 2m x L_{m-1}^{(3/2)}(x),$$

obtenemos

$$R_m(x) = L_m^{(1/2)}(x) + 2m a_{2m} L_{m-1}^{(3/2)}(x)$$

y podemos deducir el resultado.  $\square$

De la anterior proposición deducimos que la sucesión  $\{Q_n\}$  se puede representar como sigue:

$$Q_n(x) = H_n(x) + \alpha_n H_{n-2}^{(1)}(x) \quad n \geq 1 \tag{3.4.23}$$

donde

$$\alpha_{2m} = 0 \quad \alpha_{2m+1} = 2m a_{2m} = \frac{2m+1}{2} \left[ 1 - \frac{\lambda_{2m-2}}{\lambda_{2m-1}} \right] \quad m \in \mathbb{N}$$

Con la anterior notación, la expresión (3.4.20) puede escribirse:

$$\begin{aligned}
 x^2 Q_n(x) &= \left(x^2 - \frac{\alpha_n}{n-1}\right) H_n(x) + n \frac{\alpha_n}{n-1} x H_{n-1}(x) = \\
 &= H_{n+2}(x) + \left[\alpha_n + n + \frac{1}{2}\right] H_n(x) + \frac{n}{2} \left[\alpha_n + \frac{n-1}{2}\right] H_{n-2}(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.4.24}$$

En consecuencia, en la relación (1.4.7) se tendrá

$$\alpha_n^{(n)} = \alpha_n + n + \frac{1}{2}, \quad \alpha_{n-2}^{(n)} = \frac{n(n-1+2\alpha_n)}{4}, \quad \alpha_{n-1}^{(n)} = \alpha_{n+1}^{(n)} = 0$$

y la relación de recurrencia a cinco términos quedará en la forma:

$$x^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x)$$

donde

$$c_{n+1}^{(n)} = 0$$

$$c_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \alpha_n^{(n)} - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{\lambda_{n-1}(0) H'_{n-2}(0)}{k_n} \alpha_{n-2}^{(n)}$$

$$c_{n-1}^{(n)} = 0$$

$$c_{n-2}^{(n)} = \frac{n(n-1)}{4} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{\lambda_{n-3}}{\lambda_{n-2}}$$

De este modo hemos probado:

**Proposición 3.4.10.-** La SPOM  $\{Q_n\}$  verifica una relación de recurrencia a cinco términos:

$$x^2 Q_n(x) = Q_{n+2}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}(x)$$

con

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = H_1(x), \quad Q_2(x) = H_2(x), \quad Q_3(x) = H_3(x) + 2 a_2 x$$

y para  $n \geq 2$

$$c_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \alpha_n^{(n)} - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{H_n'(0)H_{n-2}'(0)}{k_n} \alpha_{n-2}^{(n)}$$

$$c_{n-2}^{(n)} = \frac{n(n-1)}{4} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{\lambda_{n-3}}{\lambda_{n-2}}$$

La sucesión de polinomios  $\{Q_n\}$  se relaciona con la SPOM con respecto a la modificación de la función peso dada por  $x^2\omega(x)$ . En el caso Hermite dichos polinomios ortogonales son los polinomios de Hermite generalizados  $\{H_n^{(1)}\}$ . Debido a la simetría el polinomio  $Q_n(x)$  se expresará como combinación lineal de los polinomios  $H_n^{(1)}$  y  $H_{n-2}^{(1)}$ , siendo los coeficientes de esta expresión fácilmente calculables:

**Proposición 3.4.11.-**

$$Q_n(x) = H_n^{(1)} + a_{n-2}^{(n)} H_{n-2}^{(1)} \quad (3.4.25)$$

donde:

$$a_{2m-2}^{(2m)} = m \quad a_{2m-1}^{(2m+1)} = \frac{\lambda_{2m+1}}{\lambda_{2m}} m \quad (3.4.26)$$

Los polinomios de Hermite generalizados  $H_n^{(1)}(x)$  verifican una relación de recurrencia a tres términos que viene dada por:

$$H_{n+1}^{(1)}(x) = x H_n^{(1)}(x) + \frac{n+\theta_n}{2} H_{n-1}^{(1)}(x), \quad \theta_{2m} = 0 \quad \theta_{2m+1} = 2$$

(ver Chihara [20], pág 158) Sustituyendo esta relación de recurrencia a tres

términos en la proposición anterior se deduce el siguiente:

**Corolario 3.4.12.-**

$$Q_n(x) = x H_{n-1}^{(1)} - \xi_n H_{n-2}^{(1)} \quad (3.4.27)$$

donde:

$$\xi_{2m} = \frac{1}{2} \quad \xi_{2m+1} = m \left[ 1 - \frac{\lambda_{2m+1}}{\lambda_{2m}} \right] \quad (3.4.28)$$

Recíprocamente, podemos expresar los polinomios  $\{H_n^{(1)}\}_n$  en términos de los polinomios  $\{Q_n\}_n$  de la siguiente forma:

**Proposición 3.4.13.-**

$$x^2 H_n^{(1)}(x) = Q_{n+2}(x) + b_n^{(n)} Q_n(x) \quad (3.4.29)$$

donde

$$b_{2m}^{(2m)} = \frac{2m+1}{2} \quad b_{2m+1}^{(2m+1)} = \frac{\lambda_{2m}}{\lambda_{2m+1}} \frac{(2m+3)}{2} \quad (3.4.30)$$

En este caso las propiedades diferenciales no pueden ser obtenidas en forma análoga a las del resto de los ejemplos, debido al carácter no clásico de los polinomios asociados a la modificación de la función peso mediante el polinomio  $x^2$  (recordemos que estos son los polinomios de Hermite generalizados  $H_n^{(1)}(x)$ ). Pero sin embargo, siguiendo la técnica descrita por Chihara ([20], pag. 157) puede obtenerse una fórmula tipo Rodrigues para la sucesión  $\{Q_n\}$ :

**Proposición 3.4.14.-** (Una Fórmula de tipo Rodrigues)

$$e^{-x^2} Q_n(x) = 2^{-n} \left[ (-1)^n D^n (e^{-x^2}) + 4 \alpha_n x^{-2} D^{n-2} (x^n e^{-x^2} K_{n-2}^{(1)}(x)) \right] \quad (3.4.31)$$

donde  $K_{n-2}^{(1)}(x)$  viene dado por:

$$K_{2m}^{(1)}(x) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} {}_1F_1(m, m+2; x^2) \quad (3.4.32)$$

$$K_{2m+1}^{(1)}(x) = \frac{(-1)^m}{(m+2)!} x {}_1F_1(m+1, m+3; x^2) \quad (3.4.33)$$

En cuanto a la ecuación diferencial se tiene:

**Proposición 3.4.15.- (Ecuación Diferencial)**

Los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  verifican la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$A_4(x, n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n(x) + B_5(x, n) \frac{d}{dx} Q_n(x) + C_4(x, n) Q_n(x) = 0 \quad (3.4.34)$$

donde  $A_4(x, n)$  y  $C_4(x, n)$  son polinomios de grado 4, y  $B_5(x, n)$  es de grado 5.

**Demostración.-** Notemos por  $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n/(n-1)$  para  $n > 1$ , entonces la relación (3.4.24) se escribirá:

$$x^2 Q_n(x) = (x^2 - \tilde{\alpha}_n) H_n(x) + \tilde{\alpha}_n x H_n'(x) \quad (3.4.35)$$

derivando:

$$x^2 Q_n'(x) + 2x Q_n(x) = x^2 H_n'(x) + \tilde{\alpha}_n x H_n''(x) + 2x H_n(x)$$

y así:

$$x Q_n'(x) + 2Q_n(x) = x H_n'(x) + \tilde{\alpha}_n H_n''(x) + 2H_n(x)$$

Utilizando la ecuación diferencial de los polinomios de Hermite:

$$x Q_n'(x) + 2Q_n(x) = (1 + 2\tilde{\alpha}_n)x H_n'(x) + 2(1 - n\tilde{\alpha}_n)H_n(x) \quad (3.4.36)$$

Las ecuaciones (3.4.35) y (3.4.36) constituyen un sistema de ecuaciones, cuya solución mediante la regla de Cramer viene dada por:

$$\Delta_2(x,n) H_n(x) = \begin{vmatrix} x^2 Q_n(x) & \tilde{\alpha}_n \\ x Q_n'(x) + 2Q_n(x) & 1 + 2\tilde{\alpha}_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(x,n) x H_n'(x) = \begin{vmatrix} x^2 - \tilde{\alpha}_n & x^2 Q_n(x) \\ 2(1 - n\tilde{\alpha}_n) & x Q_n'(x) + 2Q_n(x) \end{vmatrix}$$

donde  $\Delta_2(x,n)$  es un polinomio de grado 2 que viene dado por:

$$\Delta_2(x,n) = (1 + 2\tilde{\alpha}_n)x^2 + (2n-2)\tilde{\alpha}_n^2 - 3\tilde{\alpha}_n$$

Derivando en la primera de estas ecuaciones y eliminando con la segunda, se llega tras algunos cálculos a:

$$\begin{aligned} & x^2 \Delta_2(x,n) Q_n''(x) + [2(1-x^2)\Delta_2(x,n) - x\Delta_2'(x,n)]x Q_n'(x) + \\ & + [2nx^4 + 2\tilde{\alpha}_n[(n-2)(2n-1)\tilde{\alpha}_n - 5n+2]x^2 - 2\tilde{\alpha}_n((2n-2)\tilde{\alpha}_n - 3)]Q_n(x) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

## 3.5 EL CASO BESSEL.

En 1949, Krall y Frink ([42]), utilizando una variante de la técnica de separación de variables para la resolución de la ecuación de ondas en coordenadas esféricas, obtienen la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + 2(x+1)y' - n(n+1)y = 0 \quad (3.5.1)$$

Cuando  $n$  es un entero no negativo, la ecuación (3.5.1) posee una solución polinómica  $y_n(x)$ , que, con la estandarización  $y_n(0) = 1$ , denominaron el *Polinomio de Bessel* de grado  $n$ . En el mismo artículo, Krall y Frink consideran una generalización de (3.5.1):

$$x^2 y'' + (ax+b)y' - n(n+a-1)y = 0 \quad (3.5.2)$$

donde  $b \neq 0$  y  $a \neq 0, -1, -2, \dots$ , y definen los *Polinomios de Bessel generalizados*  $y_n(x;a,b)$  como la solución polinómica de (3.5.2), con la estandarización  $y_n(0;a,b) = 1$ . Es inmediato comprobar que  $y_n(bx;a,b)$  es independiente de  $b$ , y así, el parámetro  $b$  puede ser fijado arbitrariamente, por ejemplo, como  $b=2$  (otras estandarizaciones habituales suelen ser  $b = \pm 1$ ).

Adoptando la notación de Al-Salam ([6]) consideraremos los polinomios:

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = y_n(x, \alpha+2, 2)$$

donde  $\alpha \neq -2, -3, \dots$ ; a estos polinomios de ahora en adelante los llamaremos *Polinomios de Bessel*. En el mencionado artículo de Krall y Frink se demuestra que los polinomios de Bessel verifican la condición de ortogonalidad:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Y_n^{(\alpha)}(z) Y_m^{(\alpha)}(z) \rho^{(\alpha)}(z) dz = \frac{2^{\alpha+1} (-1)^{n+1} n!}{(2n+\alpha+1) \Gamma(n+\alpha+1)} \delta_{nm} \quad (3.5.3)$$

La integral se extiende a lo largo de la circunferencia unidad en el campo complejo y la función peso  $\rho^{(\alpha)}(z)$  es:

$$\rho^{(\alpha)}(z) = \frac{2^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+1)_k} \left( \frac{x}{z} \right)^k \quad (3.5.4)$$

donde  $(a)_n$  es el llamado Símbolo de Pochhammer, que representa:

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$$

De este modo el funcional lineal asociado a los polinomios de Bessel es un funcional regular no definido positivo.

Para los polinomios de Bessel es conocida (ver Krall y Frink [42], Grosswald [32]) una expresión explícita:

$$Y_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n+\alpha+1)_k \left( \frac{x}{2} \right)^k \quad (3.5.5)$$

si dividimos  $Y_n^{(\alpha)}(x)$  por su coeficiente conductor, que viene dado por:

$$\frac{(n+\alpha+1)_n}{2^n}$$

obtendremos el correspondiente polinomio de Bessel mónico, que de ahora en adelante notaremos por  $B_n^{(\alpha)}(x)$ . Las propiedades de estos polinomios mónicos se obtendrán sin más que ajustar los coeficientes en las correspondientes propiedades de los polinomios  $Y_n^{(\alpha)}(x)$ . De este modo, se obtienen las siguientes propiedades (ver Krall y Frink [42], Grosswald [32]):

**Expresión explícita:**

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \frac{2^n}{(n+\alpha+1)_n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n+\alpha+1)_k \left( \frac{x}{2} \right)^k \quad (3.5.6)$$

**Condición de ortogonalidad:**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} B_n^{(\alpha)}(z) B_m^{(\alpha)}(z) \rho^{(\alpha)}(z) dz = \left( \frac{2^n}{(n+\alpha+1)_n} \right)^2 \frac{2^{\alpha+1} (-1)^{n+1} n!}{(2n+\alpha+1) \Gamma(n+\alpha+1)} \delta_{nm}$$

en particular se tiene:

$$k_n^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (B_n^{(\alpha)}(z))^2 \rho^{(\alpha)}(z) dz = \left( \frac{2^n}{(n+\alpha+1)_n} \right)^2 \frac{2^{\alpha+1} (-1)^{n+1} n!}{(2n+\alpha+1) \Gamma(n+\alpha+1)} \quad (3.5.7)$$

**Relación de Recurrencia a Tres Términos:**

$$x B_n^{(\alpha)}(x) = B_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \beta_n^{(\alpha)} B_n^{(\alpha)}(x) + \gamma_n^{(\alpha)} B_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

donde

$$\beta_n^{(\alpha)} = - \frac{2\alpha}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)} \quad (3.5.8)$$

$$\gamma_n^{(\alpha)} = - \frac{4n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha-1)} \quad (3.5.9)$$

**Ecuación Diferencial:**

$$x^2 y'' + [(\alpha+2)x + 2] y' - n(n+\alpha+1) y = 0 \quad (3.5.10)$$

**Relación Diferencial:**

$$\frac{d}{dx} B_n^{(\alpha)}(x) = n B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.5.11)$$

**Fórmula de Rodrigues:**

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(n+\alpha+1)_n} x^{-\alpha} e^{2/x} D^n (x^{2n+\alpha} e^{-2/x}) \quad (3.5.12)$$

donde  $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ .

**Relación de Estructura:**

$$x^2 \frac{d}{dx} B_n^{(\alpha)}(x) = n \left[ x - \frac{2}{2n+\alpha} \right] B_n^{(\alpha)}(x) + \frac{4n(n+\alpha)}{(2n+\alpha)^2(2n+\alpha-1)} B_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (3.5.13)$$

A partir de la expresión explícita de  $B_n^{(\alpha)}(x)$  se deducen trivialmente las siguientes expresiones para  $B_n^{(\alpha)}(0)$  y  $(B_n^{(\alpha)})'(0)$ :

$$B_n^{(\alpha)}(0) = \frac{2^n}{(n+\alpha+1)_n}$$

$$(B_n^{(\alpha)})'(0) = n \frac{2^{n-1}}{(n+\alpha+2)_{n-1}}$$

De estas expresiones deducimos las relaciones que serán utilizadas más adelante en la construcción de los coeficientes polinomiales de los polinomios tipo Sobolev asociados a los polinomios de Bessel:

**Proposición 3.5.1**

$$i) \quad B_n^{(\alpha)}(0) = \frac{4}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} (B_{n-1}^{(\alpha)})'(0)$$

$$ii) \quad B_{n-1}^{(\alpha)}(0) = \frac{2}{(n-1)(n+\alpha)} (B_{n-1}^{(\alpha)})'(0)$$

$$iii) \quad (B_n^{(\alpha)})'(0) = \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} (B_{n-1}^{(\alpha)})'(0)$$

Notaremos, cuando no haya lugar a confusión, por  $K_n(x,y)$  al núcleo de los polinomios ortogonales mónicos de Bessel respecto a la función peso

$\rho^{(\alpha)}(x)$ . Utilizando la relación de Christoffel-Darboux junto con la fórmula de derivación para los polinomios de Bessel es fácil probar la siguiente:

**Proposición 3.5.2**

$$i) K_{n-1}(0,0) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{2^{\alpha+1} (n-1)!} \quad (3.5.14)$$

$$ii) K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+2)}{2^{\alpha+3} (n-2)!} [n(n+\alpha)-(\alpha+2)] \quad (3.5.15)$$

Sea  $\alpha > -2$ , y consideremos la forma lineal  $u^{(\alpha)}$  asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos  $\{B_n^{(\alpha)}\}_n$ . Asociada a ésta podemos considerar la forma bilineal  $\varphi^{(\alpha)}$ , definida en el espacio de los polinomios reales mediante:

$$\varphi^{(\alpha)}(f,g) = \langle u^{(\alpha)}, fg \rangle + \lambda f'(0)g'(0)$$

Según los resultados del teorema 1.3.1 una condición necesaria y suficiente para que la forma bilineal  $\varphi^{(\alpha)}$  sea no degenerada es que:

$$1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) \neq 0 \quad \forall n \geq 1$$

Dado que la sucesión  $\{K_{n-1}^{(1,1)}(0,0)\}_{n \geq 0}$  diverge en valor absoluto (para  $\alpha > -2$ ) el conjunto de valores  $\lambda$  para los que  $\varphi^{(\alpha)}$  es degenerada está contenido en un intervalo acotado y centrado en el origen, en concreto  $\varphi^{(\alpha)}$  será no degenerada para todo  $\lambda$  tal que:

$$|\lambda| > |K_1^{(1,1)}(0,0)|^{-1} = \frac{2^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)(\alpha+2)}$$

En tal caso, notaremos por  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_n$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondientes a la forma bilineal  $\varphi^{(\alpha)}$ . Utilizando los resultados

$$q_1(x,n) = \left[ \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \right]^2 \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \left[ x + \frac{2}{n(n+\alpha+1)} \right] \quad (3.5.19)$$

**Demostración.-** Recordemos que:

$$q_2(x,n) = x^2 - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} T_1(B_{n-1}^{(\alpha,\beta)},0)(x) = x^2 - q_{2,1}(n) x - q_{2,2}(n)$$

$$q_1(x,n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} T_1(B_n^{(\alpha)},0)(x) = q_{1,1}(n) x + q_{1,2}(n)$$

donde  $T_i(B_j^{(\alpha)},0)(x)$  denota el polinomio de Taylor de grado  $i$  asociado a  $B_j^{(\alpha)}(x)$  en el punto 0. Utilizando los valores de  $q_{i,j}(n)$ , y las expresiones de la proposición 3.5.2, se tiene:

$$\begin{aligned} q_{2,1}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)(B_{n-1}^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \\ &= \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((B_{n-1}^{(\alpha)})'(0))^2}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \\ q_{2,2}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)B_{n-1}^{(\alpha)}(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \frac{2}{(n-1)(n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \\ q_{1,1}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((B_n^{(\alpha)})'(0))^2}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \left[ \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \right]^2 \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \\ q_{1,2}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)B_n^{(\alpha)}(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \left[ \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \right]^2 \frac{2}{n(n+\alpha+1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]. \square \end{aligned}$$

del teorema 1.3.1 podemos obtener la siguiente fórmula de representación para los polinomios  $Q_n^{(\alpha)}$ :

**Proposición 3.5.3.-**

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = B_n^{(\alpha)}(x) - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} (B_n^{(\alpha)})'(0) K_{n-1}^{(0,1)}(x,0) \quad (3.5.16)$$

donde notaremos  $\lambda_n = 1 + \lambda K_n^{(1,1)}(0,C)$ .

Y como consecuencia se obtiene:

**Corolario 3.5.4.-**

$$i) Q_n^{(\alpha)}(0) = \frac{1}{\lambda_{n-1}} \frac{2^n}{(n+\alpha+1)_n} \left[ 1 - \lambda \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+3)}{2^{\alpha+3} (n-2)!} \right]$$

$$ii) (Q_n^{(\alpha)})'(0) = \frac{1}{\lambda_{n-1}} n \frac{2^{n-1}}{(n+\alpha+2)_{n-1}}$$

Aplicando en la expresión (3.5.16) la fórmula de Christoffel-Darboux para sustituir el término  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,0)$ , se obtiene una expresión para  $Q_n^{(\alpha)}(x)$  como combinación lineal de dos polinomios consecutivos  $\{B_i^{(\alpha)}\}_i$  aunque con coeficientes polinomiales:

**Proposición 3.5.5.-**

$$x^2 Q_n^{(\alpha)}(x) = q_2(x,n) B_n^{(\alpha)}(x) + q_1(x,n) B_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (3.5.17)$$

donde:

$$q_2(x,n) = x^2 - \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \left[ x + \frac{2}{(n-1)(n+\alpha)} \right] \quad (3.5.18)$$

$$q_1(x,n) = \left[ \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \right]^2 \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \left[ x + \frac{2}{n(n+\alpha+1)} \right] \quad (3.5.19)$$

**Demostración.-** Recordemos que:

$$q_2(x,n) = x^2 - \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} T_1(B_{n-1}^{(\alpha,\beta)},0)(x) = x^2 - q_{2,1}(n) x - q_{2,2}(n)$$

$$q_1(x,n) = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} T_1(B_n^{(\alpha)},0)(x) = q_{1,1}(n) x + q_{1,2}(n)$$

donde  $T_i(B_j^{(\alpha)},0)(x)$  denota el polinomio de Taylor de grado  $i$  asociado a  $B_j^{(\alpha)}(x)$  en el punto 0. Utilizando los valores de  $q_{i,j}(n)$ , y las expresiones de la proposición 3.5.2, se tiene:

$$\begin{aligned} q_{2,1}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)(B_{n-1}^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \\ &= \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((B_{n-1}^{(\alpha)})'(0))^2}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \\ q_{2,2}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)B_{n-1}^{(\alpha)}(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \frac{2}{(n-1)(n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \\ q_{1,1}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{((B_n^{(\alpha)})'(0))^2}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \left[ \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \right]^2 \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \\ q_{1,2}(n) &= \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)B_n^{(\alpha)}(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} - \left[ \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \right]^2 \frac{2}{n(n+\alpha+1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]. \square \end{aligned}$$

Por los resultados del capítulo 1 sabemos que los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_n$  verifican una relación de recurrencia a cinco términos; aquí trataremos el comportamiento asintótico de los coeficientes de dicha relación. En primer lugar, estableceremos algunos resultados previos.

**Lema 3.5.6.-**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \lambda K_n^{(1,1)}(0,0)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(0,0)} = -1$$

**Demostración.-**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \lambda \frac{(-1)^{n+1} \Gamma(n+\alpha+3)}{2^{\alpha+3} (n-1)!} [(n+1)(n+\alpha+1) - (\alpha+2)]}{1 + \lambda \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+2)}{2^{\alpha+3} (n-2)!} [n(n+\alpha) - (\alpha+2)]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \lambda \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+2)}{2^{\alpha+3} (n-2)!} \frac{n+\alpha+2}{n-1} [(n+1)(n+\alpha+1) - (\alpha+2)]}{1 + \lambda \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+2)}{2^{\alpha+3} (n-2)!} [n(n+\alpha) - (\alpha+2)]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z_n} - \frac{n+\alpha+2}{n-1} [(n+1)(n+\alpha+1) - (\alpha+2)]}{\frac{1}{z_n} + [n(n+\alpha) - (\alpha+2)]} = -1 \end{aligned}$$

puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+2)}{2^{\alpha+3} (n-2)!} = \infty$ .  $\square$

**Lema 3.5.7.-** Sean las sucesiones:

$$a_n = \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)(B_{n-1}^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right]$$

$$b_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)(B_{n-2}^{(\alpha)})'(0)}{k_n^{(\alpha)}} = \frac{(n-2)(2n+\alpha-3)(2n+\alpha-2)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)}{4n(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right]$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

**Demostración.-**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda_{n-1}} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)(B_{n-1}^{(\alpha)})'(0)}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{((B_{n-1}^{(\alpha)})'(0))^2}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] = 0 \end{aligned}$$

Para el otro límite, utilizando los resultados de la proposición 3.5.1, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{(B_n^{(\alpha)})'(0)(B_{n-2}^{(\alpha)})'(0)}{k_n^{(\alpha)}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)(2n+\alpha-3)(2n+\alpha-2)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)}{4n(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{((B_n^{(\alpha)})'(0))^2}{k_n^{(\alpha)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)(2n+\alpha-3)(2n+\alpha-2)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)}{4n(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right] = +\infty. \end{aligned}$$

En virtud del lema anterior.  $\square$

**Proposición 3.5.8.-** (Relación de Recurrencia a cinco términos)

Los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_n$  asociados a los polinomios de Bessel verifican la siguiente relación de recurrencia a cinco términos:

$$x^2 Q_n^{(\alpha)}(x) = Q_{n+2}^{(\alpha)}(x) + c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) + c_n^{(n)} Q_n^{(\alpha)}(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}^{(\alpha)}(x) + c_{n-2}^{(n)} Q_{n-2}^{(\alpha)}(x)$$

con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-1}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-2}^{(n)} = 0$$

**Demostración.-** Recordemos que los coeficientes de la relación de recurrencia a cinco términos venían dados por las expresiones:

$$c_{n+1}^{(n)} = \beta_n^{(\alpha)} + \beta_{n+1}^{(\alpha)} + a_{n+2} - a_n$$

$$c_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} [\gamma_n^{(\alpha)} + \gamma_{n+1}^{(\alpha)} + (\beta_n^{(\alpha)})^2] - b_n \gamma_n^{(\alpha)} \gamma_{n-1}^{(\alpha)} \left[ 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] -$$

$$- \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a_n \left\{ (\beta_{n-1}^{(\alpha)} + \beta_n^{(\alpha)}) \left[ 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} a_{n+1} \right\}$$

$$c_{n-1}^{(n)} = \frac{\lambda_n \lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}^2} \frac{k_n^{(\alpha)}}{k_{n-1}^{(\alpha)}} c_n^{(n-1)}$$

$$c_{n-2}^{(n)} = \frac{\lambda_n \lambda_{n-3}}{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2}} \frac{k_n^{(\alpha)}}{k_{n-2}^{(\alpha)}}$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(\alpha)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n^{(\alpha)}}{k_{n-1}^{(\alpha)}} = 0$$

junto con los dos lemas anteriores, se obtiene inmediatamente que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-1}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-2}^{(n)} = 0$$

Finalmente para  $c_n^{(n)}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} c_n^{(n)} = & \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} [\gamma_n^{(\alpha)} + \gamma_{n+1}^{(\alpha)} + (\beta_n^{(\alpha)})^2] - \\ & - \frac{4(n-1)(n-2)(n+\alpha-1)}{(n+\alpha+1)(2n+\alpha-2)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right] \left[ 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] - \\ & - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a_n \left\{ (\beta_{n-1}^{(\alpha)} + \beta_n^{(\alpha)}) \left[ 1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} a_{n+1} \right\} \end{aligned}$$

y de este modo  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(n)} = 0 \quad \square$

Recordemos que la sucesión de polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}\}$  se relaciona con la SPOM con respecto a la modificación del funcional dada por  $x^2$ . En el caso Bessel, dicha SPOM es  $\{B_n^{(\alpha+2)}\}$ . Siguiendo el esquema del primer capítulo, el polinomio  $Q_n^{(\alpha)}(x)$  se puede expresar como combinación lineal de tres polinomios consecutivos  $\{B_n^{(\alpha+2)}\}_n$  según las expresiones de la proposición 1.7.4, en la siguiente forma:

**Proposición 3.5.9.-**

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = B_n^{(\alpha+2)}(x) + a_{n-1}^{(n)} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + a_{n-2}^{(n)} B_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.5.20)$$

donde:

$$a_{n-2}^{(n)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \frac{4n(n-1)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)} \quad (3.5.21)$$

$$a_{n-1}^{(n)} = \frac{4n}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)} - \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.5.22)$$

Sustituyendo en la proposición anterior la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios  $\{B_n^{(\alpha+2)}\}$  se obtiene:

**Corolario 3.5.10.-** Se verifica:

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = (x - \zeta_n) B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) - \xi_n B_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.5.23)$$

donde:

$$\zeta_n = -\frac{2}{2n+\alpha} + \frac{2n(n+\alpha+1)}{(n-1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)} \left[ 1 - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.5.24)$$

$$\xi_n = -\frac{4(n-1)(n+\alpha+1)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)} \left[ 1 + \frac{n}{n+\alpha+1} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right] \quad (3.5.25)$$

Recíprocamente, los polinomios  $\{B_n^{(\alpha+2)}\}_n$  pueden ser expresados en términos de los  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_n$  de la forma siguiente:

**Proposición 3.5.11.-**

$$x^2 B_n^{(\alpha+2)}(x) = Q_{n+2}^{(\alpha)}(x) + b_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) + b_n^{(n)} Q_n^{(\alpha)}(x) \quad (3.5.26)$$

donde

$$b_n^{(n)} = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{4(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)} \quad (3.5.27)$$

$$b_{n+1}^{(n)} = - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \frac{n+\alpha+2}{n+1} a_n^{(n+1)}. \quad (3.5.28)$$

El caracter clásico de los polinomios  $B_n^{(\alpha+2)}$  nos va a permitir obtener unas propiedades diferenciales para los polinomios  $Q_n^{(\alpha)}$  análogas a las propiedades de los polinomios ortogonales clásicos.

**Proposición 3.5.12.-** (Una Fórmula tipo Rodrigues)

Los polinomios  $Q_n^{(\alpha)}(x)$  verifican:

$$x^{\alpha+2} e^{2/x} Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(n+\alpha+1)_n} D^{n-2} \left\{ x^{2n+\alpha-2} e^{-2/x} \rho(x;n) \right\} \quad (3.5.29)$$

donde  $\rho(x;n)$  es un polinomio de grado 2, y viene dado por:

$$\begin{aligned} \rho(x;n) = & \frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} [(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)x^2 + 4(2n+\alpha+2)x + 4] + \\ & + a_{n-1}^{(n)} (n+\alpha+1) [(2n+\alpha)x + 2] + a_{n-2}^{(n)} (2n+\alpha-1)(2n+\alpha) \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

**Demostración.-** Dada la fórmula de Rodrigues habitual para la sucesión de polinomios  $\{B_n^{(\alpha+2)}\}_n$ , según vimos en (3.5.12), se tendrá:

$$x^{\alpha+2} e^{2/x} B_n^{(\alpha+2)}(x) = \frac{1}{(n+\alpha+3)_n} D^n [x^{2n-\alpha+2} e^{-2/x}]$$

Sustituyendo esta expresión, en la ecuación (3.5.20) se tiene:

$$x^{\alpha+2} e^{2/x} Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(n+\alpha+3)_n} D^n [x^{2n-\alpha+2} e^{-2/x}] +$$

$$+ a_{n-1}^{(n)} \frac{1}{(n+\alpha+2)_{n-1}} D^{n-1} [x^{2n+\alpha} e^{-2/x}] +$$

$$+ a_{n-2}^{(n)} \frac{1}{(n+\alpha+1)_{n-2}} D^{n-2} [x^{2n+\alpha-2} e^{-2/x}]$$

Luego:

$$x^{\alpha+2} e^{2/x} Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(n+\alpha+1)_n} D^{n-2} \left\{ \frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} D^2 [x^{2n+\alpha+2} e^{-2/x}] + \right.$$

$$\left. + a_{n-1}^{(n)} (n+\alpha+1) D [x^{2n+\alpha} e^{-2/x}] + a_{n-2}^{(n)} (2n+\alpha-1)(2n+\alpha) x^{2n+\alpha-2} e^{-2/x} \right\}$$

De donde se deduce:

$$x^{\alpha+2} e^{2/x} Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(n+\alpha+1)_n} D^{n-2} \left\{ x^{2n+\alpha-2} e^{-2/x} \rho(x;n) \right\}$$

donde  $\rho(x;n)$  es un polinomio de grado 2, y viene dado por:

$$\rho(x;n) = \frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} [(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)x^2 + 4(2n+\alpha+1)x + 4] +$$

$$+ a_{n-1}^{(n)} (n+\alpha+1) [(2n+\alpha)x + 2] + a_{n-2}^{(n)} (2n+\alpha-1)(2n+\alpha) \quad \square$$

Por último, podemos deducir de una forma simple una ecuación diferencial para estos polinomios cuyos coeficientes son polinomios cuyo grado es independiente de  $n$ :

**Proposición 3.5.13.-** Los polinomios  $\{Q_n^{(\alpha)}(x)\}_n$  verifican la ecuación diferencial de segundo orden dada por:

$$A_4(x,n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha)}(x) + B_3(x,n) \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) + C_2(x,n) Q_n^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (3.5.31)$$

donde  $A_4(x,n)$  es un polinomio de grado 4,  $B_3(x,n)$  es de grado 3 y  $C_2(x,n)$  es de grado 2.

**Demostración.-** Tomando la relación de estructura para los polinomios  $\{B_i^{(\alpha+2)}\}$  se deduce:

$$B_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) = A_{n-1} x^2 \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) - A_{n-1}(n-1)(x-B_{n-1}) B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x)$$

donde

$$B_{n-1} = \frac{2}{2n+\alpha} \quad \text{y} \quad A_{n-1} = \frac{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2}{4(n-1)(n+\alpha+1)}.$$

Sustituyendo esta fórmula en la expresión del corolario 3.5.10, se tiene:

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = [x - \zeta_n + \xi_n A_{n-1}(n-1)(x-B_{n-1})] B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) - \xi_n A_{n-1} x^2 \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x)$$

luego

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = M_1(x,n) B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + N_2(x,n) \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.5.32)$$

donde  $M_1(x,n)$  es un polinomio de grado 1 y  $N_2(x,n)$  es un polinomio de grado 2. Derivando esta expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) &= M_1'(x,n) B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + [M_1(x,n) + N_2'(x,n)] \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \\ &+ N_2(x,n) \frac{d^2}{dx^2} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x). \end{aligned}$$

Recordando, además, la ecuación diferencial de los polinomios de Bessel, que en este caso se escribe como:

$$x^2 y'' = - [(\alpha+4)x + 2] y' + (n-1)(n+\alpha+2) y$$

y sustituyéndola en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) &= \left[ M_1'(x,n) + \xi_n A_{n-1}(n-1)(n+\alpha+2) \right] B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \\ &+ \left[ M_1(x,n) + N_2'(x,n) + \xi_n A_{n-1}[-2-(\alpha+4)x] \right] \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \end{aligned}$$

con lo cual:

$$\frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) = \tilde{M}_0(x,n) B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \tilde{N}_1(x,n) \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \quad (3.5.33)$$

donde  $\tilde{M}_0(x,n)$  es un polinomio de grado 0 y  $\tilde{N}_1(x,n)$  es un polinomio de grado 1.

Retomando las expresiones (3.5.32) y (3.5.33), tenemos un sistema de ecuaciones y utilizando la regla de Cramer se obtendrá:

$$\Delta_2(x,n) B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) = \begin{vmatrix} Q_n^{(\alpha)}(x) & M_2(x,n) \\ \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) & \tilde{N}_1(x,n) \end{vmatrix} \quad (3.5.34)$$

$$\Delta_2(x,n) \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) = \begin{vmatrix} M_1(x,n) & Q_n^{(\alpha)}(x) \\ \tilde{M}_0(x,n) & \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) \end{vmatrix} \quad (3.5.35)$$

donde  $\Delta_2(x,n) = M_1(x,n)\tilde{N}_1(x,n) - N_2(x,n)\tilde{M}_0(x,n)$  es un polinomio de segundo grado. Derivando la ecuación (3.5.34) se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta_2'(x,n) B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + \Delta_2(x,n) \frac{d}{dx} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) &= \\ = \tilde{N}_1'(x,n) Q_n^{(\alpha)}(x) + [\tilde{N}_1(x,n) - N_2'(x,n)] \frac{d}{dx} Q_n^{(\alpha)}(x) - N_2(x,n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha)}(x) \end{aligned}$$

y combinándola con la ecuación (3.5.35) llegamos a

$$\Delta_2(x,n) N_2(x,n) \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(\alpha)}(x) +$$

$$\begin{aligned}
& + [\Delta_2(x,n)N_2'(x,n) - \Delta_2(x,n)\tilde{N}_1(x,n) + \Delta_2(x,n)M_1(x,n) - \Delta_2'(x,n)N_2(x,n)] \frac{d}{dx}Q_n^{(\alpha)}(x) + \\
& + [\Delta_2'(x,n)\tilde{N}_1(x,n) - \Delta_2(x,n)\tilde{M}_0(x,n) - \Delta_2(x,n)\tilde{N}_1'(x,n)] Q_n^{(\alpha)}(x) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

## CAPITULO 4

### Ceros

- 4.1 Introducción.
- 4.2 Localización de ceros.
- 4.3 Propiedades de separación.
- 4.4 La última raíz de  $Q_n(x)$ .
- 4.5 Una fórmula de cuadratura.
- 4.6 Comportamiento de los ceros de  $Q_n(x)$  frente a  $\lambda$ .

#### 4.1 INTRODUCCION.

El objetivo de este capítulo es estudiar propiedades de los ceros de los polinomios  $Q_n(x)$  ortogonales con respecto al producto escalar

$$\varphi(f,g) = \langle u, fg \rangle + \lambda f'(c)g'(c) \quad (4.1.1)$$

donde  $u$  es un funcional lineal definido positivo,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  y  $c$  es un número real.

Siguiendo a Chihara [20] diremos que un conjunto  $E \subset \mathbb{R}$  es un conjunto soporte para el funcional lineal definido positivo  $u$  si  $\langle u, p \rangle > 0$  para todo polinomio  $p$ , no idénticamente nulo sobre  $E$  y que verifique  $p(x) \geq 0, \forall x \in E$ .

De ahora en adelante, consideraremos que el soporte para el funcional definido positivo  $u$  es un intervalo  $I$ . En tal caso, los ceros de los polinomios ortogonales  $\{P_n(x)\}_n$  asociados a  $u$  son todos reales, simples y contenidos en  $I$ .

En el apartado 2 se estudian los ceros de los polinomios ortogonales  $Q_n(x)$  respecto al producto tipo Sobolev (4.1.1), probando que si  $c \notin I$ ,  $Q_n(x)$  posee  $n$  ceros reales y simples, de los cuales, al menos  $n-1$  se encuentran en el interior de  $I$ .

En el siguiente apartado se prueba que los ceros de  $Q_n(x)$  se entrelazan con los ceros de  $P_n(x)$  y son separados por los ceros del polinomio  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ . Asimismo, se obtienen propiedades de separación con respecto a los ceros del polinomio  $P_{n-1}^{1,c}(x)$ .

A continuación, en el caso de un intervalo acotado, se demuestra que, para  $n$  suficientemente grande y  $c \geq \text{Sup } I$ ,  $Q_n(x)$  posee exactamente una raíz a la derecha de  $c$ ; la cual converge a  $c$  cuando  $n$  tiende a  $+\infty$ , convirtiéndose  $c$  en un atractor para el último cero de  $Q_n(x)$ .

En el apartado 5 se estudia una fórmula de cuadratura para el funcional  $u_1 = (x-c)^2 u$ , basada en los ceros de los polinomios ortogonales tipo Sobolev  $Q_n(x)$ . A partir de esta fórmula de cuadratura será posible probar una cierta propiedad de entrelazamiento entre los ceros de los polinomios  $Q_n(x)$  y  $Q_{n+1}(x)$  contenidos en el intervalo  $I$ .

Finalmente se estudia el comportamiento de los ceros de  $Q_n(x)$  frente a

$\lambda$ , probándose que, cuando  $c \geq \text{Sup } I$ , los ceros de  $Q_n(x)$  son una función creciente y acotada de  $\lambda$ .

#### 4.2 LOCALIZACION DE CEROS.

Como es de esperar, muchas de las propiedades habituales de los ceros de los polinomios ortogonales dejan de ser válidas para este producto escalar. Pero a pesar de todo, se pueden establecer algunos resultados generales.

**Proposición 4.2.1.-** Si  $n \geq 3$ , el polinomio  $Q_n(x)$  posee al menos  $n-2$  ceros distintos de multiplicidad impar en  $\overset{\circ}{I}$ .

**Demostración.-** Sean  $y_{n,1}, \dots, y_{n,k}$  los puntos de  $\overset{\circ}{I}$  en los cuales  $Q_n(x)$  cambia de signo. Llamemos

$$p(x) = (x-y_{n,1}) \dots (x-y_{n,k}),$$

entonces el polinomio  $Q_n(x)p(x)(x-c)^2$  no cambia de signo en el intervalo  $I$ , y por tanto:

$$\varphi(Q_n(x), p(x)(x-c)^2) = \langle u, Q_n(x)p(x)(x-c)^2 \rangle \neq 0.$$

Puesto que  $Q_n$  es un polinomio ortogonal con respecto a  $\varphi$ , se sigue que  $\text{gr}(p) = k \geq n-2$ .  $\square$

Con respecto a las otras dos raíces de  $Q_n(x)$  en general no puede afirmarse nada acerca de ellas. Si  $c \in \overset{\circ}{I}$ , estas dos raíces pueden ser incluso complejas conjugadas, como muestra el siguiente:

**Ejemplo.-** Dado el producto escalar de tipo Sobolev

$$\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx + \lambda f'(c)g'(c)$$

donde  $c = \frac{1}{5}$  y  $\lambda = 10$ , el polinomio ortogonal de grado 3 sería:

$$Q_3(x) = x^3 + \frac{54}{125}x^2 - \frac{39}{125}x - \frac{18}{125}$$

el cual posee una raíz real y dos raíces complejas conjugadas, cuyos valores aproximados son:  $x=0.566769$ ,  $x=-0.499385 \pm 0.0684593 i$ .

Sólamente cuando  $c \notin \overset{\circ}{I}$  estaremos en condiciones de asegurar el carácter real de todas las raíces de  $Q_n(x)$ .

**Proposición 4.2.2.-** Si  $c \notin \overset{\circ}{I}$ , los ceros de  $Q_n(x)$  son reales, simples y al menos  $n-1$  de ellos están situados en  $\overset{\circ}{I}$ .

**Demostración.-** Supongamos que  $I$  está acotado superiormente y que  $c \geq \text{Sup } I$ . Sean  $y_{n,1}, \dots, y_{n,k}$  los puntos de  $\overset{\circ}{I}$  en los que  $Q_n(x)$  cambia de signo y sea

$$p(x) = (x-y_{n,1}) \dots (x-y_{n,k}).$$

Construimos un polinomio  $\omega(x) = p(x)(x-\alpha)$  tal que  $\omega'(c) = 0$ . Para ello basta tomar  $\alpha = c + p(c)/p'(c)$ .

Es obvio que si  $c \geq \text{Sup } I$ , entonces  $p(c)/p'(c) > 0$  y  $\alpha > c$ . De este modo  $\alpha \notin I$  y el polinomio  $Q_n(x)\omega(x)$  no cambia de signo en  $I$ , así

$$\varphi(Q_n(x), \omega(x)) = \langle u, Q_n(x)\omega(x) \rangle = 0$$

y por tanto  $\deg(\omega) \geq n$  y  $k \geq n-1$ .

Luego  $n-1$  de las raíces son reales, simples y contenidas en  $\overset{\circ}{I}$ ; claramente esto implica que la otra raíz también es real y simple.  $\square$

**Nota.** Todas las raíces de  $Q_n(x)$  son reales y simples,  $n-1$  de ellas están contenidas en  $I$  y con respecto a la otra, en principio, nada podemos asegurar sobre su posición. Aunque sí podemos dar alguna indicación acerca de su localización relativa al intervalo  $I$ .

Para simplificar, en adelante, se supondrá que el intervalo  $I$  está acotado superiormente y que  $c \geq \text{Sup } I$ , puesto que el otro caso es completamente análogo y los correspondientes resultados se obtendrían a partir de estos simplemente cambiando la variable  $x$  por  $-x$ .

**Proposición 4.2.3.-** Si  $c \geq \text{Sup } I$  y  $Q_n(x)$  posee una raíz que no está contenida en  $I$ , entonces esta raíz está situada a la derecha de  $\text{Sup } I$ .

**Demostración.-** Sean  $y_{n,1}, \dots, y_{n,n}$  los ceros de  $Q_n(x)$ , y sean  $y_{n,1}, \dots, y_{n,n-1}$  aquellas raíces que están contenidas en  $I$ . Llamemos

$$\omega(x) = (x-y_{n,1}) \dots (x-y_{n,n-1}),$$

entonces:

$$\varphi(Q_n(x), \omega(x)) = \langle u, Q_n(x)\omega(x) \rangle + \lambda Q_n'(c)\omega'(c) = 0$$

y de

$$Q_n'(c) = \frac{P_n'(c)}{\lambda_{n-1}} > 0$$

donde  $\lambda_{n-1} = 1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)$ , obtenemos

$$\langle u, Q_n(x)\omega(x) \rangle = -\lambda Q_n'(c)\omega'(c) < 0.$$

Puesto que  $Q_n(x)\omega(x)$  no cambia de signo en  $I$ , se tendrá  $Q_n(x)\omega(x) < 0$  para todo  $x$  de  $I$ , es decir:  $x - y_{n,n} < 0$  para  $x \in I$  y por tanto  $y_{n,n} > \text{Sup } I$ .  $\square$

### 4.3 PROPIEDADES DE SEPARACION PARA LAS RAICES DE $Q_n(x)$ .

De ahora en adelante supondremos que  $c \geq \text{Sup } I$ . Tratamos de estudiar la posición relativa de las raíces de  $Q_n(x)$  con respecto a las de los polinomios ortogonales  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$ , asociados al funcional  $u$ , y con respecto a las del polinomio ortogonal  $P_{n-1}^{1,c}(x)$ , asociado al funcional  $u_1$ . Recordemos previamente algunas propiedades relativas a las raíces de estos polinomios.

**Lema 4.3.1.** - i) El polinomio  $K_{n-1}(x,c)$  tiene  $n-1$  ceros reales y simples contenidos en  $\overset{\circ}{I}$ , que separan a los de  $P_n(x)$ .

ii) El polinomio  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$  posee  $n-1$  ceros reales, simples y que separan a los de  $P_n(x)$  (y por tanto están contenidos en  $\overset{\circ}{I}$ ).

iii) Los ceros del polinomio  $P_{n-1}^{1,c}(x)$  separan a los de  $P_n(x)$ .

**Demostración.** - i) Sean  $x_{n,1} < \dots < x_{n,n}$  las  $n$  raíces de  $P_n(x)$ , sustituyendo en la relación de Christoffel-Darboux se tiene que las cantidades

$$(x_{n,i}-c) K_{n-1}(x_{n,i},c) = - \frac{1}{k_{n-1}} P_{n-1}(x_{n,i})P_n(c)$$

$$(x_{n,i+1}-c) K_{n-1}(x_{n,i+1},c) = - \frac{1}{k_{n-1}} P_{n-1}(x_{n,i+1})P_n(c)$$

tienen signos opuestos, ya que  $P_{n-1}(x_{n,i})P_{n-1}(x_{n,i+1}) < 0$ , debido a la propiedad de separación de los ceros de los polinomios ortogonales estándar  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$  (Chihara, [20] pág. 28). De este modo  $K_{n-1}(x,c)$  cambia de signo entre cada dos ceros consecutivos de  $P_n(x)$ , y usando que  $P_n(x)$  posee  $n$  ceros reales y simples, el resultado queda probado.

ii) Como consecuencia de la relación de Christoffel-Darboux se tenía:

$$(x-c)^2 K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) = \frac{1}{k_{n-1}} \left[ P_n(x)T_1(P_{n-1},c)(x) - P_{n-1}(x)T_1(P_n,c)(x) \right].$$

Bastará probar que el término de la derecha cambia de signo entre cada dos ceros consecutivos de  $P_n(x)$ , con lo cual  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$  tendrá un cero entre cada dos de  $P_n(x)$ .

Notemos, como en el apartado anterior, por  $x_{n,1} < \dots < x_{n,n}$  a las  $n$  raíces de  $P_n(x)$ . Para  $x \geq x_{n,n}$ ,  $P_n(x)$  es una función convexa y por tanto:

$$T_1(P_n, c)(x) \leq P_n(x) \quad \text{para } x \geq x_{n,n}$$

en particular  $T_1(P_n, c)(x_{n,n}) < 0$  y así la única raíz de  $T_1(P_n, c)(x)$  está a la derecha de  $x_{n,n}$ . De este modo

$$T_1(P_n, c)(x_{n,i}) < 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

En consecuencia:

$$(x_{n,i} - c)^2 K_{n-1}^{(0,1)}(x_{n,i}, c) = - \frac{1}{k_{n-1}} P_{n-1}(x_{n,i}) T_1(P_n, c)(x_{n,i})$$

$$(x_{n,i+1} - c)^2 K_{n-1}^{(0,1)}(x_{n,i+1}, c) = - \frac{1}{k_{n-1}} P_{n-1}(x_{n,i+1}) T_1(P_n, c)(x_{n,i+1})$$

tienen signos opuestos ya que  $P_{n-1}(x_{n,i}) P_{n-1}(x_{n,i+1}) < 0$ , debido a la propiedad de separación de los ceros de los polinomios ortogonales estándar  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$ .

iii) Recordando la expresión (1.7.1)

$$(x-c)P_{n-1}^{1,c}(x) = P_n(x) - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}(x,c).$$

y sustituyendo en dos raíces consecutivas de  $P_n(x)$ , se tiene que

$$(x_{n,i} - c) P_{n-1}^{1,c}(x_{n,i}) = - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}(x_{n,i}, c)$$

$$(x_{n,i+1} - c) P_{n-1}^{1,c}(x_{n,i+1}) = - \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} K_{n-1}(x_{n,i+1}, c)$$

tienen signos opuestos, como consecuencia del apartado i). Así  $P_{n-1}^{i,c}(x)$  cambia de signo entre cada par de raíces consecutivas de  $P_n(x)$  y se obtiene la propiedad de separación.  $\square$

**Proposición 4.3.2.-** *Notemos por:*

- $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$  los ceros de  $P_n(x)$
- $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n}$  los ceros de  $Q_n(x)$
- $z_{n-1,1} < z_{n-1,2} < \dots < z_{n-1,n-1}$  los ceros de  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ .

Entonces, los ceros del polinomio  $Q_n(x)$  separan a los de  $P_n(x)$  en la forma siguiente:

$$x_{n,1} < y_{n,1} < x_{n,2} < y_{n,2} < \dots < x_{n,n} < y_{n,n}$$

Además los ceros de  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$  separan también a los ceros de  $Q_n(x)$ .

**Demostración.-** Recordemos la expresión para el polinomio  $Q_n(x)$  dada en el teorema 1.3.1:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda Q_n'(c) K_{n-1}^{(0,1)}(x,c).$$

donde  $Q_n'(c) = \frac{P_n'(c)}{\lambda_{n-1}}$ .

Utilizando el apartado ii) del lema anterior deducimos que:

$$Q_n(x_{n,i}) = -\lambda Q_n'(c) K_{n-1}^{(0,1)}(x_{n,i},c)$$

$$Q_n(x_{n,i+1}) = -\lambda Q_n'(c) K_{n-1}^{(0,1)}(x_{n,i+1},c)$$

tienen signos opuestos, pues entre  $x_{n,i}$  y  $x_{n,i+1}$  hay un único cero de  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ . Así podemos asegurar la existencia de un cero de  $Q_n(x)$  en cada intervalo  $]x_{n,i}, x_{n,i+1}[$ . Finalmente:

$$Q_n(x_{n,n}) = -\lambda Q_n'(c) K_{n-1}^{(0,1)}(x_{n,n},c) < 0$$

puesto que  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c) > 0, \forall x > z_{n-1,n-1}$ .

Con lo cual queda probado que:

$$x_{n,1} < y_{n,1} < x_{n,2} < y_{n,2} < \dots < x_{n,n} < y_{n,n}$$

Observemos que esta relación implica que:

$$P_n(y_{n,i}) P_n(y_{n,i+1}) < 0$$

y por tanto:

$$K_{n-1}^{(0,1)}(y_{n,i},c) K_{n-1}^{(0,1)}(y_{n,i+1},c) < 0$$

de donde se deduce que entre cada dos ceros de  $Q_n(x)$  también existe un cero de  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ .  $\square$

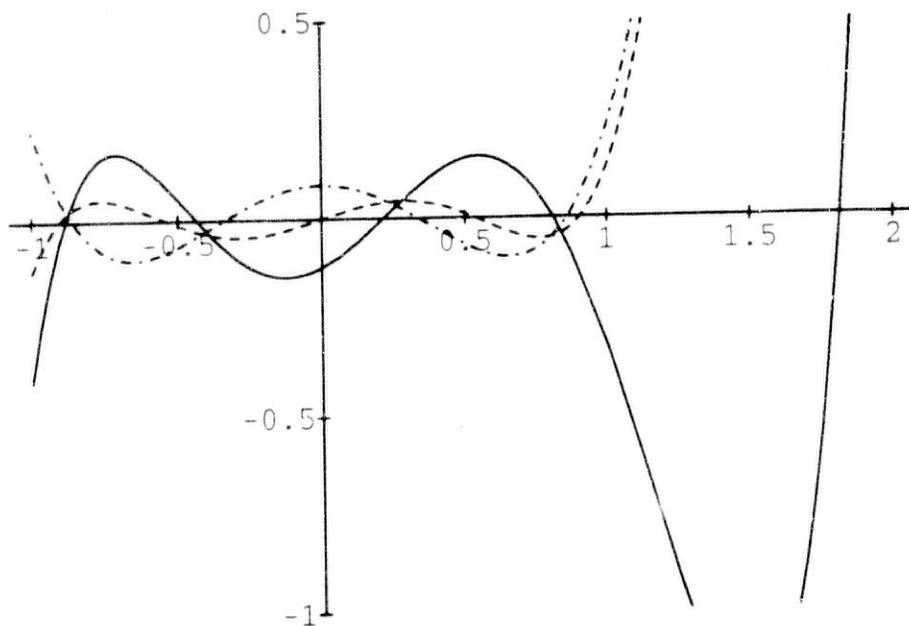


Figura 4.1

**Nota.-** La posición real de los ceros es:

$$x_{n,1} < y_{n,1} < z_{n-1,1} < x_{n,2} < y_{n,2} < z_{n-1,2} < \dots < z_{n-1,n-1} < x_{n,n} < y_{n,n}$$

**Proposición 4.3.3.-** Los ceros de  $P_{n-1}(x)$  se entrelazan con los ceros de  $Q_n(x)$ , verificándose:

$$x_{n,1} < y_{n,1} < x_{n-1,1} < y_{n,2} < x_{n-1,2} < \dots < y_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n} < y_{n,n}$$

**Demostración.-** Consideremos la relación entre  $Q_n(x)$ ,  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$  dada por la proposición 1.4.2:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda Q'_n(c) \frac{1}{k_{n-1}} \frac{P_n(x)T_1(P_{n-1},c)(x) - P_{n-1}(x)T_1(P_n,c)(x)}{(x-c)^2}$$

Evaluando en  $x_{n-1,i}$  quedaría:

$$Q_n(x_{n-1,i}) = P_n(x_{n-1,i}) \left[ 1 - Q'_n(c) \frac{1}{k_{n-1}} \frac{T_1(P_{n-1},c)(x_{n-1,i})}{(x_{n-1,i} - c)^2} \right]$$

con lo cual  $Q_n(x_{n-1,i})$  y  $P_n(x_{n-1,i})$  tienen idéntico signo. Y de la propiedad de separación de las raíces de  $P_{n-1}(x)$ , con respecto a las de  $P_n(x)$ , es inmediato que las raíces de  $P_{n-1}(x)$  separan a las de  $Q_n(x)$ .  $\square$

En la figura 4.1 se muestra un ejemplo de las dos propiedades de separación anteriores. En esta figura se ha considerado la medida de Legendre en el intervalo  $[-1,1]$ , el punto  $c = 1.5$  y  $\lambda = 0.1$ . Las gráficas corresponden a los polinomios  $Q_5(x)$  (trazo continuo),  $P_5(x)$  (trazo de rayas) y  $P_4(x)$  (trazo de puntos y rayas).

**Lema 4.3.4.-** Se verifican las siguientes desigualdades:

$$i) \frac{P'_n(c)}{P_n(c)} > \frac{K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}{K_{n-1}(c,c)}$$

$$ii) \frac{P'_n(c)}{P_n(c)} > \frac{K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}$$

$$iii) \frac{P'_n(c)}{P_n(c)} > \frac{(P_{n-1}^{1,c})'(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c)}$$

En las tres desigualdades, si  $I$  es un intervalo acotado la primera sucesión diverge si y sólo si lo hace la segunda.

**Demostración.-** i) Sean  $w_{n-1,1} < w_{n-1,2} < \dots < w_{n-1,n-1}$  los ceros de  $K_{n-1}(x,c)$ . A partir del lema 4.3.1 obtenemos:

$$\frac{P'_n(c)}{P_n(c)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c-x_{n,i}} > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{c-w_{n-1,j}} + \frac{1}{c-x_{n,1}} > \frac{K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}{K_{n-1}(c,c)}$$

La divergencia de la primera sucesión se deduce trivialmente a partir de la divergencia de la segunda y el recíproco se deduce a partir del criterio de Stolz, (T. J. Bromwich [15], pag. 414), puesto que si  $I$  es un intervalo acotado la sucesión  $\{K_n(c,c)\}_n$  es monótona creciente y diverge positivamente, (Freud, [30]) con lo cual:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n^{(0,1)}(c,c)}{K_n(c,c)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n^{(0,1)}(c,c) - K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}{K_n(c,c) - K_{n-1}(c,c)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(c)}{P_n(c)}$$

ii) Es similar a la demostración anterior.

iii) La desigualdad se obtiene a partir del apartado iii) del lema 4.3.1, puesto que si notamos por  $x_{n-1,1}^c < x_{n-1,2}^c < \dots < x_{n-1,n-1}^c$  los ceros de  $P_{n-1}^{1,c}(x)$ ,

obtenemos:

$$\frac{P_n'(c)}{P_n(c)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c - \lambda_{ni}} > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{c - x_{n-1,j}^c} + \frac{1}{c - \gamma_{n,1}^c} > \frac{(P_{n-1}^{1,c})'(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c)}$$

Para la afirmación sobre la divergencia es suficiente recordar que los polinomios  $P_n^{1,c}(x)$  son los núcleos de  $K_n(x,c)$ .  $\square$

**Nota.-** Conviene destacar en el lema anterior que en realidad i) es consecuencia de ii), puesto que de la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene

$$\left[ K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) \right]^2 \leq K_{n-1}(c,c) K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)$$

y por tanto:

$$\frac{K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}{K_{n-1}(c,c)} \leq \frac{K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}$$

Estudiemos ahora la posición relativa de las raíces de los polinomios  $Q_n(x)$  y  $P_{n-1}^{1,c}(x)$ .

**Proposición 4.3.5.-** Si  $Q_n(c) < 0$ , entonces las raíces de  $Q_n(x)$  verifican la propiedad de separación:

$$x_{n-1,1}^c < y_{n,1} < x_{n-1,2}^c < y_{n,2} < \dots < x_{n-1,n-1}^c < y_{n,n-1} < c < y_{n,n}$$

donde por  $x_{n-1,1}^c < x_{n-1,2}^c < \dots < x_{n-1,n-1}^c$  denotamos a las raíces de  $P_{n-1}^{1,c}(x)$ .

**Demostración.-** A partir de la expresión de  $Q_n(x)$  en términos de los  $\{P_j^{1,c}(x)\}$  obtenida en el corolario 1.7.5, tenemos:

$$Q_n(x) = (x - (\beta_{n-1}^c - a_{n-1}^{(n)})) P_{n-1}^{1,c}(x) - (\gamma_{n-1}^c - a_{n-2}^{(n)}) P_{n-2}^{1,c}(x)$$

De este modo, si  $\gamma_{n-1}^c - a_{n-2}^{(n)} \neq 0$ :

$$\text{sign}(Q_n(x_{n-1,i}^c)) \neq \text{sign}(Q_n(x_{n-1,i+1}^c)),$$

y por tanto entre cualesquiera dos raíces consecutivas de  $P_{n-1}^{1,c}(x)$  existe al menos una raíz de  $Q_n(x)$ .

Consideremos ahora el coeficiente  $\gamma_{n-1}^c - a_{n-2}^{(n)}$ . A partir del lema 4.3.4 obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle u_1, (P_{n-2}^{1,c})^2 \rangle (a_{n-2}^{(n)} - \gamma_{n-1}^c) &= \langle u, Q_n(x)(x-c)^2 P_{n-2}^{1,c}(x) \rangle - \langle u_1, (P_{n-1}^{1,c}(x))^2 \rangle = \\ &= \lambda Q_n'(c) P_n'(c) - \frac{P_n(c)^2}{K_{n-1}(c,c)} > \\ &> \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} \left[ \lambda Q_n'(c) K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) - P_n(c) \right] = \frac{P_n(c)}{K_{n-1}(c,c)} (-Q_n(c)) > 0 \end{aligned}$$

Así  $Q_n(x_{n-1,i}^c) > 0$ , y deducimos la propiedad de separación.  $\square$

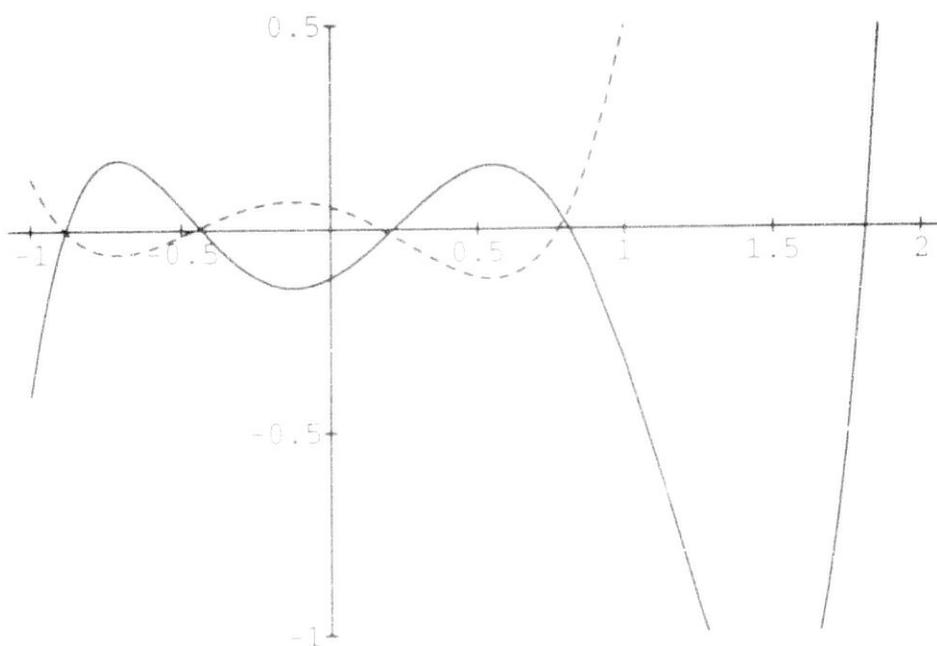


Figura 4.2

En la figura 4.2 se muestra un ejemplo de esta propiedad de separación. En esta figura se ha considerado la medida de Legendre en el intervalo  $[-1,1]$ , el punto  $c = 1.5$  y  $\lambda = 0.1$ . Las gráficas corresponden a los polinomios  $Q_5(x)$  (trazo continuo) y  $P_4^{1,c}(x)$  (trazo discontinuo).

#### 4.4 LA ÚLTIMA RAÍZ DE $Q_n(x)$ .

Para determinar la posición del último cero de  $Q_n(x)$ , comenzaremos por estudiar el comportamiento de la sucesión  $\left\{ \frac{Q_n(c)}{Q'_n(c)} \right\}_n$

**Proposición 4.4.1.-** Si  $c \geq \text{Sup } I$ , la sucesión  $\left\{ \frac{Q_n(c)}{Q'_n(c)} \right\}_n$  es decreciente.

**Demostración.-** Por la proposición 1.4.1 se tiene:

$$P_n(c)P'_{n+1}(c) - P_{n+1}(c)P'_n(c) = \lambda_{n-1} [Q_n(c)Q'_{n+1}(c) - Q_{n+1}(c)Q'_n(c)]$$

De la forma confluyente de la relación de Christoffel-Darboux se deduce que la expresión anterior es positiva y de la positividad de  $\lambda_{n-1}$ ,  $Q'_n(c)$  y  $Q'_{n+1}(c)$ , el resultado es inmediato.  $\square$

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si existe un  $N$  tal que  $Q_N(c) < 0$ , entonces  $Q_n(c) < 0$  para todo  $n \geq N$ ; esto es, si algún polinomio posee alguna raíz a la derecha de  $c$ , lo mismo ocurrirá con todos los posteriores.

Probaremos que para un intervalo finito y  $n$  suficientemente grande se verifica que  $Q_n(c) < 0$  y de este modo  $Q_n(x)$  posee una raíz a la derecha de  $c$ . En el caso de un intervalo infinito, daremos condiciones suficientes para que se verifique dicha condición.

De acuerdo con la proposición 1.7.3, si  $c \geq \text{Sup } I$ , se tiene:

$$Q_n(x) = \frac{1}{\lambda_{n-1}} \left\{ [1 - \lambda A_n] P_n(x) + \lambda A_n B_n K_{n-1}(c,c) (x-c) P_{n-1}^{1,c}(x) + \lambda B_n K_{n-1}(c,c) K_{n-2}^{1,c}(c,c) (x-c)^2 P_{n-2}^{2,c}(x) \right\}$$

donde

$$A_n = \frac{P_n'(c)}{P_n(c)} K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) - K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) = \frac{(P_{n-1}^{1,c})'(c) K_{n-1}(c,c)}{P_n(c)} \quad (4.4.1)$$

$$B_n = \frac{P_n'(c)}{K_{n-1}(c,c) P_n(c) - K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) P_n(c)} = \frac{P_n'(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c) K_{n-1}(c,c)} \quad (4.4.2)$$

por tanto

$$Q_n(c) = \frac{P_n(c)}{\lambda_{n-1}} [1 - \lambda A_n] \quad (4.4.3)$$

y observamos que el signo de  $Q_n(c)$  depende solamente del signo de  $1 - \lambda A_n$ . En consecuencia, bastará estudiar la sucesión  $\{A_n\}$ .

**Lema 4.4.2.-** La sucesión  $\{A_n\}_n$  es creciente y positiva.

**Demostración.-** A partir de la expresión (4.4.1) es evidente que  $A_n > 0, \forall n \geq 2$ .

Para demostrar el crecimiento de la sucesión, recordemos que de la forma confluyente de la relación de Christoffel-Darboux, se deduce que la sucesión:

$$\left\{ \frac{P_n'(c)}{P_n(c)} \right\}_n$$

es creciente. De esta forma:

$$\frac{P'_n(c)}{P_n(c)} K_n^{(0,1)}(c,c) < \frac{P'_{n+1}(c)}{P_{n+1}(c)} K_n^{(0,1)}(c,c)$$

$$\frac{P'_n(c)}{P_n(c)} \left[ K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) + \frac{P_n(c)P'_n(c)}{k_n} \right] < \frac{P'_{n+1}(c)}{P_{n+1}(c)} K_n^{(0,1)}(c,c)$$

de donde

$$\frac{P'_n(c)}{P_n(c)} K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) - K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) < \frac{P'_{n+1}(c)}{P_{n+1}(c)} K_n^{(0,1)}(c,c) - K_n^{(1,1)}(c,c)$$

con lo que  $A_n < A_{n+1}$ .  $\square$

**Lema 4.4.3.-** La sucesión  $\{B_n\}_n$  es decreciente y positiva.

**Demostración.-** Evidentemente  $B_n > 0$ ,  $\forall n \geq 1$ , por la expresión (4.4.2).

Por otro lado, de forma análoga a la demostración de la proposición anterior, se tiene:

$$\frac{P_{n+1}(c)}{P'_{n+1}(c)} K_n^{(0,1)}(c,c) < \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} K_n^{(0,1)}(c,c)$$

$$\frac{P_{n+1}(c)}{P'_{n+1}(c)} K_n^{(0,1)}(c,c) < \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} \left[ K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) + \frac{P_n(c)P'_n(c)}{k_n} \right]$$

$$\frac{P_{n+1}(c)}{P'_{n+1}(c)} K_n^{(0,1)}(c,c) - K_n(c,c) < \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) - K_{n-1}(c,c)$$

Así, la sucesión  $\left\{ K_{n-1}(c,c) - \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) \right\}_n$  es creciente, y puesto que

$$B_n = \frac{P'_n(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c)K_{n-1}(c,c)} = \frac{1}{K_{n-1}(c,c) - \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)}$$

la sucesión  $\{B_n\}_n$  es decreciente.  $\square$

**Lema 4.4.4.-** La sucesión  $\{A_n B_n\}_n$  es creciente y positiva.

**Demostración.-** Utilizando las expresiones (4.4.1) y (4.4.2) para  $A_n$  y  $B_n$ , se tiene:

$$A_n B_n = \frac{P'_n(c) (P_{n-1}^{1,c})'(c)}{P_n(c) P_{n-1}^{1,c}(c)}$$

Basta recordar que las sucesiones

$$\left\{ \frac{P'_n(c)}{P_n(c)} \right\}_n \quad \left\{ \frac{(P_{n-1}^{1,c})'(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c)} \right\}_n$$

son ambas crecientes y positivas.  $\square$

**Teorema 4.4.5.-** Si el intervalo de ortogonalidad de la SPOM  $\{P_n(x)\}_n$  está acotado, entonces:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: Q_n(c) < 0 \quad \forall n \geq n_0$$

Esto es, existe un número natural  $n_0$  a partir del cual los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  tienen la última raíz a la derecha de  $c$ .

**Demostración.-** Por la relación (4.4.3),  $Q_n(c)$  es negativo si y solo si

$$\frac{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{\lambda K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)} < \frac{P_n'(c)}{P_n(c)}$$

De este modo, si denotamos por  $z_{n-1,1} < z_{n-1,2} < \dots < z_{n-1,n-1}$  a las raíces del polinomio  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ , a partir del lema 4.3.1 obtendremos:

$$\frac{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{\lambda K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)} = \frac{1}{\lambda K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{c - z_{n-1,j}} < \frac{1}{\lambda K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{c - x_{n,i}}$$

Así, es suficiente demostrar que

$$\frac{1}{\lambda K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)} < \frac{1}{c - \xi_1} < \frac{1}{c - x_{n,1}}$$

donde  $\xi_1$  representa el extremo inferior del verdadero intervalo de ortogonalidad para los polinomios  $P_n(x)$ . Finalmente la desigualdad

$$\frac{c - \xi_1}{\lambda} < K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)$$

se verifica para un  $n$  suficientemente grande dada la divergencia de la sucesión  $\{K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)\}_n$  para un intervalo de ortogonalidad acotado.  $\square$

Para un intervalo no acotado podemos dar condiciones suficientes para que el mayor cero de  $Q_n(x)$  esté a la derecha de  $c$ .

**Teorema 4.4.6.-** Si la sucesión  $\{P_n'(c)/P_n(c)\}_n$  diverge, entonces:

$$\exists m \in \mathbb{N}: Q_n(c) < 0, \forall n \geq m.$$

**Demostración.-** Por hipótesis, la sucesión:

$$A_n B_n = \frac{P_n'(c)}{P_n(c)} \frac{(P_{n-1}^{1,c})'(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c)}$$

diverge positivamente. Por los lemas 4.4.2 y 4.4.3,  $\{A_n\}_n$  es creciente y  $\{B_n\}_n$  es decreciente, por tanto  $\{A_n\}_n$  diverge positivamente. Por último, por la expresión (4.4.3) tenemos

$$Q_n(c) = \frac{P_n(c)}{\lambda_{n-1}} (1 - \lambda A_n)$$

y el resultado es evidente.  $\square$

**Nota.-** Escribiendo

$$\frac{P'_n(c)}{P_n(c)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c - x_{n,i}} > \frac{n}{c - x_{n,1}}$$

obtenemos la divergencia de la sucesión  $\{P'_n(c)/P_n(c)\}_n$  si el verdadero intervalo de ortogonalidad para los polinomios  $P_n(x)$  está acotado, si  $x_{n,1}$  es un infinito de orden menor que  $n$ , o bien si  $\{x_{n,n}\}_n$  converge hacia  $c$  (lo cual puede ocurrir sólo si  $c$  es el extremo superior del verdadero intervalo de ortogonalidad).

**Proposición 4.4.7.-** *En las condiciones del teorema 4.4.6, la sucesión decreciente  $\{Q_n(c)/Q'_n(c)\}_n$  diverge a  $-\infty$ .*

**Demostración.-** De la expresión (4.4.3) deducimos:

$$\frac{Q_n(c)}{Q'_n(c)} = \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} (1 - \lambda A_n) = \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} - \frac{P_n(c)}{P'_n(c)} \lambda A_n$$

y el resultado es inmediato puesto que la sucesión  $\{P_n(c)/P'_n(c)\}_n$  tiende hacia cero por hipótesis y la sucesión

$$\frac{P_n(c)}{P'_n(c)} \lambda A_n = \lambda \frac{(P_{n-1}^{1,c})'(c)}{P_{n-1}^{1,c}(c)}$$

diverge a  $+\infty$ , por el lema 4.3.4.  $\square$

En las anteriores condiciones, es posible probar que  $c$  es un atractor para la última raíz de  $Q_n(x)$ :

**Proposición 4.4.8.** - Si  $I$  está acotado y  $Q_n(c) < 0$ , se verifica:

$$c < y_{n,n} < c + \frac{c - \xi_1}{n-1}$$

y por tanto  $\{y_{n,n}\}$  converge a  $c$ .

**Demostración.** De la desigualdad:

$$0 > \frac{Q'_n(c)}{Q_n(c)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{c - y_{n,j}} - \frac{1}{y_{n,n} - c}$$

se deduce:

$$\frac{1}{y_{n,n} - c} > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{c - y_{n,j}} > \frac{n-1}{c - y_{n,1}} > \frac{n-1}{c - \xi_1}$$

y por tanto:

$$y_{n,n} < c + \frac{c - \xi_1}{n-1} . \quad \square$$

**Nota .-** El resultado anterior es válido siempre que  $y_{n,1}$  sea un infinito de orden menor que  $n$  o esté acotado.

En la figura 4.3 se muestra un ejemplo de la propiedad de atracción de ceros para el punto  $c$ . En esta figura se ha considerado la medida de Legendre en el intervalo  $[-1,1]$ , el punto  $c = 1.5$  y  $\lambda = 0.1$ . Las gráficas corresponden a los polinomios  $Q_i(x)$  para  $i = 4,5,6,7$ . Obsérvese como el mayor de los ceros de cada polinomio está cada vez más próximo a  $c$ .

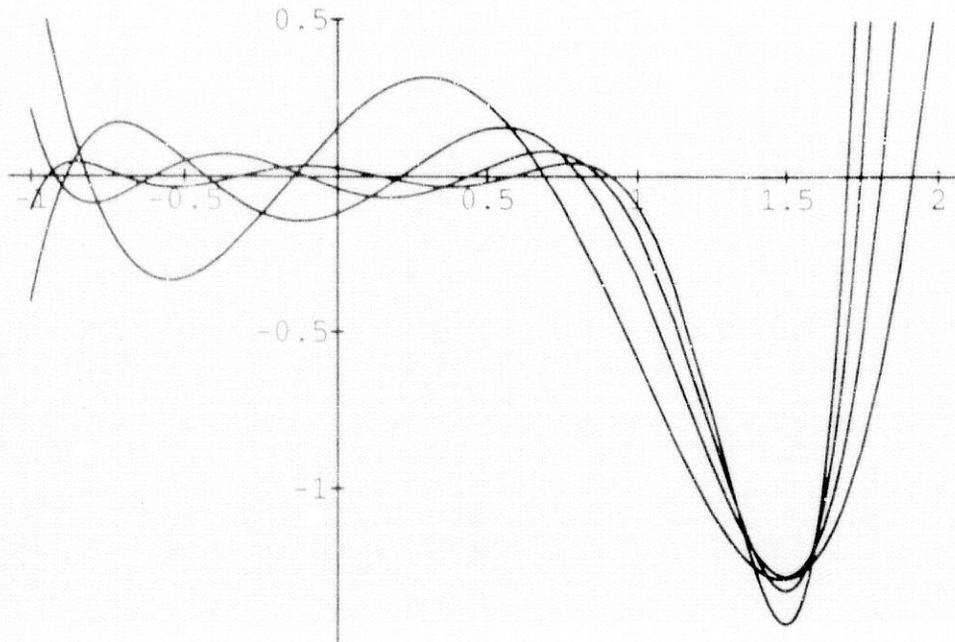


Figura 4.3

Una cuestión abierta es si, para un intervalo no acotado, podemos encontrar un valor de  $N$  para el cual  $Q_N(c) < 0$ . Para este problema, tenemos una respuesta parcial: dado un número natural  $N$  arbitrario podemos encontrar un valor  $\lambda_0$ , tal que para  $\lambda \geq \lambda_0$  el polinomio  $Q_N(x)$ , asociado al correspondiente producto escalar verifica  $Q_N(c) < 0$ . Así, siempre podremos encontrar productos escalares para los cuales la última raíz de los  $Q_n(x)$  es superior a  $c$ .

**Proposición 4.4.9.-** Dado un  $N \in \mathbb{N}$  existe un valor de  $\lambda$  tal que  $Q_n(c) < 0$  para  $n \geq N$ .

**Demostración.** De la expresión (4.4.3) se tiene:

$$Q_n(c) = \frac{P_n(c)}{\lambda_{n-1}} [1 - \lambda A_n]$$

y puesto que  $A_n > 0$ , el resultado es evidente.

**Nota.-** Es conveniente resaltar que en los resultados de las secciones anteriores se considera siempre un punto  $c$  exterior al intervalo  $I$ . Sin embargo, cuando consideramos un punto  $c \in \overset{\circ}{I}$ , pueden probarse una cierta propiedad de entrelazamiento para las  $n-2$  raíces reales y simples del polinomio  $Q_n(x)$  contenidas en  $I$ . Así, Meijer en [57], demuestra que: si notamos por  $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$  los ceros de  $P_n(x)$ , suponemos  $P'_n(c) \neq 0$  y notamos por  $T$  a la intersección de la recta tangente a  $Q_n(x)$  en el punto  $(c, Q_n(c))$  con el eje de abscisas, se tiene:

a) si  $T \notin [x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ , entonces  $(x_{n,j}, x_{n,j+1})$  contiene al menos un cero de  $Q_n(x)$ .

b) si  $T = x_j$ , pero  $x_j \neq c$ , entonces  $x_j$  es un cero de  $Q_n(x)$ .

Nótese que, como consecuencia de este resultado, si  $T \notin [x_{n,1}, x_{n,n}]$  el polinomio  $Q_n(x)$  posee  $n$  raíces reales que se entrelazan con las de  $P_n(x)$ .

En cuanto a las otras dos raíces, en el mismo trabajo, Meijer demuestra que para  $n \geq 3$  siempre puede elegirse un punto  $c$  tal que, para  $\lambda$  suficientemente grande,  $Q_n(x)$  tenga dos ceros complejos.

#### 4.5 UNA FORMULA DE CUADRATURA.

En esta sección, dado un funcional  $u$  definido positivo, consideraremos la construcción de fórmulas de cuadratura para el funcional  $u_1 = (x-c)^2 u$ , que es asimismo definido positivo, basadas en los ceros de los polinomios ortogonales de tipo Sobolev  $\{Q_n(x)\}$ .

Notemos, como en los apartados anteriores, por  $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n}$  los ceros de  $Q_n(x)$ , entonces los polinomios de grado  $n-1$ :

$$l_k(x) = \frac{Q_n(x)}{Q'_n(y_{n,k})(x - y_{n,k})}, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.5.1)$$

verifican  $l_k(y_{n,i}) = \delta_{k,i}$   $i, k = 1, \dots, n$ . De este modo dada una función  $f(x)$  el polinomio de interpolación de grado a lo sumo  $n-1$  en los puntos  $y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,n}$  puede escribirse en la forma:

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n f(y_{n,k}) l_k(x) \quad (4.5.2)$$

**Proposición 4.5.1.-** Para todo polinomio  $p(x)$  de grado menor o igual que  $2n-3$  se verifica:

$$\langle u_1, p(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} p(y_{n,k}) \quad (4.5.3)$$

donde  $\lambda_{n,k} = \langle u_1, l_k(x) \rangle$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Demostración.-** Sea  $p(x)$  un polinomio arbitrario de grado menor o igual que  $2n-3$  y construyamos el polinomio de interpolación de grado a lo más  $n-1$  en los puntos  $y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,n}$ , el cual puede escribirse en la forma:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n p(y_{n,k}) l_k(x)$$

Entonces  $p(x) - L_{n-1}(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que  $2n-3$  que se anula en los puntos  $y_{n,k}$ ,  $k=1, \dots, n$ . Por tanto  $p(x) - L_{n-1}(x)$  puede escribirse en la forma

$$p(x) - L_{n-1}(x) = Q_n(x)r(x)$$

donde  $r(x)$  es un polinomio de grado  $n-3$ , a lo sumo. Recordemos que el polinomio  $Q_n(x)$  es cuasi-ortogonal de orden 2 con respecto al funcional  $u_1$ , según se vió en la proposición 1.7.4, de esta forma:

$$\langle u_1, p(x) - L_{n-1}(x) \rangle = \langle u_1, Q_n(x)r(x) \rangle = 0$$

y así:

$$\langle u_1, p(x) \rangle = \langle u_1, L_{n-1}(x) \rangle = \sum_{k=1}^n p(y_{n,k}) \langle u_1, l_k(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} p(y_{n,k}) \quad \rangle$$

donde  $\lambda_{n,k} = \langle u_1, l_k(x) \rangle$ , para  $k = 1, \dots, n$ .  $\square$

Los coeficientes  $\lambda_{n,k}$  de la fórmula de cuadratura (4.5.3) no son necesariamente todos positivos; sin embargo, puede probarse que existe a lo sumo un coeficiente negativo.

**Proposición 4.5.2.-** *El número de coeficientes  $\lambda_{n,k}$  no positivos es a lo sumo uno.*

**Demostración.-** Supongamos que existen  $h$  coeficientes  $\lambda_{n,k}$  verificando  $\lambda_{n,k} \leq 0$ . Construimos un polinomio  $Q(x)$ , cuyas raíces son las raíces de  $Q_n(x)$  correspondientes a los coeficientes  $\lambda_{n,k} > 0$ . Entonces  $\text{gr}(Q(x)) = n-h$ .

Si  $2n-2h < 2n-3$ , utilizando la fórmula de cuadratura (4.5.3) tendremos que

$$\langle u_1, (Q(x))^2 \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} (Q(y_{n,k}))^2 = \sum_k \lambda_{n,k} (Q(y_{n,k}))^2$$

donde el símbolo  $\sum_k$  indica que la suma se extiende a los coeficientes  $\lambda_{n,k}$  no positivos.

Así pues  $\langle u_1, (Q(x))^2 \rangle \leq 0$ , lo cual contradice el carácter definido positivo para el funcional  $u_1$ . En consecuencia se tiene  $2n-2h \geq 2n-3$ , esto es  $h \leq 1$ .  $\square$

Los anteriores resultados son consecuencia únicamente del hecho de ser  $Q_n(x)$  cuasi-ortogonal de orden 2 con respecto a  $u_1$  para el polinomio  $Q_n(x)$  y en ellos se ha seguido un razonamiento debido a G. López [46]. En nuestro caso, la condición de ortogonalidad con respecto al producto escalar tipo Sobolev nos permite conocer qué coeficientes  $\lambda_{n,k}$  son positivos.

**Proposición 4.5.3.-** *Si  $Q_n(c) < 0$  entonces  $\lambda_{n,k} > 0$  para  $k=1, \dots, n-1$  y  $\lambda_{n,n} < 0$ .*

**Demostración.-** Recordemos que si  $Q_n(c) < 0$ , la última raíz de  $Q_n(x)$  es mayor que  $c$  y por tanto no está contenida en  $I$ .

Sea  $1 \leq k \leq n-1$ , y consideremos el polinomio

$$l_i^*(x) = \frac{Q_n(x)}{Q_n'(y_{n,i})(x-y_{n,i})(x-y_{n,n})}$$

con  $\text{gr}(l_i^*(x)) = n-2$ . El polinomio  $(l_i^*(x))^2(x-y_{n,n})$  es de grado  $2n-3$  no cambia de signo en  $I$ ; aplicando la fórmula de cuadratura (4.5.3) obtendríamos

$$\begin{aligned} \langle u_1, (l_i^*(x))^2(x-y_{n,n}) \rangle &= \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} (l_i^*(y_{n,k}))^2 (y_{n,k} - y_{n,n}) = \\ &= \lambda_{n,i} (l_i^*(y_{n,i}))^2 (y_{n,i} - y_{n,n}) < 0 \end{aligned}$$

y por tanto  $\lambda_{n,i} > 0$  para  $i=1, \dots, n-1$ .

Finalmente, consideremos el polinomio de grado  $n-2$

$$Q_n^*(x) = \frac{Q_n(x)}{(x-y_{n,n-1})(x-y_{n,n})}$$

y multipliquémoslo por el polinomio  $P_{n-1}^{1,c}(x)$

$$\begin{aligned} \langle u_1, P_{n-1}^{1,c}(x) Q_n^*(x) \rangle &= \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} P_{n-1}^{1,c}(y_{n,k}) Q_n^*(y_{n,k}) = \\ &= \lambda_{n,n-1} P_{n-1}^{1,c}(y_{n,n-1}) Q_n^*(y_{n,n-1}) + \lambda_{n,n} P_{n-1}^{1,c}(y_{n,n}) Q_n^*(y_{n,n}) = 0 \end{aligned}$$

y puesto que  $P_{n-1}^{1,c}(y_{n,n-1}) > 0$  y  $P_{n-1}^{1,c}(y_{n,n}) > 0$  como se deduce de la propiedad de separación de las raíces de  $Q_n(x)$  y  $P_{n-1}^{1,c}(x)$  expuesta en la proposición 4.3.5, se deduce que  $\lambda_{n,n} < 0$ .  $\square$

De las propiedades anteriores es posible deducir una cierta propiedad de entrelazamiento para las raíces de los polinomios  $Q_n(x)$  y  $Q_{n+1}(x)$ .

**Proposición 4.5.4.-** Si  $Q_{n+1}(c) < 0$  ( $n \geq 4$ ), el polinomio  $Q_n(x)$  posee un número impar de raíces en cada intervalo  $|y_{n+1,i}, y_{n+1,i+3}|$ , para  $i = 1, \dots, n-3$ .

**Demostración.-** Supongamos que el polinomio  $Q_n(x)$  no cambia de signo en el intervalo  $|y_{n+1,i}, y_{n+1,i+3}|$ , con  $i \leq n-3$ , y consideremos el polinomio de grado  $n-3$ :

$$Q_{n+1}^*(x) = \frac{Q_{n+1}(x)}{(x-y_{n+1,i})(x-y_{n+1,i+1})(x-y_{n+1,i+2})(x-y_{n+1,i+3})}$$

el cual, tampoco cambia de signo en dicho intervalo. Aplicando la fórmula de cuadratura (4.5.3) basada en los ceros del polinomio  $Q_{n+1}(x)$ , de la ortogonalidad del polinomio  $Q_n(x)$ , se tendrá:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_1, Q_{n+1}^*(x)Q_n(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{n+1,k} Q_{n+1}^*(y_{n+1,k}) Q_n(y_{n+1,k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{i+3} \lambda_{n+1,k} Q_{n+1}^*(y_{n+1,k}) Q_n(y_{n+1,k}) \end{aligned}$$

y puesto que  $\lambda_{n+1,k} > 0$  para  $k=1, \dots, n$ , esta igualdad contradice la hipótesis de que  $Q_{n+1}^*(x)Q_n(x)$  no cambia de signo en el intervalo  $|y_{n+1,i}, y_{n+1,i+3}|$ .  $\square$

Si  $Q_n(c) < 0$ , a partir de la fórmula de cuadratura (4.5.3), se puede construir una fórmula de cuadratura para el funcional  $u$ , basada en los ceros del polinomio  $Q_n(x)(x-c)^2$  y que será exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$  (acerca de fórmulas de cuadratura con nodos múltiples ver Cachafeiro y Marcellán [16]).

Para ello, consideremos los polinomios de grado  $n+1$ :

$$\tilde{l}_k(x) = \frac{Q_n(x)(x-c)^2}{Q_n'(y_{n,k})(y_{n,k}-c)^2(x-y_{n,k})}, \quad k = 1, \dots, n$$

$$m_0(x) = \frac{Q_n(x)(x - c - Q_n(c)/Q_n'(c))}{-Q_n(c)^2/Q_n'(c)}$$

$$m_1(x) = \frac{Q_n(x)(x - c)}{Q_n(c)}$$

entonces

$$\tilde{l}_k(y_{n,i}) = \delta_{k,i} \quad i, k = 1, \dots, n. \quad \tilde{l}_k(c) = \tilde{l}'_k(c) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$m_0(y_{n,i}) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad m_0(c) = 1, \quad m'_0(c) = 0$$

$$m_1(y_{n,i}) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad m_1(c) = 0, \quad m'_1(c) = 1$$

Así, dada una función  $f(x)$ , el polinomio de interpolación de grado  $n+1$  en los datos

$$f(y_{n,1}), f(y_{n,2}), \dots, f(y_{n,n}), f(c), f'(c)$$

puede escribirse en la forma:

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n f(y_{n,k}) \tilde{l}_k(x) + f(c) m_0(x) + f'(c) m_1(x)$$

**Proposición 4.5.5.-** Sea  $n \geq 3$ , para todo polinomio  $p(x)$  de grado menor o igual que  $2n-1$  se verifica:

$$\langle u, p(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{n,k} p(y_{n,k}) + \gamma_0 f(c) + \gamma_1 f'(c) \quad (4.5.3)$$

donde  $\tilde{\lambda}_{n,k} = \langle u, \tilde{l}_k(x) \rangle = \frac{\lambda_{n,k}}{(y_{n,k} - c)^2}, \quad k = 1, \dots, n.$

$$\gamma_0 = \langle u, m_0(x) \rangle = \lambda \left[ \frac{Q_n'(c)}{Q_n(c)} \right]^2$$

$$\gamma_1 = \langle u, m_1(x) \rangle = -\lambda \frac{Q_n'(c)}{Q_n(c)}$$

**Demostración.**- Sea  $p(x)$  un polinomio arbitrario de grado menor o igual que  $2n-1$ , y consideremos el polinomio de interpolación de Hermite  $L_{n+1}(x)$  de grado  $n+1$  para los datos

$$p(y_{n,1}), p(y_{n,2}), \dots, p(y_{n,n}), p(c), p'(c)$$

dado por:

$$L_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n p(y_{n,k}) \tilde{l}_k(x) + p(c) m_0(x) + p'(c) m_1(x).$$

Así  $p(x) - L_{n+1}(x)$  es un polinomio de grado  $2n-1$  que se anula en los puntos  $y_{n,k}$ ,  $k=1, \dots, n$ , y posee un cero doble en  $c$ . Por tanto  $p(x) - L_{n+1}(x)$  puede escribirse en la forma

$$p(x) - L_{n+1}(x) = Q_n(x)(x - c)^2 r(x)$$

donde  $r(x)$  es un polinomio de grado  $n-3$ , a lo sumo. De la cuasi-ortogonalidad del polinomio  $Q_n(x)$  respecto al funcional  $u_1$ , (proposición 1.7.4), se tiene que:

$$\langle u, p(x) - L_{n+1}(x) \rangle = \langle u, Q_n(x)(x - c)^2 r(x) \rangle = 0$$

y así:

$$\langle u, p(x) \rangle = \langle u, L_{n+1}(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{n,k} p(y_{n,k}) + \gamma_0 p(c) + \gamma_1 p'(c)$$

donde  $\tilde{\lambda}_{n,k} = \langle u, \tilde{l}_k(x) \rangle$ , para  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\gamma_0 = \langle u, m_0(x) \rangle$$

$$\gamma_1 = \langle u, m_1(x) \rangle$$

Puesto que  $\tilde{l}_k(x) = l_k(x) \frac{(x-c)^2}{(y_{n,k}-c)^2}$  se tiene que:

$$\tilde{\lambda}_{n,k} = \langle u, \tilde{l}_k(x) \rangle = \langle u, \frac{l_k(x)}{(y_{n,k}-c)^2} \rangle = \frac{\lambda_{n,k}}{(y_{n,k}-c)^2}, \quad k = 1, \dots, n$$

y de la ortogonalidad de  $Q_n(x)$  se deduce:

$$\gamma_0 = \langle u, m_0(x) \rangle = - \frac{Q'_n(c)}{Q_n(c)^2} \langle u, Q_n(x)(x-c - \frac{Q_n(c)}{Q'_n(c)}) \rangle = \lambda \left[ \frac{Q'_n(c)}{Q_n(c)} \right]^2$$

$$\gamma_1 = \langle u, m_1(x) \rangle = \frac{1}{Q_n(c)} \langle u, Q_n(x)(x-c) \rangle = - \lambda \frac{Q'_n(c)}{Q_n(c)} \quad \square$$

**Nota.** Obsérvese que como consecuencia de la proposición 4.5.3, si  $Q_n(c) < 0$ , se tiene  $\tilde{\lambda}_{n,k} > 0$   $k = 1, \dots, n-1$ ,  $\tilde{\lambda}_{n,n} < 0$ ,  $\gamma_0 > 0$  y  $\gamma_1 > 0$ .

Consideremos ahora  $p(x)$ ,  $q(x)$  dos polinomios de grados respectivos  $n$  y  $n-1$ , según la proposición anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \langle u, p(x)q(x) \rangle &= \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{n,k} p(y_{n,k})q(y_{n,k}) + \gamma_0 p(c)q(c) + \\ &+ \gamma_1 [p'(c)q(c) + p(c)q'(c)] \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \varphi(p,q) &= \langle u, p(x)q(x) \rangle + \lambda p'(c) q'(c) = \\ &= \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{n,k} p(y_{n,k})q(y_{n,k}) + \gamma_0 p(c)q(c) + \\ &+ \gamma_1 [p'(c) q(c) + p(c) q'(c)] + \lambda p'(c) q'(c) \end{aligned}$$

que matricialmente quedaría:

$$\varphi(p,q) = \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_{n,k} p(y_{n,k})q(y_{n,k}) + [p(c), p'(c)] \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(c) \\ q'(c) \end{bmatrix}$$

ecuación que puede interpretarse como una discretización del producto escalar tipo Sobolev basada en los ceros de  $Q_n(x)$ . Nótese que el término de perturbación proviene de una matriz semidefinida positiva, pues

$$\gamma_0 > 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

#### 4.6 COMPORTAMIENTO DE LOS CEROS DE $Q_n(x)$ FRENTE A $\lambda$ .

**Proposición 4.6.1.-** *Los ceros de  $Q_n(x)$  son una función creciente de  $\lambda$ .*

**Demostración.-** Sean  $\lambda < \mu$  dos números reales positivos, y notemos por  $Q_n(x, \lambda)$  y  $Q_n(x, \mu)$  a los polinomios ortogonales correspondientes a productos escalares de la forma (4.1.1) con parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ , respectivamente. Entonces:

$$Q_n(x, \lambda) = P_n(x) - \frac{\lambda P_n'(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

$$Q_n(x, \mu) = P_n(x) - \frac{\mu P_n'(c)}{1 + \mu K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

Dado que  $P'_n(c) \neq 0$ , eliminando  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$  entre ambas expresiones, se obtiene:

$$Q_n(x,\lambda) - P_n(x) = \frac{\mu^{-1} + K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{\lambda^{-1} + K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} [Q_n(x,\mu) - P_n(x)]$$

Por otra parte, si  $0 < \lambda < \mu$ , entonces  $0 < \mu^{-1} < \lambda^{-1}$ , y así:

$$0 < \frac{\mu^{-1} + K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{\lambda^{-1} + K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} < 1$$

Por tanto, si  $Q_n(x,\lambda) - P_n(x) \geq 0$ , se verifica:

$$Q_n(x,\lambda) - P_n(x) \leq Q_n(x,\mu) - P_n(x)$$

de donde  $Q_n(x,\lambda) \leq Q_n(x,\mu)$ .

Y si  $Q_n(x,\lambda) - P_n(x) \leq 0$ , se tiene:

$$Q_n(x,\lambda) - P_n(x) \geq Q_n(x,\mu) - P_n(x)$$

luego  $Q_n(x,\lambda) \geq Q_n(x,\mu)$ .

Por la proposición 4.3.2, notando por  $y_{n,i}(\lambda)$ ,  $y_{n,i}(\mu)$   $1 \leq i \leq n$  las raíces de  $Q_n(x,\lambda)$  y  $Q_n(x,\mu)$  respectivamente, se tiene que:

$$y_{n,i}(\lambda), y_{n,i}(\mu) \in ]x_{n,i}, z_{n-1,i}[ , \quad 1 \leq i \leq n-1$$

y por las desigualdades anteriores estarán dispuestas según el orden creciente del parámetro:

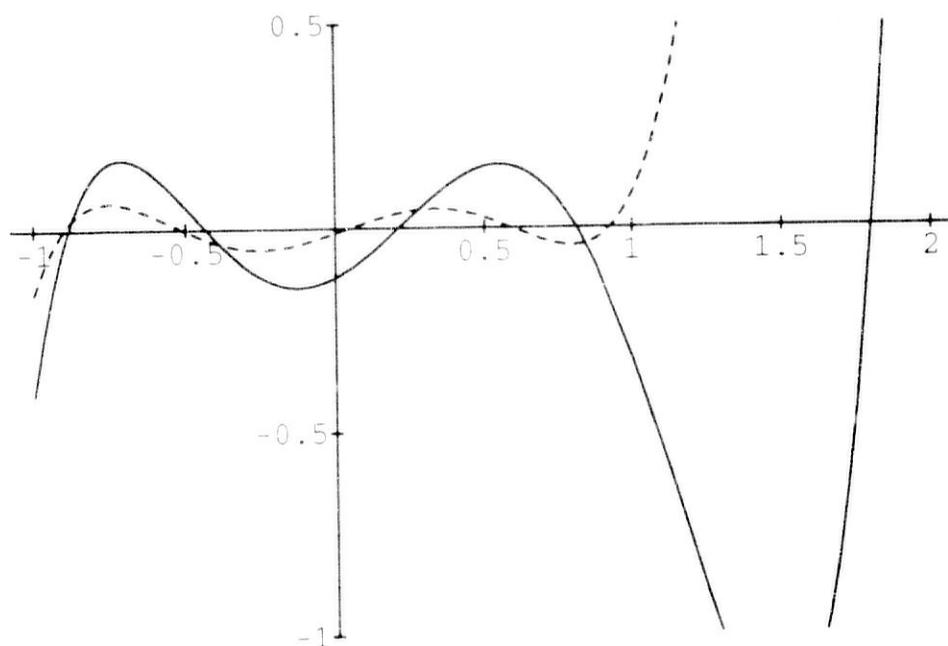
$$x_{n,i} < y_{n,i}(\lambda) < y_{n,i}(\mu) < z_{n-1,i} , \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Por último, para  $x > x_{n,n}$ ,  $Q_n(x,\lambda) > Q_n(x,\mu)$ , de donde:

$$x_{n,n} < y_{n,n}(\lambda) < y_{n,n}(\mu). \quad \square$$

**Nota.-** Obsérvese que la proposición 4.3.2 se puede obtener como consecuencia de este resultado por continuidad.

En la figura 4.4 se muestra un ejemplo de la propiedad de crecimiento de los ceros con respecto al parámetro  $\lambda$ . En esta figura se ha considerado la medida de Legendre en el intervalo  $[-1,1]$  y el punto  $c = 1.5$ . Las gráficas corresponden a los polinomios  $Q_5(x)$ , para los valores de  $\lambda = 0.0001$  (trazo discontinuo) y  $\lambda = 0.01$  (trazo continuo).



**Figura 4.4**

A pesar de ser una función creciente de  $\lambda$ , el último cero de  $Q_n(x)$  no crece indefinidamente, sino que se sitúa entre el último cero de  $P_n(x)$  y el último cero de un polinomio dependiente de  $c$ :

**Definición.-** Notaremos por  $R_n(x)$  al polinomio de grado  $n$ :

$$R_n(x) = P_n(x) - \frac{P_n'(c)}{K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

**Proposición 4.6.2.-** El polinomio  $R_n(x)$  posee  $n$  raíces reales y simples que se entrelazan con las de  $P_n(x)$  y  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$  según el siguiente esquema:

$$x_{n,1} < \xi_{n,1} < z_{n-1,1} < x_{n,2} < \xi_{n,2} < z_{n-1,2} < \dots < z_{n-1,n-1} < x_{n,n} < c < \xi_{n,n}$$

donde por  $\xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \dots < \xi_{n,n}$  denotamos las raíces de  $R_n(x)$ .

**Demostración.-** Es análoga a la demostración de la proposición 4.3.2, pero en este caso el último cero de  $R_n(x)$  se sitúa a la derecha de  $c$ , pues  $R_n'(c)=0$ .  $\square$

**Proposición 4.6.3.-** Notando por  $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n}$  los ceros del polinomio  $Q_n(x)$ , se verifica  $y_{n,i} \in ]x_{n,i}, \xi_{n,i}[$ ,  $\forall i=1, \dots, n$ .

**Demostración.-** De las expresiones:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{\lambda P_n'(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

$$R_n(x) = P_n(x) - \frac{P_n'(c)}{K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

Eliminando  $K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$ , puesto que  $P_n'(c) \neq 0$ , obtenemos:

$$Q_n(x) - P_n(x) = \frac{\lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} [R_n(x) - P_n(x)]$$

y como

$$0 < \frac{\lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)} < 1$$

un razonamiento análogo al de la proposición 4.6.1 prueba el resultado.  $\square$

En la figura 4.5 se muestra un ejemplo de la propiedad enunciada en las proposiciones 4.6.2 y 4.6.3. En esta figura se ha considerado la medida de Legendre en el intervalo  $[-1,1]$  y el punto  $c = 1.5$ . Las gráficas corresponden a los polinomios:  $Q_4(x)$ , para el valor de  $\lambda = 0.001$  (trazo continuo),  $P_4(x)$  (trazo de rayas) y  $R_4(x)$  (trazo de puntos y rayas).

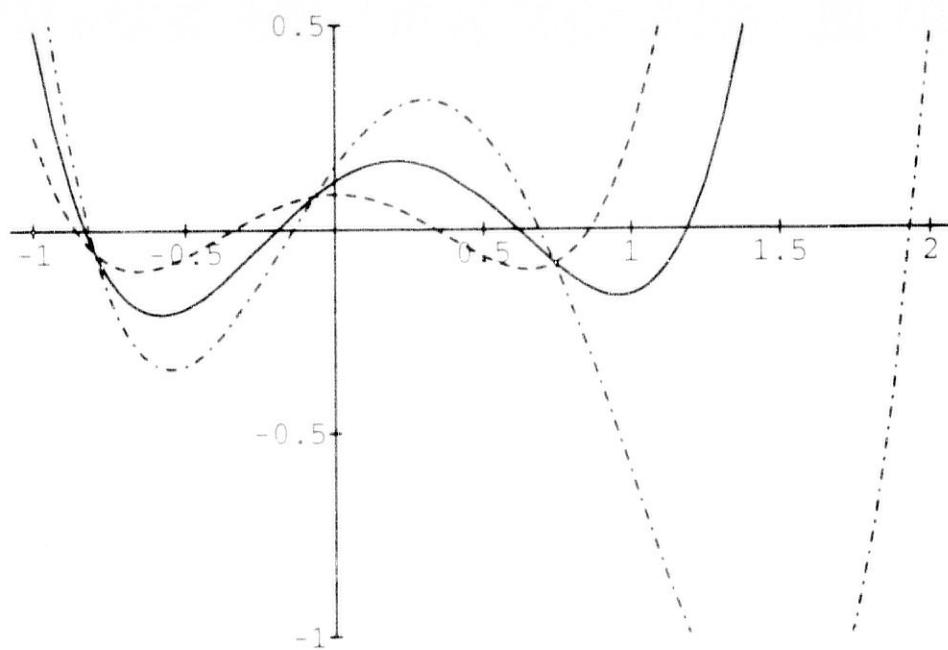


Figura 4.5

## CAPITULO 5

### Aplicaciones

- 5.1 Introducción.
- 5.2 Aproximantes racionales con coeficientes fijos en el numerador.
- 5.3 Relación con los polinomios ortogonales tipo Sobolev.
- 5.4 Asociados.
- 5.5 Relación con las fórmulas de cuadratura.
- 5.6 El caso general.
- 5.7 Un ejemplo numérico.

### 5.1 INTRODUCCION.

Dada una serie formal de potencias

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \quad c_i \in \mathbb{R}$$

los aproximantes de tipo Padé (ver Brezinski, [13]) para dicha serie son funciones racionales cuyo desarrollo en serie de potencias de  $t$  coinciden con  $f(t)$  hasta donde sea posible. En su construcción se fija el denominador y el numerador se construye de forma que se verifiquen las condiciones de aproximación. Los aproximantes de Padé se obtienen como caso particular cuando el denominador se toma como el recíproco del polinomio ortogonal mónico asociado al funcional lineal  $c$  definido por la sucesión de momentos  $\{c_i\}_i$ .

En la construcción de tales aproximantes racionales para la serie de potencias  $f(t)$ , puede incorporarse la información que se posee acerca de la función  $f$  para mejorar la aproximación. Así, en la obtención de los llamados aproximantes de Padé parciales (ver [14]) se fijan parte de los ceros y polos del aproximante para hacerlos coincidir con los de  $f$ .

En este capítulo proponemos una idea diferente, pero en la misma línea: fijar algunos de los coeficientes del numerador, específicamente los de las potencias de mayor grado. Tales aproximantes pueden ser interesantes para reproducir determinados comportamientos de  $f(t)$ . Así, por ejemplo, por un conocido teorema de Descartes (ver [63], Part V, Chap. 1, Problem 49), podremos asegurar que el aproximante posee ceros complejos si en el desarrollo del numerador aparecen al menos dos coeficientes nulos consecutivos.

En primer lugar consideraremos la posibilidad de construir aproximantes racionales con un número fijo,  $k$ , de coeficientes nulos en su numerador.

Mostraremos que estos aproximantes pueden construirse a partir de unos aproximantes de tipo Padé, en los cuales los denominadores verifican unas determinadas condiciones de ortogonalidad. Estas condiciones nos permitirán relacionarlos con los Polinomios Ortogonales tipo Sobolev asociados a una forma bilineal:

$$\varphi(f,g) = \langle c, fg \rangle + \lambda f^{(k)}(0)g^{(k)}(0) \quad (5.1.1)$$

En el apartado 3 se analizan algunas de las propiedades de los Polinomios Ortogonales de tipo Sobolev para la forma  $\varphi$ , en concreto se considera su existencia, expresiones en términos de los polinomios ortogonales estándar y las relaciones de recurrencia.

La construcción de estos aproximantes racionales nos conduce al concepto de *asociados* a la SPOM tipo Sobolev. Mostraremos que estos asociados verifican la misma relación de recurrencia que los polinomios de tipo Sobolev, pero con distintas condiciones iniciales.

En el siguiente apartado se muestra cómo los aproximantes racionales construidos a partir de los polinomios ortogonales tipo Sobolev se relacionan con las fórmulas de cuadratura introducidas en el capítulo 4, en forma análoga a la relación existente entre los aproximantes de Padé y las cuadraturas Gaussianas.

Finalmente se considera el caso general e ilustramos las ideas expuestas con un sencillo ejemplo numérico.

## 5.2 APROXIMANTES RACIONALES CON COEFICIENTES FIJOS EN EL NUMERADOR.

Sea  $f(t)$  una serie formal de potencias

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Sean  $v(t)$  y  $u(t)$  polinomios de grados respectivos  $n$  y  $m$ , y notemos por

$$\tilde{v}(t) = t^n v(t^{-1}) \quad \tilde{u}(t) = t^m u(t^{-1})$$

a los correspondientes polinomios recíprocos.

Tratamos de construir aproximantes racionales para  $f(t)$  con un número fijo de coeficientes nulos consecutivos en su numerador cuyo desarrollo

coincida con el de  $f(t)$  hasta el mayor orden posible. De este modo, dado un entero positivo  $k$ , buscamos una función racional de la forma:

$$\frac{At^{m+k+1} + \tilde{u}(t)}{\tilde{v}(t)}$$

donde  $A$  es un número real no nulo,  $u(t) \in \mathbb{P}_m$  y  $v(t) \in \mathbb{P}_n$  (mónico), verificando:

$$f(t) - \frac{At^{m+k+1} + \tilde{u}(t)}{\tilde{v}(t)} = O(t^{m+n+1}). \quad (5.2.1)$$

Si tal aproximante existe, lo notaremos por  $(k,m/n)_f(t)$ .

Obviamente la condición (5.2.1) equivale a

$$\tilde{v}(t)f(t) - \tilde{u}(t) = A t^{m+k+1} + O(t^{m+n+1}) \quad (5.2.2)$$

y de este modo  $\tilde{v}(t)$  y  $\tilde{u}(t)$  son, respectivamente, el denominador y el numerador de un particular aproximante de tipo Padé para  $f(t)$  (ver [13]).

Definimos unos funcionales  $c^{(j)}$  sobre el espacio de los polinomios con coeficientes reales mediante:

$$\langle c^{(j)}, x^i \rangle = c_{i+j} \quad \text{para } i=0,1,\dots$$

con el convenio  $c_{i+j} = 0$  para  $i+j < 0$ .

Utilizando la expresión para el error en los aproximantes de tipo Padé (ver [13], página 21), se tiene:

$$\tilde{v}(t)f(t) - \tilde{u}(t) = t^{m+1} \langle c^{(m-n+1)}, \frac{v(x)}{1-xt} \rangle = t^{m+1} \sum_{i=0}^{\infty} \langle c^{(m-n+1)}, x^i v(x) \rangle t^i$$

Así, la condición (5.2.2) equivale a:

$$\langle c^{(m-n+1)}, x^i v(x) \rangle = \delta_{ik} A, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.2.3)$$

y por tanto, el problema planteado puede resolverse si encontramos un polinomio mónico  $v(t)$  verificando (5.2.3) y construimos  $u(t)$  en la forma habitual (ver [14]):

$$u(t) = \langle c^{(0)}, \frac{x^{m-n+1} v(x) - t^{m-n+1} v(t)}{x - t} \rangle.$$

Las ecuaciones (5.2.3) representan un sistema lineal cuya solución, si existe, son los coeficientes de  $v(t)$ . Para asegurar la existencia de solución basta considerar un funcional  $c^{(m-n+1)}$  regular, en cuyo caso se tiene la siguiente expresión para  $v(t)$ :

**Proposición 5.2.1.-** Sea  $\{P_n\}_n$  la Sucesión de Polinomios Ortogonales Mónicos con respecto a  $c^{(m-n+1)}$  y sean  $K_n^{(r,s)}(x,y)$  las derivadas parciales de los correspondientes núcleos. Entonces el polinomio:

$$v(x) = P_n(x) + \frac{A}{k!} K_{n-1}^{(0,k)}(x,0) \quad (5.2.4)$$

verifica (5.2.3).

**Demostración.** Basta aplicar la ortogonalidad de  $P_n(x)$  y las propiedades reproductoras de los núcleos.  $\square$

Es conocido, (ver [13], página 12) que el aproximante de tipo Padé  $(m/n)_r(t)$  puede ser escrito en la forma

$$(m/n)_r(t) = \sum_{i=0}^{m-n} c_i t^i + t^{m-n+1} \frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$$

donde

$$\tilde{v}(t) = t^n v(t^{-1})$$

$$w(t) = \left\langle c, \frac{v(x) - v(t)}{x - t} \right\rangle$$

$$\tilde{w}(t) = t^{n-1} w(t^{-1})$$

entonces

$$\begin{aligned} (k, m/n)_t(t) &= \frac{At^{m+k+1} + \tilde{u}(t)}{\tilde{v}(t)} = \frac{At^{m+k+1}}{\tilde{v}(t)} + \sum_{i=0}^{m-n} c_i t^i + t^{m-n+1} \frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-n} c_i t^i + t^{m-n+1} \frac{At^{n+k} + \tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} = \sum_{i=0}^{m-n} c_i t^i + t^{m-n+1} (k, n-1/n)_g(t) \end{aligned}$$

donde

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{m-n+1+i} t^i$$

De este modo, todos los aproximantes pueden ser construidos a partir de los aproximantes diagonales, esto es, de los aproximantes con  $m=n-1$  y de ahora en adelante sólo será necesario considerar este caso.

### 5.3 RELACION CON LOS POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO SOBOLEV.

Supongamos  $m=n-1$ , las condiciones (5.2.3) pueden ser consideradas como unas condiciones de ortogonalidad tipo Sobolev para el polinomio  $v(t)$ , puesto que si consideramos una forma bilineal definida por

$$\varphi(f, g) = \langle c, fg \rangle + \lambda f^{(k)}(0) g^{(k)}(0) \quad (5.3.1)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  y  $v(t)$  es el polinomio ortogonal mónico de grado  $n$  con respecto a  $\varphi$  entonces  $v(t)$  verifica (5.2.3) con  $A = -\lambda k! v^{(k)}(0)$ .

De ahora en adelante, supondremos que  $c$  es un funcional lineal regular, y notaremos por  $\{P_n\}_n$  la Sucesión de Polinomios Ortogonales Mónicos con respecto a  $c$ , y  $K_n^{(r,s)}(x,y)$  a las derivadas parciales de los correspondientes núcleos. Si  $\varphi$  es una forma no degenerada, podremos construir una sucesión de Polinomios Ortogonales Mónicos que notaremos por  $\{Q_n\}_n$ . Estos Polinomios Ortogonales constituyen una generalización directa de los Polinomios Ortogonales tipo Sobolev considerados en el capítulo 1 y poseen propiedades bastante similares. Los polinomios ortogonales asociados a (5.3.1) han sido considerados por Marcellán y Ronveaux (ver [50]) en el caso definido positivo.

**Proposición 5.3.1.-** Una condición necesaria y suficiente para que exista una familia de polinomios mónicos  $\{Q_n\}_n$  ortogonales con respecto a  $\varphi$  es que

$$1 + \lambda K_n^{(k,k)}(0,0) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En cuyo caso, los polinomios vienen dados por

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{\lambda P_n^{(k)}(0)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(k,k)}(0,0)} K_{n-1}^{(0,k)}(x,0). \quad (5.3.2)$$

**Demostración.-** Si existen unos polinomios  $\{Q_n\}_n$  ortogonales respecto a (5.3.1), se tendrá:

$$Q_n(x) = P_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i P_i(x)$$

de la ortogonalidad se deduce que:

$$a_i = \frac{\langle c, Q_n P_i \rangle}{\langle c, P_i^2 \rangle} = -\lambda \frac{Q_n^{(k)}(0) P_i^{(k)}(0)}{\langle c, P_i^2 \rangle}$$

y sustituyendo queda:

$$Q_n(x) = P_n(x) - \lambda Q_n^{(k)}(0) K_{n-1}^{(0,k)}(x,0). \quad (5.3.3)$$

Derivando  $k$  veces, y evaluando en  $0$ , se tiene:

$$Q_n^{(k)}(0)(1+\lambda K_{n-1}^{(k,k)}(0,0)) = P_n^{(k)}(0). \quad (5.3.4)$$

Si para algún  $n$ , se tiene que  $1+\lambda K_{n-1}^{(k,k)}(0,0)=0$ , la ecuación (5.3.4) implica  $P_n^{(k)}(0)=0$ , y por tanto  $1+\lambda K_n^{(k,k)}(0,0)=0$ . De este modo se obtendría  $P_m^{(k)}(0)=0$ ,  $\forall m \geq n$ , pero esta situación es imposible, pues debido a la relación de recurrencia a tres términos las derivadas de dos polinomios ortogonales consecutivos no pueden tener ceros comunes. Así,  $1+\lambda K_n^{(k,k)}(0,0) \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y despejando en (5.3.4), se obtiene la expresión (5.3.2).

Recíprocamente, si  $1+\lambda K_n^{(k,k)}(0,0) \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , los polinomios definidos por la relación (5.3.2) son de grado exactamente  $n$  y verifican las condiciones de ortogonalidad.  $\square$

Notemos que si  $c$  es un funcional regular,  $\varphi$  será no degenerada para todo valor de  $\lambda$  excepto para un conjunto infinito y discreto de valores. Si  $c$  es definido positivo, basta considerar  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  para obtener una forma no degenerada. De ahora en adelante supondremos que  $\varphi$  es no degenerada.

Los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  pueden ser también considerados desde el punto de vista de la cuasi-ortogonalidad. En efecto, sea  $p(x) \in \mathbb{P}_{n-k-2}$ , y consideremos:

$$\varphi(Q_n(x), x^{k+1}p(x)) = \langle c, Q_n(x)p(x)x^{k+1} \rangle = 0.$$

Esta igualdad nos muestra que  $Q_n(x)$  es un polinomio cuasi-ortogonal de orden  $k$  con respecto al funcional  $c^{(k+1)}$ , definido por  $\langle c^{(k+1)}, x^i \rangle = \langle c, x^{i+k+1} \rangle$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Esta condición de cuasi-ortogonalidad implica que  $Q_n(x)$  puede expresarse como combinación lineal de los Polinomios Ortogonales Mónicos con respecto al funcional  $c^{(k+1)}$ , si éste es regular.

**Proposición 5.3.2.-** *Supongamos que  $c^{(k+1)}$  es un funcional regular, y notemos por  $\{P_n^{(k+1)}\}_n$  la Sucesión de Polinomios Ortogonales Mónicos con respecto a  $c^{(k+1)}$ . Entonces:*

$$Q_n(x) = P_n^{(k+1)}(x) + a_{n-1}^{(n)} P_{n-1}^{(k+1)}(x) + \dots + a_{n-k-1}^{(n)} P_{n-k-1}^{(k+1)}(x)$$

donde  $a_{n-k-1}^{(n)} \neq 0$ .

**Demostración.**- Basta desarrollar  $Q_n(x)$  en términos de los polinomios  $\{P_n^{(k+1)}\}$ :

$$Q_n(x) = P_n^{(k+1)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} P_i^{(k+1)}(x)$$

donde

$$a_i^{(n)} = \frac{\langle c^{(k+1)}, Q_n(x) P_i^{(k+1)}(x) \rangle}{\langle c^{(k+1)}, (P_i^{(k+1)})^2 \rangle} = \frac{\langle c, Q_n(x) P_i^{(k+1)}(x) x^{k+1} \rangle}{\langle c^{(k+1)}, (P_i^{(k+1)})^2 \rangle}$$

y por tanto  $a_i^{(n)} = 0$ , para  $i < n-k-1$ , y

$$a_{n-k-1}^{(n)} = \frac{\langle c, Q_n(x) P_{n-k-1}^{(k+1)}(x) x^{k+1} \rangle}{\langle c^{(k+1)}, (P_{n-k-1}^{(k+1)})^2 \rangle} = \frac{\varphi(Q_n, Q_n)}{\langle c^{(k+1)}, (P_{n-k-1}^{(k+1)})^2 \rangle} \neq 0 \quad \square$$

Puesto que el operador de desplazamiento asociado al polinomio  $x^{k+1}$  es autoadjunto para la forma bilineal  $\varphi$ , para estos polinomios ortogonales se verificará una relación de recurrencia a  $2k+3$  términos en la forma siguiente:

**Proposición 5.3.3.**- Los polinomios  $\{Q_n\}_n$  verifican la siguiente relación de recurrencia a  $2k+3$  términos.

$$x^{k+1} Q_n(x) = \sum_{i=n-k-1}^{n+k+1} b_i^{(n)} Q_i(x)$$

donde  $b_{n-k-1}^{(n)} \neq 0$ , y con las condiciones iniciales:  $Q_i(x) = P_i(x)$  para  $i \leq k$ .

**Demostración.-** Basta desarrollar  $x^{k+1}Q_n(x)$  en términos de los polinomios  $\{Q_i\}_i$ :

$$x^{k+1}Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n+k+1} b_i^{(n)} Q_i(x)$$

$$\text{con } b_i^{(n)} = \frac{\varphi(x^{k+1}Q_n(x), Q_i(x))}{\varphi(Q_i(x), Q_i(x))} = \frac{\varphi(Q_n(x), x^{k+1}Q_i(x))}{\varphi(Q_i(x), Q_i(x))}$$

así, por la ortogonalidad

$$b_i^{(n)} = 0 \text{ para } i < n-k-1, \text{ y } b_{n-k-1}^{(n)} = \frac{\varphi(Q_n, Q_n)}{\varphi(Q_{n-k-1}, Q_{n-k-1})} \neq 0. \quad \square$$

Desde el punto de vista computacional, es más satisfactoria la siguiente expresión en términos de determinantes, que relaciona dos polinomios ortogonales consecutivos, la cual puede ser obtenida en forma análoga a la proposición 1.4.1.

**Proposición 5.3.4.-**

$$\begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) \\ P_n^{(k)}(0) & P_{n+1}^{(k)}(0) \end{vmatrix} = \lambda_{n-1} \begin{vmatrix} Q_n(x) & Q_{n+1}(x) \\ Q_n^{(k)}(0) & Q_{n+1}^{(k)}(0) \end{vmatrix}$$

donde  $\lambda_n = 1 + \lambda K_n^{(k,k)}(0,0)$ .

#### 5.4 ASOCIADOS.

**Definición.-** Sea  $\{Q_n(x)\}_n$  la SPOM asociada a la forma bilineal  $\varphi$ , definimos los *asociados*  $Z_n(t)$  mediante:

$$Z_n(t) = \varphi(Q_n(x) - Q_n(t), \frac{1}{x-t}) \quad (5.4.1)$$

De la definición, se tiene que

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= \varphi(Q_n(x) - Q_n(t), \frac{1}{x-t}) = \langle c, \frac{Q_n(x) - Q_n(t)}{x-t} \rangle - \lambda k! Q_n^{(k)}(0) t^{-(k+1)} = \\ &= R_n(t) - \lambda k! Q_n^{(k)}(0) t^{-(k+1)} \end{aligned}$$

y de este modo los asociados son una suma del polinomio de grado  $n-1$   $R_n(t)$  (el asociado con respecto al funcional  $c$ ) más una constante por una potencia negativa de  $t$ .

Con estas notaciones, observamos que

$$(k, n-1/n)_t(t) = \frac{\tilde{R}_n(t) - \lambda k! Q_n^{(k)}(0) t^{n+k}}{\tilde{Q}_n(t)} = \frac{\tilde{Z}_n(t)}{\tilde{Q}_n(t)}$$

donde  $\tilde{Z}_n(t) = t^{n-1} Z_n(t^{-1}) = t^{n-1} R_n(t^{-1}) - \lambda k! Q_n^{(k)}(0) t^{n+k}$ .

Igual que los polinomios asociados a los polinomios ortogonales estándar, los asociados a los polinomios de tipo Sobolev verifican la misma relación de recurrencia a  $2k+3$  términos que los polinomios  $\{Q_n(x)\}_n$  pero con distintas condiciones iniciales.

**Proposición 5.4.1.-** Si  $n > k$ , los asociados  $\{Z_n(t)\}_n$  verifican la relación

$$t^{k+1} Z_n(t) = \sum_{i=n-k-1}^{n+k+1} b_i^{(n)} Z_i(t)$$

con las condiciones iniciales:  $Z_i(t) = R_i(t)$  para  $i < k$ .

**Demostración.-** Escribiendo la relación de recurrencia para los polinomios

$\{Q_n\}_n$  en las variables  $x$  y  $t$ , restando ambas expresiones y dividiendo por  $x-t$  se obtiene:

$$\frac{x^{k+1}Q_n(x) - t^{k+1}Q_n(t)}{x-t} = \sum_{i=n-k-1}^{n+k+1} b_i^{(n)} \frac{Q_i(x) - Q_i(t)}{x-t}$$

y de este modo

$$\varphi(x^{k+1}Q_n(x) - t^{k+1}Q_n(t), \frac{1}{x-t}) = \sum_{i=n-k-1}^{n+k+1} b_i^{(n)} \varphi(Q_i(x) - Q_i(t), \frac{1}{x-t})$$

Ahora, debido al carácter autoadjunto del operador de desplazamiento asociado a  $x^{k+1}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(x^{k+1}Q_n(x) - t^{k+1}Q_n(t), \frac{1}{x-t}) &= \\ &= \varphi(x^{k+1}Q_n(x) - t^{k+1}Q_n(x), \frac{1}{x-t}) + \varphi(t^{k+1}Q_n(x) - t^{k+1}Q_n(t), \frac{1}{x-t}) = \\ &= \varphi(Q_n(x), \frac{x^{k+1} - t^{k+1}}{x-t}) + t^{k+1} \varphi(Q_n(x) - Q_n(t), \frac{1}{x-t}) \end{aligned}$$

y puesto que  $k < n$  se verifica:

$$\varphi(Q_n(x), \frac{x^{k+1} - t^{k+1}}{x-t}) = 0$$

por ser  $\frac{x^{k+1} - t^{k+1}}{x-t}$  un polinomio de grado  $k$ . De este modo se tiene:

$$t^{k+1}Z_n(t) = \sum_{i=n-k-1}^{n+k+1} b_i^{(n)} Z_i(t)$$

Con respecto a las condiciones iniciales, observamos que para  $n < k$   $Q_n(x) = P_n(x)$  y por tanto:

$$Z_n(t) = \varphi(Q_n(x) - Q_n(t), \frac{1}{x-t}) = \langle c, \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} \rangle = R_n(t) \quad \square$$

### 5.5 RELACION CON LAS FORMULAS DE CUADRATURA.

En el caso de ser  $c$  un funcional definido positivo con soporte en un intervalo  $I$  y  $0 \notin \overset{\circ}{I}$ , puede probarse que para  $n > k$  el polinomio  $Q_n(x)$  tiene todos sus ceros reales y simples, estando dichos ceros contenidos en el intervalo  $I$ , excepto a lo sumo uno de ellos

**Proposición 5.5.1.-** Si  $0 \notin \overset{\circ}{I}$ , los ceros de  $Q_n(x)$  son reales, simples y al menos  $n-1$  de ellos están situados en  $\overset{\circ}{I}$ .

**Demostración.-** Supongamos, por ejemplo, que  $0 \geq \text{Sup } I$ ; el otro caso se obtendría en la misma forma.

Sean  $y_{n,1}, \dots, y_{n,h}$  los puntos de  $\overset{\circ}{I}$  en los que  $Q_n(x)$  cambia de signo y sea

$$p(x) = (x-y_{n,1}) \dots (x-y_{n,h}).$$

Si  $h < k$ , se tiene  $p^{(k)}(0) = 0$  y por tanto:

$$\varphi(Q_n(x), p(x)) = \langle c, Q_n(x)p(x) \rangle = 0$$

puesto que el polinomio  $Q_n(x)p(x)$  no cambia de signo en  $I$ . De este modo, se tiene  $h = n < k$  y en consecuencia  $Q_n(x) = p(x) = P_n(x)$ .

Si  $h \geq k$ , se tiene  $p^{(k)}(0) \neq 0$ . Construimos un polinomio  $\omega(x) = p(x)(x-\alpha)$  tal que  $\omega^{(k)}(0) = 0$ . Para ello basta tomar  $\alpha = k p^{(k-1)}(0)/p^{(k)}(0)$ .

Es obvio que si  $0 \geq \text{Sup } I$ , entonces  $\alpha = k p^{(k-1)}(0)/p^{(k)}(0) > 0$ . De este

modo  $\alpha \in I$  y el polinomio  $Q_n(x)\omega(x)$  no cambia de signo en  $I$ , así

$$\varphi(Q_n(x), \omega(x)) = \langle c, Q_n(x)\omega(x) \rangle \neq 0$$

y por tanto  $\deg(\omega) \geq n$  y  $h \geq n-1$ .

Luego  $n-1$  de las raíces son reales, simples y contenidas en  $\overset{\circ}{I}$ ; claramente esto implica que la otra raíz también es real y simple.  $\square$

Supuesto  $Q_n(0) \neq 0$ , de igual modo que en la sección 4.5, podemos construir una fórmula de cuadratura para el funcional  $c$  basada en los ceros del polinomio  $x^{k+1}Q_n(x)$  y que será exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$ . Para ello, recordemos que dada una función  $f(x)$  el polinomio de interpolación de grado  $n+k$  en los datos

$$f(y_{n,1}), f(y_{n,2}), \dots, f(y_{n,n}), f(0), \dots, f^{(k)}(0)$$

puede escribirse en la forma:

$$L_{n+k}(x) = \sum_{i=1}^n f(y_{n,i}) l_i(x) + \sum_{i=0}^k f^{(i)}(0) m_i(x) \quad (5.5.1)$$

donde los polinomios  $l_i(x)$  y  $m_i(x)$  vienen determinados por las condiciones:

$$l_j(y_{n,i}) = \delta_{j,i} \quad i = 1, \dots, n, \quad l_j^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \dots, k$$

$$m_h(y_{n,i}) = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad m_h^{(i)}(0) = \delta_{i,h}, \quad i = 0, \dots, k$$

para  $j = 1, \dots, n$  y  $h = 0, \dots, k$ .

**Proposición 5.5.2.-** Sea  $n \geq k+1$ , para todo polinomio  $p(x)$  de grado  $2n-1$  se verifica:

$$\langle c, p(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} p(y_{n,i}) + \sum_{i=0}^k \gamma_i f^{(i)}(0) \quad (5.5.2)$$

donde  $\lambda_{n,i} = \langle c, l_i(x) \rangle$   $i = 1, \dots, n$ ,  $\gamma_i = \langle c, m_i(x) \rangle$   $i = 0, \dots, k$

**Demostración.-** Dado  $p(x)$  un polinomio arbitrario de grado menor o igual que  $2n-1$ , consideramos el polinomio de interpolación de Hermite  $L_{n+k}(x)$  de grado  $n+k$  para los datos

$$p(y_{n,1}), p(y_{n,2}), \dots, p(y_{n,n}), p(0), \dots, p^{(k)}(0)$$

entonces:

$$L_{n+k}(x) = \sum_{i=1}^n p(y_{n,i}) l_i(x) + \sum_{i=0}^k p^{(i)}(0) m_i(x)$$

Así  $p(x) - L_{n+k}(x)$  es un polinomio de grado  $2n-1$  que se anula en los puntos  $y_{n,i}$ ,  $i=1, \dots, n$  y posee un cero de multiplicidad  $k+1$  en  $0$ . Por tanto  $p(x) - L_{n+k}(x)$  puede escribirse en la forma

$$p(x) - L_{n+k}(x) = Q_n(x)r(x)x^{k+1}$$

donde  $r(x)$  es un polinomio de grado  $n-k-2$ , a lo sumo. De la cuasi-ortogonalidad del polinomio  $Q_n(x)$  respecto al funcional  $c^{(k+1)}$ , se tiene que:

$$\langle c, p(x) - L_{n+k}(x) \rangle = \langle c, Q_n(x)x^{k+1}r(x) \rangle = 0$$

y así:

$$\langle c, p(x) \rangle = \langle c, L_{n+k}(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} p(y_{n,i}) + \sum_{i=0}^k \gamma_i p^{(i)}(0)$$

donde  $\lambda_{n,i} = \langle c, l_i(x) \rangle$   $i = 1, \dots, n$ ,  $\gamma_i = \langle c, m_i(x) \rangle$   $i = 0, \dots, k$ .  $\square$

Para la determinación de los coeficientes  $\lambda_{n,i}$ , utilizando las condiciones de definición de los polinomios  $l_i(x)$ , se tiene que

$$l_i(x) = \frac{Q_n(x)x^{k+1}}{Q_n'(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}(x - y_{n,i})} \quad i = 1, \dots, n$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \lambda_{n,i} &= \langle c, l_i(x) \rangle = \langle c, \frac{Q_n(x)x^{k+1}}{Q_n'(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}(x - y_{n,i})} \rangle = \\ &= \frac{1}{Q_n'(y_{n,i})} \langle c, \frac{Q_n(x) - Q_n(y_{n,i})}{x - y_{n,i}} \rangle + \frac{1}{Q_n'(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}} \langle c, Q_n(x) \frac{x^{k+1} - y_{n,i}^{k+1}}{x - y_{n,i}} \rangle = \\ &= \frac{1}{Q_n'(y_{n,i})} \langle c, \frac{Q_n(x) - Q_n(y_{n,i})}{x - y_{n,i}} \rangle - \frac{\lambda Q_n^{(k)}(0) k!}{Q_n'(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}} = \\ &= \frac{W_n(y_{n,i})}{Q_n'(y_{n,i})} - \frac{\lambda Q_n^{(k)}(0) k!}{Q_n'(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}} = \frac{Z_n(y_{n,i})}{Q_n'(y_{n,i})} \end{aligned}$$

Para los coeficientes  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ , utilizando la fórmula de cuadratura (5.5.2) para el polinomio  $Q_n(x)x^h$ , para  $h = 0, \dots, k$  tenemos que:

$$\sum_{i=0}^k \gamma_i Q_n^{(i)}(0) = 0 \tag{5.5.3}$$

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i \binom{i}{1} Q_n^{(i-1)}(0) = 0$$

...

$$\sum_{i=k}^k \gamma_i \binom{i}{k} Q_n^{(i-k)}(0) = -\lambda Q_n^{(k)}(0) k!$$

esto es, los coeficientes  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ , son la solución de un sistema de ecuaciones triangular, el cual puede ser resuelto en forma recurrente y proporciona como solución:

$$\gamma_k = - \frac{\lambda Q_n^{(k)}(0) k!}{Q_n(0)}$$

$$\gamma_i = - \frac{1}{Q_n(0)} [\gamma_{i+1} \binom{i+1}{i} Q_n'(0) + \dots + \gamma_k \binom{k}{i} Q_n^{(k-i)}(0)] \quad i=k-1, \dots, 0$$

Las expresiones anteriores permiten relacionar la fórmula de cuadratura con los aproximantes racionales, como muestra la siguiente proposición:

**Proposición 5.5.3.-** Sea

$$g(x) = \frac{1}{1 - xt},$$

y sea  $P(x)$  el polinomio de interpolación para la función  $g(x)$  con datos

$$g(y_{n,1}), g(y_{n,2}), \dots, g(y_{n,n}), g(0), \dots, g^{(k)}(0)$$

entonces  $\langle c, P(x) \rangle = (k, n-1/n)_t$ .

**Demostración.-** A partir de la fórmula de cuadratura (5.5.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle c, P(x) \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} g(y_{n,i}) + \sum_{i=0}^k \gamma_i g^{(i)}(0) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} \frac{1}{1 - y_{n,i}t} + \sum_{i=0}^k \gamma_i i! t^i = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{W_n(y_{n,i})}{Q'_n(y_{n,i})} \frac{1}{1 - y_{n,i}t} - \lambda Q_n^{(k)}(0) k! \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q'_n(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}} \frac{1}{1 - y_{n,i}t} + \sum_{i=0}^k \gamma_i i! t^i$$

Para el primer sumando, haciendo el cambio  $t=x^{-1}$ , obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n \frac{W_n(y_{n,i})}{Q'_n(y_{n,i})} \frac{1}{1 - y_{n,i}t} = x \sum_{i=1}^n \frac{W_n(y_{n,i})}{Q'_n(y_{n,i})} \frac{1}{x - y_{n,i}}$$

que es la descomposición en fracciones simples de  $x \frac{W_n(x)}{Q_n(x)}$ , y por tanto:

$$\sum_{i=1}^n \frac{W_n(y_{n,i})}{Q'_n(y_{n,i})} \frac{1}{1 - y_{n,i}t} = x \frac{W_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\tilde{W}_n(t)}{\tilde{Q}_n(t)}$$

Para el segundo sumando, procediendo en el mismo modo, se tiene:

$$- \lambda Q_n^{(k)}(0) k! \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q'_n(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}} \frac{1}{1 - y_{n,i}t} + \sum_{i=0}^k \gamma_i i! t^i =$$

$$- \lambda Q_n^{(k)}(0) k! x \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q'_n(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}} \frac{1}{x - y_{n,i}} + x \sum_{i=0}^k \gamma_i i! \frac{1}{x^{i+1}}$$

Como consecuencia de las ecuaciones (5.5.3), esta última expresión es la descomposición en fracciones simples de

$$- \lambda Q_n^{(k)}(0) k! \frac{x}{Q_n(x)x^{k+1}}$$

y de este modo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda Q_n^{(k)}(0) k! \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_n'(y_{n,i})(y_{n,i})^{k+1}} \frac{1}{1-y_{n,i}t} + \sum_{i=0}^k \gamma_i t^i = \\
 & = -\lambda Q_n^{(k)}(0) k! \frac{x}{Q_n(x)x^{k+1}} = -\lambda Q_n^{(k)}(0) k! \frac{t^{n+k}}{\tilde{Q}_n(t)}.
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\langle c, P(x) \rangle = \frac{\tilde{W}_n(t)}{\tilde{Q}_n(t)} - \lambda Q_n^{(k)}(0) k! \frac{t^{n+k}}{\tilde{Q}_n(t)} = (k, n-1/n)_t(t). \quad \square$$

## 5.6 EL CASO GENERAL.

Un planteamiento más general del problema consistiría en la búsqueda de aproximantes racionales en los que se hubieran prefijado los coeficientes correspondientes a los términos de mayor grado en el numerador. En tal caso, dados  $k+1$  números reales  $A_1, \dots, A_{k+1}$ , buscamos una función racional de la forma:

$$\frac{A_{k+1}t^{m+k+1} + \dots + A_1t^{m+1} + \tilde{u}(t)}{\tilde{v}(t)}$$

donde  $u(t) \in \mathbb{P}_m$  y  $v(t) \in \mathbb{P}_n$  (mónico), verificando:

$$f(t) - \frac{A_{k+1}t^{m+k+1} + \dots + A_1t^{m+1} + \tilde{u}(t)}{\tilde{v}(t)} = O(t^{m+n+1}). \quad (5.6.1)$$

Esta condición es equivalente a

$$\tilde{v}(t)f(t) - \tilde{u}(t) = A_1t^{m+1} + \dots + A_{k+1}t^{m+k+1} + O(t^{m+n+1}). \quad (5.6.2)$$

Siguiendo el mismo razonamiento utilizado en el apartado 5.2, la

condición (5.6.2) implicaría

$$\langle c^{(m, n+1)}, x^i v(x) \rangle = A_{i+1}, \quad i = 0, \dots, k \quad (5.6.3)$$

$$\langle c^{(m, n+1)}, x^i v(x) \rangle = 0, \quad i = k+1, \dots, n-1$$

La solución del sistema de ecuaciones (5.6.3) proporciona los coeficientes de  $v(t)$  y  $u(t)$  se calcula en la forma habitual. Una expresión para el polinomio  $v(t)$  viene dada por:

**Proposición 5.6.1.-**

$$v(x) = P_n(x) + \sum_{i=0}^k \frac{A_{i+1}}{i!} K_{n-1}^{(0,i)}(x,0) \quad (5.6.5)$$

**Demostración.-** Similar a la proposición 5.2.1.  $\square$

En este caso, el polinomio  $v(t)$  sería el polinomio ortogonal mónico con respecto a la forma bilineal definida por:

$$\varphi(f,g) = \langle c^{(m, n+1)}, fg \rangle + \sum_{i=0}^k \lambda_i f^{(i)}(0) g^{(i)}(0)$$

donde  $A_{i+1} = -\lambda_i i! v^{(i)}(0)$ .

Tales polinomios ortogonales constituyen una generalización de los polinomios considerados en el apartado 5.3. Para ellos, pueden probarse propiedades análogas a las enunciadas anteriormente.

## 5.7 UN EJEMPLO NUMERICO.

Consideramos la serie  $f(t) = (1+t^2)e^t$ , y construimos el aproximante  $(2,1/4)_f$ , donde tomamos el parámetro  $\hat{\lambda} = 0.25$ . En este caso el cálculo del aproximante necesita el conocimiento de  $c_0, \dots, c_5$  y así el aproximante debe ser comparado con los aproximantes de Padé  $[p/q]_f$  donde  $p+q = 5$ .

De este modo, obtenemos los aproximantes racionales:

$$(2,1/4)_f(t) = \frac{1 - 26.2 x + 26.7 x^3}{1 + 25.2 x - 26.7 x^2 + 14.4333 x^3 - 4.325 x^4}$$

$$[1,4]_f(t) = \frac{1560 + 2424 x}{1560 + 864 x - 3204 x^2 + 88 x^3 + 2865 x^4}$$

$$[2,3]_f(t) = \frac{8340 - 264 x + 8595 x^2}{8340 - 8604 x + 4689 x^2 - 1513 x^3}$$

En la siguiente tabla se muestran valores de la función y de los aproximantes en el intervalo  $[-1,1]$ :

t	f(t)	$(2,1/4)_f$	$[1/4]_f$	$[2/3]_f$
-1	0.735759	0.745065	-3.2119	0.743066
-0.8	0.7369	0.740605	7.11285	0.739625
-0.6	0.746384	0.747432	0.439166	0.747078
-0.4	0.777571	0.777732	0.767279	0.777659
-0.2	0.85148	0.851486	0.85136	0.851482
0.2	1.27026	1.27026	1.27012	1.27026
0.4	1.73052	1.73058	1.71855	1.7309
0.6	2.47808	2.48064	2.29185	2.4842
0.8	3.64989	3.6769	2.46561	3.70057
1	5.43656	5.60971	1.83341	5.72493

La pérdida de precisión en el aproximante de Padé  $[1/4]_f$  es debida a la presencia de dos polos en el intervalo  $[-1,1]$ ; este problema se corrige en el aproximante  $(2,1/4)_f$  al incorporar en su construcción la información acerca de los ceros complejos de la función  $f$ . En la figura 5.1 se muestran las gráficas de la función y los aproximantes, la función se representa en trazo continuo, el aproximante de Padé  $[1/4]_f$  se representa con un trazo de puntos y rayas, el

aproximante de Padé [2,3], se representa con un trazo de puntos y rayas, y el aproximante racional (2,1/4), se representa con un trazo de puntos.

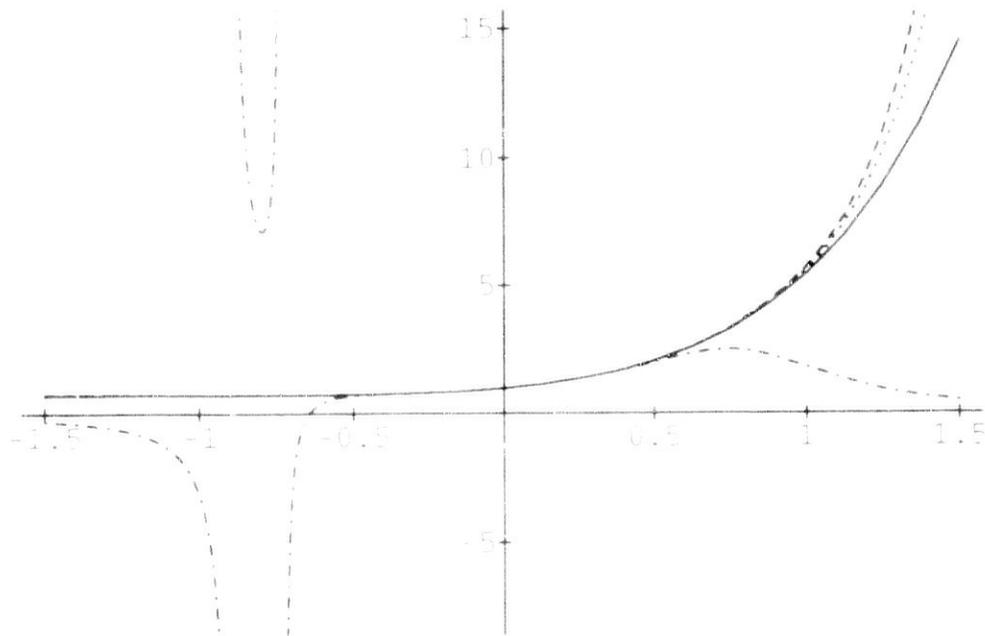


Figura 5.1

APENDICE

Programas

## PROGRAMAS.

MATHEMATICA<sup>TM</sup> es un lenguaje de programación simbólico de propósito general, cuya principal característica diferenciadora es la de ser capaz de entender y manipular simbólicamente expresiones matemáticas, es decir, sin necesidad de dar a las variables involucradas en las fórmulas un valor numérico concreto. Entre las principales ventajas que ofrece este tipo de lenguajes de programación podríamos destacar la capacidad de resolver problemas con rapidez y fiabilidad, la posibilidad de obtener resultados exactos (cuando se trabaja con números racionales la aritmética es exacta y cuando se trabaja con reales la precisión se puede fijar arbitrariamente) y, desde el punto de vista computacional, la posibilidad de utilizar métodos analíticos numéricamente inestables. Obviamente, estas ventajas se consiguen a costa del tiempo de cálculo.

En este apéndice, se incluye el código de tres programas, **Sobolev1.m**, **Sobolev2.m** y **PadeSob.m**, escritos para MATHEMATICA<sup>TM</sup>, que incluyen diversas funciones, las cuales permiten calcular los polinomios ortogonales de tipo Sobolev y los aproximantes racionales descritos en el capítulo 5. Para ilustrar la utilización de estos programas, se incluyen también cinco ejemplos de sesiones interactivas con MATHEMATICA<sup>TM</sup>. Los tres programas pueden ser utilizados en cualquier sistema de computación que disponga de la versión 1.2 (o superior) de MATHEMATICA<sup>TM</sup>, aunque para un mejor aprovechamiento de las características simbólicas del lenguaje de programación es aconsejable utilizar la versión 2.

El primero de los tres programas, **Sobolev1.m**, permite el cálculo de polinomios ortogonales tipo Sobolev asociados a un producto escalar cuya parte estándar viene definida por una función peso  $v(x)$ . Este programa incluye las siguientes funciones:

**SobolevT[n,x,{w,a,b,c,r,lambda}]**, que proporciona el polinomio de tipo Sobolev de grado  $n$  para el producto:

$$(p,q) = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx + \lambda p^{(k)}(c)q^{(k)}(c),$$

**SobolevL**[*n,x,{w,a,b,c,lcoefs}*], que devuelve el polinomio de tipo Sobolev de grado *n* para el producto

$$(p,q) = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx + \sum_{k=0}^r \lambda_k p^{(k)}(c)q^{(k)}(c)$$

donde **lcoefs** es la lista de los coeficientes  $\lambda_k$ ,  $k=0,\dots,r$ .

En ambos casos, los coeficientes del polinomio se obtienen a partir del sistema lineal de ecuaciones deducido de las condiciones de ortogonalidad. No se especifica ninguna restricción sobre el punto *c* o los coeficientes  $\lambda$ .

El programa **Sobolev2.m** calcula los polinomios ortogonales tipo Sobolev a partir de los momentos del funcional *u*. Incluye, al igual que el programa anterior, dos funciones:

**SobolevTypeM**[*n,x,{mseq,c,r,lambda}*], que calcula el polinomio de tipo Sobolev de grado *n* para la forma bilineal:

$$\varphi(p,q) = \langle u,p(x)q(x) \rangle + \lambda p^{(k)}(c)q^{(k)}(c),$$

a partir de los momentos del funcional *u*, que se incluyen en la lista **mseq**.

**SobolevListM**[*n,x,{mseq,c,lcoefs}*] que proporciona el polinomio de tipo Sobolev de grado *n* para la forma bilineal:

$$\varphi(p,q) = \langle u,p(x)q(x) \rangle + \sum_{k=0}^r \lambda_k p^{(k)}(c)q^{(k)}(c)$$

donde **lcoefs** denota la lista de los coeficientes  $\lambda_k$ ,  $k=0,\dots,r$ .

En las dos funciones, los coeficientes se calculan en la misma forma que en el programa anterior. En ambas funciones, si no se proporcionan suficientes momentos la función devuelve el mensaje de error **Fail**.

Por último el tercero de los programas, **PadeSob.m**, contiene las

funciones:

**Pade[func,{x,x0,m,k}]**, que calcula el aproximante de Padé  $[m/k]$  para la función **func** (una función de  $x$ ) desarrollada en serie de potencias en torno al punto **x0**.

**PadeSob[func,{x,x0,m,k,r,lambda}]**, que da el aproximante racional  $(r,m/k)$ , descrito en el capítulo 5, para la función de la variable  $x$  **func**, la cual se desarrolla en serie de potencias en torno al punto **x0**.

Los coeficientes de estos aproximantes se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones proveniente de la condición de aproximación. La función **Pade[func,{x,x0,m,k}]** ha sido tomada de la documentación que acompaña al programa MATHEMATICA<sup>TM</sup> y se incluye en este programa para completar sus posibilidades de cálculo.

Los ejemplos que se presentan muestran como se puede utilizar el programa MATHEMATICA<sup>TM</sup> para explorar las propiedades de los polinomios ortogonales tipo Sobolev. Cada ejemplo está constituido por las entradas y salidas de una sesión estándar con MATHEMATICA<sup>TM</sup>, en la que el núcleo del programa se ejecuta en un ordenador IBM RISC 6000 del Centro de Cálculo de la Universidad de Granada y el *front end* se ejecuta en un ordenador Macintosh LC conectado en red, conjugando de esta forma la potencia de cálculo del ordenador central con las posibilidades gráficas del Macintosh.

Todos los ejemplos comienzan con una instrucción como **<<Sobolev1.m**, cuyo objetivo es cargar el programa correspondiente, y a partir de ese momento están disponibles las funciones incluidas en el programa.

El ejemplo 1 proporciona los coeficientes de los polinomios de tipo Sobolev de grados 4, 5, 6 y 7, asociados a la medida de Legendre y parámetros  $c=1.5$  y  $\lambda=0.1$ . El gráfico que se obtiene es el de la figura 4.3.

El ejemplo 2 ilustra la propiedad de separación de ceros entre los polinomios  $Q_5(x)$  y  $P_4^{c,\lambda}(x)$ , considerando el mismo producto que en el ejemplo 1. El gráfico es el de la figura 4.2.

En el ejemplo 3 se obtiene el polinomio de tipo Sobolev de grado 3, asociado a la medida de Laguerre  $d\mu(x) = x^a e^{-x} dx$ , y parámetros  $c=0$  y  $\lambda=0.1$ , a partir de la sucesión de momentos de dicha medida. Las instrucciones de las

entradas 3, y 5 tienen como objetivo que el programa simplifique en los cálculos la función gamma. Nótese que la salida es un polinomio en  $x$  cuyos coeficientes dependen de  $a$ .

En el ejemplo 4 se muestra como aprovechar las especiales características del programa. Dejando el valor de **lambda** como una variable **l**, el resultado que se obtiene es un polinomio en  $x$  cuyos coeficientes dependen de **l**. Haciendo tender **l** a infinito obtenemos el polinomio límite  $R_n(x)$ , descrito en la sección 4.6 y haciendo **l** igual a 0, obtenemos el polinomio estándar. Variando los valores de **l** se obtiene una serie de gráficos que pueden ser animados para ilustrar la propiedad de crecimiento de las raíces con respecto al parámetro.

En el ejemplo 5 se incluye el proceso para obtener el ejemplo numérico de la sección 5.7. Para ello calculamos los aproximantes de Padé [2/3] y [1/4], así como el aproximante racional (2,1/4) para la función  $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ , obteniéndose las expresiones de dichos aproximantes, así como los gráficos y tabla de valores.

```

BeginPackage["NumericalMath`Sobolev1`"]

SobolevT::usage =
"SobolevT[n,x,{w,a,b,c,r,lambda}] gives the n-th monic Sobolev-Type orthogonal
polynomial for the weight function w (a function of x) on the interval [a,b],
r-th derivative in c and parameter lambda."

SobolevL::usage =
"SobolevL[n,x,{w,a,b,c,lcoefs}] gives the n-th monic Sobolev-Type orthogonal
polynomial for the weight function w (a function of x) on the interval [a,b],
and derivatives in c multiplied by coefficients in lcoefs."

Begin["NumericalMath`Sobolev`Private`"]

SobolevT[n_Integer, x_, {w_, a_, b_, c_, r_Integer, lambda_}] :=
Block[
{
i,
blist,
clist = {},
coef = Range[n],
rhs
},
Do[clist = Append[clist,Integrate[(x-c)^i w,{x,a,b}],{i,0,2n-
1}];
rhs = -clist[[Range[n+1,2n]]];
Do[coef[[i]] = clist[[Range[i,i+n-1]]],{i,n}];
If[r<n,coef[[r+1,r+1]] += lambda r!];
blist = LinearSolve[coef,rhs];
If[Head[blist] === LinearSolve, Return[Fail]];
blist = Append[blist,1];
Collect[Expand[Sum[blist[[i]] (x-c)^(i-1),{i,n+1}]],x]
];

```

```

SobolevL[n_Integer, x_, {w_, a_, b_, c_, lcoefs_}] :=
  Block[
    {
      i,
      blist,
      clist = {},
      coef = Range[n],
      rhs,
      r = Length[lcoefs]
    },
    Do[clist = Append[clist, Integrate[(x-c)^i w, {x,a,b}], {i, 0, 2n-1}];
    rhs = -clist[[Range[n+1, 2n]]];
    Do[coef[[i]] = clist[[Range[i, i+n-1]]], {i, n}];
    Do[coef[[i, i]] += lcoefs[[i]] (i-1)!, {i, Min[n, r]}];
    blist = LinearSolve[coef, rhs];
    If[Head[blist] === LinearSolve, Return[Fail]];
    blist = Append[blist, 1];
    Collect[Expand[Sum[blist[[i]] (x-c)^(i-1), {i, n+1}], x]
  ];

End[] (* NumericalMath`Sobolev1`Private` *)

Protect[SobolevT, SobolevL];

EndPackage[] (* NumericalMath`Sobolev1` *)

```

```
BeginPackage["NumericalMath`Sobolev2`"]
```

```
SobolevTypeM::usage =
```

```
"SobolevTypeM[n,x,{mseq,c,r,lambda}] gives the n-th monic Sobolev-Type
orthogonal polynomial for the linear functional defined from the sequence of
moments mseq r-th derivative in c and parameter lambda."
```

```
SobolevListM::usage =
```

```
"SobolevListM[n,x,{mseq,c,lcoefs}] gives the n-th monic Sobolev-Type
orthogonal polynomial for the linear functional defined from the sequence of
moments mseq and derivatives in c multiplied by coefficients in lcoefs."
```

```
Begin["NumericalMath`Sobolev`Private`"]
```

```
SobolevTypeM[n_Integer, x_, {mseq_, c_, r_Integer, lambda_}] :=
```

```
Block[
```

```
{
```

```
i,j,
```

```
blist,
```

```
clist = {}.
```

```
coef = Range[n],
```

```
rhs
```

```
},
```

```
If[Length[mseq] < 2n, Return[Fail]];

```

```
If[c==0,clist=mseq,Do[clist=Append[clist,Sum[
```

```
Binomial[i,j] mseq[[j+1]] (-c)^(i-j),{j,0,i}],{i,0,2n-1}]];

```

```
rhs = -clist[[Range[n+1,2n]]];

```

```
Do[coef[[i]] = clist[[Range[i,i+n-1]]],{i,n}];

```

```
If[r<n,coef[[r+1,r+1]] += lambda r!;
```

```
blist = LinearSolve[coef,rhs];
```

```
If[Head[blist] === LinearSolve, Return[Fail]];

```

```
blist = Append[blist,1];
```

```
Collect[Expand[Sum[blist[[i]] (x-c)^(i-1),{i,n+1}]],x]

```

```
];
```

```

SobolevListM[n_Integer, x_, {mseq_, c_, lcoefs_}] :=
  Block[
    {
      i,j,
      blist,
      clist = {},
      coef = Range[n],
      rhs,
      r = Length[lcoefs]
    },
    If[Length[mseq] < 2n, Return[Fail]];
    If[c==0,clist=mseq,Do[clist=Append[clist,Sum{~
      Binomial[i,j] mseq[[j+1]] (-c)^(i-j),{j,0,i}],{i,0,2n-1}]];
    rhs = -clist[[Range[n+1,2n]]];
    Do[coef[[i]] = clist[[Range[i,i+n-1]]],{i,n};
    Do[coef[[i,i]] += lcoefs[[i]] (i-1)!,{i,Min[n,r]}];
    blist = LinearSolve[coef,rhs];
    If[Head[blist] === LinearSolve, Return[Fail]];
    blist = Append[blist,1];
    Collect[Expand[Sum[blist[[i]] (x-c)^(i-1),{i,n+1}]],x]
  ];

End[] (* NumericalMath`Sobolev2`Private` *)

Protect[SobolevTypeM,SobolevListM];

EndPackage[] (* NumericalMath`Sobolev2` *)

```

```
BeginPackage["NumericalMath`PadeSob`"]
```

```
Pade::usage =
```

"Pade[func, {x, x0, m, k}] gives the Padé approximation to func (a function of the variable x) where the constant x0 is the center of expansion and m and k are the degrees of the numerator and denominator, respectively."

```
PadeSob::usage =
```

"PadeSob[func, {x, x0, m, k, r, lambda}] gives the Pade-Sobolev approximation to func (a function of the variable x) where the constant x0 is the center of expansion, m and k are the degrees of the numerator and denominator, respectively, r is the order of the derivative and lambda is the constant that defines the Sobolev inner product"

```
Begin["NumericalMath`PadeSob`Private`"]
```

```
Pade[f_, {x_, x0_, mm_Integer, k_Integer}] :=
```

```
Block[{answer = Pade0[f, {x, x0, mm, k}]
      (x-x0)^(Series[f, {x, x0, mm+k+3}][[2,4]]),
      answer /; answer != Fail];
```

```
PadeSob[f_, {x_, x0_, mm_Integer, k_Integer, r_Integer, lambda_}] :=
```

```
Block[{answer = PadeSob0[f, {x, x0, mm, k, r, lambda}]
      (x-x0)^(Series[f, {x, x0, mm+k+3}][[2,4]]),
      answer /; answer != Fail];
```

```
Seriesf[f_, {x_, x0_, n_}] := savedf[f, {x, x0}] =
```

```
If[SameQ[Head[savedf[f, {x, x0}]], List] && n<=savedf[f, {x, x0}][[1]],
  savedf[f, {x, x0}],
  Block[{series=Series[f, {x, x0, n}],
        {Length[series[[3]],series]},
        Block[{series=Series[f, {x, x0, n}],
              {Length[series[[3]],series]}}];
```

```

Pade0[f_, {x_, x0_, mm_Integer, k_Integer}] :=
  Block[
    {
      m,i,
      temp,
      alist = Range[mm+1],
      blist,
      clist,
      coef = Range[k],
      rhs,
      fseries = Series[f, {x, x0, mm+k+3}][[2]]
    },
    clist = fseries[[3]];
    If[Length[clist]-k < mm,Return[Fail],.];
    m = Min[mm,Length[clist]-k];
    rhs = -Reverse[clist[[Range[m+2,m+k+1]]]];
    Do[temp = clist[[Range[Max[m+2-i,1],m+k+1-i]]];
      If[Length[temp]<k,
        temp = Join[Table[0,{j,k-Length[temp]}],temp]];
      coef[[i]] = Reverse[temp,{i,k}];
    If[k>0,blist = LinearSolve[coef,rhs]];
    If[Head[blist] === LinearSolve, Return[Fail]];
    Do[alist[[i]] =
      Sum[blist[[j]] clist[[i-j]],{j,Min[i-1,k]}],
      {i,m+1}];
    alist += clist[[Range[m+1]]];
    Sum[alist[[i]] (x-x0)^(i-1),{i,m+1}]/
      (1+Sum[blist[[i]] (x-x0)^i,{i,k}])
  ];

```

```

PadeSob0[f_, {x_, x0_, mm_Integer, k_Integer, r_Integer, lambda_}] :=
  Block[
    {

```

```

m,i,
temp,
alist = Range[mm+1],
blist,
clist,
rhs,
fseries = Seriesf[f, {x, x0, mm+k+3}][[2]]
},
coef = Range[k];
clist = fseries[[3]];
If[Length[clist]-k < mm,Return[Fail],,];
m = Min[mm,Length[clist]-k];
rhs = -Reverse[clist[[Range[m+2,m+k+1]]]];
Do[temp = clist[[Range[Max[m+2-i,1],m+k+1-i]]];
    If[Length[temp]<k,
        temp = Join[Table[0,{j,k-Length[temp]}],temp]];
    coef[[i]] = Reverse[temp],{i,k});
coef[[k-r+1,k-r]] += lambda r! r!;
If[k>0,blist = LinearSolve[coef,rhs]];
If[Head[blist] === LinearSolve, Return[Fail]];
Do[alist[[i]] =
    Sum[blist[[j]] clist[[i-j]],{j,Min[i-1,k]}],
    {i,m+1}];
alist += clist[[Range[m+1]]];
(Sum[alist[[i]] (x-x0)^(i-1),{i,m+1}]
 - lambda r! r! blist[[k-r]] (x-x0)^(m+r))/
(1+Sum[blist[[i]] (x-x0)^i,{i,k}])
];

```

```
End[] (* NumericalMath'PadeSob'Private' *)
```

```
Protect[Seriesf, Pade0, Pade, PadeSob0, PadeSob];
```

```
EndPackage[] (* NumericalMath'PadeSob' *)
```

## Ejemplo 1

```
In[1]:=
```

```
<<Sobolev1.m
```

```
RemoteIn[2]:=
```

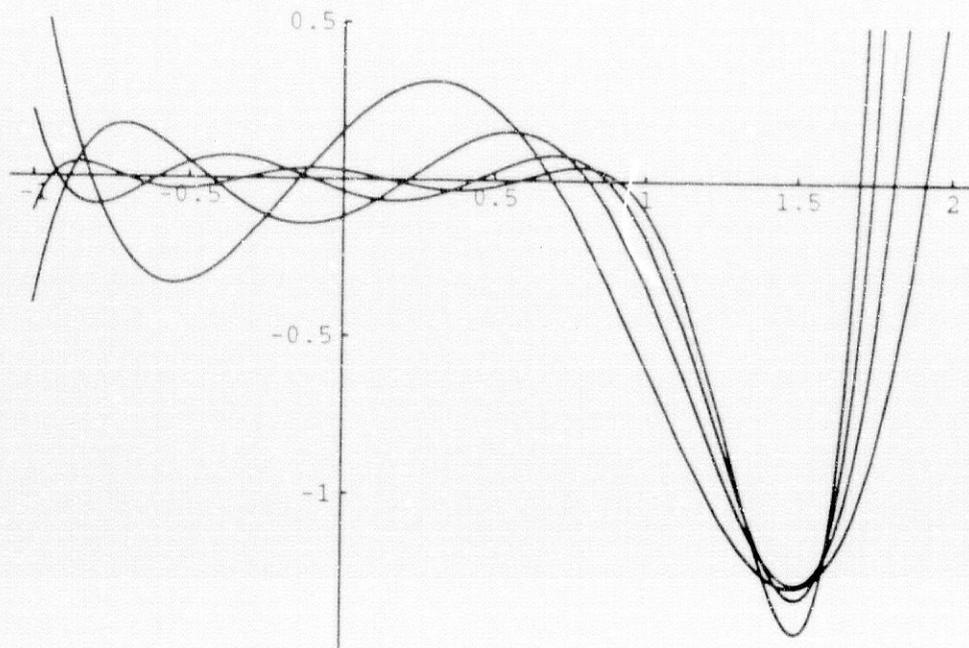
```
pols=Table[SobolevT[n,x,{1,-1,1,1.5,1,0.1}],{n,4,7}]
```

```
RemoteOut[2]=
```

```
{0.154825 + 0.973306 x - 1.06447 x2 - 1.65289 x3 + x4,
-0.121222 + 0.366036 x + 1.27581 x2 - 1.32838 x3 -
1.52024 x4 + x5, -0.0391451 - 0.32331 x + 0.638727 x2 +
1.56361 x3 - 1.5831 x4 - 1.43548 x5 + x6,
0.0271877 - 0.131111 x - 0.599024 x2 + 0.973785 x3 +
1.84809 x4 - 1.83528 x5 - 1.37992 x6 + x7}
```

```
RemoteIn[3]:=
```

```
Plot[Release[pols],{x,-1,2},PlotRange->{-1.5,0.5},
Ticks->{Range[-1,2,0.5],Range[-1,0.5,0.5]},
PlotStyle->Thickness[0.002]]
```



```
RemoteOut[3]=  
-Graphics-
```

## Ejemplo 2

```
In[1]:=
```

```
<<Sobolev1.m
```

```
RemoteIn[2]:=
```

```
p=SobolevT[5,x,{1,-1,1,1.5,1,0.1}]
```

```
RemoteOut[2]=
```

$$-0.121222 + 0.366036 x + 1.27581 x^2 - 1.32838 x^3 - 1.52024 x^4 + x^5$$

```
RemoteIn[3]:=
```

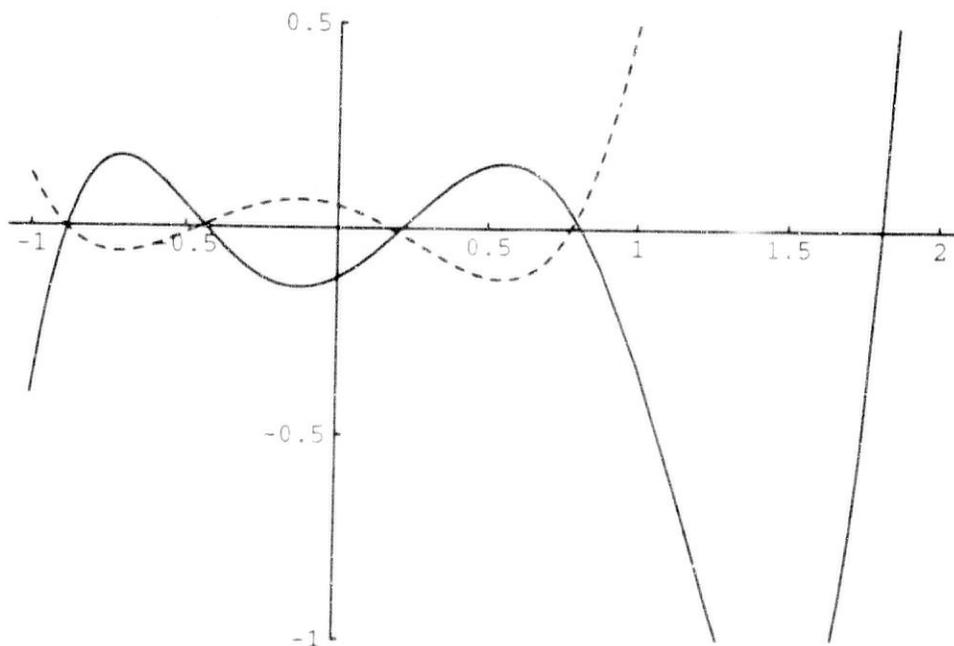
```
p1=SobolevT[4,x,{(x-1.5)^2,-1,1,1.5,1,0}]
```

```
RemoteOut[3]=
```

$$0.0550751 - 0.202548 x - 0.739473 x^2 + 0.391972 x^3 + x^4$$

```
RemoteIn[4]:=
```

```
Plot[Release[{p,p1}],{x,-1,2},PlotRange->{-1,0.5},
  Ticks->{Range[-1,2,0.5],Range[-1,0.5,0.5]},
  PlotStyle->{{Thickness[0.002]},
  {Thickness[0.002],Dashing[{0.01,0.01}]}}]
```



## Ejemplo 3

```

In[1]:=
  <<Sobolev2.m

RemoteIn[2]:=
  ?SobolevListM

SobolevListM[n,x,{mseq,c,lcoefs}] gives the n-th
  monic Sobolev-Type orthogonal polynomial for the
  linear functional defined from the sequence of
  moments mseq and derivatives in c multiplied by
  coefficients in lcoefs.

RemoteIn[3]:=
  Unprotect [Gamma]

RemoteOut[3]=
  {Gamma}

RemoteIn[4]:=
  Gamma[a_+n_Integer]:=(a+n-1)*Gamma[a+n-1];n>1

RemoteIn[5]:=
  Protect [Gamma]

RemoteOut[5]=
  {Gamma}

RemoteIn[6]:=
  TableForm[mom=Table[Gamma[a+i+1],{i,0,5}]]

RemoteOut[6]//TableForm=
  Gamma[1 + a]

  (1 + a) Gamma[1 + a]

  (1 + a) (2 + a) Gamma[1 + a]

  (1 + a) (2 + a) (3 + a) Gamma[1 + a]

  (1 + a) (2 + a) (3 + a) (4 + a) Gamma[1 + a]

  (1 + a) (2 + a) (3 + a) (4 + a) (5 + a) Gamma[1 + a]

RemoteIn[7]:=
  Simplify[SobolevListM[3,x,{mom,0,{0,1}}]]

```

RemoteOut[7]=

$$\begin{aligned}
& (24 + 50 a + 35 a^2 + 10 a^3 + a^4 - 27 x^2 - 18 a x^2 - \\
& 3 a^2 x^2 + 5 x^3 + 2 a x^3 - 6 \Gamma[1 + a] - \\
& 17 a \Gamma[1 + a] - 17 a^2 \Gamma[1 + a] - \\
& 7 a^3 \Gamma[1 + a] - a^4 \Gamma[1 + a] + \\
& 18 x \Gamma[1 + a] + 33 a x \Gamma[1 + a] + \\
& 18 a^2 x \Gamma[1 + a] + 3 a^3 x \Gamma[1 + a] - \\
& 9 x^2 \Gamma[1 + a] - 12 a x^2 \Gamma[1 + a] - \\
& 3 a^2 x^2 \Gamma[1 + a] + x^3 \Gamma[1 + a] + \\
& a x^3 \Gamma[1 + a]) / \\
& (5 + 2 a + \Gamma[1 + a] + a \Gamma[1 + a])
\end{aligned}$$

## Ejemplo 4

In[1]:=

<<Sobolev1.m

RemoteIn[2]:=

p=SobolevT[4,x,{1,-1,1,1.5,1,1}]

RemoteOut[2]=

$$\begin{aligned}
 & 5.0625 - \frac{0.0269642}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1} - \frac{23.3817 \cdot 1}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1} + \\
 & (-13.5 + \frac{0.0731429}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1} + \frac{69.0192 \cdot 1}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1}) \\
 & x + (13.5 - \frac{0.0777868}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1} - \\
 & \frac{69.4121 \cdot 1}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1} x^2 + \\
 & (-6. + \frac{0.0325079}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1} + \frac{20.6248 \cdot 1}{0.00541799 + 4.76508 \cdot 1}) \\
 & x^3 + x^4
 \end{aligned}$$

RemoteIn[3]:=

p3=Limit[p, l->Infinity]

RemoteOut[3]=

$$0.155611 + 0.984372 x - 1.06683 x^2 - 1.67169 x^3 + x^4$$

RemoteIn[4]:=

p2=Limit[p, l->0]

RemoteOut[4]=

$$0.0857143 + 4.27889 \cdot 10^{-11} x - 0.857143 x^2 + 2.98357 \cdot 10^{-10} x^3 + x^4$$

RemoteIn[5]:=

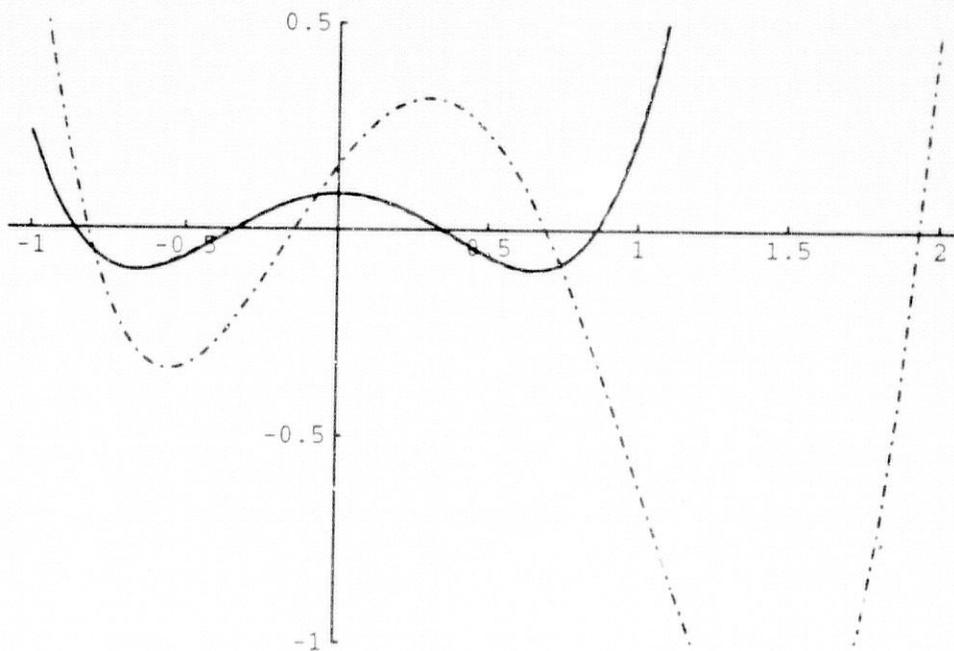
1=10^11

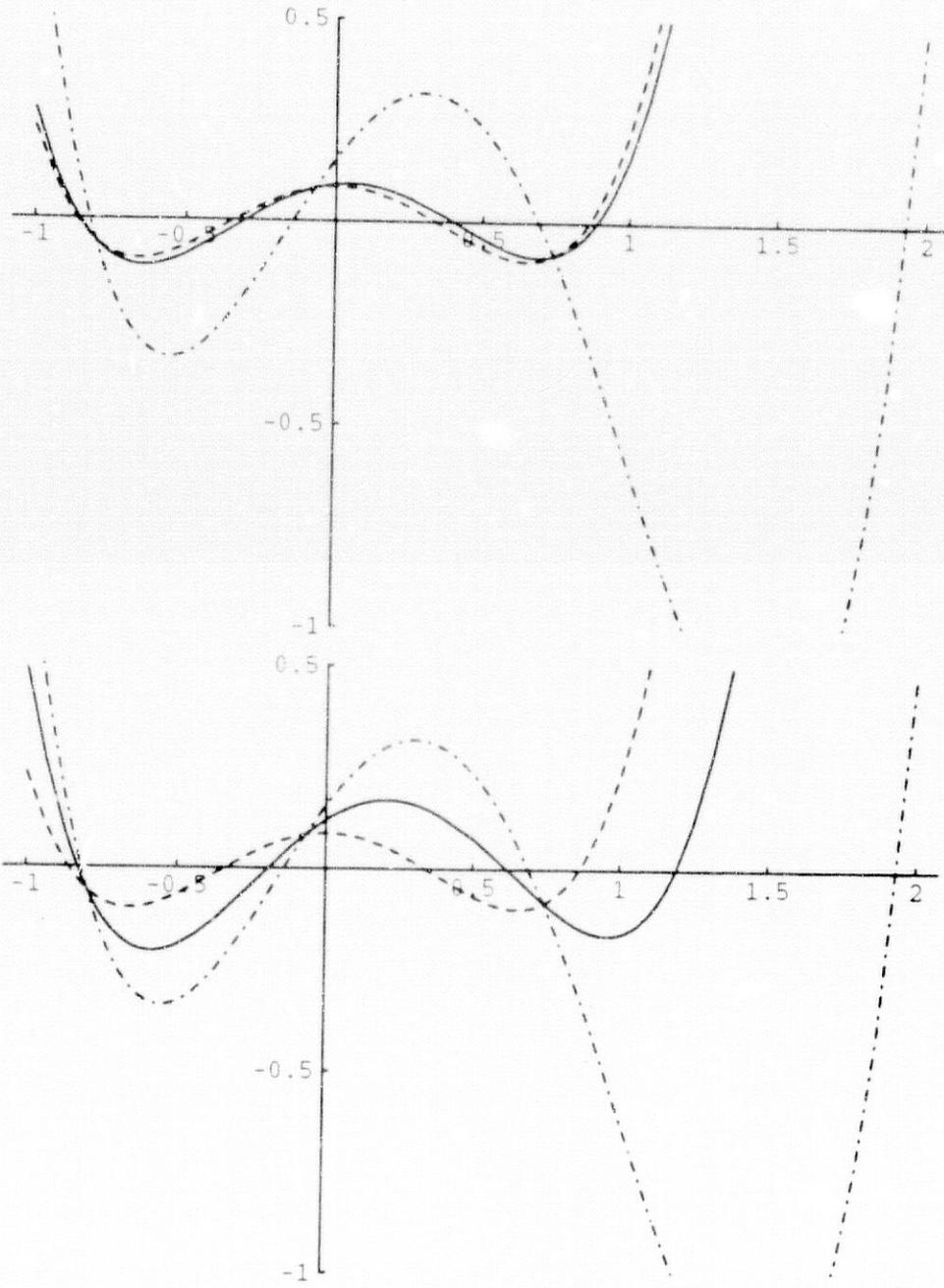
RemoteOut[5]=

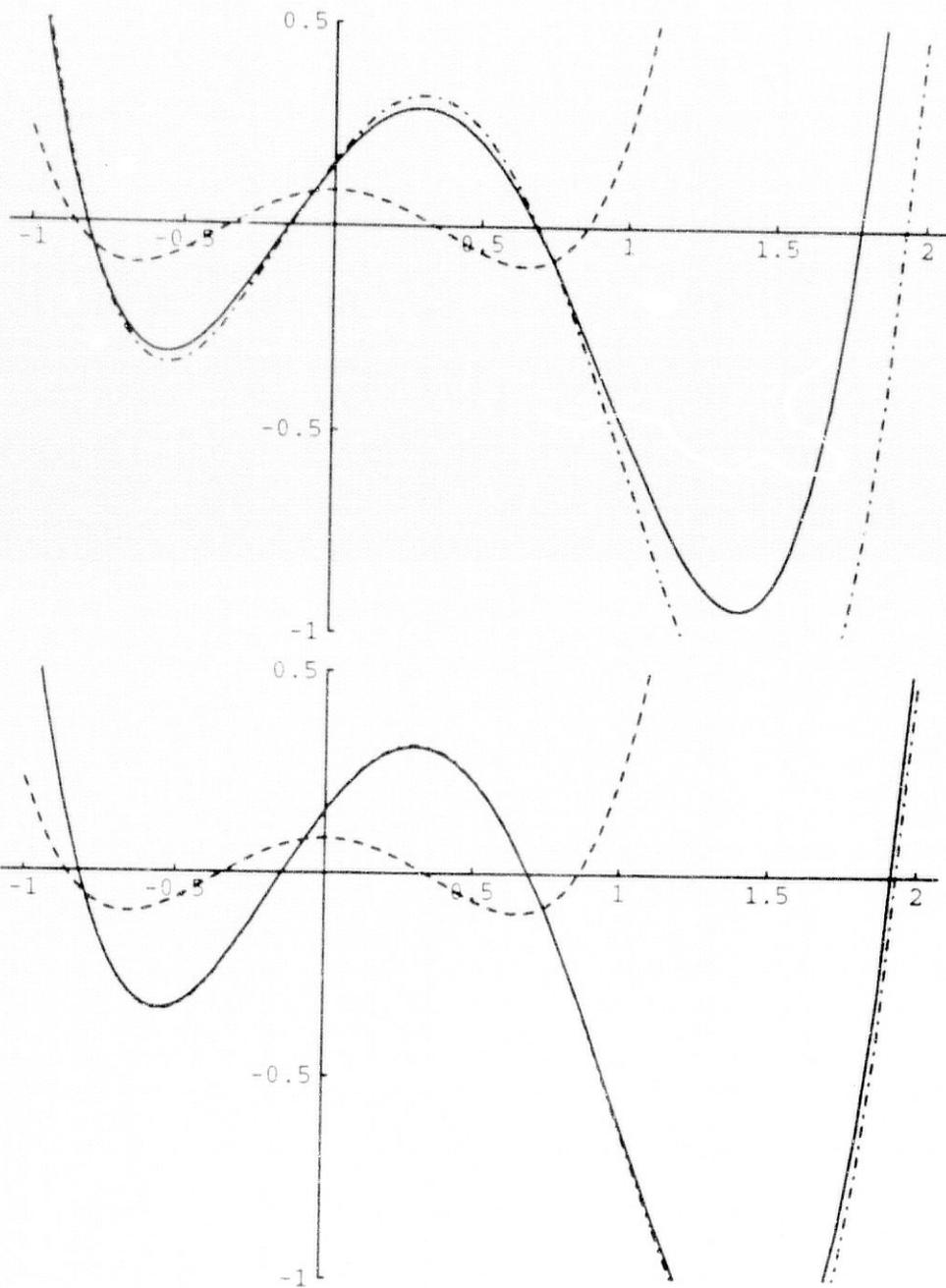
11  
10

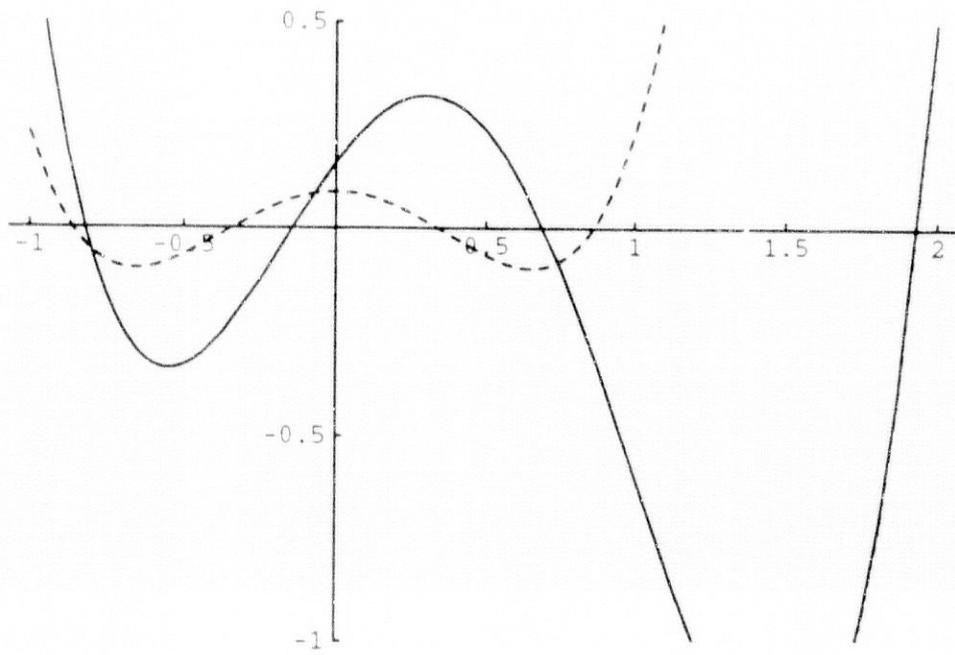
RemoteIn[6]:=

```
Do[Plot[{p,p2,p3},{x,-1,2},
  PlotRange->{-1,0.5},
  Ticks->{Range[-1,2,0.5],Range[-1,0.5,0.5]},
  PlotStyle->{{Thickness[0.002]},
  {Thickness[0.002],Dashing[{0.01,0.01]}},
  {Thickness[0.002],Dashing[{0.002,0.01,0.01,0.01]}},
  {11,-5,0}}
```









## Ejemplo 5

In[1]:=

<<PadeSob.m

RemoteIn[2]:=

?PadeSob

PadeSob[func, {x, x0, m, k, r, lambda}] gives the Pade-Sobolev approximation to func (a function of the variable x) with the constant x0 is the center of expansion, m and k are the degrees of the numerator and denominator, respectively, r is the order of the derivative and lambda is the constant that defines the Sobolev inner product

RemoteIn[3]:=

f=(1+x^2) Exp[x]

RemoteOut[3]=

$$\frac{x^2}{E(1+x)}$$

RemoteIn[4]:=

f1=Simplify[Pade[f, {x, 0, 2, 3}]]

RemoteOut[4]=

$$\frac{3(2780 - 88x + 2865x^2)}{8340 - 8604x + 4689x^2 - 1513x^3}$$

RemoteIn[5]:=

f2=Simplify[Pade[f, {x, 0, 1, 4}]]

RemoteOut[5]=

$$\frac{24(65 + 101x)}{1560 + 864x - 3204x^2 + 88x^3 + 2865x^4}$$

RemoteIn[6]:=

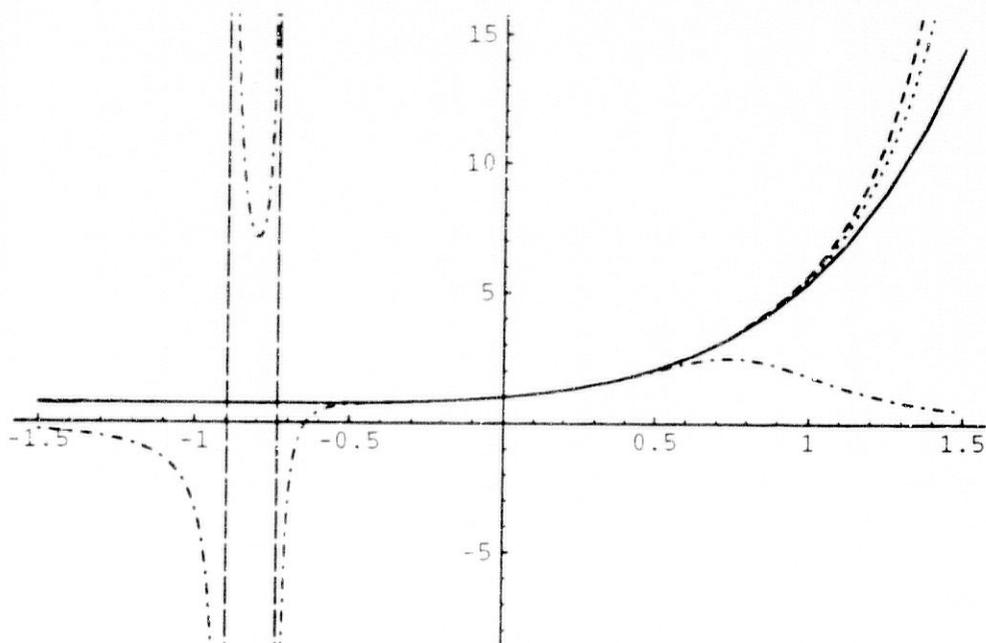
f3=PadeSob[f, {x, 0, 1, 4, 2, 0.25}]]

RemoteOut[6]=

$$\frac{1 + 26.2 x + 26.7 x^3}{1 + 25.2 x^2 - 26.7 x^3 + 14.4333 x^4 - 4.325 x^4}$$

RemoteIn[7]:=

```
Plot[Release[{f, f1, f2, f3}], {x, -1.5, 1.5},
  PlotStyle->{{Thickness[0.002]},
    {Thickness[0.002],
      Dashing[{0.01, 0.01]}},
    {Thickness[0.002],
      Dashing[{0.002, 0.01, 0.01, 0.01]}},
    {Thickness[0.002],
      Dashing[{0.002, 0.01, 0.002, 0.01]}}}
```



RemoteOut[7]=

-Graphics-

RemoteIn[8]:=

```
TableForm[Table[N[{x, f, f1, f2, f3} /. x -> -1 + 0.2*i],
  {i, 0, 10}]]
```

*RemoteOut[8]//TableForm=*

-1.	0.735759	0.743066	-3.2119	0.745065
-0.8	0.7369	0.739625	7.11285	0.740605
-0.6	0.746384	0.747078	0.439166	0.747432
-0.4	0.777571	0.777659	0.767279	0.777732
-0.2	0.85148	0.851482	0.85136	0.851486
0.	1.	1.	1.	1.
0.2	1.27026	1.27026	1.27012	1.27026
0.4	1.73052	1.7309	1.71855	1.73058
0.6	2.47808	2.4843	2.29185	2.48064
0.8	3.64989	3.70057	2.46561	3.6769
1.	5.43656	5.72493	1.83341	5.60971

BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A.  
"Handbook of Mathematical Functions", Dover Publ. New York, 1972.
- [2] ALFARO, M., MARCELLÁN, F., MEIJER, H.G., REZOLA, M.L.  
*Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products.*  
Preprint, 1992.
- [3] ALFARO, M., MARCELLÁN, F., REZOLA, M.L., RONVEAUX, A.  
*On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992). (por aparecer).
- [4] ALTHAMMER, P.  
*Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation.* Doctoral Dissertation. Berlin, 1961.
- [5] ALTHAMMER, P.  
*Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math. 211 (1962), 192-204.
- [6] AL-SALAM, W.A.  
*The Bessel polynomials*, Duke Math. J. 24 (1957), 529-546.
- [7] BAVINCK, H., MEIJER, H.G.  
*Orthogonal Polynomials with Respect to a Symmetric Inner Product Involving Derivatives*, Applicable Analysis 33 (1989), 103-117.
- [8] BAVINCK, H., MEIJER, H.G.  
*On Orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: Zeros and recurrence relations*, Indag. Math. N.S. 1 (1990), 7-14.

- [9] BAVINCK, H., MEIJER, H.G.  
*On the zeros of orthogonal polynomials in a discrete Sobolev space with a symmetric inner product.* Preprint. 1991.
- [10] BLANKENAGEL, J.  
*Anwendungenadjungierter Polynomoperatoren.* Doctoral Dissertation. Köln. 1971.
- [11] BRENNER, J.  
*Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen in einer und zwei Variablen.* Doctoral Dissertation. Stuttgart. 1969.
- [12] BRENNER, J.  
*Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen,* en Proc. Conference on the Constructive Theory of Functions, Budapest 1969 (G. Alexits and S. B. Stechkin Eds.) Akadémiai Kiadó, Budapest (1972), 77-83.
- [13] BREZINSKI, C.  
"Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials", ISNM 50, Birkhäuser, Basel, 1980.
- [14] BREZINSKI, C.  
*Partial Padé Approximation,* J. Approx. Theory 54 (1988) 210-233.
- [15] BROMWICH, T.J.  
"Introduction to the theory of infinite series", MacMillan, London, 1965.
- [16] CACHAFEIRO, A., MARCELLAN, F.  
*The Characterization of the Quasi-Typical Extension of an inner product,* Journal of App. Theory 62(2) (1990), 235-242.

- [17] CANUTO, C., QUARTERONI, A.  
*Propriétés d'approximation dans les espaces de Sobolev de systèmes de polynômes orthogonaux*, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser A-B 290 (1980), A925-A928.
- [18] CANUTO, C., QUARTERONI, A.  
*Approximation Results for Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces*, Math. Comp. 38 (1982), 67-86.
- [19] COHEN, E.A.  
*Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev space  $W^{1,2}[-1,1]$* , SIAM J. Math. Anal. 6 (1975), 105-116.
- [20] CHIHARA, T.S.  
"An Introduction to Orthogonal Polynomials", Gordon and Breach, New York, 1978.
- [21] CHIHARA, L.M., CHIHARA, T.S.  
*A Class of Nonsymmetric Orthogonal Polynomials*, Journal of Math. Anal. and Appl. 126 (1987), 275-291.
- [22] DANESE, A.E.  
*Present status and current trends in the theory of orthogonal polynomials and special functions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino 35 (1976-77), 5-20.
- [23] DINI, J.  
"Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn" Thèse Doctorat. Univ Pierre et Marie Curie, Paris. 1988.
- [24] DINI, J., MARONI, P.  
*The product of a linear form by a rational function: Application to Laguerre-Hahn forms*, en Orthogonal Polynomials and their Applications,

- Laredo 1987, J. Vinuesa Ed., Lecture Notes in Pure and Applied Math., 117. Marcel Dekker. New York (1989), 131-138.
- [25] DURAN, A.J.  
*A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation.* J. Approx. Theory (por aparecer).
- [26] EVANS, D., LITTLEJOHN, L.L., MARCELLAN, F., MARKETT, C., RONVEAUX, A.  
*On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials,* preprint 1991.
- [27] EVERITT, W.N., LITTLEJOHN, L.L.  
*The density of polynomials in a weighted Sobolev spaces,* Rend. Math. Appl. (Ser.7) 10 (1990), 835-852.
- [28] EVERITT, W.N., LITTLEJOHN, L.L., WELLMAN, R.  
*On the completeness of orthogonal polynomials in left-definite Sobolev spaces,* Preprint. 1990.
- [29] EVERITT, W.N., LITTLEJOHN, L.L., WILLIAMS, S.C.  
*Orthogonal Polynomials in weighted Sobolev spaces,* en *Orthogonal Polynomials and their Applications,* Laredo 1987, J. Vinuesa Ed., Lecture Notes in Pure and Applied Math., 117. Marcel Dekker. New York (1989), 53-72.
- [30] FREUD, G.  
*Orthogonal Polynomials,* Pergamon Press, New York, 1971.
- [31] GRÖBNER, W.  
*Orthogonale Polynomsysteme, die gleichzeitig mit  $f(x)$  auch deren Ableitung  $f'(x)$  approximieren,* en *Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik,* ISNM 7, Birkhäuser, Basel 1967, 24-32.

- [32] GROSSWALD, E.  
"Bessel Polynomials". Lecture Notes in Math. 698. Springer-Verlag, 1978.
- [33] HENDRIKSEN, E., VAN ROSSUM, H.  
*Semiclassical Orthogonal Polynomials*, en *Polynômes Orthogonaux et Applications*, Bar-le-Duc 1984, C. Brezinski et al. Eds. Lecture Notes in Math. n. 1171, Springer-Verlag, (1985), 354-361.
- [34] ISERLES, A., KOCH, P. E., NØRSETT, S. P., SANZ-SERNA, J.M.  
*Orthogonality and Approximation in a Sobolev Space*, en *Algorithms for Approximations*. J.C. Mason and M.G. Cox Eds. Chapman and Hall. London. 1990.
- [35] ISERLES, A., KOCH, P. E., NØRSETT, S. P., SANZ-SERNA, J.M.  
*On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev Inner Products*, Journal of App. Theory 65 (1991). 151-175.
- [36] KOEKOEK, R.  
*Generalizations of Laguerre polynomials*, Journal of Math. Anal. and Appl. Vol. 153 (1990), 576-590.
- [37] KOEKOEK, R.  
*Generalizations of the classical Laguerre polynomials and some  $q$ -analogues*. Doctoral Dissertation. Delft. 1990.
- [38] KOEKOEK, R.  
*On  $q$ -analogues of generalizations of the Laguerre polynomials*, en *Orthogonal Polynomials and their applications*. C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux Eds. IMACS Annals on Comp. and Appl. Math. Vol. 9. J. C. Baltzer AG Publ. Basel. (1991). 315-320.
- [39] KOEKOEK, R.  
*A generalization of Meixner's  $q$ -Laguerre Polynomials*, Canad. J. Math. Vol. XLII, n. 2 (1990), 280-303.

- [40] KOEKOEK, R., MEIJER, H.G.  
*A generalization of Laguerre polynomials*, SIAM J. Math. Anal., (por aparecer).
- [41] KOORNWINDER, T.H.  
*Orthogonal Polynomials with weight function  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$* , Canad. Math. Bull. Vol. 27 (2) (1984), 205-214.
- [42] KRALL, H.L., FRINK, O.  
*A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 100-115.
- [43] KRALL, A.M.  
*Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations*, Proc. of Roy. Soc. of Edinburgh, 87 A (1981), 271-288.
- [44] LESKY, P.  
*Zur Konstruktion von Orthogonalpolynomen*, en Proc. Conference on the Constructive Theory of Functions, Budapest 1969 (G. Alexits and S. B. Stechkin Eds.) Akadémiai Kiadó, Budapest 1972, 289-298.
- [45] LEWIS, D.C.  
*Polynomial least square approximations*, Amer. J. Math. 69 (1947), 273-278.
- [46] LOPEZ, G.  
*On the convergence of the Padé Approximants for meromorphic functions of Sieltjes type*, Math. USSR Sbornik 39, n°2 (1981), 281-288.
- [47] MARCELLAN, F., ALFARO, M., REZOLA, M.L.  
*Orthogonal Polynomials on Sobolev Spaces: Old and New Directions*, J. of Comp. and Appl. Math., 1992 (por aparecer).

- [48] MARCELLAN, F., S. DEHESA, J., RONVEAUX, A.  
*On orthogonal polynomials with perturbed recurrence relations*, Journal of Comp. and Appl. Math. 30 (1990), 203-212.
- [49] MARCELLAN, F., PEREZ, T.E., PIÑAR, M.A.  
*On zeros of Sobolev-Type orthogonal polynomials*, Rend. di Mat. Roma (serie 7) 12 (1992) (por aparecer).
- [50] MARCELLAN, F., RONVEAUX, A.  
*On a class of polynomials orthogonal with respect to a Sobolev inner product*, Indag. Math. N. S. 1 (1990), 451-464.
- [51] MARCELLAN, F., VAN ASSCHE, W.  
*Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, J. Approx. Theory (por aparecer).
- [52] MARONI, P.  
*Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, 301, I, n°6 (1985), 209-272.
- [53] MARONI, P.  
*Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, en Orthogonal Polynomials and Applications, Segovia 1986, M. Alfaro et al. Eds., Lecture Notes in Math. 1329, Springer-Verlag, (1988), 179-290.
- [54] MARONI, P.  
*Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques*, Ann. Mat. Pur. Appl. 149 (4) (1987), 165-184.
- [55] MEIJER, H.G.  
*Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, J. of Math. Analysis and Appl. (por aparecer).

- [56] MEIJER, H.G.  
*Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space.* J. of Approx. Theory (por aparecer).
- [57] MEIJER, H.G.  
*On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a discrete Sobolev space.* J. Comp. and Appl. Math. (por aparecer).
- [58] NEVAI, P.G.  
"Orthogonal Polynomials". Memoirs Amer. Math. Soc. 213, Providence, RI, 1979.
- [59] NIKIFOROV, A.F., UVAROV, V.B.  
"Special Functions of Mathematical Physics". Birkhäuser, Basel. 1988.
- [60] PASZKOWSKI, S.  
*Sur des transformations d'une fonction de poids, en Polynômes Orthogonaux et Applications,* Bar-le-Duc 1984, C. Brezinski et al. Eds. Lecture Notes in Math. n. 1171, Springer-Verlag, (1985), 239-246.
- [61] PEREZ, T.E., PIÑAR, M.A.  
*Global Properties of zeros for Sobolev-Type Orthogonal Polynomials,* J. Comp. and Appl. Math. (por aparecer).
- [62] PIÑAR, M.A., PEREZ, T.E.  
*On higher order Padé-type approximants with some prescribed coefficients in the numerator,* Numerical Algorithms, (por aparecer).
- [63] POLYA, G., SZEGÖ, G.  
"Problems and Theorems in Analysis II", Springer, Berlin, 1954.
- [64] SCHÄFKE, F.W.  
*Zu den Orthogonalpolynomen von Althammer,* J. Reine Angew. Math. 252 (1972). 195-199.

- [65] SCHÄFKE, F.W., WOLF, G.  
*Einfache verallgemeinerte klassische Orthogonalpolynomen*, J. Reine  
Angew. Math. 262/263 (1973), 339-355.
- [66] SZEGÖ, G.  
"Orthogonal Polynomials", Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, Amer. Math  
Soc., Providence, RI, 1975 (4th edition).
- [67] WOLFRAM, S.  
"MATHEMATICA: A System for doing Mathematics by Computer" (2nd edition)  
Addison Wesley Pub., New York, (1991).