Conocimiento Didáctico–Matemático de futuros profesores universitarios para la enseñanza del objeto Grupo

Didactic–Mathematical knowledge of the future university teacher for the teaching of the objet Group

Omaida Sepúlveda Delgado y Zagalo Enrique Suárez Aguilar

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Grupo Álgebra y Análisis UPTC

Resumen

En el documento se presentan los principales resultados del estudio sobre el Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros profesores universitarios sobre la noción algebraica de Grupo. La investigación se desarrolló en la corriente de investigación didáctica sobre formación de profesores y en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, el cual permitió dar respuesta a la pregunta ¿Cómo los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas construyen los significados matemáticos y los representan para la enseñanza universitaria del objeto Grupo? En esta dirección, la investigación se centró en la caracterización de la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes, para la docencia universitaria en relación con el objeto Grupo.

Palabras clave: Objeto Grupo, Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor universitario, Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Abstract

We present the main results of studying the Didactic–Mathematical Knowledge in a sample of prospective university teachers. This research was developed in the didactic investigation trend on teachers' education and the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction framework, which allowed us to answer to the question: ¿How Bachelor's degree students in Mathematics construct the mathematical meanings of Group object and represent it in university teaching? In this sense, this research focuses on characterizing the epistemic facet of students' Didactic-Mathematical Knowledge, for university teaching in relation to the Group object.

Keywords: Object Group, Didactic–Mathematical Knowledge of the University teacher, Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction.

1. Introducción

En el documento se exponen los resultados del estudio sobre el Conocimiento Didáctico-Matemático del futuro profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo (Sepúlveda, 2016). En el estudio de los antecedentes de la investigación, surgieron preguntas como: ¿Qué es el objeto Grupo? ¿Cuáles son los significados de dicho objeto matemático? A partir de las preguntas, se direccionó la investigación al análisis de la relación entre el objeto Grupo y el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los estudiantes de Licenciatura en Matemática. Para dar respuesta a las preguntas formuladas, fue necesario comprender lo que debían conocer los estudiantes sobre el objeto matemático, para llegar a explorar su Conocimiento Didáctico-Matemático para la enseñanza universitaria.

Sepúlveda, O. y Suárez, Z. E. (2017). Conocimiento Didáctico–Matemático de futuros profesores universitarios para la enseñanza del objeto Grupo. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

En esta dirección, se realizó, como primera fase de investigación, el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto, donde se identificaron los significados parciales y algunos de los contextos de su uso, hasta llegar a la emergencia del “significado holístico” (Pino-Fan, Godino y Font 2011). Como segunda fase de la investigación, se realizó el estudio de los significados pretendidos en el programa de Teoría de Grupos para el objeto matemático y el significado pretendido por cuatro libros de texto, y finalmente, en la tercera fase de la investigación y haciendo uso de las fases anteriores, se evaluó el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes para la enseñanza del objeto Grupo.

Los interrogantes planteados en los antecedentes se concretaron en la pregunta de investigación: ¿Qué conocimientos matemáticos necesitan los estudiantes de Licenciatura en Matemática, para una enseñanza idónea del objeto Grupo? La pregunta, plantea la caracterización de la dimensión epistémica del CDM (integrada por el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido) (Pino-Fan y Godino, 2015).

2. Marco teórico y problema de investigación

En el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013), se considera como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos (situaciones-problemas) comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las configuraciones epistémicas emergen de las relaciones entre los objetos matemáticos primarios (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos).

La faceta epistémica del CDM, hace referencia al conocimiento sobre el contenido matemático (Pino-Fan y Godino, 2015), es decir, entre otros aspectos, al conocimiento de los diversos significados parciales del objeto matemático. Así, un objeto, puede tener varias configuraciones epistémicas asociadas, cada una de las cuales trae un significado parcial (Font y Godino, 2006). Estos significados, permiten la emergencia del significado global del objeto matemático en diferentes grados de generalidad. Entre los problemas abordados en la investigación se encuentran: el problema epistemológico: ¿Qué es el objeto Grupo? (significado global) o en forma equivalente, ¿Cuál es el significado del objeto Grupo en el programa de Licenciatura en Matemáticas? (significado institucional del objeto matemático) y el problema cognitivo: ¿Qué significa el objeto Grupo para los estudiantes? A la pregunta, ¿Qué significa el objeto Grupo? en el EOS se establece como: el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en una institución (significado institucional) para resolver el tipo de situaciones-problemas en las cuales se requiere determinar si un conjunto dado $(G, *)$ con una operación definida entre sus elementos, cumple las propiedades o axiomas de asociatividad, existencia de un elemento identidad, existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto.

Finalmente, en el marco teórico de la investigación se analizó el modelo para el estudio del conocimiento del profesor descrito como: Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), el cual se entiende como la trama de relaciones que el futuro profesor puede establecer entre los objetos matemáticos que pone en juego en las prácticas matemáticas, con el fin de resolver un determinado campo de situaciones-problemas, que le permitirán implementar procesos de instrucción eficaces para facilitar el aprendizaje de sus estudiantes (Godino, 2009).

El estudio se desarrolló con un enfoque mixto a nivel exploratorio y de carácter descriptivo. En las tres etapas de la investigación se analizó la variable cualitativa (configuración epistémica activada en las prácticas matemáticas); y la variable cuantitativa (grado de corrección de los ítems). Esta última variable se analizó en la tercera fase de la investigación donde, además, se utilizaron técnicas estadísticas para el análisis de la variable cuantitativa y técnicas en investigación cualitativa para determinar el tipo de configuración epistémica activada en las diferentes prácticas realizadas por los estudiantes, cuando respondieron el cuestionario diseñado para evaluar aspectos del conocimiento común y conocimiento ampliado, como base para el conocimiento especializado, necesario para el desempeño como futuro profesor universitario.

3. Descripción de los resultados, análisis y discusión

3.1. Primera fase de la investigación

En esta fase se realizaron las actividades conducentes al logro del objetivo específico (OE1) que daba respuesta a la pregunta ¿Cuál es el significado global del objeto matemático Grupo? y corresponde a la determinación de los significados parciales del objeto, los cuales emergen del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico. Entre los significados identificados en las etapas de evolución del objeto Grupo se encuentran: (1) nivel cero, que se caracterizó por dar solución a ecuaciones algebraicas, las cuales se relacionaban con problemas geométricos y prácticos de las civilizaciones antiguas: se establece un significado pre-algebraico del objeto Grupo (no hay una notación, las características de las actividades no son consideradas como algebraicas). (2) primer nivel en la evolución del significado del objeto Grupo, este nivel se relaciona con el significado de Grupo como: conjunto de permutaciones de las raíces de las ecuaciones algebraicas; se da inicio al estudio de los conjuntos S_n de permutaciones de las raíces de las ecuaciones y al conjunto de los enteros módulo *n* respectivamente (Z_n). (3) segundo nivel de evolución del significado, donde se continúa con la solución de las ecuaciones algebraicas, se inicia con la búsqueda de métodos más generales para la solución de las ecuaciones; ya que se tenían métodos particulares de solución para cada una de las ecuaciones algebraicas (grado 1, 2, 3 y 4). Se tiene el significado del objeto Grupo como conjunto de permutaciones y conjuntos en aritmética modular (S_n, Z_n). (4) tercer nivel de evolución del objeto, se identificó la configuración que se relaciona con las ecuaciones de grado quinto que son solubles por radicales; de aquí emerge el significado de Grupo como, Grupo del polinomio o Grupo de Galois asociado a la ecuación algebraica G(F,p), el cual se encuentra formado por los automorfismos definidos entre las raíces de las ecuaciones algebraicas y resulta ser isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones, es decir, a un subgrupo del grupo S_n a partir del cual se puede identificar si la ecuación algebraica asociada al polinomio es soluble por el método de radicales o no, analizando precisamente si G(F,p) es soluble por radicales. En este período se continúa con el significado de Grupo relacionado con los conjuntos S_n, Z_n y G(F,p). (5) cuarto período de evolución, donde se encuentran los significados de Grupo como: Grupo de matrices GL(n, K) (lineal), SL(n, K) (lineal especial), grupos de Lie y grupos de Transformaciones (Klein), y surgen, además, otros significados de Grupo como aplicaciones concretas del significado abstracto del objeto

Grupo; entre ellos los grupos puntuales, cristalográficos y algunos grupos utilizados en la Física. La emergencia de significados se resume en la Figura 1, donde se presenta el significado global del objeto Grupo.

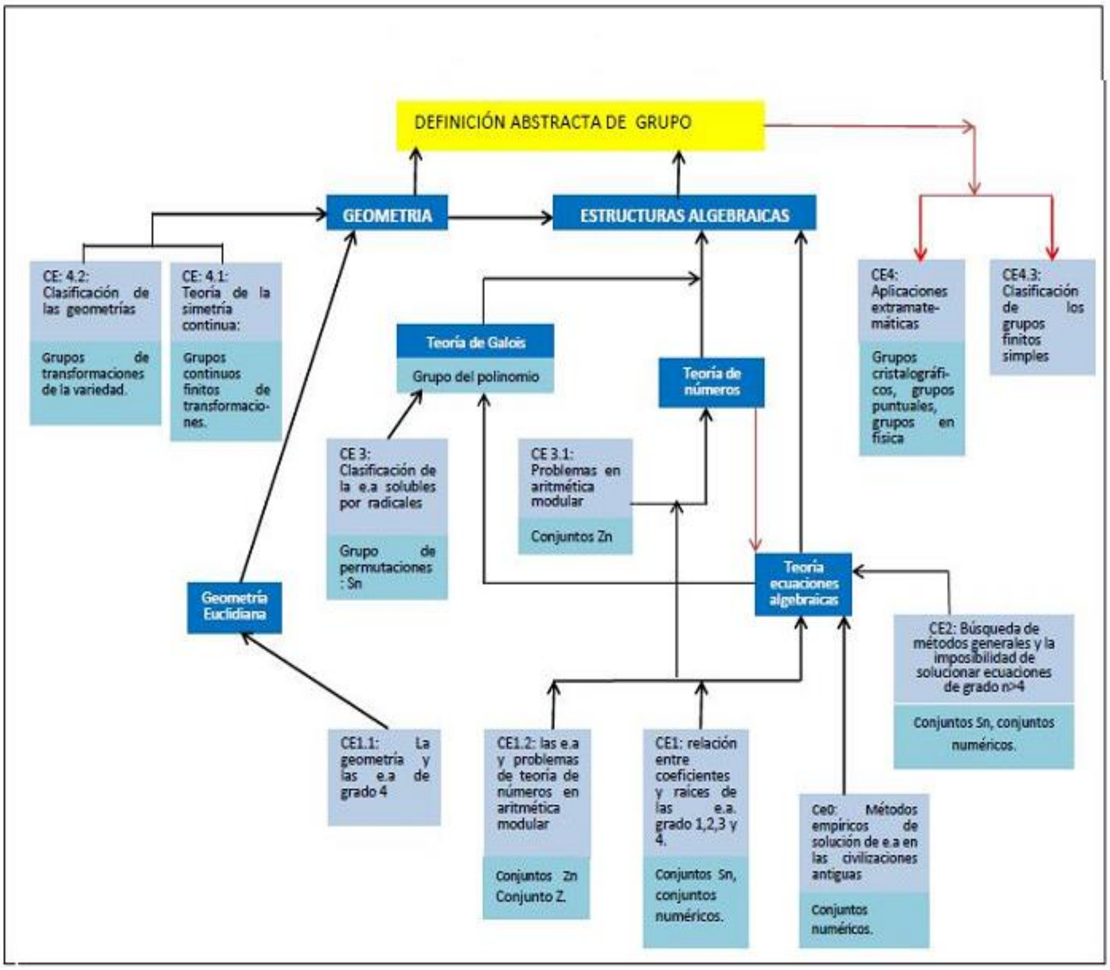

Figura 1. Significado holístico de la estructura algebraica grupo

A partir del grupo de Galois, surge la primera definición abstracta de Grupo (dada por Cayley en 1854) que corresponde al significado de referencia del objeto matemático, donde además se introducen los significados de grupo como: Grupo de cuaterniones, Grupo de matrices invertibles y los Grupos de Permutaciones, pero ya como ejemplos particulares del significado de Grupo como estructura algebraica abstracta. A partir de este punto, se dio inicio al establecimiento de la Teoría de Grupos como una rama independiente de la matemática, donde se solucionaron problemas como la clasificación de grupos: finitos simples, cristalográficos, puntuales y el estudio de grupos aplicados a la Física.

3.2. Segunda fase de la investigación

En esta fase se realizaron las actividades conducentes al logro de los objetivos específicos: OE2. Reconstrucción del significado global del objeto grupo (Figura 1); OE3. Caracterización del significado del objeto grupo, pretendido por los libros de texto, sugeridos para los programas de la asignatura: Teoría de grupos (4 libros) y OE4.

Caracterización del significado del objeto Grupo, pretendido por los programas de la asignatura de Teoría de Grupos para los estudiantes (Sepúlveda, 2016).

3.3. Tercera fase de la investigación

En esta fase se realizaron las actividades orientadas al logro de los objetivos específicos: OE5. Selección de las tareas para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido de los estudiantes; OE6. Diseño e implementación del cuestionario piloto para explorar la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático; OE7. Aplicación del cuestionario CDM-Grupo, para evaluar el conocimiento común y el conocimiento ampliado, como base del conocimiento especializado y finalmente, el objetivo OE8. Análisis de las categorías de la dimensión epistémica del CDM: el diseño e implementación del cuestionario piloto, correspondió a un estudio empírico que, además de proporcionar la versión final del instrumento y el logro de los objetivos OE5 y OE6, aportó otros resultado importantes, como la descripción de las dificultades de los estudiantes con el objeto de investigación y una primera aproximación al análisis de los niveles de dominio en la dimensión epistémica del CDM, resultado del análisis cuantitativo-cualitativo a las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes.

3.3.1. Selección de las tareas para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido

El diseño del instrumento para evaluar el CDM-Grupo de los estudiantes, se inició con la construcción de la versión piloto. Para esto, se seleccionaron 11 tareas de un banco de preguntas (200 tareas), tomadas de las investigaciones que sirvieron como antecedentes del estudio (Sepúlveda, 2016). El cuestionario se diseñó siguiendo el modelo para la evaluación del CDM propuesto en Godino (2009) y refinado en diversos trabajos (Pino-Fan y Godino 2015; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015), el cual propone tres dimensiones y seis facetas que integran el conocimiento didáctico-matemático del profesor (entre ellas la epistémica, que es objeto de estudio en esta investigación). Además, para cada dimensión y faceta se proponen pautas generales para categorizar y analizar el CDM de los profesores.

Para la construcción del instrumento, se consideraron tres criterios: el primer criterio establecía que las tareas proporcionaran información sobre el grado de ajuste respecto al significado holístico de la estructura algebraica grupo, para compararlo con los significados personales de los estudiantes. Para esto, se formularon ítems, según los diferentes contextos de uso del objeto matemático, que activaran los distintos significados del objeto: Conjunto de raíces de una ecuación polinomial - Teoría de ecuaciones algebraicas, Conjunto de permutaciones, Grupo de Galois de un polinomio, Problemas en aritmética modular con los conjuntos Z_n, Teoría de matrices, Conjuntos de Permutaciones y Conjuntos especiales de matrices.

El segundo criterio, pretendía que los ítems del cuestionario se relacionaran con algunos de los principales contenidos curriculares determinados para el objeto matemático. Para esto, como resultado del estudio a los programas y textos de la asignatura de Teoría de Grupos, se establecieron los contenidos: Operación binaria, Estructuras algebraicas (semigrupo, monoide y grupo), Grupo-ejemplos y contraejemplos, Subgrupo, Orden del grupo y Propiedades de los grupos. Finalmente, se estableció el tercer criterio, con el propósito de categorizar las tareas en tres clases, según los componentes de la dimensión epistémica del CDM: (1) Las que ponen en juego el conocimiento común (resolver una tarea sobre el objeto grupo); (2) Las que requirieren del conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo) y (3) Tareas que requieren del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza (usar distintas representaciones, diferentes significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar argumentaciones válidas, e identificar los conocimientos puestos en juego).

En esta dirección, se seleccionaron las tareas luego de un análisis minucioso respecto a los criterios propuestos. Así, el instrumento se elaboró con el objetivo de explorar aspectos iniciales de las categorías que componen el modelo CDM, en su faceta epistémica, por medio del planteamiento de situaciones que permitan el análisis de las prácticas matemáticas operativas y discursivas de los estudiantes. De esta forma, para evaluar el conocimiento común del contenido y el desarrollo de procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, según la metodología propuesta en el EOS, se diseñaron prácticas en el cuestionario como: ¿Existe el elemento identidad en el conjunto? ¿Cuál es el inverso de un elemento? ¿Se cumple la propiedad de clausura; la asociativa? Para evaluar el conocimiento ampliado del contenido, se plantearon preguntas como: ¿A qué otro grupo conocido resulta isomorfo el subgrupo anterior? ¿En qué grupo está trabajando? Defina una operación en un conjunto dado. Finalmente, para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se diseñaron preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas usa para dar solución al problema? ¿Qué conceptos de Teoría de Grupos utiliza para solucionar el ejercicio? (cuestionario CDM-Grupo).

De la prueba piloto para el cuestionario CDM-Grupo y según el porcentaje de respuestas incorrectas, se detectaron dificultades de los estudiantes tales como: en el conjunto de los enteros, con la operación, $a * b = a+b-4$, el 45% de los estudiantes no determinaron cuál es el elemento identidad; el 64% no comprendieron cómo determinar el inverso de un elemento, y el 10% no comprendió la operación, ya que no elaboraron parte de la tabla de operación, para un subconjunto dado: en esta dirección, se contrastaron los antecedentes con el presente estudio, en la identificación de las dificultades de los estudiantes (Sepúlveda, 2016), lo cual sirve como diagnóstico para establecer un plan de trabajo en la asignatura de Teoría de Grupos.

Otra actividad importante en la tercera fase de investigación, correspondió al juicio de los expertos y al análisis de los resultados de la prueba piloto, lo cual proporcionó el cuestionario final CDM-Grupo. Se concluye del diseño del instrumento de evaluación, que es un proceso complejo que implica factores como: la validación de contenidos, la determinación del índice de confiabilidad y dificultad del instrumento, y pruebas para determinar si el cuestionario es homogéneo, es decir si las preguntas se relacionan entre sí. Este proceso de diseño de instrumentos de evaluación es un aporte valioso que se aplica en muchas de las tareas que realiza el profesor universitario. Como resultado del desarrollo de esta tercera fase de investigación se obtuvo el cuestionario CDM-Grupo.

Cuestionario CDM-Grupo

TAREA 1. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) Dé un ejemplo de un subgrupo del grupo D_3. Justifique.
b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique.
c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(Z_4,+_4)$? Justifique.

d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique.

TAREA 2. Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función tal que si para todo α en S_4 se cumple que $\alpha(f(x_1, x_2, x_3,x_4)):=f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ se dice que **f** es un invariante del grupo S_4.
a) ¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1x_2 + x_3 x_4$ una función invariante? Justifique.
b) ¿Qué elementos **α en S_4** dejan a **f** invariante? Justifique.
c) Un polinomio **f** se llama simétrico, si para toda permutación se cumple que **αf =f.** Dé un polinomio simétrico. Justifique.
d) En la ecuación $\mathbf{x^2 + b\, x + c=0}$, determine **b, c,** en función de sus raíces $\mathbf{x_1, x_2}$. Justifique.

TAREA 3. Considere el grupo $\mathbf{S_4}$ de permutaciones de cuatro elementos.
a) Determine el subconjunto de $\mathbf{S_4}$ que deja invariante el número 2. Justifique.
b) Determine el subconjunto que deja invariante al **2** y al **4**. Justifique.
c) Determine el subconjunto de permutaciones del grupo $\mathbf{S_4}$ que deja invariante a la función $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1x_2 + x_3 x_4}$. Justifique.
d) ¿Los subconjuntos obtenidos son subgrupos? Justifique.

TAREA 4. El subgrupo de permutaciones regular de **n** símbolos, mueve los **n** símbolos excepto a la identidad.
a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique.
b) ¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique.
c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique.
d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado en a)? Justifique.

TAREA 5. Divida el polinomio $\mathbf{3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x + 1}$ en el polinomio $\mathbf{2x^3+ 3x^2+4x+1}$. Los coeficientes de los polinomios pertenecen al grupo $\mathbf{(Z_5, +_5)}$.
a) ¿El cociente corresponde a? Justifique.
b) ¿El residuo corresponde a? Justifique.
c) ¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique.
d) ¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique.

TAREA 6. Dado el conjunto $\mathbf{A_2:= \{ 1,2,3,...,99\}}$ de los z-números y la función $\mathbf{r:N \to A_2}$ que reduce un número natural a un número del conjunto $\mathbf{A_2}$ tal que **r(n)=n,** para n<100 y para n>100, se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda: luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente **r**, por ejemplo: r(214)=r(2+14)=r(16)=16; r(5298)=r(52+98)=r(150)=r(1+50)=r(51)=51. Se define además, en el conjunto $\mathbf{A_2}$ la operación **x * y= r(x + y).**
a) Solucione **x* 17=99** y diga qué propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.
b) ¿Existe el elemento identidad en $\mathbf{(A_2,*)}$? Justifique.
c) ¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $\mathbf{(A_2,*)}$? Justifique.
d) ¿Qué z-números son divisibles por **3** en el conjunto $\mathbf{(A_2,*)}$? Justifique.

TAREA 7. Sea **(G,*)** un grupo con elemento identidad **e**. La función **f: G→ G** tal que $\mathbf{x \to axa^2}$ para cada **x** en **G** y para un elemento fijo **a** en **G.** Se tiene que **f** es un homomorfismo si cumple: (responda verdadero o falso y justifique según el caso).
a) El grupo es abeliano.
b) **a=e**
c) $\mathbf{a^2=a}$ y el grupo abeliano.
d) $\mathbf{a^3=e}$ y el grupo abeliano

TAREA 8. Sea **G=<A, B>** subgrupo del grupo lineal **GL(2, C)** con entradas en los números complejos, donde **A, B** corresponden a las matrices:

A=

0	i
i	0

B=

0	1
-1	0

a) Determine los elementos del grupo. Justifique.
b) **G,** es un grupo abeliano? Justifique.
c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique.
d) ¿Cuál es la operación en el grupo **GL(2, C)** y cuál es la operación en **G**. Justifique.

TAREA 9. Sea **(R,*)**, el conjunto de los números reales donde se define la operación * tal que:
$a * b = 3a+4b$.
a) ¿La operación ***** cumple la propiedad de clausura? Justifique.
b) ¿La operación ***** es asociativa? Justifique.
c) ¿Existe el inverso del número 2? Justifique.
d) En el conjunto $\mathbf{R}^2$ defina una operación en la cual no exista el elemento identidad. Justifique.

TAREA 10. Sea el grupo **(Z_6, $+_6$)** de los enteros módulo 6.
a) Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique.
b) Escriba un subconjunto del grupo **(Z_6, $+_6$)** que no sea subgrupo. Justifique.
c) ¿Es **(Z_3, $+_3$)** un subgrupo de **(Z_6, $+_6$)**? Justifique.
d) Elabore la tabla de operación del grupo **(Z_6, $+_6$).**

TAREA 11. Sea el grupo **k-4** de Klein, dado por la relación **$a^2= b^2= c^2= e^2=e$.**
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.
b) Construya el grupo cociente con el subgrupo **$H=\langle a\rangle$.** Justifique.
c) ¿Qué condición cumple el subgrupo **H,** para obtener el grupo cociente? Justifique.
d) Liste los elementos de la clase **bH.** Justifique.

3.3.2. Primera aproximación al estudio de la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Como uno de los objetivos de la investigación, se planteó la caracterización de las categorías del conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido, como conocimiento base para el desarrollo del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza del objeto matemático. Según Pino-Fan y Godino (2015), el conocimiento común del contenido se relaciona con los conocimientos matemáticos que no son propios de la enseñanza; que posee cualquier estudiante, para resolver situaciones-problemáticas propias del nivel educativo, en este caso del nivel universitario. Se conjetura, en la investigación, que el conocimiento común del contenido, se relaciona con el desarrollo de procesos del Pensamiento Algebraico Avanzado de los estudiantes. Este desarrollo del pensamiento matemático, es uno de los objetivos que se buscan en la educación desde los primeros grados hasta el nivel superior. En la educación universitaria, procesos como abstraer, generalizar, sintetizar, representar, definir, refutar, demostrar; entre otros, adquieren gran relevancia.

Se rediseñaron tareas como: el subítem 1a) con el cual se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes del grupo D_3 de simetrías del triángulo equilátero, específicamente, sobre los subgrupos del grupo; para lo cual se solicitó a los estudiantes dar un ejemplo de un subgrupo del grupo y justificar (bajo algún criterio conocido) por qué el subconjunto dado era subgrupo. De igual forma, en la categoría del conocimiento ampliado del contenido, se formuló el subítem 2a) con el cual se buscaba evaluar este conocimiento en relación con la comprensión de los estudiantes, al determinar si la función $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1 x_2 + x_3x_4}$ es un invariante del grupo de permutaciones de cuatro elementos S_4. Finalmente, para la categoría del conocimiento especializado del contenido, que según Pino-Fan, Godino y Font, (2013), se relaciona con el conocimiento que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores pero que tienen una preparación afín en matemáticas se formuló el subítem 4c) con el cual se buscaba evaluar el conocimiento especializado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo S_4 y la propiedad del subgrupo de ser conmutativo.

4. Conclusiones y comentarios finales

Luego del proceso complejo de diseño, implementación y análisis de resultados de la versión piloto y en la búsqueda del logro del objetivo específico OE7, se aplicó el cuestionario CDM-Grupo a 32 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (2 grupos), buscando analizar el grado de conocimiento común (CCC) y conocimiento ampliado (CAC), como base para el desarrollo del conocimiento especializado (CEC), necesario para la enseñanza del objeto matemático. Según las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes y el índice de dificultad de las preguntas del cuestionario, se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Niveles de dominio en la faceta epistémica del CDM

	Porcentaje de respuestas correctas		
Categoría	Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto
	(0-25]	(25-75)	[75-100]
CCC	14		
CAC	10		
CEC	12		

En la categoría del conocimiento común del contenido, se considera, que en general, los estudiantes presentan debilidades que se relacionan con un bajo nivel de dominio, según el índice de dificultad de las preguntas: en especial con los conocimientos relacionados con los subítems 2d), 4a), 5b), 8b) y 9b) donde el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde al 0%, identificándose como el índice de mayor grado de dificultad. De igual forma, en la categoría del conocimiento ampliado del contenido se considera, que los estudiantes presentan grandes debilidades, relacionadas con un nivel de dominio muy bajo o deficiente respecto al índice de dificultad de los subítems, según la escala establecida. En especial en los subítems 2a), 2b), 2d), 3c), 4a), 4b), 4c), 4d), 5b), 8c), 9d) y 11c), los estudiantes evidenciaron grandes dificultades ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática. En la misma dirección, del análisis a las prácticas matemáticas de los estudiantes, se considera que en general, presentan grandes dificultades en relación con el conocimiento especializado del contenido, especialmente de los subítems 4a), 4b), 4c), 4d), 8c), 9d), 11c) y 11d), donde el

porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas correspondió al 0%, ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática.
Se establece como conclusión al análisis de la faceta epistémica del CDM, que los estudiantes de Licenciatura, tienen dificultades en relación con el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido y por tanto del conocimiento especializado, ya que presentaron un conocimiento bajo de la mayoría de los subítems que permitieron evaluar las categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático.

Referencias

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.
Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.
Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.
Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1/2), 127-135.
Pino-Fan, L., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.
Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.
Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.
Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (segunda parte). *Revemat, 8*, 1-47.
Sepúlveda, O. (2016). *Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo.* Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.