

Universidad de Granada
Departamento de Estadística e I.O.



**APORTACIONES AL ESTUDIO DE MODELOS
ESTOCÁSTICOS ASOCIADOS A CURVAS DE
CRECIMIENTO: UN NUEVO PROCESO DE
DIFUSIÓN TIPO GOMPERTZ.**

Tesis Doctoral

**Desirée Romero Molina
Granada. 2005**

APORTACIONES AL ESTUDIO DE MODELOS ESTOCÁSTICOS ASOCIADOS A CURVAS DE CRECIMIENTO: UN NUEVO PROCESO DE DIFUSIÓN TIPO GOMPERTZ.

Memoria presentada por la Licenciada Desirée Romero Molina, y realizada en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Dña. Patricia Román Román y D. Francisco de Asís Torres Ruiz, Profesores Titulares de dicho Departamento, con objeto de aspirar al grado de Doctor.

Granada, Mayo de 2005

Fdo. Desirée Romero Molina

Fdo. Dr. Dña. Patricia Román Román
Directora de la Memoria

Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz
Director de la Memoria

*Dedico esta memoria a mis padres, Miguel y Manoli,
a mi hermano Juan Miguel y a César,
por estar siempre ahí.
En memoria de María Luisa Oliva Buendía.*

Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi más sincera gratitud a mis directores, Dña. Patricia Román y D. Francisco Torres, por su ayuda y atención incondicionales, por todo el tiempo y esfuerzo que han dedicado a esta tesis y, en especial, por su apoyo a lo largo de todo estos años.

Me gustaría, además, dar las gracias a D. Juan José Serrano Pérez por su inestimable colaboración en esta memoria de doctorado y por todo el tiempo y ayuda prestada.

Aprovecho también esta ocasión para dar las gracias al Prof. Dr. D. Ramón Gutiérrez tanto por su apoyo y prestación de los medios necesarios para la elaboración de esta memoria, así como su trato personal.

Expreso mi agradecimiento a mi amiga Susana Peralta por su ayuda en los momentos malos, y a mis compañeros: Juan Miguel Alcántara, María José Aznar, Miguel Ángel Montero, Eva Ramos y Nuria Rico, con los que he compartido momentos entrañables.

También quiero hacer mi agradecimiento extensivo a todos los miembros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de Granada así como a mis compañeros de la Facultad de Educación y Humanidades de Ceuta por su amabilidad y buena acogida.

Por último, pero no por ello menos importante, quiero expresar todo mi cariño y gratitud a mi novio, Manuel César Rosales, por su apoyo moral y comprensión, por resolver mis dudas matemáticas y por su ayuda y consejos a lo largo de estos años.

Índice

Introducción	1
1. Modelos de Crecimiento	7
1.1. Estudio de algunas curvas de crecimiento	7
1.1.1. Curva exponencial	7
1.1.2. Curva logística	8
1.1.3. Curva Gompertz	9
1.2. Estudio comparativo de curvas. Modelos determinísticos asociados	14
1.2.1. La curva exponencial y la curva logística	14
1.2.2. La curva logística y la curva Gompertz (versión de Winsor)	17
1.3. Modelos aleatorios asociados	19
1.3.1. Proceso lognormal	20
1.3.2. Proceso logístico	23
1.3.3. Procesos asociado a la curva Gompertz	25
2. Un nuevo proceso de difusión tipo Gompertz	33
2.1. Obtención del modelo	33
2.1.1. Límite de modelos discretos de crecimiento	37
2.1.2. Límite de esquemas discretos	40
2.2. Estudio del nuevo proceso. Características principales	45
2.2.1. Obtención de la función de densidad de transición	45

2.2.2. Distribuciones finito-dimensionales	48
2.2.3. Momentos	52
2.2.4. Otras funciones paramétricas de interés: moda y cuantiles	53
2.2.5. Simulación de trayectorias	55
3. Estimación en el modelo. Tiempos de primer paso	61
3.1. Estimación máximo verosímil de los parámetros del modelo	62
3.2. Estimación máximo verosímil de ciertas funciones paramétricas	68
3.3. Cuestiones numéricas. Métodos alternativos de estimación	69
3.3.1. Método de Newton-Raphson	69
3.3.2. Algoritmo simulated annealing	71
3.3.3. Procedimiento iterativo	77
3.4. Tiempos de primer paso	80
3.4.1. Ecuación integral de Volterra para la densidad de tiempo de primer paso	81
3.4.2. Aplicación al caso del nuevo proceso de difusión tipo Gompertz . .	83
3.5. Estudio del problema del tiempo en que se produce la inflexión en el modelo	85
4. Aplicación a datos reales	127
4.1. Aplicación a datos de ganancia media por hora trabajada	128
4.1.1. Datos agrupados por categorías laborales	132
4.1.2. Datos agrupados por sectores de actividades	135
4.1.3. Ajuste y predicción	141
4.2. Aplicación a remuneración de asalariados	147
Apéndice A	157
Apéndice B	159
Bibliografía	161

Introducción

El crecimiento es una característica importante en diversos campos de aplicación. El estudio de este fenómeno apareció originariamente asociado al análisis de evolución de poblaciones, si bien hoy día son múltiples los ámbitos en los que es considerado, por ejemplo, el económico, el ecológico y el biológico. Esto ha provocado multitud de estudios dirigidos a explicar determinados fenómenos de crecimiento mediante su modelización, siendo este último aspecto el que centra nuestro interés.

Al intentar ajustar un modelo matemático al crecimiento, han surgido representaciones muy diversas del mismo originándose, a su vez, la aparición de una variedad de curvas, denominadas de crecimiento, que representan al fenómeno en estudio. A la hora de realizar un estudio de dichas curvas, existen múltiples opciones para clasificarlas atendiendo a sus propiedades. Una posible alternativa para su agrupación puede ser centrarse en el valor límite que puede alcanzar la curva, es decir su cota, al limitarnos al estudio de curvas crecientes. En dicho caso, se pueden clasificar en: curvas de crecimiento no acotado, cuyo elemento más representativo es la curva de crecimiento exponencial, y curvas de crecimiento acotado, donde podemos destacar la curva de crecimiento logístico y la curva de crecimiento Gompertz.

Entre estas curvas, históricamente hablando, la primera que surge es la exponencial la cual es, a su vez, la más estudiada debido a que va asociada al análisis de poblaciones humanas. Una característica importante que destacar de esta curva es, como ya se ha especificado, la ausencia de cota. Otra curva asociada al estudio del crecimiento de poblaciones, en presencia de ciertas limitaciones, es la logística. Dichas limitaciones se traducen en la existencia de una cota, independiente del valor inicial, y una forma sigmoideal. Finalmente, aunque cronológicamente es previa a la logística, surge la curva Gompertz asociada al estudio de la ley de mortalidad humana que presenta también un crecimiento acotado y de tipo sigmoideal pero con características propias que la diferencian de la logística. A lo largo de los años esta curva ha sufrido multitud de reescrituras para adaptarse al estudio de fenómenos en muy diversos campos. Cada reescritura se introduce para recoger alguna característica propia del fenómeno estudiado, por ejemplo, la dependencia o no de la cota alcanzada con respecto al valor inicial de partida.

Asociados a estas curvas existen modelos determinísticos que rigen el tipo de comportamiento que exhibe cada una de ellas. Siguiendo el mismo orden, en primer lugar

aparece el modelo malthusiano, asociado a la curva exponencial. Fue propuesto por Thomas R. Malthus [55] como un modelo para el crecimiento de poblaciones humanas las cuales, según él, tienen un crecimiento no acotado, lo cual justifica el buscar un modelo asociado a la curva exponencial que carece de cota. Pero este modelo es adecuado sólo en condiciones perfectas ya que *en la naturaleza todo tiende a equilibrarse*, [62]. Esto motiva la importancia del estudio de modelos asociados a curvas de crecimiento acotadas. El modelo logístico fue propuesto Pierre F. Verhulst [87] como una modificación del malthusiano basada en que el crecimiento de la población no sólo depende del tamaño de esta sino también de la distancia de dicho tamaño a su límite superior. Por tanto, este modelo es adecuado para el ajuste de datos que muestren un crecimiento acotado cuya cota no dependa del valor en el instante inicial. Por último, asociado a la curva Gompertz no existe un único modelo determinístico ya que, al existir una gran variedad de curvas con dicho nombre cuya característica común es que son dobles exponenciales, han surgido distintos modelos denominados Gompertz. Nosotros queremos destacar el modelo asociado a la curva Gompertz que estudió Winsor [89], ya que dicha expresión de la curva, además de ser la primera reescritura que apareció, ha sido ampliamente utilizada y su modelo asociado muestra cierta similitud con el logístico.

El problema que se plantea a la hora de utilizar modelos determinísticos para modelizar cualquier fenómeno, y en particular el crecimiento, es la complejidad propia del fenómeno, implicando la necesidad de la especificación detallada de múltiples factores que no siempre son conocidos o cuantificables. Este inconveniente se puede evitar mediante la utilización de modelos estocásticos como por ejemplo, procesos de nacimiento y muerte o procesos de difusión, los cuales han sido ampliamente usados para la modelización y estudio de determinados fenómenos dinámicos en diversos campos de aplicación en el ámbito del crecimiento.

Asociado al modelo determinístico malthusiano surge el proceso de difusión lognormal. Este proceso ha sido aplicado en muy distintos campos científicos, como la Ecología o la Economía y otros cercanos como, por ejemplo, el Marketing. En Ecología, Capocelli y Ricciardi [7] y Ricciardi [73], lo estudian como modelo de crecimiento de poblaciones. En el campo de la Economía, Cox y Ross [9] y Merton [64] mostraron su importancia teórica y práctica. Por ejemplo, este proceso aparece asociado con el modelo de Black y Scholes [5] y extensiones posteriores (Lamberton y Lapeyre [52], Hunt y Kennedy [41]). Asimismo, y todavía dentro del campo económico, Marcus y Shaked [56] confirmaron su importancia en el campo de la economía y las finanzas, y Tintner y Sengupta [85] lo han utilizado ampliamente, incluyendo también el caso de factores exógenos y aplicándolo a la descripción, predicción y análisis de políticas de crecimiento en materias económicas, poniendo de relieve el interés especial que despierta este proceso para realizar predicciones debido a su tendencia exponencial.

De igual manera, asociado al modelo determinístico logístico surge un proceso de difusión el cual es introducido por Capocelli y Ricciardi, [8], [72], incluyendo mecanismos de regulación aleatorios a partir del modelo de crecimiento malthusiano. Ricciardi [73] y

Nobile et al. [69] han estudiado este proceso en problemas de crecimiento de poblaciones en Biología. Otros autores, como Tan y Piantadosi [83], lo tratan como límite de un proceso de nacimiento y muerte no homogéneos. Por otro lado, Giovanis y Skiadas [18] estudian una particularización del proceso de difusión logístico mediante la teoría de reducción de ecuaciones diferenciales estocásticas, aplicando dicho modelo a datos del consumo de electricidad en Grecia y Estados Unidos.

Sin embargo, este proceso presenta el inconveniente de no disponer de una solución exacta para las ecuaciones de difusión. Este hecho condujo a Capocelli y Ricciardi [8] a la introducción de un nuevo proceso que modeliza un tipo de comportamiento similar al tipo logístico, en concreto el asociado a una curva Gompertz cuya cota depende del valor inicial, y que no presenta el inconveniente anterior. Surge así el proceso de difusión tipo Gompertz que se estudiará con detalle en el Capítulo 1.

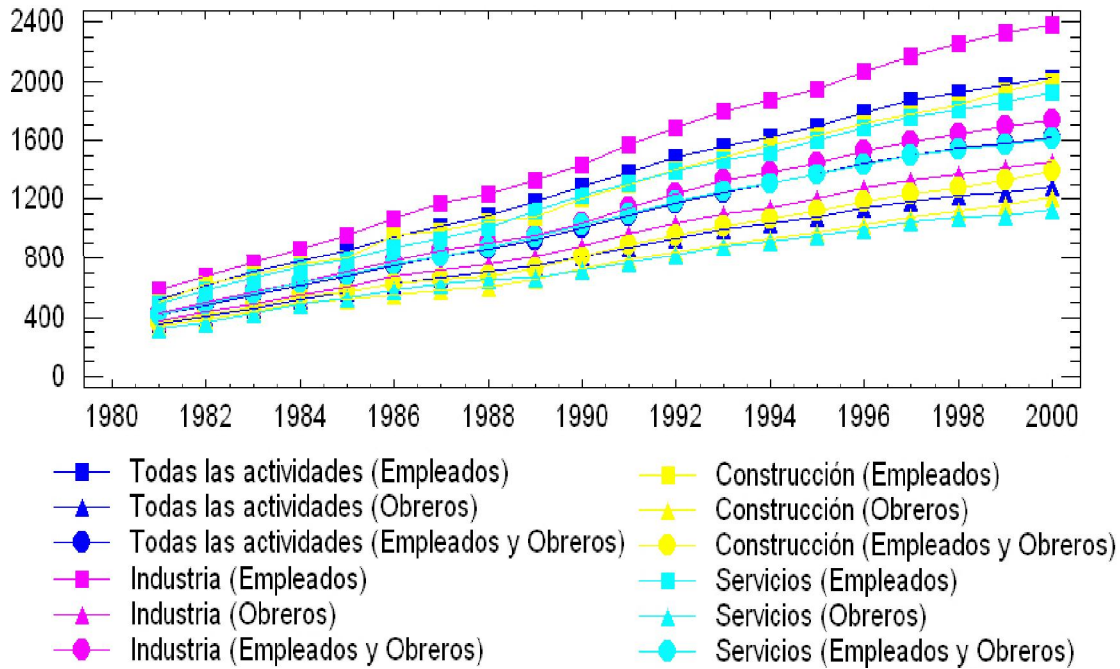
Por otra parte, a partir de una expresión de la curva Gompertz cuya cota sí depende del valor inicial, Tan [82] introduce un proceso de nacimiento y muerte Gompertz mediante la imposición de que su función media coincida con dicha curva.

Como resumen, podemos decir que disponemos de una serie de modelos aleatorios que están asociados a las curvas de crecimiento introducidas y que, por tanto, pueden ser utilizados para modelizar fenómenos cuyo comportamiento, en este caso crecimiento, viene representado por tales curvas. Así pues, para modelizar situaciones regidas por variables de naturaleza continua que evolucionen continuamente en el tiempo y con tendencia exponencial, el proceso lognormal puede ser adecuado. Si, por el contrario, las series de datos asociados a las variables en estudio muestran un comportamiento de tipo sigmoidal acotado con cota independiente del valor inicial, pueden usarse los procesos logístico o Gompertz citados anteriormente, según las particularidades propias que exhiban los datos (por ejemplo, la velocidad de crecimiento hasta el punto de inflexión).

Sin embargo, en la práctica pueden aparecer situaciones en las que el tipo de crecimiento acotado anterior muestre una dependencia de la cota respecto al valor inicial, las cuales son de particular interés cuando se dispone de varias trayectorias de datos partiendo cada una de ellas de un valor inicial distinto (ver gráfica 1). En tal caso podría pensarse en el modelo introducido por Tan ya que su curva asociada obedece a ese comportamiento, pero su campo de actuación no contempla variables de naturaleza continua. Esto justifica el interés en obtener un modelo estocástico continuo, y en particular un proceso de difusión, que permita modelizar este tipo de situaciones.

Así, el **objetivo fundamental de esta memoria** es la introducción y estudio de un nuevo proceso de difusión tipo Gompertz para modelizar fenómenos asociados a variables que muestran un comportamiento sigmoidal y acotado en el tiempo, con cota dependiente del valor inicial.

Esta memoria consta de cuatro capítulos y las aportaciones originales comprenden los tres últimos.



Gráfica 1: Datos de ganancia media por hora trabajada en ciertos sectores laborales según la categoría laboral en España.

La finalidad principal del **primer capítulo** de esta memoria es ofrecer una revisión de algunos de los modelos estocásticos asociados a curvas de crecimiento existentes. Para ello, se comienza con una descripción de las curvas de crecimiento que se considerarán, para proseguir presentando los modelos determinísticos asociados a ellas junto con un estudio comparativo que muestra sus diferencias y similitudes. Seguidamente, se presentan las metodologías y desarrollos que han dado lugar a cada uno de los modelos estocásticos considerados (proceso de difusión lognormal, logístico, Gompertz y proceso de nacimiento y muerte Gompertz) haciendo especial hincapié en las características del proceso Gompertz para justificar la necesidad de introducir el nuevo proceso, materia fundamental de esta memoria.

En el **segundo capítulo** se introduce el nuevo proceso de difusión tipo Gompertz siguiendo dos metodologías. En primer lugar, la empleada por Capocelli y Ricciardi, [7], para la obtención del proceso de difusión lognormal, de forma que la solución de la ecuación de Fokker-Planck asociada al proceso de difusión, en ausencia de ruido, sea la curva considerada. En segundo lugar se contempla el método seguido por los mismos autores [8] para la obtención de los procesos logístico y Gompertz, que consiste en la inclusión de una cierta función de regulación aleatoria en el modelo malthusiano. En ambos casos, procedemos de forma que, además, la función media del proceso resultante coincida con la curva de interés, cuestión que no verifica el proceso Gompertz obtenido por ellos.

A continuación, se presentan dos procedimientos alternativos de obtención del proceso como paso al límite de esquemas discretos.

Una vez introducido el proceso de difusión, realizamos un análisis de sus características principales obteniendo su función densidad de transición, la función de distribución de transición y las distribuciones finito-dimensionales (uni y bidimensionales) con la consideración de dos tipos de distribuciones iniciales: degenerada y lognormal. A partir de ellas calcularemos las funciones media (especialmente útil con fines predictivos al coincidir con el tipo de curva cuyo comportamiento queremos modelizar), moda, covarianza y de cuantiles en cada uno de los casos. Finalizamos este capítulo con el estudio de la simulación de trayectorias del nuevo proceso que permiten visualizar su comportamiento así como la realización de comparaciones con el otro proceso Gompertz existente en la literatura.

En el **tercer capítulo** se plantea, en primer lugar, la estimación del modelo con la finalidad de su posterior aplicación a datos reales. Después de analizar las dificultades que ésta plantea, se obtienen las ecuaciones de verosimilitud asociadas a los parámetros del modelo, las cuales no pueden ser resueltas explícitamente. Así, el problema de la obtención de los estimadores máximo verosímiles de los parámetros se aborda a partir de métodos numéricos clásicos como el de Newton-Raphson y un método numérico estocástico como el algoritmo *simulated annealing*. Después de analizar los inconvenientes que éstos presentan, se propone un método recursivo, muy simple desde el punto de vista de la implementación y que proporciona buenos resultados (al menos, a nivel empírico).

A continuación se presenta un estudio de la distribución de variables aleatorias temporales de interés en nuestro modelo: tiempo de primer paso a través de barreras y el tiempo en que se produce la inflexión (hecho que marca un cambio en la pauta de crecimiento y la consecución de un porcentaje determinado éste).

Con respecto a la primera, se estudia en primer lugar aquellas barreras para las que se puede obtener de forma explícita la densidad del tiempo de primer paso. En caso contrario, se plantea abordar dicho problema mediante la resolución numérica de la ecuación integral de Volterra de la cual es solución.

En cuanto a la segunda, en el caso de disponer de una única trayectoria de valores observados, su estudio es equivalente al del tiempo de primer paso por una barrera constante. Para el caso de disponer de múltiples trayectorias con valores iniciales distintos y, consecuentemente, cotas y punto de inflexión distintos, se propone un método alternativo mediante estimación no paramétrica de la densidad.

Se finaliza este capítulo con un estudio de simulación que permite comparar ambas alternativas, en el caso en que la primera sea aplicable.

Por último, en el **cuarto capítulo** abordamos la aplicación, a datos reales, de los resultados del capítulo tercero sobre estimación en el proceso tipo Gompertz introducido. Concretamente trataremos dos aplicaciones encuadradas en el campo económico. La primera trata sobre la ganancia media, por hora trabajada, por sectores de actividad y

categoría profesional en España, mientras que la segunda lo hace sobre la remuneración de los asalariados por comunidad autónoma española. En ambos casos los datos disponibles muestran tendencias sigmoideas con cotas y valores iniciales distintas para cada trayectoria observada, lo cual obedece al patrón de comportamiento descrito por el modelo de difusión Gompertz considerado en esta memoria.

En las dos aplicaciones se sigue un desarrollo paralelo que comienza con el ajuste de un modelo común al conjunto de los datos, esto es, para todas las trayectorias observadas, comprobando a continuación si dicho modelo estimado es asumible como óptimo. En caso contrario se optará por agrupar las trayectorias en bloques homogéneos en los que se refiere a su comportamiento (el criterio de agrupación puede variar según el tipo de dato de cada aplicación) y se ajustará un modelo en cada grupo, lo cual puede mejorar las estimaciones conjuntas anteriores. De esta forma, además, esta estrategia permitirá encontrar agrupaciones con patrones de comportamiento similares.

Las estimaciones de los modelos se realizarán mediante los procedimientos descritos en el capítulo tercero. Asimismo, se mostrará el poder predictivo de los mismos mediante el empleo de las diferentes funciones paramétricas introducidas en dicho capítulo.

Capítulo 1

Modelos de crecimiento

1.1. Estudio de algunas curvas de crecimiento

Como se ha comentado en la introducción, las curvas de crecimiento surgieron al intentar modelizar este tipo de fenómeno, es decir, podemos afirmar que van asociadas a modelos determinísticos de crecimiento, o viceversa, es decir, que los modelos de crecimiento van asociados a dichas curvas. Por ello, aunque nuestro interés reside en los modelos de crecimiento, antes de introducirnos en su estudio, vamos a exponer brevemente las expresiones y características fundamentales de dichas curvas, con especial énfasis en la curva Gompertz ya que es la asociada al modelo que será objeto de estudio fundamental de esta memoria.

1.1.1. Curva exponencial

Comenzamos el estudio de las curvas de crecimiento por la curva exponencial, no sólo debido a que es la primera que surge, históricamente hablando, sino por ser la curva más estudiada dentro de las curvas de crecimiento, tal vez debido a que es la que va asociada al análisis de poblaciones humanas.

La expresión genérica de esta curva es

$$f(t) = ce^{rt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

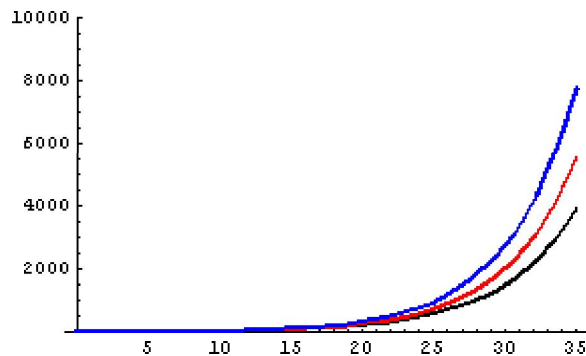
siendo c y r , números reales. A r se le conoce como *razón de crecimiento*.

Dada la naturaleza de los fenómenos que habitualmente son tratados mediante ella, se restringe su estudio en el tiempo a valores superiores a un instante inicial $t_0 \geq 0$ y se considera $c > 0$. Imponiendo que la curva tome el valor $x_0 > 0$ en el instante inicial t_0 , la

expresión que consideraremos desde ahora será

$$f(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (1.1)$$

Esta curva es monótona (creciente si $r \geq 0$ y decreciente si $r \leq 0$), convexa¹ y no acotada.



Gráfica 1.1: Curvas de crecimiento exponencial con $x_0 = 5$, $t_0 = 0$ y $r = 0.19$, $r = 0.20$ y $r = 0.21$

Como se muestra en la gráfica 1.1, la razón de crecimiento r , como su propio nombre indica, determina dentro de la curva la rapidez del crecimiento de esta, es decir, cuanto mayor sea dicha razón más rápido crece la curva.

1.1.2. Curva logística

En segundo lugar estudiamos la curva logística, aunque cronológicamente fue la tercera en aparecer. Fue introducida por Pierre Verhulst [87] como solución de un modelo determinístico propuesto por él. Esta curva también surgió asociada al estudio de crecimiento de poblaciones, pero con ciertas limitaciones sobre la población. La expresión más utilizada de dicha curva es

$$f(t) = \frac{k}{1 + e^{a-rt}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

con $k > 0$ y $r > 0$, en cuyo caso k es el valor límite de la curva cuando t tiende a infinito, verificándose $f(t) \leq k$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Restringiéndonos a valores $t \geq t_0 \geq 0$ y llamando $x_0 = f(t_0) > 0$, al igual que se hizo

¹Entenderemos que una función derivable es convexa si queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto. Si además f es de clase dos, esto equivale a que $f'' \geq 0$. En caso contrario entenderemos que la función es cóncava.

con la curva exponencial, la expresión que consideraremos es

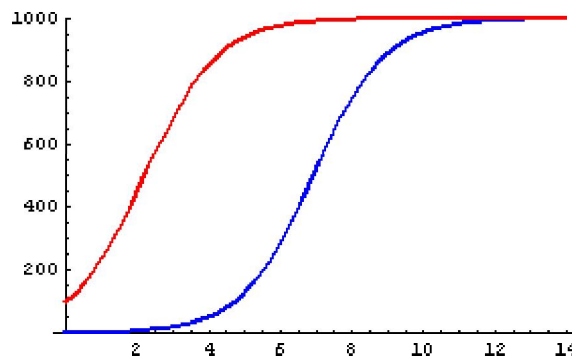
$$f(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{x_0} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}}, \quad t \geq t_0 \quad (1.2)$$

con $r > 0$ y $k > x_0 > 0$.

Esta curva es monótona creciente, acotada y presenta un punto de inflexión (en el rango de valores de t considerados) si $k > 2x_0$, en cuyo caso es

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{k}{x_0} - 1\right)}{r} + t_0, \frac{k}{2} \right)$$

donde pasa de ser convexa a cóncava².



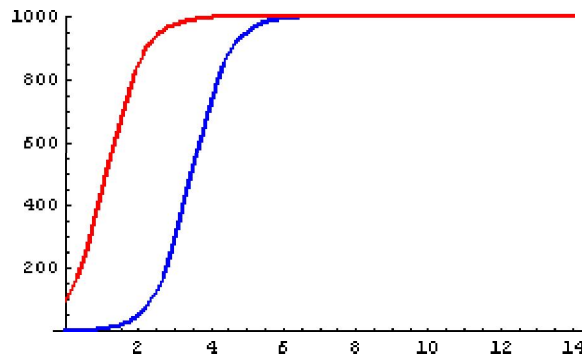
Gráfica 1.2: Curvas de crecimiento logístico con $t_0 = 0$, $k = 1000$, $r = 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 100$.

Un aspecto interesante que destacar de la curva logística es que el valor de la cota es constante e independiente del valor en el instante inicial, como se muestra en las gráficas 1.2 y 1.3. También puede observarse que, al igual que ocurría en el caso de la curva exponencial, r determina la rapidez con que la curva crece hacia su cota.

1.1.3. Curva Gompertz

Por último, vamos a considerar la curva de crecimiento Gompertz, cuyo nombre procede del matemático Benjamin Gompertz. En junio de 1825, Gompertz escribió al matemático Francis Baily ofreciéndole un artículo, [20], para la Real Sociedad de Matemáticos de Londres, que trataba sobre la naturaleza de la expresión de la función de la ley de la

²A este tipo de curvas, crecientes, acotadas y con un punto de inflexión donde se pasa de convexa a cóncava se las conoce como curvas con forma de S o sigmoideas.



Gráfica 1.3: Curvas de crecimiento logístico con $t_0 = 0$, $k = 1000$, $r = 2$, $x_0 = 1$, $x_0 = 100$.

mortalidad humana, y sobre una nueva forma de determinar el valor de lo que él denominaba “Life contingences” (y que podríamos traducir por *imprevistos de la vida*). Este artículo era la continuación de otro suyo sobre el mismo tema y que había sido publicado anteriormente por dicha sociedad.

En dicho artículo Gompertz introdujo la siguiente función,

$$L_x = dg^{q^x}, \quad (1.3)$$

con

$$\begin{aligned} \log g &= \frac{mq^{-a}}{1 - q^r} \\ q &= p^{1/r} \\ m &= \ln L_a - \ln L_{a+r} \\ d &= \frac{L_a}{\epsilon} \\ \ln \epsilon &= \frac{m}{1 - q^r}, \end{aligned}$$

donde por L_x notó el tamaño de la población en el instante x , por a el instante inicial, por r la unidad de salto considerada en el tiempo y por p la razón de la progresión geométrica que hay entre el número de personas vivas en el tiempo.

Es decir, Gompertz demostró que la tasa de mortalidad aumentaba siguiendo una progresión geométrica. A esta ley de crecimiento se la conoce como Ley de Mortalidad de Gompertz.

La curva de Gompertz, tal y como él la introdujo, fue durante mucho tiempo sólo de interés en el campo de los seguros. En 1932, Charles P. Winsor [89] publicó un artículo donde realizó un estudio matemático de la curva Gompertz como curva de crecimiento, indicando su utilidad y sus limitaciones en dicho campo. El motivo que impulsó a Winsor

a realizar este estudio era el creciente interés despertado en varios autores que utilizaban esta curva como curva de crecimiento para el estudio de fenómenos en el campo de la biología y de la economía. Por ejemplo, años más tarde, Laird [44], tras estudiar algunos tumores durante un tiempo suficientemente amplio, concluyó que el modelo exponencial no era totalmente adecuado para la descripción del crecimiento de los mismos (a pesar de que siempre se pensó que el crecimiento de los tumores en condiciones ideales seguía dicho modelo) y que un modelo exponencial modificado podría explicar mejor el crecimiento observado, por lo que propuso el modelo Gompertz.

A la hora de dar una expresión de la curva Gompertz, nos encontramos con multitud de opciones distintas. Esto es debido a que históricamente se ha asignado ese nombre a una gran variedad de curvas, las cuales tienen en común ser dobles exponenciales, a pesar de que Gompertz introdujo su curva como una doble potencial. En concreto, Winsor [89] reescribió la curva originaria de Gompertz (1.3) transformándola en una doble exponencial. Para ello, considerando

$$d = k, \quad g = e^{-e^a}, \quad q = e^{-b},$$

obtuvo la expresión

$$f(t) = ke^{-e^{a-bt}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

con $k > 0$ y $b > 0$, en cuyo caso k es el valor límite de la curva cuando t tiende a infinito, verificándose $f(t) \leq k, \forall t \in \mathbb{R}$.

Restringiéndonos a valores $t \geq t_0 \geq 0$ y llamando $x_0 = f(t_0) > 0$, al igual que se hizo con las curvas anteriores, la expresión que consideraremos es

$$f(t) = k \exp \left\{ \ln \left(\frac{x_0}{k} \right) e^{-b(t-t_0)} \right\}, \quad t \geq t_0 \quad (1.4)$$

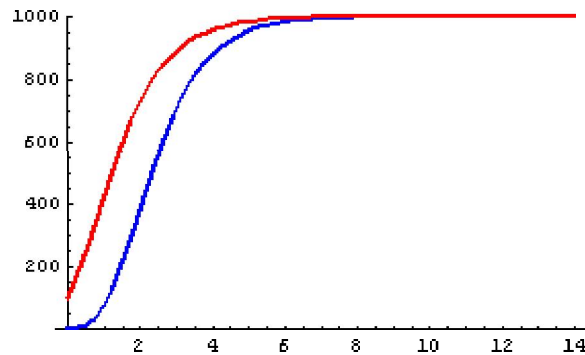
con $b > 0$ y $k > x_0 > 0$.

Esta curva es monótona creciente, acotada y presenta un punto de inflexión (en el rango de valores de t considerados) si $k > x_0 e$, en cuyo caso es

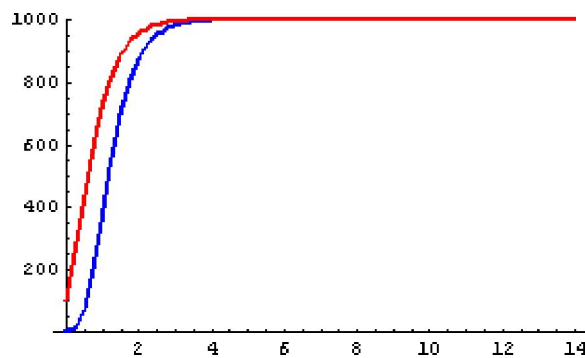
$$\left(\frac{\ln \ln \frac{k}{x_0}}{b} + t_0, \frac{k}{e} \right)$$

donde pasa de ser convexa a cóncava siendo, por tanto, una curva sigmoideal. Al igual que ocurría en la curva logística, la cota (k) es constante e independiente del valor inicial como se muestra en las gráficas 1.4 y 1.5. Notemos que el parámetro b influye en la rapidez con que la curva alcanza la cota, lo que parece indicar cierta similitud entre este parámetro y el parámetro r de las curvas exponencial y logística.

Las curvas logística y Gompertz tienen un crecimiento similar, residiendo su principal diferencia en el porcentaje de crecimiento (en relación con la cota) cuando se alcanza el punto de inflexión. De hecho, en el caso de considerar $t \in \mathbb{R}$, la curva logística alcanza



Gráfica 1.4: Curvas de crecimiento Gompertz (Winsor) con $t_0 = 0$, $k = 1000$, $b = 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 100$.



Gráfica 1.5: Curvas de crecimiento logístico con $t_0 = 0$, $k = 1000$, $b = 2$, $x_0 = 1$, $x_0 = 100$.

la mitad de su crecimiento total en el punto de inflexión, mientras que la Gompertz alcanza aproximadamente el 37%. En el caso que estamos considerando con $t \geq t_0$, estos porcentajes dependen de x_0 , siendo respectivamente

$$50 \left[1 - \frac{x_0}{k - x_0} \right] \% \text{ y aproximadamente } 37 \left[1 - \frac{x_0}{k - x_0} \right] \%,$$

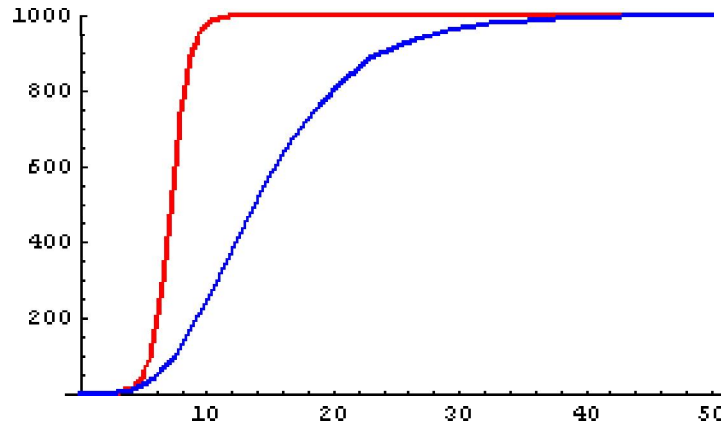
como puede observarse en la gráfica 1.6.

En la literatura sobre el estudio de modelos de crecimiento han surgido otras expresiones de la curva Gompertz. Por ejemplo, Capocelli y Ricciardi [8] usaron

$$f(t) = \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} \right\}, \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (1.5)$$

con $\beta > 0$ y $0 < x_0 < e^{\alpha/\beta}$. Esta expresión surge mediante una reescritura de (1.4) con $k = e^{\alpha/\beta}$ y $b = \beta$.

Dicha curva es, evidentemente, sigmoideal, con cota $e^{\alpha/\beta}$ independiente del valor inicial y presenta un punto de inflexión (en el rango de valores considerado) si $x_0 < e^{\alpha/\beta-1}$, en



Gráfica 1.6: Curvas de crecimiento Gompertz (1.4) y logística (1.2) con $t_0 = 0$, $k = 1000$, $r = 2$, $b = 0.188194$ y $x_0 = 1$

cuyo caso es

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta} - \ln x_0\right)}{\beta} + t_0, e^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \right).$$

Por otro lado, Skiadas [81] consideró la expresión

$$f(t) = \exp \left\{ \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} \right\}, \quad t \geq t_0 \geq 0$$

con $\beta > 0$ y $0 < x_0 < 1$, que es una particularización de la curva (1.5) en el caso $\alpha = 0$.

Por último, Tan [82], al introducir el proceso Gompertz de nacimiento y muerte, consideró la expresión

$$f(t) = x_0 \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \right\}, \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (1.6)$$

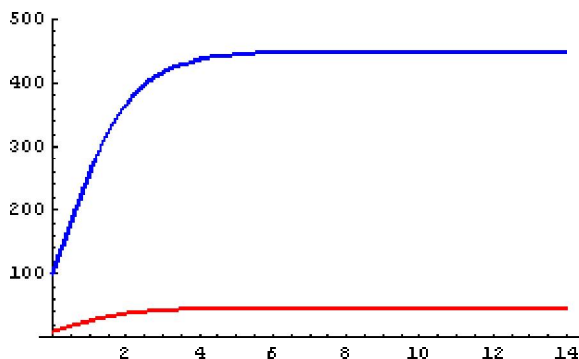
con $\alpha > \beta > 0$ y $x_0 > 0$, la cual se puede obtener a partir de (1.4) tomando $k = x_0 e^{\alpha/\beta}$ y $b = \beta$.

Esta curva es sigmoidea, con cota $k = x_0 e^{\alpha/\beta}$ y punto de inflexión

$$\left(\frac{\ln \frac{\alpha}{\beta}}{\beta} + t_0, x_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \right).$$

La principal diferencia de esta última expresión de la curva Gompertz con las anteriores y con la curva logística, es que la cota depende del valor inicial, como se puede apreciar en la gráfica 1.7.

En el apéndice A se muestra un esquema de las transformaciones y reescrituras que se han ido especificando sobre la curva Gompertz.



Gráfica 1.7: Curvas de crecimiento Gompertz (expresión de Tan) con $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $x_0 = 10$ y $x_0 = 100$.

1.2. Estudio comparativo de curvas. Modelos determinísticos asociados

Como se comentó con anterioridad, las curvas de crecimiento surgen asociadas a una serie de modelos determinísticos. Por ello, una vez que se han estudiado las curvas, una revisión de los modelos asociados a ellas nos puede ayudar a la hora de interpretarlas, estudiarlas más profundamente y compararlas.

1.2.1. La curva exponencial y la curva logística

Siguiendo el mismo orden desarrollado con las curvas, el primer modelo determinístico que estudiamos es el asociado a la curva exponencial. Dicho modelo se denomina modelo Malthusiano y fue propuesto por Thomas R. Malthus [55] como un modelo matemático para el crecimiento de poblaciones humanas las cuales, según Malthus, tienen un crecimiento no acotado. El modelo matemático basado en su idea propone que el tamaño de la población para una generación depende del tamaño de la generación anterior de forma multiplicativa

$$x(t+1) - x(t) = rx(t), \quad r \geq 0^3$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el instante t y r , fertilidad diferencial por unidad de tiempo y conocido también como factor Malthusiano, es el múltiplo que determina la tasa de crecimiento.

La solución de la ecuación del crecimiento Malthusiano, en forma diferencial,

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t),$$

³En general, $r \in \mathbb{R}$, pero nos restringimos a $r \geq 0$ y por lo tanto consideramos sólo el caso creciente ya que se comparará este modelo con los asociados a las curvas logística y Gompertz que han sido consideradas.

con condición inicial $x(t_0) = x_0$ es la curva exponencial (1.1).

El modelo Malthusiano puede usarse para estudiar, por ejemplo, el crecimiento de una nueva especie que llega a una isla donde hay una gran cantidad de comida, condiciones perfectas para la reproducción y no hay depredadores, o cuando un científico comienza a cultivar bacterias bajo condiciones perfectas. Pero este modelo no podría explicar indefinidamente estos fenómenos debido a lo que McArthur y Wilson [62] llamaron el “Equilibrio Natural”: *La naturaleza tiene tendencia a equilibrar las cosas y alcanzar un equilibrio armónico. Si se dejara a la naturaleza sola existiría el equilibrio y las poblaciones permanecerían cerca de él.*

Esto nos indica la importancia del estudio de modelos determinísticos asociados a las curvas de crecimiento acotado.

En segundo lugar, asociado a la curva logística, está el modelo logístico que fue propuesto por Pierre F. Verhulst [87]. Verhulst mostró que el crecimiento de una población no sólo depende del tamaño de la población sino también de la distancia de dicho tamaño a su límite superior. Si denotamos por k al tamaño máximo de la población que un hábitat puede soportar, la población crecerá rápidamente si está muy por debajo de k , pero conforme se aproxima a k el crecimiento irá decayendo. Con esta idea en mente, Verhulst modificó la ecuación del modelo Malthusiano haciendo que el tamaño de la población fuera proporcional tanto a la población previa como al término

$$\frac{k - x(t)}{k}$$

proporcionando el modelo ⁴

$$x(t+1) - x(t) = rx(t) \left[1 - \frac{x(t)}{k} \right], \quad r > 0. \quad (1.7)$$

Esta ecuación es conocida como ecuación logística en diferencias, cuya expresión diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left[1 - \frac{x(t)}{k} \right],$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$, tiene por solución la curva logística (1.2).

Este modelo es útil para mostrar los efectos de los mecanismos dependientes de la densidad en el crecimiento de la población. Sin embargo, su utilidad en las poblaciones reales es limitada debido a que las dinámicas de crecimiento de estas son complejas y es difícil obtener un valor real para k en un hábitat dado.

⁴El modelo determinístico asociado a la curva logística se puede reescribir como

$$x(t+1) - x(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)^2, \quad \alpha, \beta > 0$$

donde $r = \alpha$ y $k = \alpha/\beta$. Posteriormente se verá la utilidad de esta versión del modelo.

Una vez especificados los modelos determinísticos asociados a las curvas exponencial y logística, veamos un resumen de las propiedades y características de ambas curvas.

	Curva Exponencial	Curva Logística
Modelo	$x(t+1) - x(t) = rx(t)$ $r \geq 0$	$x(t+1) - x(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$ $r > 0, \quad k > x_0 > 0$
Ecuación diferencial	$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t), \quad x(t_0) = x_0$	$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right), \quad x(t_0) = x_0$
Curva solución	$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$	$x(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{x_0} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}}$
Monotonía	Creciente	Creciente
Cota superior	No tiene	k
Curvatura	Convexa	Convexa, Cóncava
Punto de inflexión	No tiene	$\left(\frac{\ln\left(\frac{k}{x_0} - 1\right)}{r} + t_0, \frac{k}{2}\right)$

Cabe destacar que, autores como May ([57]-[60]) y May y Oster [61] realizaron un estudio del modelo asociado a la curva exponencial y a la curva logística para describir el crecimiento de poblaciones, entre otros modelos. Otro autor que realizó un profundo estudio de la ley de crecimiento logístico fue Feller [12].

1.2.2. La curva logística y la curva Gompertz (versión de Winsor)

Por último, el modelo determinístico asociado a la curva Gompertz tratada por Winsor (1.4) es,

$$x(t+1) - x(t) = bx(t)(\ln k - \ln x(t)), \quad b > 0 \quad (1.8)$$

que origina la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = bx(t)(\ln k - \ln x(t)),$$

cuya solución, con condición inicial $x(t_0) = x_0$, es dicha curva.

Si observamos los modelos asociados a las curvas logística (1.7) y Gompertz tratada por Winsor (1.8), vemos que se aprecia una fuerte similitud que se pone aún más de manifiesto reescribiendo (1.8) como

$$x(t+1) - x(t) = rx(t) \left(1 - \frac{\ln x(t)}{\ln k} \right),$$

con $r = b \ln k$.

Recordemos que anteriormente ya se había apreciado que debía haber alguna relación entre los parámetros r y b , ya que ambos parámetros influyen en la rapidez con que las curvas alcanzan su cota.

En la la gráfica 1.6 se ha representado una curva logística y una curva Gompertz versión de Winsor para un valor de r determinado. En dicha gráfica se pueden apreciar las características estudiadas de ambas curvas y, a su vez, se pueden comparar las dos curvas.

Veamos ahora, al igual que para la curva exponencial y la logística, una tabla resumen de las propiedades y características de las curvas que estamos estudiando.

	Curva Logística	Curva Gompertz (Winsor)
Modelo	$x(t+1) - x(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$ $r > 0, k > x_0 > 0$	$x(t+1) - x(t) = rx(t) \left(1 - \frac{\ln x(t)}{\ln k}\right)$ $r = b \ln k > 0, k > x_0 > 0$
Ecuación diferencial	$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$ $x(t_0) = x_0$	$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{\ln x(t)}{\ln k}\right)$ $x(t_0) = x_0$
Curva solución	$x(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{x_0} - 1\right) e^{-r(t-t_0)}}$	$x(t) = k \exp \left(\ln \left(\frac{x_0}{k} \right) e^{-\frac{r}{\ln k}(t-t_0)} \right)$
Monotonía	Creciente	Creciente
Cota superior	k	k
Curvatura	Convexa, Cóncava	Convexa, Cóncava
Punto de inflexión	$\left(\frac{\ln \left(\frac{k}{x_0} - 1 \right)}{r} + t_0, \frac{k}{2} \right)$	$\left(\frac{\ln \ln \frac{k}{x_0} \ln k}{r} + t_0, \frac{k}{e} \right)$
% crecimiento en el punto de inflexión	$50 \left[1 - \frac{x_0}{k - x_0} \right]$	$37 \left[1 - \frac{x_0}{k - x_0} \right]$

Laird ([44]-[51]) usó el modelo Gompertz para describir el crecimiento no sólo de tumores sino también de organismos normales durante el crecimiento. El modelo Gompertz también se usó para describir el crecimiento de fetos humanos (Mc Credite [63]), de peces (Silliman [78]) y de tumores experimentales (Simpson-Herren y Lloyd [79]).

Nota 1.2.1. *El modelo determinístico asociado a la curva Gompertz tratada por Capocelli y Ricciardi (1.5) puede obtenerse como caso particular del modelo asociado a la curva Gompertz de Winsor. Para ello basta utilizar la reescritura de los parámetros especificada anteriormente ($k = e^{\frac{\alpha}{\beta}}$, $b = \beta$) en el modelo determinístico (1.8) obteniéndose:*

$$x(t+1) - x(t) = \beta x(t) \left(\frac{\alpha}{\beta} - \ln x(t) \right), \quad \beta > 0$$

Por ello no realizamos un estudio específico sobre él. Se puede encontrar un estudio de este modelo y del logístico, basado en sus ecuaciones diferenciales de primer orden, Nobile et al. [69].

1.3. Modelos aleatorios asociados

Hasta ahora se ha considerado la modelización del crecimiento sólo desde un punto de vista determinístico, pero el crecimiento es un fenómeno muy complejo cuya descripción cuantitativa puede requerir la especificación detallada de múltiples factores que no siempre son perfectamente conocidos o cuantificables. Ello imposibilita encontrar un modelo determinístico que represente completamente el fenómeno, recurriéndose en estos casos a modelos estocásticos.

Una gran variedad de modelos estocásticos, y en particular procesos de difusión, han sido profusamente empleados en las últimas décadas para analizar el comportamiento de multitud de fenómenos, como por ejemplo el crecimiento dentro de una gran variedad de campos.

Una forma habitual de obtener modelos estocásticos, partiendo de modelos determinísticos, es introducir una fluctuación aleatoria en ellos. En nuestro caso, para los modelos de crecimiento, se reemplazará la tasa de crecimiento por la suma de un término constante y un proceso Gaussiano delta-correlado, obteniéndose un modelo estocástico cuya solución, en ausencia de ruido, es la curva del modelo determinístico en cuestión. Este procedimiento es equivalente a la introducción de una función de regulación aleatoria en el modelo malthusiano.

Un planteamiento alternativo consiste en la búsqueda de modelos estocásticos cuya función media coincida con la curva del modelo determinístico de partida.

Presentamos a continuación algunos modelos estocásticos asociados a las curvas de crecimiento estudiadas. En concreto, con respecto a la curva exponencial, aunque diversos autores como Lewontin y Cohen [54] han estudiado procesos discretos, nos centramos en el proceso de difusión lognormal como el más representativo dentro de los modelos continuos. Con respecto a la curva logística, estudiaremos el proceso de difusión logístico. Por último, con respecto a la curva Gompertz, objeto fundamental de nuestro estudio, trataremos un proceso Gompertz propuesto por Capocelli y Ricciardi (siguiendo la primera metodología citada) y un proceso de nacimiento y muerte Gompertz, obtenido por Tan (siguiendo la segunda alternativa). Finalmente, dado que las curvas Gompertz consideradas por Capocelli y Ricciardi y Tan tienen propiedades y, por tanto aplicaciones, distintas, planteamos finalmente el objetivo fundamental de esta memoria: la obtención de un proceso de difusión asociado a la curva considerada por Tan siguiendo la primera metodología citada y que además, cumple la condición de la segunda.

1.3.1. Proceso lognormal

El primer modelo estocástico que tratamos, siguiendo el orden establecido, es el proceso lognormal que está asociado al modelo de crecimiento (no acotado) malthusiano.

Para obtener dicho proceso, Capocelli y Ricciardi [7] desarrollaron una metodología que se ajusta a la primera alternativa expuesta con anterioridad, partiendo de la ecuación diferencial determinística del modelo malthusiano,

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t), & r &\geq 0 \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{1.9}$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el instante t , r es la tasa o razón de crecimiento⁵ (o fertilidad) intrínseca y x_0 es el tamaño inicial de la población.

A continuación, transformaron dicha ley determinística en un modelo estocástico reemplazando la tasa de crecimiento por la suma de un término constante y un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero con densidad espectral σ^2 (ruido blanco)

$$r \rightarrow \alpha + \Lambda(t),$$

donde $\alpha > 0$ es una constante, mientras que $\Lambda(t)$, para cualquier t fijo, es una variable aleatoria normalmente distribuida y tal que

$$\begin{aligned}E[\Lambda(t)] &= 0 \\ Cov[\Lambda(t_1), \Lambda(t_2)] &= E[\Lambda(t_1), \Lambda(t_2)] = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Así, la ecuación (1.9) queda en la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} - \alpha x(t) &= x(t)\Lambda(t) \\ x(t_0) &= x_0,\end{aligned}$$

o, como es habitual en la notación de ecuaciones diferenciales estocásticas,

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t),\tag{1.11}$$

donde $\sigma > 0$ y $W(t)$ representa el proceso de Wiener estándar.

La interpretación del procedimiento realizado es que se supone que el crecimiento exponencial se ve perturbado por factores de cambio que representan el efecto del ambiente en el crecimiento de la población.

⁵El caso $r < 0$ no se considera debido a que nos centramos en el caso de crecimiento positivo.

La solución de la ecuación (1.11) es un proceso de difusión $\{X(t) : t \geq t_0 \geq 0\}$ que toma valores en \mathbb{R}^+ y con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x) &= mx \\ A_2(x) &= \sigma^2 x^2, \end{aligned} \tag{1.12}$$

siendo $m = \alpha$ o $m = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ según se haya considerado, en la resolución de la ecuación, la integral estocástica de Itô o de Stratonovic, respectivamente.

Este modelo es apropiado para describir, por ejemplo, situaciones como las del crecimiento de bacterias en un entorno no restringido, teniendo cada individuo igual probabilidad de morir o reproducirse en cualquier instante.

La función de densidad de transición del proceso obtenido, $f(x, t|x_0, t_0)$, satisface la ecuación de Fokker-Planck o adelantada

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [mxf] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f], \quad 0 < x < \infty \tag{1.13}$$

y la ecuación de Kolmogorov o atrasada

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + mx_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \sigma^2 x_0^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \quad 0 < x < \infty$$

con condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0), \tag{1.14}$$

que determina de forma única $f(x, t|x_0, t_0)$ ⁶.

Comprobemos a continuación que la solución de la ecuación de Fokker-Planck, en ausencia de ruido, coincide con la curva solución del modelo determinístico de partida. Para ello resolvemos la ecuación de primer orden resultante de tomar límite, cuando la componente ruido llega a ser infinitamente pequeña, $\sigma^2 \rightarrow 0$, en la ecuación adelantada con la condición inicial (1.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha x f] \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0) &= \delta(x - x_0), \end{aligned}$$

y obtenemos

$$f(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0 e^{\alpha(t-t_0)}),$$

es decir, la población crece siguiendo una curva exponencial.

⁶La unicidad se deduce del estudio de las barreras del proceso. Mediante los criterios de clasificación de Feller ([13], [14]) se puede comprobar que 0 e $+\infty$ son barreras naturales, y por tanto, según el estudio realizado por Feller, la función de densidad de transición del proceso queda determinada de forma única por la condición inicial.

En general, la función de densidad de transición del proceso, solución única de las ecuaciones de difusión, con la condición inicial especificada, es

$$f(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{\left[\ln x - \ln x_0 - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0)\right]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right),$$

esto es,

$$X(t)|X(t_0) = x_0 \sim \Lambda_1\left(\ln x_0 + \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0), \sigma^2(t-t_0)\right), \quad t \geq t_0.$$

Nota 1.3.1. Ricciardi, [72], obtuvo también el proceso lognormal como límite de un modelo estocástico discreto de crecimiento de poblaciones cuando el intervalo de tiempo entre las sucesivas generaciones se hace tender a cero. Para ello consideró el modelo determinístico malthusiano

$$\begin{aligned} Y_{(n+1)\tau} - Y_{n\tau} &= r\tau Y_{n\tau}, & (n = 0, 1, \dots) \\ Y_0 &= x_0, \end{aligned}$$

donde $Y_{n\tau}$ representa el tamaño de la población en la n -ésima generación, τ el intervalo de tiempo entre sucesivas generaciones, x_0 el tamaño inicial de la población y r la fertilidad diferencial por unidad de tiempo. Introduciendo a este modelo determinístico ambiente aleatorio, mediante la consideración de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función media $r\tau$, y tomando límite cuando τ tiende a cero se obtiene el proceso lognormal.

En los últimos años se ha producido un importante avance en el estudio de este proceso, centrándose principalmente en la inferencia. La inferencia ha sido tratada empleando tanto muestreo continuo (Basawa y Rao [4]), considerando la difusión como solución de la ecuación diferencial estocástica, como muestreo discreto de las trayectorias basándose en la función de verosimilitud de la muestra construida a partir de la densidad de transición de la difusión. El caso de factores exógenos basado en muestreo discreto ha sido tratado por Tintner y Gómez [84] y Gutiérrez et al. [21] y generalizado, al caso de la difusión en su versión multivariante, tratando la estimación máximo verosímil de los parámetros y contrastes de significación de los factores exógenos (Gutiérrez et al. [23], [26]). Otras cuestiones adicionales de interés han sido el estudio de tiempos de primer paso (Gutiérrez et al. [25], [27], [29]) así como el estudio teórico de la distribución de la tendencia y función de covarianza estimada del proceso (en su versión univariante), tanto en el caso de la estimación máximo verosímil como la estimación insesgada de mínima varianza (UMVUE) y su aplicación en el campo económico (Gutiérrez et al. [28], [30], [31] y [32]), así como la obtención de bandas de confianza para la tendencia.

Más recientemente se han estudiado métodos alternativos para la obtención del proceso lognormal con factores exógenos como caso particular de técnicas generales de obtención de procesos de difusión no homogéneos (Gutiérrez et al. [33], [34]). Además, se ha estudiado el proceso lognormal con factores exógenos en el campo de la predicción (Gutiérrez et al. [32]) y se ha aplicado un caso particular de dicho proceso, en concreto el proceso de difusión lognormal con factores exógenos polinómicos, para la predicción en ausencia de información externa (Gutiérrez et al. [35], [36], [37]).

1.3.2. Proceso logístico

El segundo modelo estocástico que vamos a estudiar es el asociado al modelo determinístico logístico. Este modelo tiene utilidad a la hora de tratar con situaciones más realistas donde se tenga en cuenta la existencia de una serie de factores que regulan o restringen el crecimiento de la población. Dicha regulación puede ser debida a diversos factores, como la limitación de comida y el espacio disponible, la acumulación de productos tóxicos, o el comportamiento territorial de los parientes, como se puede ver en Crow y Kimura [10].

Siguiendo a Capocelli y Ricciardi [8], si se conocen los mecanismos de regulación debidos a dichos factores, se puede escribir una ecuación de crecimiento que podría ser siempre representada por la ecuación de Langevin,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t)[1 - \varphi(x(t), t)], \quad (1.15)$$

donde $\varphi(x, t)$ es la función de regulación que implica algunos cambios en la tasa de crecimiento con el tamaño de la población y con el tiempo.

Desde este punto de vista, el proceso logístico puede obtenerse considerando una función de regulación particular

$$\varphi(x, t) = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{1}{\alpha} \Lambda(t), \quad \alpha, \beta > 0$$

donde, como anteriormente en el caso del proceso lognormal, $\Lambda(t)$ es el ruido Gaussiano definido en (1.10).

Este procedimiento es equivalente a considerar la ecuación determinística de crecimiento logístico (ver nota 4 a pie de página, pág. 15)

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha x(t) - \beta x^2(t), & \alpha, \beta > 0 & \quad (\alpha/\beta > x_0) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el instante t , α es la tasa de crecimiento, x_0 es el tamaño inicial de la población, k es el tamaño máximo que puede alcanzar la población

y $k = \alpha/\beta$ (la restricción $\alpha/\beta > x_0$ proviene de la restricción $k > x_0$ en la curva logística considerada), y a continuación se cambia la tasa de crecimiento α por la suma

$$\alpha + \Lambda(t),$$

dando lugar a la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \alpha X(t) - \beta X^2(t) + \sigma X(t)dW(t). \quad (1.16)$$

La interpretación de este procedimiento es la consideración de poblaciones, todas caracterizadas por el mismo número inicial de individuos, cuyo crecimiento está aleatoriamente alterado por la presencia de factores de cambio y que, a su vez, tienen una restricción o regulación en el crecimiento.

La solución de la ecuación (1.16) es un proceso de difusión $\{X(t) : t \geq t_0 \geq 0\}$ con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x) &= mx - \beta x^2 \\ A_2(x) &= \sigma^2 x^2, \end{aligned}$$

siendo $m = \alpha$ o $m = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ según se haya considerado, en la resolución de la ecuación, la integral estocástica de Itô o de Stratonovic, respectivamente.

La función de densidad de transición $f(x, t|x_0, t_0)$ satisface la ecuación de Fokker-Planck o adelantada

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(m - \beta x) x f] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f], \quad 0 < x < \infty \quad (1.17)$$

y la atrasada o de Kolmogorov

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + (m - \beta x_0) x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \sigma^2 x_0^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \quad 0 < x_0 < \infty \quad (1.18)$$

con condición inicial $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$.

Comprobemos a continuación que la solución de la ecuación de Fokker-Planck, en ausencia de ruido, coincide con la curva solución del modelo determinístico de partida. Para ello resolvemos la ecuación de primer orden resultante de tomar límite, cuando la componente ruido llega a ser infinitamente pequeña, $\sigma^2 \rightarrow 0$, en la ecuación adelantada con la condición inicial anterior, o sea

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [(m - \beta x) x f] \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t|x_0, t_0) &= \delta(x - x_0), \end{aligned}$$

obteniéndose

$$f(x, t|x_0, t_0) = \delta \left(x - \frac{m/\beta}{1 + \left(\frac{m}{\beta x_0} - 1\right) e^{-\alpha(t-t_0)}} \right),$$

lo cual implica que la población crece de acuerdo con la curva logística con valor asintótico $k = m/\beta$.

Sin embargo, cuando la intensidad del ruido no se anula, no se conoce una solución exacta para las ecuaciones (1.17) y (1.18), a pesar de los esfuerzos de diversos autores, como Levins [53], motivados por la importancia de este modelo dentro del campo del crecimiento de poblaciones.

El problema de desconocer solución exacta para las ecuaciones de difusión del proceso logístico impulsó a Capocelli y Ricciardi [8] a introducir un nuevo modelo para el crecimiento de poblaciones en entornos aleatorios cuyo interés reside en que, por un lado, el modelo retiene las principales características de las ecuaciones (1.17) y (1.18) en el sentido de que, en ausencia de ruido, se reduce a una ley de crecimiento muy similar a la ley logística y, por otro lado, en esta ocasión el modelo puede ser obtenido de forma exacta para valores arbitrarios de la intensidad de ruido σ^2 . Este nuevo modelo estocástico es el que surgirá asociado al modelo determinístico de la curva Gompertz que introdujeron Capocelli y Ricciardi (1.5) y que se estudiará en la siguiente sección.

Nota 1.3.2. Ricciardi [72] desarrolló la obtención del proceso logístico a partir del modelo discreto de crecimiento logístico, de forma análoga a como se ha detallado para el proceso lognormal.

1.3.3. Procesos asociado a la curva Gompertz

Como se comentó en el estudio de la curva Gompertz, no existe una única expresión de la misma. Por ello existen diversos modelos estocásticos asociados a dicha curva, entre los que destacamos un proceso de difusión propuesto por Capocelli y Ricciardi [8] siguiendo la metodología expuesta en las secciones anteriores, y un proceso de nacimiento y muerte propuesto por Tan, [82], obtenido al imponer que la función media de dicho proceso sea la curva (1.6) considerada por él.

Proceso propuesto por Capocelli y Ricciardi

Como ya se especificó al estudiar el proceso logístico, debido a la imposibilidad de obtener solución exacta para las ecuaciones de difusión de dicho proceso, Capocelli y Ricciardi [8] introdujeron un nuevo modelo para el crecimiento de poblaciones en entornos aleatorios con características similares al crecimiento logístico y que pueda obtenerse de forma explícita.

Para ello partieron del proceso lognormal y modificaron su media infinitesimal, incluyendo un término proporcional a $x \ln x$ y mantuvieron igual la varianza infinitesimal, obteniendo la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(\alpha - \beta \ln x) x f] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f], \quad 0 < x < \infty$$

cuya solución, en ausencia de ruido y con condición inicial $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$, es

$$f(x, t | x_0, t_0) = \delta \left(x - \exp \left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} \right) \right),$$

lo que implica

$$x(t) = \exp \left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} \right).$$

Es decir, el tamaño de la población está especificado de forma única en cualquier tiempo dado por la curva de crecimiento Gompertz introducida por Capocelli y Ricciardi (1.5), cuyo comportamiento es muy similar a la curva logística.

Notemos que la principal diferencia con el modelo logístico obtenido en la sección anterior es la sustitución, en la media infinitesimal, del término proporcional a x^2 por un término proporcional a $x \ln x$. Ello conduce a un crecimiento más rápido para valores grandes de x .

Interpretando σ^2 , como el coeficiente de intensidad del ruido Gaussiano $\Lambda(t)$ (1.10), el procedimiento anterior es equivalente a considerar la ecuación de Langevin (1.15), con la siguiente elección de la función de regulación

$$\varphi(x, t) = \frac{\beta}{\alpha} \ln x - \frac{1}{\alpha} \Lambda(t),$$

o, equivalentemente, considerar la ecuación determinística de crecimiento Gompertz (ver nota 1.2.1)

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha x(t) - \beta x(t) \ln x(t), & \alpha, \beta > 0 \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

y sustituir la tasa de crecimiento α por $\alpha + \Lambda(t)$, donde $\Lambda(t)$ es un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero y densidad espectral σ^2 , dando lugar a la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = (\alpha - \beta \ln X(t))X(t) dt + \sigma X(t) dW(t),$$

cuya solución es un proceso de difusión $\{X(t) : t \geq t_0 \geq 0\}$ con valores en $(0, \infty)$ y momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x) &= mx - \beta x \ln x \\ A_2(x) &= \sigma^2 x^2, \end{aligned} \tag{1.19}$$

siendo $m = \alpha$ o $m = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ según se haya considerado, en la resolución de la ecuación, la integral estocástica de Itô o de Stratonovic, respectivamente. A este proceso lo denominaremos proceso de difusión Gompertz propuesto por Capocelli y Ricciardi.

Este proceso ha sido objeto de estudio por diversos autores. Nafidi [68] obtuvo resultados sobre inferencia, lo extendió al caso multivariante y consideró una versión no homogénea a partir de la introducción de funciones dependientes del tiempo en los momentos infinitesimales del proceso. Gómez y Buendía [19] han estudiado la versión de Itô de este proceso Gompertz destacando que el proceso lognormal puede obtenerse como un caso particular de él. Skiadas, en [80] y [81], consideró un proceso estocástico Gompertz particular. Finalmente, Gutiérrez et al. [33], [34] propusieron métodos alternativos para la obtención de la versión no homogénea del proceso Gompertz introducido por Capocelli y Ricciardi y Gutiérrez et al. [38] realizaron un estudio sobre inferencia en procesos Gompertz de tipo no homogéneo mediante nuestro discreto.

Dado nuestro interés en este modelo, presentamos un breve resumen de algunas de sus características:

- Momentos infinitesimales:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= mx - \beta x \ln x, \quad m, \beta > 0 \\ A_2(x) &= \sigma^2 x^2. \end{aligned}$$

- 0 e ∞ son barreras naturales.
- Función de densidad de transición:

$$\begin{aligned} f(x, t|y, s) &= \frac{1}{x \sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)})}} \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\ln x - \ln y e^{-\beta(t-s)} - \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-s)}) \right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)})} \right), \quad t \geq s \end{aligned}$$

es decir $X(t)|X(s) = y, t \geq s$, se distribuye según una ley lognormal

$$\Lambda_1 \left[\ln y e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-s)}); \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)}) \right].$$

- Distribuciones marginales unidimensionales:

- Distribución inicial degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1$:

$$X(t) \sim \Lambda_1(\mu, \Sigma), \quad \forall t \geq t_0$$

donde

$$\begin{aligned}\mu &= \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \\ \Sigma &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-t_0)}).\end{aligned}$$

- Distribución inicial lognormal, $X(t_0) \sim \Lambda(\mu_0; \sigma_0^2)$:

$$X(t) \sim \Lambda_1(\mu, \Sigma), \quad \forall t \geq t_0$$

donde

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \\ \Sigma &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-t_0)}) + \sigma_0^2 e^{-2\beta(t-t_0)}.\end{aligned}$$

- Distribuciones marginales bidimensionales:

- Distribución inicial degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1$:

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2 \left(\mu, \frac{\sigma^2}{2\beta} \Sigma \right), \quad \forall t, s \geq t_0$$

donde

$$\begin{aligned}\mu &= \begin{pmatrix} \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{m - \sigma^2/2}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \\ \ln x_0 e^{-\beta(s-t_0)} + \frac{m - \sigma^2/2}{\beta} (1 - e^{-\beta(s-t_0)}) \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\beta(t-t_0)} & e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t-t_0)} e^{-\beta(s-t_0)} \\ e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t-t_0)} e^{-\beta(s-t_0)} & 1 - e^{-2\beta(s-t_0)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- Distribución inicial lognormal, $X(t_0) \sim \Lambda(\mu_0; \sigma_0^2)$:

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma), \quad \forall t, s \geq t_0$$

donde

$$\begin{aligned}\mu &= \begin{pmatrix} \mu_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{m - \sigma^2/2}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \\ \mu_0 e^{-\beta(s-t_0)} + \frac{m - \sigma^2/2}{\beta} (1 - e^{-\beta(s-t_0)}) \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \\ \Sigma_{11} &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-t_0)}) + \sigma_0^2 e^{-2\beta(t-t_0)} \\ \Sigma_{12} = \Sigma_{21} &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t-t_0)} e^{-\beta(s-t_0)}) + \sigma_0^2 e^{-2\beta(t-t_0)} e^{-2\beta(s-t_0)} \\ \Sigma_{22} &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(s-t_0)}) + \sigma_0^2 e^{-2\beta(s-t_0)}.\end{aligned}$$

■ Función media y covarianza:

- Distribución inicial degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1: \forall t, s \geq t_0$

$$m(t) = E[X(t)] = \exp \left(\ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{4\beta} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}] \right),$$

$$R(t, s) = Cov[X(t), X(s)] = \exp \left(\ln x_0 [e^{-\beta(t-t_0)} + e^{-\beta(s-t_0)}] + \frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} [2 - e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}] + \frac{\sigma^2}{4\beta} [2 - e^{-2\beta(t-t_0)} - e^{-2\beta(s-t_0)}] \right) \left[\exp \left(\frac{\sigma^2}{2\beta} [e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t-t_0)} \times e^{-\beta(s-t_0)}] \right) - 1 \right].$$

- Distribución inicial lognormal, $X(t_0) \sim \Lambda(\mu_0; \sigma_0^2): \forall t, s \geq t_0$

$$m(t) = E[X(t)] = \exp \left(\mu_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-t_0)}) + \sigma_0^2 e^{-2\beta(t-t_0)} \right] \right),$$

$$R(t, s) = Cov[X(t), X(s)] = \exp \left(\mu_0 [e^{-\beta(t-t_0)} + e^{-\beta(s-t_0)}] + \frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} [2 - e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}] + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma^2}{2\beta} (2 - e^{-2\beta(t-t_0)} - e^{-2\beta(s-t_0)}) + \sigma_0^2 (e^{-2\beta(t-t_0)} + e^{-2\beta(s-t_0)}) \right] \right) \left[\exp \left(\frac{\sigma^2}{2\beta} [e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t-t_0)} e^{-\beta(s-t_0)}] + \sigma_0^2 e^{-\beta(t-t_0)} \times e^{-\beta(s-t_0)} \right) - 1 \right].$$

■ Función moda y de cuantiles:

- Distribución inicial degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1: \forall t \geq t_0$

$$M_o(t) = Moda[X(t)] = \exp \left(\ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) - \frac{\sigma^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}] \right),$$

$$C_\alpha(t) = Cuantil_\alpha[X(t)] = \exp \left(\ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}]} \right),$$

donde $z_{1-\alpha}$ es el valor de una normal estándar que deja a la derecha una probabilidad $1 - \alpha$.

- Distribución inicial lognormal, $X(t_0) \sim \Lambda(\mu_0; \sigma_0^2): \forall t \geq t_0$

$$M_o(t) = \text{Moda}[X(t)] = \exp\left(\mu_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) - \frac{\sigma^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}] - \sigma_0^2 e^{-2\beta(t-t_0)}\right),$$

$$C_\alpha(t) = \text{Cuantil}_\alpha[X(t)] = \exp\left(\mu_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \left(\frac{m - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}] + \sigma_0^2 e^{-2\beta(t-t_0)}}\right).$$

Proceso estocástico Gompertz de nacimiento y muerte propuesto por Tan

Tan, [82], justifica la introducción del proceso estocástico Gompertz de nacimiento y muerte como una extensión del modelo de crecimiento determinístico Gompertz, aumentando así el potencial de sus aplicaciones.

Consideró un proceso no homogéneo de nacimiento y muerte con tasa de nacimiento $b(t)$ y tasa de muerte $d(t)$, siendo $b(t)$ y $d(t)$ funciones continuas no negativas, esto es, para $j = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} P\{X(t + \Delta t) = j + 1 | X(t) = j\} &= jb(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{X(t + \Delta t) = j - 1 | X(t) = j\} &= jd(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = j\} &= 1 - j(b(t) + d(t))\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

y definió el proceso de Gompertz de nacimiento y muerte como aquel que verifica

$$E[X(t) | X(t_0) = x_0] = x_0 \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right),$$

es decir, si la función esperanza condicionada de $X(t)$, dado $X(t_0) = x_0$, es una curva Gompertz (según Tan) con parámetros α y β . Además, dio una condición necesaria y suficiente para que este hecho se verifique,

Teorema 1.3.1. *Sea $\gamma(t) = b(t) - d(t)$. Entonces el proceso $X(t)$ definido en (1.20) es un proceso estocástico Gompertz de nacimiento y muerte con tasa de nacimiento $b(t)$ y tasa de muerte $d(t)$, y parámetros α y β si y sólo si $\gamma(t)$ satisface la siguiente ecuación*

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = -\beta\gamma(t), \quad \text{con} \quad \gamma(t_0) = b(t_0) - d(t_0) = \alpha.$$

Como ya se comentó, esta es una de las posibilidades descritas para obtener procesos de difusión asociados a modelos determinísticos. A diferencia de lo desarrollado para los modelos anteriores, cuyas soluciones de la ecuaciones de Fokker-Planck, en ausencia de ruido, son las curvas determinísticas correspondientes, ahora se busca un proceso cuya función media sea la curva. Esto tiene un especial sentido si se buscan modelos estocásticos con fines predictivos, ya que la función media suele ser la función más utilizada a la hora de predecir.

Las dos alternativas no son excluyentes, sino que parten de objetivos completamente distintos pero no incompatibles. Esto nos hace pensar que la combinación de ambas opciones puede originar procesos estocásticos asociados a modelos determinísticos “mejores” en algún sentido y que permita, por ejemplo, encontrar procesos aleatorios con espacio de estados continuos (en particular difusiones) cuya función media coincida con una curva concreta.

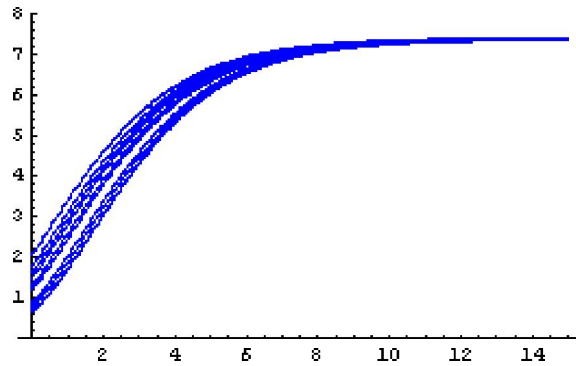
Un nuevo modelo asociado a la curva Gompertz

Centrándonos en la curva Gompertz, que será el objeto de nuestro estudio a partir de este momento, sabemos que existe un proceso de difusión (el propuesto por Capocelli y Ricciardi) asociado a la expresión de la curva Gompertz (1.5), y un proceso de nacimiento y muerte Gompertz (introducido por Tan) asociado a la expresión de la curva Gompertz (1.6).

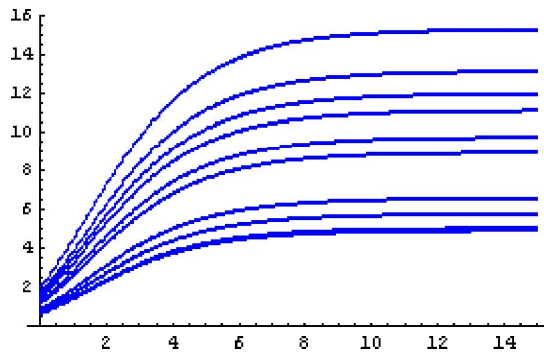
Pero si volvemos al estudio hecho de ambas curvas, hay una característica que las diferencia claramente: sus cotas. En efecto, como ya se vio, la curva Gompertz de Capocelli y Ricciardi sólo depende de los parámetros α y β , $k = e^{\alpha/\beta}$, mientras que la cota de la curva Gompertz de Tan depende a su vez del instante inicial, $k = x_0 e^{\alpha/\beta}$.

Esta distinción no implicaría nada si trabajamos con una única trayectoria de datos, puesto que en dicho caso habría un único instante inicial y una única cota, pero en el caso de trayectorias múltiples sí existen diferencias claras. Si tuviéramos datos de trayectorias múltiples, todas con la misma cota, como se muestra en la gráfica 1.8, es evidente que el proceso de difusión Gompertz de Capocelli y Ricciardi sería el adecuado para tratar dichos datos, pero si las trayectorias presentaran cotas distintas según su dato inicial como se muestra en la gráfica 1.9, dicho proceso no sería el mejor a la hora de estudiar los datos. En este caso sería de gran utilidad disponer de un proceso de difusión asociado a la curva Gompertz de Tan.

Ese será el objetivo de esta memoria: la obtención y estudio de un proceso de difusión asociado a la curva Gompertz tratada por Tan. Para obtener dicho proceso seguiremos la misma metodología desarrollada por Capocelli y Ricciardi para obtener su modelo estocástico, es decir buscaremos un proceso cuya solución de la ecuación de difusión adelantada o de Fokker-Planck en ausencia de ruido sea la curva Gompert en la versión de Tan. Además, comprobaremos que el proceso así construido verifica la condición que



Gráfica 1.8: Múltiples trayectorias de datos con la misma cota.



Gráfica 1.9: Múltiples trayectorias de datos con cotas distintas.

Tan impuso a su proceso, o sea, que la función $E[X(t)|X(t_0) = x_0]$ coincida con la curva considerada, propiedad interesante para fines predictivos y que no cumplía el proceso de Capocelli y Ricciardi. Así este nuevo proceso permite:

- Modelizar fenómenos con espacio de estados continuo y con tendencia de tipo Gompertz, de tal forma que su cota dependa del valor inicial.
- Emplear el modelo ajustado con fines predictivos mediante su función media.

Capítulo 2

Un nuevo proceso de difusión tipo Gompertz

El objetivo fundamental de este capítulo es la introducción de un proceso de difusión asociado a la expresión de la curva Gompertz

$$f(t) = x_0 \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)})\right), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad \alpha > \beta > 0, \quad x_0 > 0 \quad (2.1)$$

utilizada por Tan, [82], al introducir el proceso de nacimiento y muerte Gompertz.

En primer lugar, se va a introducir este proceso siguiendo las dos líneas citadas en el capítulo anterior, es decir:

- Considerar un modelo estocástico cuya solución, en ausencia de ruido, coincida con la curva deseada.
- Imponer que la función media del proceso obtenido sea dicha curva.

A continuación, se obtendrá el proceso mediante métodos alternativos que están basados en el paso al límite de ciertos modelos discretos estocásticos de crecimiento.

Finalizamos este capítulo con un estudio de las características fundamentales del proceso: Función de densidad de transición, distribuciones finito-dimensionales, momentos, funciones paramétricas de interés y simulación de trayectorias.

2.1. Obtención del modelo

Siguiendo la metodología desarrollada por Capocelli y Ricciardi, [8], para la obtención del proceso de difusión tipo Gompertz introducido en el capítulo anterior, vamos a

modificar la media infinitesimal de la ecuación de Fokker-Planck del proceso lognormal, de forma que la solución de la ecuación resultante, en ausencia de ruido y con condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0), \quad (2.2)$$

sea la curva (2.1).

Notemos que la ecuación de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha e^{-\beta(t-t_0)} x f],$$

con condición inicial (2.2), tiene por solución

$$f(x, t | x_0, t_0) = \delta \left(x - x_0 \exp \left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \right) \right),$$

lo cual implica que la población cuyo comportamiento se está modelizando crece de acuerdo con la curva de crecimiento Gompertz (2.1).

Así, partiendo de la ecuación de Fokker-Planck del proceso lognormal (1.12) para $m = \alpha$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha x f] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f],$$

y modificando su media infinitesimal, multiplicándola por el término $e^{-\beta(t-t_0)}$, se obtiene la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha e^{-\beta(t-t_0)} x f] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 f], \quad 0 < x < \infty \quad \alpha > \beta > 0 \quad (2.3)$$

de un nuevo proceso, que verifica la condición deseada de que su solución, en ausencia de ruido y condición inicial (2.2) sea la curva Gompertz (2.1).

En el capítulo previo, cuando se trató la obtención del proceso logístico y el proceso tipo Gompertz propuesto por Capocelli y Ricciardi, vimos que el procedimiento anterior equivale a considerar una determinada función de regulación en la ecuación de Langevin (1.15) o a la aleatorización de algún parámetro en la ecuación diferencial determinística de crecimiento correspondiente. A continuación, vamos a estudiar ambos planteamientos para el caso que nos ocupa.

Por una parte podemos considerar la función de regulación

$$\varphi(x, t) = 1 - e^{-\beta(t-t_0)} - \frac{1}{\alpha} \Lambda(t),$$

en la ecuación de Langevin

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) [1 - \varphi(x(t), t)],$$

con $\Lambda(t)$ un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero y densidad espectral σ^2 .

Esto equivale a considerar la ecuación determinística de crecimiento ¹

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha e^{-\beta(t-t_0)} x(t)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

e, interpretándola como una generalización de la ecuación de crecimiento malthusiano (1.9) con razón de crecimiento dependiente del tiempo, $r(t) = \alpha e^{-\beta(t-t_0)}$, reemplazar ésta por la suma de tal función y un ruido $\Lambda(t)$, esto es,

$$r(t) \longrightarrow r(t) + \Lambda(t).$$

La ecuación resultante en ambos casos

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha e^{-\beta(t-t_0)} x(t) + x(t)\Lambda(t)$$

se puede escribir en forma de ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \alpha e^{-\beta(t-t_0)} X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad (2.4)$$

donde $W(t)$ representa el proceso de Wiener estándar.

La solución de esta ecuación es un proceso de difusión $\{X(t); t \geq t_0\}$ no homogéneo en el tiempo, con valores en \mathbb{R}^+ , momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = h(t)x$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2,$$

y función media (condicionada al instante inicial)

$$E[X(t)|X(t_0) = x_0] = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds\right)$$

donde

$$h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \\ \alpha e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{\sigma^2}{2} \end{cases}$$

¹Esta ecuación nos confirma lo que Ludwig postuló (ver Winsor [89]): la tasa de crecimiento relativo $\left(\frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt}\right)$ decrece de forma monótona con el crecimiento continuo. En el caso de la curva logística dicho decrecimiento es una función lineal del crecimiento alcanzado mientras que en el caso de la curva Gompertz el decrecimiento es exponencial en función del tiempo o, como dijo Gompertz, en iguales intervalos pequeños de tiempo los organismos pierden iguales proporciones de su poder de crecimiento.

según se haya considerado, en la resolución de la ecuación (2.4), la integral estocástica de Itô o de Stratonovich, respectivamente.

A continuación vamos a comparar el resultado que acabamos de obtener con el que se deduce del método con el que iniciamos este apartado.

Los momentos infinitesimales del proceso de difusión con ecuación de Fokker-Planck (2.3) son

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \alpha e^{-\beta(t-t_0)} x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2, \end{aligned}$$

por lo que dicho proceso coincide con el que se ha obtenido anteriormente considerando la solución de Itô de la ecuación diferencial estocástica (2.4). Además,

$$E[X(t)|X(t_0) = x_0] = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha e^{-\beta(t-t_0)} dt\right) = x_0 \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)})\right)$$

que se corresponde con una curva del tipo (2.1), mientras que si consideramos la solución de Stratonovich se tendría

$$\begin{aligned} E[X(t)|X(t_0) = x_0] &= x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \left(\alpha e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt\right) = \\ &= x_0 \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}(t-t_0) + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)})\right) \end{aligned}$$

que no es del tipo anterior, ni tan siquiera es una curva acotada.

Así pues, teniendo en cuenta los objetivos que perseguíamos, definimos un nuevo proceso de difusión tipo Gompertz asociado a la curva (2.1) como aquel proceso de difusión $\{X(t); t \geq t_0\}$ con valores en \mathbb{R}^+ y momentos infinitesimales ²

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= m e^{-\beta(t-t_0)} x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

²Este proceso es un caso particular del proceso lognormal no homogéneo general con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= h(t)x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2. \end{aligned}$$

Sin embargo, no es un caso particular del proceso lognormal con factores exógenos, con

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i F_i(t)\right) x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

siendo F_i funciones continuas y conocidas (completamente o de forma que se pueda conocer el valor de su integral entre dos instantes cualesquiera de tiempo), proceso ampliamente estudiado (Gutiérrez et al. [26], [29], [30] y [36]) tanto desde el punto de vista de la inferencia como desde el de tiempos de primer paso.

donde $m > \beta > 0$ y $\sigma > 0^3$.

2.1.1. Límite de modelos discretos de crecimiento

Nos planteamos, a continuación, la obtención del proceso como límite de modelos discretos estocásticos de crecimiento con fecundidad diferencial por unidad de tiempo dependiente del tiempo.

Este procedimiento extiende al considerado por Ricciardi [72] para obtener los procesos lognormal y logístico a partir de modelos con fecundidad diferencial por unidad de tiempo constante (caso lognormal) o una función lineal del tamaño de la población (caso logístico), pero en ambos casos independientes del tiempo, ya que los procesos por él considerados son homogéneos en el tiempo, a diferencia del proceso que ahora se ha introducido.

Consideremos un modelo de crecimiento de poblaciones del tipo

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\tau} &= W_{n\tau} X_{n\tau}, & n = 0, 1, \dots \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

en el que $X_{n\tau}$ representa el tamaño de la población en la n -ésima generación, τ el intervalo de tiempo entre sucesivas generaciones, valor que se hará tender a cero posteriormente, y $W_{n\tau}$ la fecundidad en el instante de tiempo $n\tau$, que se modelizará, para $n = 1, 2, \dots$, mediante una sucesión de variables aleatorias independientes y no idénticamente distribuidas (dado que el proceso límite resultante es no homogéneo) de forma que la fecundidad diferencial por unidad de tiempo es de la forma

$$\frac{1}{\tau} \frac{X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau}}{X_{n\tau}} = m e^{-\beta(n\tau - t_0)}.$$

Dicho modelo se puede escribir como

$$\begin{aligned} X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} &= m\tau e^{-\beta(n\tau - t_0)} X_{n\tau} & (n = 0, 1, \dots) \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

y probamos a continuación que aleatorizándolo, se obtiene, en el límite, el proceso de difusión con momentos infinitesimales (2.5).

La introducción de ambiente aleatorio puede lograrse de múltiples maneras: haciendo m , β o ambos aleatorios y, a su vez, existen varias alternativas para lograr este fin. Todas las alternativas siguen una idea común que es considerar variables aleatorias independientes y no idénticamente distribuidas $\{Z_{n\tau}\}$ que verifiquen

$$E[Z_{n\tau}] = (\text{función que se aleatoriza}) \times \tau$$

³A partir de ahora denotaremos por m en lugar de α para equiparar la notación con el proceso Gompertz tratado por Capocelli y Ricciardi (1.19)

y sustituir, en el modelo (2.6), dicha expresión por las variables $Z_{n\tau}$.

Presentamos a continuación algunas de ellas.

a) m aleatorio

Consideraremos variables aleatorias independientes, $\{Z_{n\tau}\}$ con media $m\tau$ tales que

$$P[Z_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] = \frac{e^{2\beta(n\tau-t_0)}}{2} + \frac{m\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

$$P[Z_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] = \frac{e^{2\beta(n\tau-t_0)}}{2} - \frac{m\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

cuyos momentos no centrados son

$$E[Z_{n\tau}] = m\tau$$

$$E[Z_{n\tau}^2] = \sigma^2\tau e^{2\beta(n\tau-t_0)}$$

$$E[Z_{n\tau}^{2+p}] = o(\tau); \forall p \in \mathbb{N}.$$

Al sustituir en (2.6) se obtiene el siguiente modelo aleatorio

$$X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} = Z_{n\tau} e^{-\beta(n\tau-t_0)} X_{n\tau} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$P\{X_0 = x_0\} = 1.$$

Veamos ahora el proceso límite al que da lugar este modelo. En este caso, los momentos de los incrementos del proceso $X_{n\tau}$, tras una generación, por unidad de tiempo, condicionados a $X_{n\tau} = x$ son

- $\tau^{-1} E[X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} | X_{n\tau} = x] = \tau^{-1} x e^{-\beta(n\tau-t_0)} E[Z_{n\tau}] = m x e^{-\beta(n\tau-t_0)}$
- $\tau^{-1} E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^2 | X_{n\tau} = x] = \tau^{-1} x^2 e^{-2\beta(n\tau-t_0)} E[Z_{n\tau}^2] = \sigma^2 x^2$
- $\tau^{-1} E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^{2+p} | X_{n\tau} = x] = \tau^{-1} x^{2+p} e^{-(2+p)\beta(n\tau-t_0)} E[Z_{n\tau}^{2+p}] = \frac{o(\tau)}{\tau}, \forall p \in \mathbb{N}$

de forma que, cuando $n \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow 0$ con la condición de que $n\tau = t$, $X_{n\tau}$ converge a un proceso de difusión no homogéneo con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = m x e^{-\beta(t-t_0)}$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2.$$

b) β aleatorio

Como segunda alternativa, vamos a aleatorizar la constante β y, debido a que es parte de un exponente, en este caso consideraremos variables aleatorias independientes, $\{Z_{n\tau}\}$ con media $e^{-\beta(n\tau-t_0)}\tau$ tales que

$$P[Z_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] = \frac{1}{2m^2} + \frac{e^{-\beta(n\tau-t_0)}\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

$$P[Z_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] = \frac{1}{2m^2} - \frac{e^{-\beta(n\tau-t_0)}\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

cuyos momentos no centrados son

$$E[Z_{n\tau}] = e^{-\beta(n\tau-t_0)}\tau$$

$$E[Z_{n\tau}^2] = \frac{\sigma^2\tau}{m^2}$$

$$E[Z_{n\tau}^{2+p}] = o(\tau); \forall p \in \mathbb{N}.$$

Sustituyendo en (2.6) se obtiene el siguiente modelo aleatorio

$$X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} = mZ_{n\tau}X_{n\tau} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$P\{X_0 = x_0\} = 1,$$

y los momentos de los incrementos del proceso $X_{n\tau}$, tras una generación, por unidad de tiempo, condicionados a $X_{n\tau} = x$ son

- $\tau^{-1}E[X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau}|X_{n\tau} = x] = \tau^{-1}mx E[Z_{n\tau}] = mx e^{-\beta(n\tau-t_0)}$
- $\tau^{-1}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^2|X_{n\tau} = x] = \tau^{-1}m^2x^2 E[Z_{n\tau}^2] = \sigma^2x^2$
- $\tau^{-1}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^{2+p}|X_{n\tau} = x] = \tau^{-1}m^{2+p}x^{2+p} E[Z_{n\tau}^{2+p}] = \frac{o(\tau)}{\tau}, \forall p \in \mathbb{N}$

de forma que, cuando $n \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow 0$ con la condición de que $n\tau = t$, $X_{n\tau}$ converge, al igual que antes, al proceso de difusión no homogéneo con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = mx e^{-\beta(t-t_0)}$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2x^2.$$

c) m y β aleatorios

Por último, aleatorizaremos m y β simultáneamente, para lo cual consideraremos la función $me^{-\beta(t-t_0)}$ aleatoria. En este caso tomaremos una sucesión de variables aleatorias independientes, $\{Z_{n\tau}\}$ tales que

$$P[Z_{n\tau} = \sigma\sqrt{\tau}] = \frac{1}{2} + \frac{me^{-\beta(n\tau-t_0)}\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

$$P[Z_{n\tau} = -\sigma\sqrt{\tau}] = \frac{1}{2} - \frac{me^{-\beta(n\tau-t_0)}\sqrt{\tau}}{2\sigma}$$

cuyos momentos no centrados son

$$E[Z_{n\tau}] = me^{-\beta(n\tau-t_0)}\tau$$

$$E[Z_{n\tau}^2] = \sigma^2\tau$$

$$E[Z_{n\tau}^{2+p}] = o(\tau); \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ahora, al sustituir en (2.6), se obtiene

$$X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} = Z_{n\tau}X_{n\tau}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$P\{X_0 = x_0\} = 1,$$

con momentos de los incrementos del proceso $X_{n\tau}$, tras una generación, por unidad de tiempo, condicionados a $X_{n\tau} = x$

- $\tau^{-1}E[X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} | X_{n\tau} = x] = mx e^{-\beta(n\tau-t_0)}$
- $\tau^{-1}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^2 | X_{n\tau} = x] = \sigma^2 x^2$
- $\tau^{-1}E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^{2+p} | X_{n\tau} = x] = \frac{o(\tau)}{\tau}, \forall p \in \mathbb{N}.$

Por tanto, cuando $n \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow 0$ con la condición de que $n\tau = t$, $X_{n\tau}$ converge, de nuevo, al proceso de difusión no homogéneo con momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = me^{-\beta(t-t_0)}x$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2.$$

2.1.2. Límite de esquemas discretos

Vamos a obtener ahora el nuevo proceso de difusión mediante un procedimiento que extiende el método de obtención de un proceso de difusión homogéneo como límite de

un recorrido aleatorio cuando los saltos y los intervalos de tiempo entre saltos tienden a cero, al caso de procesos de difusión no homogéneos (Gutiérrez et al. [33]). En este caso se parte de esquemas discretos más generales en los que las probabilidades de transición dependen del instante de tiempo y del estado de partida.

El desarrollo que vamos a hacer será para un proceso cualquiera no homogéneo para particularizarlo posteriormente al proceso que nos ocupa.

Partimos del esquema discreto

$$X_{(n+1)\tau} = X_{n\tau} + Z_{(n+1)\tau}$$

donde $Z_{n\tau}$ son variables aleatorias independientes tales que

$$\begin{aligned} P[Z_{(n+1)\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \theta(k\delta, n\tau) \\ P[Z_{(n+1)\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \phi(k\delta, n\tau) \\ P[Z_{(n+1)\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta] &= 1 - \theta(k\delta, n\tau) - \phi(k\delta, n\tau). \end{aligned}$$

Si notamos

$$P_{j,k}^{(m,n)} = P[X_{(n+m)\tau} = k\delta | X_{m\tau} = j\delta],$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} P_{j,k}^{(m,n)} &= P_{j,k-1}^{(m,n-1)}\theta((k-1)\delta, (n+m-1)\tau) + P_{j,k+1}^{(m,n-1)}\phi((k+1)\delta, (n+m-1)\tau) \\ &\quad + P_{j,k}^{(m,n-1)}[1 - \theta(k\delta, (n+m-1)\tau) - \phi(k\delta, (n+m-1)\tau)], \end{aligned}$$

que expresa la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $k\delta$ después de transcurrir n instantes de tiempo partiendo del estado $j\delta$ en el tiempo $m\tau$, considerando las tres posibles posiciones de la partícula transcurridos $n-1$ instantes de tiempo ($(k-1)\delta$, $(k+1)\delta$ y $k\delta$) y la probabilidad del correspondiente último salto (de amplitudes δ , $-\delta$ y 0 , respectivamente).

Notando ahora por $f(x, t | x_0, t_0)\delta$ a la probabilidad de que el proceso tome un valor en el intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ en el instante de tiempo t si parte del estado x_0 en el instante de tiempo t_0 , entonces

$$\begin{aligned} f(k\delta, (n+m)\tau | j\delta, m\tau)\delta &= \theta((k-1)\delta, (n+m-1)\tau)f((k-1)\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta + \\ &\quad + \phi((k+1)\delta, (n+m-1)\tau)f((k+1)\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta + \\ &\quad + [1 - \theta(k\delta, (n+m-1)\tau) - \phi(k\delta, (n+m-1)\tau)] \times \\ &\quad \times f(k\delta, (n+m-1)\tau | j\delta, m\tau)\delta. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sea $X(t)$ el proceso límite obtenido a partir de $X_{n\tau}$ al tomar límites cuando $\tau \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$, y

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} E[X(t + \tau) - X(t) | X(t) = x] \\ A_2(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} E[(X(t + \tau) - X(t))^2 | X(t) = x] \end{aligned}$$

sus momentos infinitesimales. Dado que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} E[X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau} | X_{n\tau} = x] &= \frac{1}{\tau} E[Z_{(n+1)\tau} | X_{n\tau} = x] = \frac{\delta}{\tau} [\theta(x, n\tau) - \phi(x, n\tau)] \\ \frac{1}{\tau} E[(X_{(n+1)\tau} - X_{n\tau})^2 | X_{n\tau} = x] &= \frac{1}{\tau} E[Z_{(n+1)\tau}^2 | X_{n\tau} = x] = \frac{\delta^2}{\tau} [\theta(x, n\tau) + \phi(x, n\tau)],\end{aligned}$$

habrá que exigir que en el límite, cuando $\tau \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$ ($n\tau = t$), dichas expresiones coincidan con $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$

$$\begin{aligned}A_1(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\delta}{\tau} [\theta(x, n\tau) - \phi(x, n\tau)] \\ A_2(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\tau} [\theta(x, n\tau) + \phi(x, n\tau)].\end{aligned}$$

Tal condición se verifica si se toma

$$\begin{aligned}\bullet \frac{\delta^2}{\tau} &= k & (2.8) \\ \bullet \theta(x, n\tau) &= \frac{A_2(x, n\tau)}{2k} + \frac{A_1(x, n\tau)}{2k} \delta \\ \bullet \phi(x, n\tau) &= \frac{A_2(x, n\tau)}{2k} - \frac{A_1(x, n\tau)}{2k} \delta.\end{aligned}$$

Por otra parte, haciendo $x = k\delta$, $t = (m + n)\tau$, $x_0 = j\delta$, $t_0 = m\tau$ y sustituyéndolo en (2.7) se tiene:

$$\begin{aligned}f(x, t | x_0, t_0) &= \theta(x - \delta, t - \tau) f(x - \delta, t - \tau | x_0, t_0) + \\ &+ \phi(x + \delta, t - \tau) f(x + \delta, t - \tau | x_0, t_0) + \\ &+ (1 - \theta(x, t - \tau) - \phi(x, t - \tau)) f(x, t - \tau | x_0, t_0).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Desarrollando por Taylor en x y t cada uno de los sumandos del lado derecho de (2.9),

$$\begin{aligned}\bullet \theta(x - \delta, t - \tau) f(x - \delta, t - \tau | x_0, t_0) &= \\ &= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^n \delta^i \tau^j}{i! j!} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{m=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{m} \frac{\partial^{k+m} f(x, t | x_0, t_0)}{\partial x^k \partial t^m} \frac{\partial^{n-k-m} \theta(x_0, t_0)}{\partial x^{i-k} \partial t^{j-m}} \right] \\ \bullet \phi(x + \delta, t - \tau) f(x + \delta, t - \tau | x_0, t_0) &= \\ &= \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^j \delta^i \tau^j}{i! j!} \left[\sum_{k=0}^i \sum_{m=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{m} \frac{\partial^{k+m} f(x, t | x_0, t_0)}{\partial x^k \partial t^m} \frac{\partial^{n-k-m} \phi(x_0, t_0)}{\partial x^{i-k} \partial t^{j-m}} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet f(x, t - \tau | x_0, t_0) &= \sum_j \frac{(-1)^j \tau^j}{j} \frac{\partial^j f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t^j} \\
\bullet \theta(x, t - \tau) f(x, t - \tau | x_0, t_0) &= \\
&= \sum_j \frac{(-1)^j \tau^j}{j!} \left[\sum_{m=0}^j \binom{j}{m} \frac{\partial^m f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t^m} \frac{\partial^{j-m} \theta(x_0, t_0)}{\partial t^{j-m}} \right] \\
\bullet \phi(x, t - \tau) f(x, t - \tau | x_0, t_0) &= \\
&= \sum_j \frac{(-1)^j \tau^j}{j!} \left[\sum_{m=0}^j \binom{j}{m} \frac{\partial^m f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t^m} \frac{\partial^{j-m} \phi(x_0, t_0)}{\partial t^{j-m}} \right]
\end{aligned}$$

y sustituyendo en (2.9) se obtiene

$$\begin{aligned}
\tau \frac{\partial f(x, t | y, z)}{\partial t} &= \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t | y, z)}{\partial t^2} - \delta \frac{\partial}{\partial x} [(\theta(x, t) - \phi(x, t)) f(x, t | y, z)] + \\
&+ \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\theta(x, t) + \phi(x, t)) f(x, t | y, z)] + \delta \tau \left[f(x, t | y, z) \left(\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\
&+ \frac{\partial f(x, t | y, z)}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial f(x, t | y, z)}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right) + \\
&\left. + \frac{\partial^2 f(x, t | y, z)}{\partial x \partial t} (\theta(x, t) - \phi(x, t)) \right] + \dots
\end{aligned}$$

Por último, dividiendo por τ , tomando límite cuando $\tau \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$ y teniendo en cuenta (2.8) se obtiene

$$\frac{\partial f(x, t | y, z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A_1(x, t) f(x, t | y, z)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_2(x, t) f(x, t | y, z)],$$

que es la ecuación adelantada o de Fokker-Planck asociada a un proceso de difusión con momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$.

Para obtener la ecuación atrasada o de Kolmogorov del proceso límite, se debe partir de

$$P_{j,k}^{(m,n)} = P_{j+1,k}^{(m+1,n-1)} \theta(j\delta, m\tau) + P_{j-1,k}^{(m+1,n-1)} \phi(j\delta, m\tau) + P_{j,k}^{(m+1,n-1)} [1 - \theta(j\delta, m\tau) - \phi(j\delta, m\tau)],$$

que expresa la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $k\delta$ después de transcurrir n instantes de tiempo partiendo del estado $j\delta$ en el tiempo $m\tau$, considerando las tres posibles posiciones de la partícula en el primer instante de tiempo $((j-1)\delta, (j+1)\delta$ y $j\delta$).

Siguiendo un desarrollo análogo al anterior se llega a

$$f(x, t|x_0, t_0) = \theta(x_0, t_0)f(x, t|x_0 + \delta, t_0 + \tau) + \phi(x_0, t_0)f(x, t|x_0 - \delta, t_0 + \tau) + [1 - \theta(x_0, t_0) - \phi(x_0, t_0)]f(x, t|x_0, t_0 + \tau). \quad (2.10)$$

Desarrollando ahora por Taylor, en x_0 y t_0 , las funciones f del lado derecho de (2.10),

- $f(x, t|x_0 + \delta, t_0 + \tau) = \sum_n \sum_m \frac{\delta^n \tau^m}{m!n!} \frac{\partial^{n+m} f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^n \partial t_0^m}$
- $f(x, t|x_0 - \delta, t_0 + \tau) = \sum_n \sum_m \frac{(-1)^n \delta^n \tau^m}{m!n!} \frac{\partial^{n+m} f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^n \partial t_0^m}$
- $f(x, t|x_0, t_0 + \tau) = \sum_m \frac{\tau^m}{m!} \frac{\partial^m f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0^m},$

y sustituyendo en (2.10) se obtiene

$$0 = \tau \frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|x_0, t_0)}{\partial t_0^2} + \delta \frac{\partial f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0} (\theta(x_0, t_0) - \phi(x_0, t_0)) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0^2} (\theta(x_0, t_0) + \phi(x_0, t_0)) + \tau \delta \frac{\partial^2 f(x, t|x_0, t_0)}{\partial x_0 \partial t_0} (\theta(x_0, t_0) - \phi(x_0, t_0)) + \dots$$

Dividiendo por τ , tomando límite cuando $\tau \rightarrow 0$ y $\delta \rightarrow 0$ y teniendo en cuenta (2.8) se obtiene la ecuación atrasada o de Kolmogorov del proceso límite

$$\frac{\partial f(x, t|y, z)}{\partial z} + \frac{\partial f(x, t|y, z)}{\partial y} A_1(y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|y, z)}{\partial y^2} A_2(y, z) = 0 .$$

Por tanto, si se desea obtener un proceso de difusión concreto, basta tomar las funciones θ y ϕ adecuadas según la relación (2.8), que den lugar a los momentos infinitesimales del proceso deseado.

En particular, para obtener el proceso de difusión que estamos tratando, cuyos momentos infinitesimales son

$$A_1(x, t) = mx e^{-\beta(t-t_0)}$$

$$A_2(x, t) = \sigma^2 x^2,$$

basta partir del proceso definido por la ecuación

$$X_{(n+1)\tau} = X_{n\tau} + Z_{(n+1)\tau},$$

donde $Z_{n\tau}$ son variables aleatorias independientes tales que

$$\begin{aligned} P[Z_{(n+1)\tau} = \delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \left(\frac{\sigma^2 k^2}{2} + \frac{mke^{-\beta(n\tau-t_0)}}{2} \right) \tau \\ P[Z_{(n+1)\tau} = -\delta | X_{n\tau} = k\delta] &= \left(\frac{\sigma^2 k^2}{2} - \frac{mke^{-\beta(n\tau-t_0)}}{2} \right) \tau \\ P[Z_{(n+1)\tau} = 0 | X_{n\tau} = k\delta] &= 1 - \sigma^2 k^2 \tau. \end{aligned}$$

2.2. Estudio del nuevo proceso. Características principales

Una vez propuesto el nuevo proceso de difusión asociado a la curva Gompertz estudiada por Tan, el siguiente paso que vamos a dar es el estudio de sus características principales. Entre ellas, al igual que se hizo en el caso del proceso Gompertz introducido por Capocelli y Ricciardi, obtendremos la función de densidad de transición, la función de distribución, las distribuciones unidimensionales y bidimensionales para algunas distribuciones iniciales, así como la funciones media, covarianza, moda y de cuantiles.

Finalmente se simularán trayectorias del nuevo proceso con la idea de poder compararlo con el proceso que propusieron Capocelli y Ricciardi.

Antes de realizar todo lo anteriormente especificado recordemos como quedó definido el nuevo proceso que hemos propuesto y del cual queremos realizar su estudio. El nuevo modelo estocástico asociado a la curva introducida por Tan es un proceso de difusión $\{X(t); t \geq t_0\}$ con valores en \mathbb{R}^+ y momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= me^{-\beta(t-t_0)}x \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $m > \beta > 0$ y $\sigma > 0$.

2.2.1. Obtención de la función de densidad de transición

Para la obtención de la densidad de transición del proceso vamos a considerar la ecuación atrasada o de Kolmogorov

$$\frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial s} + A_1(y, s) \frac{\partial f(x, t|y, s)}{\partial y} + \frac{1}{2} A_2(y, s) \frac{\partial^2 f(x, t|y, s)}{\partial y^2} = 0, \tag{2.12}$$

donde A_1 y A_2 son los momentos infinitesimales especificados en (2.11), y vamos a utilizar un resultado debido a Ricciardi, [71], donde se especifica bajo qué condiciones existe una

transformación del tipo

$$\begin{aligned} x' &= \psi(x, t), & y' &= \psi(y, s), \\ t' &= \phi(t), & s' &= \phi(s) \end{aligned}$$

que transforme la ecuación (2.12) en

$$\frac{\partial f'(x', t'|y', s')}{\partial s'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f'(x', t'|y', s')}{\partial y'^2} = 0,$$

que se corresponde con la ecuación adelantada o de Kolmogorov del proceso Wiener estándar, cuya función de densidad de transición es conocida:

$$f'(x', t'|y', s') = \left(\sqrt{2\pi(t' - s')} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{(x' - y')^2}{2(t' - s')} \right).$$

El resultado al que nos referimos es el siguiente,

Teorema 2.2.1. *Una condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión con función densidad de transición $f(x, t|y, s)$ y momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ pueda transformarse al proceso Wiener estándar es que existan funciones arbitrarias $C_1(t)$ y $C_2(t)$ que verifiquen*

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x, t)]^{1/2}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)A_2(y, t) + \frac{\partial A_2(y, t)}{\partial t}}{(A_2(y, t))^{3/2}} dy \right\}. \quad (2.13)$$

En tal caso la transformación es

$$\begin{aligned} x' &= \psi(x, t) = (k_1)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t C_2(s) ds \right) \int_z^x \frac{1}{(A_2(y, t))^{1/2}} dy \\ &\quad - \frac{(k_1)^{1/2}}{2} \int_{t_2}^t C_1(s) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_2 \\ t' &= \phi(t) = k_1 \int_{t_1}^t \exp \left(-\int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_3 \end{aligned}$$

siendo z un valor del intervalo de definición del proceso, $t_i \in [0, \infty)$ y k_i constantes arbitrarias con la restricción $k_1 > 0$.

Nota 2.2.1. *Puesto que, para cada t , $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \left[\frac{\phi'(t)}{A_2(x, t)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0$, la transformación $x' = \psi(x, t)$ es biyectiva y la relación entre las densidades de transición del proceso Wiener y el transformado será*

$$f(x, t|y, s) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} f'(x', t'|y', s'). \quad (2.14)$$

Aplicando dicho resultado en nuestro caso, la condición (2.13) queda

$$me^{-\beta(t-t_0)}x = \frac{1}{4} \frac{\partial[\sigma^2 x^2]}{\partial x} + \frac{[\sigma^2 x^2]^{1/2}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t)\sigma^2 y^2 + \frac{\partial[\sigma^2 y^2]}{\partial t}}{(\sigma^2 y^2)^{3/2}} dy \right\}$$

que se verifica para, por ejemplo,

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{2m}{\sigma} e^{-\beta(t-t_0)} - \sigma \\ C_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la transformación que lleva al proceso $\{X(t); t \geq t_0\}$ en el proceso Wiener viene dada por:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{(k_1)^{1/2}}{\sigma} \left(\ln x - \ln z + \frac{m}{\beta} e^{-\beta(t-t_0)} - \frac{m}{\beta} e^{-\beta(t_2-t_0)} + \frac{\sigma^2}{2} (t - t_2) \right) + k_2 \\ \phi(t) &= k_1(t - t_1) + k_3. \end{aligned}$$

Con ello, y utilizando la relación (2.14), se obtiene que la función de densidad de transición del proceso considerado es

$$f(x, t|y, s) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\ln x - \ln y + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t-s) \right]^2}{(t-s)\sigma^2} \right)$$

esto es,

$$X(t)|X(s) = y \sim \Lambda_1 \left[\ln y - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) - \frac{\sigma^2}{2} (t-s); (t-s)\sigma^2 \right], \quad t > s. \quad (2.15)$$

Una vez obtenida la función de densidad de transición del proceso se puede deducir de forma directa la función de distribución de transición:

$$\begin{aligned} F(x, t|y, s) &= \int_0^x \frac{1}{u\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \times \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\ln u - \ln y + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t-s) \right]^2}{(t-s)\sigma^2} \right) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - \ln y + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t-s)}{\sqrt{2(t-s)\sigma^2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\ln x - \ln y + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t-s)}{\sqrt{2(t-s)\sigma^2}} \right], \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Erf}(x)$ es la función error $\operatorname{Erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

2.2.2. Distribuciones finito-dimensionales

Puesto que el proceso que estamos considerando es markoviano, el cálculo de las distribuciones finito-dimensionales depende sólo de la distribución inicial y de las transiciones. Conocidas estas últimas, para obtener las distribuciones finito-dimensionales habrá que imponer cuál es la distribución inicial. En nuestro caso nos centraremos en el caso degenerado, o sea, $P[X(t_0) = x_0] = 1$ y en el caso lognormal, $X(t) \sim \Lambda(\mu_0, \sigma_0^2)$.

Distribución inicial degenerada

En el caso en que la distribución inicial es degenerada, es decir $P[X(t_0) = x_0] = 1$, la distribución unidimensional de $X(t)$ coincide con la distribución de $X(t)|X(t_0) = x_0$, por tanto a partir de (2.15) obtenemos

$$X(t) \sim \Lambda_1 \left[\ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0); (t - t_0)\sigma^2 \right], \quad t > t_0.$$

Calculemos, a continuación, las distribuciones bidimensionales haciendo notar que mediante el uso de la propiedad de Markov se obtendrían de forma análoga las distribuciones de cualquier dimensión.

Puesto que $f_{X(t), X(s)}(x, y) = f_{X(s)}(y)f_{X(t)|X(s)=y}(x|y)$ y dado que

$$X(s) \sim \Lambda_1 \left[\ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0); (s - t_0)\sigma^2 \right]$$

$$X(t)|X(s) = y \sim \Lambda_1 \left[\ln y - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) - \frac{\sigma^2}{2} (t - s); (t - s)\sigma^2 \right], \quad t > s$$

se obtiene

$$\begin{aligned} f_{X(t), X(s)}(x, y) = & \frac{1}{xy2\pi\sigma^2\sqrt{(s-t_0)(t-s)}} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{(t-t_0)}{2(t-s)} \left\{ \frac{\left[\ln x - \ln x_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) \right]^2}{\sigma^2(t-t_0)} + \right. \right. \\ & + \frac{\left[\ln y - \ln x_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \right]^2}{\sigma^2(s-t_0)} \\ & - 2 \frac{\sqrt{s-t_0}}{\sqrt{t-t_0}} \frac{\left[\ln x - \ln x_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) \right]}{\sigma\sqrt{t-t_0}} \\ & \left. \left. \times \frac{\left[\ln y - \ln x_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \right]}{\sigma\sqrt{s-t_0}} \right\} \right), \end{aligned}$$

es decir, la distribución bidimensional para el caso de una distribución inicial degenerada viene dada por

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \sigma^2 \Sigma), \quad t > s \geq t_0$$

donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) \\ \ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t - t_0 & s - t_0 \\ s - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix}.$$

De forma análoga se puede ver que para $t_0 \leq t < s$, la distribución bidimensional es

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \sigma^2 \Sigma)$$

donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) \\ \ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t - t_0 & t - t_0 \\ t - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix}.$$

En resumen, la distribución bidimensional del nuevo proceso para el caso en que la distribución inicial sea degenerada resulta ser

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \sigma^2 \Sigma), \quad \forall t, s \geq t_0$$

donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) \\ \ln x_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t - t_0 & t \wedge s - t_0 \\ t \wedge s - t_0 & s - t_0 \end{pmatrix},$$

siendo $t \wedge s = \min(t, s)$.

Distribución inicial lognormal

Consideremos ahora que $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$. Siguiendo un razonamiento análogo al anterior se tiene

$$f_{X(t), X(t_0)}(x, x_0) = \frac{1}{x x_0 2\pi \sqrt{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[\ln x - \mu_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \right]^2 \sigma_0^2}{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\ln x_0 - \mu_0)^2 ((t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2)}{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\left[\ln x - \mu_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \right] (\ln x_0 - \mu_0) \sigma_0^2}{\sigma^2(t-t_0)\sigma_0^2} \right\} \right),$$

es decir, $(X(t), X(t_0)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma)$, donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \\ \mu_0 \end{pmatrix} \\ \Sigma = \begin{pmatrix} (t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta distribución obtenemos la distribución marginal unidimensional de $X(t)$ integrando en x_0 :

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi(\sigma^2(t-t_0) + \sigma_0^2)}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\ln x - \mu_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \right]^2}{\sigma^2(t-t_0) + \sigma_0^2} \right),$$

es decir,

$$X(t) \sim \Lambda_1 \left[\mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0); \sigma^2(t-t_0) + \sigma_0^2 \right].$$

Calculamos, a continuación, las distribuciones bidimensionales. En este caso, para $t > s$ y dado que

$$X(s) \sim \Lambda_1 \left[\mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s-t_0); \sigma^2(s-t_0) + \sigma_0^2 \right] \\ X(t)|X(s) = y \sim \Lambda_1 \left[\ln y - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) - \frac{\sigma^2}{2} (t-s); (t-s)\sigma^2 \right],$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
f_{X(t), X(s)}(x, y) &= \frac{1}{xy2\pi\sqrt{\sigma^2(t-s)[(s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2]}} \times \\
&\times \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[\ln x - \mu_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \right]^2 [(s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2]}{\sigma^2(t-s)[(s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2]} + \right. \right. \\
&+ \frac{\left[\ln y - \mu_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (s-t_0) \right]^2 [(t-s)\sigma^2 + (s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2]}{\sigma^2(t-s)[(s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2]} \\
&- 2 \left[\ln x - \mu_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \right] \times \\
&\left. \left. \times \frac{\left[\ln y - \mu_0 + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) + \frac{\sigma^2}{2} (s-t_0) \right] [(s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2]}{\sigma^2(t-s)[(s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2]} \right\} \right),
\end{aligned}$$

es decir, para $t > s \geq t_0$, y considerando $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$, se verifica

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma),$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu &= \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \\ \mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s-t_0) \end{pmatrix} \\
\Sigma &= \begin{pmatrix} (t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \\ (s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, en el caso $t_0 \leq t < s$, la distribución bidimensional que se obtiene es $(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma)$, con

$$\begin{aligned}
\mu &= \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \\ \mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s-t_0) \end{pmatrix} \\
\Sigma &= \begin{pmatrix} (t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \\ (t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En resumen, la distribución bidimensional del nuevo proceso con una distribución inicial $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$ es

$$(X(t), X(s)) \sim \Lambda_2(\mu, \Sigma), \quad \forall t, s \geq t_0$$

siendo

$$\begin{aligned}
\mu &= \begin{pmatrix} \mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \\ \mu_0 - \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(s-t_0)} - 1) - \frac{\sigma^2}{2} (s-t_0) \end{pmatrix} \\
\Sigma &= \begin{pmatrix} (t-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (t \wedge s - t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \\ (t \wedge s - t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 & (s-t_0)\sigma^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Notemos que mediante el uso de la propiedad de Markov se obtendrían de forma análoga las distribuciones de cualquier dimensión, siendo en cualquier caso distribuciones lognormales ⁴.

2.2.3. Momentos

Una vez conocidas las distribuciones finito-dimensionales del nuevo proceso $X(t)$, para los dos casos de distribuciones iniciales consideradas, pasamos a obtener los momentos n -dimensionales. El cálculo de los mismos se basa en la conocida forma de los momentos de una ley lognormal (unidimensional y multidimensional), que es la asociada a las distribuciones finito-dimensionales, como se ha comprobado en el punto anterior. En particular, los momentos no centrados, unidimensionales, de orden n vienen determinados por la siguiente expresión, independientemente de la distribución inicial

$$E[X^n(t)] = E[X^n(t_0)] \exp\left(-\frac{nm}{\beta} [e^{-\beta(t-t_0)} - 1] + n(n-1)\frac{\sigma^2}{2}(t-t_0)\right), \quad (2.16)$$

de donde

$$\begin{aligned} m(t) &= E[X(t)] = E[X(t_0)] \exp\left(-\frac{m}{\beta} [e^{-\beta(t-t_0)} - 1]\right) = \\ &= E[X(t_0)] \exp\left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right). \end{aligned}$$

Nota 2.2.2. *Observemos, de nuevo, que la media del nuevo proceso Gompertz es una curva Gompertz de las estudiadas por Tan (2.1), lo cual era ya conocido puesto que ha sido una de las condiciones impuestas para la definición del proceso.*

A partir de (2.16) se obtiene la siguiente expresión genérica para la función varianza del proceso,

$$Var[X(t)] = (E[X(t)])^2[\exp(\xi) - 1]$$

donde ξ es el segundo parámetro de la distribución lognormal correspondiente a $X(t)$ en cada uno de los dos casos considerados. De esta forma,

- si la distribución inicial es degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1$,

$$Var[X(t)] = x_0^2 \exp\left(2\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) [\exp(\sigma^2(t-t_0)) - 1],$$

⁴La elección de las distribuciones iniciales no ha sido casual ya que garantiza que las distribuciones finito-dimensionales sean lognormales. En efecto, siguiendo a Arnorld [3], el proceso $\ln X(t)$ es gaussiano si la distribución inicial es degenerada o normal. De esta forma, considerando una distribución degenerada o lognormal (como ha sido el caso), nos aseguramos la lognormalidad de las distribuciones finito-dimensionales.

- si la distribución inicial es una ley lognormal $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$,

$$\text{Var}[X(t)] = \exp(2\mu_0 + \sigma_0^2) \exp\left(2\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) [\exp(\sigma^2(t-t_0) + \sigma_0^2) - 1].$$

Por otra parte, puesto que la distribución bidimensional del proceso $(X(t), X(s))$ es lognormal, se pueden obtener los momentos cruzados de cualquier orden. A partir de ellos se tiene la siguiente expresión general para la función covarianza del proceso:

$$\begin{aligned} R(t, s) &= \text{Cov}[X(t), X(s)] = \\ &= (E[X(t_0)])^2 \exp\left(\frac{m}{\beta} [2 - e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}]\right) [\exp(\sigma_{12}) - 1], \end{aligned}$$

donde σ_{12} es el elemento que ocupa la posición (1,2) de la matriz paramétrica Σ de la distribución lognormal correspondiente a $(X(t), X(s))$ en cada caso considerado. Así pues,

- si la distribución inicial es degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1$,

$$R(t, s) = x_0^2 \exp\left(\frac{m}{\beta} [2 - e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}]\right) [\exp(\sigma^2(t \wedge s - t_0)) - 1],$$

- si la distribución inicial es una ley lognormal $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$,

$$\begin{aligned} R(t, s) &= \exp(2\mu_0 + \sigma_0^2) \exp\left(\frac{m}{\beta} [2 - e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}]\right) \times \\ &\times [\exp(\sigma^2(t \wedge s - t_0) + \sigma_0^2) - 1]. \end{aligned}$$

De igual manera se pueden obtener los momentos condicionados sin más que considerar (2.15). Así

$$E[X^n(t)|X(s)] = E[X^n(s)] \exp\left(\frac{nm}{\beta} e^{-\beta(s-t_0)} [1 - e^{-\beta(t-s)}] + n(n-1)\frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right),$$

de donde

$$m(t|s) = E[X(t)|X(s)] = E[X(s)] \exp\left(\frac{m}{\beta} e^{-\beta(s-t_0)} [1 - e^{-\beta(t-s)}]\right).$$

2.2.4. Otras funciones paramétricas de interés: moda y cuantiles

Además de las funciones obtenidas en el apartado anterior, existen otras funciones paramétricas de interés como la moda y los cuantiles.

Para el caso de la función moda del nuevo proceso la expresión genérica que se obtiene es

$$M_o(t) = Moda[X(t)] = Moda[X(t_0)] \exp\left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) \exp\left(-\frac{3\sigma^2}{2} (t - t_0)\right).$$

Así,

- si la distribución inicial es degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1$,

$$M_o(t) = x_0 \exp\left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) \exp\left(-\frac{3\sigma^2}{2} (t - t_0)\right),$$

- si la distribución inicial es lognormal $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$,

$$M_o(t) = \exp(\mu_0 - \sigma_0^2) \exp\left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) \exp\left(-\frac{3\sigma^2}{2} (t - t_0)\right).$$

En el caso de la función de cuantiles, la expresión genérica es

$$\begin{aligned} C_\alpha(t) &= Cuantil_\alpha[X(t)] = \\ &= E[X(t_0)] \exp\left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) + z_{1-\alpha} \sqrt{\xi}\right), \end{aligned}$$

donde $z_{1-\alpha}$ es el valor de una normal estándar que deja a la derecha una probabilidad de $1 - \alpha$ y ξ es el segundo parámetro de la distribución lognormal correspondiente a $X(t)$ en cada uno de los dos casos considerados. Así,

- si la distribución inicial es degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1$,

$$C_\alpha(t) = x_0 \exp\left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) + z_{1-\alpha} \sigma \sqrt{t - t_0}\right),$$

- si la distribución inicial es lognormal $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$,

$$\begin{aligned} C_\alpha(t) &= \exp\left(\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right) \exp\left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) + z_{1-\alpha} \sqrt{\sigma^2(t - t_0) + \sigma_0^2}\right), \end{aligned}$$

pudiéndose calcular también las versiones condicionadas de tales funciones a partir de (2.15).

2.2.5. Simulación de trayectorias

Una vez obtenido el nuevo proceso de difusión Gompertz asociado a la curva (2.1), y estudiadas sus principales características, en esta sección vamos a realizar simulaciones de sus trayectorias con el fin de visualizar mejor el comportamiento del proceso.

Asimismo, confrontaremos dichas simulaciones con otras realizadas sobre el proceso Gompertz de Capocelli y Ricciardi (1.19). Mediante dicha comparación podremos comprobar las principales diferencias comentadas con anterioridad y que han motivado la introducción de este nuevo proceso.

Para la simulación de trayectorias de ambos procesos nos hemos basado en los algoritmos derivados de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas (Kloeden et al. [43], Rao et al. [70]). Concretamente, se parte de la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t)$$

con condición inicial $X(t_0) = c$, donde c es una variable aleatoria, y se impone a las funciones a y b que tengan derivadas parciales sucesivas continuas hasta el tercer orden en el intervalo considerado, $[t_0, T]$. Dividiendo dicho intervalo en intervalos de amplitud h , con $h = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, \dots, N-1$, se discretiza la ecuación anterior, se desarrollan por Taylor las funciones a y b , sobre el punto $(X(t_n), t_n)$, hasta un cierto orden (dependiendo del orden de error deseado) y se evalúan las integrales resultantes. En concreto, en el algoritmo que presentamos a continuación, la función $a(x, t)$ se desarrolla hasta el segundo orden, mientras que para la función $b(x, t)$ el desarrollo es hasta el tercero. Ello es debido a que con estos desarrollos se consigue un orden de error de $\theta(h^2)$ y $\theta_p(h^2)$, donde por $\theta_p(h^2)$ se entiende

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}[|x| > \epsilon]}{h^2} = 0 \quad \forall \epsilon.$$

El algoritmo al que nos referimos es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & x_n + a_n h + b_n Z_{1n} + \frac{1}{2} h^2 \left(a_{t_n} + a_{x_n} a_n - \frac{1}{2} a_{x_n} b_{x_n} b_n \right) + \\ & + Z_{2n} \left(a_{x_n} b_n - b_{t_n} - b_{x_n} a_n + \frac{1}{2} b_{x_n}^2 b_n \right) + \frac{1}{2} (Z_{1n}^2 - h) b_{x_n} b_n + \\ & + Z_{1n} h \left(b_{t_n} + b_{x_n} a_n - \frac{1}{2} b_{x_n}^2 b_n \right) + Z_{3n} b_{x_n} a_{x_n} b_n + \\ & + \frac{1}{2} (Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n}) (a_{x_n} b_{x_n} b_n + a_{x_n x_n} b_n^2) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n} \right) (b_{x_n x_n} b_n^2 + b_{x_n}^2 b_n) + \\ & + \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 + Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right) \left(b_{t_n x_n} b_n + b_{x_n x_n} a_n b_n - \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 - Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right) \left(b_{x_n}^2 a_n + b_{x_n} b_{t_n} - \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} Z_{1n}^4 - 3 Z_{1n} Z_{2n} + 3 Z_{3n} \right) \left(\frac{1}{3!} b_{x_n x_n x_n} b_n^3 + \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2 \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} Z_{1n}^4 - Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n} \right) \left(\frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2 + \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n \right), \quad n = 0, \dots, N-1
\end{aligned}$$

donde $x_n = X(t_n)$ y

$$\begin{aligned}
a(x, t) &= A_1(x, t), \quad b(x, t) = \sqrt{A_2(x, t)}, \quad a_n = a(x_n, t_n), \quad b_n = b(x_n, t_n) \\
a_{x_n} &= \frac{\partial a}{\partial x}(x_n, t_n), \quad b_{x_n} = \frac{\partial b}{\partial x}(x_n, t_n), \quad a_{t_n} = \frac{\partial a}{\partial t}(x_n, t_n), \quad b_{t_n} = \frac{\partial b}{\partial t}(x_n, t_n) \\
a_{x_n x_n} &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x_n, t_n), \quad b_{x_n x_n} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_n, t_n), \quad b_{t_n x_n} = \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t}(x_n, t_n), \quad b_{x_n x_n x_n} = \frac{\partial^3 b}{\partial x^3}(x_n, t_n) \\
Z_{1n} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW(s), \quad Z_{2n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t dW(s) dt \quad \text{y} \quad Z_{3n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t (W(s) - W(n)) ds dW(t).
\end{aligned}$$

Se puede probar que $(Z_{1n}, Z_{2n}) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} h & h^2/2 \\ h^2/2 & h^3/3 \end{pmatrix}$$

mientras que Z_{3n} no es normal, pero se puede aproximar, para valores pequeños de h , por una variable normal de media cero y varianza $\frac{h^4}{12}$, estando incorrelada, además, con Z_{1n} y Z_{2n} .

En los dos casos que nos ocupan, el esquema numérico queda de la siguiente forma:

■ **Proceso de difusión Gompertz de Capocelli y Ricciardi.** Puesto que

$$\begin{aligned}
A_1(x, t) &= mx - \beta x \ln x \\
A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2,
\end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n \left[1 + (m - \beta \ln x_n) h + \sigma Z_{1n} + \frac{\sigma^2}{2} (Z_{1n}^2 - h) + \sigma Z_{1n} h \left(m - \beta \ln x_n - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \right. \\
& + \frac{h^2}{2} \left((m - \beta \ln x_n - \beta)(m - \beta \ln x_n) - \frac{\sigma^2}{2} (m - \beta \ln x_n - \beta) \right) + \\
& \left. + Z_{2n} \sigma \left(\frac{\sigma^2}{2} - \beta \right) + Z_{3n} \sigma^2 (m - \beta \ln x_n - \beta) + \frac{\sigma^3}{2} \left(\frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma^2}{2} (Z_{1n}Z_{2n} - Z_{3n})(m - \beta \ln x_n - 2\beta) + \\
& + \frac{\sigma^2}{2} (Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 - Z_{3n} - Z_{1n}Z_{2n}) \left(m - \beta \ln x_n - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \\
& + \frac{\sigma^4}{4} \left(\frac{1}{6} Z_{1n}^4 - Z_{3n} - Z_{1n}Z_{2n} \right) \Big], \quad n = 0, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

- **Nuevo proceso de difusión Gompertz.** Ahora se tiene

$$\begin{aligned}
A_1(x, t) &= m e^{-\beta(t-t_0)} x \\
A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2,
\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n \left[1 + h \left(m e^{-\beta(t_n-t_0)} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + Z_{1n} \left(\sigma + \sigma m e^{-\beta(t_n-t_0)} h - \frac{1}{2} \sigma^3 h \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} h^2 \left(m^2 e^{-2\beta(t_n-t_0)} - \beta m e^{-\beta(t_n-t_0)} - m e^{-\beta(t_n-t_0)} \sigma^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 \right) + \\
& + Z_{1n}^2 \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - \frac{1}{4} \sigma^4 h + \frac{1}{2} \sigma^2 m e^{-\beta(t_n-t_0)} h \right) + \frac{1}{6} \sigma^3 Z_{1n}^3 + \\
& \left. + \frac{1}{24} \sigma^4 Z_{1n}^4 \right], \quad n = 0, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

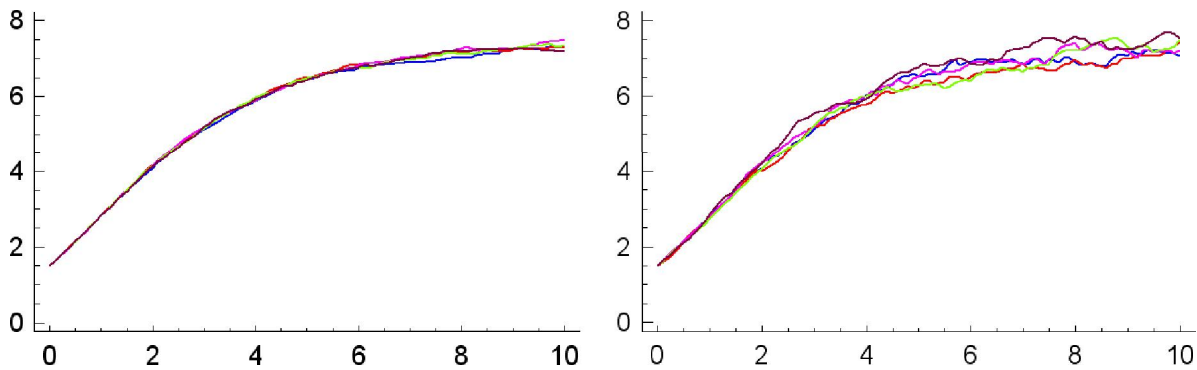
Como se puede apreciar en los algoritmos anteriores, al ser recursivos, para poder simular una trayectoria se necesita partir de un valor inicial, es decir, necesitamos considerar un valor x_0 . Dicho valor va a venir determinado por la distribución inicial que estemos considerando y, por lo tanto haremos la misma distinción que se ha hecho cuando se han calculado las principales características del proceso.

Distribución inicial degenerada $\mathbf{P}[X(t_0) = x_0] = 1$

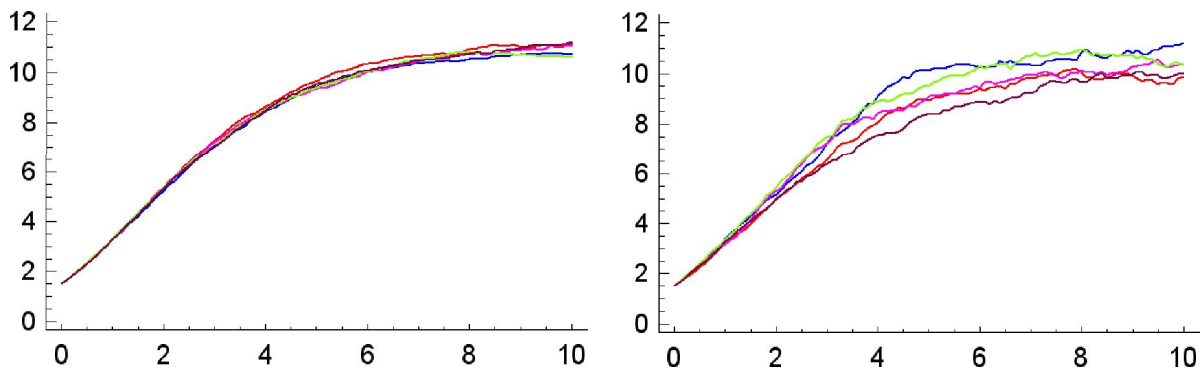
En este caso, para simular una trayectoria, se parte del valor inicial x_0 y se obtiene el resto de valores, en instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_N igualmente espaciados, aplicando los algoritmos anteriores⁵. Para simular múltiples trayectorias se procede de igual forma, volviendo a aplicar el algoritmo tantas veces como se desee.

Se han generado 5 trayectorias con los siguientes valores: $h = 0.1$, $N = 101$, $t_0 = 0$, $\beta = 0.5$, $m = 1$, $x_0 = 1.5$, habiéndose utilizado valores de σ^2 iguales a 0.001 y 0.0001. Las gráficas 2.1 y 2.2 contienen las simulaciones realizadas para el proceso de Capocelli y Ricciardi y el propuesto en esta memoria, respectivamente.

⁵La implementación del algoritmo se ha realizado con el programa Mathematica.



Gráfica 2.1: Trayectorias simuladas del proceso de Capocelli y Ricciardi para $\sigma^2 = 0.0001$ y $\sigma^2 = 0.001$ respectivamente. Distribución inicial degenerada.



Gráfica 2.2: Trayectorias simuladas del proceso propuesto para valores $\sigma^2 = 0.0001$ y $\sigma^2 = 0.001$ respectivamente. Distribución inicial degenerada.

Distribución inicial lognormal $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$

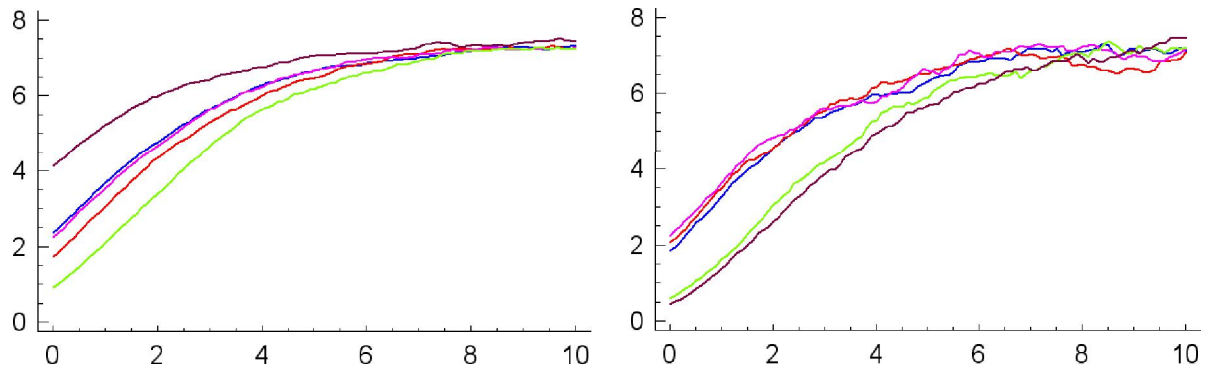
En este otro caso, para simular d trayectorias, se generan, en primer lugar, d valores independientes de la distribución inicial, que se tomarán como valor inicial de cada una de las trayectorias que se simulan a partir de ellos como en el caso anterior.

Al igual que antes, se han generado 5 trayectorias para ambos procesos, con los mismos valores de los parámetros, y con valores iniciales comunes para cada valor de σ^2 , generados mediante una distribución lognormal $\Lambda_1(0; 1)$. Las gráficas 2.3 y 2.4 contienen las simulaciones realizadas para el proceso de Capocelli y Ricciardi y el propuesto en esta memoria, respectivamente.

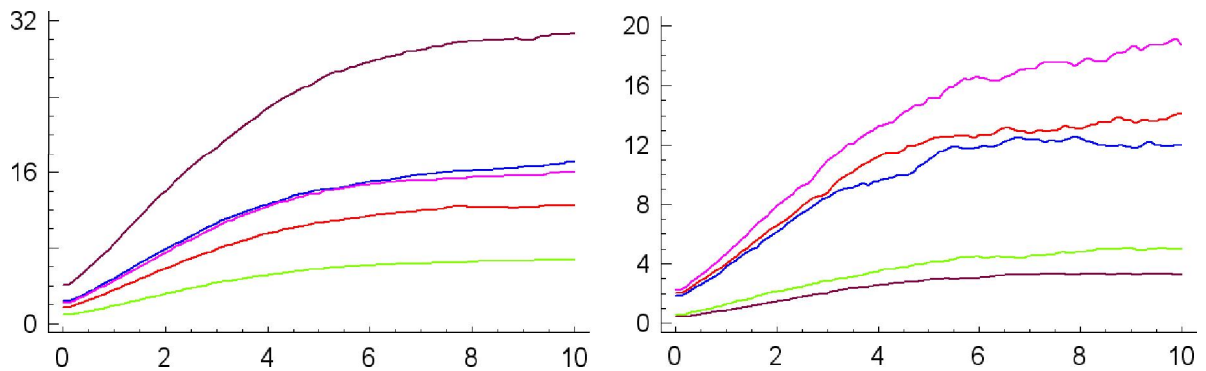
A la vista de los resultados obtenidos se pone de manifiesto:

- Si la distribución inicial es degenerada⁶, y por lo tanto todas las trayectorias comien-

⁶En las aplicaciones, esta suele ser la opción natural en el caso de disponer de una sola trayectoria.



Gráfica 2.3: Trayectorias simuladas del proceso de Capocelli y Ricciardi para $\sigma^2 = 0.0001$ y $\sigma^2 = 0.001$ respectivamente. Distribución inicial lognormal.



Gráfica 2.4: Trayectorias simuladas del proceso propuesto para valores $\sigma^2 = 0.0001$ y $\sigma^2 = 0.001$ respectivamente. Distribución inicial lognormal.

zan en el mismo valor x_0 , ambos procesos se comportan de igual forma. La principal diferencia apreciable es que si $x_0 > 1$ la cota en el proceso propuesto es mayor que en el de Capocelli y Ricciardi, y en caso contrario es menor o igual. Por lo tanto, a la hora de usarlos en cuestiones aplicadas, ambos procesos parecen adecuados.

- Si la distribución inicial es lognormal, como puede ocurrir si se dispone de múltiples trayectorias comenzando en valores diferentes, la diferencia es clara: en el caso del proceso de Capocelli y Ricciardi, todas las trayectorias alcanzan la misma cota, mientras que en el nuevo la cota será diferente para cada trayectoria con dato inicial distinto. Por tanto, dependiendo de que las múltiples trayectorias alcancen o no la misma cota, será conveniente usar el proceso de Capocelli y Ricciardi o el nuevo que hemos propuesto, respectivamente.

Dado que el proceso que hemos introducido parece adecuado en una gran variedad de aplicaciones (número de habitantes en países con distinta superficie, pero igual nivel de desarrollo; salarios en distintas comunidades autónomas; datos de crecimiento de animales, de árboles (altura, diámetro), etc.), nuestro siguiente objetivo es realizar un estudio

inferencial sobre él. Este será, junto con el del estudio del problema de tiempos de primer paso, el objetivo principal del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Estimación en el modelo. Tiempos de primer paso

En el capítulo anterior se ha introducido un nuevo modelo estocástico, en concreto un proceso de difusión, asociado a la curva de Gompertz (2.1) considerada por Tan, [82], con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned}A_1(x, t) &= m e^{-\beta(t-t_0)} x \\A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2,\end{aligned}$$

y se han estudiado sus características principales.

Puesto que nuestro interés radica en aplicar el modelo introducido a situaciones reales, el siguiente paso que debemos plantearnos es el de la inferencia sobre el mismo, cuestión a la que vamos a dedicar la primera parte de este capítulo.

Recordemos que el proceso que hemos introducido se puede considerar como un caso particular del proceso lognormal no homogéneo (o con factores exógenos) con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned}A_1(x, t) &= h(t)x \\A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2,\end{aligned}$$

donde h es una función continua.

El proceso lognormal así definido ha sido ampliamente estudiado, tanto desde el punto de vista de la inferencia como el de tiempos de primer paso (Gutiérrez et al. [26], [29], [30] y [36]), considerando el caso en el que h es una función lineal de los parámetros, esto es,

$$h(t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i F_i(t)$$

donde $\beta_j \in \mathbb{R}$ y F_j son funciones continuas, $j = 1, \dots, q$, que conforman los *factores exógenos*, cuya inclusión obedece a la idea de introducir en el modelo influencias externas que alteren el comportamiento de la variable en estudio. Dichas funciones F_j deben ser parcialmente conocidas (al menos debemos tener información suficiente para calcular su integral entre dos instantes cualesquiera de tiempo) y, en cualquier caso, deben ser independientes de parámetros desconocidos.

No obstante, observemos que en el caso que nos ocupa, ($h(t) = me^{-\beta(t-t_0)}$), esta función no es lineal en los parámetros y no son válidos los resultados hasta ahora obtenidos. De hecho, la no linealidad dificulta en gran medida el proceso inferencial. De esta forma, en una primera aproximación, nos centraremos en el problema de estimación de los parámetros del modelo, concretamente mediante el método de máxima verosimilitud, lo cual permitirá, vía el teorema de Zehna, la estimación máximo verosímil de ciertas funciones paramétricas como la media, moda, covarianza y cuantiles. Posteriormente, y como consecuencia de las complicaciones de tipo numérico que presentan las ecuaciones de verosimilitud, abordaremos distintas alternativas para obtener los estimadores de los parámetros.

A continuación se estudia el problema de tiempo de primer paso en el modelo propuesto. Plantearemos las barreras para las cuales se dispone de solución explícita para la densidad de tiempo de primer paso y describiremos cómo abordar la situación cuando no se dispone de una forma funcional exacta para tal densidad.

Para finalizar estudiaremos el problema concreto del tiempo en que se produce la inflexión en nuestro modelo, que en el caso particular de disponer de una sola trayectoria de datos es equivalente al estudio de un problema de tiempo de primer paso por una barrera constante. Sin embargo, en el caso de disponer de múltiples trayectorias con valores iniciales distintos, tal consideración no es válida. En este caso, proponemos un procedimiento alternativo de estimación no paramétrica de la densidad de la variable de interés a partir de observaciones obtenidas mediante simulación de trayectorias. Asimismo se presenta un estudio de simulación para comparar los métodos en el caso en que ambos sean aplicables.

3.1. Estimación máximo verosímil de los parámetros del modelo

El esquema que vamos a seguir para la estimación máximo verosímil de los parámetros del modelo, m , β y σ^2 , es el siguiente:

1. En primer lugar, calcular la función de verosimilitud asociada a los datos muestrales.
2. En segundo lugar, y tras realizar una reparametrización que simplifica las operacio-

nes (en la que los nuevos parámetros pasan a ser a , b y σ^2), se obtienen las ecuaciones de verosimilitud. Dichas ecuaciones no tienen solución explícita, debiéndose recurrir a esquemas numéricos para su resolución. Con la suposición de que los instantes de tiempo en los que se observan los valores de las trayectorias estén igualmente espaciados, se obtienen soluciones para a y σ^2 en términos del tercer parámetro, b , mientras que la ecuación que proporciona el estimador máximo verosímil de b sigue sin tener solución explícita, lo cual motiva la necesidad de considerar métodos numéricos. En este orden de cosas, abordamos este último problema de tres formas distintas:

- a) Empleo de procedimientos numéricos *clásicos* como el de Newton-Raphson.
- b) Utilización de un método numérico estocástico de optimización como el algoritmo *simulated annealing*, introducido por Metropolis et al. [65], y cuya idea fundamental es que un cambio de escala, llamado *temperatura*, permite movimientos más rápidos en la superficie de la función que se quiere maximizar, y reescalamientos parciales evitan la atracción a máximos locales. Sin embargo, este método no es fácil de usar en la práctica ya que exige un estudio *ad hoc* para cada situación particular.
- c) Por último, y debido a los inconvenientes que presentan los métodos anteriores, proponemos un método recursivo, muy simple desde el punto de vista de la implementación y con buenos resultados (al menos a nivel empírico), en el cual, partiendo de un valor inicial de b y de las estimaciones obtenidas para a y σ^2 a partir de dicho valor inicial, se actualiza el valor de b imponiendo alguna restricción sobre el modelo, restricción que vendrá dada en términos de la cota o del punto de inflexión, dependiendo de la naturaleza de las trayectorias disponibles.

Antes de proceder en sí con el proceso de estimación hay que hacer un breve comentario sobre la naturaleza de los datos de los que se va a disponer para efectuar el mismo. Podemos encontrarnos dos situaciones:

1. Disponer de una sola trayectoria del proceso, en cuyo caso supondremos que la distribución inicial es degenerada ya que, en otro caso, no se dispone de información suficiente para inferir sobre ella.
2. Disponer de varias trayectorias. En este caso pueden darse, a su vez, dos posibilidades:
 - a) Todas las trayectorias parten del mismo valor, o sea, la distribución inicial es degenerada.
 - b) Las trayectorias parten de valores diferentes, que se van a suponer procedentes de una distribución lognormal.

Trataremos el caso más general, para ir particularizando con posterioridad en cada caso ¹.

Función de verosimilitud

Consideremos un muestreo discreto del proceso, realizado sobre d trayectorias, en el que la observación de cada trayectoria se ha realizado sobre n_i instantes de tiempo, t_{ij} ($i = 1, \dots, d$ $j = 1, \dots, n_i$), en principio no iguales en cada muestreo, aunque $t_{i1} = t_1$, $i = 1, \dots, d$. Ello significa que fijados dichos valores temporales, se observan las variables $X(t_{ij})$ cuyos valores observados constituirán la muestra base del estudio inferencial. Sean $x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{d1}, \dots, x_{dn_d}$ dichos valores observados.

- Si suponemos que la distribución inicial es degenerada $P[X(t_1) = x_1] = 1$, los parámetros que debemos estimar son m , β y σ^2 y la función de verosimilitud asociada a los valores muestrales se obtiene como

$$L_{x_{ij}}(\alpha, \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^d \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{ij-1}, t_{ij-1}).$$

- Si suponemos que la distribución inicial es lognormal $X(t_1) \sim \Lambda_1(\mu_1, \sigma_1)$, los parámetros que debemos estimar son μ_1 , σ_1^2 , m , β y σ^2 y la función de verosimilitud asociada a los valores muestrales se obtiene como

$$L_{x_{ij}}(\mu_1, \sigma_1^2, \alpha, \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^d f(x_{i1}) \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{ij-1}, t_{ij-1}).$$

Notemos que al considerar logaritmos en esta segunda expresión y derivar respecto a los parámetros para obtener las ecuaciones de verosimilitud, las ecuaciones relativas a los parámetros μ_1 , σ_1^2 dependen únicamente de los valores iniciales y no involucran al resto de los parámetros. Por ello, continuaremos con esta segunda expresión, ignorando en el caso de distribución inicial degenerada las expresiones de tales estimadores.

Teniendo en cuenta que la función de densidad de transición es

$$f(x, t | y, s) = \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\ln x - \ln y + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(s-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t-s)\right]^2}{(t-s)\sigma^2}\right)$$

¹En la práctica, y como ya se comentó en el capítulo anterior, las situaciones en las que se puede suponer que la distribución inicial es degenerada se pueden abordar mediante el proceso propuesto por Capocelli y Ricciardi.

y notando por

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{\beta} \\ b &= e^{-\beta} \\ k &= \sum_{i=1}^d n_i, \end{aligned}$$

la función de verosimilitud asociada a la muestra, expresada en términos de los nuevos parámetros, queda como

$$\begin{aligned} L_{x_{ij}}(\mu_1, \sigma_1^2, a, b, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^d \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[\ln x_{i1} - \mu_1]^2}{\sigma_1^2}\right)}{x_{i1} \sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \frac{1}{(2\pi)^{(n_i-1)/2} (\sigma^2)^{(n_i-1)/2}} \times \\ &\quad \times \prod_{j=2}^{n_i} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1})\right]^2}{(t_{ij} - t_{ij-1})\sigma^2}\right)}{x_{ij} (t_{ij} - t_{ij-1})^{1/2}} \end{aligned}$$

cuyo logaritmo es

$$\begin{aligned} \ln L_{x_{ij}}(\mu_1, \sigma_1^2, a, b, \sigma^2) &= - \sum_{i=1}^d \left[\ln x_{i1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln \sigma_1^2 + \frac{[\ln x_{i1} - \mu_1]^2}{2\sigma_1^2} + \frac{n_i - 1}{2} \ln(2\pi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_i - 1}{2} \ln \sigma^2 + \sum_{j=2}^{n_i} \ln x_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{ij-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n_i} \frac{[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1})]^2}{(t_{ij} - t_{ij-1})\sigma^2} \right] = \\ &= - \frac{d}{2} \ln \sigma_1^2 - \frac{k}{2} \ln(2\pi) - \frac{k-d}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{i=1}^d \ln x_{i1} - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^d [\ln x_{i1} - \mu_1]^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln x_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{ij-1}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1})]^2}{(t_{ij} - t_{ij-1})\sigma^2}. \end{aligned}$$

Derivando respecto de μ_1 y σ_1^2 e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1} &= \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^d (\ln x_{i1} - \mu_1) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1^2} &= -\frac{d}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_1^4} \sum_{i=1}^d (\ln x_{i1} - \mu_1)^2 = 0\end{aligned}$$

de donde se concluye que los estimadores máximo verosímiles de μ_1 y σ_1^2 son

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \ln x_{i1} \\ \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (\ln x_{i1} - \hat{\mu}_1)^2.\end{aligned}$$

Derivando con respecto a a , σ^2 y b e igualando a cero se obtienen, respectivamente

$$0 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1}) \right]}{(t_{ij} - t_{ij-1})} [b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}] \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1}) \right]^2}{t_{ij} - t_{ij-1}} \\ &\quad - (k-d)\sigma^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1}) \right] \sigma^2 \quad (3.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1}) \right]}{(t_{ij} - t_{ij-1})} \times \\ &\quad \times [(t_{ij} - t_1)b^{(t_{ij}-t_1)-1} - (t_{ij-1} - t_1)b^{(t_{ij-1}-t_1)-1}]. \quad (3.3)\end{aligned}$$

Los estimadores máximo verosímiles de a , b y σ^2 verifican el sistema de ecuaciones anterior, del cual no es posible dar una solución explícita.

Si consideramos el caso particular en que $t_{ij} - t_{ij-1} = h$, $i = 1, \dots, d$, y por tanto:

- $t_{ij} - t_1 = (j-1)h$,
- $b^{t_{ij}} - b^{t_{ij-1}} = b^{t_{ij-1}} (b^h - 1)$,

$$\blacksquare t_{ij}b^{t_{ij}-1} - t_{ij-1}b^{t_{ij-1}-1} = b^{t_{ij-1}-1} (t_{ij-1}(b^h - 1) + hb^h),$$

las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(j-1)h} - b^{(j-2)h}) + \frac{\sigma^2}{2} h \right] [b^{(j-1)h} - b^{(j-2)h}], \\ 0 &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(j-1)h} - b^{(j-2)h}) + \frac{\sigma^2}{2} h \right]^2 - \\ &\quad - (k-d)\sigma^2 - \sigma^2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(j-1)h} - b^{(j-2)h}) + \frac{\sigma^2}{2} h \right] \\ 0 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(j-1)h} - b^{(j-2)h}) + \frac{\sigma^2}{2} h \right] [(j-1)hb^{(j-1)h-1} - (j-2)hb^{(j-2)h-1}] \end{aligned}$$

que, a su vez, pueden reescribirse como

$$A_{3,b} + a(b^h - 1)A_{2,b} + \frac{\sigma^2 h}{2} A_{1,b} = 0 \quad (3.4)$$

$$A_{4,b} + a^2(b^h - 1)^2 A_{2,b} + 2a(b^h - 1)A_{3,b} - \frac{\sigma^4 h^2}{4} (k-d) - \sigma^2 h(k-d) = 0 \quad (3.5)$$

$$A_{3,b}^* + a(b^h - 1)A_{2,b}^* + \frac{\sigma^2 h}{2} A_{1,b}^* = 0 \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{1,b} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} b^{(j-2)h} & A_{2,b} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} b^{2(j-2)h} & A_{3,b} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} b^{(j-2)h} \ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} \\ A_{1,b}^* &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} j b^{(j-2)h} & A_{2,b}^* &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} j b^{2(j-2)h} & A_{3,b}^* &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} j b^{(j-2)h} \ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} \\ A_{4,b} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln^2 \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}}. \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones (3.4) y (3.6), realizando algunas operaciones, obtenemos

$$a_b = \frac{A_{1,b}A_{3,b}^* - A_{1,b}^*A_{3,b}}{(b^h - 1)[A_{1,b}^*A_{2,b} - A_{1,b}A_{2,b}^*]}, \quad \sigma_b^2 = \frac{2}{h} \frac{A_{3,b}A_{2,b}^* - A_{3,b}^*A_{2,b}}{A_{1,b}^*A_{2,b} - A_{1,b}A_{2,b}^*}$$

y al reemplazar estas expresiones en (3.5)

$$A_{4,b} + a_b^2(b^h - 1)^2 A_{2,b} + 2a_b(b^h - 1)A_{3,b} - \frac{\sigma_b^4 h^2}{4} (k-d) - \sigma_b^2 h(k-d) = 0,$$

ecuación que no se puede resolver de forma exacta y, por tanto, deberá ser tratada mediante métodos numéricos. Una vez que hayamos calculado \hat{b} , se deduce que $\hat{a} = a_{\hat{b}}$ y $\hat{\sigma}^2 = \sigma_{\hat{b}}^2$.

Así, una vez obtenidos los estimadores máximo verosímiles de los parámetros a , b y σ^2 , los correspondientes a los parámetros originales del modelo, m y β son

$$\hat{\beta} = -\ln \hat{b} \quad \text{y} \quad \hat{m} = \hat{a} \cdot \hat{\beta}.$$

3.2. Estimación máximo verosímil de ciertas funciones paramétricas

Aplicando el teorema de invarianza de Zehna, y distinguiendo las dos distribuciones iniciales consideradas se tiene

- distribución inicial degenerada, $P[X(t_0) = x_0] = 1$:

$$\begin{aligned} \widehat{m}(t) &= x_0 \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[1 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)}\right]\right) \\ \widehat{R}(t, s) &= x_0^2 \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[2 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)} - e^{-\hat{\beta}(s-t_0)}\right]\right) \times \\ &\quad \times \left[\exp(\hat{\sigma}^2(t \wedge s - t_0)) - 1\right] \\ \widehat{M}_o(t) &= x_0 \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[1 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)}\right]\right) \exp\left(-\frac{3\hat{\sigma}^2}{2}(t - t_0)\right) \\ \widehat{C}_\alpha(t) &= x_0 \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[1 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)}\right]\right) \exp\left(-\frac{\hat{\sigma}^2}{2}(t - t_0) + z_{1-\alpha}\hat{\sigma}\sqrt{t - t_0}\right), \end{aligned}$$

- distribución inicial lognormal, $X(t_0) \sim \Lambda_1(\mu_0, \sigma_0^2)$:

$$\begin{aligned} \widehat{m}(t) &= \exp\left(\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right) \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[1 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)}\right]\right) \\ \widehat{R}(t, s) &= \exp(2\mu_0 + \sigma_0^2) \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[2 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)} - e^{-\hat{\beta}(s-t_0)}\right]\right) \times \\ &\quad \times \left[\exp(\hat{\sigma}^2(t \wedge s - t_0) + \sigma_0^2) - 1\right] \\ \widehat{M}_o(t) &= \exp(\mu_0 - \sigma_0^2) \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[1 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)}\right]\right) \exp\left(-\frac{3\hat{\sigma}^2}{2}(t - t_0)\right) \\ \widehat{C}_\alpha(t) &= \exp\left(\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right) \exp\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}} \left[1 - e^{-\hat{\beta}(t-t_0)}\right]\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\hat{\sigma}^2}{2}(t - t_0) + z_{1-\alpha}\sqrt{\hat{\sigma}^2(t - t_0) + \sigma_0^2}\right). \end{aligned}$$

3.3. Cuestiones numéricas. Métodos alternativos de estimación

Una vez obtenidas las estimaciones máximo verosímiles de las funciones de interés vamos a centrarnos en estudiar algunos métodos numéricos que nos permitan obtener los EMV debido a que, como ya se ha especificado, la resolución de forma exacta de la ecuación

$$A_{4,b} + a_b^2(b^h - 1)^2 A_{2,b} + 2a_b(b^h - 1)A_{3,b} - \frac{\sigma_b^4 h^2}{4}(k - d) - \sigma_b^2 h(k - d) = 0 \quad (3.7)$$

no siempre es posible. El problema principal de dicha ecuación es su complejidad algebraica lo que dificulta su resolución de forma exacta, principalmente cuando el número de datos de la muestra es grande. Debemos tener en cuenta que, a pesar de tener la ecuación una expresión simplificada, depende de forma directa de otras dos expresiones, a_b y σ_b^2 .

3.3.1. Método de Newton-Raphson

La primera alternativa lógica es resolver la ecuación (3.7) por alguno de los métodos numéricos clásicos existentes para encontrar raíces de ecuaciones, como por ejemplo el método de Newton-Raphson.

El método de Newton-Raphson es un método numérico que permite obtener las raíces reales de una función en un intervalo, cuando éstas no pueden calcularse de forma exacta. Para poder asegurar la convergencia de este método, independientemente de la solución inicial considerada y con rapidez de convergencia cuadrática, hay que imponerle a la función considerada, además de ser dos veces derivable, las siguientes condiciones:

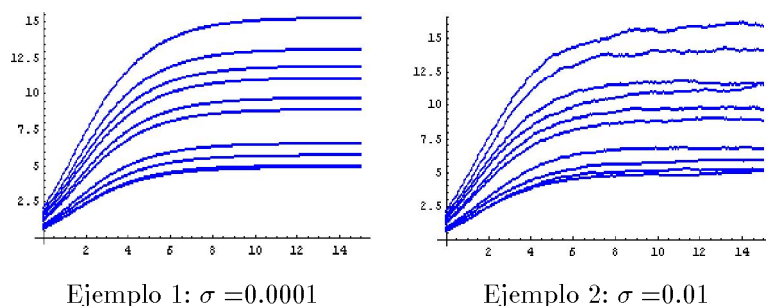
1. Debe tomar valores distintos en los extremos del intervalo.
2. La derivada no debe anularse en el intervalo.
3. La derivada segunda no debe cambiar de signo en el intervalo.

Para validar el funcionamiento de este método, y de los siguientes que consideraremos, en nuestro modelo se han simulado 10 trayectorias correspondientes a los casos

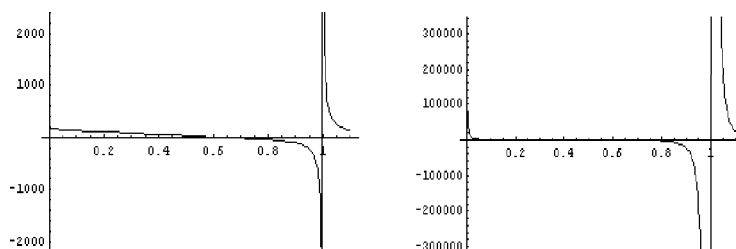
$$\begin{array}{ll} m = 1 & m = 1 \\ \beta = 0.5 & \beta = 0.5 \\ \sigma = 0.0001 & \sigma = 0.01 \end{array}$$

$t_0 = 0$, distribución inicial $\Lambda_1(0.1, 0.5)$ y paso $h = 0.05$ en el algoritmo de simulación presentado en el capítulo 2.

Las trayectorias obtenidas en cada caso son las siguientes:



Mediante un aplicación realizada con el programa Mathematica se han obtenido las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros tras la resolución de la ecuación (3.7) aplicando el método de Newton-Raphson. Para ello se define una función igual al término izquierdo de la ecuación y se aplica el método para determinar una raíz a la función en el intervalo $(0, 1)$. Sin embargo, en este caso no tenemos asegurada la convergencia del método debido a que la función que definimos no verifica las condiciones que aseguran dicha convergencia. Como puede verse en la gráfica 3.1 la función no toma valores distintos en los extremos del intervalo $(0, 1)$, es más no está definida para el valor 1 pero además tampoco verifica la tercera condición ya que la derivada segunda de la función, como puede verse en la gráfica 3.1, si cambia de signo en el intervalo.



Gráfica 3.1: Función obtenida de la ecuación (3.7) y su derivada segunda.

En este caso, si consideramos un valor inicial para el método de Newton-Raphson próximo al 1, el método nos proporciona un valor para b y, por consiguiente para β , erróneo ($\beta = 0.00111459$), pero si consideramos un valor inicial inferior a 0.99, el método converge al verdadero valor de b . Por ejemplo considerando como valor inicial para el método 0.1, obtenemos los estimadores:

$$\begin{aligned}\hat{m} &= 1.00002 \\ \hat{\beta} &= 0.500031 \\ \hat{\sigma} &= 0.000094137.\end{aligned}$$

En el segundo caso se obtienen las estimaciones

$$\begin{aligned}\hat{m} &= 1.00414 \\ \hat{\beta} &= 0.507043 \\ \hat{\sigma} &= 0.00978979.\end{aligned}$$

3.3.2. Algoritmo simulated annealing

El algoritmo *simulated annealing* o de sobrecalentamiento simulado es un método numérico que se utiliza para optimizar funciones, pero no es un método determinístico sino basado en simulación. Las diferencias entre la aproximación numérica y la aproximación mediante simulación al problema

$$\min_{\theta \in \Theta} f(\theta) \tag{3.8}$$

recaen en el tratamiento de la función f ². Si se utilizan métodos numéricos determinísticos en un problema de optimización, deberán tenerse en cuenta las propiedades analíticas de la función principal. Para las aproximaciones mediante simulación el uso de las propiedades analíticas de f juega un papel menor.

Los métodos que usan simulación han ganado atractivo con respecto a los métodos numéricos clásicos debido a la menor exigencia en cuanto a la regularidad del dominio Θ y de la función que se quiere optimizar. Por supuesto, puede existir una aproximación numérica alternativa que proporcione una solución exacta de (3.8), algo que raramente se obtiene mediante un algoritmo estocástico, pero la simulación tiene la ventaja de saltarse los primeros pasos del mecanismo de un algoritmo y de estudiar si f verifica algunas condiciones de regularidad. Esto es particularmente útil cuando f es muy costosa de computar.

El algoritmo *simulated annealing* (ver Robert y Casella [77]) fue introducido por Metropolis et al. [65] para minimizar una función criterio en un conjunto finito de tamaño muy grande, pero también se aplica para optimizar en un conjunto continuo (Dufflo [11]) y para simular (Kirkpatrick et al. [42]).

La idea fundamental del método de *simulated annealing* se basa en una analogía del principio termodinámico de la cristalización. Para obtener un cristal perfecto (mínima energía), primero se calienta el material al estado líquido (estado de alta energía atómica) y posteriormente se reduce la temperatura lentamente hasta que se enfria (decrecimiento de la energía) teniendo en cuenta que la velocidad de decrecimiento es un aspecto fundamental ya que un enfriamiento demasiado rápido implicaría impurezas (no se alcanzaría la energía mínima) por lo que no se alcanzaría el óptimo (ver Murillo [67]). Es decir, un cambio de escala, llamado temperatura, permite movimientos más rápidos en la superficie

²Para maximizar basta considerar $-f$.

de la función f a minimizar, cuyo negativo es denominado energía. Por tanto, el reescalamiento parcial evita la atracción de mínimos locales. Dado un parámetro de temperatura $T > 0$ y una muestra $\theta_1^T, \theta_2^T, \dots$, se genera la distribución

$$\exp(f(\theta)/T)$$

que puede ser usada para obtener un mínimo aproximado de f . Como T decrece a 0, los valores simulados de esta distribución llegan a estar concentrados en un entorno cada vez más estrecho del mínimo local de f (ver Winkler [88]).

El hecho de que esta aproximación tenga un moderado efecto en la atracción del mínimo local de f llega a ser más aparente cuando consideramos el método de simulación basado en el modo de proceder iterativo propuesto por Metropolis et al. [65] y conocido como *regla de aceptación de Metrópolis*. Dicha regla propugna una modificación del estado actual del sistema en los siguientes términos:

- Si la energía del sistema f , disminuye, acepta la modificación.
- Si la energía aumenta en Δf , la modificación puede ser aceptada con probabilidad $\exp(-\Delta f/T)$.

Esta regla se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma: comenzando en θ_0 , ζ se genera a partir de una distribución uniforme en un entorno $v(\theta_0)$ de θ_0 o, de forma más general, a partir de una distribución con densidad $g(|\zeta - \theta_0|)$, y el nuevo valor de θ se genera de la siguiente forma:

$$\theta_1 = \begin{cases} \zeta & \text{con probabilidad } \rho = \exp(\Delta f/T) \wedge 1 \\ \theta_0 & \text{con probabilidad } 1 - \rho, \end{cases}$$

donde $\Delta f = f(\zeta) - f(\theta_0)$. Por tanto si $f(\zeta) \geq f(\theta_0)$, ζ se acepta con probabilidad uno; esto es, θ_0 se cambia siempre por ζ . Por otro lado, si $f(\zeta) < f(\theta_0)$, ζ puede todavía aceptarse con probabilidad $\rho \neq 0$ y θ_0 se cambia por ζ . Esta propiedad permite al algoritmo escapar de la atracción de θ_0 , si θ_0 es un mínimo local de f , con una probabilidad que depende de la elección de la escala T , comparada con el rango de la densidad g .

En la mayoría de sus implementaciones usuales, el algoritmo *simulated annealing* modifica la temperatura T en cada iteración, por tanto es de la forma

Algoritmo *simulated annealing*:

1. Simular ζ de una distribución instrumental con densidad $g(|\zeta - \theta_i|)$.
2. Aceptar $\theta_{i+1} = \zeta$ con probabilidad $\rho_i = \exp\{\Delta f_i/T_i\} \wedge 1$; tomar $\theta_{i+1} = \theta_i$ en otro caso.
3. Actualizar T_i con T_{i+1} .

La cadena de Markov (θ_i) creada ya no es homogénea. Sin embargo, existen resultados de convergencia en el caso de espacios finitos (ver Hájek [40]). Por ejemplo, si $T_i = \Gamma / \log i$, hay una convergencia a un mínimo global si y sólo si Γ verifica cierta condición (ver Robert y Casella [77]). Winkler [88] extiende la demostración de Hájek y Andrieu y Doucet [2] ofrecen una demostración de la convergencia del algoritmo *simulated annealing* en el contexto de los modelos de Markov.

Numerosos artículos y libros han considerado la determinación práctica de la secuencia (T_n) (ver Geman y Geman [15], Mitra et al. [66], Van Laarhoven y Aarts [86] y Aarts y Kors [1] entre otros). En contraste con la tasa logarítmica de antes, una tasa geométrica, $T_i = \gamma^i T_0$ ($0 < \gamma < 1$), se suele usar también en la práctica, con la constante γ calibrada al comienzo del algoritmo de forma que la tasa de aceptación sea suficientemente grande en el algoritmo de Metropolis.

Dufflo ([11] pág 264-271) propuso una extensión de estos métodos de *simulated annealing* a un caso general (continuo).

En la literatura se garantiza la convergencia asintótica del algoritmo *simulated annealing*, pero en la práctica se debe implementar en tiempo finito. Estudiemos más detenidamente los pasos que hay que seguir para dicha implementación. Para poder aplicar el algoritmo de *simulated annealing* a una función para optimizarla se deben resolver previamente una serie de preguntas:

- ¿Qué es una solución del problema?
- ¿Qué es un entorno de una solución?
- ¿Cómo determinar la solución inicial?
- ¿Cómo determinar una solución a partir de otra?
- ¿Cómo determinar T_0 ?
- ¿Cuál será la proporción de enfriamiento?
- ¿Cuál será la longitud de la cadena, L ?
- ¿Cuál será el criterio de parada?

Para poder responder a estas preguntas, recordemos previamente el problema que queremos resolver con este método. Nuestro objetivo es maximizar la función de verosimilitud

que depende de tres parámetros (a , b y σ^2)

$$L_{x_{ij}}(a, b, \sigma^2) = \prod_{i=1}^d \frac{1}{x_{i1} \sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[\ln x_{i1} - \hat{\mu}_1]^2}{\hat{\sigma}_1^2}\right) \frac{1}{(2\pi)^{(n_i-1)/2} (\sigma^2)^{(n_i-1)/2}} \times \\ \times \prod_{j=2}^{n_i} \frac{1}{x_{ij} (t_{ij} - t_{ij-1})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1})]^2}{(t_{ij} - t_{ij-1})\sigma^2}\right)$$

para encontrar estimaciones máximo verosímiles de los parámetros. Estamos considerando los estimadores máximo verosímiles de los parámetros μ_1 y σ_1^2 , en lugar de considerarlos como parámetros, ya que se obtuvieron de forma exacta

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \ln x_{i1} \\ \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (\ln x_{i1} - \hat{\mu}_1)^2 .$$

Como ya se especificó, maximizar esta función equivale a maximizar su logaritmo

$$\ln L_{x_{ij}}(a, b, \sigma^2) = -\frac{d}{2} \ln \hat{\sigma}_1^2 - \frac{k}{2} \ln(2\pi) - \frac{k-d}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{i=1}^d \ln x_{i1} - \\ - \frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2} \sum_{i=1}^d [\ln x_{i1} - \hat{\mu}_1]^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln x_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{ij-1}) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a (b^{(t_{ij}-t_1)} - b^{(t_{ij-1}-t_1)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t_{ij} - t_{ij-1})]^2}{(t_{ij} - t_{ij-1})\sigma^2}$$

y si eliminamos las constantes que no afectan al maximizar, y suponemos $t_{ij} - t_{ij-1} = h$ nos queda la siguiente expresión

$$-\frac{k-d}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2h\sigma^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a b^{(j-2)h} (b^h - 1) + \frac{\sigma^2 h}{2} \right]^2 ,$$

luego consideraremos como función f para el algoritmo

$$f(a, b, \sigma^2) = \frac{k-d}{2} \ln \sigma^2 + \frac{1}{2h\sigma^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \left[\ln \frac{x_{ij}}{x_{ij-1}} + a b^{(j-2)h} (b^h - 1) + \frac{\sigma^2 h}{2} \right]^2 ,$$

que coincide con la expresión anterior cambiada de signo. Dicho cambio es debido a que nosotros queremos maximizar la función pero el algoritmo lo que hace es minimizarla.

Una vez establecida la función que se quiere maximizar vamos a intentar responder a las preguntas anteriores, para poder posteriormente implementar el algoritmo. Debe tenerse en cuenta que las condiciones que garantizan la convergencia del método de *simulated annealing*, tal y como se presenta en Aarts y Korst [1], cuando se utiliza la regla de aceptación de Metrópolis, son: conexión entre los estados (lo cual es evidente en nuestro caso ya que el espacio de parámetros es continuo), todos los entornos tienen el mismo cardinal y en un entorno todos los estados tienen la misma probabilidad de ser generados y reversibilidad entre los estados: el estado j pertenece al entorno del estado i si y sólo si i pertenece al de j , y la probabilidad de generar j a partir de i es igual a la probabilidad de generar i a partir de j . Estas dos últimas condiciones serán tenidas en cuenta a la hora de especificar el entorno de una solución y cómo obtener una nueva solución a partir de otra.

- Una solución en nuestro problema sería un valor para cada uno de los tres parámetros, dentro del espacio paramétrico al que pertenecen, es decir, sería un valor para $a \in (1, +\infty)$, un valor para $b \in (0, 1)$ y por último un valor para $\sigma^2 \in (0, +\infty)$.
- Consideraremos como entorno de una solución a aquellos valores de los parámetros muy próximos a la solución. En concreto vamos a considerar como entorno de una solución \tilde{a} de a a los valores del espacio paramétrico de a que disten como mucho de la solución 0.5, es decir, el intervalo $(\tilde{a} - 0.5, \tilde{a} + 0.5)$. La motivación para tomar dicho valor viene de que, a pesar de que el espacio paramétrico de a es $(1, +\infty)$, sabemos como acotarlo considerablemente mediante la utilización de los datos, como se razonará en el siguiente apartado. De forma análoga consideraremos como entorno de una solución \tilde{b} de b al intervalo $(\tilde{b} - 0.25, \tilde{b} + 0.25)$, y como entorno de una solución $\tilde{\sigma}^2$ de σ^2 al intervalo $(\tilde{\sigma}^2 - 0.01, \tilde{\sigma}^2 + 0.01)$. En cuanto a la consideración de dicho valor para σ^2 , es debido a que sabemos que en la práctica no suele tomar valores mayores que 1, sino más bien valores pequeños.
- Como solución inicial para el parámetro a , consideraremos el logaritmo del cociente entre el último dato y el primero, de cualquiera de las trayectorias. El motivo es que la cota del modelo para una trayectoria que parte del valor inicial x_0 es $k = x_0 e^a$, de donde $a = \log(k/x_0)$, y así el valor considerado proporciona una aproximación al verdadero valor de a , que será tanto mejor cuanto más próximas estén las trayectorias de alcanzar su cota.

En el caso del parámetro b , consideraremos como solución inicial cualquier valor de su espacio paramétrico. Por último, para el parámetro σ^2 consideraremos un valor inicial dentro del intervalo $(0, 1]$ ya que, como ya se ha comentado, en la práctica dicho valor suele ser menor que 1.

- Debido al concepto de entorno establecido, dada una solución i , se obtendrá una nueva solución j mediante la suma de un valor uniforme generado de forma aleatoria. En concreto, para el parámetro a se le añadirá un valor $U(-0.5, 0.5)$, para el parámetro b se le añadirá un valor $U(-0.25, 0.25)$ y, por último, para el parámetro

σ^2 se le añadirá un valor $U(-0.01, 0.01)$, siempre y cuando los valores de la nueva solución j sigan perteneciendo al entorno de i .

- Tomaremos como temperatura inicial T_0 un valor suficientemente grande para que al realizar un muestreo simple de la función, el algoritmo de metrópolis acepte al menos el 90 % de las peores soluciones.
- Para calcular la nueva temperatura vamos a optar por multiplicar la anterior por una constante $\gamma = 0.95$, $T_i = \gamma^i T_0$. A pesar de que la elección de la tasa de enfriamiento $T_i = \Gamma / \log i$ puede asegurarnos la convergencia del método, tiene el inconveniente de que dicha convergencia es demasiado lenta y por ello, en la práctica, es necesario elegir otro tipo de tasa de enfriamiento, como la seleccionada, que son más realistas. (Ver Xavier Guyón [39], pág 215).
- Consideraremos como largo de cadena $L = 50$ dentro del algoritmo de Metrópolis, es decir truncaremos el algoritmo cuando hayamos realizado L iteraciones. Para asegurarnos la convergencia del mismo habría que seguir hasta el infinito pero eso en la práctica es imposible.
- Estableceremos como criterio de parada, para el algoritmo *simulated annealing*, una combinación de varias condiciones: marcaremos un número máximo de iteraciones del algoritmo, indicaremos una temperatura final que cuando se alcance detendrá el algoritmo y, además, comprobaremos si los últimos 50 valores de la función coinciden, en cuyo caso también se finalizará el algoritmo.

En el apéndice B aparece un diagrama de flujo que desarrolla el algoritmo *simulated annealing*. En dicho diagrama aparece el algoritmo de Metrópolis

$$\text{Metrópolis } (j, i, T) = A_{ji}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(j) \leq f(i) \\ e^{-\frac{f(i)-f(j)}{T}} & \text{si } f(j) > f(i) \end{cases}$$

Para implementar dicho algoritmo comprobaremos primero si $f(j) \leq f(i)$, en cuyo caso cambiaremos el valor de la solución actual i por la nueva solución $i := j$. Si, sin embargo, $f(j) > f(i)$ generaremos un valor $= U[0, 1]$. Si dicho valor es inferior o igual a $e^{-\frac{f(i)-f(j)}{T}}$ también haremos el cambio $i := j$, en caso contrario mantendremos el valor de i .

Para comprobar el funcionamiento del algoritmo en nuestro proceso hemos realizado su implementación con el programa Mathematica y lo hemos aplicado a las trayectorias simuladas en el apartado anterior. Los resultados obtenidos son, en el primer caso ($m = 1$, $\beta = 0.5$ y $\sigma = 0.0001$)

$$\begin{aligned}\widehat{m} &= 1.02042 \\ \widehat{\beta} &= 0.50641 \\ \widehat{\sigma} &= 0.00435977\end{aligned}$$

Es evidente que el algoritmo necesita una mayor depuración en cuanto a la elección de las condiciones iniciales del método (problema fundamental en su aplicación) para obtener estimaciones más finas. Pero el problema principal radica en que nuestra función f es muy sensible a pequeñas variaciones en los parámetros a y b cuando el valor del parámetro σ es muy pequeño. Recordemos que estos datos han sido simulados para $\sigma = 0.0001$, luego la función en dicho caso es muy sensible a pequeñas modificaciones, dificultando ello que el método afine en la estimación de los parámetros. Sin embargo, si aplicamos el mismo método a datos simulados con $\sigma = 0.01$ y los mismos valores que antes para m y β , se obtienen estimaciones sensiblemente mejores

$$\begin{aligned}\widehat{m} &= 0,998045 \\ \widehat{\beta} &= 0,500256 \\ \widehat{\sigma} &= 0,00838056\end{aligned}$$

Dado que en la práctica es habitual la aparición de valores pequeños de σ , la aplicación de este método exige una depuración muy exigente de las condiciones iniciales.

3.3.3. Procedimiento iterativo

El principal problema que nos hemos encontrado en la resolución de las ecuaciones de verosimilitud es que la ecuación (3.7) no es directamente resoluble en la incógnita b y los métodos numéricos presentados presentan algunos inconvenientes. Dado que el conocimiento de b proporciona, mediante sustitución directa, las estimaciones de los parámetros a y σ^2 (y por consiguiente de m y β), proponemos el siguiente algoritmo recursivo para la estimación de todos los parámetros, en el caso en el que se disponga de trayectorias que permitan visualizar el valor de la cota para cada una de ellas.

1. Se toma $i=0$ y se parte de un valor inicial de b , comprendido entre 0 y 1, $b^{(0)}$. Se calcula a partir de él $\beta^{(0)} = -\ln b^{(0)}$.
2. Se obtienen los valores $a^{(i)}$ y $m^{(i)}$ mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}a_{b^{(i)}} &= \frac{A_{1,b^{(i)}}A_{3,b^{(i)}}^* - A_{1,b^{(i)}}^*A_{3,b^{(i)}}}{((b^{(i)})^h - 1)[A_{1,b^{(i)}}^*A_{2,b^{(i)}} - A_{1,b^{(i)}}A_{2,b^{(i)}}^*]} \\ m^{(i)} &= a_{b^{(i)}}\beta^{(i)}.\end{aligned}$$

3. Teniendo en cuenta que la cota de cada trayectoria viene determinada por el valor real de los parámetros m y β y el valor inicial de la misma, esto es, $k = x_0 \exp(m/\beta)$, y que el cociente entre la cota y el valor inicial, para cualquiera de las trayectorias consideradas, resulta ser el mismo, se puede obtener un nuevo valor del parámetro $\beta^{(i+1)}$ mediante la ecuación

$$\beta^{(i+1)} = \frac{m^{(i)}}{\ln(k/x_0)}$$

y, a partir de él, $b^{(i+1)}$.

4. Hacer $i=i+1$, volver al paso 2 y repetir el proceso hasta conseguir la convergencia, entendiendo la misma en términos de una tolerancia, entre dos etapas sucesivas, en términos de b .

A partir de los valores de \hat{b} , $\hat{\beta}$ y \hat{m} obtenidos mediante este algoritmo, se obtiene

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2}{h} \frac{A_{3,\hat{b}} A_{2,\hat{b}}^* - A_{3,\hat{b}}^* A_{2,\hat{b}}}{A_{1,\hat{b}}^* A_{2,\hat{b}} - A_{1,\hat{b}} A_{2,\hat{b}}^*}$$

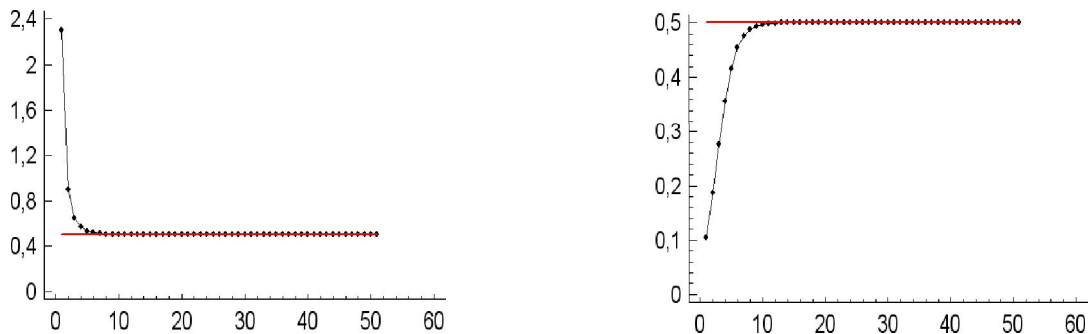
El inconveniente que se puede presentar en este método es que no haya información suficiente para determinar la cota, por ejemplo, porque las trayectorias no la hayan alcanzado o se desconozca este hecho. Cuando esto ocurra, se puede ajustar una curva Gompertz de las tratadas por Tan a cada trayectorias, obtener su punto de inflexión y, a partir de él, determinar su cota (recordemos que el valor de la ordenada correspondiente al punto de inflexión es ke^{-1}). Una vez obtenida ésta, se puede aplicar el método iterativo que se acaba de exponer.

Aplicando este procedimiento a las trayectorias simuladas consideradas en los métodos anteriores, se obtiene resultados similares a los obtenidos mediante el método de Newton-Raphson, con la diferencia de que este método no plantea la resolución de la ecuación (3.7), y es independiente de los valores iniciales considerados.

En el primer caso, partiendo de valores iniciales, $b=0.1$, $b=0.9$, se obtienen las mismas estimaciones de los parámetros para ambos valores

$$\begin{aligned}\hat{m} &= 0.99998 \\ \hat{\beta} &= 0.49999 \\ \hat{\sigma} &= 0.0000996587\end{aligned}$$

y las siguientes gráficas muestran la convergencia del método, en tales casos.

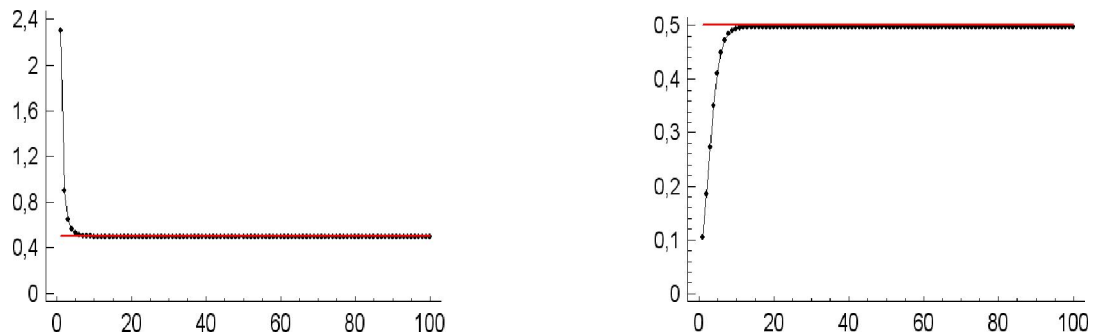


Convergencia de la estimación de β para el valor inicial $\beta^{(0)} = 2.30259$ ($b^{(0)} = 0.1$) y $\beta^{(0)} = 0.10536$ ($b^{(0)} = 0.9$)

En el segundo caso, la aplicación del método iterativo proporciona, de nuevo, las mismas estimaciones para los valores iniciales $b=0.1$ y $b=0.9$

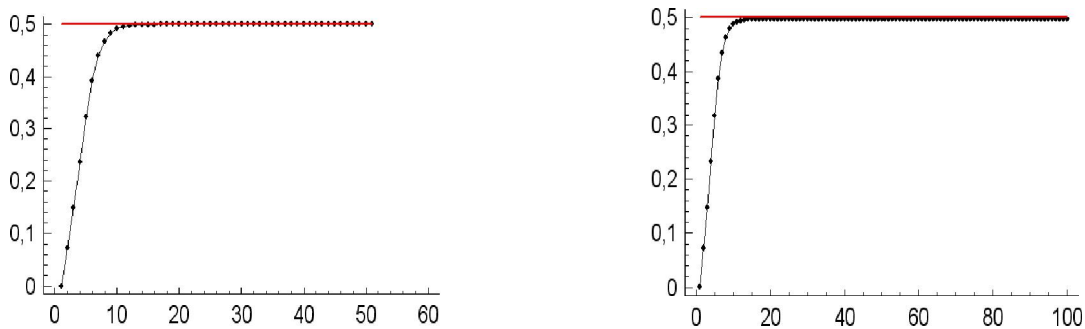
$$\begin{aligned}\hat{m} &= 0.993989 \\ \hat{\beta} &= 0.496994 \\ \hat{\sigma} &= 0.00995713\end{aligned}$$

y las siguientes gráficas relativas a la convergencia del método, para el valor de β .



Convergencia de la estimación de β para el valor inicial $\beta^{(0)} = 2.30259$ ($b^{(0)} = 0.1$) y $\beta^{(0)} = 0.10536$ ($b^{(0)} = 0.9$)

Recordemos que al resolver la ecuación (3.7) mediante el método numérico de Newton-Raphson, si considerábamos un valor inicial para el método próximo a 1, éste nos proporcionaba un valor para b , y por tanto para β , erróneo. Sin embargo, mediante el procedimiento iterativo, aunque partamos de un valor inicial muy próximo a 1, como por ejemplo $b = 0.9999$, obtenemos de nuevo las mismas estimaciones para los parámetros en los dos casos considerados. Veamos sus gráficas relativas a la convergencia del método.



Convergencia de la estimación de β , en el caso primero y segundo, para el valor inicial:
 $\beta^{(0)} = 0.0001$ ($b^{(0)} = 0.9999$)

3.4. Tiempos de primer paso

El objetivo de esta sección es el estudio del tiempo de primer paso a través de una barrera $S(t)$ del nuevo proceso de difusión que estamos estudiando. El motivo de dicho estudio es la gran variedad de campos de aplicación, dentro de la modelización de fenómenos aleatorios, donde aparece este problema. Tal es el caso de la Ecología, con el estudio del tiempo de primer paso de animales por determinadas zonas, o en Neurobiología, donde la actividad de una neurona puede ser estudiada a través del tiempo de primer paso por un umbral del proceso que modeliza la diferencia de potencial de la membrana neuronal.

En este tema destaca la labor realizada por el grupo de investigadores dirigidos por el profesor L. M. Ricciardi de la Universidad de Nápoles. Un resultado importante sobre esta cuestión fue la obtención de la densidad del tiempo de primer paso a través de barreras variables en el tiempo como solución de una ecuación integral de Volterra de segunda especie (ver Ricciardi et al. [75]). El estudio de dicha ecuación, más concretamente la regularización de su núcleo, llevaron a Buonocore et al. [6] a poder encontrar condiciones que evitaran las posibles singularidades del núcleo y aplicarlo a los procesos Wiener y Ornstein-Uhlenbeck para barreras de clase C^2 , finalizando este proceso Giorno et al. ([16], [17]) al generalizar el proceso de regularización a la clase de procesos de difusión homogéneos.

El estudio del caso no homogéneo ha sido uno de los temas desarrollados por el grupo de investigadores dirigidos por el profesor R. Gutiérrez de la Universidad de Granada, estudio que ha pasado por diversas etapas, en cada una de las cuales los resultados anteriores se fueron generalizando a determinadas familias de procesos no homogéneos (en Román y Torres [76] puede verse un amplio resumen sobre todo el proceso que ha seguido este estudio):

- La primera generalización fue a la clase de procesos no homogéneos cuya densidad

de transición se puede obtener a partir de la de procesos homogéneos mediante una cierta factorización de la misma (Gutiérrez et al. [22], [24]).

- La segunda generalización fue para la familia de procesos no homogéneos transformados del proceso Wiener (Gutiérrez et al. [25]).
- Por último se extendieron todos los resultados a la clase de procesos no homogéneos en general (Gutiérrez et al. [27]).

En el campo de las aplicaciones, para procesos no homogéneos, podemos citar, entre otras, el caso del proceso de difusión logarítmico normal con factores exógenos unidimensional, para el cual la obtención de la densidad de tiempo de primer paso a través de barreras constantes ha sido usada en el campo económico para el estudio de variables macroeconómicas como es el caso del producto interior bruto (Gutiérrez et al. [29]).

Como hemos comentado anteriormente, nuestro objetivo en esta sección es el estudio del tiempo de primer paso a través de una barrera $S(t)$ para el proceso de difusión que hemos introducido. Concretamente pretendemos encontrar la densidad de probabilidad de la variable *tiempo de primer paso*, lo cual no siempre podrá hacerse de forma explícita, debido a la implicación de ecuaciones de integrales de Volterra de segunda especie en su cálculo. Por lo tanto, comenzaremos mostrando para qué tipo de barreras es posible tener una forma funcional para la densidad de tiempo de primer paso y, posteriormente, comentaremos cómo podremos abordar el problema en caso contrario.

3.4.1. Ecuación integral de Volterra para la densidad de tiempo de primer paso

A continuación resumimos los principales resultados conocidos sobre el cálculo de la densidad de tiempo de primer paso en lo que se refiere a su obtención mediante ecuaciones integrales de Volterra.

Sea $\{X(t) : t \geq t_0; t_0 \in \mathbb{R}\}$ un proceso de difusión no homogéneo unidimensional con media y varianza infinitesimal $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, respectivamente, definido sobre el intervalo I . Supongamos, asimismo, que $P[X(t_0) = x_0] = 1$ y consideremos una función $S(t)$, en principio continua en $[t_0, +\infty)$.

Consideremos, $\forall t > t_0$ y $\forall x \in I$

$$T = \begin{cases} \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0\} & x_0 < S(t_0) \\ \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) < S(t) | X(t_0) = x_0\} & x_0 > S(t_0) \end{cases}$$

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} P[T \leq t],$$

que definen el tiempo de primer paso a través de la barrera $S(t)$ y su función de densidad de probabilidad respectivamente.

El siguiente teorema contiene el resultado que proporciona la ecuación integral de Volterra que satisface la densidad de tiempo de primer paso para un proceso no homogéneo. Fue propuesto en Buonocore et al. [6] para el caso homogéneo, si bien en su demostración no se usa explícitamente el carácter homogéneo del proceso, como comentan Gutiérrez et al. [27], por lo que es válido en general para cualquier tipo de proceso de difusión.

Teorema 3.4.1. Sean $k(t)$ y $r(t)$ funciones continuas en $[t_0, +\infty)$. Tomemos $\forall y \in I$ y $\tau < t$

$$\phi(x, t|y, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} F(x, t|y, \tau)$$

$$\Psi(S(t), t|y, \tau) = \begin{cases} \phi(S(t), t|y, \tau) + k(t)f(S(t), t|y, \tau) + r(t)[1 - F(S(t), t|y, \tau)] & x_0 < S(t_0) \\ \phi(S(t), t|y, \tau) + k(t)f(S(t), t|y, \tau) + r(t)F(S(t), t|y, \tau) & x_0 > S(t_0) \end{cases}$$

Entonces se verifica:

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = \rho \left\{ -2\Psi(S(t), t|x_0, t_0) + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0)\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau \right\}, \quad (3.9)$$

donde $\rho = \text{Sgn}(S(t_0) - x_0)$.

Por lo tanto, a la vista del teorema anterior, la función de densidad del tiempo de primer paso a través de barreras variables para un proceso de difusión no homogéneo $X(t)$, como es nuestro caso, verifica la ecuación (3.9), que es una integral de Volterra de segunda especie. Según la teoría general de ecuaciones integrales de Volterra, para garantizar la existencia de solución debemos encontrar funciones $k(t)$ y $r(t)$ que suavicen el comportamiento del núcleo de la integral y lo hagan no singular.

En este caso particular, la no singularidad del núcleo se consigue con la condición

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0,$$

lo cual nos conduce al siguiente resultado, cuya versión homogénea puede verse en Buonocore et al. [6], la extensión a los procesos no homogéneos transformados del Wiener en Gutiérrez et al. [25] y a los procesos no homogéneos en general en Gutiérrez et al. [27].

Teorema 3.4.2. Sean $k(t)$ y $r(t)$ dos funciones continuas en el intervalo $[t_0, +\infty)$. Si $S(t)$ es de clase $C^2[t_0, +\infty)$. Entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) = 0 \\ k(t) = \frac{1}{2} \left[A_1(S(t), t) - S'(t) - \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right] \end{cases}$$

Además, la función Ψ puede expresarse en términos de los momentos infinitesimales como:

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t|y, \tau) = & \frac{1}{2} f(S(t), t|y, \tau) \left[S'(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} - A_1(S(t), t) \right] + \\ & + \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Este resultado nos proporciona condiciones sobre $r(t)$ y $k(t)$ para asegurar la existencia de solución de la integral de Volterra pero la resolución de la integral sigue siendo muy compleja. No obstante, existe un caso en el que la obtención de la densidad de tiempo de primer paso se simplifica considerablemente.

Teorema 3.4.3. *En las condiciones de los resultados anteriores, si además se verifica*

$$\Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) = 0 \quad \forall t, \tau; t_0 \leq \tau < t,$$

entonces la densidad de tiempo de primer paso por la barrera $S(t)$, $g(S(t), t|x_0, t_0)$, viene dada por

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = 2|\Psi(S(t), t|x_0, t_0)|.$$

3.4.2. Aplicación al caso del nuevo proceso de difusión tipo Gompertz

A continuación vamos a aplicar los resultados anteriores para el proceso de difusión que hemos introducido en esta memoria y que, recordemos, tiene momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= mx e^{-\beta(t-t_0)} \\ A_2(x, t) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

y densidad de transición

$$\begin{aligned} f(x, t|y, \tau) = & \frac{1}{x \sqrt{2\pi\sigma^2(t-\tau)}} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\ln x - \ln y + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t-\tau) \right]^2}{(t-\tau)\sigma^2} \right). \end{aligned}$$

En primer lugar vamos a aplicar el teorema 3.4.2 para determinar la forma que adopta

la función (3.10). Puesto que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} &= f(x, t|y, \tau) \left(\frac{\left[\ln(x/y) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t - \tau) \right]}{x(t - \tau)\sigma^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{x^2 \sqrt{2\pi\sigma^2(t - \tau)}} \exp \left(- \frac{\left[\ln(x/y) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t - \tau) \right]^2}{2(t - \tau)\sigma^2} \right) \\
&= f(x, t|y, \tau) \left(- \frac{\left[\ln(x/y) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) + \frac{\sigma^2}{2} (t - \tau) \right]}{x(t - \tau)\sigma^2} - \frac{1}{x} \right) \\
&= -f(x, t|y, \tau) \left(\frac{\ln(x/y) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) + \frac{3}{2} \sigma^2 (t - \tau)}{x(t - \tau)\sigma^2} \right),
\end{aligned}$$

sustituyendo dicha expresión, junto con los momentos infinitesimales, en (3.10) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Psi(S(t), t|y, \tau) &= \frac{1}{2} f(S(t), t|y, \tau) \left[S'(t) + \frac{3}{4} 2\sigma^2 S(t) - m e^{-\beta(t-t_0)} S(t) - \sigma^2 S^2(t) \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\ln(S(t)/y) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) + \frac{3}{2} \sigma^2 (t - \tau)}{S(t)(t - \tau)\sigma^2} \right] = \\
&= f(S(t), t|y, \tau) \left[\frac{1}{2} S'(t) - \frac{1}{2} m e^{-\beta(t-t_0)} S(t) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{S(t) \left(\ln(S(t)/y) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) \right)}{2(t - \tau)} \right].
\end{aligned}$$

Así pues, en virtud del teorema 3.4.3, para que la ecuación integral de Volterra (3.9) tenga solución explícita, es suficiente que la barrera $S(t)$ verifique la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
S'(t) &= m e^{-\beta(t-t_0)} S(t) + \frac{S(t) \left(\ln(S(t)/S(\tau)) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)}) \right)}{(t - \tau)} \\
&= S(t) \left[m e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{\ln S(t) - \ln S(\tau) + \frac{m}{\beta} (e^{-\beta(t-t_0)} - e^{-\beta(\tau-t_0)})}{(t - \tau)} \right]
\end{aligned}$$

cuya solución general es

$$S(t) = S(t_0) \exp \left(A(t - t_0) + \frac{m}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \right), \quad A \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

en cuyo caso, a partir del teorema 3.4.3 se concluye

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = f(S(t), t|x_0, t_0) \frac{S(t)}{2(t-t_0)} \left| \ln \left(\frac{S(t_0)}{x_0} \right) \right|, \quad S(t_0) \neq x_0 \quad (3.12)$$

Observemos que la ecuación (3.12) expresa la densidad de tiempo de primer paso del proceso a través de una barrera del tipo (3.11). Sin embargo, para otro tipo de barreras no se tiene seguridad de que la ecuación integral posea solución explícita, en cuyo caso se debe recurrir a esquemas de integración numérica. En ese sentido, Buonocore et al. [6] emplean la regla del trapecio compuesta para aproximar la solución de la ecuación integral.

3.5. Estudio del problema del tiempo en que se produce la inflexión en el modelo

En el marco de la aplicación práctica del proceso de difusión tipo Gompertz que hemos definido, un problema de particular interés es el estudio de la variable aleatoria tiempo en que se produce la inflexión en las trayectorias asociadas a nuestro modelo. Este hecho tiene un gran interés ya que marca un cambio en la pauta de crecimiento así como la consecución de un porcentaje del mismo.

La función media asociada a nuestro proceso es una curva Gompertz del tipo (2.1), en concreto

$$m(t) = E[X(t_0)] \exp \left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}] \right),$$

con punto de inflexión

$$\left(t_0 + \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{m}{\beta} \right), E[X(t_0)] e^{m/\beta-1} \right).$$

Si se considera $P[X(t_0) = x_0] = 1$, esto es, todas las trayectorias parten del mismo valor inicial,

$$m(t) = x_0 \exp \left(\frac{m}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}] \right),$$

con punto de inflexión

$$\left(t_0 + \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{m}{\beta} \right), x_0 e^{m/\beta-1} \right)$$

y se puede plantear el problema citado como un problema de tiempo de primer paso por la barrera constante $x_0 e^{m/\beta-1}$. Para este tipo de barreras no existe solución explícita para la función de densidad del tiempo de primer paso pero pueden emplearse métodos numéricos para su aproximación.

Sin embargo, si cada trayectoria parte de un valor inicial distinto (situación que puede aparecer en la práctica y para la que nuestro modelo muestra su utilidad), esto es, de valores x_0^i que pueden provenir, por ejemplo, de una distribución lognormal, considerando el punto de inflexión de cada una de ellas a través del de

$$E[X(t)/X(t_0) = x_0^i]$$

que es $x_0^i e^{m/\beta-1}$, este problema no puede ser tratado como el de tiempos de primer paso por una barrera constante (ya que cada trayectoria tienen un punto de inflexión constante, pero distinto en cada una de ellas).

Dado que el valor de la abscisa de los puntos de inflexión no depende del valor inicial, proponemos el siguiente método para estimar la función de densidad del tiempo en el que ocurre la inflexión.

A partir de la simulación de trayectorias del proceso, se calcula para cada una de ellas el valor del instante de tiempo en el que por primera vez supera ³ el valor correspondiente a su punto de inflexión, obteniéndose así una muestra de valores de la variable aleatoria de la cual queremos conocer su función de densidad. Finalmente, estimamos tal densidad por procedimientos no paramétricos mediante el estimador núcleo de Nadaraya-Watson con ancho de banda constante (por simplicidad) y núcleo de Epanechnikov.

Notemos que en el caso de distribución inicial degenerada son aplicables tanto este procedimiento como el consistente en la resolución, mediante métodos numéricos, de una ecuación integral de Volterra asociada a un problema de tiempo de primer paso por una barrera constante.

Se ha realizado un estudio comparativo de ambos procedimientos para $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ y diversos valores de los parámetros m , β y σ^2 , mostrando que el método propuesto mejora en algunos aspectos al otro, en el caso en que éste último sea aplicable.

Los valores de estos parámetros se han tomado de forma que:

³Dado que la simulación de las trayectorias se realiza en instantes de tiempo discretos, la obtención del instante de tiempo en el que cada trayectoria supera el valor correspondiente a la ordenada de su punto de inflexión se realiza por interpolación lineal entre los dos instantes de tiempo en que ésta ocurre. La suposición de un paso suficientemente pequeño en la simulación de las trayectorias asegura una buena aproximación.

- Verifiquen las hipótesis del modelo (tengamos en cuenta que valores de m inferiores a β hacen que el punto de inflexión sea inferior al primer instante de tiempo de observación de la trayectoria).
- Sean valores que se presenten en situaciones reales (valores muy grandes de σ^2 darían lugar a trayectorias con tal variabilidad en torno a una curva tipo Gompertz que no parecería lógico la aplicación del modelo a dichos datos).
- No den lugar a valores de la ordenada del punto de inflexión tan grandes que superen la capacidad de cálculo del ordenador.
- La probabilidad de que se alcance el valor de la ordenada correspondiente al punto de inflexión sea muy próxima a uno, dado que calculamos la densidad del tiempo hasta que se produce la inflexión siempre que ésta efectivamente ocurra. Para ello, se han obtenido gráficas que muestran tal probabilidad en función del tiempo. Esto permite, por una parte, obtener el instante de tiempo en el que se tiene la máxima probabilidad de alcanzar el valor considerado, delimitando así la longitud de las trayectorias que vamos a generar para la aplicación del método propuesto. Por otra parte, se obtiene también el último instante de tiempo para el que hay una probabilidad próxima a cero (de orden 10^{-5}) de alcanzar la barrera. Este valor junto al anterior son de gran utilidad en el método que utiliza métodos numéricos para aproximar el valor de la función de densidad para los que está asegurada la convergencia cuando los valores de paso entre sucesivas iteraciones tienden a cero. Si en la utilización de este método se partiera siempre del valor t_0 , el tiempo de cálculo podría ser muy elevado.

Aplicación del método numérico

Se ha aplicado la fórmula compuesta de Simpson, en lugar de la fórmula compuesta del trapecio, para mejorar la resolución numérica de la ecuación integral de Volterra. En dicha resolución práctica juega un papel importante el valor del paso h en cada iteración. Valores de h excesivamente pequeños conducen, en algunos casos, a densidades irregulares o cuya integral es sensiblemente inferior a uno, como muestran sus representaciones gráficas en color negro en algunas gráficas de las páginas 89-98, y que conducen a valores erróneos de la media y la varianza (ver tabla⁴ 3.1). Por el contrario, valores de h grandes resuelven en su mayor parte los problemas anteriores, pero generan densidades poco suaves (ver casos problemáticos en las gráficas de las páginas 99-108 y tabla 3.2). Una elección *ad hoc* en los casos problemáticos ha resuelto los problemas planteados, como puede verse en las gráficas de las páginas 109-118 y en la tabla 3.3.

⁴Con fines comparativos se ha introducido en las tablas el valor t^* correspondiente al punto de inflexión de la función media teórica del proceso.

Aplicación del método no paramétrico

Se han simulado 1000 trayectorias para cada caso, a partir de las cuales se ha obtenido una muestra de valores observados de la variable bajo estudio. Las estimaciones Núcleo de Nadaraya-Watson de la densidad, obtenidas a partir de las muestras, se presentan en color rojo junto con las aproximaciones mediante el método numérico en cada gráfica de las páginas 89-118, con fines comparativos.

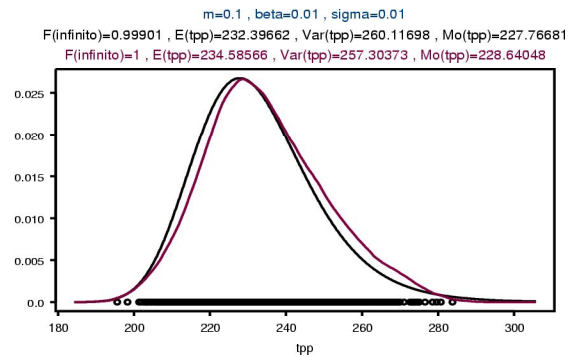
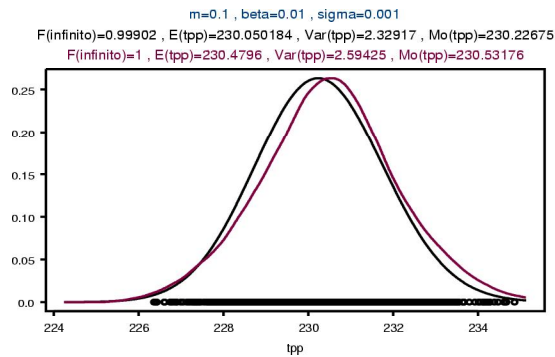
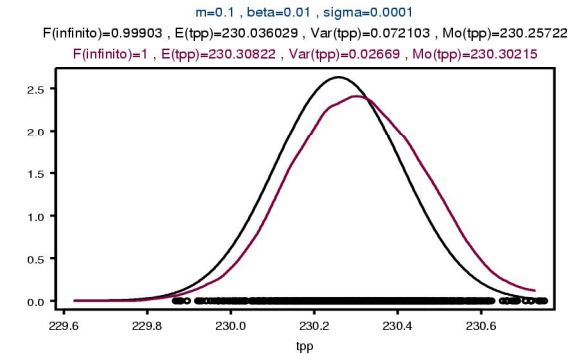
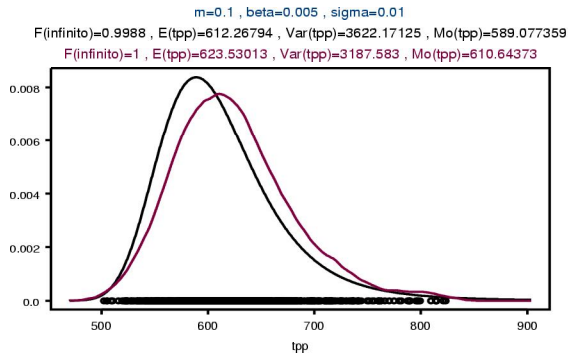
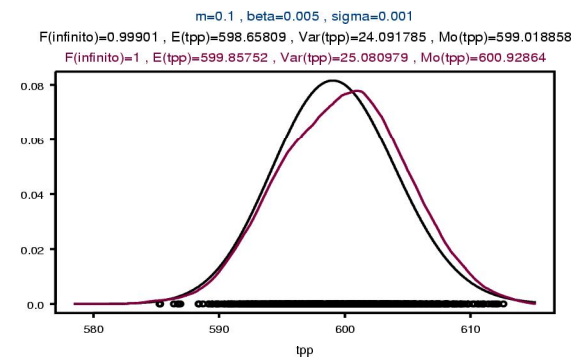
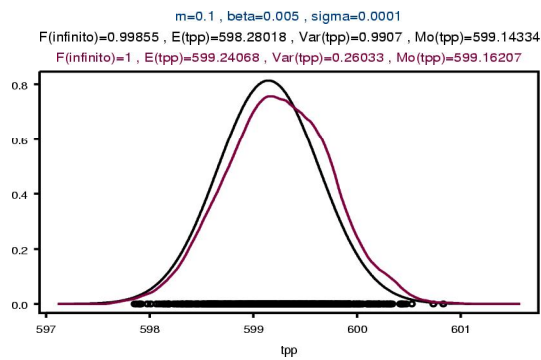
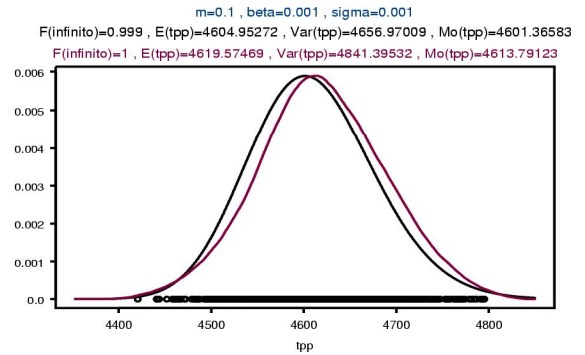
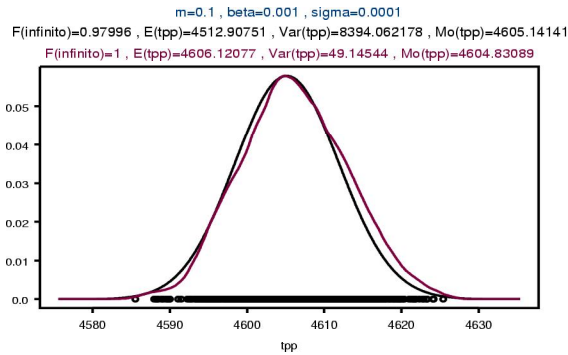
Conclusiones

- Un resultado óptimo en la aplicación práctica del método numérico depende de una elección apropiada del valor de h .
- La aproximaciones de las densidades obtenidas mediante el método numérico presentan desviaciones con respecto a las muestras obtenidas.
- El método propuesto presenta la ventaja adicional de que permite la realización de contrastes de bondad de ajuste. Debido a la forma de las estimaciones obtenidas se han aplicado contrastes de normalidad y lognormalidad a las muestras, cuyos resultados se recogen en la tabla 3.4.

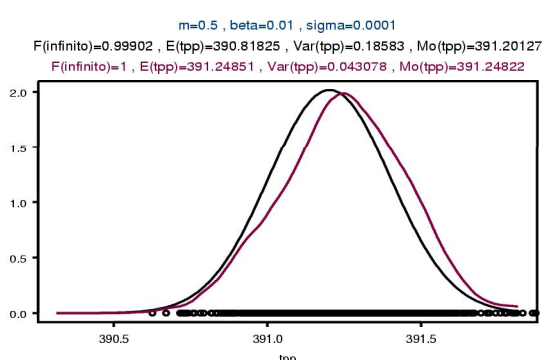
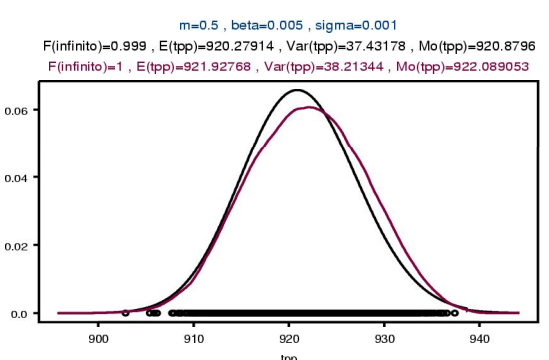
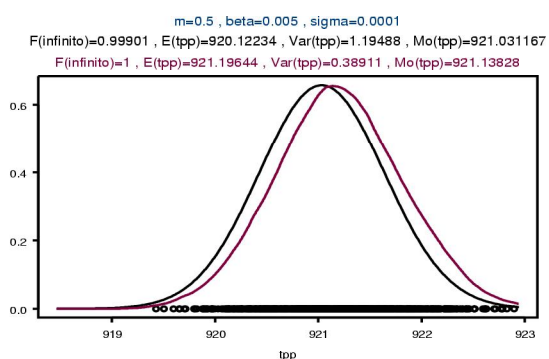
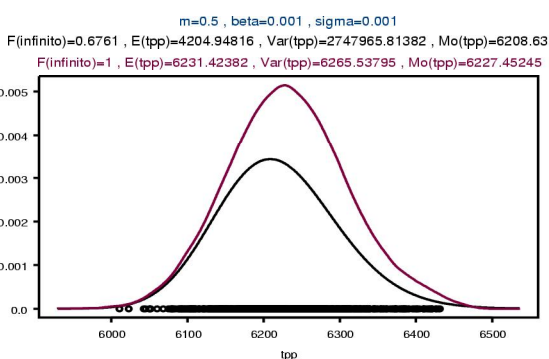
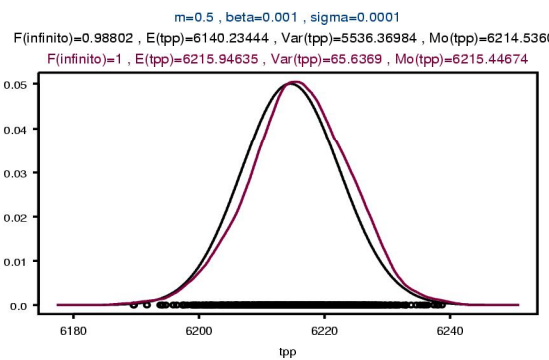
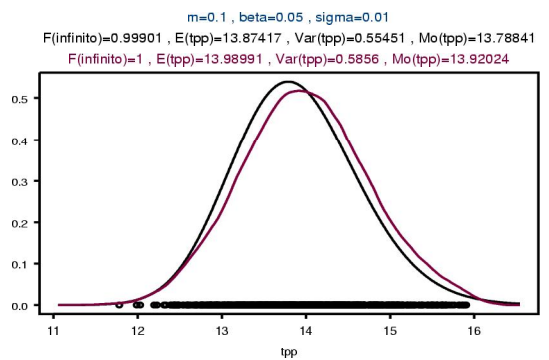
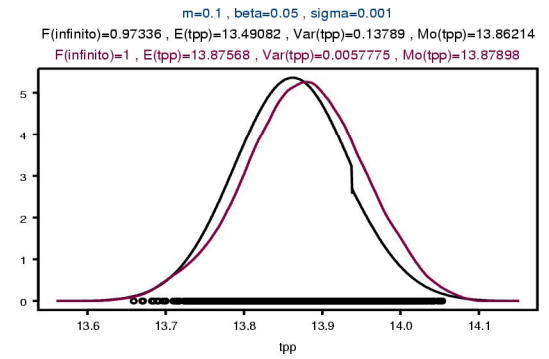
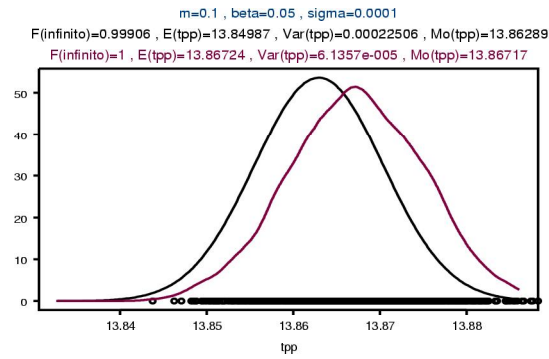
En las siguientes gráficas se muestran las aproximaciones de la densidad de tiempo de primer paso (en negro) y su estimación no paramétrica (en rojo) para los casos:

- **Caso 1:** Se consideran 1000 puntos en la resolución de la ecuación integral de Volterra en el rango de valores en que dicha densidad es no nula.
- **Caso 2:** Se consideran 100 puntos en la resolución de la ecuación integral de Volterra en el rango de valores en que dicha densidad es no nula.
- **Caso 3:** Se considera un número de valores adecuado, en cada caso, en la resolución de la ecuación integral de Volterra en el rango de valores en que dicha densidad es no nula.

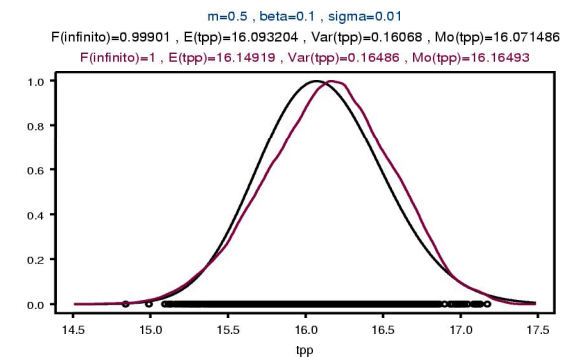
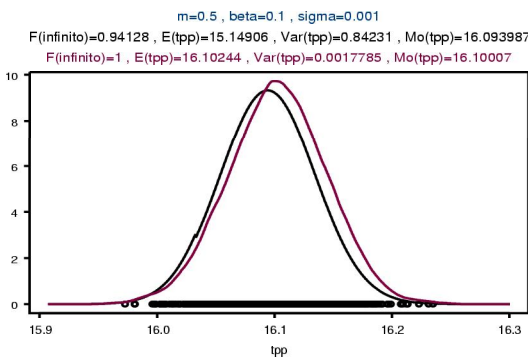
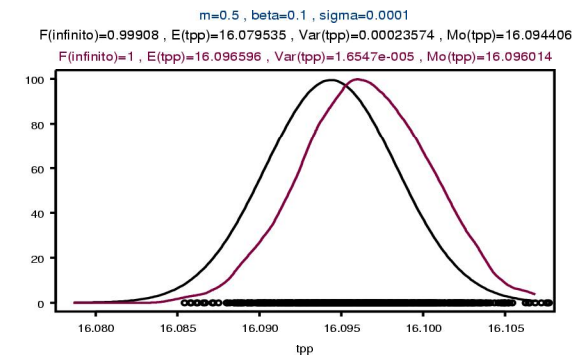
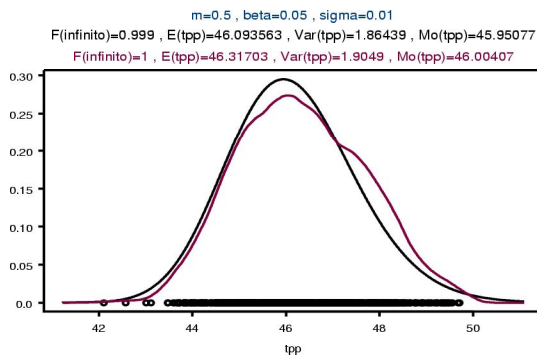
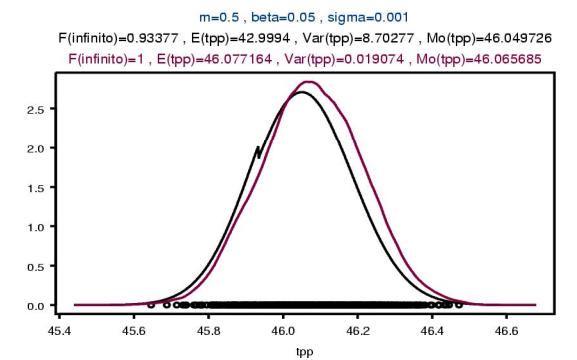
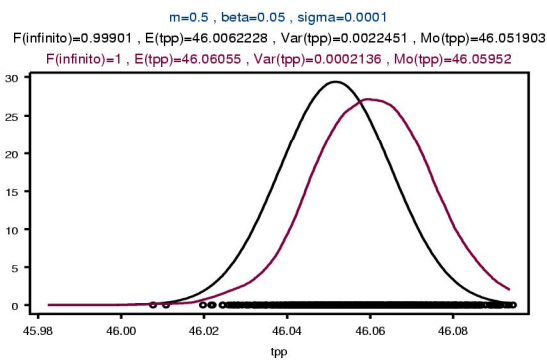
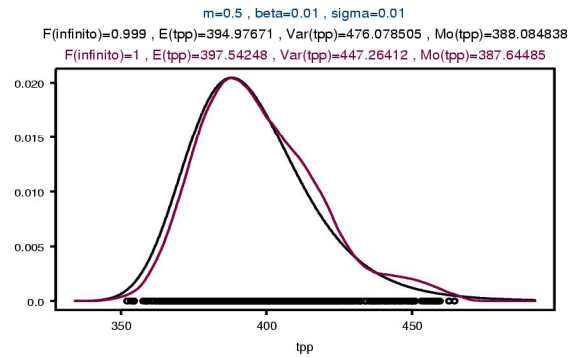
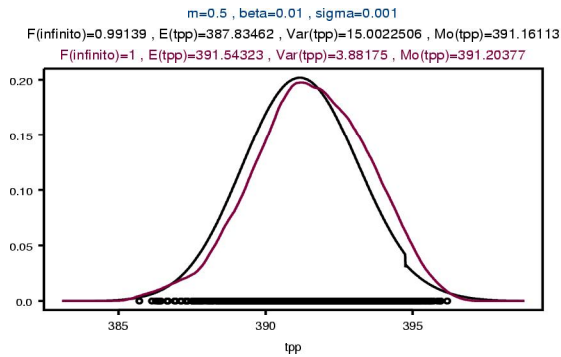
Caso 1



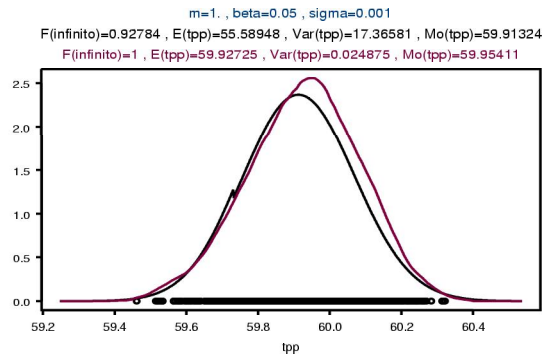
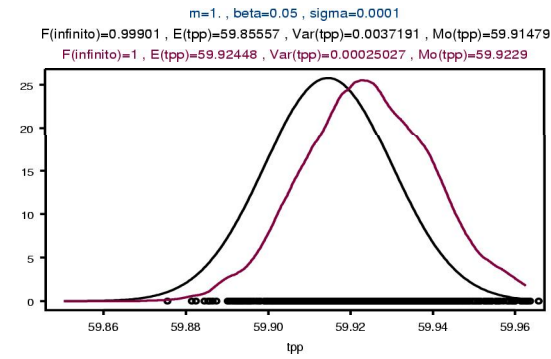
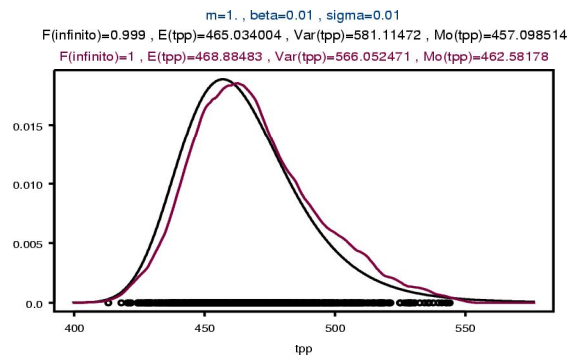
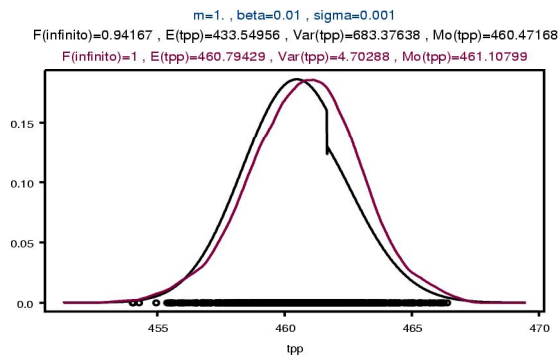
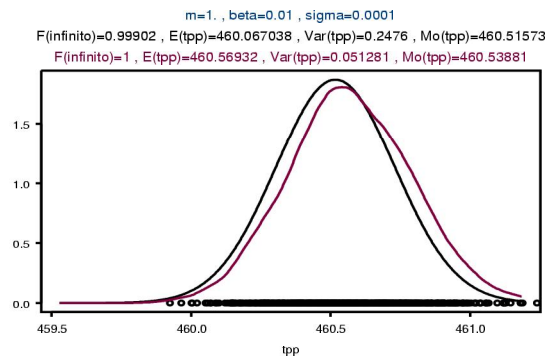
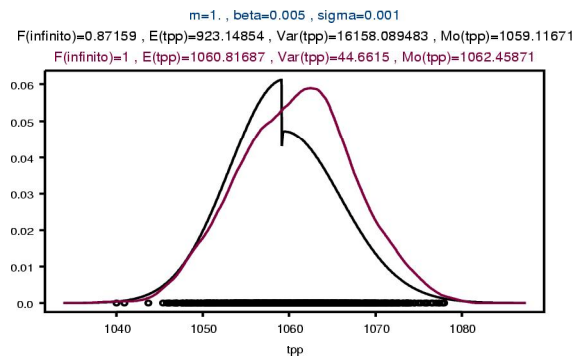
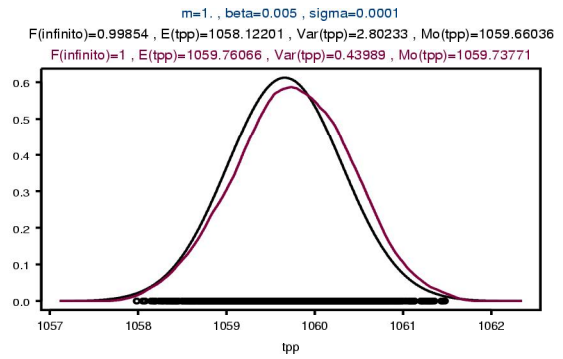
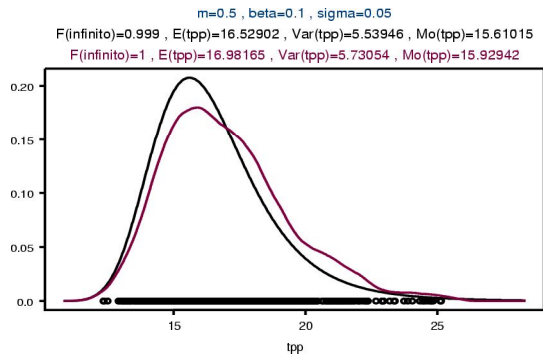
Caso 1 (continuación)



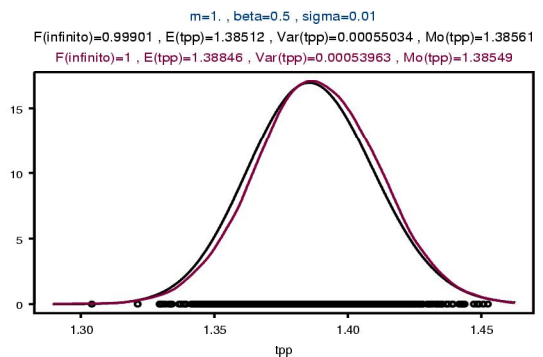
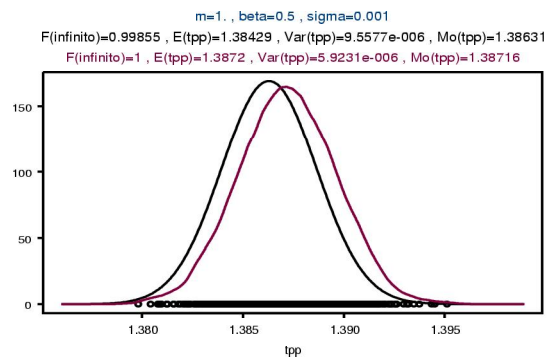
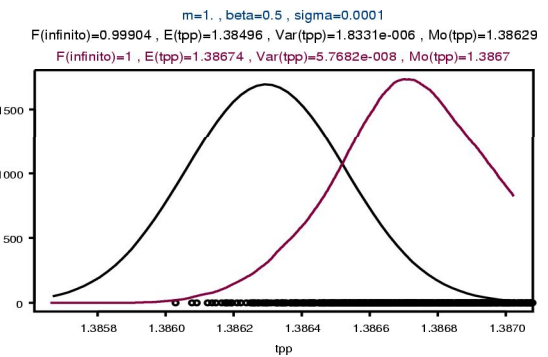
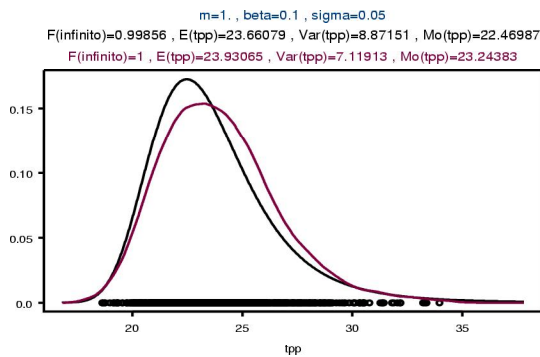
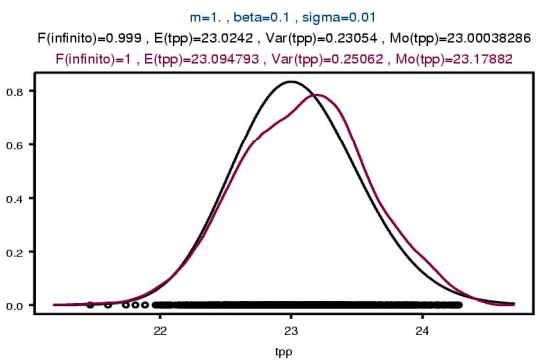
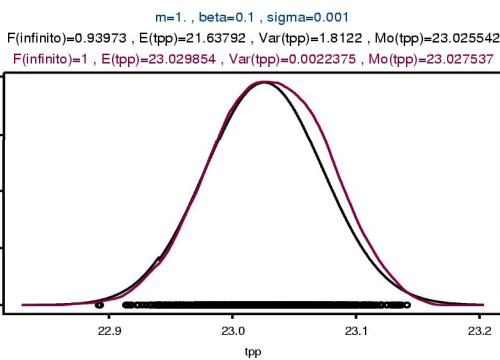
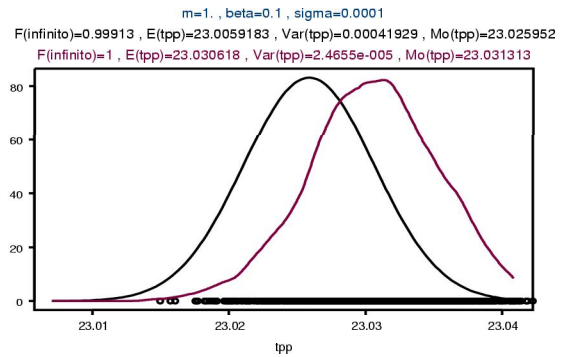
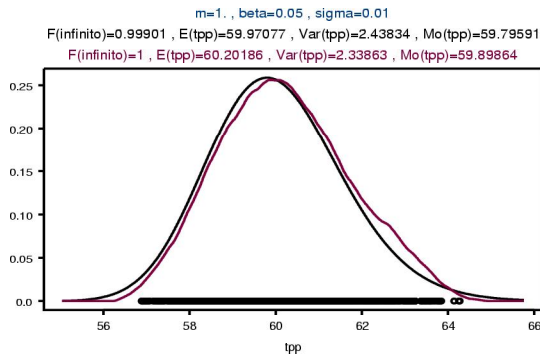
Caso 1 (continuación)



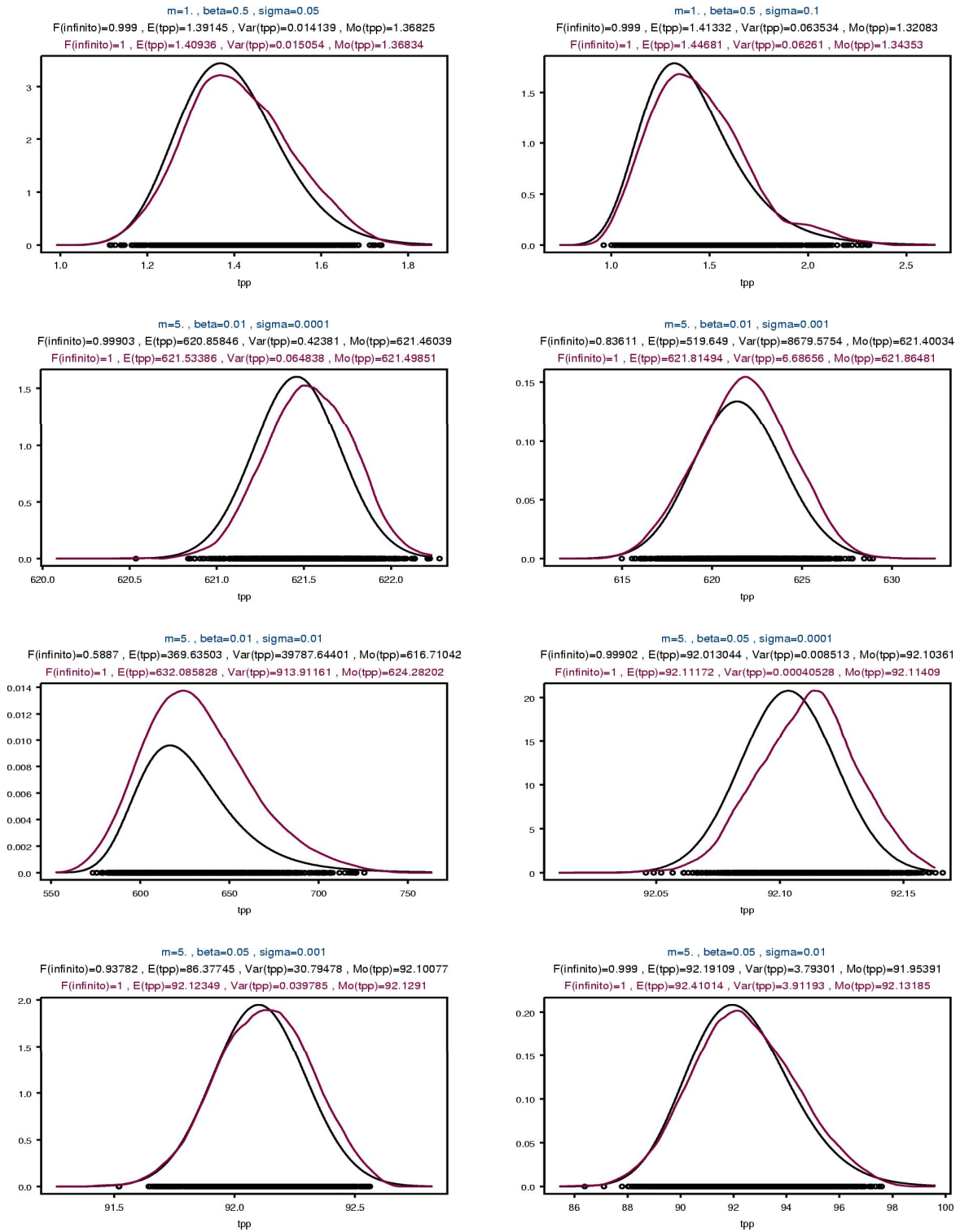
Caso 1 (continuación)



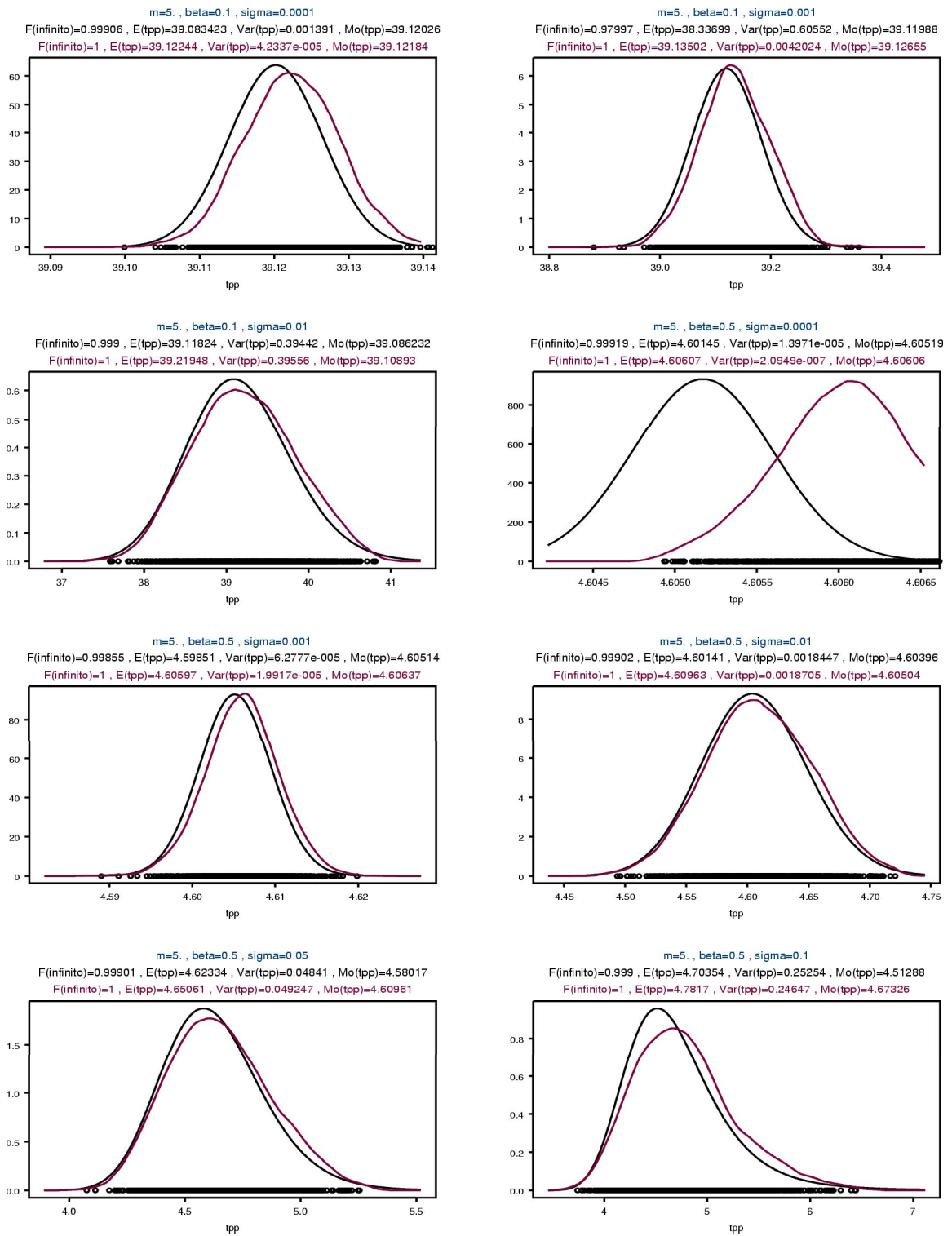
Caso 1 (continuación)



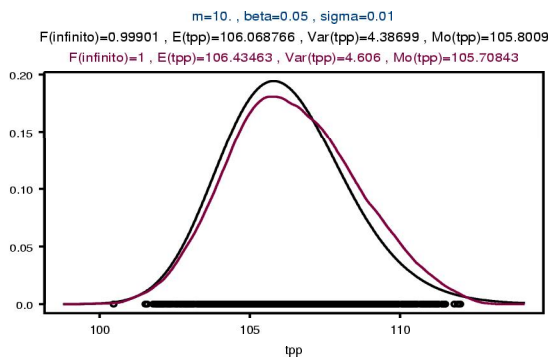
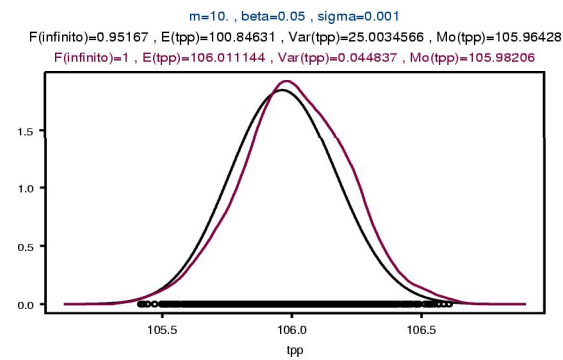
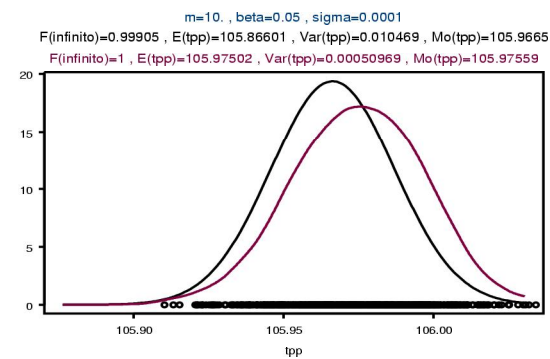
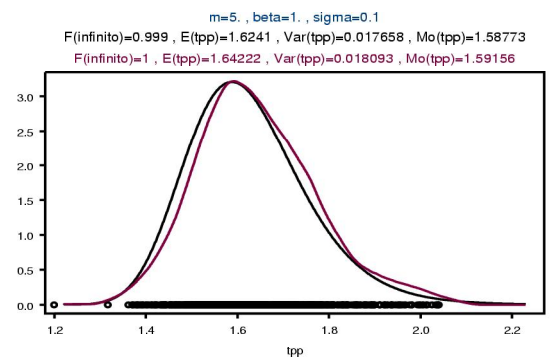
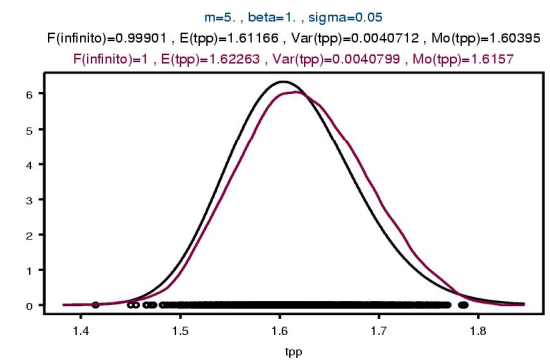
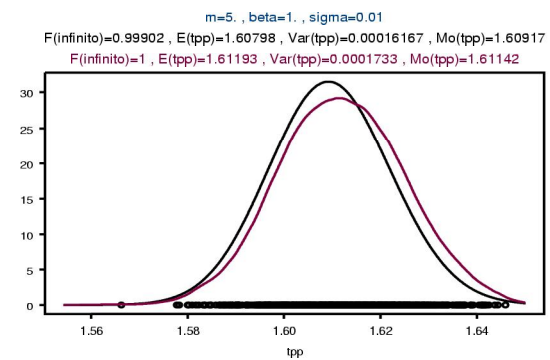
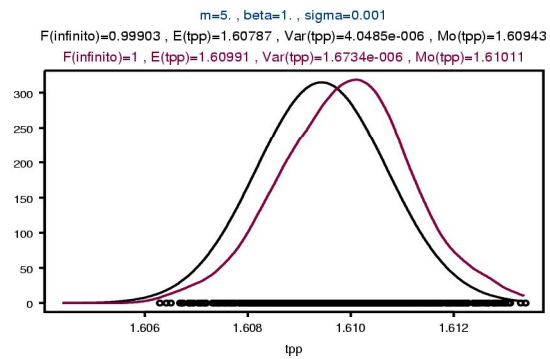
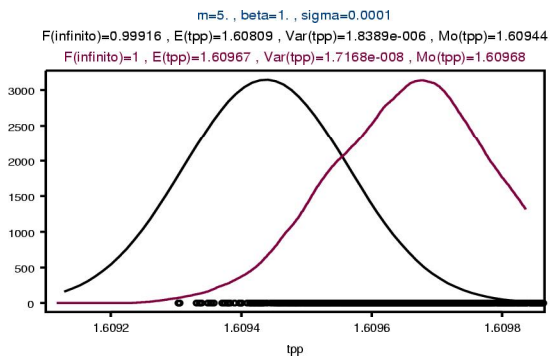
Caso 1 (continuación)



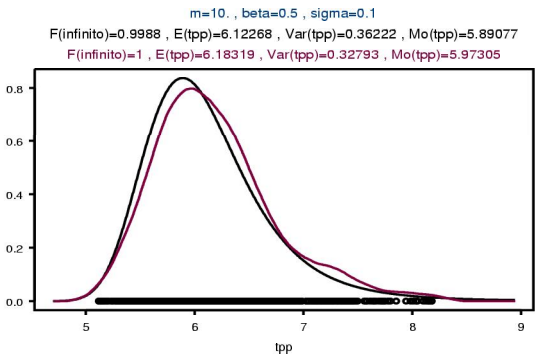
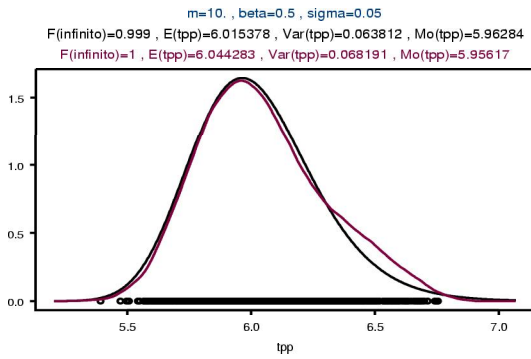
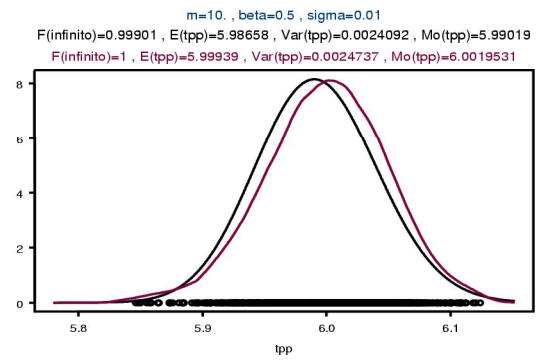
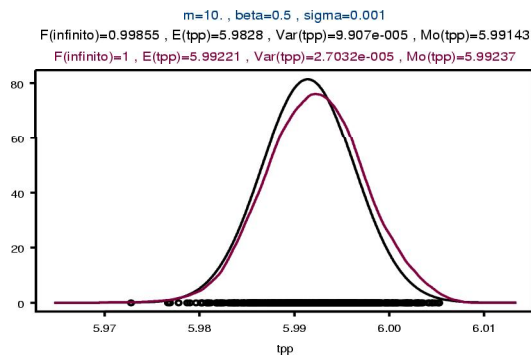
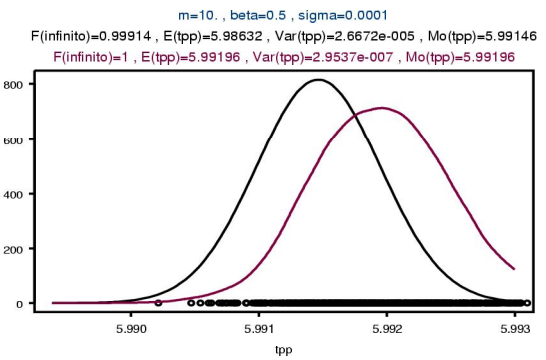
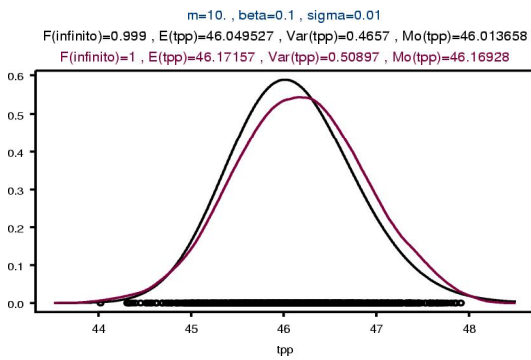
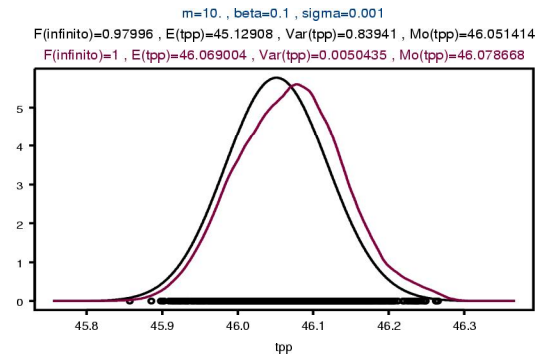
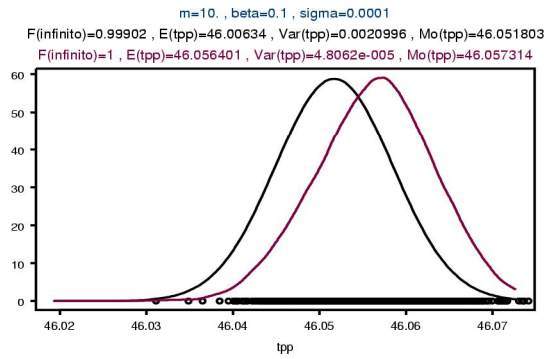
Caso 1 (continuación)



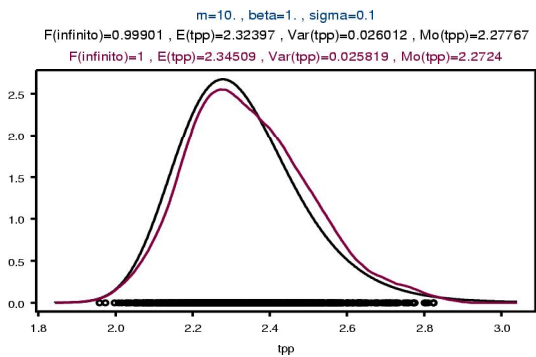
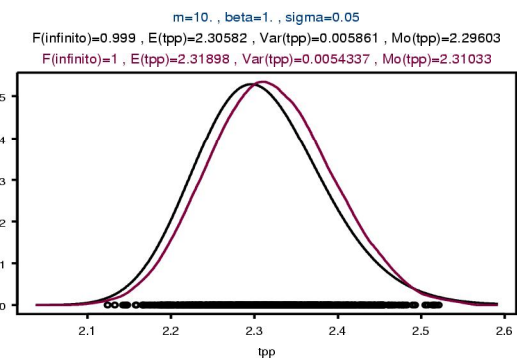
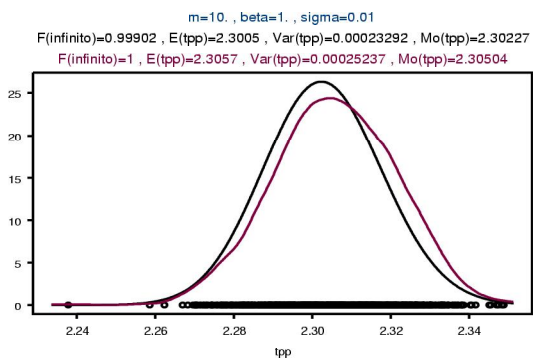
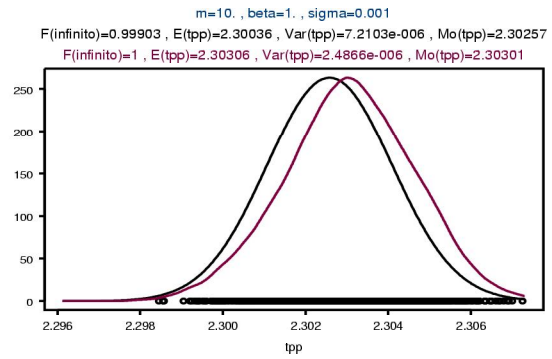
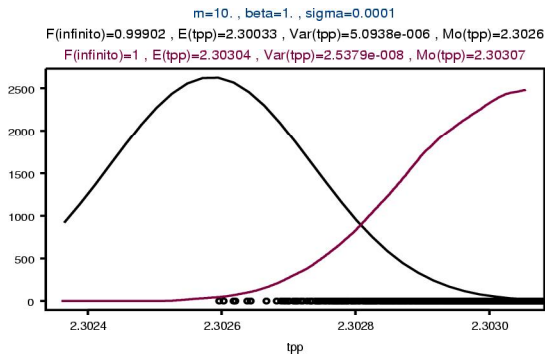
Caso 1 (continuación)



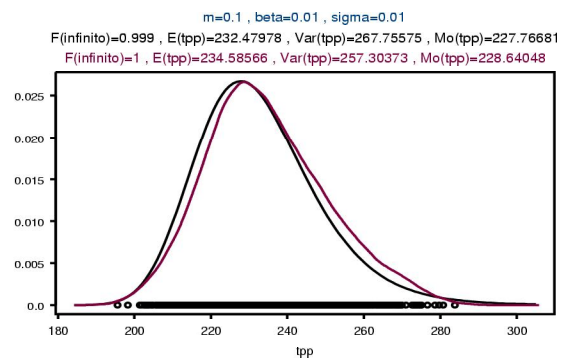
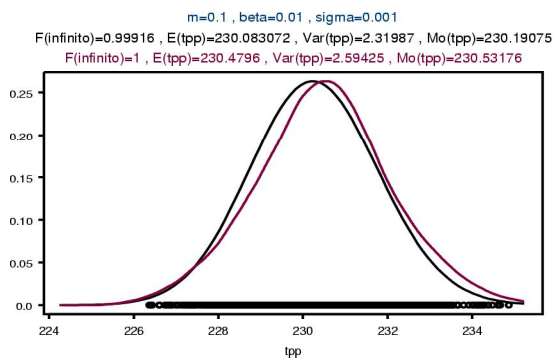
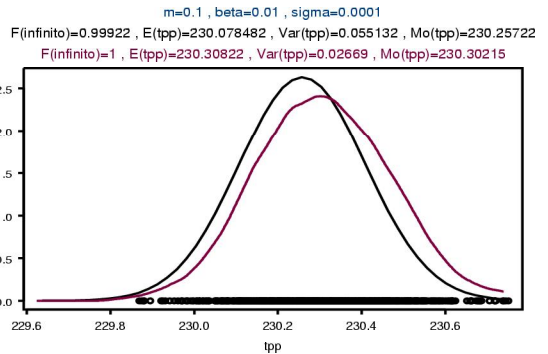
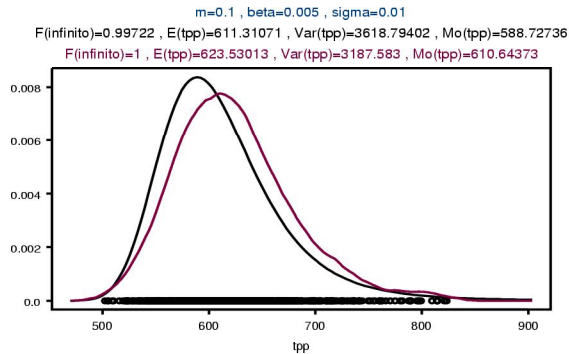
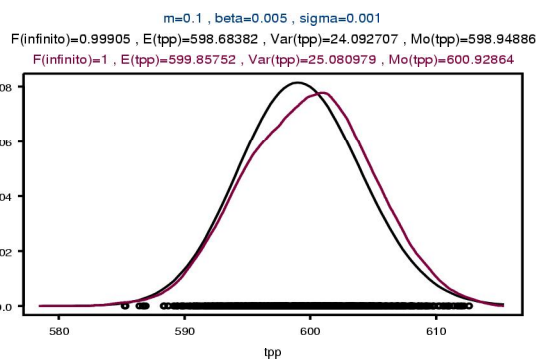
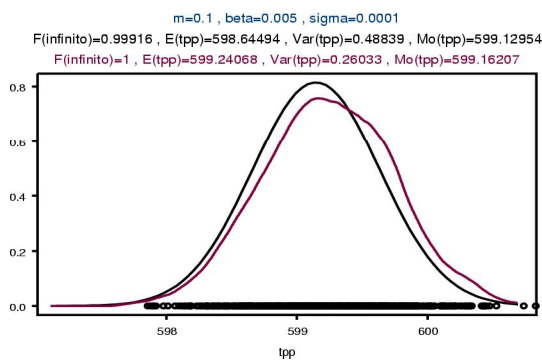
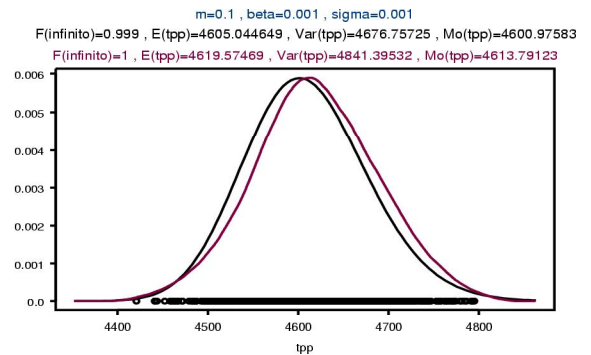
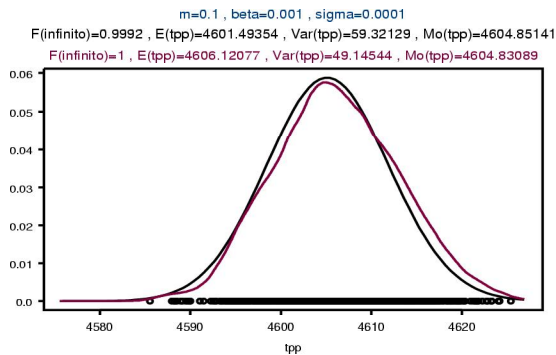
Caso 1 (continuación)



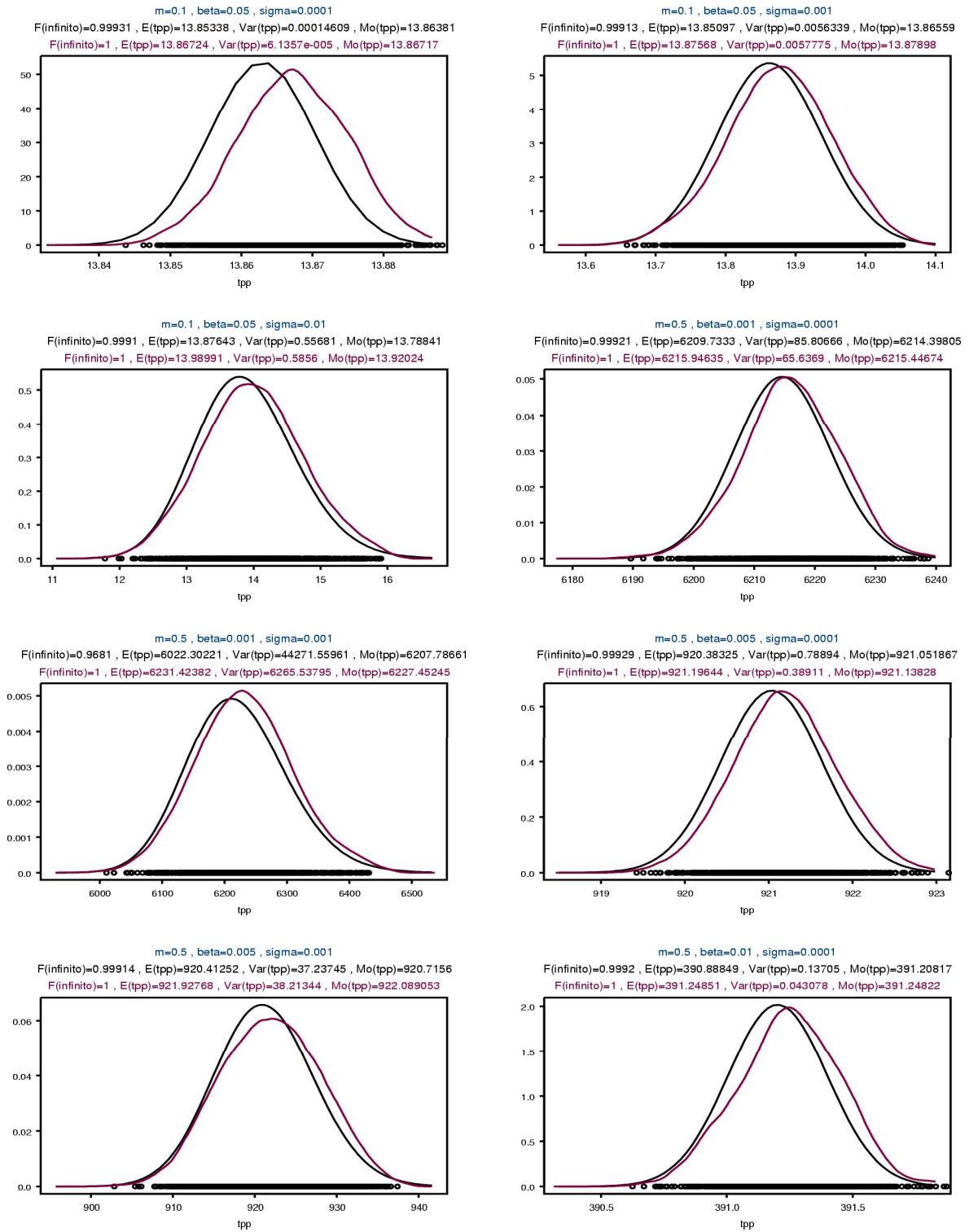
Caso 1 (continuación)



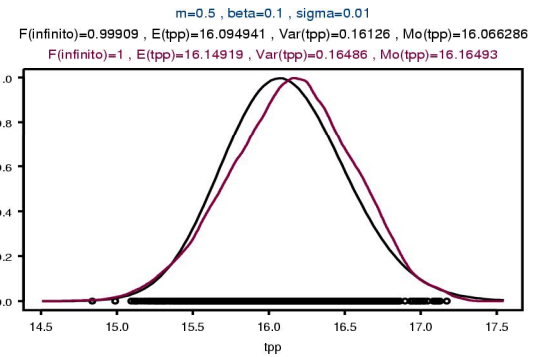
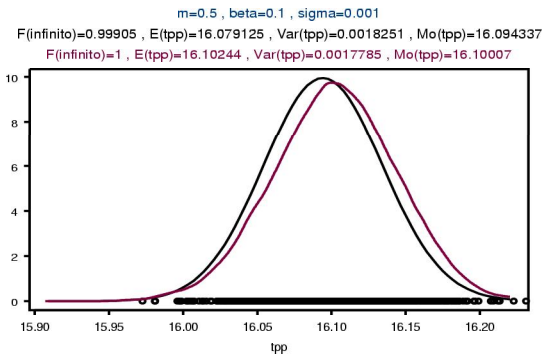
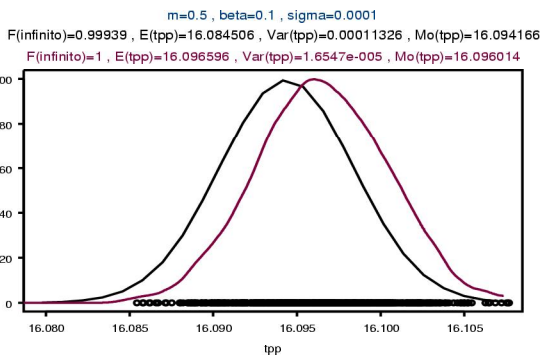
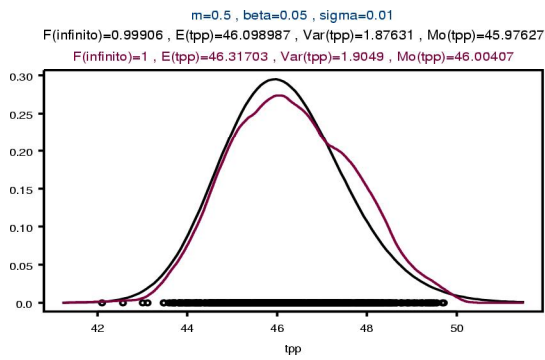
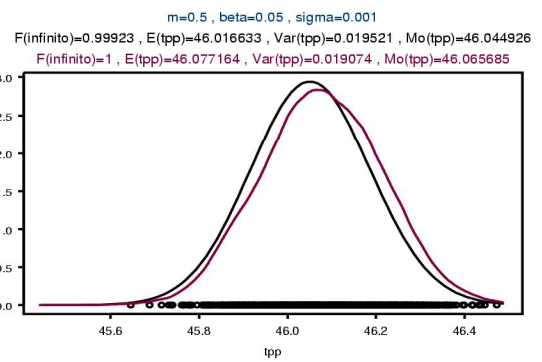
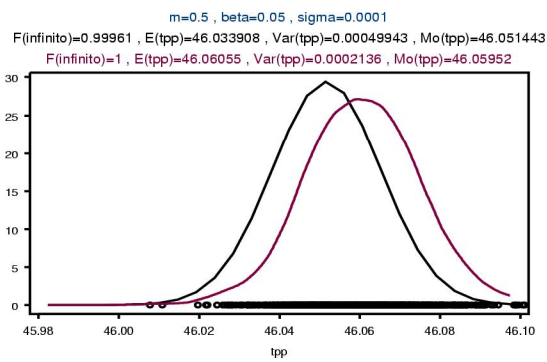
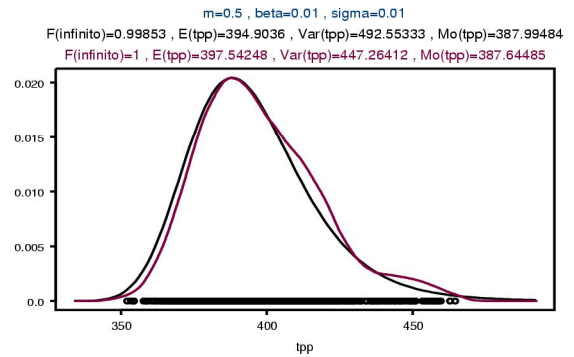
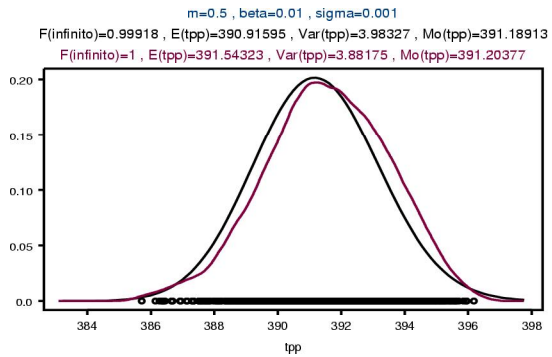
Caso 2



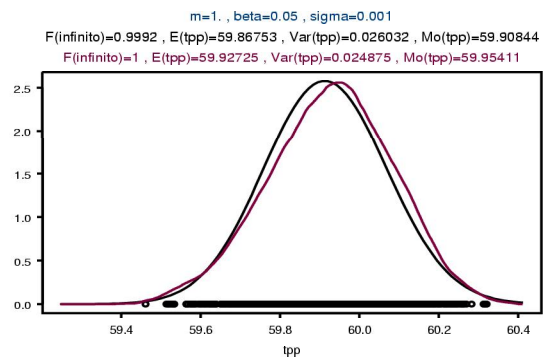
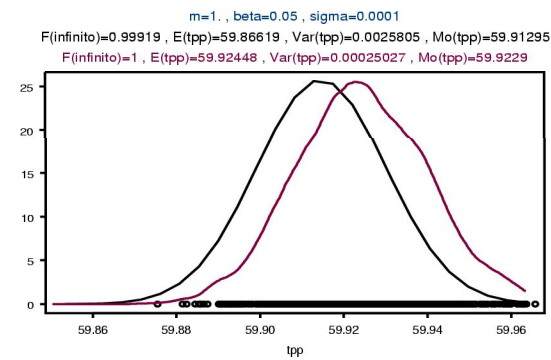
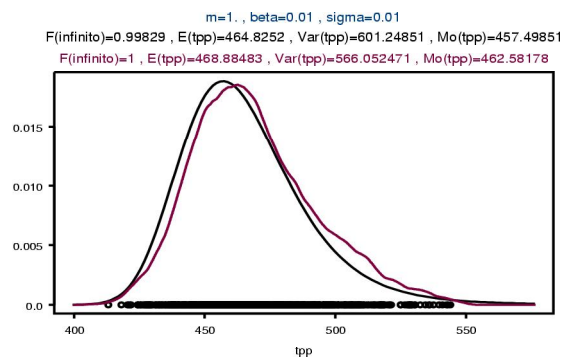
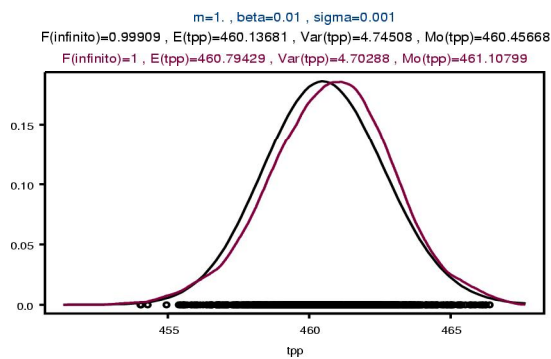
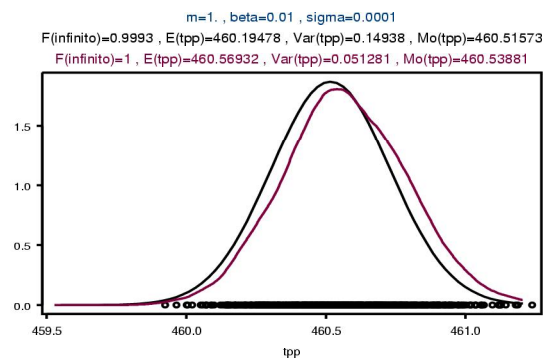
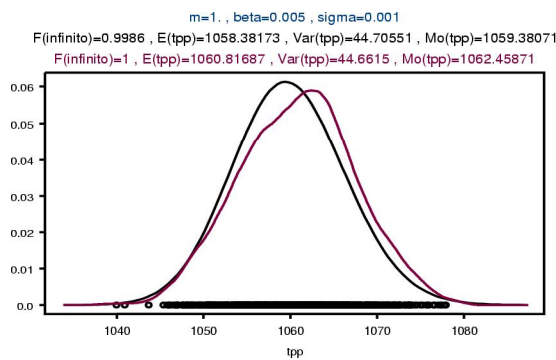
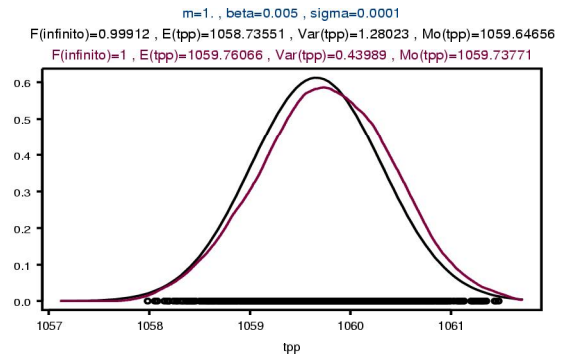
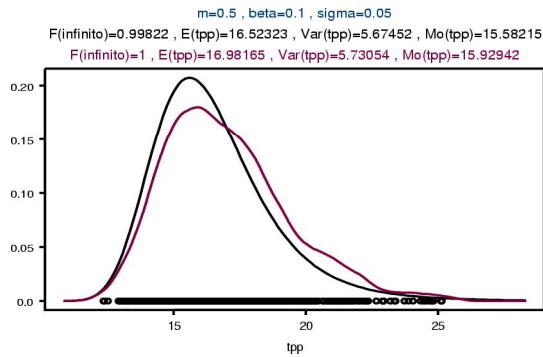
Caso 2 (continuación)



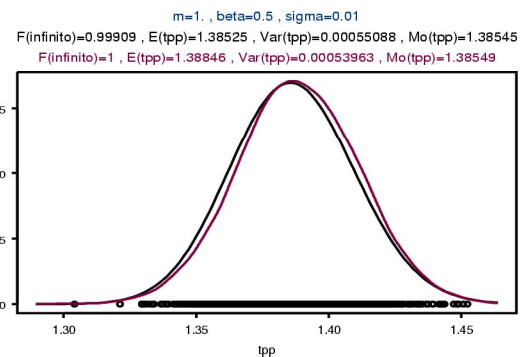
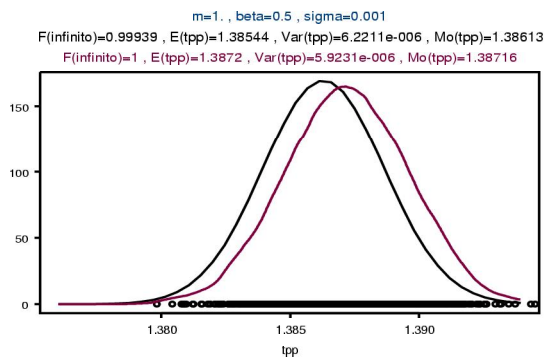
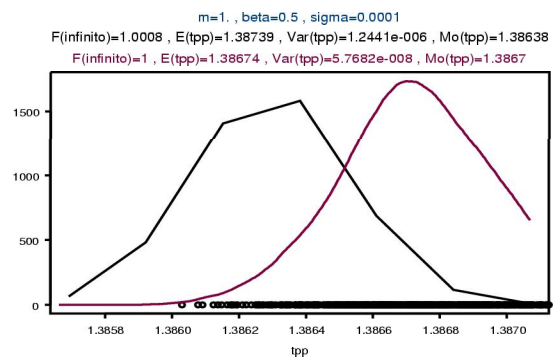
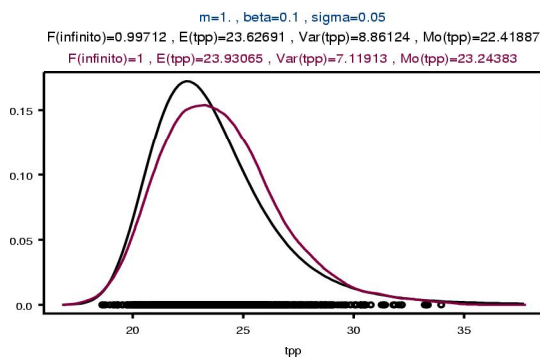
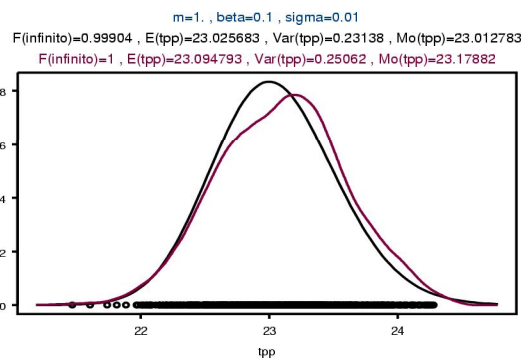
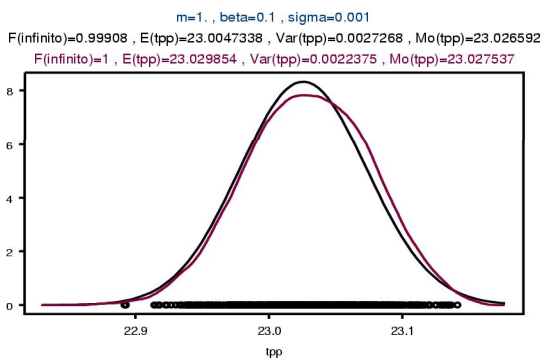
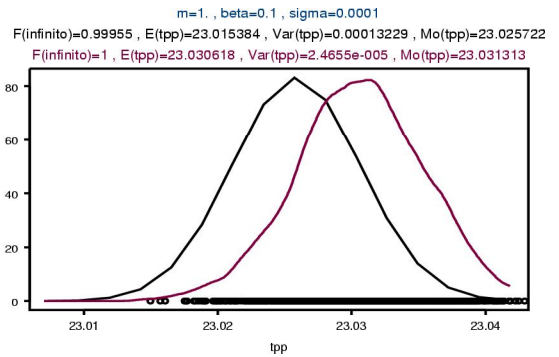
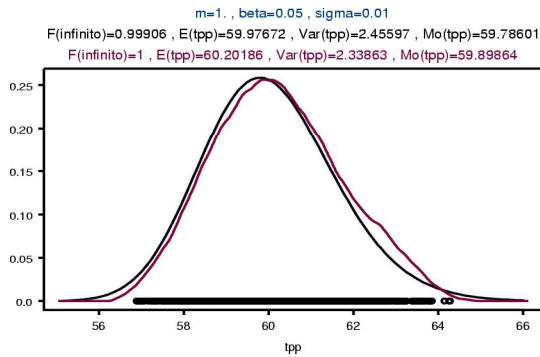
Caso 2 (continuación)



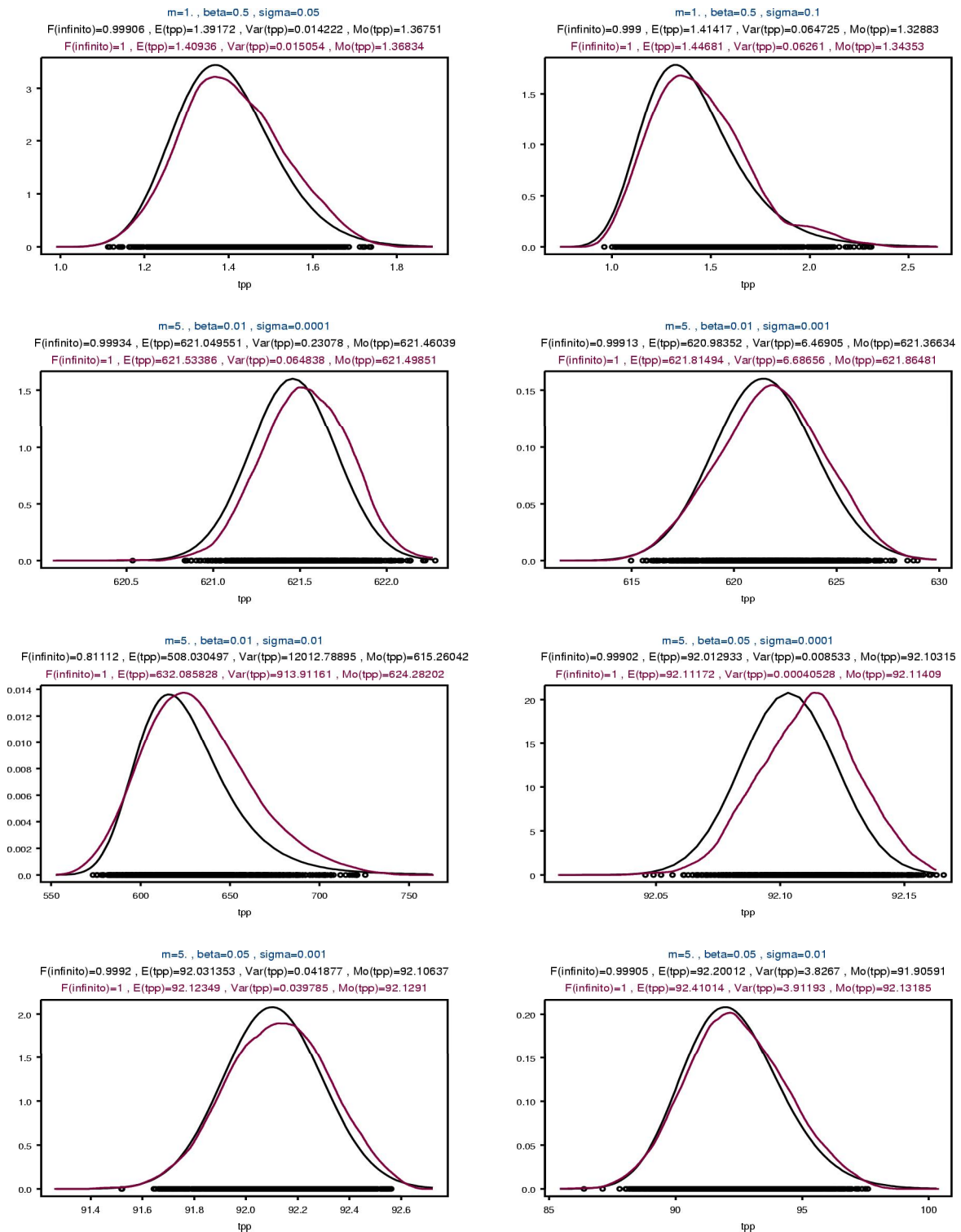
Caso 2 (continuación)



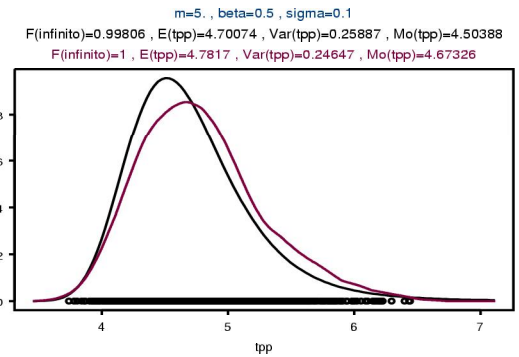
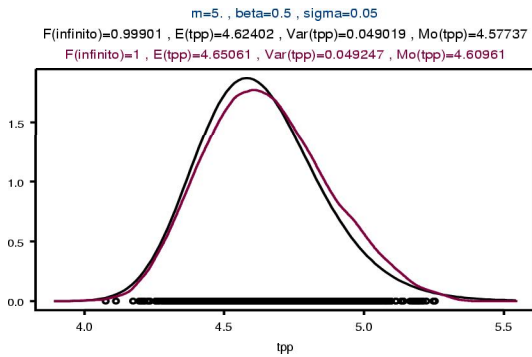
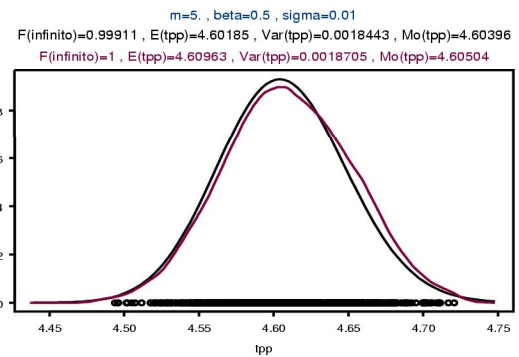
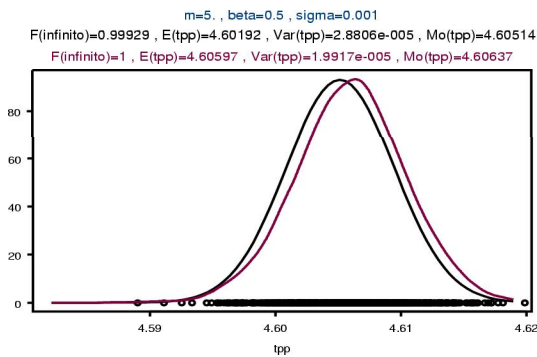
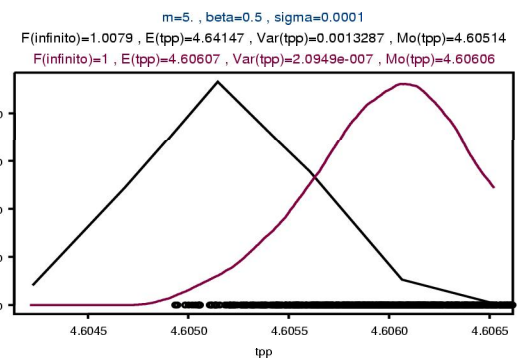
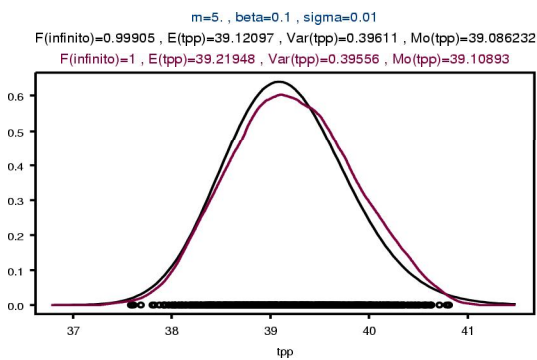
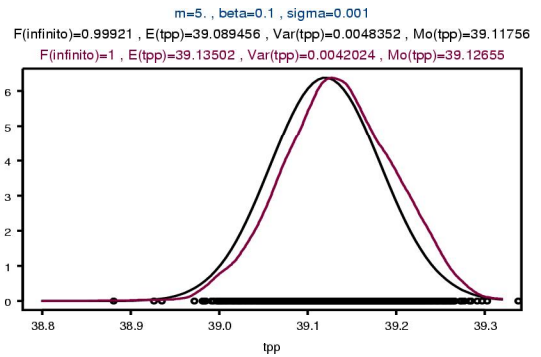
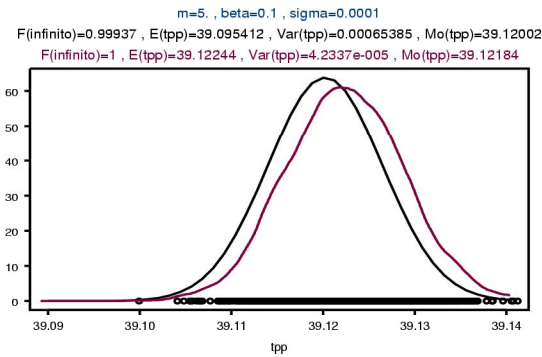
Caso 2 (continuación)



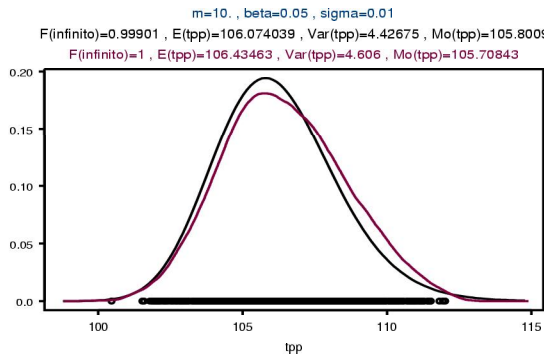
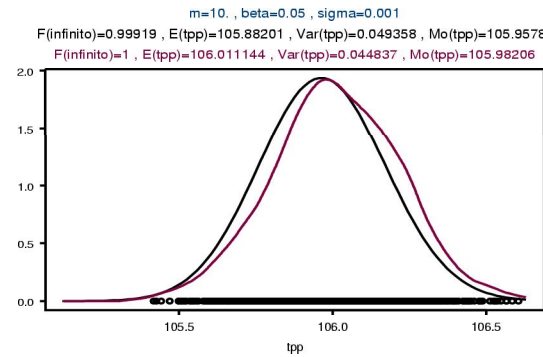
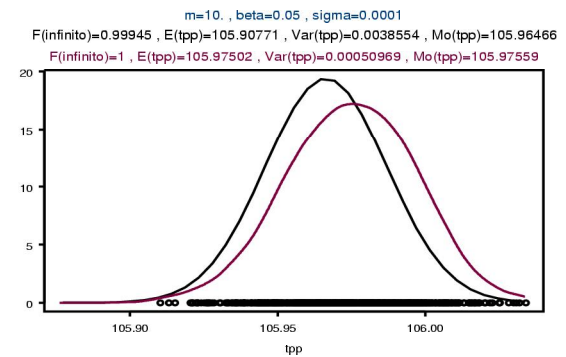
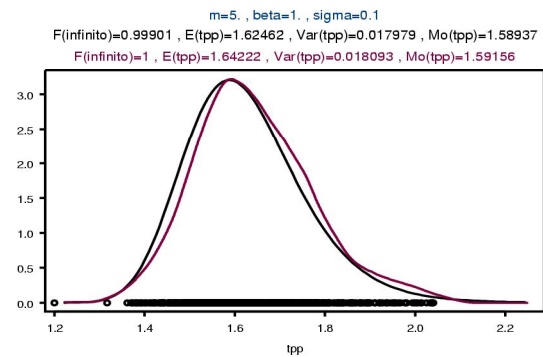
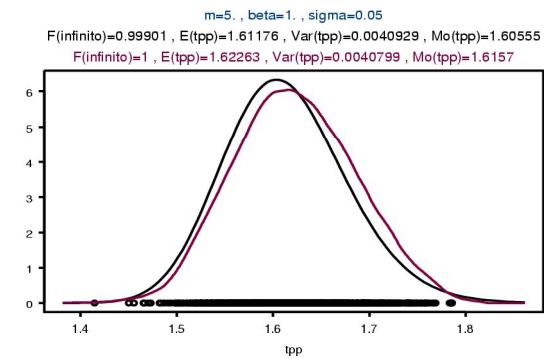
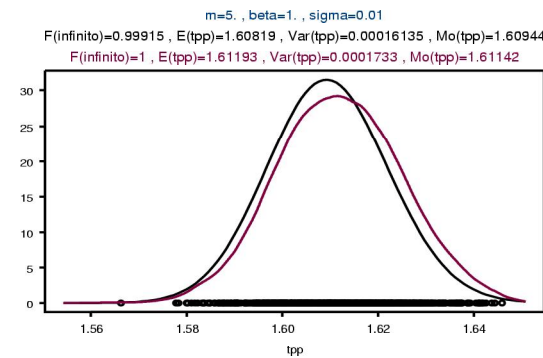
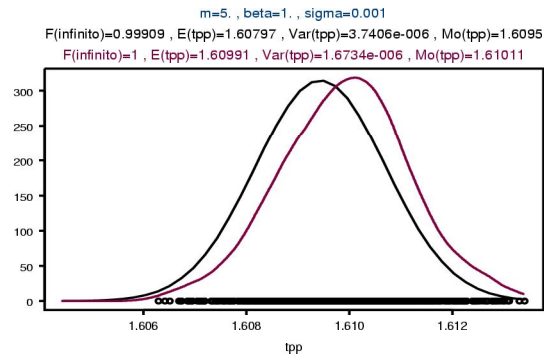
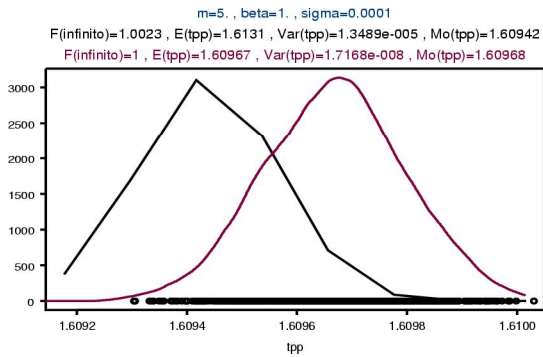
Caso 2 (continuación)



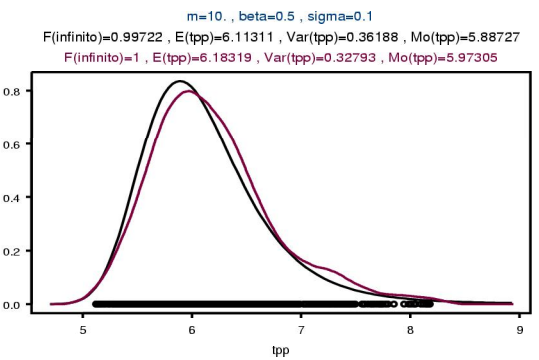
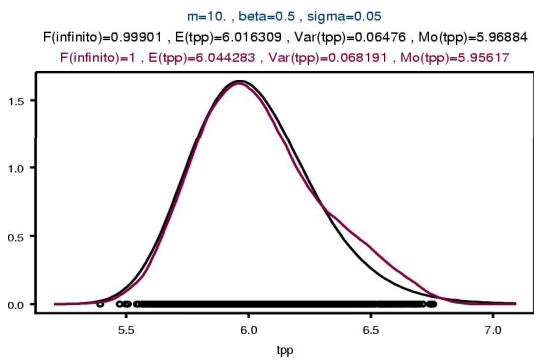
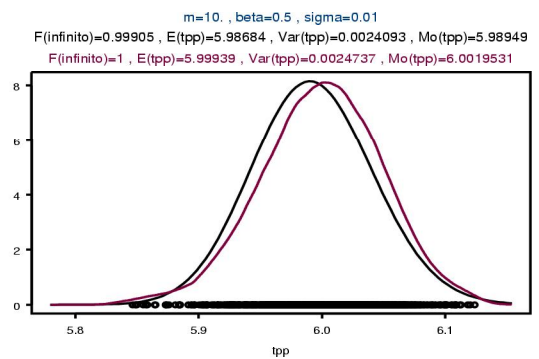
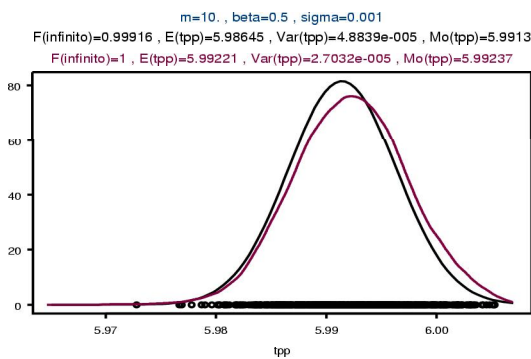
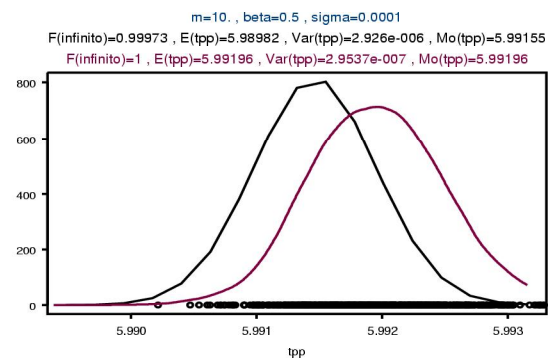
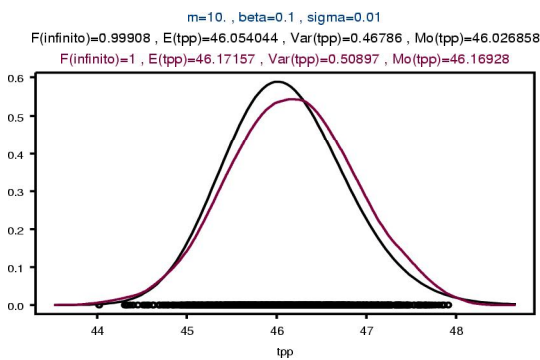
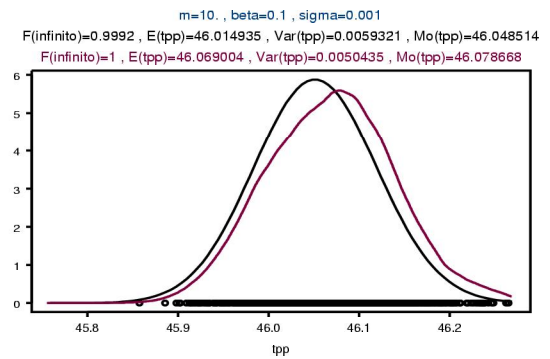
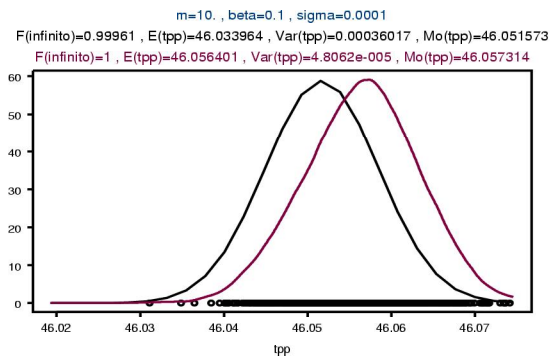
Caso 2 (continuación)



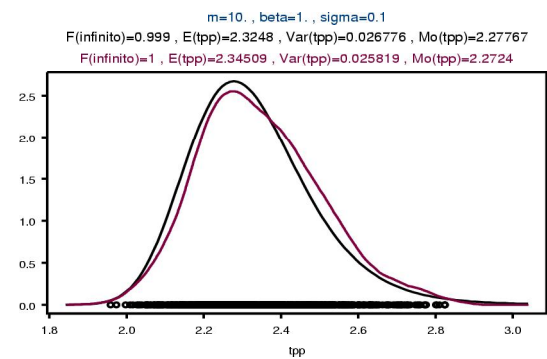
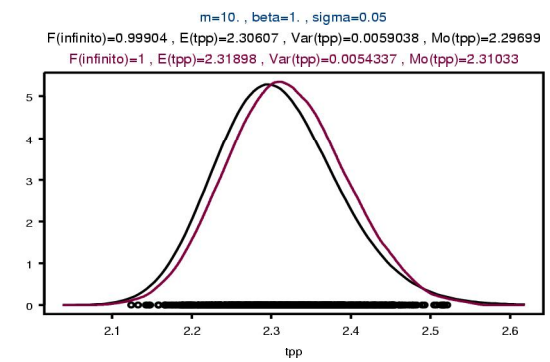
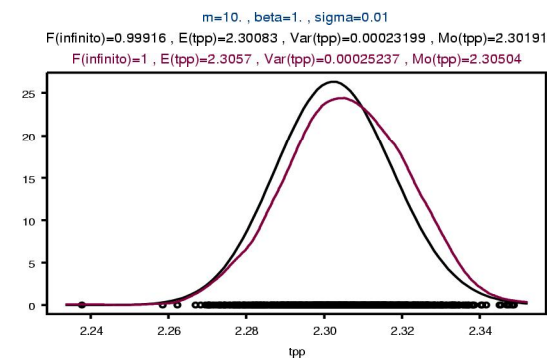
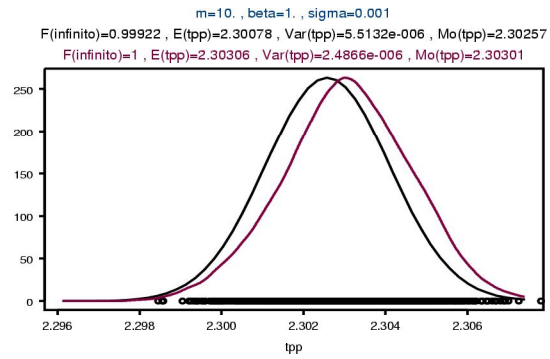
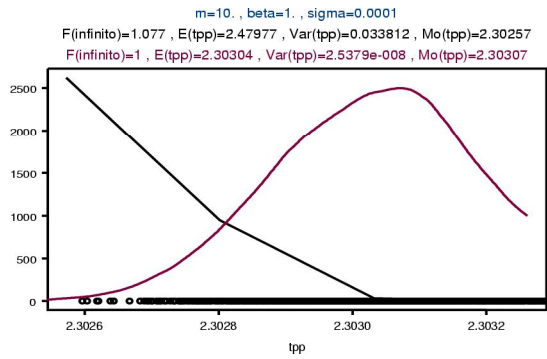
Caso 2 (continuación)



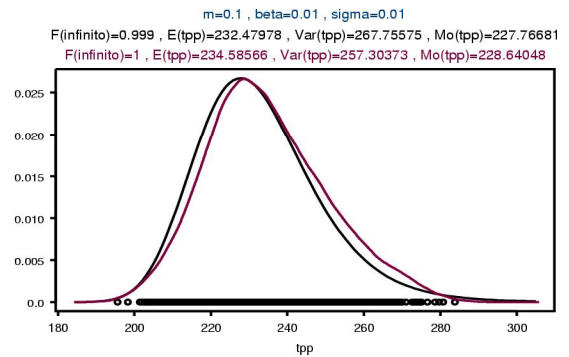
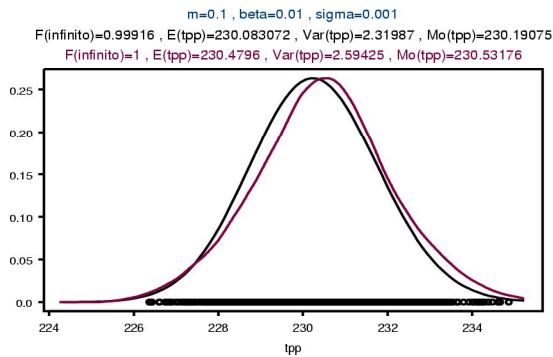
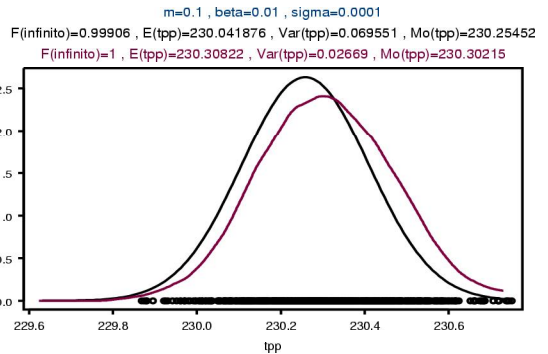
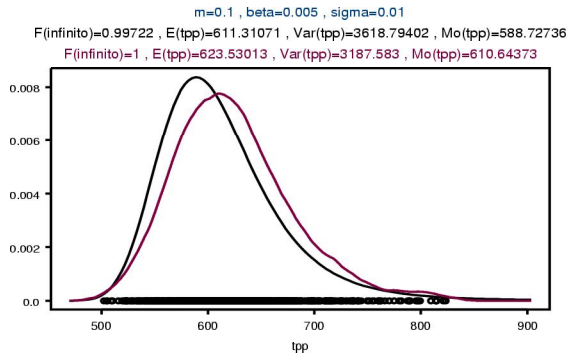
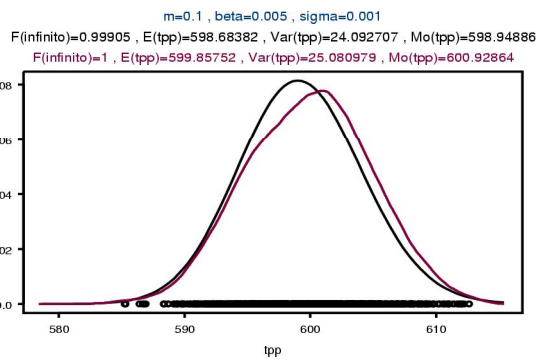
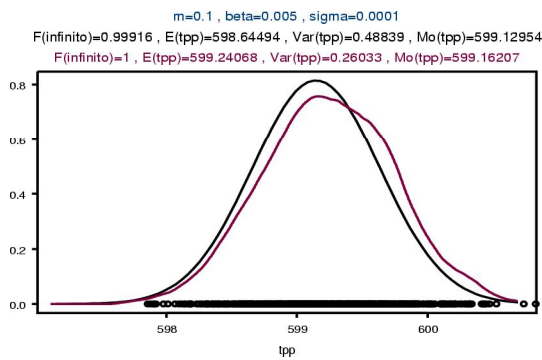
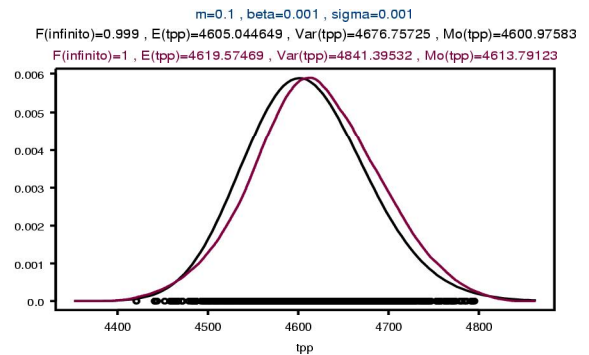
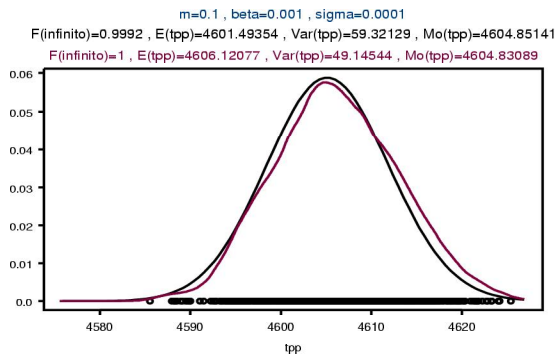
Caso 2 (continuación)



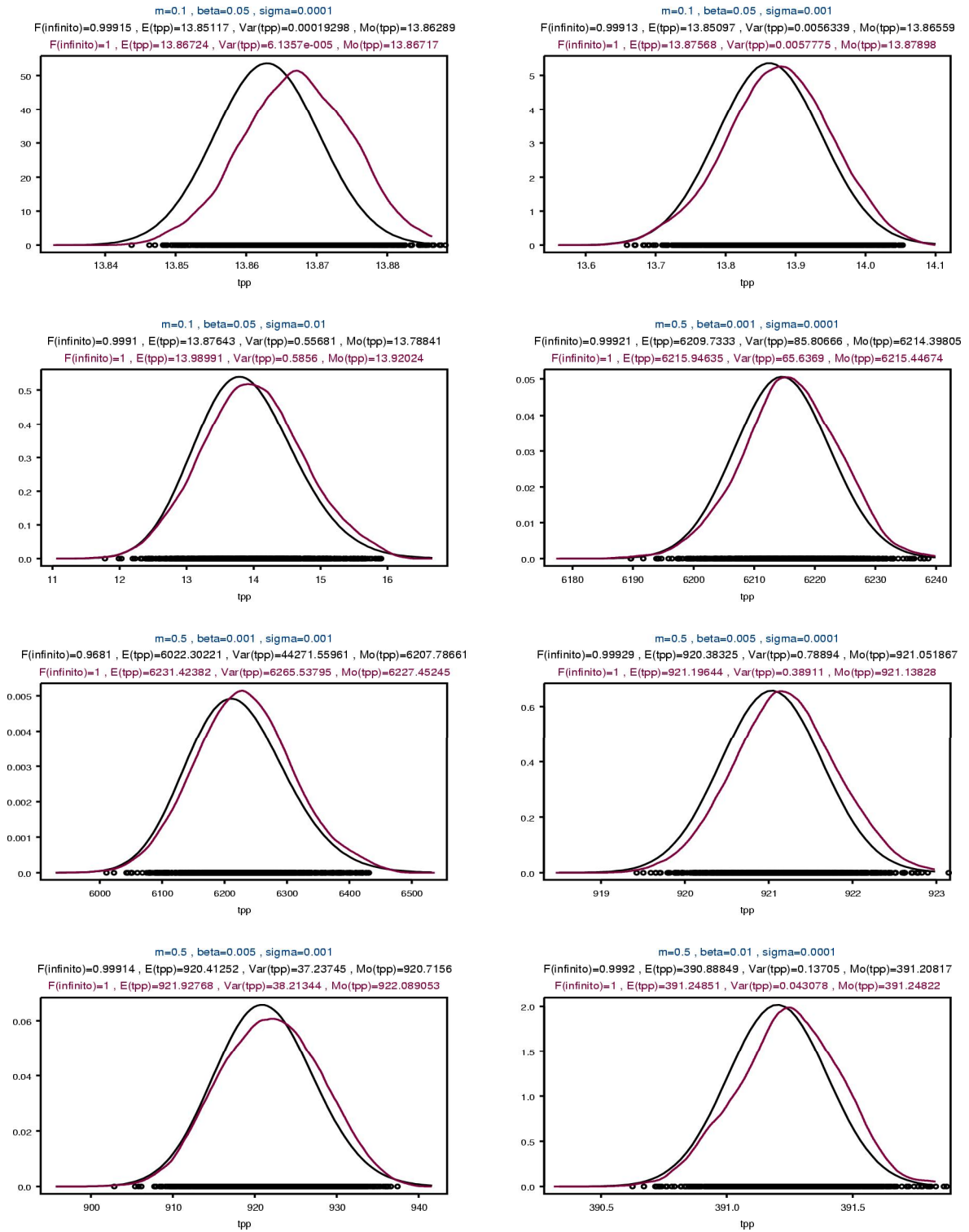
Caso 2 (continuación)



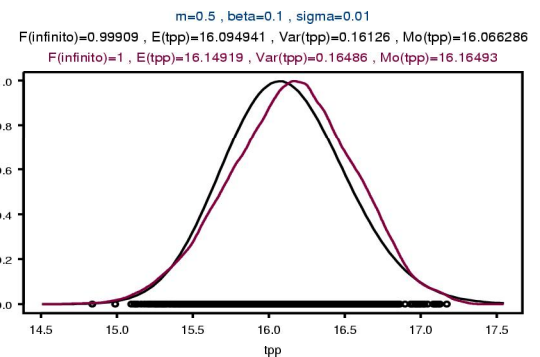
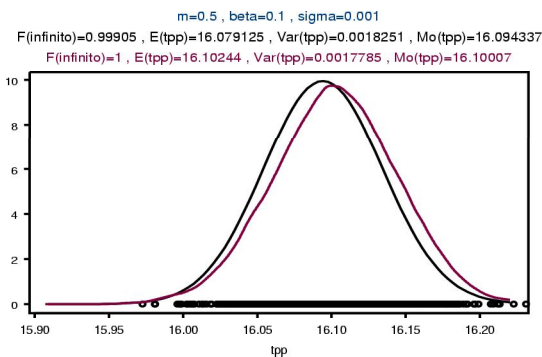
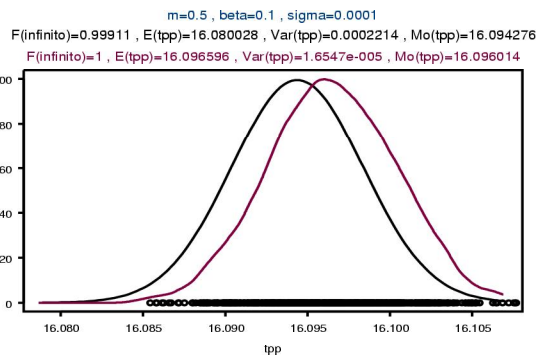
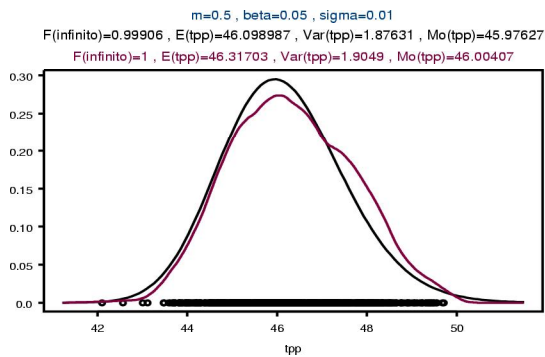
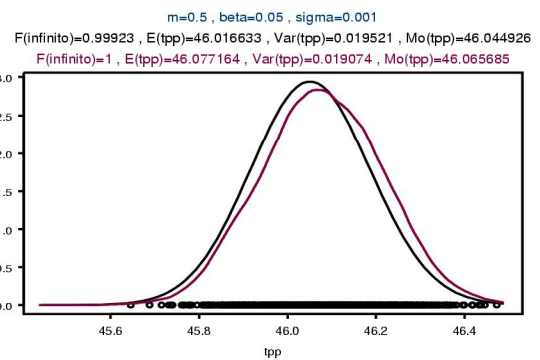
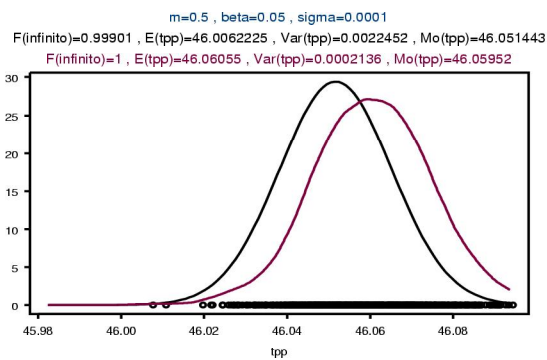
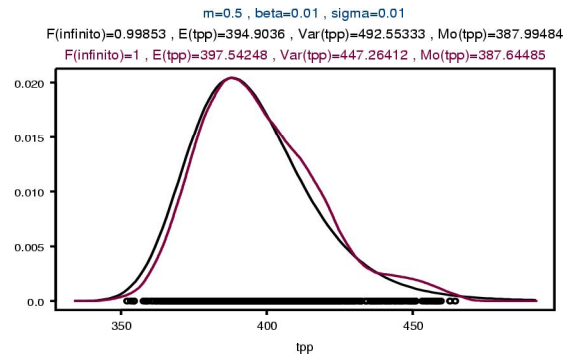
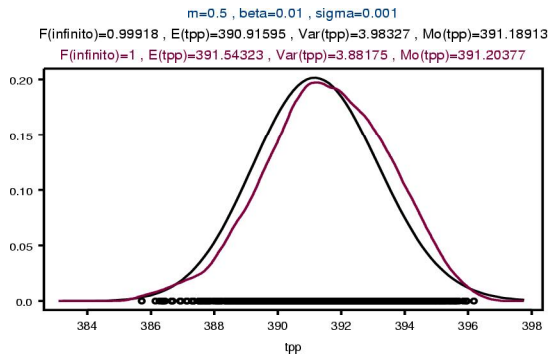
Caso 3



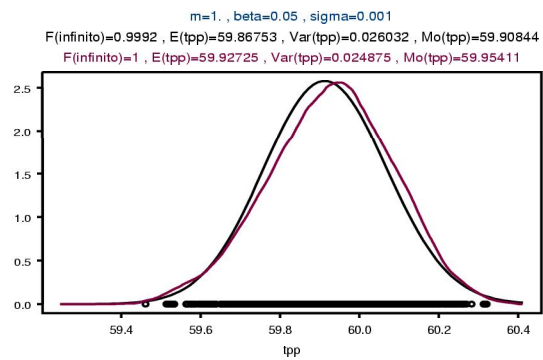
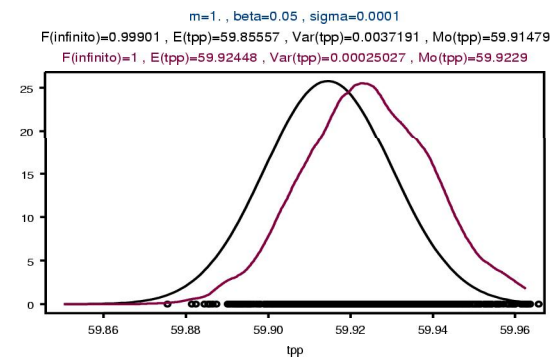
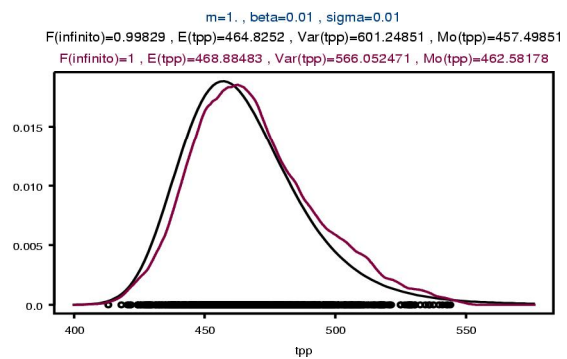
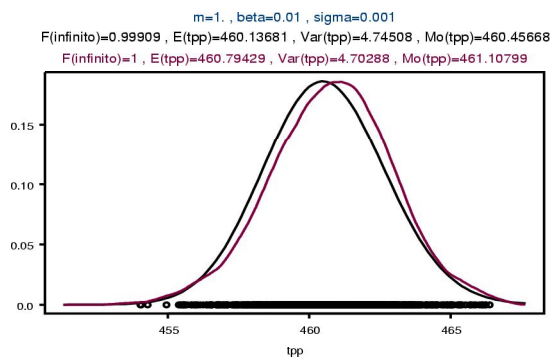
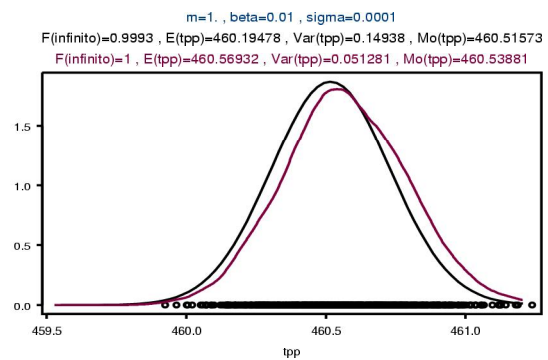
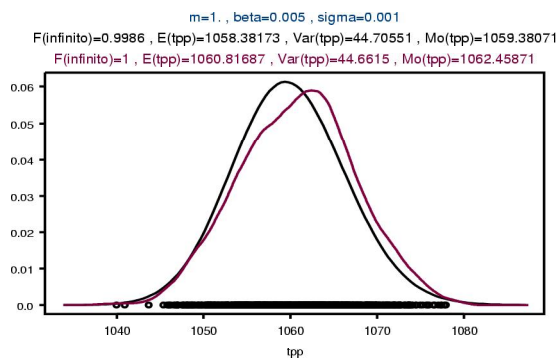
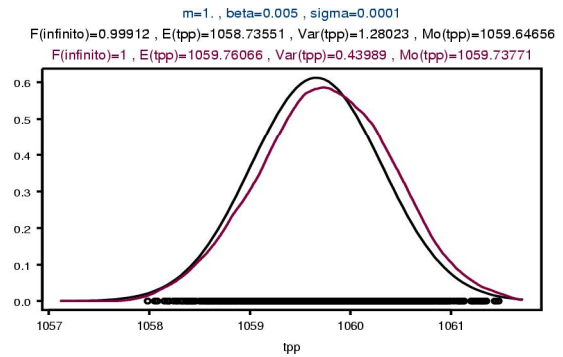
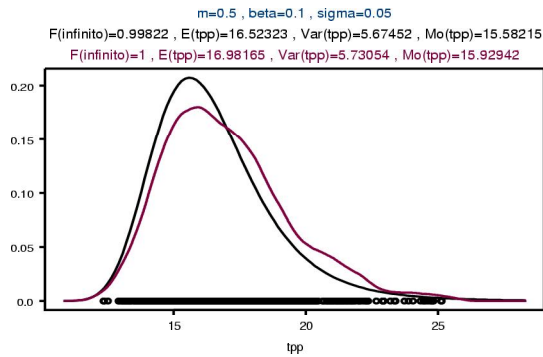
Caso 3 (continuación)



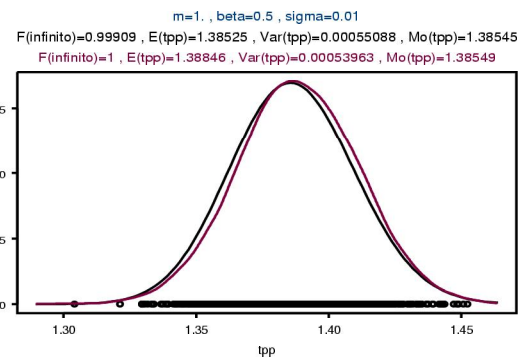
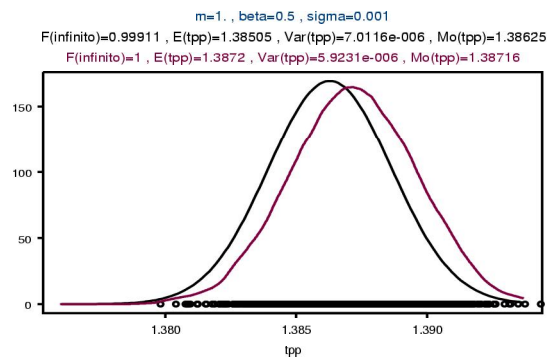
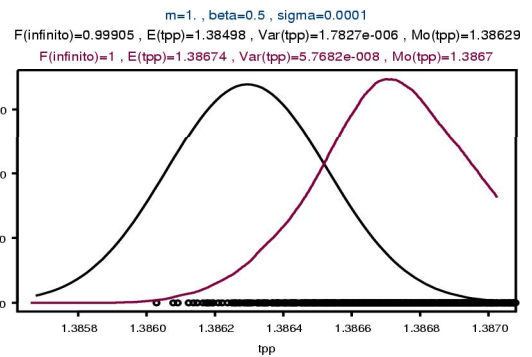
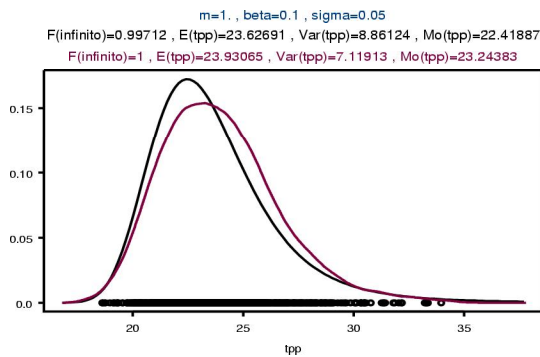
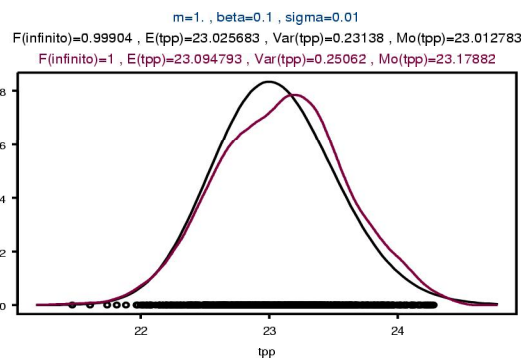
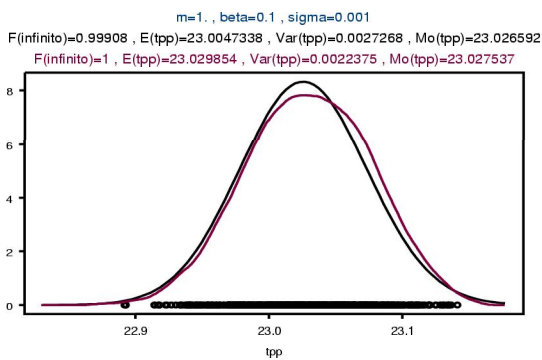
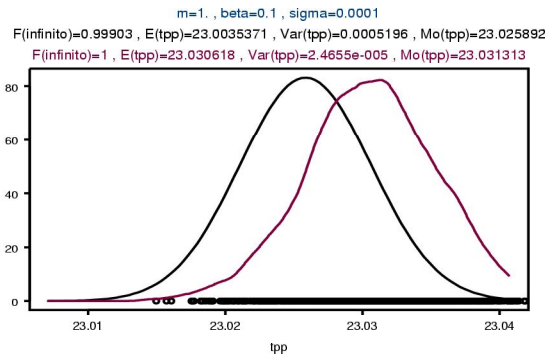
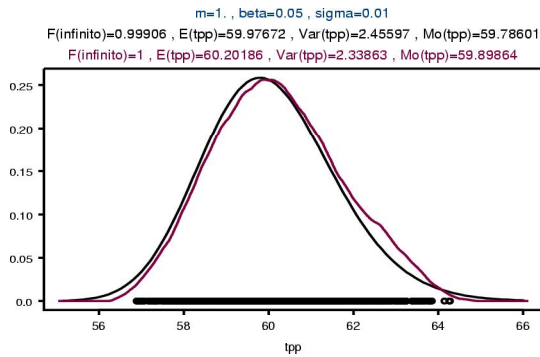
Caso 3 (continuación)



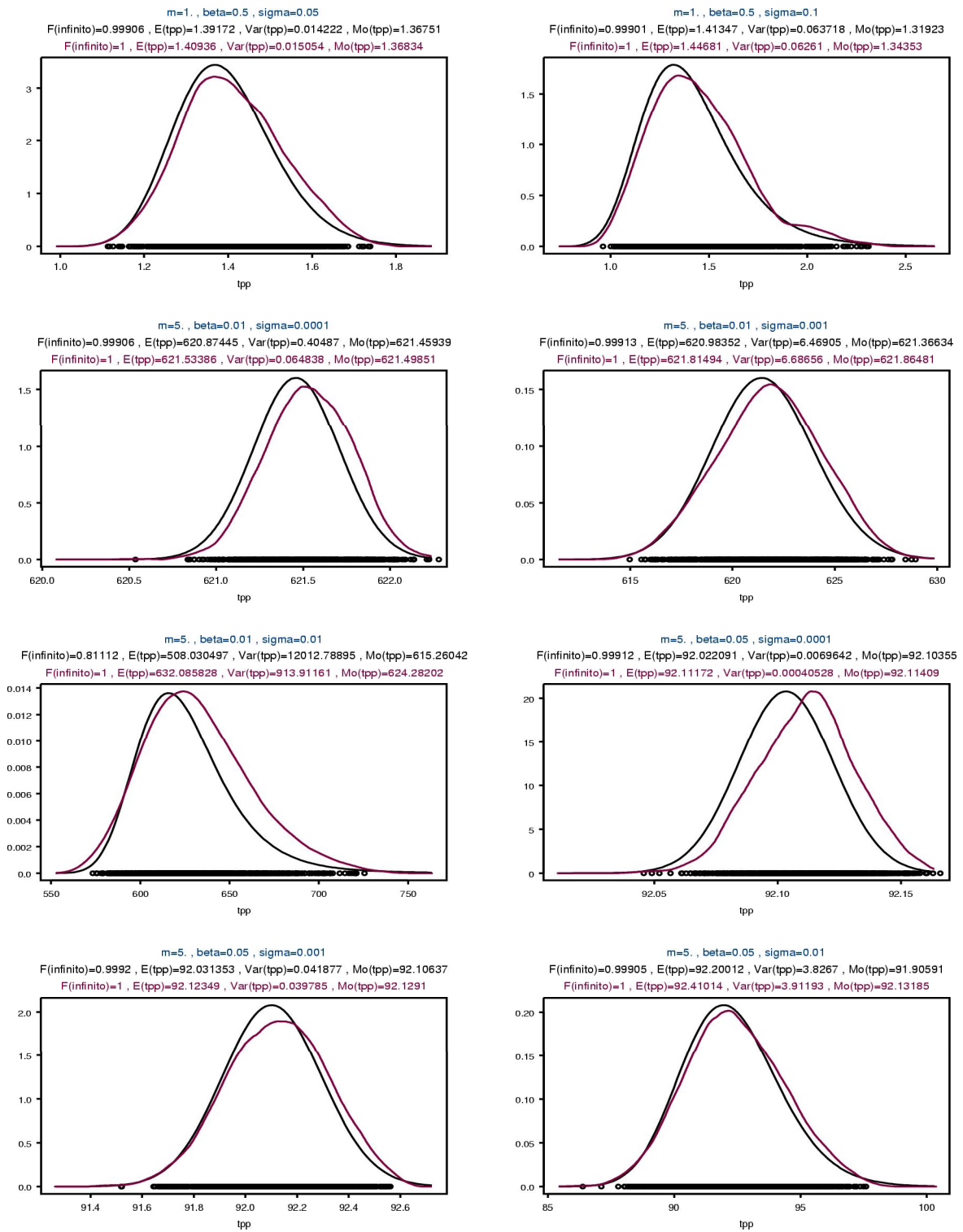
Caso 3 (continuación)



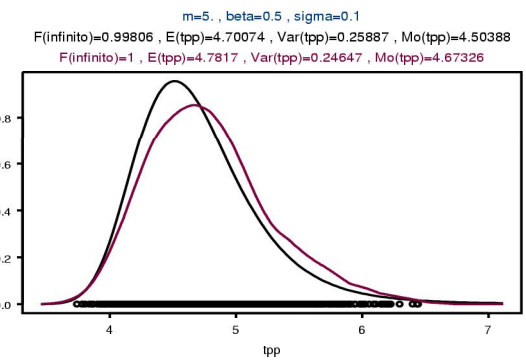
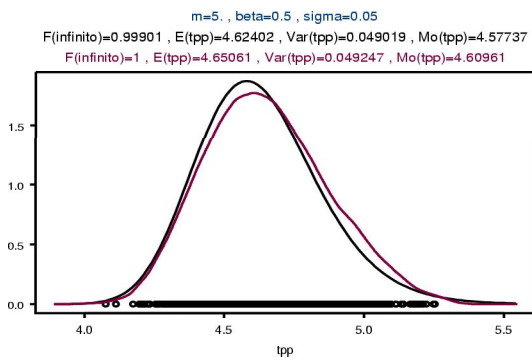
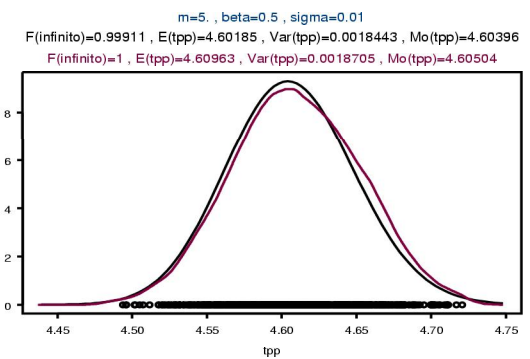
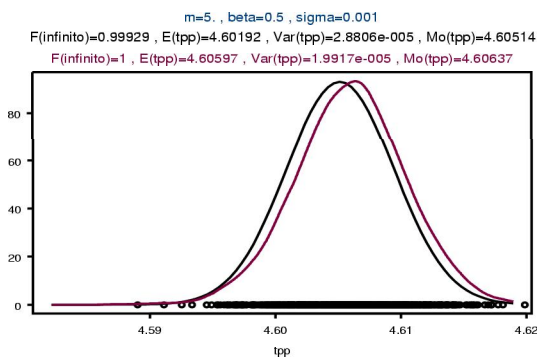
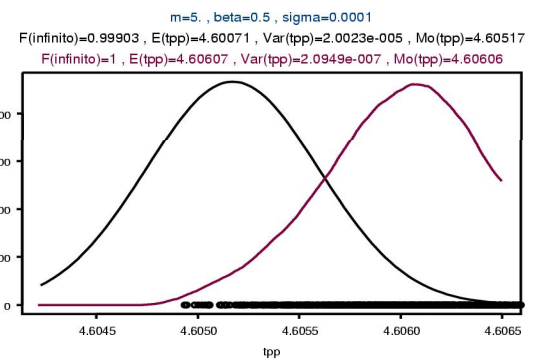
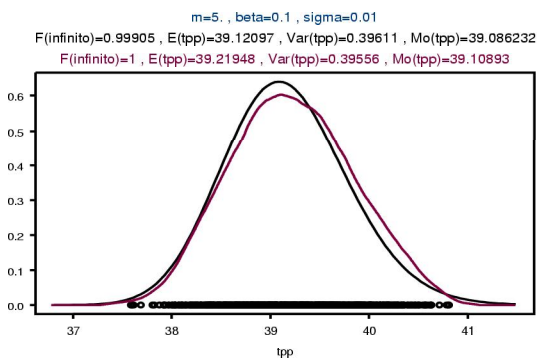
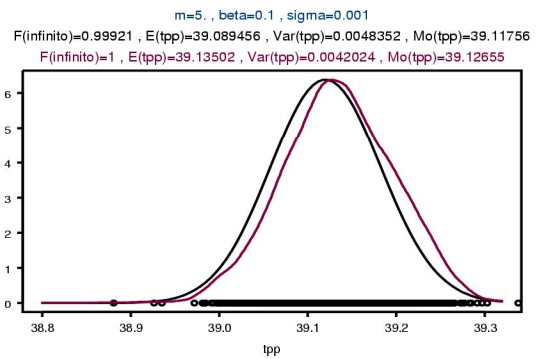
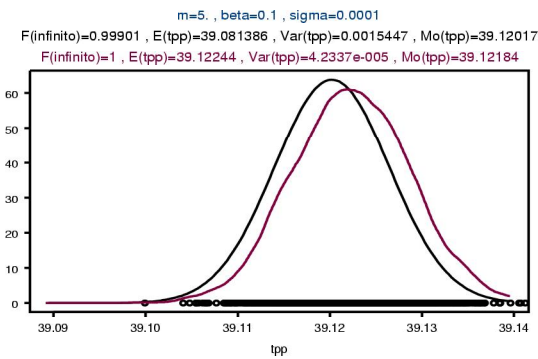
Caso 3 (continuación)



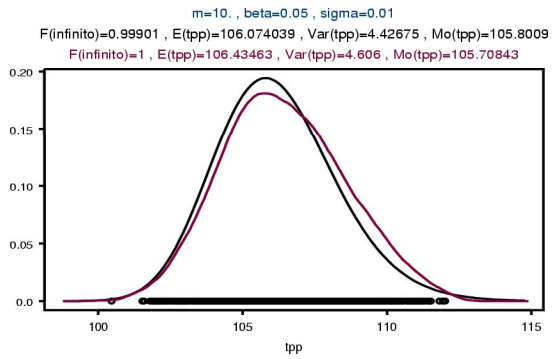
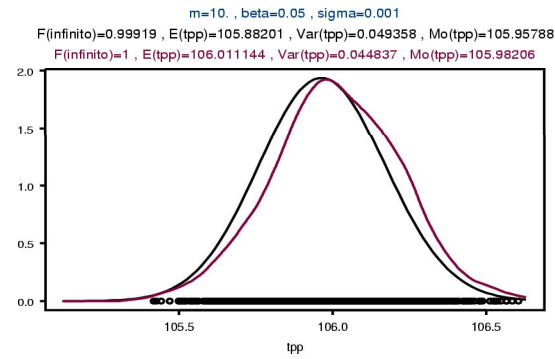
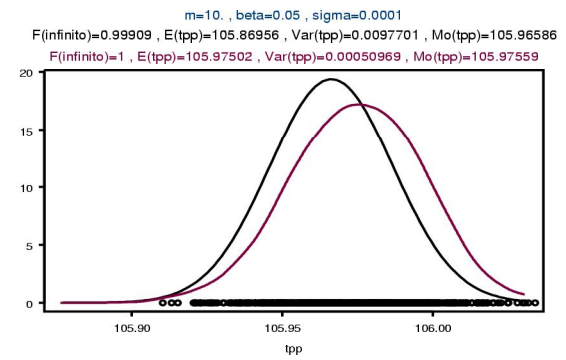
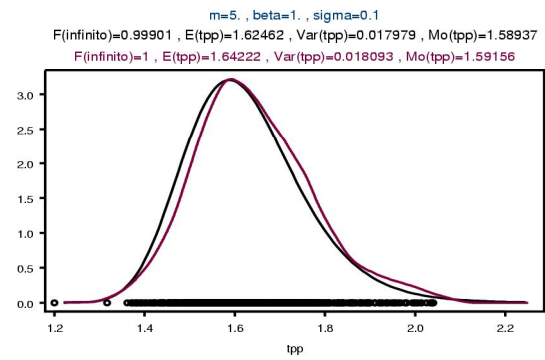
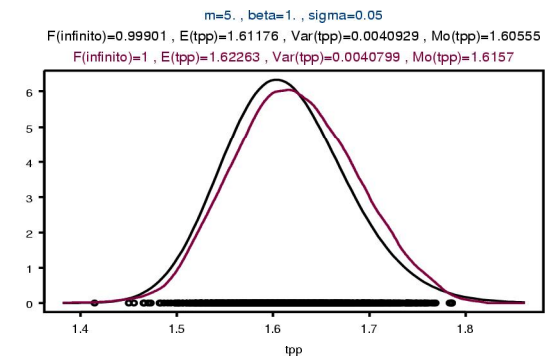
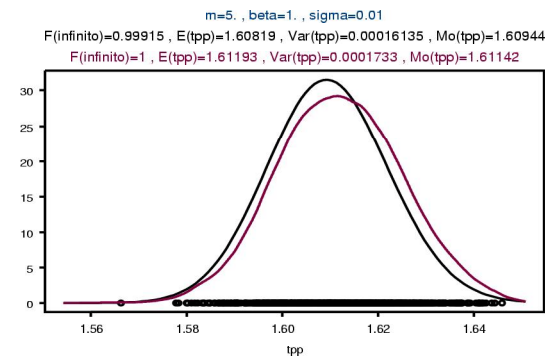
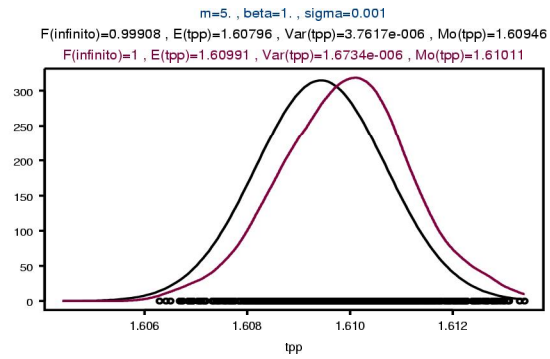
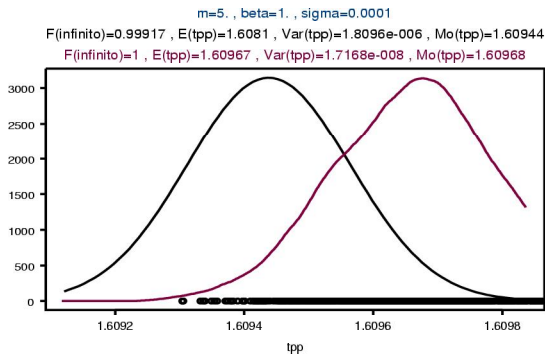
Caso 3 (continuación)



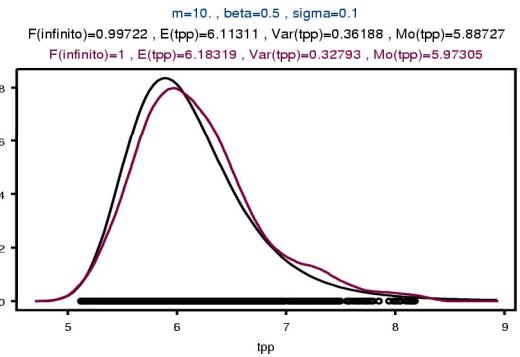
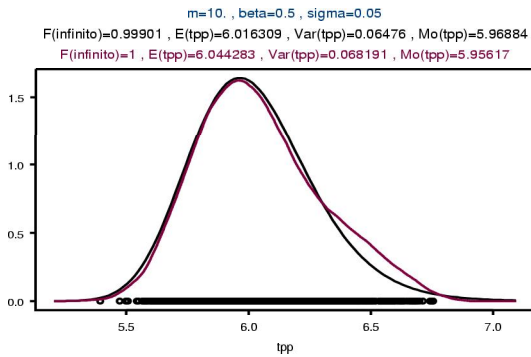
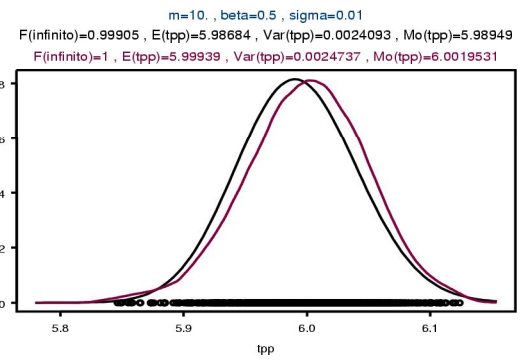
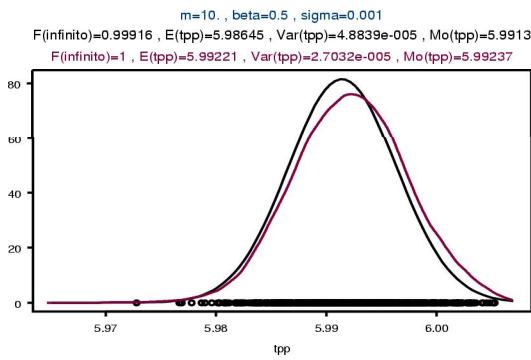
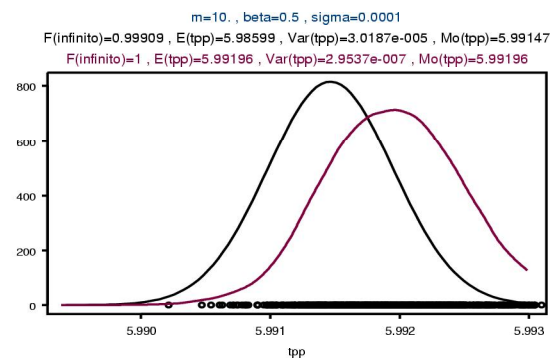
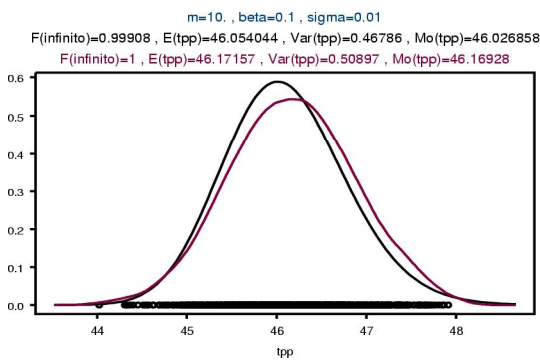
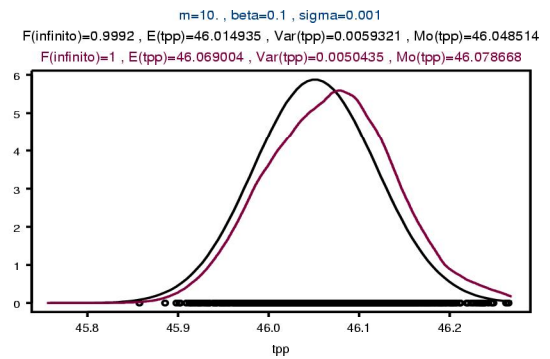
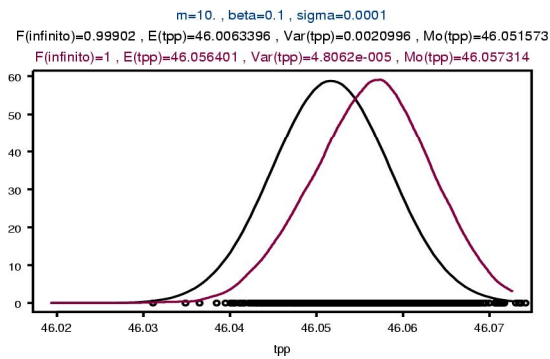
Caso 3 (continuación)



Caso 3 (continuación)



Caso 3 (continuación)



Caso 3 (continuación)

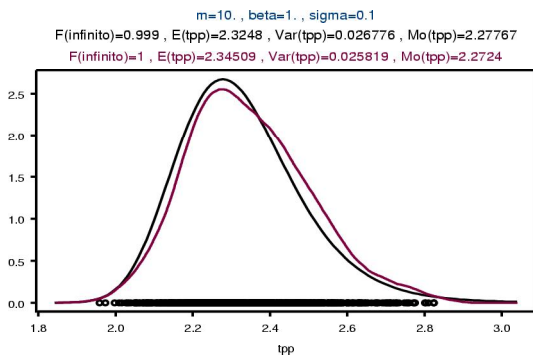
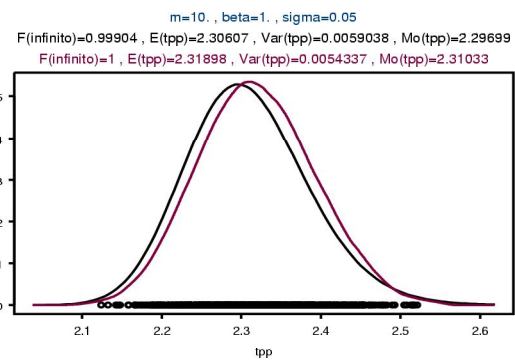
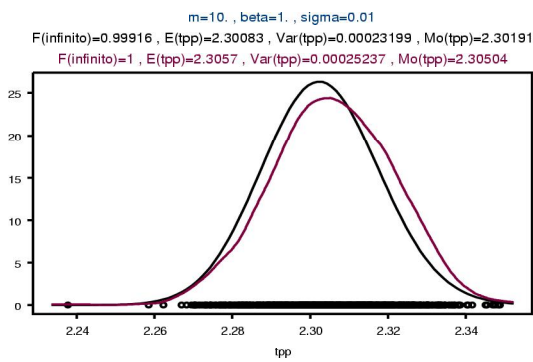
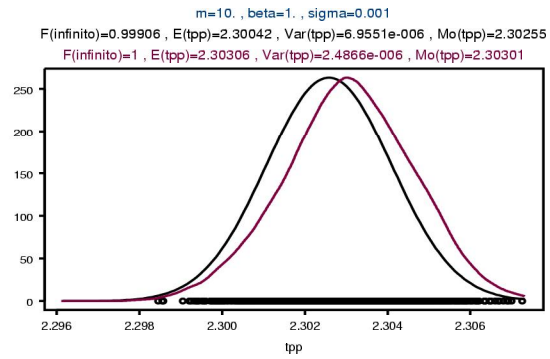
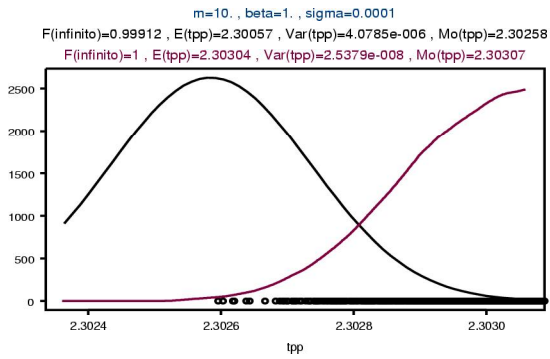


Tabla 3.1: Valores de integral, media, varianza y moda para la aproximación numérica de la densidad de tiempo de primer paso para el Caso 1.

m	β	σ	t^{*5}	Integral	Media	Varianza	Moda
0.1	0.001	0.0001	4605.17019	0.97996	4512.90751	8394.062178	4605.14141
0.1	0.001	0.001	4605.17019	0.999	4604.95272	4656.97009	4601.36583
0.1	0.005	0.0001	599.14645	0.99855	598.28018	0.9907	599.14334
0.1	0.005	0.001	599.14645	0.99901	598.65809	24.091785	599.018858
0.1	0.005	0.01	599.14645	0.9988	612.26794	3622.17125	589.077359
0.1	0.01	0.0001	230.25851	0.99903	230.036029	0.072103	230.25722
0.1	0.01	0.001	230.25851	0.99902	230.050184	2.32917	230.22675
0.1	0.01	0.01	230.25851	0.99901	232.39662	260.11698	227.76681
0.1	0.05	0.0001	13.86294	0.99906	13.84987	0.00022506	13.86289
0.1	0.05	0.001	13.86294	0.97336	13.49082	0.13789	13.86214
0.1	0.05	0.01	13.86294	0.99901	13.87417	0.55451	13.78841
0.5	0.001	0.0001	6214.6081	0.98802	6140.23444	5536.36984	6214.53605
0.5	0.001	0.001	6214.6081	0.6761	4204.94816	2747965.81382	6208.63661
0.5	0.005	0.0001	921.034037	0.99901	920.12234	1.19488	921.031167
0.5	0.005	0.001	921.034037	0.999	920.27914	37.43178	920.8796
0.5	0.01	0.0001	391.2023	0.99902	390.81825	0.18583	391.20127
0.5	0.01	0.001	391.2023	0.99139	387.83462	15.0022506	391.16113
0.5	0.01	0.01	391.2023	0.999	394.97671	476.078505	388.084838
0.5	0.05	0.0001	46.051702	0.99901	46.0062228	0.0022451	46.051903
0.5	0.05	0.001	46.051702	0.93377	42.9994	8.70277	46.049726
0.5	0.05	0.01	46.051702	0.999	46.093563	1.86439	45.95077
0.5	0.1	0.0001	16.094379	0.99908	16.079535	0.00023574	16.094406
0.5	0.1	0.001	16.094379	0.94128	15.14906	0.84231	16.093987
0.5	0.1	0.01	16.094379	0.99901	16.093204	0.16068	16.071486
0.5	0.1	0.05	16.094379	0.999	16.52902	5.53946	15.61015
1	0.005	0.0001	1059.66347	0.99854	1058.12201	2.80233	1059.66036
1	0.005	0.001	1059.66347	0.87159	923.14854	16158.089483	1059.11671
1	0.01	0.0001	460.51702	0.99902	460.067038	0.2476	460.51573
1	0.01	0.001	460.51702	0.94167	433.54956	683.37638	460.47168
1	0.01	0.01	460.51702	0.999	465.034004	581.11472	457.098514
1	0.05	0.0001	59.91465	0.99901	59.85557	0.0037191	59.91479
1	0.05	0.001	59.91465	0.92784	55.58948	17.36581	59.91324
1	0.05	0.01	59.91465	0.99901	59.97077	2.43834	59.79591
1	0.1	0.0001	23.025851	0.99913	23.0059183	0.00041929	23.025952
1	0.1	0.001	23.025851	0.93973	21.63792	1.8122	23.025542
1	0.1	0.01	23.025851	0.999	23.0242	0.23054	23.00038286
1	0.1	0.05	23.025851	0.99856	23.66079	8.87151	22.46987
1	0.5	0.0001	1.38629	0.99904	1.38496	1.8331e-006	1.38629
1	0.5	0.001	1.38629	0.99855	1.38429	9.5577e-006	1.38631
1	0.5	0.01	1.38629	0.99901	1.38512	0.00055034	1.38561
0.1	0.001	0.0001	4605.17019	0.9992	4601.49354	59.32129	4604.85141
0.1	0.001	0.001	4605.17019	0.999	4605.044649	4676.75725	4600.97583
0.1	0.005	0.0001	599.14645	0.99916	598.64494	0.48839	599.12954

⁵Se incluye el valor t^* correspondiente al punto de inflexión de la función media teórica del proceso para poder hacer comparaciones.

Tabla 3.1: (Continuación)

m	β	σ	t^*	Integral	Media	Varianza	Moda
0.1	0.005	0.001	599.14645	0.99905	598.68382	24.092707	598.94886
0.1	0.005	0.01	599.14645	0.99722	611.31071	3618.79402	588.72736
0.1	0.01	0.0001	230.25851	0.99922	230.078482	0.055132	230.25722
0.1	0.01	0.001	230.25851	0.99916	230.083072	2.31987	230.19075
0.1	0.01	0.01	230.25851	0.999	232.47978	267.75575	227.76681
0.1	0.05	0.0001	13.86294	0.99931	13.85338	0.00014609	13.86381
0.1	0.05	0.001	13.86294	0.99913	13.85097	0.0056339	13.86559
0.1	0.05	0.01	13.86294	0.9991	13.87643	0.55681	13.78841
0.5	0.001	0.0001	6214.6081	0.99921	6209.7333	85.80666	6214.39805
0.5	0.001	0.001	6214.6081	0.9681	6022.30221	44271.55961	6207.78661
0.5	0.005	0.0001	921.034037	0.99929	920.38325	0.78894	921.051867
0.5	0.005	0.001	921.034037	0.99914	920.41252	37.23745	920.7156
0.5	0.01	0.0001	391.2023	0.9992	390.88849	0.13705	391.20817
0.5	0.01	0.001	391.2023	0.99918	390.91595	3.98327	391.18913
0.5	0.01	0.01	391.2023	0.99853	394.9036	492.55333	387.99484
0.5	0.05	0.0001	46.051702	0.99961	46.033908	0.00049943	46.051443
0.5	0.05	0.001	46.051702	0.99923	46.016633	0.019521	46.044926
0.5	0.05	0.01	46.051702	0.99906	46.098987	1.87631	45.97627
0.5	0.1	0.0001	16.094379	0.99939	16.084506	0.00011326	16.094166
0.5	0.1	0.001	16.094379	0.99905	16.079125	0.0018251	16.094337
0.5	0.1	0.01	16.094379	0.99909	16.094941	0.16126	16.066286
0.5	0.1	0.05	16.094379	0.99822	16.52323	5.67452	15.58215
1	0.005	0.0001	1059.66347	0.99912	1058.73551	1.28023	1059.64656
1	0.005	0.001	1059.66347	0.9986	1058.38173	44.70551	1059.38071
1	0.01	0.0001	460.51702	0.9993	460.19478	0.14938	460.51573
1	0.01	0.001	460.51702	0.99909	460.13681	4.74508	460.45668
1	0.01	0.01	460.51702	0.99829	464.8252	601.24851	457.49851
1	0.05	0.0001	59.91465	0.99919	59.86619	0.0025805	59.91295
1	0.05	0.001	59.91465	0.9992	59.86753	0.026032	59.90844
1	0.05	0.01	59.91465	0.99906	59.97672	2.45597	59.78601
1	0.1	0.0001	23.025851	0.99955	23.015384	0.00013229	23.025722
1	0.1	0.001	23.025851	0.99908	23.0047338	0.0027268	23.026592
1	0.1	0.01	23.025851	0.99904	23.025683	0.23138	23.012783
1	0.1	0.05	23.025851	0.99712	23.62691	8.86124	22.41887
1	0.5	0.0001	1.38629	1.00078651	1.38739	1.2441e-006	1.38638
1	0.5	0.001	1.38629	0.99939	1.38544	6.2211e-006	1.38613
1	0.5	0.01	1.38629	0.99909	1.38525	0.00055088	1.38545

Tabla 3.2: Valores de integral, media, varianza y moda para la aproximación numérica de la densidad de tiempo de primer paso para el Caso 2.

m	β	σ	t^*	Integral	Media	Varianza	Moda
1	0.5	0.05	1.38629	0.99906	1.39172	0.014222	1.36751
1	0.5	0.1	1.38629	0.999	1.41417	0.064725	1.32883
5	0.01	0.0001	621.46081	0.99934	621.049551	0.23078	621.46039
5	0.01	0.001	621.46081	0.99913	620.98352	6.46905	621.36634
5	0.01	0.01	621.46081	0.81112	508.030497	12012.78895	615.26042
5	0.05	0.0001	92.1034	0.99902	92.012933	0.008533	92.10315
5	0.05	0.001	92.1034	0.9992	92.031353	0.041877	92.10637
5	0.05	0.01	92.1034	0.99905	92.20012	3.8267	91.90591
5	0.1	0.0001	39.12023	0.99937	39.095412	0.00065385	39.12002
5	0.1	0.001	39.12023	0.99921	39.089456	0.0048352	39.11756
5	0.1	0.01	39.12023	0.99905	39.12097	0.39611	39.086232
5	0.5	0.0001	4.60517	1.0078838	4.64147	0.0013287	4.60514
5	0.5	0.001	4.60517	0.99929	4.60192	2.8806e-005	4.60514
5	0.5	0.01	4.60517	0.99911	4.60185	0.0018443	4.60396
5	0.5	0.05	4.60517	0.99901	4.62402	0.049019	4.57737
5	0.5	0.1	4.60517	0.99806	4.70074	0.25887	4.50388
5	1	0.0001	1.60944	1.0022781	1.6131	1.3489e-005	1.60942
5	1	0.001	1.60944	0.99909	1.60797	3.7406e-006	1.6095
5	1	0.01	1.60944	0.99915	1.60819	0.00016135	1.60944
5	1	0.05	1.60944	0.99901	1.61176	0.0040929	1.60555
5	1	0.1	1.60944	0.99901	1.62462	0.017979	1.58937
10	0.05	0.0001	105.96635	0.99945	105.90771	0.0038554	105.96466
10	0.05	0.001	105.96635	0.99919	105.88201	0.049358	105.95788
10	0.05	0.01	105.96635	0.99901	106.074039	4.42675	105.8009
10	0.1	0.0001	46.051702	0.99961	46.033964	0.00036017	46.051573
10	0.1	0.001	46.051702	0.9992	46.014935	0.0059321	46.048514
10	0.1	0.01	46.051702	0.99908	46.054044	0.46786	46.026858
10	0.5	0.0001	5.99146	0.99973	5.98982	2.926e-006	5.99155
10	0.5	0.001	5.99146	0.99916	5.98645	4.8839e-005	5.9913
10	0.5	0.01	5.99146	0.99905	5.98684	0.0024093	5.98949
10	0.5	0.05	5.99146	0.99901	6.016309	0.06476	5.96884
10	0.5	0.1	5.99146	0.99722	6.11311	0.36188	5.88727
10	1	0.0001	2.30259	1.076952	2.47977	0.033812	2.30257
10	1	0.001	2.30259	0.99922	2.30078	5.5132e-006	2.30257
10	1	0.01	2.30259	0.99916	2.30083	0.00023199	2.30191
10	1	0.05	2.30259	0.99904	2.30607	0.0059038	2.29699
10	1	0.1	2.30259	0.999	2.3248	0.026776	2.27767
1	0.5	0.05	1.38629	0.999	1.39145	0.014139	1.36825
1	0.5	0.1	1.38629	0.999	1.41332	0.063534	1.32083
5	0.01	0.0001	621.46081	0.99903	620.85846	0.42381	621.46039
5	0.01	0.001	621.46081	0.83611	519.649	8679.5754	621.40034
5	0.01	0.01	621.46081	0.5887	369.63503	39787.64401	616.71042
5	0.05	0.0001	92.1034	0.99902	92.013044	0.008513	92.10361
5	0.05	0.001	92.1034	0.93782	86.37745	30.79478	92.10077

Tabla 3.2: (Continuación)

m	β	σ	t*	Integral	Media	Varianza	Moda
5	0.05	0.01	92.1034	0.999	92.19109	3.79301	91.95391
5	0.1	0.0001	39.12023	0.99906	39.083423	0.001391	39.12026
5	0.1	0.001	39.12023	0.97997	38.33699	0.60552	39.11988
5	0.1	0.01	39.12023	0.999	39.11824	0.39442	39.086232
5	0.5	0.0001	4.60517	0.99919	4.60145	1.3971e-005	4.60519
5	0.5	0.001	4.60517	0.99855	4.59851	6.2777e-005	4.60514
5	0.5	0.01	4.60517	0.99902	4.60141	0.0018447	4.60396
5	0.5	0.05	4.60517	0.99901	4.62334	0.04841	4.58017
5	0.5	0.1	4.60517	0.999	4.70354	0.25254	4.51288
5	1	0.0001	1.60944	0.99916	1.60809	1.8389e-006	1.60944
5	1	0.001	1.60944	0.99903	1.60787	4.0485e-006	1.60943
5	1	0.01	1.60944	0.99902	1.60798	0.00016167	1.60917
5	1	0.05	1.60944	0.99901	1.61166	0.0040712	1.60395
5	1	0.1	1.60944	0.999	1.6241	0.017658	1.58773
10	0.05	0.0001	105.96635	0.99905	105.86601	0.010469	105.9665
10	0.05	0.001	105.96635	0.95167	100.84631	25.0034566	105.96428
10	0.05	0.01	105.96635	0.99901	106.068766	4.38699	105.8009
10	0.1	0.0001	46.051702	0.99902	46.00634	0.0020996	46.051803
10	0.1	0.001	46.051702	0.97996	45.12908	0.83941	46.051414
10	0.1	0.01	46.051702	0.999	46.049527	0.4657	46.013658
10	0.5	0.0001	5.99146	0.99914	5.98632	2.6672e-005	5.99146
10	0.5	0.001	5.99146	0.99855	5.9828	9.907e-005	5.99143
10	0.5	0.01	5.99146	0.99901	5.98658	0.0024092	5.99019
10	0.5	0.05	5.99146	0.999	6.015378	0.063812	5.96284
10	0.5	0.1	5.99146	0.9988	6.12268	0.36222	5.89077
10	1	0.0001	2.30259	0.99902	2.30033	5.0938e-006	2.3026
10	1	0.001	2.30259	0.99903	2.30036	7.2103e-006	2.30257
10	1	0.01	2.30259	0.99902	2.3005	0.00023292	2.30227
10	1	0.05	2.30259	0.999	2.30582	0.005861	2.29603
10	1	0.1	2.30259	0.99901	2.32397	0.026012	2.27767

Tabla 3.3: Valores de integral, media, varianza y moda para la aproximación numérica de la densidad de tiempo de primer paso para el Caso 3.

m	β	σ	t*	Integral	Media	Varianza	Moda
0.1	0.001	0.0001	4605.17019	0.9992	4601.49354	59.32129	4604.85141
0.1	0.001	0.001	4605.17019	0.999	4605.044649	4676.75725	4600.97583
0.1	0.005	0.0001	599.14645	0.99916	598.64494	0.48839	599.12954
0.1	0.005	0.001	599.14645	0.99905	598.68382	24.092707	598.94886
0.1	0.005	0.01	599.14645	0.99722	611.31071	3618.79402	588.72736
0.1	0.01	0.0001	230.25851	0.99906	230.041876	0.069551	230.25452
0.1	0.01	0.001	230.25851	0.99916	230.083072	2.31987	230.19075
0.1	0.01	0.01	230.25851	0.999	232.47978	267.75575	227.76681
0.1	0.05	0.0001	13.86294	0.99915	13.85117	0.00019298	13.86289
0.1	0.05	0.001	13.86294	0.99913	13.85097	0.0056339	13.86559
0.1	0.05	0.01	13.86294	0.9991	13.87643	0.55681	13.78841
0.5	0.001	0.0001	6214.6081	0.99921	6209.7333	85.80666	6214.39805
0.5	0.001	0.001	6214.6081	0.9681	6022.30221	44271.55961	6207.78661
0.5	0.005	0.0001	921.034037	0.99929	920.38325	0.78894	921.051867
0.5	0.005	0.001	921.034037	0.99914	920.41252	37.23745	920.7156
0.5	0.01	0.0001	391.2023	0.9992	390.88849	0.13705	391.20817
0.5	0.01	0.001	391.2023	0.99918	390.91595	3.98327	391.18913
0.5	0.01	0.01	391.2023	0.99853	394.9036	492.55333	387.99484
0.5	0.05	0.0001	46.051702	0.99901	46.0062225	0.0022452	46.051443
0.5	0.05	0.001	46.051702	0.99923	46.016633	0.019521	46.044926
0.5	0.05	0.01	46.051702	0.99906	46.098987	1.87631	45.97627
0.5	0.1	0.0001	16.094379	0.99911	16.080028	0.0002214	16.094276
0.5	0.1	0.001	16.094379	0.99905	16.079125	0.0018251	16.094337
0.5	0.1	0.01	16.094379	0.99909	16.094941	0.16126	16.066286
0.5	0.1	0.05	16.094379	0.99822	16.52323	5.67452	15.58215
1	0.005	0.0001	1059.66347	0.99912	1058.73551	1.28023	1059.64656
1	0.005	0.001	1059.66347	0.9986	1058.38173	44.70551	1059.38071
1	0.01	0.0001	460.51702	0.9993	460.19478	0.14938	460.51573
1	0.01	0.001	460.51702	0.99909	460.13681	4.74508	460.45668
1	0.01	0.01	460.51702	0.99829	464.8252	601.24851	457.49851
1	0.05	0.0001	59.91465	0.99901	59.85557	0.0037191	59.91479
1	0.05	0.001	59.91465	0.9992	59.86753	0.026032	59.90844
1	0.05	0.01	59.91465	0.99906	59.97672	2.45597	59.78601
1	0.1	0.0001	23.025851	0.99903	23.0035371	0.0005196	23.025892
1	0.1	0.001	23.025851	0.99908	23.0047338	0.0027268	23.026592
1	0.1	0.01	23.025851	0.99904	23.025683	0.23138	23.012783
1	0.1	0.05	23.025851	0.99712	23.62691	8.86124	22.41887
1	0.5	0.0001	1.38629	0.99905	1.38498	1.7827e-006	1.38629
1	0.5	0.001	1.38629	0.99911	1.38505	7.0116e-006	1.38625
1	0.5	0.01	1.38629	0.99909	1.38525	0.00055088	1.38545
1	0.5	0.05	1.38629	0.99906	1.39172	0.014222	1.36751
1	0.5	0.1	1.38629	0.99901	1.41347	0.063718	1.31923
5	0.01	0.0001	621.46081	0.99906	620.87445	0.40487	621.45939
5	0.01	0.001	621.46081	0.99913	620.98352	6.46905	621.36634

Tabla 3.3: (Continuación)

m	β	σ	t^*	Integral	Media	Varianza	Moda
5	0.01	0.01	621.46081	0.81112	508.030497	12012.78895	615.26042
5	0.05	0.0001	92.1034	0.99912	92.022091	0.0069642	92.10355
5	0.05	0.001	92.1034	0.9992	92.031353	0.041877	92.10637
5	0.05	0.01	92.1034	0.99905	92.20012	3.8267	91.90591
5	0.1	0.0001	39.12023	0.99901	39.081386	0.0015447	39.12017
5	0.1	0.001	39.12023	0.99921	39.089456	0.0048352	39.11756
5	0.1	0.01	39.12023	0.99905	39.12097	0.39611	39.086232
5	0.5	0.0001	4.60517	0.99903	4.60071	2.0023e-005	4.60517
5	0.5	0.001	4.60517	0.99929	4.60192	2.8806e-005	4.60514
5	0.5	0.01	4.60517	0.99911	4.60185	0.0018443	4.60396
5	0.5	0.05	4.60517	0.99901	4.62402	0.049019	4.57737
5	0.5	0.1	4.60517	0.99806	4.70074	0.25887	4.50388
5	1	0.0001	1.60944	0.99917	1.6081	1.8096e-006	1.60944
5	1	0.001	1.60944	0.99908	1.60796	3.7617e-006	1.60946
5	1	0.01	1.60944	0.99915	1.60819	0.00016135	1.60944
5	1	0.05	1.60944	0.99901	1.61176	0.0040929	1.60555
5	1	0.1	1.60944	0.99901	1.62462	0.017979	1.58937
10	0.05	0.0001	105.96635	0.99909	105.86956	0.0097701	105.96586
10	0.05	0.001	105.96635	0.99919	105.88201	0.049358	105.95788
10	0.05	0.01	105.96635	0.99901	106.074039	4.42675	105.8009
10	0.1	0.0001	46.051702	0.99902	46.0063396	0.0020996	46.051573
10	0.1	0.001	46.051702	0.9992	46.014935	0.0059321	46.048514
10	0.1	0.01	46.051702	0.99908	46.054044	0.46786	46.026858
10	0.5	0.0001	5.99146	0.99909	5.98599	3.0187e-005	5.99147
10	0.5	0.001	5.99146	0.99916	5.98645	4.8839e-005	5.9913
10	0.5	0.01	5.99146	0.99905	5.98684	0.0024093	5.98949
10	0.5	0.05	5.99146	0.99901	6.016309	0.06476	5.96884
10	0.5	0.1	5.99146	0.99722	6.11311	0.36188	5.88727
10	1	0.0001	2.30259	0.99912	2.30057	4.0785e-006	2.30258
10	1	0.001	2.30259	0.99906	2.30042	6.9551e-006	2.30255
10	1	0.01	2.30259	0.99916	2.30083	0.00023199	2.30191
10	1	0.05	2.30259	0.99904	2.30607	0.0059038	2.29699
10	1	0.1	2.30259	0.999	2.3248	0.026776	2.27767

Tabla 3.4: Valores de integral, media, varianza y moda para la estimación no paramétrica de la densidad.

m	β	σ	t*	Integral	Media	Varianza	Moda	Shapiro ₁	p-valor	Shapiro ₂	p-valor
0.1	0.001	0.0001	4605.17	1	4606.121	49.145	4604.831	0.998	0.161	0.998	0.17
0.1	0.001	0.001	4605.17	1	4619.575	4841.395	4613.791	0.998	0.3	0.998	0.324
0.1	0.005	0.0001	599.146	1	599.241	0.26	599.162	0.999	0.637	0.999	0.637
0.1	0.005	0.001	599.146	1	599.858	25.081	600.929	0.998	0.215	0.998	0.167
0.1	0.005	0.01	599.146	1	623.53	3187.583	610.644	0.969	1.04e-013	0.986	5.15e-008
0.1	0.01	0.0001	230.259	1	230.308	0.0267	230.302	0.998	0.551	0.999	0.567
0.1	0.01	0.001	230.259	1	230.48	2.594	230.532	0.997	0.0803	0.997	0.0849
0.1	0.01	0.01	230.259	1	234.586	257.304	228.64	0.985	9.69e-009	0.992	3.86e-005
0.1	0.05	0.0001	13.863	1	13.867	6.14e-005	13.867	0.999	0.606	0.999	0.6
0.1	0.05	0.001	13.863	1	13.876	0.00578	13.879	0.997	0.0288	0.996	0.0195
0.1	0.05	0.01	13.863	1	13.99	0.586	13.92	0.997	0.0841	0.998	0.213
0.5	0.001	0.0001	6214.608	1	6215.946	65.637	6215.447	0.998	0.436	0.998	0.407
0.5	0.001	0.001	6214.608	1	6231.424	6265.538	6227.452	0.996	0.0191	0.997	0.0494
0.5	0.005	0.0001	921.034	1	921.196	0.389	921.138	0.999	0.926	0.999	0.933
0.5	0.005	0.001	921.034	1	921.928	38.213	922.0891	0.997	0.0573	0.997	0.0521
0.5	0.01	0.0001	391.202	1	391.249	0.0431	391.248	0.998	0.383	0.998	0.38
0.5	0.01	0.001	391.202	1	391.543	3.882	391.204	0.995	0.00207	0.995	0.00133
0.5	0.01	0.01	391.202	1	397.542	447.264	387.645	0.967	4.14e-014	0.977	2.76e-011
0.5	0.05	0.0001	46.0517	1	46.0605	0.000214	46.0595	0.998	0.25	0.998	0.249
0.5	0.05	0.001	46.0517	1	46.0772	0.0191	46.0657	0.999	0.877	0.999	0.874
0.5	0.05	0.01	46.0517	1	46.317	1.905	46.00407	0.993	0.000125	0.994	0.000507
0.5	0.1	0.0001	16.0944	1	16.0966	1.65e-005	16.096	0.997	0.041	0.997	0.0421
0.5	0.1	0.001	16.0944	1	16.102	0.00178	16.1	0.999	0.954	0.999	0.945
0.5	0.1	0.01	16.0944	1	16.149	0.165	16.165	0.997	0.0869	0.996	0.0109
0.5	0.1	0.05	16.0944	1	16.982	5.731	15.929	0.957	2.17e-016	0.983	3.25e-009
1	0.005	0.0001	1059.663	1	1059.761	0.44	1059.738	0.998	0.239	0.998	0.236
1	0.005	0.001	1059.663	1	1060.817	44.661	1062.459	0.998	0.158	0.998	0.141
1	0.01	0.0001	460.517	1	460.569	0.0513	460.539	0.998	0.201	0.998	0.208
1	0.01	0.001	460.517	1	460.794	4.703	461.108	0.998	0.178	0.997	0.13
1	0.01	0.01	460.517	1	468.885	566.0525	462.582	0.974	2.79e-012	0.983	1.74e-009
1	0.05	0.0001	59.915	1	59.924	0.00025	59.923	0.999	0.792	0.999	0.795
1	0.05	0.001	59.915	1	59.927	0.0249	59.954	0.996	0.0186	0.996	0.0147
1	0.05	0.01	59.915	1	60.202	2.339	59.899	0.991	1.14e-005	0.993	8.03e-005
1	0.1	0.0001	23.0259	1	23.0306	2.47e-005	23.0313	0.999	0.808	0.999	0.807
1	0.1	0.001	23.0259	1	23.0299	0.00224	23.0275	0.996	0.0232	0.996	0.0213
1	0.1	0.01	23.0259	1	23.0948	0.251	23.179	0.997	0.082	0.997	0.0491
1	0.1	0.05	23.0259	1	23.931	7.119	23.244	0.968	6.37e-014	0.988	2.46e-007
1	0.5	0.0001	1.386	1	1.387	5.77e-008	1.387	0.999	0.946	0.999	0.947
1	0.5	0.001	1.386	1	1.387	5.92e-006	1.387	0.999	0.981	0.999	0.981
1	0.5	0.01	1.386	1	1.388	0.00054	1.385	0.999	0.866	0.999	0.666
1	0.5	0.05	1.386	1	1.409	0.0151	1.368	0.993	7.8e-005	0.996	0.026
1	0.5	0.1	1.386	1	1.447	0.0626	1.344	0.962	2.65e-015	0.99	2.49e-006

Shapiro₁ es el valor del estadístico de Shapiro-Wilks para el contraste de normalidad y Shapiro₂ el correspondiente para el contraste de lognormalidad.

Tabla 3.4: (Continuación)

m	β	σ	t^*	Integral	Media	Varianza	Moda	Shapiro₁	p-valor	Shapiro₂	p-valor
5	0.01	0.0001	621.461	1	621.534	0.0648	621.499	0.999	0.67	0.999	0.664
5	0.01	0.001	621.461	1	621.815	6.687	621.865	0.997	0.0903	0.997	0.0818
5	0.01	0.01	621.461	1	632.0858	913.912	624.282	0.974	3.17e-012	0.982	8.54e-010
5	0.05	0.0001	92.103	1	92.112	0.000405	92.114	0.999	0.687	0.999	0.684
5	0.05	0.001	92.103	1	92.123	0.0398	92.129	0.996	0.00777	0.996	0.00696
5	0.05	0.01	92.103	1	92.41	3.912	92.132	0.996	0.0263	0.997	0.0859
5	0.1	0.0001	39.12	1	39.122	4.23e-005	39.122	0.999	0.977	0.999	0.978
5	0.1	0.001	39.12	1	39.135	0.0042	39.127	0.998	0.353	0.998	0.346
5	0.1	0.01	39.12	1	39.219	0.396	39.109	0.995	0.00458	0.996	0.0088
5	0.5	0.0001	4.605	1	4.606	2.09e-007	4.606	0.997	0.0397	0.997	0.0401
5	0.5	0.001	4.605	1	4.606	1.99e-005	4.606	0.998	0.385	0.998	0.367
5	0.5	0.01	4.605	1	4.61	0.00187	4.605	0.998	0.156	0.998	0.161
5	0.5	0.05	4.605	1	4.651	0.0492	4.61	0.99	3.76e-006	0.994	0.000472
5	0.5	0.1	4.605	1	4.782	0.246	4.673	0.969	1.34e-013	0.986	6.59e-008
5	1	0.0001	1.609	1	1.61	1.72e-008	1.61	0.999	0.762	0.999	0.761
5	1	0.001	1.609	1	1.61	1.67e-006	1.61	0.998	0.369	0.998	0.366
5	1	0.01	1.609	1	1.612	0.000173	1.611	0.998	0.369	0.998	0.371
5	1	0.05	1.609	1	1.623	0.00408	1.616	0.997	0.0606	0.997	0.122
5	1	0.1	1.609	1	1.642	0.0181	1.592	0.982	9.38e-010	0.992	3.36e-005
10	0.05	0.0001	105.966	1	105.975	0.00051	105.976	0.998	0.296	0.998	0.295
10	0.05	0.001	105.966	1	106.0111	0.0448	105.982	0.999	0.623	0.999	0.606
10	0.05	0.01	105.966	1	106.435	4.606	105.708	0.994	0.000313	0.995	0.00164
10	0.1	0.0001	46.0517	1	46.0564	4.81e-005	46.0573	0.998	0.544	0.998	0.54
10	0.1	0.001	46.0517	1	46.069	0.00504	46.0787	0.998	0.223	0.998	0.237
10	0.1	0.01	46.0517	1	46.172	0.509	46.169	0.998	0.238	0.998	0.201
10	0.5	0.0001	5.991	1	5.992	2.95e-007	5.992	0.998	0.472	0.998	0.473
10	0.5	0.001	5.991	1	5.992	2.7e-005	5.992	0.998	0.358	0.998	0.35
10	0.5	0.01	5.991	1	5.999	0.00247	6.00195	0.996	0.00878	0.995	0.00328
10	0.5	0.05	5.991	1	6.0443	0.0682	5.956	0.979	8.62e-011	0.984	9.13e-009
10	0.5	0.1	5.991	1	6.183	0.328	5.973	0.951	1.15e-017	0.973	1.21e-012
10	1	0.0001	2.303	1	2.303	2.54e-008	2.303	0.999	0.767	0.999	0.767
10	1	0.001	2.303	1	2.303	2.49e-006	2.303	0.999	0.69	0.999	0.678
10	1	0.01	2.303	1	2.306	0.000252	2.305	0.998	0.145	0.997	0.0931
10	1	0.05	2.303	1	2.319	0.00543	2.31	0.997	0.0765	0.998	0.361
10	1	0.1	2.303	1	2.345	0.0258	2.272	0.984	8.81e-009	0.992	5.33e-005

Capítulo 4

Aplicación a datos reales

En el capítulo 3, junto con el estudio del nuevo proceso de difusión asociado a la curva Gompertz tratada por Tan, se aplicaron los resultados obtenidos a unos datos simulados. Ahora, para mostrar su utilidad práctica, vamos a aplicarlos a datos reales. En concreto, vamos a tratar dos ejemplos incluidos ambos dentro del ámbito económico. En el primero de ellos trabajaremos con datos que muestran la ganancia media (en pesetas)¹ por hora trabajada por sectores de actividad (industria, construcción, servicios, todas las actividades) y categoría profesional (empleados, obreros, empleados y obreros) en España. En el segundo ejemplo los datos representan la remuneración de asalariados (en millones de pesetas) por comunidad autónoma en España. En ambos casos los datos disponibles muestran tendencias sigmoidales con cotas distintas y valores iniciales diferentes en cada trayectoria, por lo que nuestro modelo puede ser adecuado para ajustarlos.

Nuestro objetivo es encontrar uno o varios modelos que ajusten adecuadamente los datos en cada uno de los ejemplos. Para ello se comenzará, en ambos, buscando un modelo común para todas las trayectorias muestrales y se observará si es asumible un único modelo. En caso contrario, se subdividirán los datos en grupos de trayectorias homogéneas entre sí en lo que se refiere a su comportamiento, a los que se les ajustará un modelo distinto. De esta forma observaremos si hay mejoras en el ajuste de los datos. La forma de agrupar las trayectorias será distinta en los dos ejemplos. En el primero, ya que de forma natural surgen agrupaciones (sectores de actividad y categoría profesional), se trabajará con ellas. Para el segundo, al no haber ninguna alternativa a priori, se propondrá un método para realizar la subdivisión. Dicho método se basa en el ajuste de curvas Gompertz de las tratadas por Tan a cada una de las trayectorias.

Además, en el primer ejemplo, se muestra un estudio con fines predictivos. Para ello se suprimirá el último dato a la hora de la estimación del modelo y se usará el modelo estimado para predecir dicho valor. De esta forma se puede comparar dicha predicción con

¹En los dos ejemplos se ha mantenido la unidad monetaria existente durante el período de tiempo que abarcan los datos.

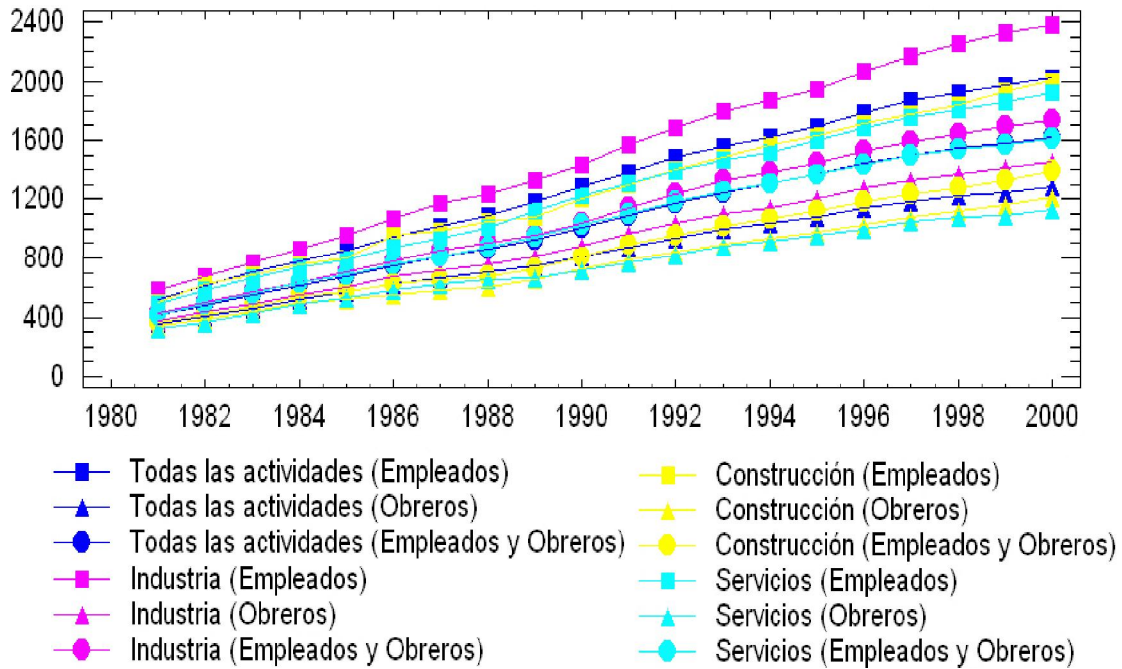
el valor real y así tener una idea sobre la bondad del modelo en cuanto a predicción. Para predecir el valor nos vamos a basar en las diversas funciones paramétricas estudiadas en el capítulo 3.

4.1. Aplicación a datos de ganancia media por hora trabajada

Los datos considerados en este caso (ver tabla 4.1) constan de 12 trayectorias muestrales, de 20 datos cada una de ellas, que se corresponden con la ganancia media (en ptas.) por hora trabajada por los trabajadores de ciertos sectores de actividades en España, desde el año 1981 al 2000. Como puede ver en la gráfica 4.1, las trayectorias muestrales parten de distintos valores iniciales y alcanzan cotas distintas, mostrando tendencias de tipo sigmoidal. A la vista de dicha gráfica, parece oportuno considerar el nuevo proceso de difusión Gompertz para ajustar un modelo a los datos.

	T A	T A	T A	I	I	I	C	C	C	S	S	S
Año	E	O	E y O	E	O	E y O	E	O	E y O	E	O	E y O
1981	523	353	415	580	377	430	498	338	365	490	323	414
1982	614	403	481	672	433	498	622	387	419	578	361	484
1983	705	462	553	774	493	570	685	434	472	668	426	566
1984	777	515	617	860	546	631	754	497	543	735	486	632
1985	849	567	679	959	604	703	805	519	570	791	531	686
1986	950	625	753	1072	672	784	957	549	626	874	583	759
1987	1019	669	810	1169	721	847	989	585	658	930	624	812
1988	1090	705	862	1239	762	900	1045	604	679	1007	658	875
1989	1188	746	925	1325	811	958	1081	657	731	1127	664	949
1990	1289	811	1006	1438	882	1042	1202	726	812	1223	720	1031
1991	1382	876	1088	1565	965	1143	1303	788	890	1305	773	1104
1992	1481	937	1172	1685	1038	1236	1401	839	956	1396	824	1183
1993	1563	994	1251	1795	1102	1326	1490	897	1023	1468	881	1256
1994	1618	1037	1307	1866	1147	1379	1571	934	1071	1519	919	1310
1995	1696	1085	1370	1939	1200	1440	1632	978	1124	1599	956	1374
1996	1792	1144	1443	2070	1274	1525	1711	1027	1186	1685	1001	1436
1997	1866	1188	1501	2170	1328	1593	1778	1079	1238	1758	1045	1493
1998	1923	1222	1543	2259	1371	1646	1837	1121	1279	1811	1076	1536
1999	1975	1250	1583	2326	1408	1690	1928	1161	1330	1859	1094	1570
2000	2024	1284	1620	2382	1454	1738	2000	1218	1388	1917	1133	1613

Tabla 4.1: Datos por sectores de actividades (Todas las actividades (T A), industria (I), construcción (C) y servicios (S)) y categorías profesionales (Empleados (E), obreros (O) y empleados y obreros (E y O)) obtenidos de la encuesta de salarios de la industria y de los servicios del banco de datos TEMPUS del Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es).

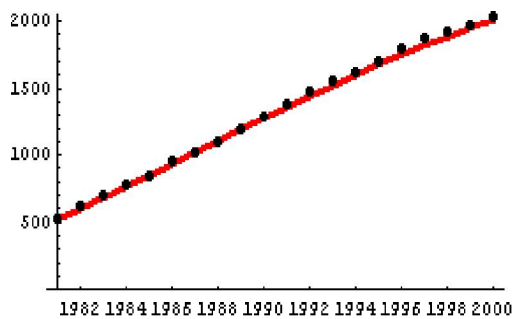


Gráfica 4.1: Datos ganancia media por hora trabajada.

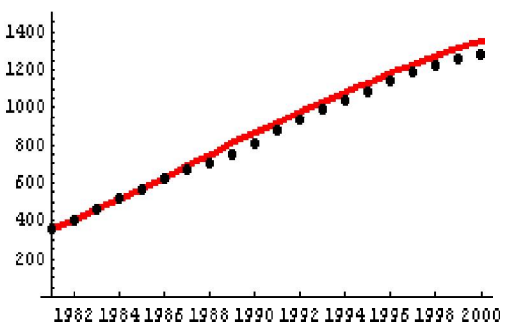
En primer lugar, estimamos un modelo común a todas las trayectorias de que disponemos, obteniendo las siguientes estimaciones máximo verosímiles de los parámetros a partir de las expresiones obtenidas en el capítulo 3,

$$\hat{m} = 1.55603, \quad \hat{\beta} = 0.0833521, \quad \hat{\sigma} = 0.0169708.$$

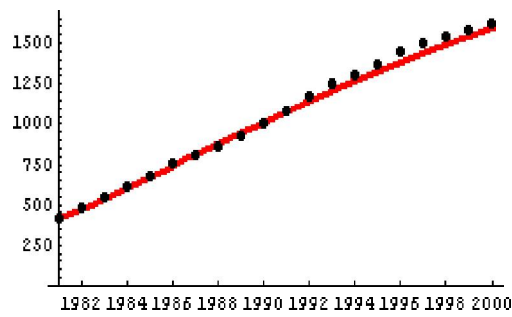
Una vez estimado el modelo, representamos los valores muestrales de cada trayectoria junto con la función media estimada, con idea de poder comprobar gráficamente la adecuación de éste a los datos.



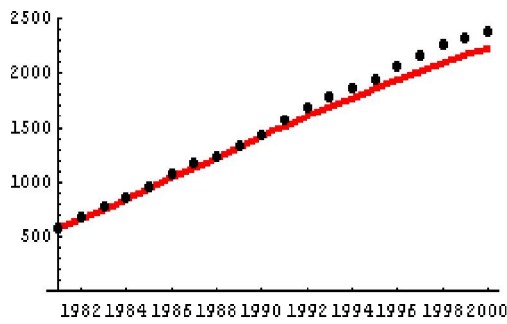
Empleados en todas las actividades



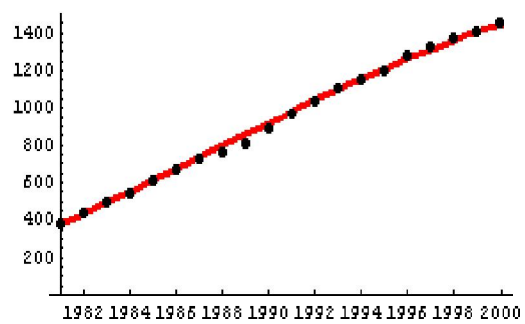
Obreros en todas las actividades



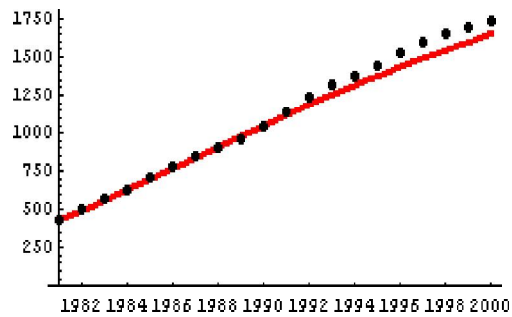
Empleados y obreros en todas las actividades



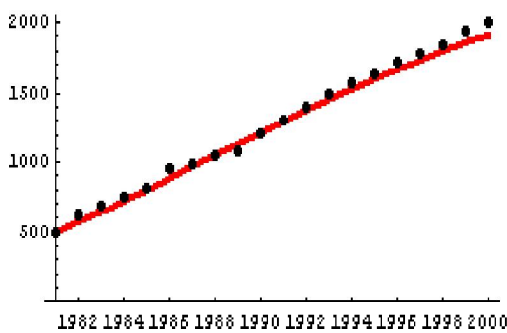
Empleados en industria



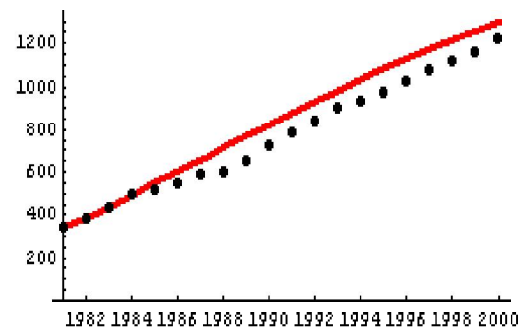
Obreros en industria



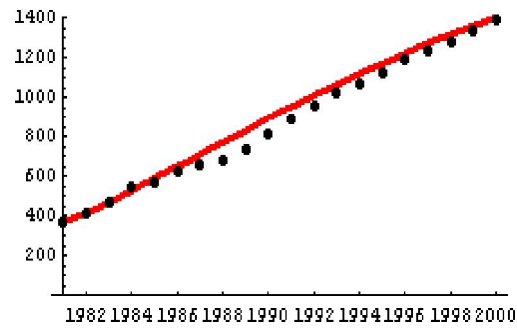
Empleados y Obreros en industria



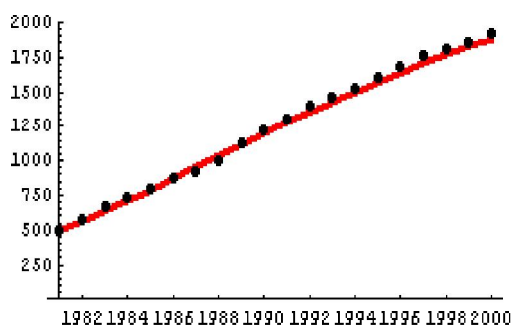
Empleados en construcción



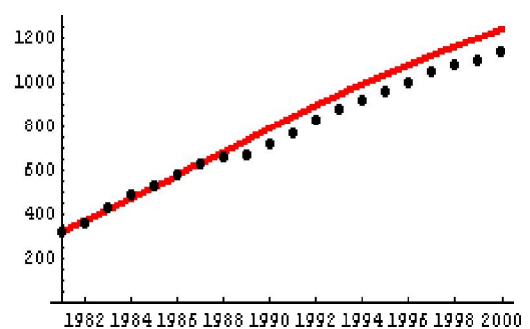
Obreros en construcción



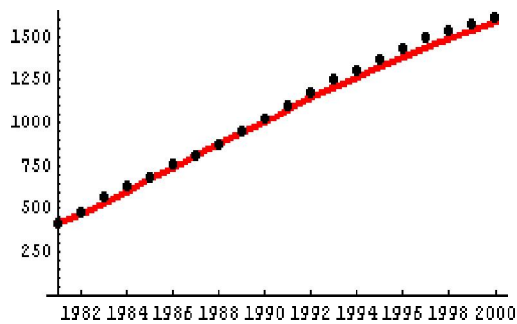
Empleados y obreros en construcción



Empleados en servicios



Obreros en servicios



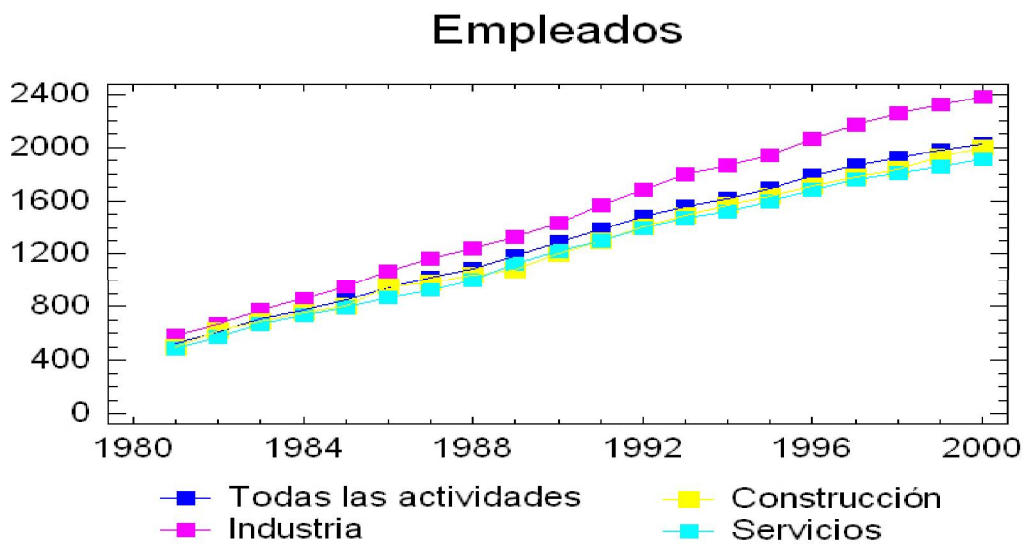
Empleados y obreros en servicios

Como puede verse, en algunos casos, como por ejemplo para los sueldos de los obreros en el sector de la construcción y en el sector servicios, el modelo ajustado presenta desviaciones notables respecto de los datos observados, lo cual induce a pensar que podría mejorarse dicho ajuste. Las diferencias observadas pueden estar motivadas porque los datos corresponden a dos colectivos distintos (empleados y obreros), o bien porque provienen de sectores de trabajo distintos (industria, construcción y servicios), y la estimación realizada en el modelo no contempla este hecho. Siguiendo esta idea, dividimos el estudio en dos casos. En el primero de ellos, subdividimos los datos agrupándolos según la categoría laboral, incluyendo un grupo que englobe a ambas. En el segundo caso, los grupos los formamos basándonos en el sector de actividad, considerando, de nuevo, un sector que

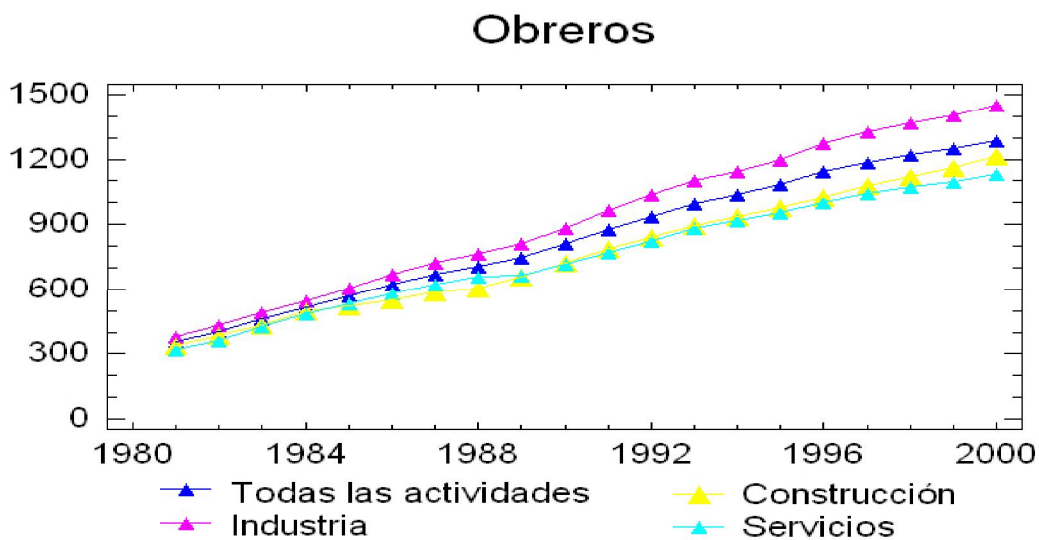
incluye a todos. Una vez reagrupados los datos, realizamos un análisis, similar al anterior, en cada uno de los casos.

4.1.1. Datos agrupados por categorías laborales

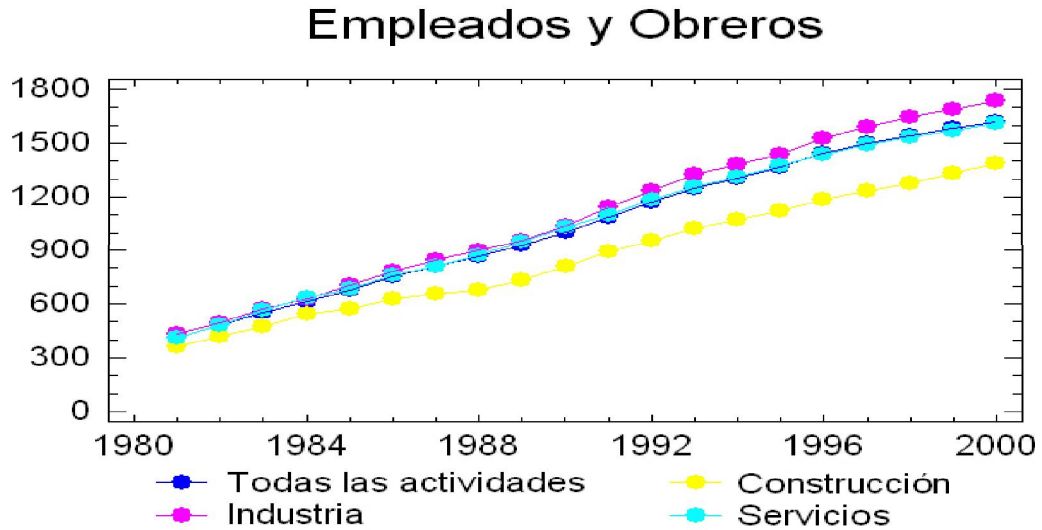
Los datos agrupados por categorías laborales se observan en las gráficas 4.2, 4.3 y 4.4.



Gráfica 4.2: Datos por sector de actividades para empleados.



Gráfica 4.3: Datos por sector de actividades para obreros.

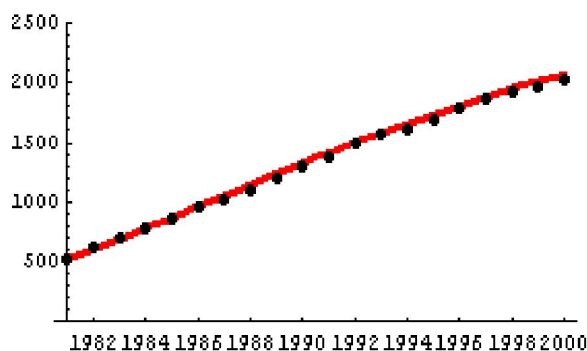


Gráfica 4.4: Datos por sector de actividades para empleados y obreros.

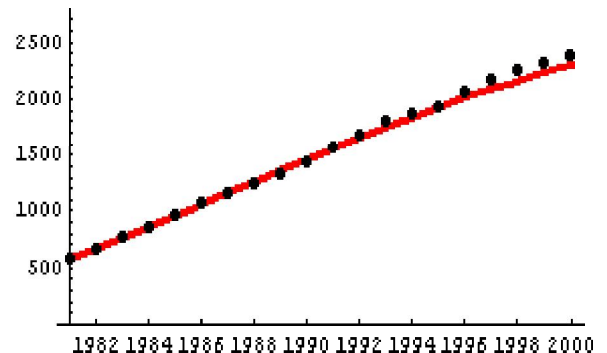
Al igual que antes, para cada grupo, calculamos las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros y representamos las funciones media estimadas junto con las trayectorias muestrales correspondientes, obteniéndose los siguientes resultados:

• **Resultados para el modelo ajustado a los datos de los EMPLEADOS:**

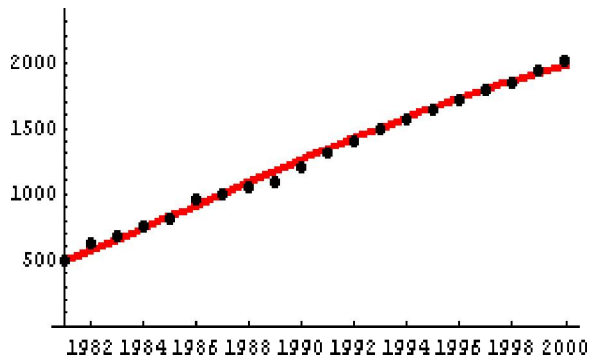
$$\hat{m} = 1.55312, \quad \hat{\beta} = 0.0879439, \quad \hat{\sigma} = 0.0192233.$$



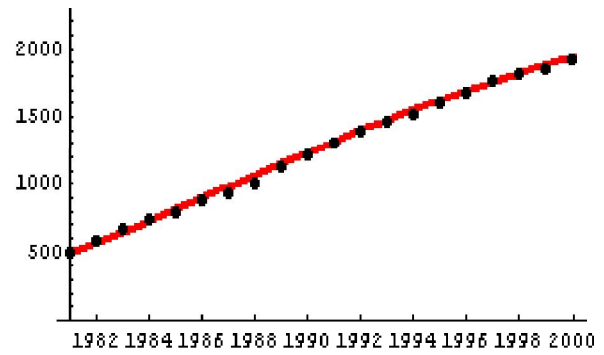
Todas las actividades



Industria



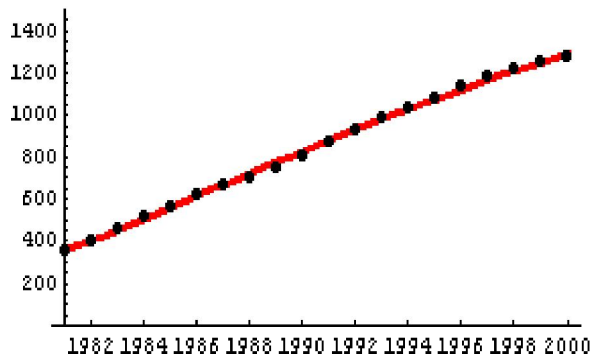
Construcción



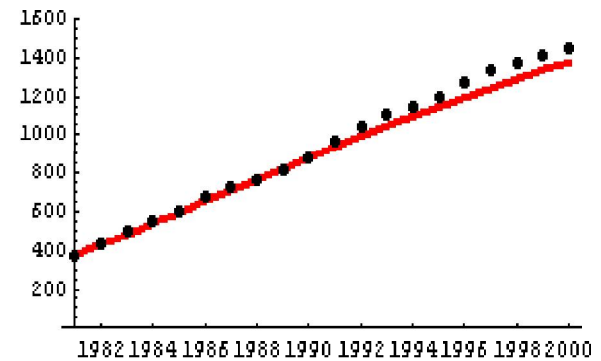
Servicios

• Resultados para el modelo ajustado a los datos de los OBREROS:

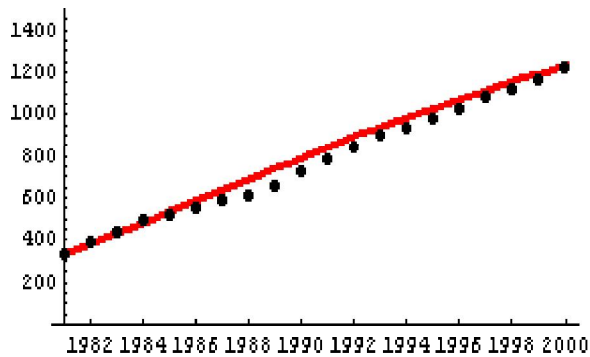
$$\hat{m} = 1.50972, \hat{\beta} = 0.0811867, \hat{\sigma} = 0.0167187.$$



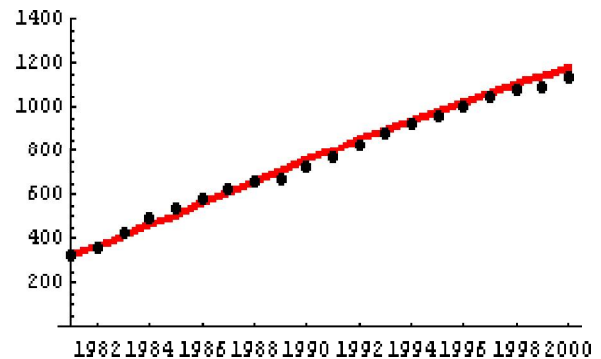
Todas las actividades



Industria



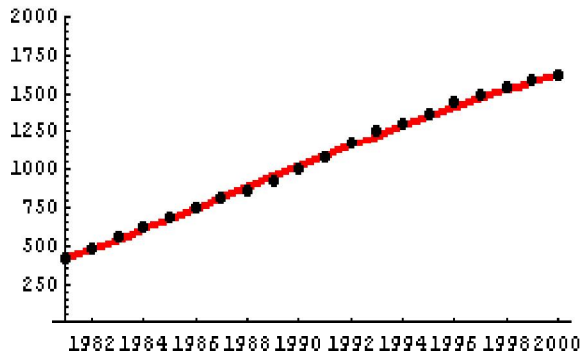
Construcción



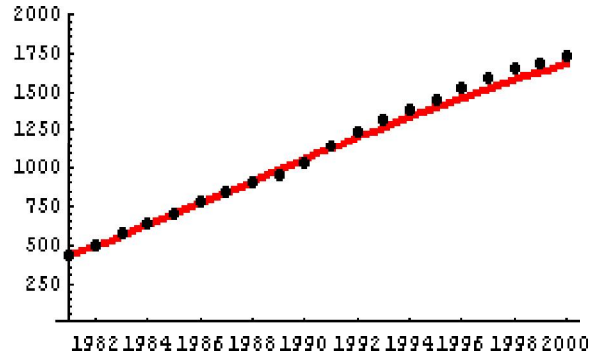
Servicios

• Resultados para el modelo ajustado a los datos de los EMPLEADOS Y OBREROS:

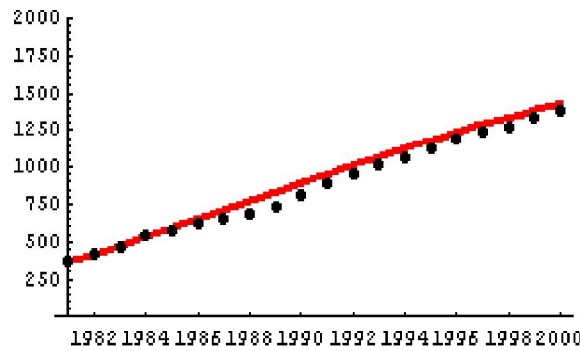
$$\hat{m} = 1.59052, \hat{\beta} = 0.0820069, \hat{\sigma} = 0.0143954.$$



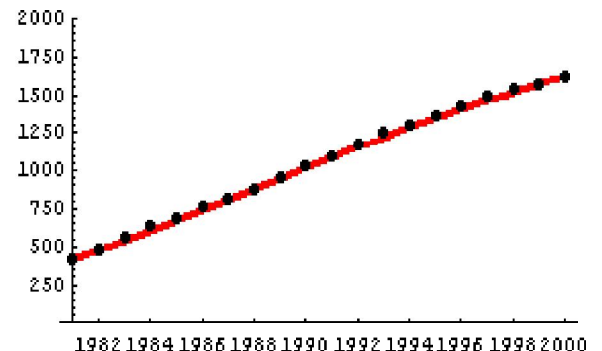
Todas las actividades



Industria



Construcción



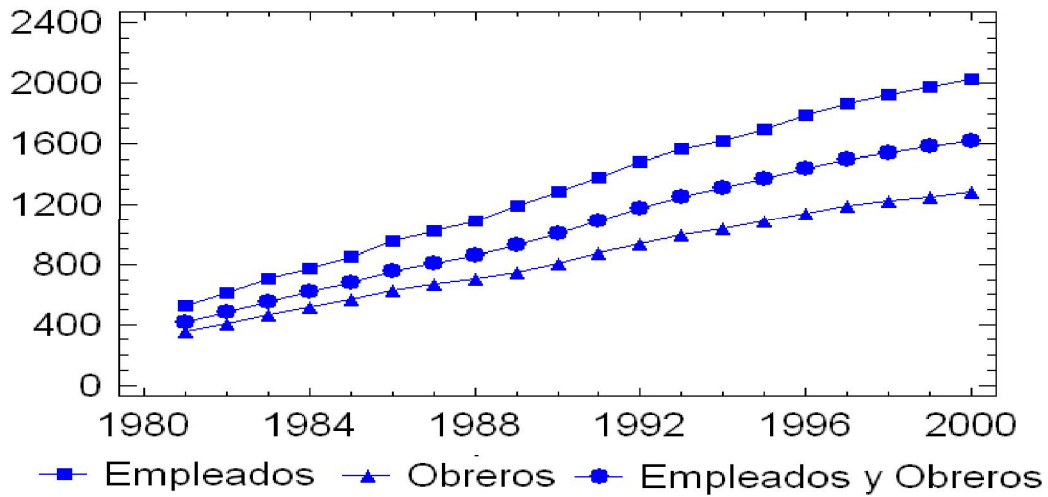
Servicios

Observando estas gráficas puede apreciarse claramente cómo se mejora el ajuste, basado en la tendencia del proceso, en aquellos casos en los cuales el modelo único presentaba desviaciones notables (caso de categoría laboral obreros en el sector de la construcción y en el sector de servicios). Veamos si en la segunda de las agrupaciones de trayectorias planteadas sucede lo mismo.

4.1.2. Datos agrupados por sectores de actividades

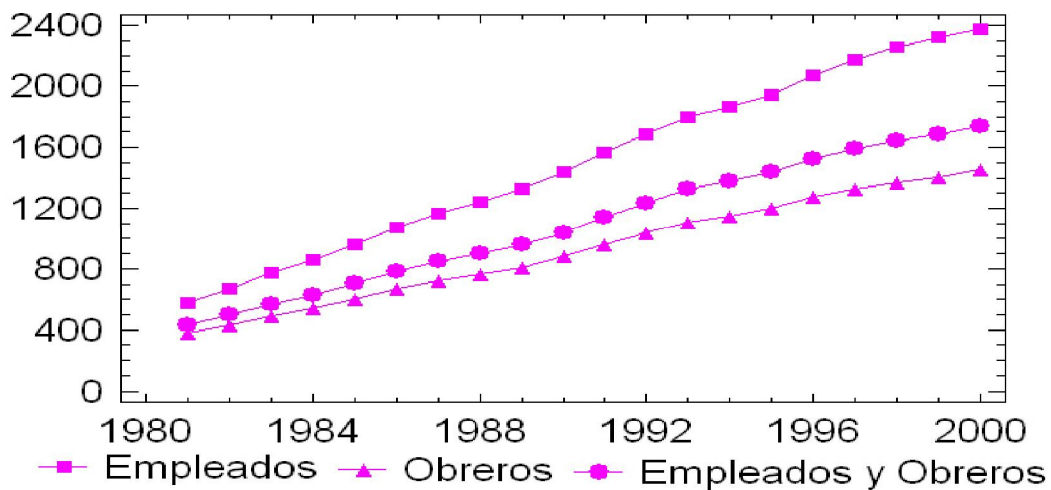
Los datos agrupados por categorías laborales se observan en las gráficas 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8.

Todas las actividades



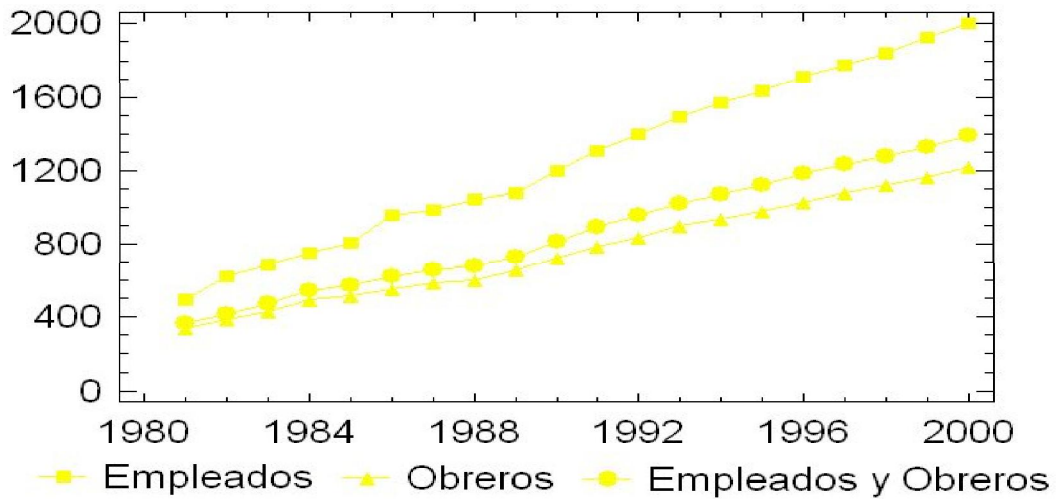
Gráfica 4.5: Datos por categoría laboral para todas las actividades.

Industria



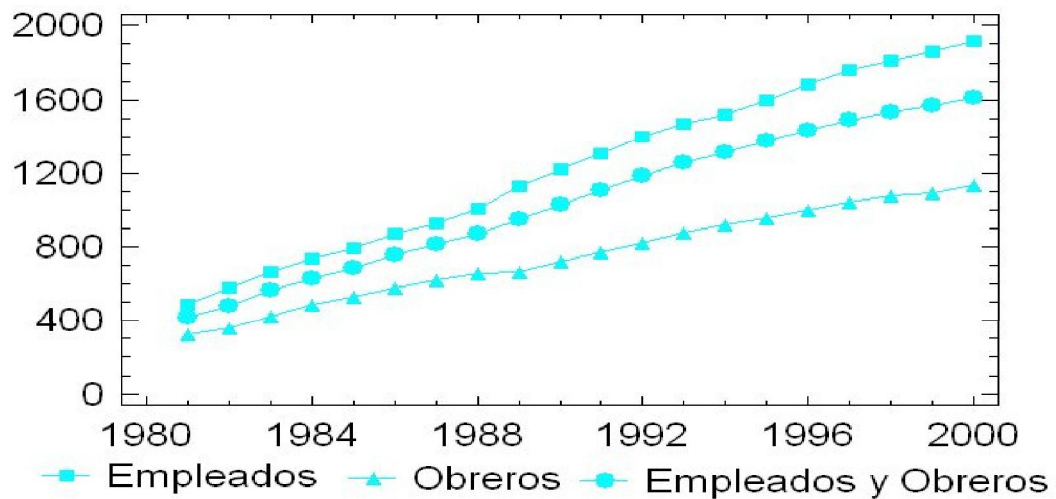
Gráfica 4.6: Datos por categoría laboral para el sector de la industria.

Construcción



Gráfica 4.7: Datos por categoría laboral para el sector de la construcción.

Servicios

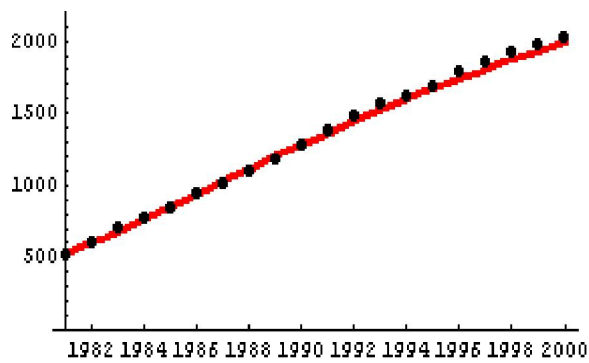


Gráfica 4.8: Datos por categoría laboral para el sector servicios.

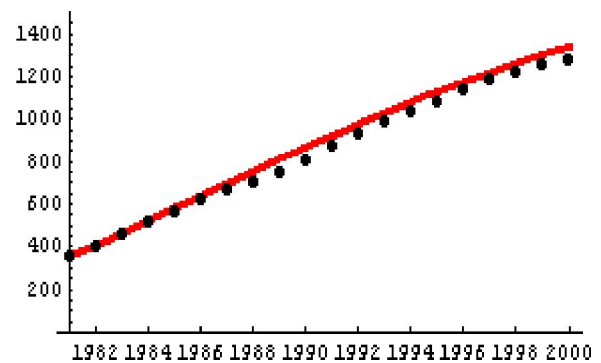
De nuevo, a cada grupo les realizamos el mismo análisis que en el caso anterior, llegando a los siguientes resultados:

• **Resultados para el modelo ajustado a los datos de todas las ACTIVIDADES:**

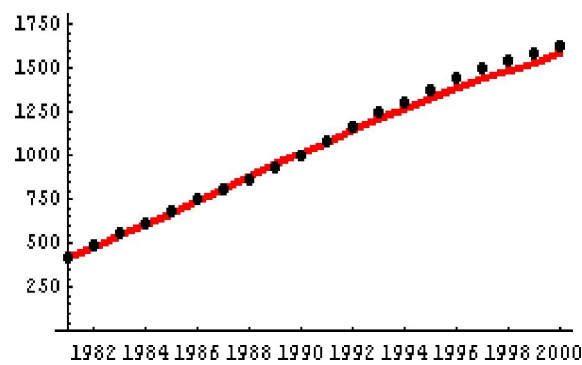
$$\hat{m} = 1.51376, \hat{\beta} = 0.0869641, \hat{\sigma} = 0.0106706.$$



Empleados



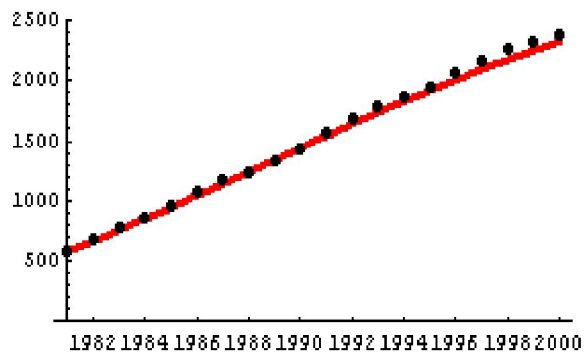
Obreros



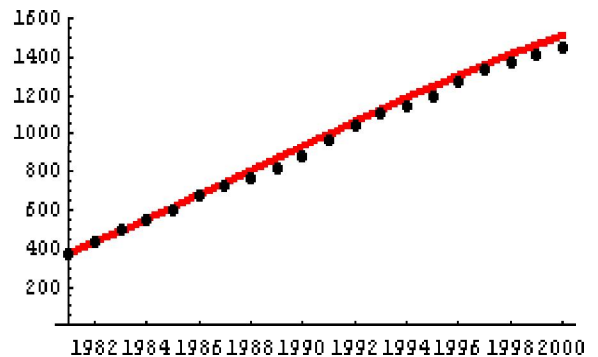
Empleados y obreros

• **Resultados para el modelo ajustado a los datos del sector de la INDUSTRIA:**

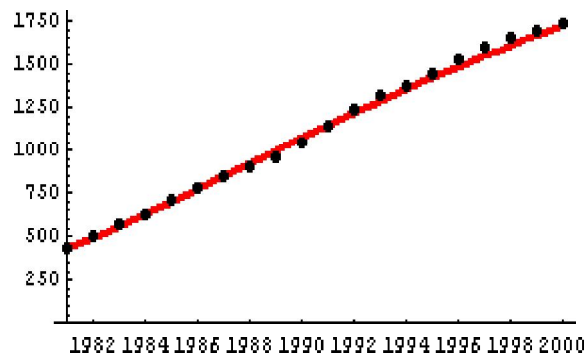
$$\hat{m} = 1.63614, \hat{\beta} = 0.0802291, \hat{\sigma} = 0.0115114.$$



Empleados



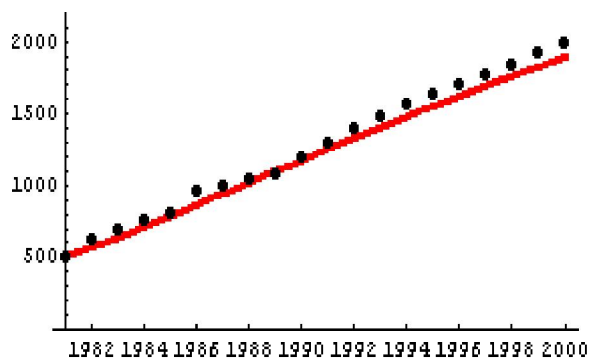
Obreros



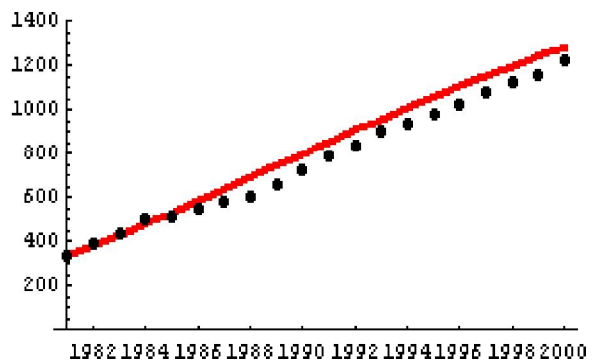
Empleados y obreros

- Resultados para el modelo ajustado a los datos del sector de la CONSTRUCCIÓN:

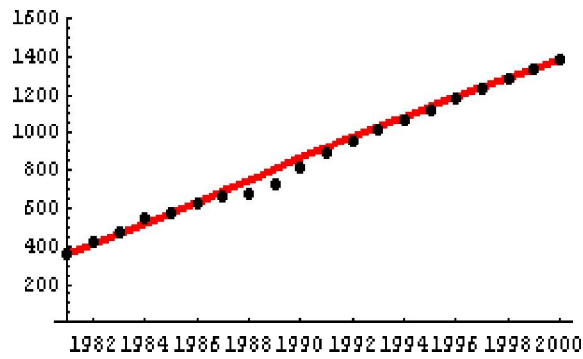
$$\hat{m} = 1.63921, \hat{\beta} = 0.0740976, \hat{\sigma} = 0.0252213.$$



Empleados



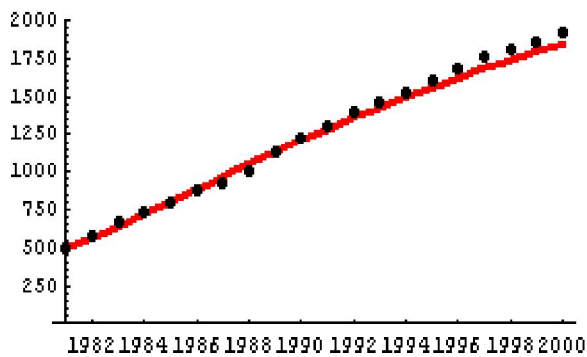
Obreros



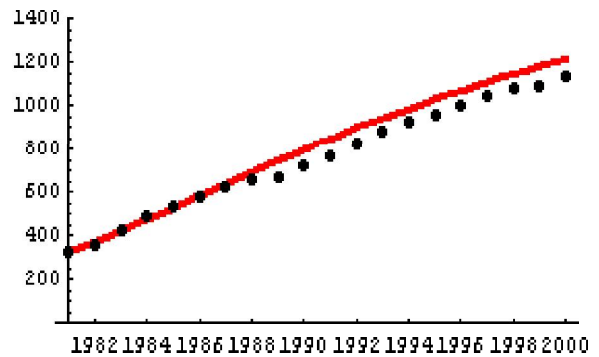
Empleados y obreros

- Resultados para el modelo ajustado a los datos del sector SERVICIOS:

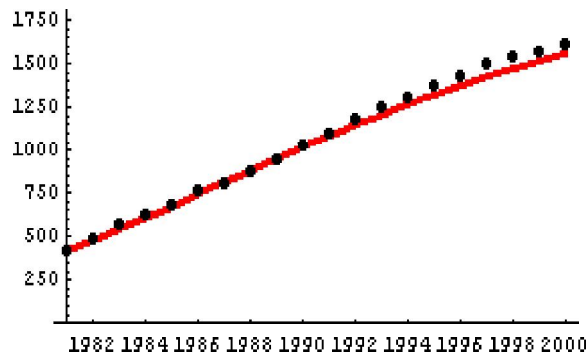
$$\hat{m} = 1.46285, \hat{\beta} = 0.09179, \hat{\sigma} = 0.0157417.$$



Empleados



Obreros



Empleados y Obreros

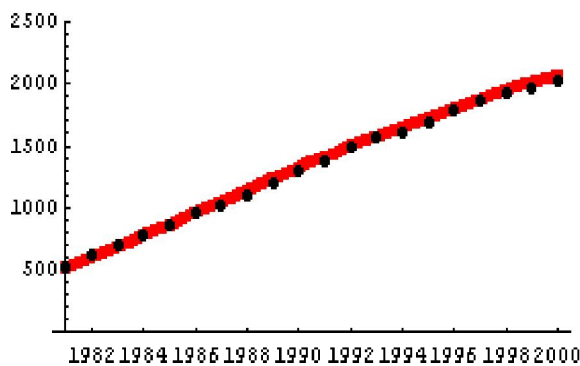
Para esta elección de subgrupos, al igual que sucedía en el caso anterior, los modelos obtenidos mejoran al modelo único, si bien parece que en menor medida que para la agrupación anterior de trayectorias.

4.1.3. Ajuste y predicción

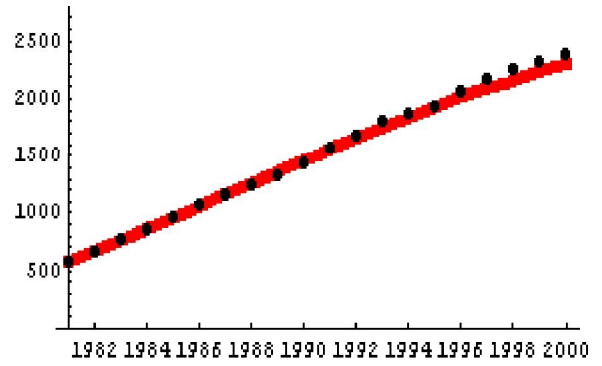
En la estimación de los modelos anteriores hemos empleado todos los datos disponibles en cada trayectoria. A continuación nos planteamos emplear dichos modelos con fines predictivos. Para ello eliminamos del proceso de estimación el último dato de cada trayectoria, estimamos el modelo con todos los demás datos y se realiza la predicción en el instante de tiempo no considerado. Este desarrollo será realizado considerando la primera de las agrupaciones consideradas.

- Estimaciones para el modelo ajustado a los datos de los EMPLEADOS:

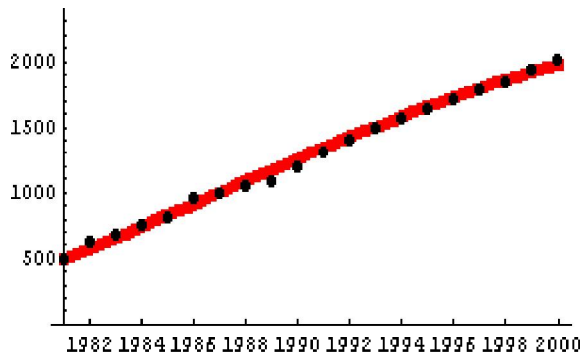
$$\hat{m} = 1.55401, \hat{\beta} = 0.087888, \hat{\sigma} = 0.0197194.$$



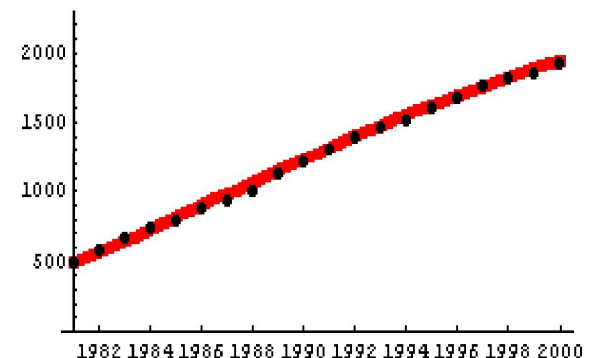
Todas las actividades



Industria



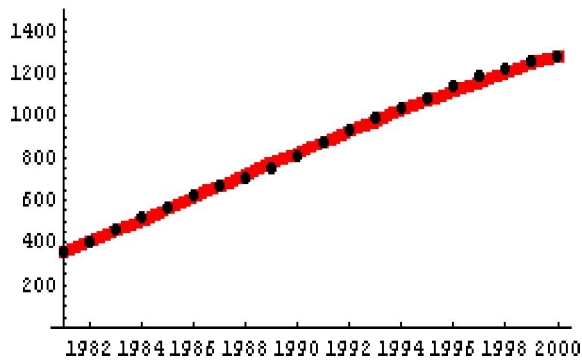
Construcción



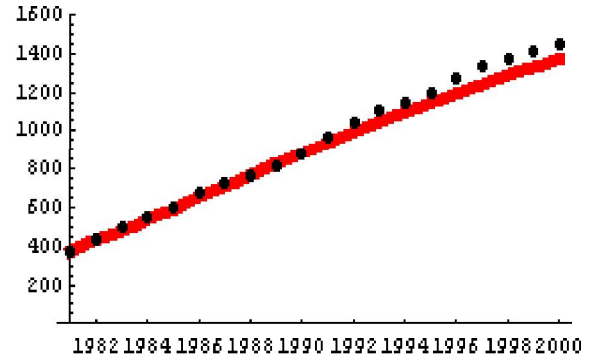
Servicios

• Estimaciones para el modelo ajustado a los datos de los OBREROS:

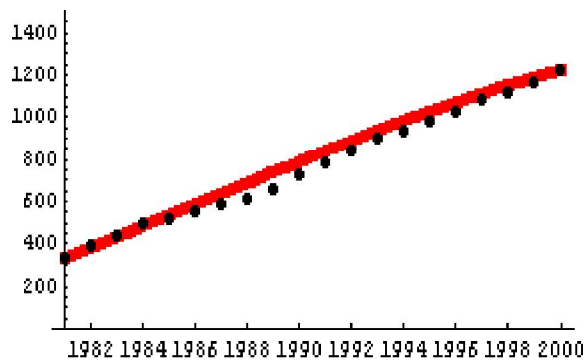
$$\hat{m} = 1.59299, \hat{\beta} = 0.0811867, \hat{\sigma} = 0.0167187.$$



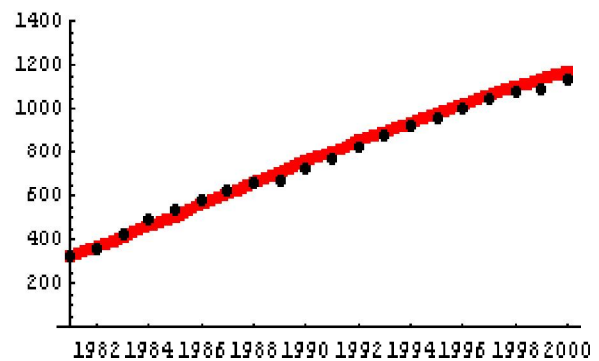
Todas las actividades



Industria



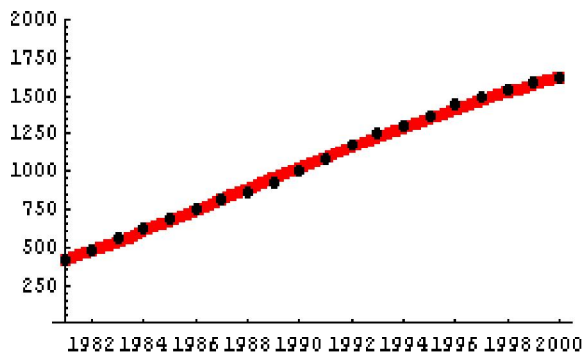
Construcción



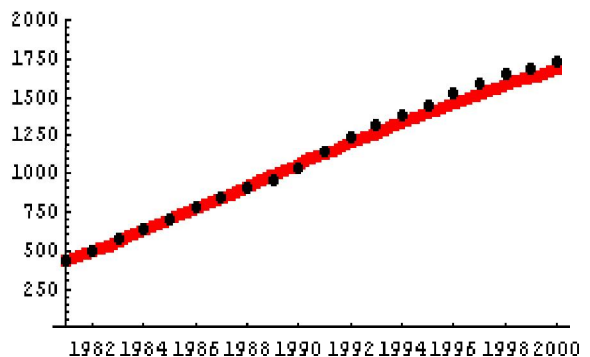
Servicios

• Estimaciones para el modelo ajustado a los datos de los EMPLEADOS Y OBREROS:

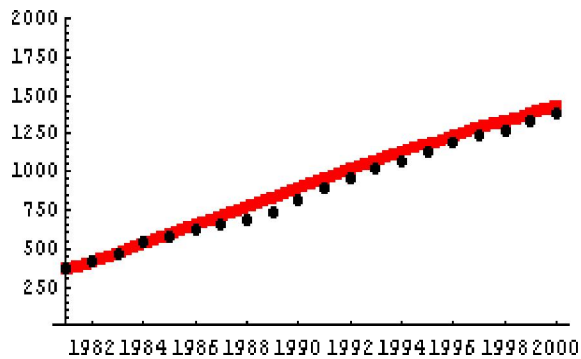
$$\hat{m} = 1.50972, \hat{\beta} = 0.0811867, \hat{\sigma} = 0.0167187.$$



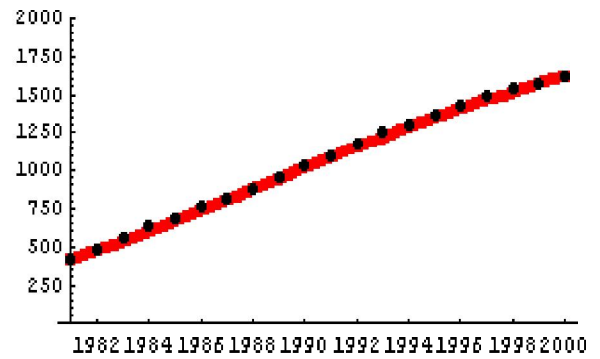
Todas las actividades



Industria



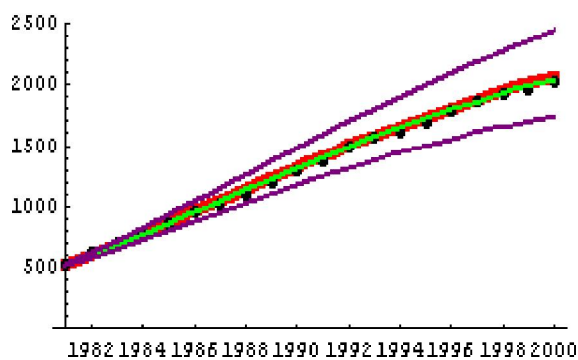
Construcción



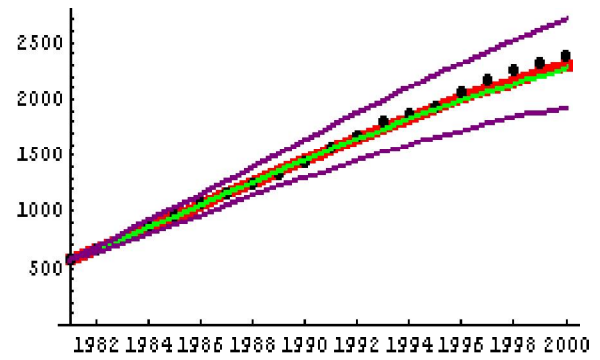
Servicios

Al igual que se ha obtenido la función media estimada para cada categoría laboral, se podrían estimar el resto de funciones que se trataron en el capítulo 3, como la función moda o la función de cuantiles. A partir esta última función, considerando los cuantiles $\alpha_1 = 0.025$ y $\alpha_2 = 0.975$, se puede obtener una banda de confianza que, con probabilidad 0.95, contiene al valor verdadero. Representemos estas funciones junto con las trayectorias muestrales en cada caso.

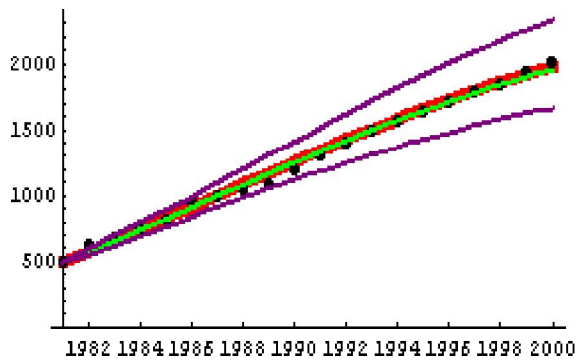
- Funciones estimadas para el modelo ajustado a los datos de los **EMPLEADOS**:



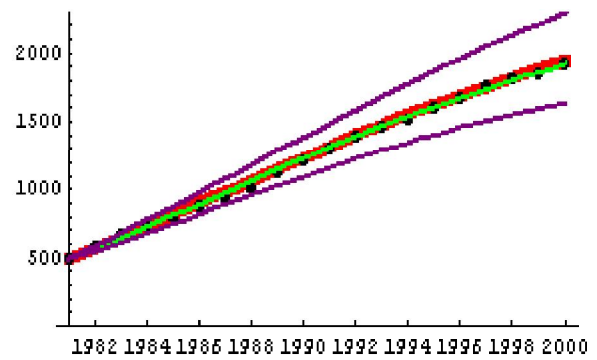
Todas las actividades



Industria

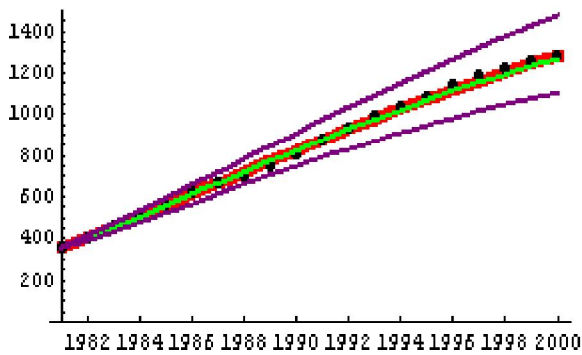


Construcción

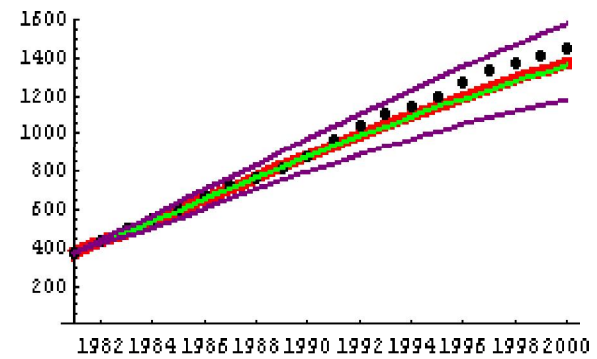


Servicios

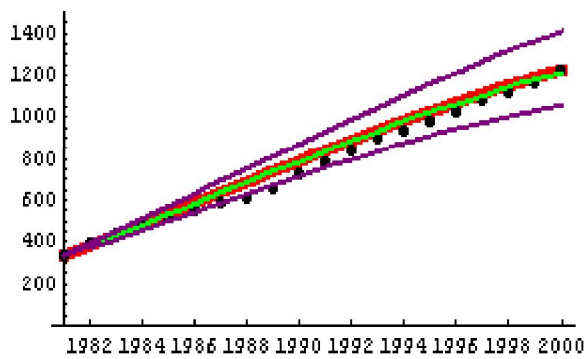
- Funciones estimadas para el modelo ajustado a los datos de los **OBREROS**:



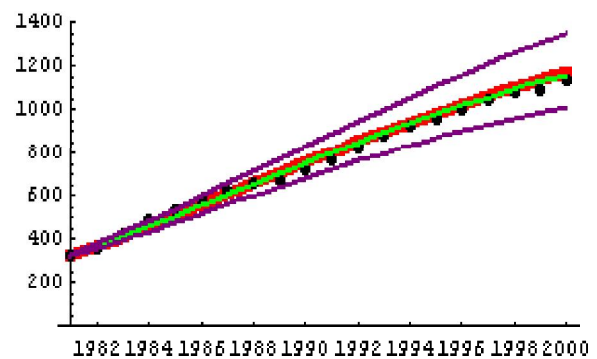
Todas las actividades



Industria

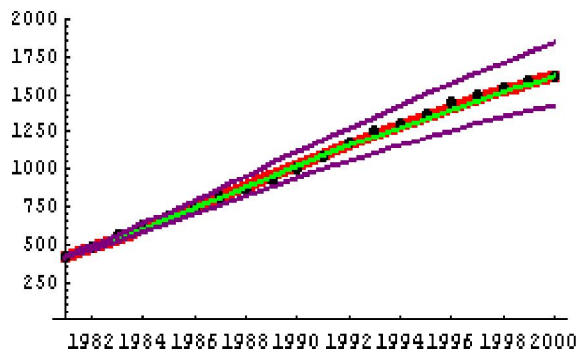


Construcción

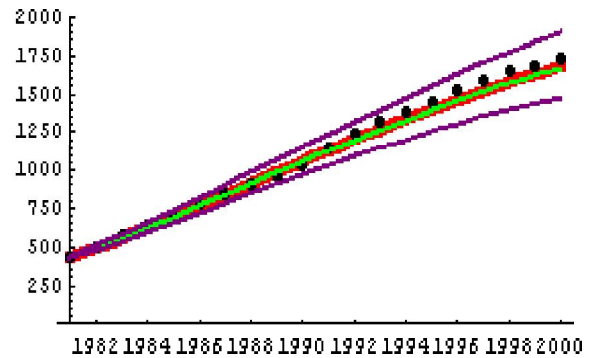


Servicios

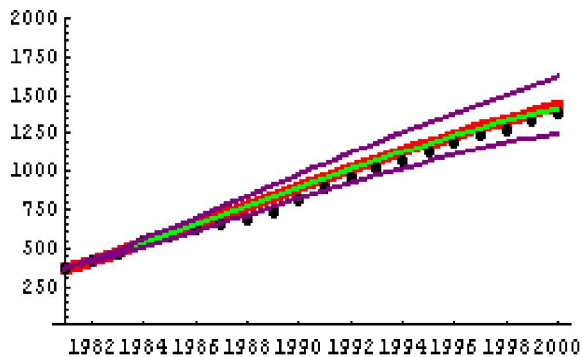
- Funciones estimadas para el modelo ajustado a los datos de los **EMPLEADOS Y OBREROS**:



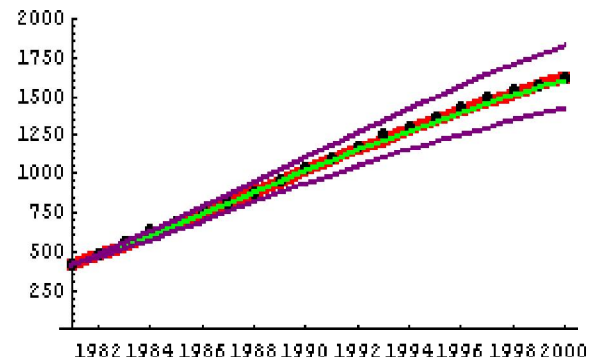
Todas las actividades



Industria



Construcción



Servicios

• Predicción

A continuación se muestra una tabla con las predicciones puntuales y por intervalos de la ganancia media por hora trabajada en el año 2000 en cada uno de los modelos correspondientes a las diferentes categorías profesionales. Las predicciones puntuales han sido calculadas empleando las funciones media y moda (así como sus versiones condicionadas al valor observado del salario en 1999), mientras que las predicciones por intervalos lo han sido mediante las funciones de cuantiles, considerando $\alpha_1 = 0.025$ y $\alpha_2 = 0.975$ (así como sus versiones condicionadas).

Modelo	Empleados	Obreros	Empleados y Obreros
Todas las actividades			
valor real	2024	1284	1620
media	2073.31	1278.87	1633.07
media cond.	2033.82	1287.57	1623.03
moda	2050.46	1268.72	1632.54
moda cond.	2032.63	1287.03	1613.06
intervalo	(1745.4,2444.69)	(1105.71,1471.31)	(1428.47,1836.53)
intervalo cond.	(1956.33,2113.55)	(1245.89,1330.27)	(1586.5,1680.64)
Industria			
valor real	2382	1454	1738
media	2299.27	1365.82	1681.7
media cond.	2395.27	1450.32	1743.45
moda	2273.93	1354.98	1671.36
moda cond.	2393.88	1449.71	1742.89
intervalo	(1935.62,2711.13)	(1180.89,1571.34)	(1480.11,1902.91)
intervalo cond.	(2304.01,2489.18)	(1403.37,1498.42)	(1693.73,1794.24)
Construcción			
valor real	2000	1218	1388
media	1974.2	1195.89	1427.49
media cond.	1985.42	1224.53	1372.06
moda	1952.44	1195.39	1418.71
moda cond.	1984.26	1214.81	1371.62
intervalo	(1661.97,2327.83)	(1058.73,1408.79)	(1256.37,1615.26)
intervalo cond.	(1909.78,2063.26)	(1157.18,1235.56)	(1332.94,1412.03)
Servicios			
valor real	1917	1133	1613
media	1942.49	1170.18	1619.12
media cond.	1914.36	1126.88	1619.66
moda	1921.08	1160.9	1609.17
moda cond.	1913.25	1126.41	1619.13
intervalo	(1635.27,2290.44)	(1011.74,1346.27)	(1425.03,1832.1)
intervalo cond.	(1841.43,1989.41)	(1090.4,1164.25)	(1573.47,1666.84)

Tabla 4.2: Valores predichos para el año 2000 mediante las funciones media, moda e intervalo proporcionado por los cuantiles $\alpha_1 = 0.025$ y $\alpha_2 = 0.975$, sin condicionar y condicionadas al valor en el instante anterior. En negrita aparecen los valores reales observados.

4.2. Aplicación a remuneración de asalariados

En este segundo ejemplo trataremos datos de la remuneración de asalariados en las comunidades autónomas españolas (ver tablas 4.3 y 4.4). Constan de 18 trayectorias muestrales correspondientes a 18 comunidades autónomas (las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla están consideradas de forma conjunta) entre los años 1986 y 1996. Las gráficas 4.9 y 4.10 representan las trayectorias muestrales, observándose cómo parten de distintos valores iniciales, alcanzan cotas distintas y muestran tendencias de tipo sigmoidal. A la vista de dichas gráficas, parece oportuno considerar de nuevo el proceso de difusión tipo Gompertz propuesto en esta memoria para ajustar un modelo a los datos.

Año	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Andalucía	1850680	2122886	2390828	2714059	3153033	3520509
Aragón	505937	576101	651695	722176	834194	921693
P. Asturias	472234	502980	550741	616264	698403	771538
I. Baleares	316363	347601	398514	455217	506360	561238
I. Canarias	523277	611265	696856	771124	870308	971524
Cantabria	193712	211576	237258	267665	301387	338287
Castilla León	907662	989674	1108074	1229001	1377210	1544259
Castilla Mancha	456537	505739	572156	646917	741940	845031
Cataluña	2745394	3124480	3516850	3988121	4591972	5136724
Com. Valenciana	1325323	1499415	1649584	1879769	2196397	2439562
Extremadura	249220	287251	329401	375016	433954	494408
Galicia	781287	879061	992558	1126244	1284495	1443870
C. Madrid	2583309	2869488	3194707	3591637	4166436	4598149
R. Murcia	312834	350652	400250	464789	533577	603469
Navarra	244534	270514	302190	346439	382393	439972
País Vasco	1140205	1203545	1312076	1451777	1615074	1834944
La Rioja	100763	114541	128516	147180	162992	183755
Ceuta y Melilla	55387	62363	71047	72153	85838	97306

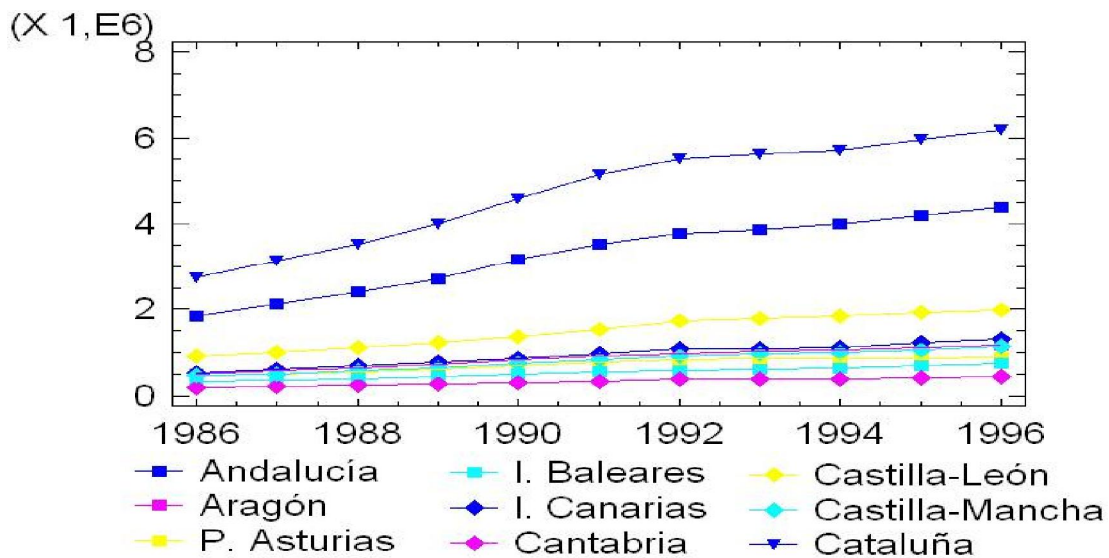
Tabla 4.3: Datos por comunidad autónoma en España en el período (1986-1991). Fuente: Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es).

Planteamos, en primer lugar y como en la aplicación anterior, la estimación de un modelo común para todas las comunidades autónomas, obteniendo las siguientes estimaciones máximo verosímiles de los parámetros

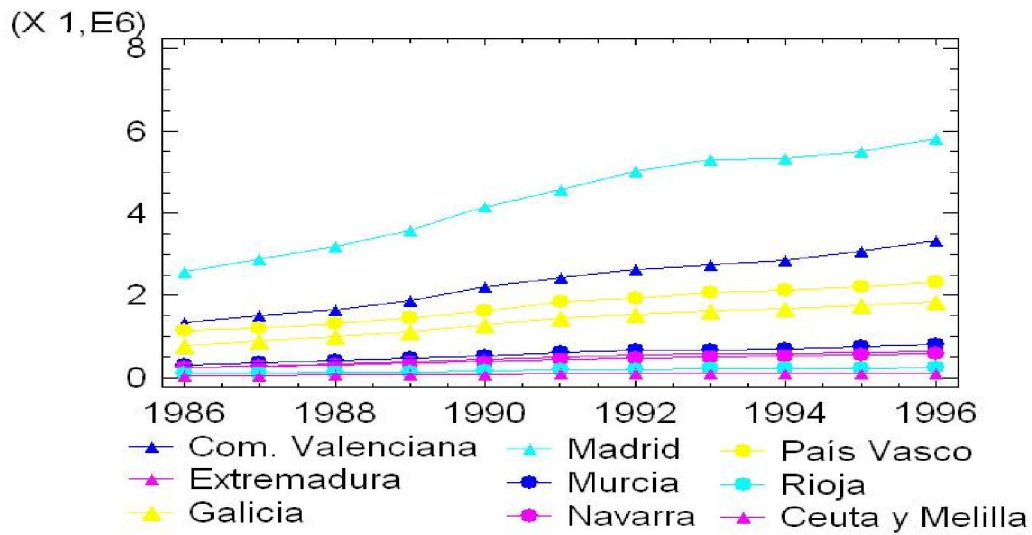
$$\hat{m} = 1.1114 \quad \hat{\beta} = 0.114241 \quad \hat{\sigma} = 0.0265914.$$

Año	1992	1993	1994	1995	1996
Andalucía	3774122	3850941	3989230	4189191	4390819
Aragón	977075	1037747	1053898	1107204	1172628
P. Asturias	844279	860106	853551	855580	901055
I. Baleares	593214	599518	627839	692146	752839
I. Canarias	1073843	1099322	1121397	1228748	1318991
Cantabria	376435	385464	388326	419598	439986
Castilla León	1719503	1791693	1842101	1930096	1989929
Castilla Mancha	906733	967365	1004281	1059821	1131610
Cataluña	5514800	5637585	5701918	5973189	6191040
Com. Valenciana	2618580	2737979	2864150	3084128	3317583
Extremadura	552500	569128	572261	606029	632696
Galicia	1546850	1618714	1667067	1771612	1855723
C. Madrid	5042537	5302851	5354984	5511797	5809090
R. Murcia	653232	675695	703677	741735	794413
Navarra	473985	491938	514080	547933	584940
País Vasco	1932359	2066518	2116183	2218866	2315206
La Rioja	191376	205047	218830	231102	245721
Ceuta y Melilla	101962	104084	108967	113245	115013

Tabla 4.4: Datos por comunidad autónoma en España en el período (1992-1996) (continuación). Fuente: Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es).

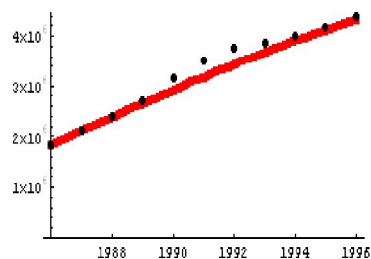


Gráfica 4.9: Remuneración de asalariados en las comunidades autónomas españolas.

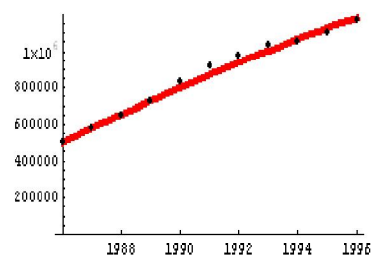


Gráfica 4.10: Remuneración de asalariados en las comunidades autónomas españolas (continuación).

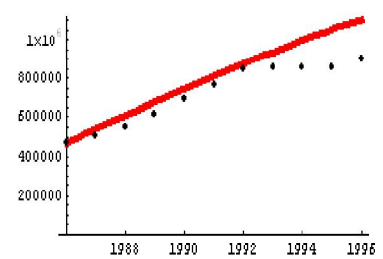
Una vez estimado el modelo, representamos los valores muestrales de cada trayectoria junto con la función media estimada, con idea de poder comprobar gráficamente la adecuación de éste a los datos.



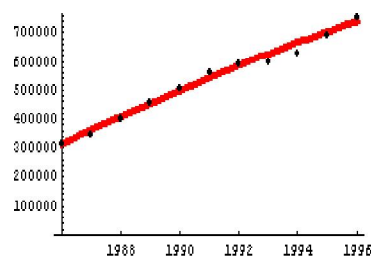
Andalucía



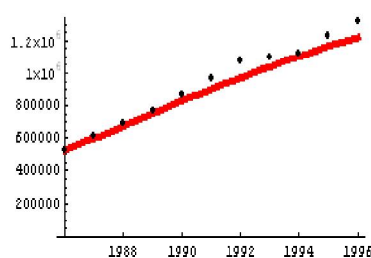
Aragón



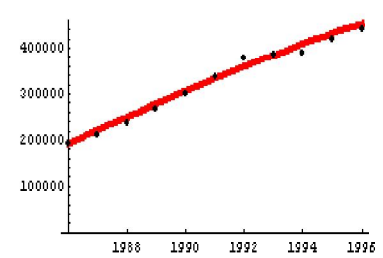
Principado de Asturias



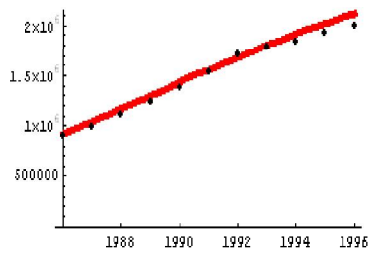
Islas Baleares



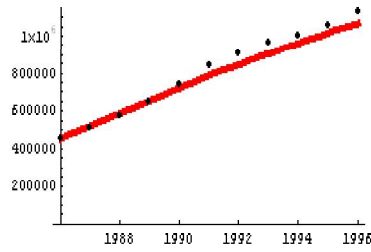
Islas Canarias



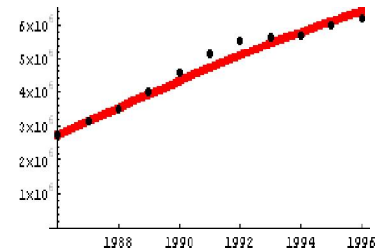
Cantabria



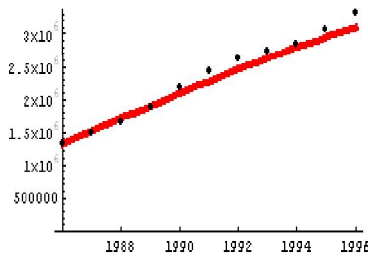
Castilla León



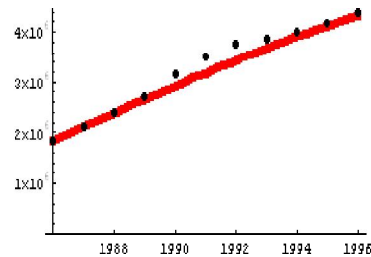
Castilla la Mancha



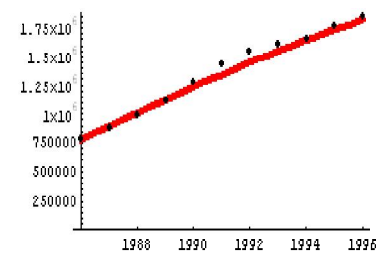
Cataluña



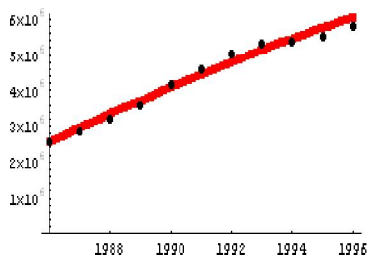
Com. Valenciana



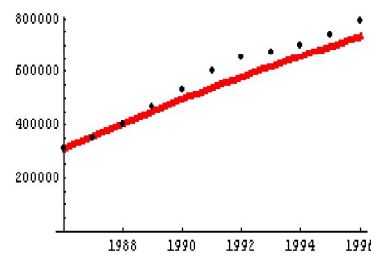
Extremadura



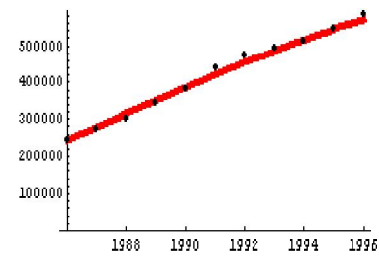
Galicia



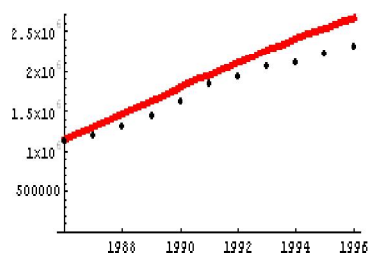
Comunidad de Madrid



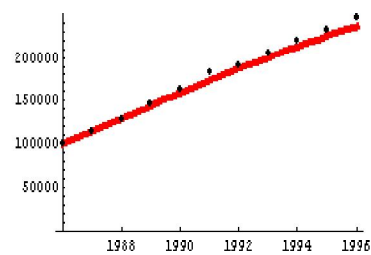
Región de Murcia



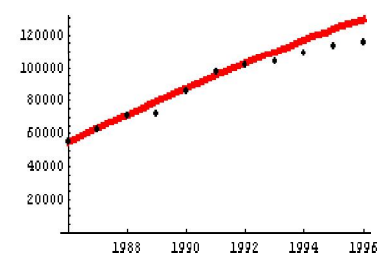
Navarra



País Vasco



La Rioja



Ceuta y Melilla

Como se puede apreciar en los resultados, al ajustar un modelo único a todas las comunidades autónomas, en algunas la tendencia estimada del modelo no parece ajustarse bien a los datos observados, como por ejemplo en el Principado de Asturias, Islas Canarias, Castilla la Mancha,... Debido a ello, al igual que en la primera aplicación, nos planteamos la posibilidad de agrupar las comunidades en bloques homogéneos en cuanto a su comportamiento sobre la variable estudiada. El problema surge a la hora de seleccionar dichos grupos ya que, a diferencia de la aplicación anterior, no hay, en principio, un criterio claro para la creación de los mismos. Una opción para ello puede ser aplicar un modelo distinto

a grupos de comunidades que se ajusten a curvas Gompertz con parámetros similares. Con dicha finalidad ajustamos a cada trayectoria muestral, mediante regresión no lineal, una curva Gompertz del tipo estudiada por Tan. En la tabla 4.5 aparecen los valores estimados de los parámetros para cada comunidad, el valor del cociente entre los parámetros α y β , ya que dicho cociente es un término importante en la ecuación de la curva, y un índice de la bondad de ajuste, R^2 .² Los valores que toma este coeficiente nos indican que los datos se ajustan bien mediante este tipo de curvas Gompertz.

Comunidad	R^2	m	β	m/β
Andalucía	0.99104	0.174162390	0.159699750	1.090561444
Aragón	0.99414	0.159931393	0.146252583	1.093528673
P. Asturias	0.96412	0.126097135	0.143306540	0.879911936
I. Baleares	0.98859	0.140334003	0.114965886	1.220657778
I. Canarias	0.99467	0.165692424	0.136231793	1.216253713
Cantabria	0.98673	0.136744619	0.109403657	1.249909032
Castilla León	0.98812	0.130273196	0.102697327	1.268515937
Castilla Mancha	0.99241	0.146466820	0.102434026	1.429864916
Cataluña	0.98770	0.173634725	0.172452940	1.006852797
Com. Valenciana	0.99279	0.146420348	0.103692218	1.412066892
Extremadura	0.98856	0.186247711	0.153908963	1.210116080
Galicia	0.99322	0.157193460	0.131835544	1.192345063
Madrid	0.98582	0.149560520	0.132366692	1.129895427
Murcia	0.99112	0.167097885	0.130504941	1.280395085
Navarra	0.99266	0.138571102	0.100586769	1.377627530
País Vasco	0.98404	0.101606112	0.069915248	1.453275429
La Rioja	0.99773	0.148862565	0.114347316	1.301845729
Ceuta y Melilla	0.98149	0.142845816	0.144575342	0.988037199

Tabla 4.5: Parámetros resultantes del ajuste a una curva Gompertz (2.1) para cada comunidad.

A partir de los resultados de la tabla 4.5, agrupamos las comunidades en cinco grupos distintos basándonos en valores próximos de β y del cociente entre m y β . Los grupos que proponemos son:

1. Andalucía, Aragón y Cataluña.
2. Islas Baleares, Cantabria, Castilla León y La rioja.
3. Islas Canarias, Extremadura y Región de Murcia.

²El valor R^2 que se obtiene es

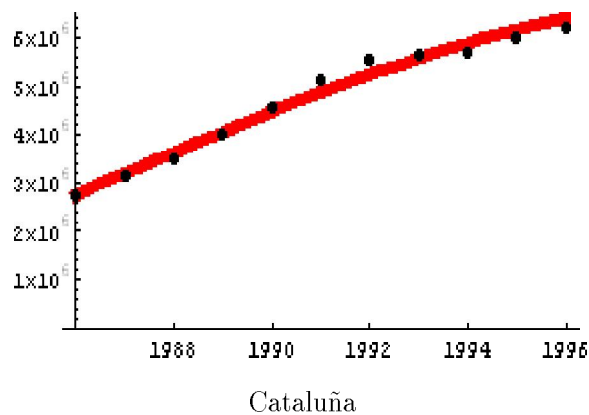
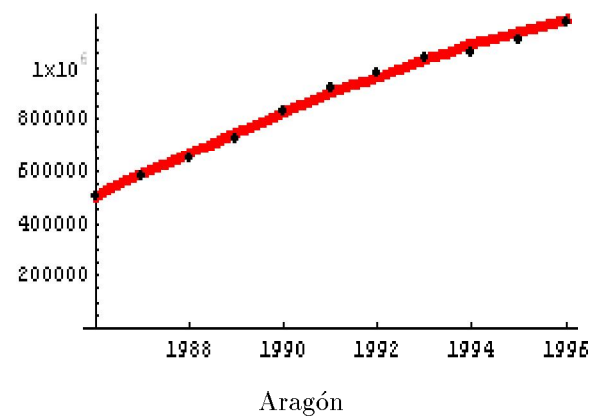
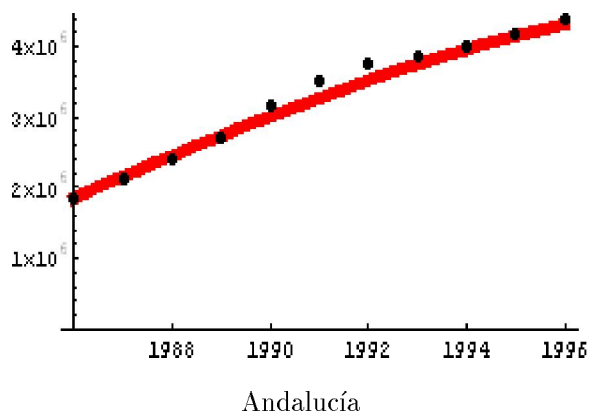
$$R^2 = 1 - \frac{\text{Suma de cuadrados residual}}{\text{Suma de cuadrados total}}$$

4. Castilla la Mancha, Comunidad Valenciana y Navarra.
5. Galicia y Comunidad de Madrid.

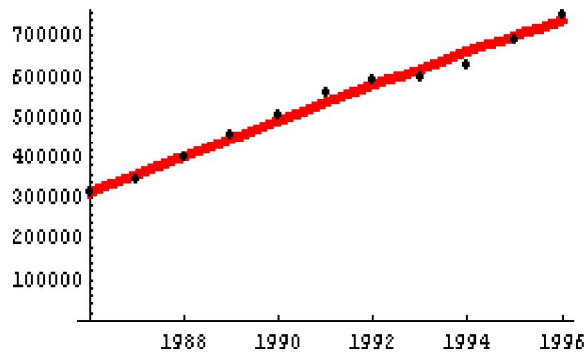
Las comunidades del Principado de Asturias, el País Vasco y Ceuta y Melilla las consideramos de forma independientemente debido a que los parámetros ajustados, en sus casos, son dispares con respecto al resto, lo que nos hace pensar que el modelo Gompertz adecuado en cada una de dichas comunidades debe ser diferente.

A continuación calculamos las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros para cada uno de los grupos considerados y, al igual que en la primera aplicación, representamos la función media estimada, en cada caso, junto con su trayectoria muestral, obteniéndose los siguientes resultados:

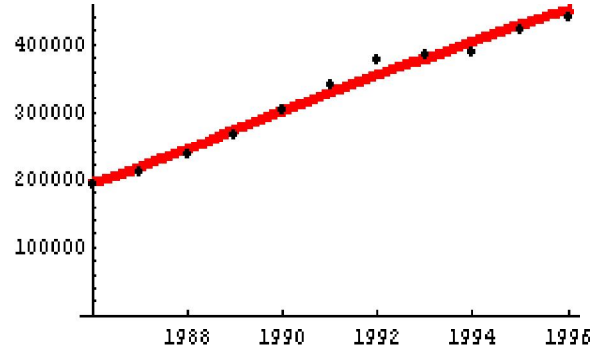
Modelo 1. $\hat{m} = 0.95784$, $\hat{\beta} = 0.145256$ y $\hat{\sigma} = 0.0220472$.



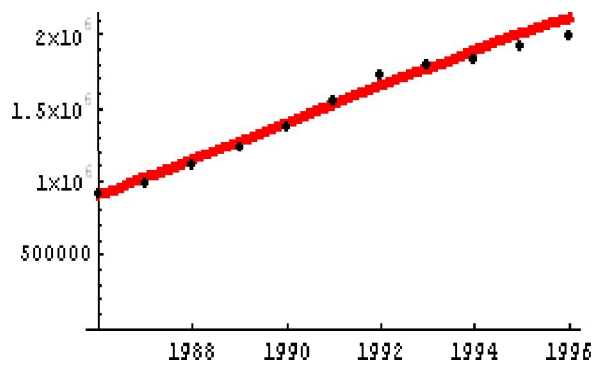
Modelo 2. $\hat{m} = 1.22775$, $\hat{\beta} = 0.0980655$ y $\hat{\sigma} = 0.0244082$.



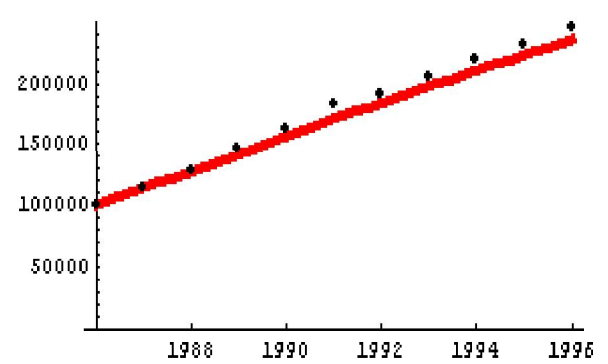
Islas Baleares



Cantabria

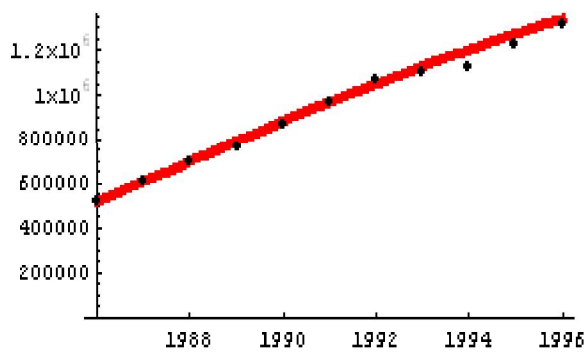


Castilla León

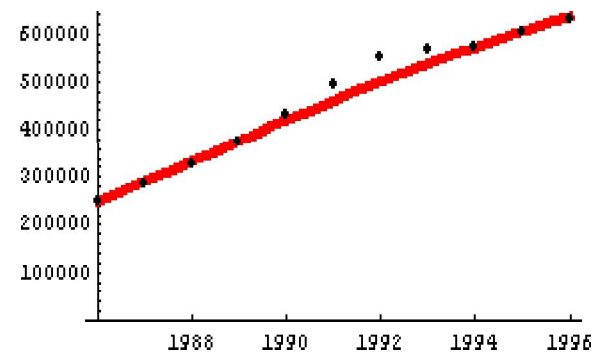


La Rioja

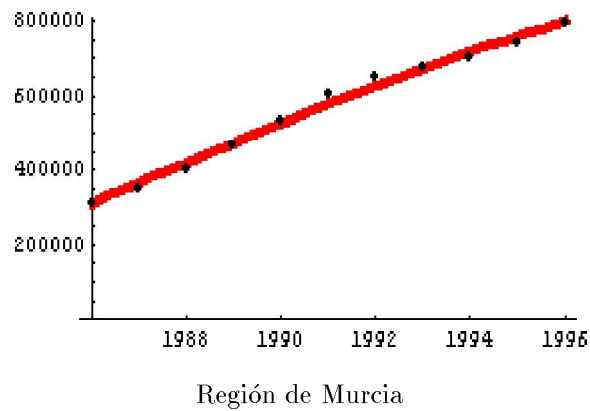
Modelo 3. $\hat{m} = 1.14663$, $\hat{\beta} = 0.127009$ y $\hat{\sigma} = 0.0250102$.



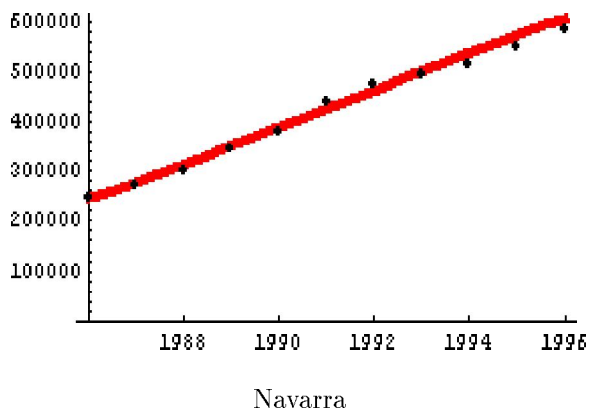
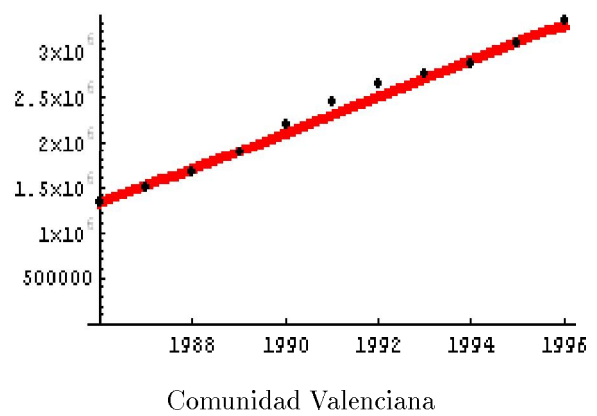
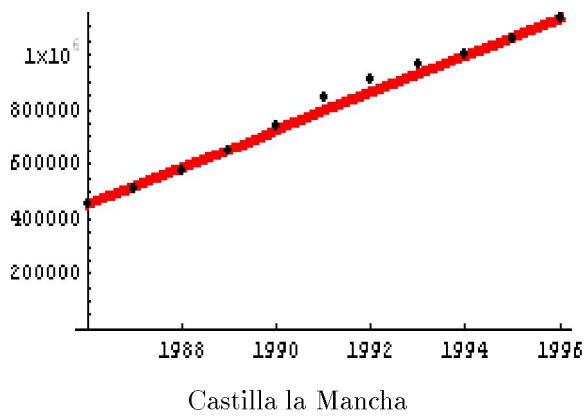
Islas Canarias



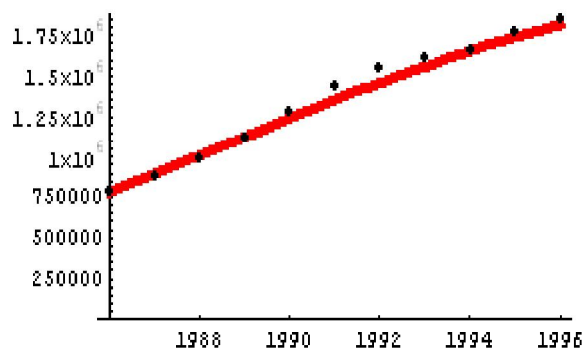
Extremadura



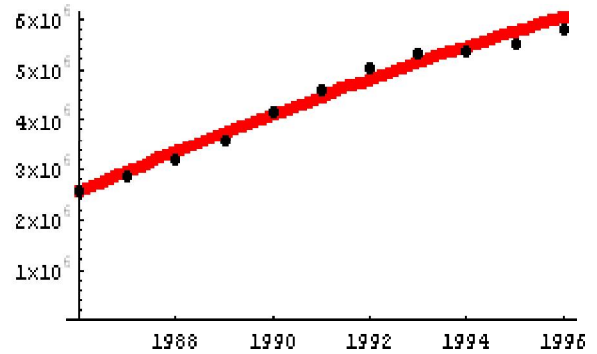
Modelo 4. $\hat{m} = 1.38408$, $\hat{\beta} = 0.0907362$ y $\hat{\sigma} = 0.0220963$.



Modelo 5. $\hat{m} = 1.06819$, $\hat{\beta} = 0.121166$ y $\hat{\sigma} = 0.0222347$.



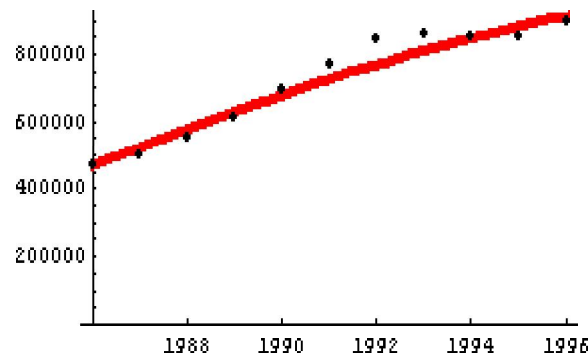
Galicia



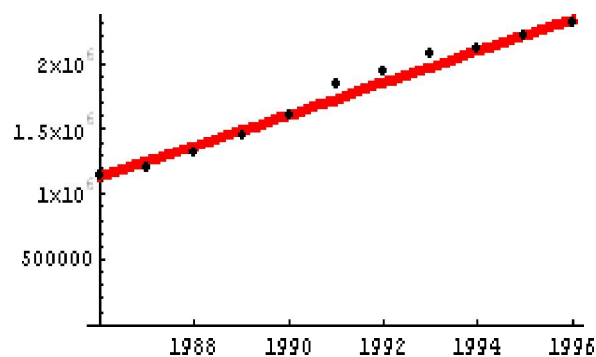
Comunidad de Madrid

Para las comunidades del Principado de Asturias, País Vasco y Ceuta y Melilla obtenemos los siguientes resultados, ajustando un modelo en cada caso:

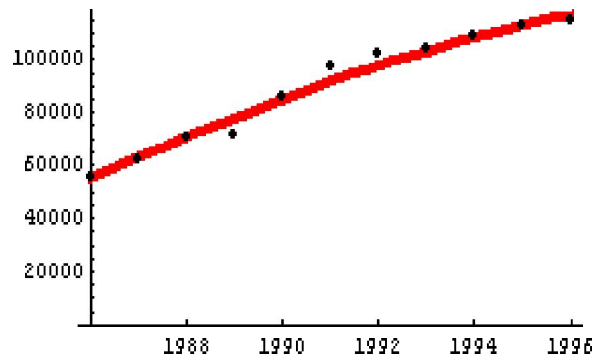
- Principado de Asturias: $\hat{m} = 0.829483$, $\hat{\beta} = 0.122583$ y $\hat{\sigma} = 0.03242$.



- País Vasco: $\hat{m} = 1.35545$, $\hat{\beta} = 0.0677984$ y $\hat{\sigma} = 0.0246101$.



- Ceuta y Melilla: $\hat{m} = 0.848136$, $\hat{\beta} = 0.143967$ y $\hat{\sigma} = 0.039741$.



A partir de los resultados obtenidos puede observarse que la consideración de grupos hace que los nuevos modelos ajustados mejoren, sensiblemente en algunos casos, el ajuste que se obtuvo mediante un modelo único.

ESQUEMAS DE CURVAS GOMPERTZ

CAPOCELLI Y RICCIARDI

$$d = k; g = e^{-e^a}; q = e^{-b}$$

GOMPERTZ

$$L_x = dg^{q^x}$$

WINSOR

$$f(t) = ke^{-e^{-a-b(t-t_0)}} \quad k > 0, b > 0, t \geq t_0$$

$$f(t) = \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-t_0)} \right) + \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)} \right\}$$

$$x_0 = k \exp \{-e^a\}$$

$$t \geq t_0$$

$$k = e^{\alpha/\beta}$$

$$b = \beta$$



$$\log g = \frac{mq^{-a}}{1-q^r}$$

$$q = p^{1/r}$$

$$m = \ln L_a - \ln L_{a+r}$$

$$d = \frac{L_a}{\epsilon}$$

$$\ln \epsilon = \frac{m}{1-q^r}$$

$$f(t) = k \exp \left\{ \ln \left(\frac{x_0}{k} \right) e^{-b(t-t_0)} \right\}$$

$$= \exp \left\{ \ln k \left[1 - e^{-b(t-t_0)} \right] + \ln x_0 e^{-b(t-t_0)} \right\}$$

$$k = x_0 e^{\alpha/\beta}$$

$$b = \beta$$



$$f(t) = x_0 \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-t_0)} \right) \right\}$$

TAN

L_x = tamaño de la población

en el instante x

a = instante inicial

r = unidad de salto

considerada en el tiempo

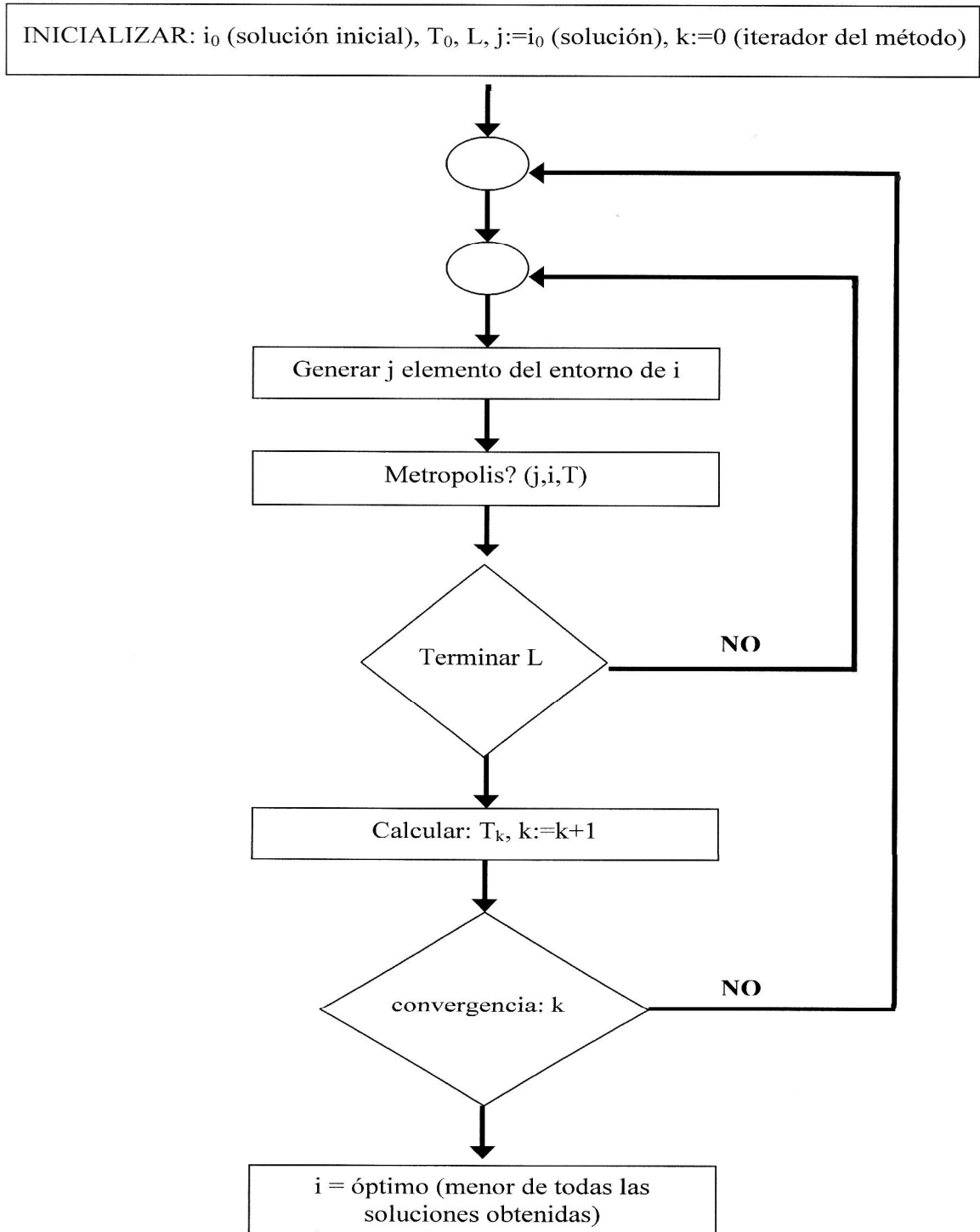
p = razón de la progresión

geométrica que hay entre

el número de personas

vivas en el tiempo

Apéndice B



Bibliografía

- [1] Aarts, E. y Korst, J. (1989). *Simulated Annealing and Boltzmann Machines: A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*. Wiley, Chichester, UK.
- [2] Andrieu, C. y Doucet, A. (1998). *Simulated annealing for bayesian estimation of hidden markov models*. Tr 317, Department of Engineering, University of Cambridge.
- [3] Arnold, L. (1973). *Stochastic differential equations*, John Wiley and Sons.
- [4] Basawa, I. V. y P. Rao, B. L. S. (1980). *Statistical Inference for Stochastic Processes*. Academic Press.
- [5] Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637-654.
- [6] Buonocore, A., Nobile, A. G. y Ricciardi, L. M. (1987) A new integral equation for the evaluation of first-passage-time probability densities. *Advances in Applied Probability*, 19:784-800.
- [7] Capocelli, R. M. y Ricciardi, L. M. (1974). A diffusion model for population growth in random environment. *Theoretical Population Biology*, 5:28-41.
- [8] Capocelli, R. M. y Ricciardi, L. M. (1974). Growth with regulation in random environment. *Kybernetik*, 15:147-157.
- [9] Cox, J. C. y Ross, S. A. (1976). The evaluations of options for alternative stochastic process. *Journal of Financial Economy*, 3:145-166.
- [10] Crow, J. F. y Kimura, M. (1970). *An introduction to population genetics theory*. Harper Row, New York.
- [11] Duffo, M. (1996). *Random Iterative Models. Applications of Mathematics. I*, volumen 34. Springer-Verlag, Berlin.
- [12] Feller, W. (1939). On the logistic law of growth and its empirical verifications in biology. *Acta Biotheoretica.*, 5:51-66.

-
- [13] Feller, W. (1952). Parabolic differential equations and semigroup transformation. *Annals of Mathematics*, 55:468-518.
- [14] Feller, W. (1954). Diffusion processes in one dimension. *Transaction of the American Mathematical Society*, 77:1-31.
- [15] Geman, S. y Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:721-741.
- [16] Giorno, V., Nobile, A. G. y Ricciardi, L. (1988). A new approach to the construction of first-passage-time densities. *Cybernetics and Systems*, 88:375-381.
- [17] Giorno, V., Nobile, A. G. y Ricciardi, L. (1989). On the evaluation of first-passage-time probability densities via non singular integral equations. *Advances in Applied Probability*, 21:20-36.
- [18] Giovanis, A. N. y Skiadas, C. H. (1999) A stochastic logistic innovation diffusion model studying the electricity consumption in Greece and the United States. *Technological Forecasting and Social Change*, 61:235-246.
- [19] Gómez, J. y Buendía, F. (2001). Una generalización de los procesos estocásticos lognormal y de Gompertz como procesos de Itô. *Questiúo*, 25(3):392-414.
- [20] Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of Life Contingencies. *Philosophical Transaction of the Royal Society*, 123:513-585.
- [21] Gutiérrez, R., Angulo, J. M., González, A. y Pérez, R. (1991). Inference in lognormal multidimensional diffusion process with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 7:295-316.
- [22] Gutiérrez, R., De Juan, A. y Román, P. (1991). Construction of first-passage-time densities for a diffusion process which is not necessarily time-homogeneous. *Journal of Applied Probability*, 22:903-909.
- [23] Gutiérrez, R., González, A., y Torres, F. (1992). Statistical inference about multidimensional lognormal diffusion process with multivariate exogenous factors and applications, en: *Trapp R., ed., Cybernetics and Systems Research 1992. World Scientific Publishing*, 1:845-852.
- [24] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (1994). A remark on the validity of the Volterra integral equation of first-passage-time densities for a class of time-non-homogeneous diffusion processes. *Trapp R., ed., Cybernetics and Systems 1994. World Scientific Publishing*, Vol II: 847-854.

-
- [25] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (1995). A note on the Volterra integral equation for the first-passage-time density. *Journal of Applied Probability*, 32:635-648.
- [26] Gutiérrez, R., González, A., y Torres, F. (1997). Estimation in multivariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Applied Statistics*, 46(1):140-146.
- [27] Gutiérrez, R., Ricciardi, L., Román, P. y Torres, F. (1997). First-passage-time densities for time-non-homogeneous diffusion process. *Journal of Applied Probability*, 34:623-631.
- [28] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (1998). Unbiased estimation of the trend for the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Actas de NTTTS'98.*, 223-224.
- [29] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (1999). Inference and first-passage.time for the lognormal diffusion process with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 15:325-332.
- [30] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (2001). Inference on some parametric functions in the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Test*, 10(2):357-373.
- [31] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2001). UMVU estimation of the trend and covariance function for the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Jansen, J. y Skiadas, Ch. (Eds.): Proceedings of the Tenth International Symposium on A.S.M.D.A.*, 1:516-521.
- [32] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2001). Predicción en el proceso de difusión lognormal con factores exógenos. *Proceedings del decimosexto congreso nacional de la S.E.I.O. (Jaén)*, 1:179.
- [33] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2003). Obtención de procesos de difusión no homogéneos a partir de esquemas discretos. *Proceedings del decimoseptimo congreso nacional de la S.E.I.O. (Lérida)*, 4274-4279.
- [34] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2003). Obtención de un proceso de difusión no homogéneo a partir de modelos de crecimiento. *Proceedings del decimoseptimo congreso nacional de la S.E.I.O. (Lérida)*, 4280-4287.
- [35] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2003). Lognormal diffusion process with polynomial exogenous factors. *Bulletin of the International Statistical Institute 54th Session. Contributes papers* 60(2):324-325.
- [36] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2003). Applications of the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors in forecasting. *Cybernetics Systems*, 34(8):709-724.

- [37] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2004). Use of lognormal diffusion process with exogenous factors without external information. *Robert Trappl (Ed.): Proceedings of the Seventeenth European Meeting on Cybernetics and Systems Research*, 1:163-168.
- [38] Gutiérrez, R., Nafidi, A., Gutiérrez-Sánchez, R., Román, P., y Torres, F. (2005). Inference in Gompertz type non homogenous stochastic systems by means of discrete sampling. *Cybernetic and Systems*, 36(1):1-14.
- [39] Guyón, X. (1995). *Random field on a network*. Springer-Verlag.
- [40] Hájek, B. (1988). Cooling schedules for optimal annealing. *Mathematics of Operations Research*, 13:311-329.
- [41] Hunt, P. y Kennedy, J. (2000). *Financial derivatives in theory and practice*. John Wiley and Sons.
- [42] Kirkpatrick, S., Gelatt, D. y Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671-680.
- [43] Kloeden, P. E., Platen, E. y Schurz, H. (1994). *Numerical solution of SDE through computer experiments*, Springer-Verlag, Berlin.
- [44] Laird, A. K. (1965). Dynamic of tumour growth: comparison of growth rates and extrapolation of growth curve to one cell. *British Journal of Cancer*, 19:278-291.
- [45] Laird, A. K. (1965). Dynamic of relative growth. *Growth*, 29:249-263.
- [46] Laird, A. K., Tyler, S. A. y Barton, A. D. (1965). Dynamics of normal growth. *Growth*, 29:233-248.
- [47] Laird, A. K. (1966). Postnatal growth of birds and mammals. *Growth*, 30:349-363.
- [48] Laird, A. K. (1966). Dynamics of embryonic growth. *Growth*, 30:263-275.
- [49] Laird, A. K. y Howard, A. (1966). Growth curves in inbred mice. *Nature*, 213:786-788.
- [50] Laird, A. K. (1967). Evolution of the human growth curve. *Growth*, 31:345-355.
- [51] Laird, A. K. (1969). Dynamic of growth in tumors and in normal organisms. *National Cancer Institute Monographs*, 30:15-28.
- [52] Lamberton, D. y Lapeyre, B. (1996). *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman and Hall.
- [53] Levins, R. (1969). The effect of random variations of different types on population growth. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 62:1061-1065.

-
- [54] Lewontin, R. C. y Cohen, D. (1969). On population growth in randomly varying environment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 62:1056-1060.
- [55] Malthus, T. R. (1926). *First essay on population, 1798*. Macmillan, London.
- [56] Marcus, A. y Shaked, I. (1984). The relationship between accounting measures and prospective probabilities of insolvency: an application to the banking industry. *Financial Review*, 19:67-83.
- [57] May, R. M. (1974). Biological population with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186:645-647.
- [58] May, R. M. (1975). Biological population obeying difference equations: stable points, stable cycles, and chaos. *Journal of Theoretical Biology*, 49:511-524.
- [59] May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459-467.
- [60] May, R. M. (1979). Bifurcations and dynamics complexity in ecological systems. *Annals of the New York Academy of Science*, 316:517-529.
- [61] May, R. M. y Oster, F. G. (1976). Bifurcations and dynamics complexity in simple ecological models. *The American Naturalist*, 110:573-599.
- [62] McArthur, R. H. y Wilson, E.O. (1967) *The theory of island biogeography*. Princeton University Press, New Jersey.
- [63] McCredie, J. A. et al (1965). The rate of tumor growth in animals. *Growth*, 29:331-347.
- [64] Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economy*, 3:125-144.
- [65] Metropolis, N. A., Rosenbluth, M., Rosenbluth, A., Teller, A. y Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21:1087:1092.
- [66] Mitra, D., Romeo, F. y Sangiovanni-Vincentelli, A. (1986). Convergence and finite-time behavior of simulated annealing. *Advances in Applied Probability*, 18:747-771.
- [67] Murillo, A. (2004). *Representación de asociaciones mediante MDS y su tratamiento computacional*. PhD tesis, Universidad de Granada.
- [68] Nafidi, A. (1997). *Difusiones lognormales con factores exógenos en tendencia y coeficiente de difusión*. PhD tesis, Universidad de Granada.
- [69] Nobile, A. G., Ricciardi, L. M. y Sacerdote, L. (1982). On Gompertz growth model and related difference equations. *Biological Cybernetics*, 42:221-229.

- [70] Rao, N. J., Borwankar, J. D. y Ramkrishna, D. (1974). Numerical solution of Ito integral equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 12:124-139.
- [71] Ricciardi, L.M. (1976). On the transformation of diffusion processes into the Wiener Process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 54:185-199.
- [72] Ricciardi, L.M. (1977). *Diffusion processes and related topics in Biology*. Springer-Verlag.
- [73] Ricciardi, L.M. (1979). On a conjecture concerning population growth in random environment. *Biological Cybernetics*, 32:95-99.
- [74] Ricciardi, L.M., Sacerdote, L. y Sato, S. (1983). Diffusion approximation and first-passage-time problem for a model neuron II. Outline of a computation Method. *Mathical Biosciences*, 64:29-44.
- [75] Ricciardi, L.M., Sacerdote, L. y Sato, S. (1984). On an integral equation for first-passage-time probability densities. *Journal of Applied Probability*, 21:302-314.
- [76] Román, P. y Torres, F. (1995). *Aportaciones al estudio de tiempos de primer paso en procesos de difusión no homogéneos*. Monografía. Academia de Ciencias Matemáticas Físico-Químicas y Naturales de Granada.
- [77] Robert, C. P. y Casella, G. (1999) *Monte Carlo Statistical Methods* Springer-Verlag, New York.
- [78] Silliman, R. P. (1969). Comparison between Gompertz and von Bertalanffy curves for expressing growth in weight of fishes. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 26:161-165.
- [79] Simpson-Herren, L. y Lloyd, H.H. (1970). Kinetic parameters and growth curves for experimental tumor systems. *Cancer Chemotherapy Reports Part 1*, 54.
- [80] Skiadas, C. H., Giovanis, A. N. y Dimoticalis, I. (1993). A sigmoidal stochastic growth model derived from the revised exponential. *Jansen, J. y Skiadas, Ch. (Eds.): Proceedings of the Tenth International Symposium on A.S.M.D.A. World Scientific*.
- [81] Skiadas, C. H., Giovanis, A. N. y Dimoticalis, I. (1994). Investigation of stochastic differential models: the Gompertzian case. *Selected topics on stochastic modelling*. Gutiérrez-Valderrama (eds.) World Scientific.
- [82] Tan, W. Y. (1986). A stochastic Gompertz birth-death process. *Statistics y Probability Letters*, 4:25-28.
- [83] Tan, W. Y. y Piantadosi, S. (1991). On stochastic growth processes with application to stochastic logistic growth. *Statistica Sinica*, 1:527-540.

-
- [84] Tintner, G. y Gómez, G. L. (1979). The applications of the diffusion processes in problems of developmental economic planning. *Trabajos de Estadística*, 30(2):33-55.
- [85] Tintner, G. y Sengupta, J. K. (1972). *Stochastic economics*. Academic Press.
- [86] Van Laarhoven, P. J. y Aarts, E. H. L. (1987). *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Reidel, D. Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.
- [87] Verhulst, P. F. (1838) Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10:113-121.
- [88] Winkler, G. (1995). *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*. Springer-Verlag, New York.
- [89] Winsor, C.P. (1932). The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 18:1-8.