Conversiones de representaciones de números complejos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico

Conversions of complex numbers representations from the Onto-semiotic Approach perspective

María A. Aznar[1], Emilce Moler[1] y Marta Pesa[2]

[1] Universidad Nacional de Mar del Plata, [2] Universidad Nacional de Tucumán; Argentina

Resumen

En el presente trabajo se muestra el uso combinado de elementos de la Teoría de Registros Semióticos y del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, en el análisis de tareas de conversiones de representaciones semióticas de curvas y regiones del plano complejo. El contexto institucional corresponde a una asignatura de álgebra inicial de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. El sentido de conversión analizado es el que inicia en el registro gráfico y culmina en el registro algebraico. Se exhibe la configuración de objetos matemáticos intervinientes detallando su participación en las actividades necesarias para la tarea de conversión.

Palabras clave: registros semióticos, conversiones, objetos primarios, configuraciones, números complejos

Abstract

In this paper the combined use of elements from the Semiotic Registers Theory and of the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction is shown. Conversions of semiotic representations of curves and regions of the complex plane are analysed. The institutional context corresponds to an initial algebra course in engineering careers at the Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. The configuration of mathematical objects is shown, in detailing their participation in the activities involved in the conversion task.

Keywords: semiotic registers, conversions, primary objects, configurations, complex numbers

1. Introducción

Los números complejos se destacan por su riqueza semiótica por cuanto gráficamente pueden representarse en forma de puntos o de vectores en el plano y, aritméticamente pueden expresarse en forma de pares ordenados, en forma binómica, polar, trigonométrica y exponencial.

La unidad de Números Complejos forma parte de los contenidos de una asignatura de álgebra inicial de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Dicha unidad tienen gran relevancia conceptual y multiplicidad de aplicaciones en distintos quehaceres de la Física y la Ingeniería. En el desarrollo de dicha unidad se les planteaban a los estudiantes actividades que requerían la representación, en el plano complejo, de subconjuntos de números complejos representados en el registro algebraico mediante condiciones sobre alguno de sus elementos característicos: parte real, parte imaginaria, módulo y/o argumento. Este tipo de actividades, a la luz de la

Aznar, M., Moler, E. y Pesa, M. (2017). Conversiones de representaciones de números complejos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Teoría de Registros Semióticos (Duval, 1998, 2004, 2006), requiere conversiones en el sentido que inicia en el registro algebraico y culmina en el registro gráfico. Sin embargo, no se proponían tareas que demandaran las conversiones en el sentido inverso, es decir, desde el registro gráfico hacia el algebraico. Dado que la habilidad de representar curvas o regiones del plano complejo mediante ecuaciones es relevante en distintos asignaturas posteriores de la carrera, como, por ejemplo, para análisis de funciones de variable compleja, se decidió evaluar esta habilidad en los estudiantes sin haber tenido una formación específica. A partir de un instrumento diseñado a tal fin, fue comprobado que los estudiantes tenían dificultades para lograr este tipo de conversiones (Aznar, Distéfano, Massa, Figueroa, y Moler, 2009; Aznar, Distéfano, Prieto y Moler, 2010), que fueron descritas en términos de la Teoría de Registros Semióticos (TRS).

El rol de las representaciones es abordado por el modelo del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) a través de herramientas teóricas construidas para analizar, de manera integrada, el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo (Godino, Batanero y Font, 2009).

El uso combinado de los marcos teóricos proporcionados por la TRS y el EOS puede observarse en trabajos tales como el de Gatica y Maz Machado (2012) y Rojas Garzón (2015).

Gatica y Maz Machado (2012) estudiaron el proceso constructivo que desarrollan los alumnos en torno al concepto de inecuaciones lineales con dos variables analizando los cambios de registros que realizan los estudiantes.

Rojas Garzón (2015) realiza un estudio sobre la emergencia de objetos matemáticos a partir de sus representaciones y las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados por ellos a las representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante transformaciones de tratamiento.

La complementariedad entre las herramientas teórico-metodológicas proporcionadas por EOS y TRS ha sido planteada y analizada por Pino-Fan, Guzmán, Duval, y Font, (2015), quienes sostienen que, mientras que desde la TRR la actividad cognitiva de los sujetos se analiza sin realizar valoraciones desde un punto de vista matemático, con herramientas del EOS se pueden analizar los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de tratamiento y conversión. Un objetivo similar es desarrollado por Godino, Wihelmi, Blanco, Contreras, y Giacomone (2016).

Este trabajo se hace eco del planteo de combinación de los marcos teóricos señalados realizando un análisis ontosemiótico de una tarea que requiere la conversión de representaciones semióticas de curvas y regiones del plano complejo. Se exhibe la configuración de objetos primarios presentes en las tareas de conversión estudiadas. Se espera que los análisis derivados en esta configuración contribuyan en la explicación de la complejidad de significados puestos en juego en este tipo de conversiones y orienten en los aspectos a tomar en cuenta al gestionar en clase estos objetos matemáticos.

2. Marco Teórico

A continuación se describen algunos constructos de los dos lineamientos teóricos que se combinan en este trabajo.

2.1. La Teoría de Registros Semióticos

La Teoría de Registros Semióticos fue desarrollada por Duval (1998, 2004). La misma parte del reconocimiento de que la naturaleza de los objetos matemáticos hace que sólo pueda accederse a ellos a través de sus representaciones semióticas en sus distintos registros (numérico, algebraico, gráfico, simbólico); en dicho reconocimiento descansa la afirmación de que tales representaciones juegan un rol fundamental en la construcción del conocimiento matemático.

Esta teoría sostiene que las representaciones semióticas no son solamente los medios de exteriorización de representaciones mentales a los fines de la comunicación, sino que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Si bien es comúnmente aceptado que al comprender o conocer un objeto, un sujeto es capaz de representarlo con algún símbolo o grafismo, Duval (1998, 2004) afirma que no hay noesis (aprehensión conceptual de un objeto) sin semiosis (o aprensión o producción de una representación semiótica) afirmando su inseparabilidad.

El acceso a los objetos matemáticos a partir de representaciones semióticas está condicionado por la existencia de múltiples representaciones semióticas para un mismo objeto matemático. Respecto de esta pluralidad de formas de representación Duval (1998, 2004, 2006) subraya dos hechos fundamentales: por una parte, que toda representación semiótica es parcialmente cognitiva respecto de lo que representa; por otra parte, la necesidad de que un aprendiz distinga a un objeto matemático de su representación para su conceptualización. A partir de estos hechos afirma que la comprensión de un objeto matemático requiere que el estudiante sea capaz de coordinar representaciones del mismo en, al menos, dos registros de representación.

En esta teoría se distinguen tres tipos de actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la *formación* de una representación identificable como la representación de alguna cosa en un registro, el *tratamiento* como la transformación de una representación en otra en el interior del registro donde fue creada, y la *conversión*, que implica la transformación de una representación dada en un registro en otra representación en un registro diferente.

Particularmente, la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos y, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales. Duval (1998) lo atribuye al fenómeno de *no congruencia* entre representaciones, que se produce cuando la conversión no resulta transparente pues no pueden ponerse en correspondencia unívoca los elementos que las constituyen, a los que denomina *unidades significantes*. La conversión de representaciones requiere de la identificación de unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada, y es en esa identificación donde reside la dificultad:

> ...**la segmentación de estas representaciones en unidades significantes es esencialmente funcional** y porque estas unidades pueden ser tanto palabras o símbolos como reagrupamientos de palabras o símbolos. Además para los registros que tienen unidades no separables, como las figuras o los gráficos cartesianos, se hace totalmente inoperante y ambigua la identificación previa e individual de las unidades significantes. (Duval, 1998, p. 77)

La conversión entre dos representaciones semióticas planteadas en distintos registros, no presenta el mismo nivel de dificultad al cambiar el sentido de la conversión. Así, en general, es más utilizada y más sencilla, la conversión de fórmulas del registro algebraico al registro gráfico que la tarea de hallar, para una representación gráfica, la fórmula o ecuación que la representa en el registro algebraico.

En este trabajo los objetos matemáticos estudiados son subconjuntos de números complejos que definen curvas y regiones en el plano complejo. Se considerará registro algebraico como aquél en el que se pueden formar las representaciones de las características de los conjuntos de números complejos con ecuaciones o inecuaciones en términos de los elementos asociados a formas de par ordenado, forma binómica, forma trigonométrica y forma polar. La forma exponencial no es utilizada en la asignatura del área álgebra en la que se administró el instrumento, por lo que no se la tomará en cuenta. Ejemplos de representaciones de conjuntos de números complejos en este registro pueden observarse en la Figura 1.

$$A = \{z \in C / \quad \mathrm{Re}(z) = 1\} \qquad\qquad B = \left\{z \in C / \quad \frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\right\}$$

Figura 1. Ejemplos de representaciones en el registro algebraico

Se considerará el registro gráfico que proporciona el sistema cartesiano, en el cual los números complejos son representados tanto como puntos del plano o como vectores. En dicho registro, los ejes cartesianos son presentados con las unidades marcadas para facilitar la lectura de las posiciones de las partes real e imaginaria de cada número complejo representado. Con idéntica consideración didáctica, se presentan líneas orientativas para agilizar la lectura de módulos y argumentos. Ejemplos de tales representaciones pueden observarse en la Figura 2.

2.2. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticos (EOS) es una propuesta teórico-metodológica de investigación en Didáctica de la Matemática que busca aportar herramientas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y factores que condicionan su desarrollo (Godino, Batanero y Font, 2009). A partir de una mirada de la matemática en tres aspectos: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado, desarrolla una ontología de los objetos matemáticos.

Los objetos matemáticos no se reducen a entidades conceptuales. "[…] objeto matemático" es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática" (Font, Godino, D'Amore, 2007, p.4).

En este marco teórico se define a una *práctica matemática* como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos. Una práctica matemática puede ser de índole personal o compartida en el seno de una institución, concibiendo como tal al conjunto de personas que comparten una misma clase de situaciones problemáticas. A partir de este constructo surge la noción de *significado*, definido como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas (Godino et al., 2009).

De acuerdo con lo anterior, en el escenario de una clase, para un determinado objeto matemático se considera el *significado personal* que cada alumno le asigna a dicho objeto para diferenciarlo del significado fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo, como expresiones del *significado institucional* del mencionado objeto. En ese sentido, en un proceso de instrucción se produce un acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales y el aprendizaje se traduce en la apropiación por parte del estudiante de los significados institucionales (Godino et al., 2009).

En los sistemas de prácticas matemáticas intervienen y aparecen conjuntos de objetos conformando redes llamadas *configuraciones*. Los objetos que las componen, clasificados como primarios (Godino et al., 2009, p.7) son:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. en sus diversos registros escrito, oral, gestual, etc.)
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, etc.)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).

Es necesario observar que, las representaciones semióticas son consideradas, en sí mismas, como objetos matemáticos de tipo lingüístico.

De acuerdo a la condición de personal o institucional de los objetos involucrados, las configuraciones son catalogadas como *cognitivas* o *epistémicas.* (Godino et al., 2009).

Las prácticas matemáticas, que definen el significado de un objeto matemático particular, son el escenario en el que intervienen múltiples objetos matemáticos. Puesto que dicho objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc., dando lugar a diferentes prácticas, se puede entender el *sentido* como un subconjunto del sistema de prácticas; cada contexto ayuda a producir sentido pero no todos los sentidos (Font y Ramos, 2005).

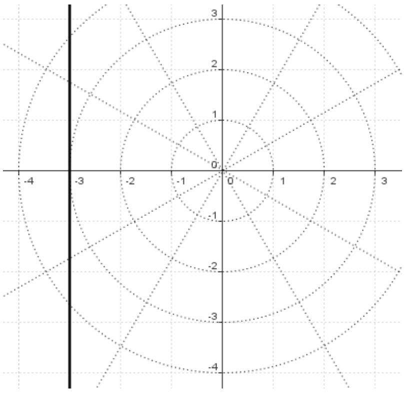
Expuestos los conceptos de las teorías que serán empleados en los puntos siguientes se muestran algunos análisis combinados.

3. Metodología

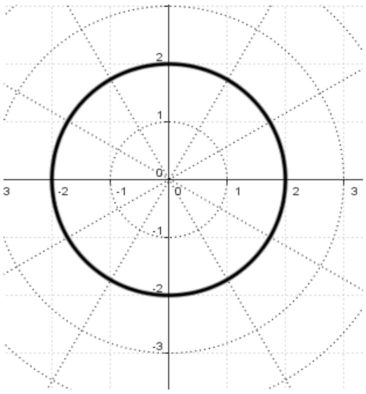
Para estudiar la habilidad de conversión se trabajó con un cuestionario constituido por seis ítems (Aznar et al., 2009; Aznar, et al., 2010). En cada ítem se presentó a los alumnos la representación gráfica de un conjunto de complejos con una característica común sobre el módulo, la parte real o el argumento, tomando, en los tres casos, un único valor o un rango de valores. El rasgo visual correspondiente a esta característica común es la unidad significante que los estudiantes debieron identificar en cada caso, para luego expresarla en forma de una ecuación o una inecuación en el lenguaje algebraico. Los gráficos correspondientes a cada ítem fueron ubicados en el instrumento de modo tal que no hubiera un orden que le sugiriera al alumno la unidad significante a identificar. En la Figura 2 se expone el enunciado general y los ítems de la tarea propuesta.

Se representan conjuntos infinitos de números $z \in C$ que poseen características comunes (puede ser sobre Re(z), Im(z), | z | y/o Arg(z)). Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con esa/s característica/s.

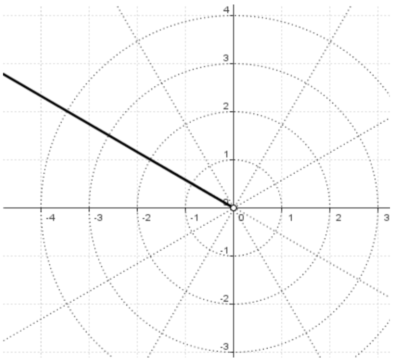
a) ……………………………………



b) ……………………………………

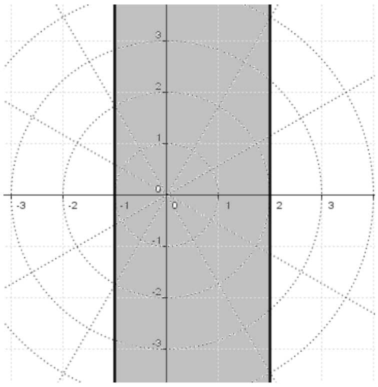


c) ……………………………………

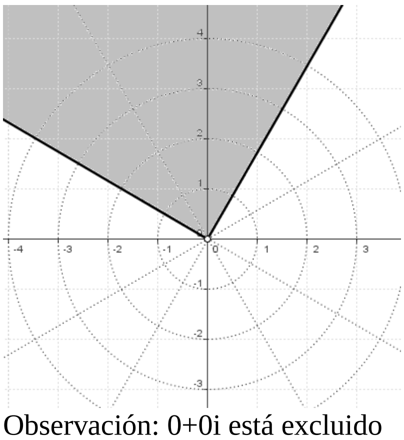


Observación: 0+0i está excluido

d) ………………………………



e) ……………………………………



Observación: 0+0i está excluido

f) ………………………………

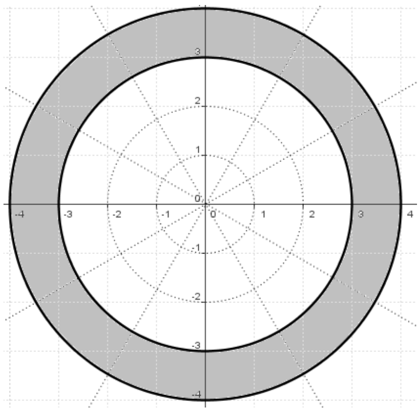


Figura 2. Enunciado de la tarea solicitada para evaluar la habilidad de conversión

4. Análisis de la tarea de conversión desde la TRS y desde el EOS

En un análisis desde la TRS, puede observarse que, para llevar a cabo la conversión de la representación se requiere:

- La identificación de la unidad significante que caracteriza a la curva o región representada en el registro gráfico, y la determinación del valor o rango de valores correspondientes que toma esa unidad significante.
- La representación de la relación entre unidad significante y sus valores, de acuerdo con las reglas de formación de expresiones, en el registro algebraico.

En los distintos incisos planteados en el cuestionario varían la unidad significante que puede tomar un único valor o un rango de infinitos valores en un intervalo real. Sin embargo, al analizar en términos del EOS, las definiciones, propiedades, procedimientos implicados en las conversiones de cada inciso pueden encontrarse elementos comunes. Esto dio lugar a una configuración epistémica, común a todos los incisos, en la que interviene una gran variedad de objetos primarios participantes en la actividad de conversión. En la Tabla 1 se presentan dichos objetos en la configuración epistémica de este ejercicio.

Tabla 1. Configuración epistémica común a los ítems de la tarea propuesta

Objetos primarios	Especificaciones
Situaciones-problema	Enunciado del problema: Se representan conjuntos infinitos de números $z \in C$ que poseen características comunes (puede ser sobre Re(z), Im(z), | z | y/o Arg(z)). Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con esa/s característica/s.
Lenguaje	• Coloquial • Simbólico/algebraico: z, Im(z), Re(z), | z | y Arg(z) • Gráfico: representaciones dadas en cada ítem
Definiciones	• Número complejo z, como su afijo o como el vector con origen en (0;0) y extremo en su afijo • Un número complejo pertenece a al conjunto representado en una curva/región graficada si su afijo está ubicado sobre la misma • Módulo del número complejo z: la distancia del afijo de z al origen de coordenadas; longitud del vector z • Argumento de un número complejo z no nulo: ángulo con lado inicial en el semieje positivo del eje real y lado final en la semirrecta que contiene al vector asociado al número complejo • Parte real del número complejo z: proyección sobre el eje real del afijo de z • Parte imaginaria del número complejo z: proyección sobre el eje imaginario del afijo de z.
Proposiciones	En un contexto geométrico: • Si la proyección del afijo de un número complejo z sobre el eje real está ubicada sobre un valor a del eje entonces la parte real de z es igual a a; si dicha proyección está a la derecha (izquierda) de un valor dado a del eje real entonces la parte real de z es mayor (menor) que a • Si la proyección del afijo de un número complejo z sobre el eje imaginario está ubicada sobre un valor a del eje entonces la parte imaginaria de z es igual a a; si dicha proyección está arriba (abajo) de un valor dado a del eje imaginario entonces la parte imaginaria de z es mayor (menor) que a • Si la distancia del afijo de un número complejo z es mayor (menor) que la longitud a entonces el módulo de z es mayor (menor) que a; si no es ninguno de los anteriores coincide con a • Si comenzando a recorrer en sentido anti horario los cuadrantes del plano complejo desde el semieje real positivo, la semirrecta que

	contiene al vector de un número complejo z coincide con el lado terminal de un ángulo de valor a entonces el argumento de z es congruente con a ; si se encuentra antes (después) que dicho lado terminal entonces el argumento principal de z es menor (mayor) que a En un contexto algebraico: • Un número complejo pertenece a un conjunto si verifica la/s ecuación/es o inecuación/es que lo definen.
Procedimientos	Asociados a identificar la unidad significante en el registro gráfico: • Individualizar varios puntos o vectores correspondientes a los números complejos pertenecientes a la curva o región dada • Hallar regularidades en las componentes de los complejos particulares identificados. Asociados a la formación de la representación en el registro algebraico del conjunto dado: • Identificar la representación simbólica de la componente implicada en la regularidad hallada (Re(z), Im(z), | z | , Arg(z)) y de la relación de valores a representar (=, <, >, ≥, ≤) • Representar semióticamente la regularidad que caracteriza al conjunto mediante una ecuación, inecuación o un sistema de ellas en el que figure la representación simbólica identificada.
Argumentos	Si bien en la actividad propuesta no se solicita al estudiante argumentaciones explícitas, las validaciones están determinadas por las definiciones y proposiciones enunciadas.

Los requerimientos planteados desde la TRS para efectuar este tipo de conversiones pueden vincularse a prácticas matemáticas ligadas a los objetos primarios descritos. En relación al primer requerimiento, para que un estudiante pueda identificar la unidad significante que caracteriza al conjunto de números complejos representado en el registro gráfico, es necesario, inicialmente que reconozca, dentro de la curva o región, los infinitos números complejos representados como puntos. Esto está vinculado a la *definición* de pertenencia de un número complejo y a su *procedimiento* de identificación asociado, planteados en un contexto geométrico.

Luego, el estudiante debe identificar la unidad significante que caracteriza al conjunto en los rasgos visuales comunes a todos los números complejos representados. Así, por ejemplo, en el inciso a) debe reconocer que “todos los afijos representados tienen la misma proyección sobre el eje real”, por lo que la unidad significante que caracteriza al conjunto es la parte real. En el inciso b) debe visualizar que “todos los afijos están a la misma distancia del origen”, por lo que la unidad significante es el módulo. La determinación de estos elementos característicos implica el uso de las *definiciones* de los mismos en la práctica de los *procedimientos* de búsqueda de regularidades, contextualizados geométricamente.

Una vez identificada la unidad significante, el estudiante debe “leer visualmente” la propiedad que cumple en relación a su valor, lo que está determinado por las *proposiciones* asociadas al contexto geométrico. Así, por ejemplo, en el inciso f) debe distinguir que la distancia de los afijos al origen es mayor o igual que 3 y menor o igual que 4.

Puede considerarse que estas definiciones y propiedades conforman parte del sentido geométrico del número complejo que también ha sido contemplado en otros trabajos (Distéfano, Aznar, Pochulu, 2012).

Para concluir la conversión es necesario que el estudiante cumpla el segundo requerimiento, representando esas relaciones en el registro algebraico. Esto implica la construcción de una expresión bien formada en dicho registro. Tales expresiones deben constituir ecuaciones o inecuaciones que representen la relación o relaciones halladas en el paso anterior. Esto implica el uso de elementos del *lenguaje* y de los *procedimientos* asociados a la formación de la representación en el registro algebraico.

5. Reflexiones finales

En esta comunicación se presentó la configuración de objetos matemáticos primarios intervinientes en una tarea de conversión de representaciones semióticas de curvas y regiones del plano complejo, desde el registro gráfico hacia el algebraico. La configuración hace visible la multiplicidad de objetos matemáticos requeridos para esa tarea, revelando y explicando su complejidad. Por otra parte, la necesidad de distinguir el contexto asociado al registro de representación, en las definiciones, proposiciones y procedimientos de la configuración, muestra significados parciales asociados a cada forma de representación. Esto, por un lado, ejemplifica la noción de sentido como subconjunto del sistema de prácticas en las que interviene un objeto matemático; por otra parte, verifica lo enunciado por Duval (1998, 2004) en relación a que cada representación es parcialmente cognitiva respecto del objeto que representa y, por ello, es necesario que un estudiante pueda coordinar representaciones de dicho objeto, en al menos dos registros distintos, para lograr su comprensión.

Referencias

Aznar, M., Distéfano, M., Massa, S., Figueroa, S. M. y Moler, E. (2009). Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos. Trabajos de investigación. Prop_ 07. *Revista de Educación Matemática*, *25*(2) 1-6. Disponible en, http://www.famaf.unc.edu.ar/vinculacion-2/divulgacion/revista-de-educacion-matematica/volumenes/25-2/

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G., y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa*, *12*(47), 13-22.

Distéfano, M. L., Aznar, M. y Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos; Un análisis ontosemiótico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN*, *30*, 61-80. Disponible en, http://www.fisem.org/web/union/images/stories/30/Archivo_9_de_volumen_30.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali: Instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168,

Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007) Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. For the Learning of Mathematics, *27*(2): 2 -7.

Disponible en,
http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Font, V. y Ramos, A. B. (2005) Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación, 338,* 309-345

Gatica, N. y Maz Machado, A. (2012) Estudio de inecuaciones de dos variables. *Trabajo presentado en el XIV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Diversidad y Matemáticas.* Málaga. Disponible en, http://thales.cica.es/xivceam/actas/pdf/com05.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 91-110.

Pino-Fan, R., Guzmán, I., Duval, R. y Font, V. (2015). The Theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Hobart, Australia: PME Group.

Rojas Garzón, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 151-165.