DISCURSO

LEÍDO EN LA SOLEMNE APERTURA

DEL

CURSO ACADÉMICO

DE 1913 A 1914

EN LA

UNIVERSIDAD LITERARIA DE GRANADA

POR EL

Dr. D. Francisco Arroyo Rojas,

Catedrático de la Facultad de Ciencias.

Tip. Guevara. San Jerónimo, 29.

DISCURSO

LEIDO EN LA SOLEMNE APERTURA

DEL

CURSO ACADÉMICO

DE 1913 A 1914

EN LA

UNIVERSIDAD LITERARIA DE GRANADA

POR EL

Dr. D. Francisco Arroyo Rojas,

Catedrático de la Facultad de Ciencias.

Tip. Guevara. San Jerónimo, 29.

GRANADA
N.º Documento 244622
N.º Copia 244643
R. 22902

CONSIDERACIONES sobre la génesis del número abstracto en la Aritmética pura

Discurso leido en la solemne apertura
del curso académico de 1913 a 1914 en la

Universidad Literaria de Granada

POR EL

DR. D. FRANCISCO ARROYO ROJAS,

Catedrático de la Facultad de Ciencias.

GRANADA
TIP. DE LÓPEZ GUEVARA
1913

Excmo. Sr.:

Por primera vez en mi vida profesional, y tal vez por última, me presento ante tan culto como respetable auditorio, para dar lectura a este modesto y sencillo trabajo.

No creais que vengo a ocupar esta Tribuna, honrada tantas veces con la presencia de sabios e ilustres varones en las Ciencias y en las Letras, por espontánea y libre determinación de mi voluntad.

Vengo, por el contrario, a cumplir un ineludible deber reglamentario, que me impone la obligación de leeros en este día un discurso iniciador del comienzo de nuestras tareas escolares.

Desde este mismo sitio, y en ocasiones solemnes como la presente, habéis tenido la satisfacción de oir la voz elocuente de Doctores de este Claustro, que han sabido armonizar, en admirable consorcio, los atavíos y galanuras de la forma con la severidad y rigidez del fondo.

Casi todas las ramas del saber humano han sido tratadas magistralmente en los discursos inaugurales que mis predecesores han leido desde este mismo lugar: la Filosofía, la Historia, los Idiomas, la Medicina y el Derecho en sus múltiples manifestaciones, la Física, la Química, la Historia Natural, la Astronomía, las Matemáticas y aún la Pedagogía, han sido expuestas en este recinto con tan singular maestría, que por ello recibieron merecidos plácemes sus cultísimos autores.

Pero si estos antecedentes son vanagloria y orgullo de este Claustro Universitario, producen, en cambio, en el Catedrático que hoy ocupa este puesto, un desaliento y un temor, originados sin duda por no tener seguridad en cumplir bien el encargo que se le ha conferido, desaliento y temor que sólo se reducen y atenúan, confiando en vuestra nunca desmentida benevolencia.

Aquellos ilustres varones tenían a su favor, para cumplir bien con su cometido, una vasta ilustración y un precioso don, natural o adquirido, del bien decir, cualidades que les servían para hacer con facilidad y brillantez esta índole de trabajos.

Careciendo el que os dirige la palabra de tan preciosas cualidades y obligado a elegir un asunto o tema que sirva de base a este trabajo y a la vez sea de alguna utilidad a los alumnos de Análisis matemático, ha creido conveniente elegir el tema siguiente:

Consideraciones sobre la génesis del número abstracto en la Aritmética pura.

Lo sencillo, humilde y concreto de este tema, harán resaltar menos las deficiencias que en el fondo han de producir mi corto saber y escasa erudición, y el desaliño en la forma, hijo de malos hábitos contraídos en la enseñanza del Análisis matemático, donde la necesidad de ser claro en la exposición, obliga a veces a descuidar, ya que no a sacrificar, la forma al fondo.

A pesar de la sencillez aparente del tema, no dejan por eso de relacionarse con él cuestiones de la Matemática, algunas espinosas de tratar, por lo cual confío en que os inclinaréis a ser benévolos con las apreciaciones que me permita aventurar y a no escasearme la indulgencia tan propia de vuestro saber y elevación de ideas, como necesaria para mí en este momento.

Permitidme también que os manifieste que me he visto obligado a elegir este tema por no entrar en teorías superiores del Análisis, difíciles de exponer sin el empleo de cálculos y figuras, tan impropios de un discurso de esta naturaleza.

Temas de índole general no quedaban en el dominio de la Matemática más que los relativos a su Historia y a su Metodología; pero ambos han sido ya tratados, en actos como el presente, por un compañero de esta Universidad y por Catedráticos de Matemáticas de otras Universidades del reino.

La idea de número la adquiere nuestra inteligencia por la idea de multitud o pluralidad o por la de comparación o mensuración.

Contemplando los distintos seres que nos rodean, adquirimos inmediatamente dos ideas muy diferentes: la de pluralidad y la de orden. La primera es producida por la presencia simultánea o sucesiva de más de un ser y la segunda porque esta presencia nos acusa diversa colocación y sucesión en los seres sometidos a nuestra consideración o contemplación.

Cuando todos o algunos de los seres u objetos observados presentan, bajo cualquier aspecto, caracteres comunes, esos objetos toman la denominación de homogéneos, cualidad que una vez admitida permite considerar a una serie o conjunto de objetos homogéneos como resultado de la repetición de uno cualquiera de ellos, y aun uno de estos objetos se puede mirar, por extensión, como resultado de la aglomeración sucesiva de otros de su misma especie, cuya repetición llegase a formar la totalidad de la primera.

Considerada de este modo la multitud o pluralidad, constituye una cantidad discreta y el objeto por cuya repetición o aglomeración se forma la cantidad, toma el nombre de unidad, y los signos representativos de los resultados de esta determinación se llaman números.

De esta manera la idea de número es la representación en nuestra inteligencia de cuantas veces es preciso repetir la unidad para que la cantidad quede determinada, siendo, por tanto, el número así definido, un número esencialmente abstracto y entero; y la unidad aquí considerada abstracta también e indivisible, es decir, una entidad simple.

Aunque la mensuración nos conduce a la idea de número más fácilmente que la de pluralidad, sin embargo, prescindimos de ella porque su estudio no pertenece a la Aritmética pura.

La simple repetición de la unidad abstracta, absoluta y fundamental, da el concepto más sencillo y natural del número entero y positivo.

Añadiendo la unidad abstracta a sí misma y a los números que por reiteración de este procedimiento vayan resultando, se tiene un conjunto de números que se llama serie natural de números enteros.

Colocando a la izquierda de esta serie el cero, como símbolo que denota la carencia o no existencia de unidades, se obtiene otra serie que se llama serie fundamental o campo de los números enteros absolutos.

Esta serie fundamental es limitada en un sentido e ilimitada en el otro y sus términos tienen la propiedad de tener cada uno de ellos una unidad más que el que le antecede y una menos que el que le sigue.

Veamos cómo con esta serie se resuelven las operaciones calculatorias comprendidas en cada uno de los algoritmos fundamentales, o cómo se amplía dicho campo con otros nuevos símbolos para hacer factibles estas operaciones en todos los casos y dentro de la Aritmética pura.

La operación directa del primer algoritmo fundamental, llamada adición, se efectúa tomando el primer sumando en la serie fundamental y recorriendo hacia la derecha tantos lugares como unidades tiene el segundo sumando; el número así hallado en la serie es la suma de los dos números dados. Reiterando este procedimiento, se encuentra en la mencionada serie la suma de varios sumandos, deduciéndose de aquí que si los elementos activos de una suma son números de la serie fundamental, el elemento pasivo es también un número de la misma serie.

Como la adición es una operación conmutativa, sus dos operaciones inversas se reducen a una sola que se llama sustracción, y que se define diciendo que es una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos, y uno de éstos, hallar el otro sumando.

De esta definición y de las propiedades de la serie fundamental, se deduce el procedimiento elemental para obtener el resto o diferencia de una sustracción cuando el minuendo sea mayor o a lo más igual al sustraendo. Basta para ello tomar en la serie referida el minuendo y retroceder tantos lugares a la izquierda como unidades tiene el sustraendo. El número de la serie fundamental encontrado en este retroceso es la diferencia buscada, que será en el primer caso un número entero con tantas unidades como lugares está a la derecha del cero el número hallado y en el segundo será el mismo cero. ¿Pero sucede lo mismo cuando el sustraendo es mayor que el minuendo? No, porque no hay ningún número entero o nulo que sumado con el sustraendo, de un número igual al minuendo, es decir, que no hay en la serie fundamental ningún término que

represente el elemento pasivo de la operación de restar, aunque los elementos activos se hayan tomado en esta serie. Queda, pues, incompleto el estudio de la sustracción por falta de números o símbolos adecuados en el campo de los números enteros para hallar el resto de una sustracción en todos los casos, dificultad que proviene de ser la mencionada serie limitada en un sentido.

Los antiguos analistas y aún los escritores modernos de la Aritmética vulgar, daban por terminado con esto el estudio del algoritmo de la sumación, aplazando para los comienzos del Álgebra el análisis del caso de imposibilidad de la sustracción que la Aritmérica les había mostrado.

Siguiendo este método en la exposición de la Aritmética se conseguia no sólo romper la unidad de la Ciencia del número, restándole un elemento analítico que a ella solamente le correspondía, sino que también se quitaba generalidad a la mayor parte de las teorías posteriores de aquella Ciencia.

Perfeccionamientos posteriores han permitido ampliar la serie fundamental con nuevos símbolos que hacen posible la operación de la sustracción en todos los casos.

Esto se ha conseguido observando que no había inconveniente alguno en prolongar la mencionada serie a la izquierda del cero, siguiendo la misma ley que se siguió para formar los números colocados a la derecha de dicho símbolo. Estos nuevos números se distinguen colocándoles encima el signo de la sustracción u otro cualquiera y se leen uno negativo, dos negativo...... y a negativo. Al conjunto de todos ellos se les llama números negativos, en contraposición a los colocados a la derecha del cero que reciben el nombre de positivos.

Tienen estos números negativos de la serie fundamental así ampliada, la misma propiedad esencial que los números positivos, esto es, que cada número tiene una unidad positiva más que el situado a la izquierda y una unidad positiva menos que el número colocado a su derecha.

Completada de este modo la serie fundamental, se hace ya posible la operación de la sustracción en todos los casos.

Los casos en que el sustraendo sea menor o a lo más igual al minuendo, no ofrecen dificultad de ningún género y ya se indicó el procedimiento antes de ampliar con los números negativos la serie fundamental.

En el tercer caso, es decir, cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, puede descomponerse aquél en dos partes: una igual al minuendo y la otra la parte restante. Restando del minuendo la primera parte, con auxilio de la serie fundamental ampliada, empleando para ello el método elemental indicado, se llega al símbolo cero. Retrocediendo ahora en la serie ampliada tantos lugares a la izquierda del cero como unidades positivas tenía la segunda parte de la descomposición del sustraendo, se llega forzosamente a un número negativo de la serie fundamental ampliada; y como este número es igual al cero menos la segunda parte del sustraendo, se deduce que un número negativo no es otra cosa que un sustraendo que carece actualmente de minuendo o que tiene por minuendo cero, y que está dispuesto a restarse de cualquier minuendo que puedan proporcionarle operaciones ulteriores del cálculo.

Véase, pues, cómo por un procedimiento tan sencillo y natural aparecen los números negativos, nacidos algorítmicamente de la segunda operación calculatoria.

La serie fundamental ampliada con los números negativos lleva el nombre de serie natural completa de números enteros positivos o negativos o también campo completo de números enteros.

En el terreno de lo concreto tienen aplicación estos dos aspectos del número en todas aquellas magnitudes que por su misma naturaleza presentan dos maneras opuestas de ser.

No es mi ánimo molestar vuestra respetable atención, enumerando todas las aplicaciones que en las Ciencias tiene el empleo de los números positivos y negativos; pero permitidme, sin embargo, que ocupe algunas líneas, señalando la capital importancia que estos números, y por tanto, los signos positivo y negativo, tienen en la Geometría.

El convenio establecido en la Geometría analítica de incluir en la designación de las coordenadas de los elementos geométricos, el doble concepto de magnitud y signo, sirve, no sólo para determinar sin ambigüedad alguna el elemento correspondiente mediante sus coordenadas, sino que hace también que los resultados obtenidos sean independientes de la posición de los elementos constitutivos de la figura.

Parecía natural que se siguiese este ejemplo en la Geometría pura, procurando que las diferentes magnitudes que intervienen en el enunciado de un teorema, indicasen también, mediante su signo, la designación de la posición relativa que ocupan; sin embargo, no sucedió así, y lo único que se hizo en un principio, fué estudiar cada cuestión sobre una figura determinada y comparándola luego con otra cualquiera referente al mismo asunto, ver los cambios de posición que habían experimentado los diversos elementos para deducir los del signo que correspondía introducir en las magnitudes relacionadas por el enunciado del teorema. Así procedió Carnot en su obra titulada *Géometrie de Position,* destinada casi a este objeto, y así lo adoptaron todos los geómetras, en cuyas fórmulas era necesario efectuar los cambios de signo correspondientes a los cambios de la figura.

Así continuaron los geómetras hasta que Möbius en su notable obra *Der barycentrische Calcul,* publicada en 1827, introdujo sistemáticamente los signos en la Geometría pura, mediante el sencillo convenio de expresar la dirección de un segmento por el orden de colocación de las letras que designan sus extremos. También adoptó en la misma obra otros convenios semejantes para distinguir los signos de los ángulos, de las áreas de los triángulos y de los volúmenes de los tetraedros.

Un ángulo es positivo o negativo, según que el lado generador del mismo recorra el sentido positivo o negativo para superponerse sobre el otro lado.

Las áreas de dos triángulos situados en un mismo plano o en planos paralelos, son del mismo signo o de signos contrarios, según el sentido en que se imaginan recorridos sus contornos; y los volúmenes de dos tetraedros son del mismo signo o de signo contrario, según que desde sus vértices se vean recorridos los contornos de las caras opuestas en el mismo o en opuesto sentido.

Son dignas de especial mención la notable simetría de las fórmulas relativas a tres puntos de una recta, cuatro de un plano y cinco puntos cualesquiera, deducidas por Möbius y fundadas en estos ingeniosos convenios.

Dichos convenios, tan fecundos y sencillos después de conocidos, no debían serlo tanto, cuando no los descubrió ni la perspicacia de Poncelet ni el ingenio de Chasles, que fué quien más contribuyó después a generalizar su empleo; con la circunstancia casi inexplicable de que los teoremas de la teoría de las transversales, demostrados por la Geometría analítica y que llevaban, por consiguiente, implícita la generalidad propia de esta Ciencia, perdían esta generalidad al traducirlos al lenguaje geométrico, exigiendo tantos enunciados cuantas eran las diversas posiciones relativas que podían considerarse.

Enunciados y demostrados los teoremas fundamentales con entera independencia de la posición relativa de los elementos que en ellos intervienen, esta misma generalidad subsistirá para todos los que de ellos se deduzcan, a menos que las consideraciones que sirven para esta deducción se refieran a alguna disposición especial de la figura, sin ser aplicable a todas. Para evitar este peligro, podrían repetirse dichas consideraciones sobre cada una de las disposiciones posibles de la figura; pero esto, que es fácil en las cuestiones sencillas y elementales, se hace casi imposible en las más complejas, por lo cual es preferible, como dice Poncelet en su *Traité des propietés projectives des figures,* hacer la demostración sobre una disposición general de la figura, prescindiendo de dibujarla y razonando sin ella. Esto es lo que han procurado hacer todos los geómetras modernos, sin perjuicio de emplear figuras en los principios de la enseñanza hasta desarrollar en los alumnos la intuición geométrica y prescindir después en la enseñanza del empleo de figuras. Monge, procedía de esta manera, y en su curso de Geometría descriptiva usaba de las figuras sólo en las aplicaciones efectivas y mecánicas, donde desempeñaba el papel como instrumento, mientras que en las explicaciones teóricas sabía hacer concebir en el espacio las formas más complicadas de la extensión y penetrar en sus relaciones más generales y en sus propiedades más ocultas sin valerse de figura alguna.

Así lo afirma Chasles en su importante obra titulada *Apperçu historique sur l'origine et le dèveloppement des méthodes en Geometrie,* página 209 de la tercera edición.

El geómetra alemán Cristian von Standt, Profesor numerario de la Universidad de Erlangen, llevó esta idea a tal extremo, que nunca consintió poner figuras en sus obras de Geometría; y aún en la Cátedra las empleaba lo menos posible a fin de acostumbrar a los alumnos a ver las relaciones puramente racionales que deben existir entre los elementos geométricos, de conformidad con la hipótesis del enunciado del teorema y a razonar, no sobre la figura que allá en nuestra imaginación formemos, sino sobre los elementos que en ella considera puestos nuestra razón.

Y es tal la importancia que a esto dan los matemáticos, que en nuestros días se esfuerzan en depurar los principios fundamentales de la Ciencia,

asentándolos sobre base sólida que resista al examen de la más severa crítica, de tal modo que algunos no vacilan en asegurar que la piedra de toque para reconocer si una demostración es o no rigurosa, consiste en ver si subsiste, sin necesidad de atender a la figura correspondiente.

Porque ocurre a veces que al dibujar la figura incluímos en ella y sin darnos cuenta más condiciones que las contenidas en la hipótesis del teorema, en cuyo caso deducimos falsamente que la conclusión está contenida en la hipótesis, sin estarlo; y aun sin llegar a este caso extremo, puede ocurrir que el simple trazado de la figura exija la verdad de ciertos axiomas o postulados que debieran haberse establecido con anterioridad para que la exposición tuviese todo el rigor lógico que la ciencia demanda.

Terminada esta digresión hecha en el campo de la Geometría, prosigamos nuestro estudio de las operaciones calculatorias con el auxilio del campo completo de números, positivos y negativos, que acabamos de establecer.

La operación directa del segundo algoritmo fundamental, llamada multiplicación, se efectúa sin dificultad con la serie de números enteros positivos y negativos, de tal modo que tomando en ella los elementos activos de la operación, el elemento pasivo o producto es también, y sin excepción, un número de esta serie; pero no puede, en general, decirse lo mismo, con la única operación inversa a que se reducen las dos de la multiplicación, por el carácter conmutativo de esta operación.

Solamente en el caso de que el dividendo sea un múltiplo del divisor, se puede encontrar en dicha serie el cociente, bastando para ello formar la serie de múltiplos de dicho divisor y buscar en estos el que sea igual al dividendo. El factor de este múltiplo, que sea diferente del divisor, es el cociente buscado.

Cuando el dividendo no cumple la condición anterior, es imposible encontrar el cociente en el campo completo de números enteros.

Precisa, pues, ampliar este campo con nuevos símbolos para que con él pueda efectuarse la división de dos números enteros en todos los casos.

Prescindiendo del signo del cociente y ateniéndonos sólo al valor absoluto de éste, recordemos que la serie fundamental tiene sus términos formados con la unidad absoluta, y que a sus infinitos términos podemos hacer corresponder unívocamente los de otra serie constituída por la agrupación de todas las pluralidades formadas con un objeto o ente arbitrario e indeterminado.

Los términos de esta nueva serie conservan las propiedades fundamentales de sus correspondientes en la serie fundamental.

Utilizando la indeterminación del ente elegido, podemos establecer la condición de que la pluralidad que ocupa el lugar n a la derecha del cero en la serie de pluralidades mencionada, sea igual a la unidad absoluta, con lo cual resulta que dicho objeto o ente es igual a esta unidad dividida en n partes o fragmentos iguales entre sí.

La sustitución de este valor del ente elegido en la serie de pluralidades del mismo, da una nueva serie que goza de propiedades análogas a las de la serie fundamental, y que está constituída por el valor del objeto encontrado, y denominado unidad fraccionaria, como la fundamental lo está con la unidad absoluta. Los números de esta nueva serie se llaman números fraccionarios y comprenden como caso particular a los números enteros.

Si en vez de igualar a la unidad positiva n veces el objeto o ente considerado, la igualásemos a una, dos, tres... veces dicho objeto, obtendríamos infinitas series de números fraccionarios, ilimitadas todas hacia la derecha.

Cada una de estas series recibe el nombre de serie de números fraccionarios de denominador, uno, dos, tres, etc., y su conjunto toma la denominación de campo de números fraccionarios, campo que puede fácilmente ampliarse con números fraccionarios negativos, tomando entonces la calificación de campo de números racionales. Con auxilio de este campo puede ya efectuarse la división de dos números enteros aun en el caso de excepción que hemos señalado antes.

Para ello basta formar la serie de números fraccionarios cuyo denominador sea igual al divisor de la división por efectuar; buscar en ella el término que tenga tantas unidades fraccionarias como unidades absolutas tiene el dividendo, y este término es el cociente, puesto que multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

Esta equivalencia entre el cociente y el múltiplo de la unidad fraccionaria de denominador igual al divisor, contenido en la serie correspon-

diente de números fraccionarios, nos permite decir, que un número fraccionario no es otra cosa más que el cociente indicado de la división de su numerador por su denominador, pueda o no pueda esta operación efectuarse, poniéndonos esto de manifiesto el origen algorítmico y la interpretación del número fraccionario.

La posibilidad de poder comparar dos fracciones numéricas por reducción a un común denominador o numerador, permite agrupar y fundir entre sí las diversas series de números fraccionarios, formando una sola serie que las comprenda a todas.

Para esto es suficiente, una vez escrita la serie de números enteros, intercalar entre sus términos y en los lugares correspondientes a sus respectivas magnitudes, los números de todas las demás series previamente prolongadas ilimitadamente a la derecha y a la izquierda del cero. La serie constituída de este modo forma lo que se llama el conjunto de todos los números racionales y se le designa con el nombre de *campo de los números racionales;* comprende todos los números racionales positivos y negativos y el cero, teniendo los negativos a la izquierda de este símbolo y los positivos a la derecha; es creciente hacia la derecha y decreciente hacia la izquierda e ilimitada en ambos sentidos, por cuya razón se llama *serie abierta.*

La equivalencia entre el número fraccionario y el cociente indicado del numerador por su denominador, permite hacer extensiva esta definición de fracción al caso en que sus términos sean expresiones algorítmicas cualesquiera.

Considerando, pues, una fracción algébrica como el cociente indicado de dos expresiones literales, o de un número por una expresión literal, puede suceder que haya necesidad de hallar su valor numérico, cuando a la letra o letras que en ella entran se les asignen valores particulares. Los valores numéricos que así resulten suelen afectar formas especiales que generalmente no encajen ni en la definición de fracción numérica ni aun en la de cociente de dos números.

No es nuestro propósito hacer un estudio detenido y completo del significado e interpretación de todas esas formas especiales: sólo nos ocuparemos, por la importancia que tiene en el Análisis y en la Geometría, del caso en que el valor numérico del numerador de la fracción sea un número finito y efectivo y el valor análogo del denominador sea cero.

En este caso, el símbolo o fracción aparente que resulta, no tiene significado claro y preciso, ni como fracción, ni como cociente.

Precisa, pues, interpretar este símbolo procedente de la fracción, lo que se consigue recordando que una fracción de denominador nulo y de numerador que no lo sea, puede siempre considerarse como procedente de otra de numerador constante, finito y efectivo y cuyo denominador decrezca según una ley determinada, aproximándose a cero.

Se demuestra fácilmente que, dando al denominador de una fracción una serie de valores que sean los recíprocos de los múltiplos de un número entero por potencias sucesivas de la base del sistema de numeración en que están escritos sus términos, se puede hallar un valor conveniente de dicho entero para el cual la fracción sea mayor que cualquier número imaginable, por grande que éste sea.

El símbolo procedente de dar valores particulares a las letras que entran en los términos de una fracción literal y que reducen a estos términos el uno a un número efectivo y finito y al otro a cero, y que además puede ser mayor que todo número imaginable por grande que éste se suponga, es lo que se llama en la Algoritmia *infinito* y se representa ordinariamente por un ocho tendido.

A este signo algorítmico del infinito no se le debe atribuir el concepto de cantidad, porque no es susceptible de aumento ni de disminución, ni es por consiguiente, comparable con ninguna cantidad.

Conviene advertir que el infinito matemático no debe confundirse con el infinito absoluto, cuyo estudio es propio de la Metafísica y no de la Matemática.

Permitidme que en consonancia con lo que hicimos con los números negativos, os indique brevemente algunas de las más importantes aplicaciones que el infinito matemático tiene en la Algoritmia, en el Análisis matemático y en la Geometría.

La idea del infinito se halla tan estrechamente relacionada con la especulación matemática, que puede muy bien decirse, sin pecar de exagerado, que casi no hay problema de esta ciencia, si tiene cierto grado de importancia y de generalidad, que más o menos no dependa de esta idea tan fundamental.

Aparece en las puertas mismas de la Aritmética al concebir la generación de la serie natural de los números; muéstrase al establecer la equivalencia entre ciertas fracciones ordinarias y sus sistemáticas correspondientes; viene después en las potencias sucesivas de los números mayores que la unidad y en el estudio de las razones trigonométricas, excepto en el seno y coseno: pero donde la noción de infinito interviene de una manera más amplia, y se muestra en toda su fecundidad, y revela toda su importancia, es en el Análisis algébrico, y especialmente en la parte de éste que se llama Cálculo infinitesimal. Aquí las primeras nociones y aun las consecuencias que de ellas se deducen, las relaciones entre los diversos elementos de una misma teoría, las afinidades y dependencia más o menos próxima o remota entre teorías en apariencia distintas, la naturaleza íntima y hasta la estructura misma de los métodos demostrativos y de investigación, todo está tan estrechamente ligado, en conxesión tan íntima, y por decirlo así, tan saturado de la idea del infinito, que ni es posible dar un paso en esta ciencia sin tropezar con él, ni aventurarse en cualquier sentido en la inmensa extensión del Análisis infinitesimal sin temor de extraviarse y caer, si no alumbra el camino la poderosa luz que brota como de inagotable fuente de esa fecundísima noción.

Así es que no puede extrañar que, intentando el inmortal Leibnit escribir un tratado, que no llegó a publicar, de la ciencia creada por él, y que otros se encargaron de exponer y desarrollar, surgiese en su mente la idea de darle el título de scientia infiniti.

¿Cuál es la causa de ese hecho y el fundamento racional de la intervención de tal idea en la expeculación analítica?

A poco que se profundice, se nota que la intervención de esa idea es de todo punto necesaria por dos razones distintas e igualmente poderosas: es la primera la amplia generalización que corresponde a las leyes de variación numérica; y la segunda la necesidad de atribuir a esa variación el carácter de continua, generalidad y continuidad que aparecen como rasgos salientes del Análisis algébrico, si sus expeculaciones han de aplicarse a todo lo que pueda ser numéricamente determinado, y especialmente a las leyes del mundo físico, que, por referirse a fenómenos que se realizan en el espacio y se suceden en el tiempo, se nos muestran de ordinario sujetos a la ley de continuidad.

Si la simple variación es un concepto que no entraña dificultades, no sucede lo mismo cuando se le añade el carácter de continuidad y por su medio pretendemos elevarnos a la concepción ideal de un número producido y determinado por una ley de generación continua.

Entonces, por la naturaleza misma de elementos tan heterogéneos como el número y la continuidad, entre los cuales no cabe relación directa e inmediata de ningún género, y por la necesidad ineludible de relacionarlos de algún modo, aunque éste sea indirecto, para que asociados puedan aparecer ante el espíritu como unidad inteligible, surge la consideración infinitesimal, ya con la forma de lo infinitamente grande o de lo infinitamente pequeño, ya encubriendo una y otra bajo las apariencias más asequibles del límite.

Y como la noción de infinitamente pequeño, puede referirse de una manera inmediata a la de infinitamente grande, por ser éste el recíproco de aquél, y la de límite está ligada, aunque de un modo indirecto, con la de la variable que lo determina y se reduce a aquéllas y de las mismas depende, por tener su origen en las relaciones existentes entre una constante y la suma de ésta con un infinitamente pequeño, dedúcese que toda consideración infinitesimal no es otra cosa que una consideración acerca del infinito.

Si fecunda es la noción del infinito en el Análisis matemático, no lo es menos en la ciencia de la extensión.

Apenas sería posible la Geometría moderna si en ella no intervinieran los elementos del infinito, cuyo origen no es analítico, sino motivado por el deseo de evitar las excepciones originadas por la correspondencia de los puntos y rectas homólogos de dos formas planas que son proyección una de otra. Este resultado se consiguió por los geómetras, admitiendo en toda recta un punto en el infinito y en todo plano una recta del infinito.

Al estudiar Poncelet las figuras homológicas en el espacio, admitió también el plano del infinito, considerándolo como el lugar geométrico de los puntos y rectas del infinito de todas las rectas y planos imaginables en el espacio, puesto que a ellos correspondían como homólogos puntos y rectas de un plano ordinario.

Admitiendo estos elementos en el infinito, se consigue generalizar muchas proposiciones geométricas; pero en cambio presenta graves inconvenientes cuando a esos elementos especiales se les atribuye realidad objetiva, pues aparte de la falta de rigor científico que origina el fundar una teoría en conceptos que distan mucho de tener la claridad necesaria que la Geometría demanda, tienen además el inconveniente de conducir a absurdos manifiestos, cuando se les aplican algunas propiedades de los puntos, rectas y planos ordinarios.

De aquí nace la necesidad de sustituir la noción oscura y falsa de esos elementos del infinito por otra más clara y definida, aunque para abreviar el lenguaje conservemos esas denominaciones convencionales, que ninguna confusión ni oscuridad pueden producir una vez entendidas en su verdadero sentido, pues éste nos enseñará a distinguir los casos en que dichos elementos desempeñen el mismo papel que los puntos, rectas y planos ordinarios, de aquellos otros en que no se verifique tal condición.

Este resultado lo consiguió el geómetra alemán Standt, considerando que en toda recta hay un elemento que llamamos su *dirección* y que es común a todas las rectas paralelas a ella, y en todo plano una *orientación* (1) que es común a todos los planos paralelos a él.

Por medio de estas denominaciones, los enunciados de los teoremas de la teoría de las paralelas toman nueva forma que los asemeja a los análogos de rectas y planos que se cortan. Así, pues, para expresar que por un punto pasa una recta paralela a otra y un plano paralelo a otro, podemos decir que un punto y una dirección determinan una recta, y un punto y una orientación determinan uu plano.

Estas formas de expresión nada prejuzgan sobre la naturaleza de los elementos que hemos llamado dirección y orientación, cuya esencia íntima corresponde más bien investigar al filósofo que al geómetra. Bástale a éste sólo saber que existen los elementos designados con este nombre y que no son puntos, ni rectas, ni planos; pero que al observar que desempeñan el mismo papel que estos elementos, no ve inconveniente en llamarlos punto, recta y plano del infinito con el fin de comprender en un solo enunciado multitud de teoremas, con la condición, sin embargo, de darles la forma ordinaria cuando algunos de los puntos o rectas sean direcciones u orientaciones.

---

(1) Standt, Geometrie der Lage, 1847.

La introducción de estos elementos del infinito da origen a una división importantísima de las propiedades de la extensión, y por tanto, de la Geometría.

Al primer grupo corresponden las propiedades descriptivas de las figuras, teniendo el carácter distintivo de poderse aplicar indistintamente a los elementos propios y a los del infinito, expresando relaciones en las que no interviene la idea de magnitud.

Las propiedades descriptivas tienen el carácter proyectivo, es decir, que subsisten para todas las formas homológicas de una misma, y al aplicarse a los elementos del infinito permiten extender, no sólo las propiedades, sino también los conceptos geométricos.

El conjunto sistematizado de las propiedades descriptivas de las figuras es el asunto propio de la Geometría de posición.

Al segundo grupo corresponden las propiedades métricas, que no son aplicables a los elementos del infinito, sin experimentar o sufrir importantes y profundas modificaciones.

Las propiedades métricas no tienen todas el carácter proyectivo, aunque muchas de ellas puedan transformarse en otras que lo tengan o aparecer como casos particulares de verdades generales que revisten ese carácter.

El conjunto sistematizado de las propiedades métricas de las figuras constituye la Geometría enclidiana o métrica.

La operación directa del algoritmo de la graduación, llamada elevación a potencias, puede efectuarse en todos los casos con los números del campo de números racionales, es decir, que si la base de la potencia es un número cualquiera de este campo y el exponente es un número entero, la potencia es también un número de dicho campo.

No sucede lo mismo con las dos operaciones inversas de la elevación a potencias, que son distintas, por no ser en general conmutativa esta operación calculatoria.

Cuando el radicando es una potencia de exponente igual al índice de la raíz o a un múltiplo de éste y además es positivo o si es negativo el índice es impar, se puede, teóricamente al menos, hallar la raíz, formando

las potencias de exponente n de los números de aquel campo y buscando aquella que sea igual al radicando: su base es la raíz pedida.

Si el radicando no es potencia perfecta del índice de la raíz, siendo positivo, o si es negativo el índice es impar, entonces se demuestra fácilmente por reducción al absurdo que la raíz no puede ser ni un número entero ni un fraccionario, y por tanto, no puede hallarse en el campo de números racionales.

Precisa, pues, ampliar este campo con nuevos números que hagan posible la extracción de raíces en el caso que estamos considerando.

Los nuevos números que vamos a investigar se llaman números irracionales o incomensurables en oposición a los enteros y fraccionarios que llevan la denominación de racionales o comensurables.

La introducción de estos números lleva consigo una dificultad algo mayor que la vencida en la investigación algorítmica de los números negativos y de los fraccionarios, pues si para definir un número racional nos bastó con dos números enteros, de los cuales uno de ellos podía ser la unidad positiva o negativa, para definir un número irracional, se necesitan, como veremos después, infinitos números racionales.

Para ello volvamos a la serie de números racionales recordando de ella las siguientes propiedades.

Con exclusión del cero, no existe en dicha serie ningún número positivo que sea menor que todos los números de esta clase en ella contenidos, pues si suponemos un número positivo que sea menor que todos los demás, podemos darle a éste la forma fraccionaria y otra fracción del mismo denominador y de numerador más pequeño será menor que la primera, y por lo tanto, el número supuesto no era el menor de los positivos de la serie.

Todo número racional puede comprenderse entre dos números de la misma naturaleza, cuya diferencia sea menor que cualquier número positivo por pequeño que éste sea.

Dados dos números del campo de números racionales, se pueden siempre encontrar, por interpolaciones sucesivas, infinitos números racionales comprendidos entre los números dados.

Y por último, entre los infinitos números comprendidos entre dos racionales dados, se pueden siempre elegir dos tales que su diferencia sea menor que cualquier número positivo.

Tomando ahora en el campo de números racionales uno cualquiera de ellos, éste divide el campo en dos partes, constituyendo la primera todos los números inferiores al elegido y la segunda todos los números mayores que éste.

La primera parte se llama primera clase o clase inferior y la segunda, segunda clase o clase superior.

De la manera como están constituídas estas clases y de las propiedades de la serie de números racionales, se deducen las siguientes conclusiones:

Todo número de la primera clase es menor que uno cualquiera de la segunda y viceversa.

En la primera clase no existe ningún número que sea mayor que los demás en ella contenidos, ni en la segunda ninguno que sea menor que los demás pertenecientes a la misma.

Y finalmente, dado un número positivo y tan pequeño como se quiera, siempre es posible elegir un número de la primera clase y otro de la sngunda, tales que su diferencia sea menor que el número positivo elegido.

Dos clases de números racionales que satisfacen a estas cuatro propiedades son abiertas y se llaman *clases contiguas*.

El número racional elegido para dividir el campo de números racionales en dos clases o conjuntos y que es mayor que cualquier número de la clase inferior y menor que todo número de la clase superior, se puede considerar como número de separación de ambas clases, y servir, por consecuencia, para definir sin ambigüedad dicho número, ya que no hay ningún número racional que goce de las propiedades de aquél. Por tanto, todo número racional puede representarse por medio de dos clases abiertas y contiguas.

Así, pues, el número cero se puede considerar como número de separación de los números racionales positivos y negativos, figurando en su primera clase todos los números negativos y en la segunda los positivos.

Este procedimiento tan sencillo y natural de definir el número comensurable mediante dos clases o conjuntos de números racionales, motivó la idea en los analistas de utilizarla para definir de una manera análoga el número irracional.

Para conseguir este fin, observaron que existen operaciones que dan la posibilidad de dividir el campo de números racionales en dos clases abiertas y contiguas, sin existir número racional alguno que sirva de separación de ambas clases, y que dichas operaciones dan números no racionales mayores que todos los de la clase inferior y menores que los de la clase superior.

Entre las indicadas operaciones, citaremos solamente la extracción de raíces, tomando al efecto la raíz cúbica de un número que no sea cubo perfecto; su raíz no puede ser ni un número entero ni uno fraccionario.

Con los números positivos del campo de números racionales, cuyos cubos sean menores que el número dado, formemos una clase, llamada inferior, y con los restantes números positivos formemos la clase superior.

Sencillamente se demuestra que las dos clases así formadas son abiertas y contiguas, no existiendo, sin embargo, número alguno racional que sea elemento de separación de ambas clases, pero siendo siempre la raíz cúbica del número considerado mayor que todos los números de la clase inferior y menor que todos los de la clase superior.

Este número que no forma parte de la clase inferior ni de la superior ni aun del campo de números racionales, pero que separa a éste en dos clases, define o determina sin ambigüedad un número llamado irracional o incomensurable.

Por lo tanto, se dirá que un número queda perfectamente determinado siempre que se encuentre un medio de dividir el campo de los números racionales en dos clases abiertas y contiguas: si existe el elemento racional de separación entre las dos clases, el número será racional o comensurable, y si falta el elemento racional de separación y sin embargo hay un número que supera a todos los de la clase inferior y es superado por los de la clase superior, este número será incomensurable.

En resumen, se puede decir que un número real no es otra cosa que la expresión del medio empleado para separar los números racionales en dos clases, abiertas y contiguas.

Véase, pues, cómo el número irracional aparece definido e interpretado dentro de la Aritmética pura sin auxiliarse de la teoría de límites, que es propia del Álgebra, ni de la medida de magnitudes que corresponde a las ciencias aplicadas.

La teoría de las clases o conjuntos y la de las sucesiones de números fueron establecidas por Heine en su memoria titulada *Die Elemente der Functionenlehre* y publicada en el «Giornale di Crelle», t. LXXV, y la teoría de los números irracionales se confunde con éstos en las obras de

G. Cantor, de Lipschitz y otros; pero treinta años antes el Profesor Catalán había ya expuesto en la enseñanza y en modestas publicaciones, las bases de la nueva teoría de los números irracionales.

Apoyándose en conceptos más delicados, el Profesor alemán Weierstrass fundó la teoría de estos números, considerándolos como suma de infinitos números racionales.

El estudio de estos números, basado en las clases o conjunos, se debe a Dedekind (1) y ha sido adoptada por Dini, Tannery y otros.

Quédanos por determinar números que nos permitan encontrar las raíces de índice par de los números negativos, ampliando con este fin el campo de los números reales con la creación de nuevos símbolos que nos permitan hallar con ellos las raíces de los números en todos los casos, sin que por ello resulte contradicción alguna con las definiciones y propiedades anteriormente sentadas.

Para conseguir este fin, los analistas han seguido un procedimiento análogo al empleado en la investigación algorítmica de los números fraccionarios, formando al efecto, con el auxilio de un objeto o ente indeterminado, una nueva serie cuyos términos sean los productos de este ente por los números de la serie de números reales.

Utilizando la indeterminación del mencionado ente y sometiéndolo a la condición de que la potencia de exponente 2n del producto del mismo ente por el valor principal de la raíz, sea igual al radicando, se deduce, después de efectuar sencillas operaciones, que el referido ente es igual a la raíz de índice 2n de la unidad real negativa, raíz que se designa con el nombre de unidad imaginaria de orden 2n; y todo ello sin contradecir a ninguna definición sentada ni a ningún teorema demostrado.

Hallada esta unidad imaginaria de orden $2n$ y sustituyendo su valor en la última serie considerada, se obtiene la llamada serie de números imaginarios puros de orden 2n, de la que se deducen infinidad de series de esta naturaleza, dando a n los valores sucesivos de la serie fundamental.

De todas estas series de números imaginarios la más importante por sus aplicaciones al Análisis y a la Geometría es la procedente de hacer n igual a la unidad absoluta, en cuyo caso el valor que resulta para el ente

(1) Dedekind. Stetigkeit und irrationale Zahlen (Brunswick 1872).

auxiliar empleado se llama unidad imaginaria fundamental y la serie correspondiente toma el nombre de serie de números imaginarios puros.

La combinación por medio del algoritmo de la sumación de un número de la serie de números reales con otro cualquiera de la de imaginarios puros, origina un nuevo número con dos unidades distintas, llamado en Aritmética pura, número complejo.

Como cada número de la serie de números reales, incluso el cero, puede asociarse por sumación con otro cualquiera de la serie de imaginarios puros y al contrario, se deduce que hay un número ilimitado de series de números complejos, que agrupadas forman lo que se llama campo de todos los números, reales e imaginarios.

El número complejo, así formado, comprende como casos particulares a los números reales y a los imaginarios puros, según que sea igual a cero el coeficiente de la parte imaginaria o la parte real del complejo.

Véase, pues, cómo los modernos analistas han conseguido encontrar la expresión más general del número sin salirse del terreno de la Aritmética pura, pudiendo por su medio ver completo el problema de la extracción de raíces.

Tomando a izquierda y a derecha de un punto de una recta dos segmentos iguales a la unidad, y por tanto, el uno positivo y el otro negativo, y construyendo su media geométrica, se obtiene para representación geométrica de la unidad imaginaria fundamental la perpendicular en el punto de unión de los dos segmentos. Por esto se dice que la unidad imaginaria fundamental es el signo de la perpendicularidad.

Prolongada esta perpendicular en ambos sentidos, sobre ella pueden representarse todos los números imaginarios puros; y como el número complejo tiene una parte real representable por un segmento del eje de números reales, y la representación geométrica de un imagnario puro, no varía ni en dirección ni en magnitud aunque su punto de origen se traslade al extremo del segmento que representa el número real, se deduce que a todo número complejo corresponde en el plano de representación un punto; y recíprocamente a todo punto del plano de representación corresponde un número complejo, cuyos coeficientes son respectivamente la abscisa y la ordenada del punto dado.

El ilustre analista francés, Mr. Cauchy, designó con el nombre de afijos de los puntos del plano a los números complejos correspondientes, denominación que se ha extendido también a los puntos considerándolos como afijos de ios números complejos correpondientes.

La expresión de un número complejo en función de las coordenadas de su punto afijo, se llama forma ordinaria a aritmética del número complejo.

Expresando ahora las coordenadas cartesianas en función de las polares, cuyo polo es el origen y cuyo eje polar es el eje de las abscisas, se transforma entonces la forma del número complejo en otra nueva que se llama forma trigonométrica, la cual se compone de dos factores, uno real y positivo, llamado módulo del complejo y otro imaginario, que es un factor de dirección, denominado expresión reducida del complejo.

La representación simbólica de la forma trigonométrica de un complejo, se llama forma módulo-argumental del mismo.

Expresando el módulo de un complejo en forma exponencial de base e y el factor de dirección en forma análoga, la forma trigonométrica del complejo, y por tanto, la aritmética toma una forma exponencial de base e y de exponente igual a la suma del logaritmo neperiano del módulo del complejo con el producto de la unidad imaginaria por el argumento.

Las cuatro formas aritmética, trigonométrica, módulo-argumental y exponencial de un complejo se utilizan en cada caso según las conveniencias del cálculo.

Un segmento rectilíneo de longitud determinada y que forme un ángulo también determinado con el eje de los números reales y positivos, y cuyo origen y sentido se conocen, se llaman un *vector.*

Según esta definición, un número complejo puede representarse también gráficamente por medio de un vector de longitud igual a su módulo, formando con la parte positiva del eje de los números reales un ángulo igual al argumento, y que teniendo por origen el origen de los números, tenga por extremo el punto afijo del número propuesto.

Dos vectores iguales, paralelos y descritos en el mismo sentido o en sentidos opuestos, se llaman vectores equivalentes u opuestos.

El cálculo de los números imaginarios está basado en el principio de la permanencia de las leyes formales, esto es, en el principio de que puedan extenderse a las operaciones efectuadas con estos números las mismas leyes que se emplean en las operaciones verificadas con los números reales.

Aplicado este principio se vé que los resultados de las operaciones son

en general números imaginarios y en ellas se demuestra fácilmente que subsisten las mismas leyes formales que en las operaciones efectuadas con números reales; y como los números complejos comprenden como caso particular a los números reales, también las leyes formales de las operaciones hechas con números imaginarios comprenden a las de las mismas operaciones verificadas con números reales, siendo digno de notarse que con el campo completo de números se puede hallar la raíz de un número cualquiera, real o imaginario, y que ésta presenta tantos valores diferentes como unidades tiene el índice de la raíz, circunstancia que se indica diciendo que la extracción de raíces es una operación multiforme.

Procediendo del mismo modo que con los números negativos y el infinito matemático, vamos a hacer una breve reseña de las principalos aplicaciones de los números imaginarios.

Estos números juegan un papel tan importante en la Matemática que sin ellos sería imposible el análisis moderno.

En la misma Aritmética hemos visto la aplicación inmediata de estos números a la extracción de la raíz enésima de un radicando cualquiera, y en los mismos umbrales del Álgebra aparece la necesidad de estos números en la resolución de la cenación de segundo grado con una incógnita.

Ya los antiguos analistas cuando se ocuparon de la discusión de la fórmula de resolución de dicha ecuación con coeficientes reales, observaron que en el caso de que el discriminante de la cenación era un número positivo, los valores que resultaban para las dos raíces no podían ser números reales, positivos ni negativos.

Transformando el primer miembro de la cenación, en el supuesto de que el segundo sea cero, en suma de dos cuadrados, uno función de la incógnita y el otro función de los coeficientes, se pone de manifiesto la imposibilidad de que ningún número real, positivo o negativo, puede satisfacer la cenación, toda vez que la suma de dos cantidades positivas nunca puede ser igual a cero.

Viendo los antiguos analistas que en este caso ningún número entero, ni fraccionario ni incomensurable podía satisfacer la cenación, pero que sustituyendo en ella en vez de la incógnita los valores dados por la fórmula de resolución y calculando con sujeción al principio de la permanencia de las leyes formales de Hankel, la convertían en una identidad, convinieron en designar a dichos valores y a toda expresión de la misma forma, con el nombre de números imaginarios, por oposición a los conocidos hasta entonces que llamaron reales.

Este es el origen primitivo de los números imaginarios.

La teoría de ecuaciones apenas sería posible sin el concurso de los números complejos, puesto que el teorema fundamental de D'Alambert, sobre el cual descansa aquella teoría, no podría demostrarse sin recurrir a dichos números.

Y en general, podemos decir, que no hay cuestión del Análisis algébrico, ni aun del infinitesimal, que pueda desarrollarse completamente sin la ayuda de estos números.

La teoría de las equipolencias, que tan fácilmente se presta al estudio de muchas cuestiones de la Geometría, de la Trigonometría, de la Física y de la Mecánica, no es en el fondo más que una inmediata aplicación de los números imaginarios.

Un geómetra español, D. Modesto Hervilla, publicó un notable tratado de Geometría analítica, empleando sólo los números imaginarios.

Y hasta en el terreno de la Electricidad han tomado también carta de naturaleza estos números. Así se vé, para no citar más que dos casos, en las obras de Electrotecnia y de Electricidad de Arnold y de Gerad.

Arnold, Profesor y Director de la Escuela Electrotécnica de Karlruhe, en Alemania, publicó en el año 1898, un tratado de Electrotecnia en seis volúmenes, dedicando el tercero a las corrientes eléctricas alternativas; y es digno de notarse la sencillez con que el autor trata una cosa tan real y práctica como lo son estas corrientes, valiéndose de los números imaginarios.

Mr. E. Gerad, Director y Profesor del Instituto electrotécnico de Montefiore, en Lieja, en la 7.ª edición de su notable obra *Leçons sur l'Electricitè,* publicada en 1905, introduce por primera vez, convencido de su utilidad, el cálculo de los números imaginarios y de los vectores, a pesar de haberse resistido tanto a emplearlos en las ediciones anteriores de su obra.

En el terreno de la Geometría pura juegan también un importante papel los elementos imaginarios, de los que sólo haremos aquí, en obsequio de la brevedad, un ligero estudio, ya que el examen completo de esta cuestión nos llevaría más lejos de lo que permite la índole de este trabajo.

Cuando se aplica el Álgebra a las cuestiones geométricas, no es raro encontrar soluciones imaginarias, que no tienen interpretación geométrica, pero que combinadas entre sí, puedan dar origen a proposiciones sobre elementos reales que corresponden a verdades geométricas, de tal modo que la demostración de algunas de éstas puede hacerse con el auxilio de expresiones imaginarias, que se eliminan en el proceso del cálculo y no aparecen en el resultado.

Así, por ejemplo, cuando se determinan analíticamente los puntos o rectas comunes a dos líneas o a dos haces planos de rectas, y sus expresiones analíticas son imaginarias, se dice que aquellas líneas o aquellos haces tienen puntos o rectas comunes imaginarios, lo cual tiene un sentido claro en Geometría analítica, pero nada significa en Geometría pura, puesto que dichas líneas o haces aparecen sin puntos ni rectas comunes.

El deseo de llevar a la Geometría la generalidad del Álgebra, hizo que desde los primeros ensayos de sistematización de la Geometría pura, se introdujesen en ella dichas denominaciones sin ventaja ninguna para la ciencia, puesto que estaban enteramente desprovistas de sentido.

Pronto se observó que hay ocasiones en que resultan elementos reales derivados de los imaginarios, como sucede, por ejemplo, con las rectas que unen puntos imaginarios conjugados y los puntos de intersección de rectas imaginarias conjugadas, que tienen propiedades idénticas a las que corresponden a dichos elementos, cuando los que los determinan son reales.

Lo verdaderamente científico sería, en tales casos, demostrar dichas propiedades sin mencionar para nada los elementos imaginarios de que dependen; así lo hicieron los geómetras afectos a los métodos antiguos; pero como en ocasiones esta demostración rigurosa era más difícil y complicada que la que le correspondía al caso de la realidad de los elementos, y deseando no quedar rezagados respecto de los analistas, admitieron algunos geómetras el principio que el general Poncelet llamó de la continuidad, en virtud del cual bastaba demostrar un teorema en una posición general de la figura, para considerarle también cierto en otra cualquiera.

Así procedió para extender a las secciones cónicas las propiedades de los centros de homotecia de dos circunsferencias, demostrando, después de darle forma proyectiva, que dos secciones cónicas situadas en un plano pueden considerarse como proyecciones de dos circunsferencias de otro plano. Y aun cuando esto no es cierto cuando las secciones cónicas tienen cuatro puntos comunes reales, no por eso dejó de admitir como generales las propiedades deducidas por tal medio.

Al aplicar este principio de continuidad pueden presentarse dos casos, según que desaparezcan o se hagan imaginarios algunos de los elementos que intervienen en la demostración, permaneciendo reales los contenidos en el enunciado, o que también alguno de éstos pase a ser imaginario. En el primer caso, el principio de continuidad permite dar como cierto en su sentido propio el teorema, mientras que en el segundo no tiene éste ningún sentido, lo cual no impide que siga mirándolo como cierto Poncelet, porque, según él dice, esta admisión a ningún resultado contradictorio o absurdo puede conducir.

Esta forma de introducción de las imaginarias en la Geometría, si bien puede admitirse como primer ensayo de método de investigación, en cambio, no responde de manera alguna a las justas exigencias de un método científico; por lo cual pronto se trató de estudiar más detenidamente la cuestión y de analizar cuál es el concepto geométrico que corresponde a la noción de las imaginarias, que nada dice por sí misma.

Después de varios ensayos y de perseverantes trabajos, se descubrió que a los teoremas en que intervienen los elementos imaginarios, corresponden otros equivalentes entre elementos reales, perfectamente claros.

Así es, que decir que dos líneas de segundo orden cortan a una misma recta en unos mismos puntos, o decir que determinan en ella una misma involución de puntos conjugados, son cosas idénticas, si esta involución tiene puntos dobles reales; pero si no los tiene, la segunda forma de enunciado subsiste, y la primera no tiene sentido geométrico ninguno, por más que, atendiendo a su expresión analítica, corten las dos curvas a la recta en unos mismos puntos, que son los imaginarios conjugados dobles de aquella involución.

Si entre las diferentes maneras como pueden determinarse a la vez dos puntos, dos rectas o dos planos, escogemos una serie o un haz en involución, que los tenga por elementos dobles, podemos considerar en general que una serie o haz en involución define dos puntos o rectas, no sólo en

el caso en que sean reales, sino también en el caso en que sean imaginarios, expresión que será puramente convencional, pero perfectamente clara.

Así, decir que una curva de segundo orden pasa por dos puntos imaginarios conjugados, definidos por una serie rectilínea en involución, es una manera convencional de indicar que los pares de puntos conjugados de la involución son también conjugados respecto de la curva.

De este modo se reemplaza el concepto oscuro de lo imaginario por el concepto claro y bien definido de involución, como al punto del infinito de una recta se le sustituyó antes el de dirección, más claro y preciso que aquél, y de la misma manera que en la Geometría enclidiana, al hablar de un punto del infinito, entendíamos referirnos a una dirección, así al mencionar dos puntos imaginarios conjugados, entendemos por ello una serie rectilínea en involución que carece de puntos dobles.

Pero esto no es bastante, puesto que por tal medio se designan a la vez los dos elementos imaginarios conjugados, no permitiendo, por consiguiente, aplicarles más que aquellos teoremas en que intervienen juntos y de una manera simétrica.

Para completar la determinación de un elemento imaginario y distinguirlo de su conjugado, se le ocurrió a los geómetras la idea de agregar al concepto de involución el del sentido en que están colocados o son recorridos sus elementos conjugados; y como en toda serie en involución hay dos sentidos contrarios, una misma involución con cada uno de estos sentidos, determina perfectamente los dos elementos imaginarios conjugados.

Para que se comprenda la manera cómo la reunión de estos dos conceptos, involución y sentido, desempeña el papel de elemento, análogo al de los reales, será necesario entrar en algunos detalles sobre la manera cómo se les pueden aplicar las construcciones y propiedades de los elementos reales, principiando por indicar la manera más sencilla de representarlos.

El procedimiento más natural de representar un elemento imaginario es hacerlo por una forma simple ordenada, llamada Wurf por los geómetras alemanes, puesto que ésta, por su definición, designa un sentido y una involución sin elementos dobles, ya que el primero y tercero elemento están separados por el segundo y cuarto.

Un punto imaginario de una recta real admite, según esto, infinitas representaciones, correspondientes a otros tantos grupos de dos pares de puntos conjugados de la misma involución, pudiéndose elegir entre todas la que empiece en un punto arbitrario de la recta, y que además sea armónica o proyectiva con una forma simple ordenada cualquiera, con lo cual ya quedará completamente determinada la representación.

De una manera análoga se representa la recta imaginaria y el plano imaginario, debiendo advertir que además de este método de representación hay otros fundados en las propiedades de las curvas, superficies y heces alabrados de segundo orden, que omitimos aquí en razón a la brevedad.

No queremos abandonar este trabajo sin indicar el método más conveniente en la enseñanza de la Calculatoria en las Falcultades de ciencias.

Dos métodos principales pueden seguirse en la enseñanza de las diferentes clases de números abstractos y en las operaciones calculatorias con ellos relacionadas.

Consiste el primero, llamado método sintético, en tomar como punto de partida la idea de número en su pleno y total concepto, dar después de sus combinaciones, las definiciones más generales y amplias que sea posible y deducir de su estudio las leyes que las rigen, capaces de poderse aplicar a todo género de números.

El segundo método, llamado analítico, consiste, por el contrario, en partir del número abstracto, entero y positivo, originado por la sencilla operación de contar, establecer las definiciones más restringidas de las operaciones calculatorias, deduciendo de su estudio las leyes a que éstas están sujetas y estableciendo el principio de su permanencia y universalidad, salvando después el caso de imposibilidad de la sustracción, motivado por ser el sustraendo mayor que el minuendo, con la introducción de los números negativos; salvar nuevamente la imposibilidad de la división, cuando el dividendo no sea un múltiplo del divisor, con la ayuda de los números fraccionarios; resolver el de la incomensurabilidad con el auxilio de las clases o conjuntos de números racionales y el de la raíz de índice par de los números negativos con la creación de los números imaginarios, procurando no conceder por lo pronto a estos símbolos otra significación que la de satisfacer a las leyes de combinación de las operaciones que los originan; hallando después en el terreno concreto la significación que debe darse en cada caso

a estos diversos símbolos, si es que tal significación existe y es lógicamente posible.

El método sintético tiene como importancia capital la brevedad en la exposición, deduciendo de los principios todo lo que en ellas está virtualmente contenido.

Esta ventaja por sí sola bastaría para emplearlo de preferencia en la enseñanza de esta rama de la Matemática, con lo cual se economizaría un tiempo precioso que podría utilizarse en dar a conocer otras teorías modernas del Análisis, que apenas pueden iniciarse por falta material de tiempo para ello; pero la deficiencia del plan de estudios en la segunda enseñanza, que suspende durante los dos últimos cursos toda disciplina matemática, la poca importancia que se dá, por quien debiera, a la vocación, olvidando la máxima de que sin vocación el claustro es un infierno; la reducida edad que generalmente tienen los alumnos que se matriculan al primer curso de Análisis matemático de la Facultad de Ciencias; la carencia de un examen de ingreso en estas Facultades, como se hace en muchas de las Universivades extranjeras y en casi todos los establecimientos docentes de nuestro país; el carácter predominantemente positivo, memorista y formalista que domina todavía en la enseñanza primaria y aún en la secundaria, olvidando que por su naturaleza deben ser más bien centros educativos que instructivos, que desarrollen las facultades intelectuales de los alumnos para hacerlos aptos y capaces de comprender, retener y saber aplicar debida y oportunamente la materia científica que se les exponga en los estudios profesionales: todas estas dificultades son más que suficientes para que desistamos tomar por guía en la enseñanza de esta rama del Análisis, el método sintético, reemplazándolo necesariamente por el analítico.

Hacer partir al alumno de los conceptos más simples y puramente intuitivos, ya conocidos por él más o menos perfectamente, conducirle paulatinamente de estos conceptos a otros cada vez más amplios, extensivos y elevados hasta hacerle llegar insensible y gradualmente al concepto más general y complejo del número, ofrece tan innegables ventajas en la enseñanza de la Calculatoria en nuestras Facultades de Ciencias, que no titubeamos en aceptarlo como el más propio y adecuado para este objeto.

Antes de abandonar este sitio, e interpretando fielmente vuestros nobles sentimientos, voy a dedicar un cariñoso recuerdo a la memoria de los que fueron nuestros queridos compañeros, Doctores, D. Juan Martín Aguilar, Catedrático de la Facultad de Medicina, y D. Pablo Peña Entrala de la Facultad de Derecho, fallecidos ambos en el curso académico anterior.

El primero, nacido en Prado del Rey, provincia de Cádiz, ingresó por oposición en el Profesorado Oficial en 1888 con el cargo de Profesor Clínico de la Facultad de Medicina de Cádiz, cargo que desempeñó hasta el año 1897 que obtuvo en reñidas oposiciones la Cátedra de Clínica y Obstreticia en la misma Facultad de Valladolid, posesionándose en 21 de Enero del mismo año.

Por permuta fué trasladado a la misma asignatura de nuestra Facultad de Medicina por R. O. de 3 de Julio de 1897, donde continuó entre nosotros hasta que en 26 de Mayo último falleció a consecuencia de una cruel y rápida enfermedad.

Poco podemos nosotros decir en elogio de nuestro malogrado compañero, Dr. Martín Aguilar, que vosotros y España entera no sepa ya de antemano.

En la Cátedra era fiel cumplidor de sus deberes, querido y respetado de sus alumnos, a los que dedicaba con predilección toda su actividad, convencido del bien que prestaba a la humanidad doliente suministrándole los continuadores de su obra filantrópica. Raro es el pueblo de esta provincia y aun de las limítrofes que no recuerde con pena la muerte de nuestro querido compañero, porque son muchas las mujeres que han prolongado su existencia, gracias a la intervención de ese ginecólogo notable, honra de nuestro país.

En el trato social era cariñoso y afectuoso, a pesar de su seriedad, con todos los que le trataban, y estaba siempre dispuesto y solícito a hacer el bien donde quiera que éste lo reclamaba.

Dediquemos, pues, un sentido recuerdo a tan digno compañero, que la muerte nos ha arrebatado en la plenitud de su vida, cuando todavía la Ciencia médica podía esperar mucho de él.

D. Pablo Peña Entrala nació en Granada el 27 de Mayo de 1843.

Cursó con bastante aprovechamiento en nuestro Instituto y en los años de 1854 a 1860, los estudios de segunda enseñanza, graduándose en 1860 de Bachiller en Artes con la calificación de Sobresaliente. Después cursó

en esta Universidad los estudios de Derecho, obteniendo brillantes calificaciones en las asignaturas de la Sección de Derecho Civil y Canónico.

En 13 de Junio de 1866 y en 20 de Junio de 1868, se graduó respectivamente de Bachiller y de Licenciado en la misma Facultad y Sección, obteniendo en ambos grados la nota de Sobresaliente.

En 20 de Junio de 1870, verificó los ejercicios del grado de Doctor en Derecho, mereciendo la calificación de Aprobado, única nota que entonces había.

En 9 de Noviembre de 1872 fué nombrado por esta Facultad de Derecho, Catedrático auxiliar de Historia y Elementos de Derecho Romano, cargo que desempeñó con ese carácter hasta el año 1875 que lo obtuvo en propiedad, mediante concurso.

En reñidas oposiciones obtuvo el primer lugar de la terna para dicha Cátedra, siendo nombrado Catedrático numerario por Real orden de 24 de Febrero de 1876.

En 25 de Septiembre de 1884 fué confirmado en el cargo de Catedrático numerario, encargándole la Cátedra de Derecho Natural.

Ha desempeñado los cargos de Vice-Secretario, de Secretario y de Decano de la Facultad de Derecho y Vocal de varios Tribunales de oposiciones a Escuelas, a Notarías y a Cátedras de Instituto y de Universidad.

Tan conocido o más que D. Juan Martín Aguilar, lo es D. Pablo Peña Entrala, porque su vida escolar y aún la profesional la ha hecho toda en este su país natal. Por eso poco puedo yo deciros del que fué nuestro compañero, que vosotros de memoria no sepais.

Era D. Pablo Peña la personificación de la bondad: celoso en el cumplimiento de sus deberes académicos; amante de sus alumnos, que le adoraban y consideraban como a un padre cariñoso; con gran sencillez y naturalidad les explicaba los fundamentos de la Ciencia del Derecho para que con esa base puedieran entender bien las demás disciplinas de esta Ciencia; y en los demás cargos que ha desempeñado en esta Universidad siempre daba muestras de gran amabilidad y corrección, complaciendo a todos los que a él acudían con alguna petición, si a ello no se oponían las vigentes disposiciones relativas a la materia objeto de la misma.

En el trato social era amado y querido de todos los que con él hablaban; y como padre de familia era un modelo que se desvelaba por el bien de sus hijos, a los que con gran amor paternal dedicó durante su vida todos sus esfuerzos.

Dediquémosle un sincero y sentido recuendo, lamentando a la vez la pérdida de tan digno compañero.

No quiero dar fin a este discurso sin dirigir antes un cariñoso saludo a esta juventud, lozana y brillante, que con la alegría en el rostro y el fuego del entusiasmo en el corazón, viene gozosa a reanudar sus tareas, interrumpidas por las vacaciones caniculares.

Vosotros, jóvenes alumnos, que por ley fatal de la vida, sois los encargados de intervenir en no lejano plazo, en la resolución de capitales problemas, relacionados con los destinos de nuestra querida Patria, tened muy en cuenta, que si no os pertrechais de antemano de una sólida instrucción, de una intachable moralidad y de un acendrado amor al trabajo, os será muy difícil cumplir bien con vuestro sagrado cometido.

No creáis que os pedimos por instrucción esa ilustración superficial y enciclopedista que permite hablar de todo sin saber bien de nada; tened muy presente que el enciclopedismo pasó ya hace tiempo a la Historia, y hoy, dada la extensión que han tomado las distintas ramas del saber humano, hay por necesidad que ser especialista en vez de enciclopedista, pues sólo inteligencias privilegiadas, de las que por desgracia existen pocas, pueden ostentar este calificativo.

Así, pues, estudiad con entusiasmo y aprovechamiento los conocimientos de las Ciencias y de las Letras que preceden en el orden lógico a los estudios profesionales, con el fin de que os sirvan de cultura general, tan necesaria en el trato social de personas educadas, y de base preparatoria para cursar con fruto los estudios de la carrera a que os dediquéis, procurando adquirir en éstos una instrucción sólida para que podáis con ella ejercer provechosamente vuestra profesión.

No toméis una carrera guiados sólo por la idea de lucro; consultad siempre con vuestras aptitudes y con vuestra vocación, ya reveladas en los estudios elementales de la segunda enseñanza y aun en los preparatorios de las Facultades universitarias.

Ceñiros en todos vuestros actos a la más estricta moral.

Procurad hacer el bien por el bien mismo, dirigiendo siempre vuestra miradas al sumo bien, sólo efectivo en Dios, y de donde emanan todos los demás bienes.

Tomad este bien, inaccesible al hombre en la vida presente y en la futura, como guía de todos vuestros actos, procurando acercaros a él todo cuanto os sea posible, ya que vuestra condición de limitados os impide llegar a él.

Amad al trabajo, obedeciendo al precepto bíblico que exige ganar el pan con el sudor de nuestra frente.

Este amor al trabajo lo conseguireis fácilmente si al elegir carrera obedeceis los mandatos de vuestra vocación y teneis en cuenta vuestras aptitudes, adornandoos de una sólida base preparatoria y de una firme voluntad, y procurando en el estudio de cada materia, no pasar de una cuestión a la siguiente sin conocer a fondo la que le antecede.

Huid, como de la lepra, de esa enfermedad exótica y contagiosa que se llama *huelga,* arraigada en nuestro país más de lo que debiera, como sucede generalmente con todo lo malo importado del extranjero; y observad, que salvo casos muy contados, la huelga no es más que un repulsivo y enmascarado odio al trabajo.

Si estudiais con imparcialidad el origen de la mayor parte de las huelgas verificadas en nuestro país, deduciréis de ese estudio una triste y lamentable consecuencia, y es, que son promovidas casi siempre por los obreros más perezosos y menos idóneos o por los estudiantes más desaplicados, es decir, por los que pudiéramos llamar, gráficamente hablando, los zánganos de la colmena; y se da el caso verdaderamente singular e inexplicable de ver marchar a la aptitud en pos o a la retaguardia de la ineptitud.

Cuando tengais que reclamar alguna mejora en vuestra clase, hacedlo con el respecto y consideración debidos a las autoridades correspondientes; pero sin dejar por eso de cumplir mientras tanto con vuestro fundamental deber de asistir a las clases, pues si al contrario lo hacéis, pondréis en peligro el éxito de la petición y además dejaríais de adquirir una suma de conocimientos que seguramente os harán falta en lo sucesivo, pudiendo también ser esto un motivo de retraso en vuestra carrera.

Voy a terminar. Escolares: Procurad siempre hacer una acertada elección de carrera que concuerde con vuestras aficiones y con vuestras aptitudes, y después de elegida, emprenderla con firme y resuelta voluntad y con acendrado amor al estudio. Si para ello necesitáis algunos consejos, consultad detenidamente el precioso libro de Balmes, titulado *El Criterio,* y en él veréis a un modesto Presbítero y profundo filósofo español, exponer con una claridad, como la de la luz meridiana, sanas doctrinas y atinados preceptos, que os serán, si los practicais, de grandísima utilidad, no sólo en el curso de vuestra carrerra, sino también en las demás etapas de vuestra existencia.

En el proceso de vuestros estudios, no sigais al pie de la letra el orden en que os exponen en la enseñanza primaria y aun en la secundaria, las facultades mentales. No las empleeis en el orden de memoria, entendimiento y voluntad, no; invertidlas y empleadlas en este otro: voluntad, entendimiento y memoria, y bien pronto veréis los resultados de esta inversión. Quizás, y aún sin quizás, sea esa inversión la causa principal de que ocupe este puesto el que en este momento tiene el honor de dirigiros la palabra.

Si Napoleón decía que para hacer la guerra con probabilidades de éxito se necesitaba dinero, dinero y dinero; yo os diré desde aquí, que para adquirir la Ciencia, se necesita voluntad, voluntad y voluntad.

Trabajad, pues, con amor y perseverancia en los estudios relacionados con vuestra carrera, porque si para aprender bien un oficio se necesitan constantes y asiduos trabajos, para la adquisición de la Ciencia es preciso redoblar y aún centuplicar esos esfuerzos.

Y si observais todos estos consejos y con amor y desinterés dedicais vuestras energías al cultivo de la Ciencia, sin dejar por eso de cumplir con todos los demás deberes, como seres morales y religiosos que sois, estad seguros de que habréis elevado el nivel científico de nuestra amada Patria y a la vez os habréis hecho dignos y merecedores del amor y respeto de vuestros semejantes y de la bondad y justicia de Dios.

HE DICHO.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
00244643
BIBL. GENERAL UNIVERSITARIA