Significados institucionales y personales de los objetos matemáticos: una aproximación epistemológica a la Didáctica de las Matemáticas[1]

Institutional and personal meanings of mathematical objects: an epistemological approach to Didactic of Mathematics

Ramiro Ávila Godoy, Jesús Ávila Godoy y Francisco Javier Parra Bermúdez

Universidad de Sonora, México

Resumen

En este trabajo se presentan algunas reflexiones hechas en un seminario sobre Epistemología y Didáctica de las Matemáticas organizado para analizar el origen y desarrollo de los objetos matemáticos. Este análisis se realizó asumiendo las premisas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática de (EOS) y estuvo orientado a tratar de mejorar la comprensión de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, considerando que dicha comprensión resulta fundamental para mejorar ambos procesos. Se pretende ilustrar, con algunos ejemplos, el papel de las situaciones problémicas en el origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos y cómo dichos significados, en un cierto momento, se convierten en obstáculos que dificultan el enriquecimiento de tales significados. Se asume que estos obstáculos ocurren tanto en el desarrollo histórico de las ideas como en el proceso de aprendizaje que viven los estudiantes en el aula.

Palabras clave: epistemología, didáctica, enfoque ontosemiótico, deriva, integral

Abstract

In this paper, we present some reflections that arose in an Epistemology and Mathematics Education seminar, which was developed with the purpose of analysing the origin and development of mathematical objects. The analysis is based on the Onto-semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (OSA) premises and aimed at improving the understanding of mathematics learning and teaching processes, since a better understanding is essential to improve both processes. We use several examples to illustrate the role of problem situations in the origin and development of mathematical objects meanings and how personal meanings developed about these objects, at a moment, can become obstacles to enrich the same meanings. We suggest that these difficulties occur, both, in the historical development of ideas and in the learning process experienced by students in the classroom.

Key words: epistemology, didactic, onto-semiotic approach, derivative, integral

1. Introducción

La investigación educativa que se realiza en los distintos ámbitos, tiene como propósito último y más general, aportar elementos que permitan comprender e interpretar, de mejor manera, los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en el aula escolar, como el espacio donde se da la interacción entre profesor y alumnos. Se considera que una mejor comprensión e interpretación de dichos procesos, permitirá diseñar estrategias de enseñanza que mejoren la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

[1] Versión revisada y ampliada del trabajo, Epistemología y didáctica de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 775-783 (2012).

Ávila, R., Ávila, J. y Parra, F. J. (2017). Significados institucionales y personales de los objetos matemáticos: una aproximación epistemológica a la Didáctica de las Matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Lo anterior equivale a decir, en el caso de la investigación en Matemática Educativa, que lo que se pretende es aportar elementos que puedan ser utilizados para lograr que los alumnos adquieran un conocimiento más sólido de la matemática y, que éste, se vea reflejado en un uso más eficaz de los conceptos y métodos de la disciplina, en el análisis, interpretación y resolución de problemas.

Abordar la investigación, con el propósito de comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática que se desarrollan en el aula escolar, requiere del investigador, asumir y establecer las premisas en que basará su análisis e interpretación de los procesos que está investigando; esto es, requiere establecer explícitamente sus concepciones relativas a:

a) La naturaleza de los objetos matemáticos; así como a su origen y desarrollo (concepción filosófica relativa a la ontología y a la epistemología de los objetos matemáticos)
b) La manera en que los factores socioculturales del entorno influyen en el proceso educativo escolar (concepción sociológica)
c) La forma en que se desarrollan los procesos de construcción de conocimiento en el individuo (concepción cognitiva)
d) La manera en que el trabajo docente, de diseño e implementación de determinadas estrategias de enseñanza, influye en los procesos cognitivos a través de los cuales los estudiantes asignan los significados a los objetos matemáticos (concepción didáctica).

El propósito de esta ponencia es mostrar una serie de reflexiones hechas en un seminario sobre Epistemología y Didáctica de las Matemáticas organizado con estudiantes de doctorado en Matemática Educativa en la Universidad de Sonora (México). Dicho seminario estuvo centrado en el análisis e interpretación de diversos documentos que hacen referencia al origen y desarrollo de los objetos matemáticos, tanto en la dimensión histórica (estudio filogenético) como en la dimensión personal (estudio ontogenético).

El análisis se realizó asumiendo las premisas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) como referente teórico y estuvo orientado a tratar de mejorar la comprensión de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Se consideró, como ya hemos declarado, que mejorar dicha comprensión, resulta fundamental para el diseño e instrumentación de estrategias didácticas que ayuden a elevar significativamente la calidad de los aprendizajes de los estudiantes en el aula escolar, calidad que se espera, se vea reflejada en un uso más eficaz de los conceptos y métodos de la disciplina, en el análisis, interpretación y resolución de problemas.

Con base en las premisas del EOS (que constituyeron nuestro referente teórico), para llevar a cabo el análisis de los textos revisados en el seminario, empezamos declarando que:

i) La matemática, desde sus orígenes ha sido una herramienta intelectual construida socialmente por el hombre, con el propósito de resolver determinado tipos de problemas.

ii) Tal herramienta la fue construyendo el ser humano en el proceso mismo de resolución de dichos problemas, para lo cual creaba y utilizaba ciertos sistemas de prácticas. En este sentido, la matemática, en sus orígenes fue y siempre ha sido, una actividad de resolución de problemas.

iii) Los diversos sistemas de prácticas implementados en un determinado momento de su desarrollo histórico, constituyen los significados de los objetos matemáticos emergentes.

iv) Los significados construidos se convierten, en otro momento, en obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1983; Sierpinska, 1985) al significado de un determinado objeto matemático que dificultan la asimilación de nuevos sistemas de prácticas creados para resolver nuevos problemas.

2. Algunas consideraciones generales sobre la epistemología de la matemática

La matemática, presentada en muchos textos como un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurado que, partiendo de un conjunto mínimo de verdades evidentes (axiomas), deduce y establece, a través de un razonamiento basado en los principios de la lógica, la veracidad de un conjunto de proposiciones (teoremas), muestra una visión platónica del conocimiento matemático, esto es, una visión que considera a la matemática, un ente con existencia fuera e independiente de la actividad humana.

Dicha visión parece desconocer que el estado actual de la matemática es fruto de un largo proceso a través del cual, el hombre, en su intento por alcanzar la verdad acerca del diseño y funcionamiento del universo y, por resolver los problemas y desafíos que éste le presenta, ha construido los objetos (conceptos y métodos) de la matemática. Estos objetos han evolucionado en la medida en que el hombre ha ido modificando, diversificando y enriqueciendo los significados de dichos objetos, como consecuencia de la creación de nuevos sistemas de prácticas, ideados para abordar y resolver problemas de la más diversa índole.

Fue en la etapa de esplendor de la antigua cultura griega, la primera ocasión que la matemática fue presentada como un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurados. Euclides, en *Los Elementos*, presenta la Geometría como una abstracción, como un modelo del espacio físico (concebido como un espacio estático).

Si bien, la Geometría Euclidiana prevaleció hasta comienzos del siglo XX, como modelo matemático del espacio físico (estático), en el siglo XVII, Galileo y Kepler inician el estudio de los movimientos, el de caída libre (Galileo) y el de las órbitas de los planetas alrededor del sol (Kepler). Bajo la premisa de Galileo de que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, intentan describir y explicar dichos movimientos, para lo cual idearon y utilizaron nuevos y diversos sistemas de prácticas que originaron nuevos significados de ciertos objetos matemáticos, dando lugar a la creación de un modelo matemático del movimiento mecánico en el espacio concebido a la manera de Euclides.

En esta misma dirección, de tratar de establecer un modelo matemático de las leyes que rigen el funcionamiento de la naturaleza, durante la segunda mitad del siglo XVII, a partir de nuevos datos, nuevas observaciones, nuevos experimentos y desde luego, a partir del propio desarrollo alcanzado por la matemática, Newton diseñó e implementó un sistema de prácticas del que emergieron nuevos objetos matemáticos. Los nuevos significados introducidos provocaron un salto cualitativo en el desarrollo de la matemática, dando origen así, al Cálculo Diferencial e Integral como una herramienta muy poderosa para describir y explicar los fenómenos cuyo rasgo distintivo era la variación.

A la par que Newton y durante el mismo periodo, Leibniz, queriendo resolver el problema de trazar la tangente a una curva en un punto determinado, diseñó e implementó también un sistema de prácticas del que emergieron nuevos objetos matemáticos cuyos significados eran esencialmente los mismos que los construidos por Newton para resolver los problemas del movimiento. De ahí que a ambos se les otorgue el mérito de la creación del Cálculo Diferencial e Integral.

La concepción de la matemática como modelo de la realidad física, prevaleció desde la época de la Grecia Antigua hasta comienzos del siglo XX, concepción que se reafirmó de manera especial durante el siglo XVII, como resultado de haberse formulado, utilizando el lenguaje de la Matemática, las leyes y teorías científicas que permitían describir, explicar y predecir el funcionamiento de la naturaleza, con resultados que eran confirmados por las observaciones y los experimentos. Con base en estos hechos, se puede afirmar que durante este periodo, el desarrollo de la matemática se dio en estrecha colaboración con el desarrollo de las ciencias, particularmente de la Física.

Pero por otro lado, el desarrollo de la matemática muestra que ésta no sólo le fue útil a las ciencias naturales, en su intento por describir y explicar el universo, sino también muestra, que dichas ciencias proporcionaron a la matemática los problemas que motivaron el origen y desarrollo de diversos sistemas de prácticas. La implementación de estas prácticas, que en principio pretendían dar respuesta a los problemas concretos planteados, motivó el surgimiento y desarrollo de los objetos matemáticos y propició la diversidad y riqueza de los significados de dichos objetos.

La potencia y eficacia mostrada por la matemática y sus métodos en la explicación y predicción de los fenómenos naturales, llevaron a que se considerara a ésta como la verdad, en lo que al diseño de la naturaleza se refiere y, como la máxima expresión de la exactitud en el razonamiento, así como un cuerpo de verdades irrefutables, cuyo más sólido criterio de verdad era el propio comportamiento de la naturaleza, la cual parecía estar en completa armonía con los principios y leyes de las matemáticas. Incluso, se concebía a la matemática, y algunos la siguen concibiendo, como un cuerpo de conocimientos cuya existencia era independiente de la mente humana, y que el hombre debe descubrir y apropiarse de ella a través de su aprehensión (concepción platónica).

Sin embargo, y como ha ocurrido con todo conocimiento, y la matemática no es la excepción, su propio desarrollo puso de manifiesto que las verdades evidentes por sí mismas y las derivadas de éstas, no eran tales verdades irrefutables y sólidamente sustentadas como se pensaba, sino que eran verdades relativas y de carácter temporal.

El surgimiento en el siglo XIX de las geometrías no euclidianas puso de manifiesto con claridad que la matemática construida hasta entonces, no era necesariamente la descripción del diseño de la naturaleza o, incluso, que no existía tal diseño, ya que habían surgido otras geometrías, que a pesar de estar en contradicción con la geometría imperante, eran igualmente útiles para describir y explicar el comportamiento de los fenómenos naturales. Esto significaba que recurrir a la naturaleza como criterio de verdad de las leyes matemáticas, no era un criterio confiable, ya que ésta validaba igualmente proposiciones matemáticas contradictorias, pero también representó un duro golpe a la concepción platónica de la naturaleza de los objetos matemáticos y fortaleció la convicción de que éstos eran creaciones de la mente humana.

La pérdida de confianza en la naturaleza como criterio de verdad de las leyes y principios matemáticos y la convicción de que éstos eran construcciones humanas y no objetos con existencia a priori, motivó que los matemáticos se propusieran revisar los fundamentos sobre los que habían construido ese grandioso edificio que hasta entonces había mostrado una gran fortaleza, pero que con las nuevas geometrías se había cimbrado y provocado profundas grietas.

Estos hechos orientaron la actividad de los matemáticos hacia la solución de los nuevos problemas planteados por la necesidad de sustentar la matemática sobre nuevas bases, cuya característica fundamental debía ser el máximo rigor lógico en la fundamentación de la matemática, evitando por completo, recurrir a cualquier argumento que no pudiera justificarse con los principios y las leyes de la lógica. Este proceso se conoce como rigorización de la matemática (Ímaz y Moreno, 2010).

En esta etapa también se pone de manifiesto el papel fundamental que tienen los problemas, aunque de naturaleza diferente a los problemas planteados por el estudio de la naturaleza, como motivadores de nuevos sistemas de prácticas, de los que emergieron nuevos objetos matemáticos cuyos significados se fueron construyendo y enriqueciendo en ese proceso de resolución de los nuevos problemas planteados.

Lo antes dicho, de ninguna manera significa que la matemática haya dejado de ser eficaz en la descripción y explicación de los fenómenos de la naturaleza, sino por el contrario, el tener una idea más adecuada de la naturaleza de los objetos matemáticos, de sus métodos y procedimientos, permitió iniciar el proceso de fundamentación de la misma sobre otras bases. Así mismo, permitió utilizar estas nuevas creaciones matemáticas para describir y explicar fenómenos naturales que no podían describirse y explicarse con la matemática previa; incluso, estas nuevas creaciones sirvieron de fundamento a un nuevo paradigma en la concepción del universo.

Procederemos ahora, a ilustrar con algunos ejemplos, el papel de las situaciones problémicas en el origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos y cómo dichos significados, en un cierto momento, se convierten en obstáculos que dificultan el enriquecimiento de tales significados. Los ejemplos que mostraremos están tomados del análisis del desarrollo histórico de los significados de los objetos matemáticos, asumiendo, nosotros, que en el proceso de aprendizaje que viven los estudiantes en el aula, sucede lo mismo, lo cual ilustraremos posteriormente.

3. Los significados de los objetos matemáticos como obstáculos epistemológicos

El desarrollo de la matemática está plagado de ejemplos de cómo el significado construido de un objeto matemático, expresado en un determinado sistema de prácticas en un cierto contexto, representó en otro momento de su desarrollo, y por ende en otro contexto, un *obstáculo epistemológico* para asimilar al significado de dicho objeto (Grijalva, 2007). El uso en otro contexto supone la aplicación de nuevos sistemas de prácticas e interpretarlas como un proceso de resignificación del objeto que diversifica y enriquece el significado previamente construido.

Un ejemplo especialmente útil para ilustrar lo anterior es el objeto matemático *número*, cuyo significado surgió asociado a la cantidad de elementos de un conjunto dado, es decir, como número cardinal asociado a lo que hoy llamamos cardinalidad de un conjunto. Esta significación constituyó un fuerte obstáculo para que en la Grecia Antigua, se reconociera y aceptara como números los hoy denominados *números racionales*. Los griegos hablaban de la razón entre dos números, sin reconocer a dicha razón como un número propiamente dicho, incluso crearon una teoría sobre razones y proporciones que indica que conocían muchas de sus propiedades, pero no lograron asimilarlos e integrarlos al sistema de los números.

La introducción y uso de los enteros negativos por los hindúes y los árabes en el siglo VI de nuestra era, provocó una resistencia tan prolongada que aún después de la edad media, en Europa había matemáticos de renombre que se resistían a aceptar su utilización bajo el argumento de que era un absurdo la existencia de números menores que nada, de la misma manera que no concebían restarle un número mayor a otro menor. El surgimiento y uso de los números imaginarios o complejos igualmente enfrentó una fuerte resistencia aun entre los matemáticos brillantes de la época. Al respecto, algunos de ellos, declaraban:

> Un número admite ser restado de otro número mayor que él, pero intentar restarlo de un número menor que él es ridículo […] (Frend, 1796, p. x, Preface).
>
> El uso de $\sqrt{-1}$, cantidad que, decía Cauchy, podemos repudiar por completo y debemos abandonar sin pena, pues no se sabe qué significa ese pretendido símbolo ni qué sentido se le debe atribuir (Kline, 1980, p. 184).

El surgimiento del Cálculo en el siglo XVII, cuyos objetos matemáticos emergentes de los novedosos sistemas de prácticas implementados para la resolución de los problemas abordados, cuya característica esencial era la variación, es otro ejemplo muy ilustrativo de la naturaleza de los obstáculos epistemológicos. Surgieron fuertes resistencias y críticas de connotados matemáticos de la época que se negaban a aceptar la inclusión y el uso de los objetos tales como “infinitesimal” e “infinitamente grande”, a pesar de que mostraban ser tan útiles y eficaces en el cálculo para la resolución de los problemas planteados, ya que violentaban el significado de cantidad (número real) del que se disponía en ese momento. Para los matemáticos de la época era inaceptable la respuesta de Leibniz a la pregunta de cuál era el valor de esas cantidades que él llamaba “infinitesimales” o “infinitamente grandes”, ya que a esto respondía, que eran “inasignables”, es decir, que no se les podía asignar un valor numérico, pero que eran de una gran utilidad para realizar cálculos y obtener resultados verdaderos, utilidad que desaparecía si se optaba por asignarles un valor real.

Algo similar ocurrió con los objetos matemáticos construidos por Newton en el contexto de los fenómenos del movimiento que se propuso describir y explicar.

Así, podrían citarse muchos otros ejemplos de obstáculos epistemológicos constituidos por los significados construidos en determinado momento y contexto que se expresaron en fuertes resistencias para aceptar nuevos objetos o diversificar sus significados.

4. Algunas consideraciones sobre didáctica de la matemática

La toma de conciencia de que en el desarrollo histórico de las Matemáticas, el significado asignado a un objeto matemático en un cierto momento (considerado como un sistema de prácticas utilizadas para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de problemas surgidos en un cierto contexto, como proponen Godino y Batanero, 1994), se convertía en un obstáculo epistemológico para utilizarlo en el análisis, interpretación y resolución de problemas surgidos en otros contextos.. Asumiendo que esto mismo debe suceder a los alumnos en la escuela, ha surgido una problemática de investigación focalizada en estudiar la relación entre el contexto de la enseñanza y los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos.

En nuestro caso, hemos desarrollado algunos proyectos de investigación en los que estamos indagando sobre el papel del contexto de la enseñanza del Cálculo en los significados que los estudiantes asignan a dos objetos matemáticos fundamentales en Cálculo: la derivada y la integral de una función (Grijalva, 2007).

La razón fundamental que motiva el tratar de entender la relación entre contexto y significado, es el diseño de estrategias de enseñanza que resulten más eficaces para lograr que nuestros alumnos desarrollen las competencias necesarias para utilizar tales objetos en el análisis, interpretación y resolución de problemas sobre variación en general y específicamente problemas de ingeniería.

En una primera etapa de estos proyectos, quisimos obtener evidencias del carácter contextual de los significados que tienen los estudiantes de los objetos matemáticos y de que, efectivamente, este carácter contextual los convertía en obstáculos para utilizarlos en otros contextos. Para ello diseñamos algunas situaciones problema que aplicamos aproximadamente a 60 estudiantes de diversas carreras universitarias (especialmente de ingeniería y matemáticas) que habían ya acreditado los cursos de Cálculo Diferencial e Integral. En esta ponencia vamos a presentar dos de esas situaciones con tres propósitos:

a) Mostrar el tipo de situaciones diseñadas.
b) Mostrar lo que dijeron los estudiantes al respecto de los cuestionamientos formulados.
c) Mostrar la interpretación que hicimos de lo dicho por los estudiantes utilizando como referente teórico el EOS.

La primera situación que vamos a presentar, la diseñamos para investigar el significado de *derivada de una función* y la segunda el de *integral de una función*

5. Significados personales de los estudiantes sobre la derivada

5.1. Sobre el objeto derivada

Se planteó a los estudiantes la siguiente situación – problema:

Enunciado de la primera situación:

Dada la función $y = x^3$

a) Obtén su derivada.
b) Determina el valor de la función y el de su derivada, cuando $x = 1$
c) ¿Qué significa que la derivada de esta función valga 3, cuando $x = 1$?

d) Si la expresión analítica $x = t^3$ establece la relación entre la distancia (medida en metros) recorrida por una partícula que se mueve por una trayectoria recta, t el tiempo (medido en segundos) transcurrido ¿Qué significa que la derivada de dicha función valga 3, cuando $t = 1$?
e) Sabiendo que el volumen de un cubo se calcula con la fórmula $V = x^3$, donde V representa el volumen y x la longitud de cada uno de sus lados, ¿Qué significa que la derivada de dicha función valga 3, cuando $x = 1$?

Las respuestas de los estudiantes

Los incisos a) y b) todos los alumnos los respondieron correctamente.

La pregunta del inciso c), aproximadamente el 80% de los estudiantes respondió que era el valor de la pendiente de la tangente a la curva en el punto donde $x = 1$; el resto no contestó; la del inciso d), aproximadamente el 50% de los estudiantes dijeron que eso indicaba que la velocidad de la partícula en el instante $t = 1\ seg$, era $3m/seg$; el otro 50% no supo qué contestar.

En el caso de la pregunta del inciso e) sólo el 5% de los alumnos respondió diciendo que era la razón instantánea de cambio del volumen con respecto a la longitud del lado; mientras que el resto, esto es, el 95% contestó: *No me dice nada.*

El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes

El análisis de las respuestas, llevado a cabo con base en las premisas del EOS, nos permitió corroborar que los significados que los estudiantes tienen de los objetos matemáticos, son contextuales y que en este caso, al pensar en lo que significa la *derivada de una función*, es la imagen geométrica, tal vez por su naturaleza visual (intuitiva), la que primero evocan y, en consecuencia, la que consideran el significado del objeto *derivada*.

Por otra parte, el que la mayoría de los estudiantes interpreten el valor de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, nos permite suponer que esto es consecuencia del hecho de que regularmente los profesores utilizan el contexto geométrico para ilustrar y explicar *qué es la derivada de una función*.

Luego, el que haya disminuido significativamente el número de estudiantes que interpretaron correctamente el valor de la derivada en el contexto del movimiento, nos hace ver, por una parte, que esos estudiantes deben haber tenido experiencias de uso de la derivada en ese otro contexto. Además, que haya habido estudiantes que teniendo un significado de derivada no pudieran responder, nos indica que el significado construido en un contexto no puede transferirse a otro contexto de manera automática e, incluso, obstaculiza el análisis e interpretación de la nueva situación.

Finalmente, el hecho de que la gran mayoría de los estudiantes manifestaran que el valor de la derivada de la función $V = x^3$, que expresa la relación entre el volumen de un cubo y la longitud de sus aristas, no les decía nada, es otro ejemplo de la no transferencia automática del significado construido en un contexto a otro. En este caso, conjeturamos además, que el significado de la expresión $V = x^3$ es el de un procedimiento (fórmula) para calcular el volumen de un cubo, de tal manera que cambiar el valor de x implica cambiar de cubo, es decir la x parece no concebirse como variable, sino como una constante paramétrica. A diferencia de la expresión $x = t^3$, utilizada en el problema del inciso d), la x y la t son concebidas como variables pues diferentes valores de t están asociados con diferentes valores de x pero se refieren al mismo objeto, esto es, a la partícula que se está moviendo**.**

Los pocos estudiantes que interpretaron la derivada como la razón instantánea de cambio muestran haber construido el significado de *derivada de una función en un punto*, como la rapidez instantánea con que cambia la función con respecto a la variable y esto, asumimos que también es consecuencia del contexto de la enseñanza.

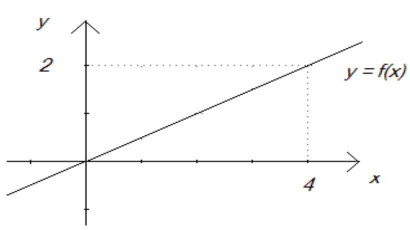
5.2. Sobre el objeto integral

Se planteó a los estudiantes la siguiente situación – problema:

Enunciado de la segunda situación:

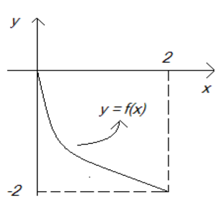
Las gráficas que aparecen a continuación corresponden a las funciones indicadas. En cada caso determina el valor de la integral que se te pide.

1) $\int_0^4 f(x)\,dx$



En caso de no poder hacerlo, explica por qué no puedes.

2) $\int_0^2 f(x)\,dx$,



Calcula el valor de esta integral sabiendo que el área de la región sombreada es $\frac{1}{4}$.

En caso de no poder hacerlo, explica por qué no puedes.

Las respuestas de los estudiantes:

En el caso de la primera integral, que se le aplicó a 60 individuos, entre profesores y estudiantes, 32 optaron por resolverlo utilizando un procedimiento algorítmico, determinando primero la ecuación de la recta de la figura mostrada y después aplicando el teorema fundamental del cálculo; 14 lo hicieron calculando el área; 7 usaron ambos procedimientos; y 7 no resolvieron el problema.

Este es un ejemplo de los que optaron por resolverlo utilizando un procedimiento algorítmico (Figura 1).

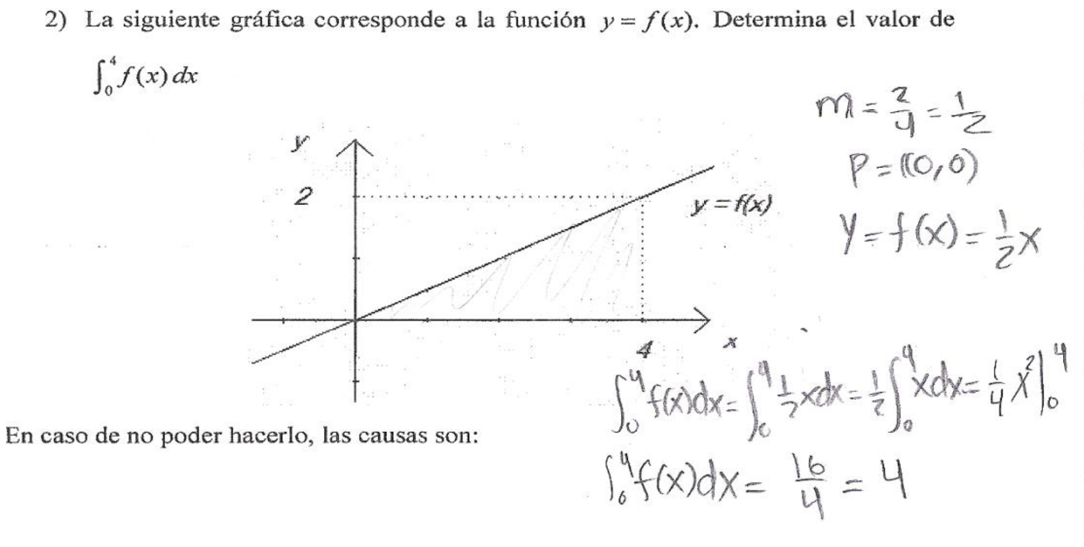


Figura 1. Solución algorítmica

Entre los que no resolvieron el problema, uno dijo explícitamente:

> "No identifico bien la función, no sé qué es lo que tengo que antiderivar para empezar a trabajar".

En el caso de la segunda integral el problema fue aplicado a 56 participantes y de éstos, hubo 10 que asignaron una expresión analítica a la función y la integraron, 15 que no respondieron el problema. De los restantes 31, 20 dieron una respuesta con valores positivos y sólo 11 respondieron correctamente.

Un ejemplo de las respuestas en las que asignaron una expresión analítica a la gráfica para poder utilizar un procedimiento algorítmico para calcular el valor de la integral es el siguiente (Figura 2).

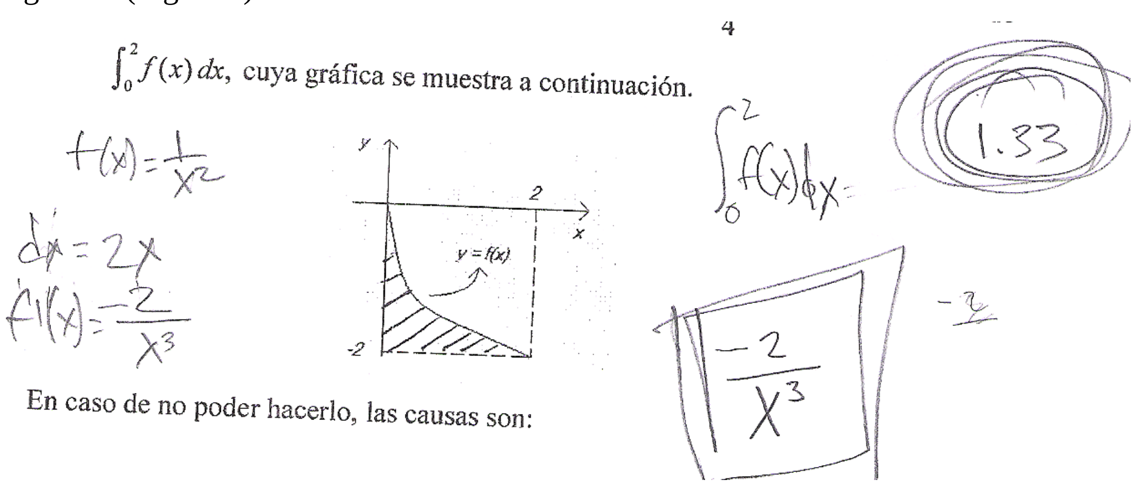


Figura 2. Expresión analítica

El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes

En la primera gráfica, resulta evidente que quienes primero obtuvieron la expresión analítica de la recta para calcular el valor de la integral, que *integrar significa antiderivar* y esto se ve reforzado al ver el caso del estudiante que dice que no sabe qué es lo que tiene que antiderivar por no identificar la función.

En el caso de la segunda integral, se pone de manifiesto, de nueva cuenta, que para muchos estudiantes, el significado que tienen de la integral de una función los hace considerar que para determinar el valor de una integral es necesario tener una expresión analítica de una función la cual debe antiderivar y luego evaluar en los extremos del intervalo, lo cual muestra el sistema de prácticas que ha construido.

En particular, en este segundo caso, nos preguntamos qué fue lo que llevó al estudiante que realizó este proceso, a considerar la función, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Sobre esto primero conjeturamos que se debió al hecho de que dicha función vale $\frac{1}{4}$ cuando $x = 2$. Sin embargo, como lo que hizo fue derivar dicha función y al hacerlo obtuvo $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, pensamos que tal vez buscaba una función cuya antiderivada fuera una función que al evaluarla en $x = 2$ valiera $\frac{1}{4}$, es decir, que tal vez la función $y = \frac{1}{x^2}$ la consideró como la antiderivada de la función que necesitaba. En ningún caso pudimos interpretar cómo obtuvo el 1.33 que parece haber considerado como el valor de la integral.

Citamos este caso tratando de ilustrar otra manera en que el significado de un objeto matemático, en este caso el objeto *integral de una función*, entendido como un sistema de prácticas operativas, se convierte en un obstáculo al tratar de resolver un problema en otro contexto.

6. Conclusiones y reflexiones finales

El haber utilizado las premisas básicas del EOS como referente teórico, asumiendo que la matemática es una construcción humana y que los objetos matemáticos son de naturaleza pragmática, lo cual equivale a decir que el objeto emerge de un sistema de prácticas creado para analizar y resolver cierto tipo de situaciones problema, en el análisis que hemos hecho del desarrollo de la matemática, fue especialmente importante para llegar a las conclusiones y reflexiones que, en forma resumida, presentamos a continuación:

a) El análisis hecho del origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos nos permitió fortalecer nuestra convicción de la validez de las premisas básicas del EOS que ya hemos enunciado, esto es, quedó claro que éstos son creaciones humanas y que esencialmente son sistemas de prácticas que fueron surgiendo al tratar de entender y resolver una serie de situaciones problemáticas que se iban presentando.

b) En particular, el analizar el origen y desarrollo de objetos matemáticos tales como: cantidad, número, infinitésimo, límite, derivada, integral, etc., nos ha permitido valorar la eficacia de las herramientas conceptuales y metodológicas utilizadas para llevar a cabo dicho análisis.

c) Un constructo teórico, especialmente útil para la Didáctica, es el de *obstáculo epistemológico* (Brousseau, 1983; Sierpinska, 1985) ya que ayuda a entender las dificultades que tienen los estudiantes para modificar una concepción previamente construida y proporciona elementos para el diseño de estrategias didácticas para superarlos.

d) La investigación que se ha realizado en el campo de la Epistemología sobre el origen y desarrollo de la Matemática (Artigue, 1991), ha sido de gran utilidad en Didáctica de la Matemática pues consideramos que permite identificar elementos que ayudan a comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

e) Conocer y analizar las situaciones que dieron lugar al surgimiento de los sistemas de prácticas que constituyen los significados de los objetos matemáticos considerados como emergentes de dichas prácticas (Font, Godino y Gallardo, 2013), así como las dificultades que enfrentaron y las estrategias y caminos que se siguieron para superarlas, ayuda a la comprensión de las dificultades que enfrentan los alumnos cuando se espera que dominen con cierta eficacia determinados conceptos y procedimientos matemáticos. Además, dicho estudio también nos brinda recursos que nos permiten orientar de mejor manera la actividad de los estudiantes para que puedan superar, con mayor eficacia, dichas dificultades.

f) Esto no significa de ninguna manera, que consideremos que en el aula escolar deba reproducirse el proceso histórico de construcción del conocimiento, sino que, este proceso es una lección que debe tenerse presente al diseñar los planes de enseñanza orientados a generar procesos de aprendizaje. Somos conscientes de que dichos procesos de aprendizaje los desarrollarán los alumnos, pero que será el profesor quien los conduzca y los coordine.

g) Esta reflexión nos lleva a considerar que el papel del profesor, lejos de ser el de un presentador, a través de la exposición, de los objetos matemáticos, debe ser el de un diseñador de situaciones problémicas que se ubiquen en la zona de desarrollo potencial de los alumnos y que provoquen y estimulen su actividad intelectual. El propósito es que mediante dicha actividad emerjan los objetos matemáticos pretendidos, cuyos significados serán esencialmente sistemas de prácticas que se irán desarrollando con la actividad y que el profesor, además de diseñarla, deberá conducirla y orientarla.

h) La presentación en la escuela de la matemática como un cuerpo de conocimientos acabado, lógicamente estructurado, partiendo de la premisa de que es posible apropiarse de ellos por un simple acto de transmisión del conocimiento y, que una vez comprendido el significado formal de los objetos matemáticos, se estará en condiciones de utilizarlos eficazmente en el análisis, interpretación y resolución de problemas en diferentes y variados contextos, no parece ser una buena estrategia de enseñanza. Los resultados que se obtienen con este modelo didáctico están muy alejados de los esperados, aunque por lo general pretende explicarse este fracaso, argumentando que es consecuencia de la irresponsabilidad de los estudiantes y de su falta de conocimientos previos.

Referencias

Artigue, M. (1991). Epistemologie et didactique. *Recherches en Didactique des*

Mathematiques, *10* (2-3), 241-286.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2).

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124. Frend, W. (1796). *The principles of algebra*. London.

Frend, W. (1796). *The principles of algebra*. London.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor*. México:Trillas.

Kline, M. (2000). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI editores.

Sierpinska, A. (1985). La notion d'obstacle epistemologique dans I'enseignement des mathematiques. *Actes de la 37e Rencontre de la C.I.E.A.E.M*, 73-95.