Hipersuperficies y operador de Dirac

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de D. Sebastián Montiel Gómez, para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

Fue defendida el día veintiocho de abril de dos mil tres ante el tribunal formado por los doctores Dr. D. Pedro Luis García Pérez, Dra. Dª Helga Baum, Dr. D. Oussama Hijazi, Dr. D. Manuel Barros Díaz y Dr. D. Francisco Urbano Pérez–Aranda, obteniendo la calificación de sobresaliente *cum laude* por unanimidad.

Desde estas líneas, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a Sebastián Montiel, director de esta Memoria y verdadero artífice de la misma, por su ayuda desinteresada y constante, por su paciencia con quien no sabe, por enseñarme a disfrutar de la Geometría y por su buen consejo en todo momento.

Mi recuerdo más grato hacia mis compañeros y amigos del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, especialmente hacia mis compañeros de despacho, con quienes compartí una de las más dulces etapas de mi vida.

Deseo dar las gracias a mi familia por su cariño, apoyo y comprensión, y sobretodo a mi esposa Mª José, a quien le he robado todos y cada uno de los segundos que aquí quedan reflejados.

Esta Memoria está dedicada al recuerdo de mi madre, Mª Dolores,

y en agradecimiento a mi padre, Antonio,

por su dedicación a nuestra familia.

Índice

Introducción

Las ideas y resultados que aparecen en la presente Memoria se pueden enmarcar dentro del campo de interacción entre el Análisis Espectral de Operadores y la Geometría Diferencial. Concretamente se sitúan dentro de los intentos recientes de utilizar un operador clásico (aparecido en 1927) de la Física, el operador de Dirac, como herramienta de la Teoría de Subvariedades. En principio podría parecer extraño que este operador diferencial de primer orden haya sido prácticamente desconocido por los geómetras de subvariedades, siendo así que el operador de Laplace, un operador de segundo orden íntimamente relacionado con él, ha sido profusamente utilizado en este contexto. La razón puede ser que el operador de Laplace está definido sobre cualquier variedad de Riemann y actúa sobre funciones, mientras que la posibilidad de tener en una variedad de Riemann un operador de Dirac depende de algunos aspectos sutiles de su estructura topológica y, en el caso de tenerlo, actúa sobre secciones de un fibrado vectorial no trivial y no demasiado conocido.

En ese sentido, aspiramos a que esta Memoria pueda contribuir a la difusión del interés por este operador entre los geómetras, pues estamos convencidos de que, en un futuro próximo jugará un papel tan importante en la Geometría de Subvariedades como el que ya juega en la Física o en la Topología Algebraica.

Está claro que el operador de Laplace asociado a la métrica de una variedad de Riemann M, que actúa sobre las funciones diferenciables definidas sobre ella, es el ejemplo básico de operador elíptico de segundo orden sobre la variedad. Este operador juega un papel fundamental en la Física, en la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales y en el estudio del Análisis Global y de las propiedades geométricas globales de cualquier variedad de Riemann. Es también un operador formalmente autoadjunto con respecto al producto L^2 de funciones y, por tanto, cuando M es compacta es un operador elíptico y autoadjunto. La Teoría Espectral elemental nos dice entonces que su espectro es una sucesión no decreciente del tipo siguiente:

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \nearrow +\infty.$$

Los trabajos de investigación sobre las propiedades espectrales de las variedades de Riemann se hicieron bastante frecuentes a partir de los años sesenta del pasado siglo. La referencia clásica para confirmar este extremo ha sido, durante mucho tiempo, el libro de Berger, Gauduchon y Mazet [BGM], aunque ahora se deben consultar a este respecto el más reciente de Chavel [Ch] y el de Bérard [Ber], que incluye una magnífica y exhaustiva bibliografía. Se trata, en estos trabajos, de obtener información sobre la relación entre esta secuencia de números y la geometría de la variedad. Desde un punto de vista físico, estaríamos tratando de escuchar la forma de la variedad (ver [K, GWW]), o sea, buscando la relación entre los tonos fundamentales emitidos por la variedad y la manera en la que ella se curva. Normalmente las soluciones fundamentales de la ecuación de ondas sobre una variedad de Riemann se suelen asociar con el sonido, aunque podrían de igual modo ser interpretadas como ondas luminosas, o en general, como campos de tipo bosónico. En este sentido, la información sobre el espectro se podría también entender como referida a la relación entre la forma y el tipo de luz que puede emitir la variedad. También se persigue, en los trabajos a que nos referimos, caracterizar, por un comportamiento especial de sus valores propios o de sus funciones propias, a aquellas variedades de Riemann dotadas de una geometría, o sea, de un tensor de curvatura más simple.

Uno de los primeros, y más nítidos, teoremas sobre el espectro del operador de Laplace de una variedad es el de Lichnerowicz-Obata (ver [Li1, Ob]), que proporciona una estimación inferior en términos del ínfimo de la curvatura de Ricci. Lo enunciaremos como un teorema de comparación con la esfera unidad, para ayudarnos de ese modo a entender cuál es la naturaleza de este tipo de resultados.

Sea M una variedad de Riemann compacta de dimensión n y cuya curvatura de Ricci satisface $\mathrm{Ric} \geq n-1$*. Entonces el primer valor propio no nulo de su operador de Laplace cumple la desigualdad*

$$\lambda_1 \geq n$$

y la igualdad se da si y sólo si M es isométrica a la esfera de radio uno.

La desigualdad se debe a Lichnerowicz y la caracterización de la igualdad a Obata. De hecho la igualdad se alcanza sólo cuando las funciones propias asociadas a λ_1 son soluciones sobre la variedad de la llamada ecuación de Obata (ver [Ob]). Y esta ecuación tiene soluciones no triviales, como demostró ese autor, sólo en las esferas. Bastante tiempo más tarde, en 1976, Reilly [Re] consiguió generalizar ese teorema a variedades con borde no vacío, usando una brillante adaptación al caso con borde de la llamada *técnica de Bochner* (ver [Wu]). Hay que resaltar que, para poder hablar de espectro en el caso con borde, es necesario trabajar con funciones que satisfagan cierta condición de frontera. Dos son las condiciones habituales para el operador de Laplace (ver, por ejemplo, [Be, Ch]): la condición de Dirichlet (funciones que se anulan sobre el borde) y la de Neumann (funciones con derivada normal nula en el borde). Concretamente, Reilly demostró el siguiente resultado.

Sea M una variedad de Riemann compacta de dimensión n cuya curvatura de Ricci cumple $\mathrm{Ric} \geq n-1$ *y cuyo borde no vacío ∂M tiene curvatura media no negativa respecto del normal interior. Entonces el primer valor propio no nulo de su operador de Laplace, sujeto a la condición de Dirichlet, cumple la desigualdad*

$$\lambda_1 \geq n$$

y la igualdad se da si y sólo si M es isométrica a la semiesfera de radio uno.

A mediados de los años setenta del siglo pasado comenzó el interés por averiguar qué particularidades presentaba el espectro del operador de Laplace en las subvariedades. Por supuesto, las propiedades estudiadas se refieren al operador de Laplace asociado a la métrica inducida en la subvariedad por la estructura riemanniana del espacio ambiente. Se pueden citar muchos geómetras destacados que han trabajado a menudo en este tema, por ejemplo, Bleecker, Weiner, Reilly, B.Y. Chen, Ogiue, P. Li, Yau o A. Ros. Los problemas que todos estos autores han tratado son, como en el caso general, de dos tipos. En primer lugar, se trata de obtener información acerca del espectro del operador de Laplace Δ sobre una subvariedad compacta Σ inmersa en una variedad de Riemann dada. Los espacios ambientes que se consideran son casi siempre variedades de Riemann con un tensor de curvatura no demasiado complicado: espacios euclídeos, esferas, espacios proyectivos y otros espacios simétricos. Se busca, por supuesto, información sobre tales valores propios que se exprese en términos de la geometría extrínseca de la subvariedad, esto es, en términos de su segunda forma fundamental, su curvatura media, etc. En segundo lugar, se intenta caracterizar por un comportamiento peculiar del espectro a las subvariedades con segunda forma fundamental más simple.

Vamos a poner también un ejemplo del tipo de resultados que se persiguen y se obtienen en este contexto de la geometría de subvariedades. Una vieja, y fácil, observación de Takahashi [Ta] señalaba que la función vector de posición $\phi : \Sigma \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ de una hipersuperficie minimal de la esfera unidad es propia, para el valor propio $n = \dim \Sigma$, para el operador de Laplace de la métrica inducida en Σ^n. En 1982, Ogiue y Yau suscitaron, independientemente, la siguiente cuestión (ver [Y, Og]): ¿qué se puede decir acerca de las hipersuperficies minimales inmersas en una esfera unidad para las cuales su dimensión es exactamente el primer valor propio no nulo del operador de Laplace? Son las llamadas *hipersuperficies inmersas por los primeros valores propios.* Yau, de hecho, fue un poco más allá de la pregunta y conjeturó lo siguiente:

> *Para una hipersuperficie minimal compacta embebida (es decir, inmersa sin autointersecciones) en la esfera unidad S^{n+1}, su dimensión n debe ser el primer valor propio de su operador de Laplace.*

Hasta ahora no sabemos si esa afirmación es cierta. La mejor aproximación a una posible demostración de la conjetura la consiguieron Choi y Wang [CW] en 1983, retomando y refinando el método de Reilly.

> *Sea Σ una hipersuperficie minimal compacta embebida en una variedad de Riemann completa de dimensión $n+1$ cuya curvatura de Ricci satisface*

Ric $\geq n$. *Entonces el primer valor propio no nulo de su operador de Laplace satisface*

$$\lambda_1 > \frac{n}{2}.$$

Montiel y Ros [MR1] estudiaron, en 1986, el caso de la esfera de dimensión tres. Era ya conocido el resultado de Almgren [Alm] que demostraba que toda superficie compacta de género cero inmersa de forma minimal en S^3 debía ser un ecuador. Ellos se ocuparon del caso de género uno.

Un toro minimal inmerso en S^3 *por las primeras funciones propias debe ser congruente al llamado toro de Clifford*

$$\{(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2 \,/\, |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1/2\}.$$

No sabemos qué ocurre para géneros más altos.

En la última década, algunos geómetras de subvariedades, como los del grupo de la Technische Universität de Berlín, Pinkall, Ferus, Taimanov y otros (ver [BFLPP, FLPP, T]) y algunos de nuestra Universidad, como S. Montiel (ver [HMZ1, HMZ2, HMZ3, HM]), se han visto llevados a estudiar diversos operadores de primer orden, de tipo Dirac, que surgen naturalmente en ciertos problemas de la geometría extrínseca de superficies, principalmente aquellos relacionados con la geometría conforme, tales como la conjetura de Willmore. Incluso el larguísimo trabajo de Schmidt [Schm], en el que se afirma haberla resuelto, usa de forma determinante el análisis de operadores de tipo Dirac. Por otro lado, algunos especialistas en el operador de Dirac, como Bär, Friedrich o Hijazi han comenzado a interesarse por las particularidades que presenta este operador en las subvariedades (ver [Am, Bä2, AF]).

El operador de Dirac es un operador diferencial elíptico de primer orden que desempeña un papel cada vez más importante en la Física moderna y en las Matemáticas. A pesar de ello, no apareció en el ámbito de la Geometría de Riemann hasta 1962. Por esa fecha, Atiyah y Singer [AS] se arreglaron para definir una versión global del operador de Dirac sobre algunas variedades de Riemann orientables. Lo hicieron venciendo resistencias tan fuertes como los prejuicios de Élie Cartan que, todavía en 1937, en su libro *La théorie des spineurs* [C2], decía lo siguiente:

Les difficultés (rencontrées quand on a voulu étendre les équations de Dirac de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale) sont insurmontables si l'on veut conserver la technique classique de la Géométrie Riemannienne: il est impossible, un système de coordonnées étant donné dans l'espace-temps, de représenter... un champ de spineurs par un nombre fini de composantes...

El operador de Dirac clásico, en los espacios de curvatura nula, había sido inventado en 1928 por el físico P.A.M. Dirac [D] como una raíz cuadrada del operador de ondas u operador de D'Alembert. Su objetivo era dar una descripción cuántica de los electrones teniendo en cuenta los avances recientes de la Teoría de la Relatividad Especial. Quería hacer compatibles la ecuación de Klein-Gordon relativista o ecuación de ondas y la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica. La primera de ellas (escribimos su versión para masa nula)

$$\Box u = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \qquad u : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}, \quad M \subset \mathbb{R}^3$$

es invariante por transformaciones de Lorentz, es de segundo orden en todas sus variables y sus soluciones pueden desarrollarse, bajo condiciones de frontera convenientes, en serie de *tonos fundamentales*

$$u(t,p) = f(t)\phi(p) \qquad f'' + \lambda f = 0, \quad \Delta\phi + \lambda\phi = 0, \quad \lambda \geq 0,$$

que involucran los valores propios y las funciones propias del operador de Laplace. La segunda ecuación citada

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi = 0 \qquad \psi : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{C}, \quad M \subset \mathbb{R}^3$$

es invariante por transformaciones de Galileo, es de primer orden en el tiempo y sus soluciones se desarrollan en serie de *estados puros*

$$\psi(t,p) = f(t)\phi(p) \qquad f' + i\lambda f = 0, \quad \Delta\phi + \lambda\phi = 0, \quad \lambda \geq 0.$$

El hecho de que, en este segundo caso, se consideren funciones que toman valores complejos permite que las soluciones exponenciales para f sean acotadas y las longitudes $|\psi|^2$ puedan interpretarse como distribuciones de probabilidad. Ya que los postulados relativistas concedían cierta equivalencia entre coordenadas temporales y espaciales, Dirac buscó una ecuación de primer orden en las cuatro variables

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} + D\psi = 0 \qquad D\psi = \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$$

cuya iteración diera lugar al operador de D'Alembert. Ello equivale a que $D^2 = -\Delta$ y esto es, a su vez, equivalente a que los coeficientes A_i cumplan

$$A_i A_j + A_j A_i = -2\delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Por supuesto, no existen números complejos que satisfagan tales relaciones. Pero sí existen matrices complejas de orden dos que lo hacen. Por ejemplo, las llamadas *matrices de Pauli*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Con esa elección de coeficientes, las funciones ψ sobre las que se aplica D no pueden tomar valores reales ni complejos sino que deben ser funciones con valores en $\mathbb{C}^2$. Estos son los llamados *campos de espinores* y el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ en el que toman valores es el espacio de *espinores* de $\mathbb{R}^3$. Unos y otros deben su nombre a W. Pauli [P], que se sirvió de ellos para modelar el momento angular interno de los electrones, el llamado *espín*, pero su existencia ya había sido puesta de manifiesto por el mismo Cartan [C1] en 1913, al estudiar representaciones de grupos.

Los físicos encontraron, sin embargo, dificultades para combinar la ecuación de primer orden de Dirac $D\psi = 0$ para el electrón relativista (neutrino, en este caso de masa nula) con las necesidades de la Relatividad General, ya que las componentes de los espinores ψ no se transforman como las de un vector o un tensor cuando uno cambia de coordenadas en el espacio $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, en una primera aproximación, no aparentaban tener significado geométrico alguno. Su estructura matemática es bastante sutil y sigue provocando, incluso en nuestros días, cierta reserva entre los principiantes. Signo de ello es el muy reducido número de monografías dedicadas a este tema: las antiguas [C2] y [Chev], la exhaustiva [LM], la muy reciente [Fr2] y la muy esperada [BHMM].

El problema de dar carta de naturaleza a los espinores en variedades de Riemann o de Lorentz de curvatura y topología no triviales fue resuelto, como hemos dicho antes, en 1962 por Atiyah y Singer en sus trabajos sobre el Teorema del Índice [AS]. Usaron como herramienta para conseguirlo la maquinaria de fibrados principales y sus conexiones que había sido inventada en los años cincuenta. Usando este lenguaje, el marco en el que anteriormente hemos introducido el operador de Dirac, se traduciría como sigue. Tenemos un fibrado vectorial complejo $\mathbb{S}M = M \times \mathbb{C}^2$ (de hecho, un fibrado trivial) dotado con un producto hermítico $(\ ,\ )$ (el usual sobre las fibras) y una derivación covariante ∇ (también la trivial) que paraleliza ese producto. Las matrices de Pauli A_i proporcionan una multiplicación fibra a fibra de vectores por espinores $\gamma : TM = M \times \mathbb{R}^3 \to \mathrm{End}(\mathbb{S}M) = M \times M_{\mathbb{C}}(2)$ dada por

$$\gamma(u_1, u_2, u_3) = u_1 A_1 + u_2 A_2 + u_3 A_3 = \begin{pmatrix} iu_3 & u_1 + iu_2 \\ -u_1 + iu_2 & -iu_3 \end{pmatrix},$$

que actúa por medio de transformaciones antihermíticas de traza cero. Este producto se llama *multiplicación de Clifford* a causa de las relaciones

$$\gamma(u)\gamma(v) + \gamma(v)\gamma(u) = -2\langle u, v\rangle I,$$

que implican que se puede extender a una representación del álgebra de Clifford compleja construida sobre $\mathbb{R}^3$ sobre el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$. Esta representación es irreducible y es compatible con la derivación covariante en el sentido de que

$$\nabla_u \gamma(X)\psi = \gamma(\nabla_u X)\psi + \gamma(X)\nabla_u \psi,$$

donde la segunda ∇ representa la conexión (trivial) sobre los campos de vectores definidos en el espacio euclídeo. Con este lenguaje el operador de Dirac D no es más que la contracción de la derivación covariante ∇ y de la multiplicación de Clifford γ, esto es,

$$D\psi = \sum_{i=1}^{3} \gamma(e_i)\nabla_{e_i}\psi,$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal cualquiera de $\mathbb{R}^3$.

Atiyah y Singer encontraron una débil obstrucción topológica para que una variedad orientable M pudiera ser dotada de una estructura geométrica como la que acabamos de describir para un abierto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. O sea, en contraste con lo que ocurre para el operador de Laplace, no se puede definir un operador de Dirac sobre una variedad de Riemann cualquiera, sino sólo sobre las llamadas *variedades espinoriales*, aquellas cuya segunda clase de Stiefel-Whitney, que habita en el grupo de cohomología $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, se anula. Sólo en ellas se puede definir el fibrado espinorial $\mathbb{S}M$ con las estructuras señaladas anteriormente. De cualquier forma, se debe tener presente que los espacios ambientes más comunes de la geometría de subvariedades, tales como espacios euclídeos, esferas, espacios hiperbólicos reales y algunos espacios proyectivos reales, complejos y cuaterniónicos, satisfacen esta condición. Sobre tales variedades se tiene un *fibrado espinorial* hermítico $\mathbb{S}M$ con una derivación covariante ∇ y una multiplicación de Clifford $\gamma : TM \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}M)$ que, en cada punto $p \in M$, proporciona una representación irreducible del álgebra de Clifford sobre T_pM sobre el espacio complejo $\mathbb{S}_pM$. Además ∇, γ y el producto hermítico satisfacen ciertas relaciones de compatibilidad entre ellos. Con tales ingredientes, sobre una variedad de Riemann espinorial se puede definir el *operador de Dirac* que lleva secciones del fibrado $\mathbb{S}M$ en secciones del mismo fibrado, de la forma siguiente

$$D\psi = \sum_{i=1}^{n} \gamma(e_i)\nabla_{e_i}\psi,$$

donde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ es una base local ortonormal. Está claro que D es un operador diferencial de primer orden. Hay dos propiedades suyas que surgen de forma inmediata de la definición. La primera es que, si $p \in M$, $u \in T_pM$ y $\sigma(D)$ es el *símbolo principal* de D, se tiene que $\sigma(D)(u) : \mathbb{S}_pM \to \mathbb{S}_pM$ está dado por

$$(\sigma(D)(u))\xi = i\gamma(u)\xi, \qquad \xi \in \mathbb{S}_pM.$$

Por lo tanto, si u es no nulo, $\sigma(D)(u)$ es un isomorfismo porque $\gamma(u)^2 = -|u|^2 I$. Es decir, el operador de Dirac D es *elíptico*. La segunda propiedad es que D es *formalmente autoadjunto* respecto del producto L^2 de campos de espinores sobre M. En efecto, el teorema de la divergencia implica que

$$\int_M (D\phi, \psi) = \int_M (\phi, D\psi)$$

para cada par de campos ϕ y ψ con soporte compacto. Como consecuencia, si la variedad M es compacta, el operador de Dirac es un operador elíptico y autoadjunto de primer orden, de forma que tiene como espectro una sucesión del tipo

$$-\infty \swarrow \cdots \leq \lambda_{-k} \leq \cdots \leq \lambda_{-1} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \nearrow +\infty,$$

donde $\lambda_0 = 0$ puede o no estar en el espectro. Por supuesto, el objetivo principal de la Teoría Espectral del operador de Dirac es recabar información sobre estos valores propios en términos de la geometría de M. Este tema de estudio fue iniciado por Lichnerowicz en los años sesenta del siglo pasado y continuado por Bourguignon, Friedrich, Baum, Hijazi, Bär y otros, pero no ha conseguido ni el volumen de trabajos ni la popularidad de que ha gozado el espectro del operador de Laplace. Probablemente esto es así, como ya comentamos antes, por las reticencias que ocasiona el trabajoso aparato algebraico y topológico necesario para definir este operador sobre una variedad de Riemann. Sin embargo, como pondremos ahora de manifiesto, el operador de Dirac saca a la luz aspectos más ocultos de la geometría de la variedad y, sobre todo, está íntimamente relacionado con los aspectos conformes de esa geometría. Por usar otra vez el punto de vista físico, se trataría ahora de obtener información sobre la forma de la variedad bombardeándola con neutrinos o electrones en vez de con fotones u otro tipo de campos bosónicos. Es decir, cambiar el operador de Laplace por el operador de Dirac podría interpretarse, de alguna forma, como cambiar el microscopio óptico por un microscopio electrónico para observar la variedad.

Como se vio al comentar el teorema de Lichnerowicz-Obata referente al operador de Laplace, hay una relación clara entre ese operador y la curvatura de Ricci de la variedad. También fue Lichnerowicz [Li2] quien sacó a la luz la estrecha relación, quizás ya conocida por Schrödinger, entre el operador de Dirac y el invariante riemanniano más débil: la curvatura escalar. De esta relación él extrajo la siguiente conclusión:

> *Si una variedad de Riemann espinorial compacta tiene curvatura escalar positiva, entonces no tiene más campos de espinores armónicos que los triviales. Es decir, la única solución de la ecuación $D\psi = 0$ es el campo $\psi = 0$.*

Como consecuencia del Teorema del Índice de Atiyah y Singer, el $\hat{A}$-género de la variedad ha de anularse. De esta forma se encontró la primera obstrucción topológica a que una variedad (espinorial) soporte una métrica de Riemann con curvatura escalar positiva. Explotando en profundidad las técnicas iniciadas por Lichnerowicz, Gromov y Lawson [GL], en los años ochenta, encontraron otras obstrucciones de diversa naturaleza a la existencia de métricas completas de curvatura escalar positiva o no negativa en variedades espinoriales no compactas.

El resultado de Lichnerowicz sobre no existencia de espinores armónicos se podría haber enunciado diciendo que, en una variedad de Riemann espinorial compacta con curvatura escalar positiva, $\lambda_0 = 0$ no es valor propio del operador de Dirac. Parecía, por lo tanto, plausible la posibilidad de encontrar una cota inferior para los valores propios no negativos de D en función de la curvatura escalar de la variedad. Esta estimación fue hallada por Friedrich [Fr1] en 1980, que demostró el resultado que sigue:

Sea M una variedad de Riemann espinorial compacta de dimensión n cuya curvatura escalar satisface la desigualdad $R \geq n(n-1)$. Entonces el valor propio del operador de Dirac con menor valor absoluto cumple

$$|\lambda_1| \geq \frac{n}{2}.$$

La igualdad se da si y sólo si el espacio propio asociado al valor propio que alcanza la igualdad está formado por campos de espinores de Killing, es decir, por campos de espinores ψ que son soluciones de la ecuación de primer orden sobredeterminada

$$\nabla\psi = -\frac{\lambda_1}{n}\gamma\psi.$$

O sea, si la curvatura escalar está minorada por la de una esfera de la misma dimensión que la variedad, también el espectro del operador de Dirac está minorado por el de la esfera, ya que $\pm n/2$ son los dos valores propios de menor valor absoluto para S^n. La igualdad se alcanza sólo si existen campos de espinores que son soluciones no triviales de la ecuación de Killing, que sería el análogo espinorial a la ecuación de Obata. Hay una diferencia ahora que hace mucho más interesante el caso espinorial: existen variedades de Riemann espinoriales compactas, aparte de las esferas, que tienen campos de espinores de Killing no triviales. Sus recubridores universales fueron determinados por Bär [Bä1] en 1993 e incluyen, por ejemplo, variedades nearly-Kähler que no son de Kähler y, en dimensión impar, muchas variedades de Sasaki.

La estimación inferior de Friedrich es inmejorable, al menos desde el punto de vista de la Geometría de Riemann. Sin embargo, en 1986, Hijazi [Hi1, Hi3] introdujo en el estudio del espectro del operador de Dirac la geometría conforme y obtuvo nuevos e interesantes resultados. El primer geómetra en darse cuenta de la relación entre este operador y la geometría conforme fue Hitchin [Ht] que, en 1974, encontró una cierta propiedad de covariancia de D respecto de los cambios conformes de métrica en la variedad y, como consecuencia, demostró que la dimensión del espacio de campos de espinores armónicos es un invariante conforme. Esta covariancia fue usada por Hijazi para demostrar lo siguiente:

Los valores propios λ del operador de Dirac de una variedad de Riemann espinorial compacta satisfacen la desigualdad

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1,$$

donde μ_1 es el primer valor propio del operador de Yamabe de la variedad.

En el Capítulo 1 de esta Memoria, aun a riesgo de haberlo hecho demasiado largo, hemos pretendido exponer los preliminares algebraicos, topológicos y geométricos necesarios para garantizar la comprensión de los antecedentes de los problemas que tratamos en los Capítulos 2 y 3 siguientes, así como de las herramientas fundamentales que hemos usado para resolverlos. No hemos dado demostraciones, a no ser que ofrezcan alguna novedad o simplificación respecto de las que se suelen encontrar en la bibliografía usual. Asimismo hemos procurado evitar lo que no sea estrictamente necesario, de manera que este Capítulo 1 esperamos que pueda ser una buena primera introducción a la Geometría Espinorial para los que estén interesados en conocerla. En él damos detalles de todos los antecedentes históricos a que nos hemos referido hasta ahora. En sus últimas secciones exponemos, de la forma que nos parece más adecuada a nuestros fines, la relación entre estructuras espinoriales e hipersuperficies, que es el alma de esta Memoria.

Supongamos, en efecto, que Σ es una hipersuperficie orientable de una variedad de Riemann espinorial M de dimensión $n+1$. Como su fibrado normal es trivial, la segunda clase de Stiefel-Whitney de Σ también se anula, o sea, Σ es también una variedad de Riemann espinorial. De la misma forma que el fibrado tangente $T\Sigma$ a la hipersuperficie se ve como un subfibrado de la restricción $TM|_\Sigma$ del fibrado tangente de la variedad ambiente, la restricción $\mathbb{S}M|_\Sigma$ a Σ del fibrado espinorial de M se puede identificar con el fibrado espinorial intrínseco $\mathbb{S}\Sigma$ de la hipersuperficie o con dos copias suyas, según la paridad de $n = \dim \Sigma$. Esto nos permitirá obtener campos de espinores sobre la hipersuperficie restringiendo a ellas los campos de espinores del ambiente. Es importante destacar que esto es así *sólo en el caso de las hipersuperficies*. Cuando se tratan subvariedades de codimensión más alta las cosas se complican bastante (ver, por ejemplo, [Bä2, GM]). Esta identificación entre fibrados espinoriales intrínsecos y extrínsecos permite comparar las multiplicaciones de Clifford y las conexiones de ambos fibrados, que también aparecen relacionadas por medio de la segunda forma fundamental de Σ.

Finalmente se llega a una relación entre los operadores de Dirac D de M y $\mathbf{D}$ de Σ en la que juega un papel determinante la curvatura media H de la hipersuperficie. A lo largo de la Memoria trabajaremos con hipersuperficies Σ que bordean un dominio compacto Ω en la variedad ambiente M. Por el Teorema de Jordan-Brower, éste es el caso de cualquier hipersuperficie compacta embebida en el espacio euclídeo y, en general, en cualquier variedad con primer número de Betti nulo. El Capítulo 1 finaliza con la demostración de la desigualdad siguiente, que será una de nuestras herramientas fundamentales, y a la que llamamos *desigualdad espinorial de Reilly*, por estar inspirada en una análoga para funciones obtenida por ese autor (ver [Re]):

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{4}S|\psi|^2 - \frac{n}{n+1}|D\psi|^2\right) \leq \int_\Sigma \left(\langle \mathbf{D}\psi, \psi\rangle - \frac{n}{2}H|\psi|^2\right), \tag{1}$$

desigualdad que es válida para cada campo de espinores $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Omega)$ sobre el dominio determinado por la hipersuperficie. La igualdad se da si y sólo si el campo de espinores es un campo *twistor*, es decir, satisface la siguiente ecuación de primer orden sobredeterminada que generaliza la ecuación de los campos de espinores de Killing

$$\nabla\psi = -\frac{1}{n+1}\gamma D\psi.$$

En esta desigualdad integral están representadas la geometría del espacio ambiente M por su curvatura escalar S y la geometría del borde Σ por su curvatura media H. Igualmente aparecen los operadores de Dirac D de la variedad y $\mathbf{D}$ de la hipersuperficie. En esta forma fue utilizada por primera vez por Hijazi, Montiel y Zhang [HMZ1].

Hay dos maneras de ver esta desigualdad integral. La primera de ellas consiste en poner el énfasis en su miembro izquierdo. Desde ese punto de vista es útil para estudiar el operador D de la variedad con borde Ω, bajo condiciones de frontera convenientes. A pesar de que, en el caso del operador de Laplace, está muy claro, como ya comentamos, cuáles son las condiciones de frontera a imponer, no lo está tanto para operadores elípticos más generales. El estudio de condiciones de frontera naturales a imponer para operadores elípticos de orden arbitrario fue comenzado quizás por Lopatinsky y Shapiro [Hö, Lo], en los años cincuenta y continuado por Calderón y Seeley [BW, Ca, Se] con la teoría de *operadores pseudo-diferenciales*. Esta teoría nos proporciona los útiles necesarios para saber cuándo una condición de frontera dada para, por ejemplo, el operador de Dirac sobre el dominio Ω, es *elíptica* y, como consecuencia, el problema de frontera correspondiente es de tipo Fredholm con la consiguiente regularidad de las soluciones. En el Capítulo 2, usando toda esta maquinaria analítica y la desigualdad de Reilly espinorial, estudiamos el espectro del operador de Dirac D sobre la variedad con borde Ω bajo cuatro condiciones de frontera diferentes: la condición de Atiyah, Patodi y Singer (APS), una condición de frontera global asociada a la resolución espectral del operador de Dirac $\mathbf{D}$ del borde (ver [APS, HMZ2]); la condición de frontera local asociada a un operador de *quiralidad* (QUI) sobre Ω (ver [FS]); la versión riemanniana de la llamada condición de confinamiento del Instituto de Tecnología de Massachussetts (MIT) (ver [CJJTW, J]); y, finalmente, una nueva condición de frontera global que introdujimos nosotros en [HMR1] modificando la condición APS (mAPS). Aunque las tres primeras condiciones no son nuevas, sólo la primera ha sido estudiada con rigor matemático. Demostramos, usando la teoría de operadores pseudo-diferenciales, que las cuatro satisfacen los criterios de elipticidad de Seeley y dan lugar a problemas de frontera *bien planteados*. Los cuatro resultados correspondientes que enunciamos en los Teoremas 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1 y 2.6.1 de esta Memoria se pueden concentrar como sigue.

Sea Ω una variedad de Riemann espinorial, compacta, con borde no vacío, de dimensión $n+1$ y cuya curvatura escalar S satisface la desigualdad $S \geq n(n+1)$. Suponemos que la curvatura media de la hipersuperficie Σ del borde es no negativa, respecto del normal interior. Entonces:

- *Bajo cualquiera de las condiciones de frontera APS, QUI o mAPS, el espectro del operdor de Dirac D de Ω es una sucesión no acotada ni inferior ni superiormente $\{\lambda_k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ de números reales que satisfacen*
$$|\lambda_k| \geq \frac{n+1}{2}.$$
La igualdad sólo se da para las condiciones QUI y mAPS y, en esos casos, la variedad Ω es isométrica a una semiesfera de radio uno o bien existe en ella un campo de espinores de Killing no trivial y la hipersuperficie del borde Σ es minimal.

- *Bajo la condición MIT, el espectro de D es una sucesión $\{\lambda_k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ no acotada de números complejos, todos con parte imaginaria negativa (o todos positiva) que cumplen*
$$|\lambda_k| > \frac{n+1}{2}.$$

Es bastante interesante que las cuatro condiciones de frontera se comporten, respecto de la igualdad en esta desigualdad de tipo Friedrich para variedades con borde, de formas tan diferentes. Nuestra motivación para estudiar estas condiciones fue observar que, en el caso de las dos condiciones más clasicas APS y MIT, nunca se daba la igualdad. Hay que señalar que, con respecto a la condición mAPS, que nosotros introducimos, todos los dominios determinados en una esfera por hipersuperficies minimales embebidas tienen primer valor propio con valor absoluto $(n+1)/2$. Es decir, el microscopio electrónico aplicado a esos dominios no distingue la forma de los bordes (al menos por lo que respecta al nivel de energía más alto).

Una segunda manera de usar la desigualdad espinorial de Reilly (1) citada más arriba es mirarla desde el miembro de la derecha, o sea, considerar como fundamental la integral en el borde. Se parte entonces de un campo de espinores $\varphi \in \Gamma(\mathbb{S}\Sigma)$ sobre la hipersuperficie del borde y se coloca en la desigualdad un campo $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Omega)$ sobre el interior del dominio que sea solución de un problema de frontera

$$\begin{cases} D\psi = \mu\psi, & \text{sobre } \Omega, \\ B\psi|_\Sigma = B\varphi, & \text{a lo largo de } \Sigma = \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\mu \in \mathbb{C}$ y B es una de las condiciones de frontera elípticas que hemos estudiado en el Capítulo 2. Se trata entonces de controlar el miembro de la izquierda de la desigualdad, es decir, la integral en Ω, para obtener información independiente del campo auxiliar ψ. Para ello es fundamental elegir adecuadamente μ y B en el problema de frontera anterior. Esta estrategia es la que usó Witten en [Wi1] para dar su demostración del Teorema de la Masa Positiva de Schoen y Yau, aunque Reilly fue el que la diseñó en 1977 para el operador de Laplace. Después de ellos la usaron Choi y Wang [CW], para obtener el resultado que citamos al comienzo de esta Introducción; Min-Oo [Mi], para estudiar la rigidez de las variedades asintóticamente hiperbólicas; Ros [Ro], para caracterizar las esferas como las únicas hipersuperficies compactas embebidas en el espacio euclídeo con curvatura escalar constante; y Herzlich [He1, He2], en su aproximación a la conjetura de Penrose. Finalmente, usando la condición de frontera APS, Hijazi, Montiel y Zhang consiguieron encontrar [HMZ1] la siguiente estimación extrínseca.

Sea Σ una hipersuperficie de una variedad de Riemann espinorial que es borde de un dominio compacto de la variedad con curvatura escalar no negativa. Si la curvatura media H de Σ respecto del normal interior satisface

$H \geq \frac{1}{r}$, para algún $r > 0$, entonces el valor propio del operador de Dirac de Σ con menor valor absoluto cumple

$$|\lambda_1| \geq \frac{n}{2r}$$

y la igualdad se da si sólo si H es constantemente $\frac{1}{r}$ y el espacio propio correspondiente está determinado por las restricciones a Σ de los campos de espinores paralelos sobre el dominio Ω.

Este resultado puede verse como una versión extrínseca del teorema de Friedrich y la igualdad se alcanza, aparte de para las esferas dentro del espacio euclídeo, para cualquier solución regular del problema isoperimétrico en una variedad de Calabi-Yau o en una variedad hiperkähleriana. Además, si la variedad ambiente es el espacio euclídeo, la curvatura escalar S^{Σ} de Σ y su curvatura media H están relacionadas de la siguiente forma

$$S^{\Sigma} \leq n(n-1)H^2.$$

Entonces, si $S^{\Sigma} \geq n(n-1)$ se tiene que $H^2 \geq 1$ y, por tanto, $H \geq 1$ respecto del normal interior. El resultado de Hijazi, Montiel y Zhang implica entonces que $|\lambda_1| \geq n/2$. Es decir, esta estimación extrínseca es más fuerte que la desigualdad de Friedrich en el ámbito de las hipersuperficies embebidas en el espacio euclídeo. Los autores obtienen también, como consecuencia, una demostración *espinorial* del Teorema de Alexandrov (ver [Al, MR2]). Posteriores desarrollos de esta estimación, llevados a cabo por los mismos autores en [HMZ3], han conducido a otra estimación inferior del primer valor propio del operador de Dirac de una hipersuperficie que acota un dominio compacto en una variedad de Riemann espinorial con curvatura escalar no negativa, no en términos de su segunda forma fundamental, sino del primer valor propio de un problema de segundo orden que controla la geometría conforme del dominio encerrado: *el problema de Steklov* (ver [Es] y referencias allí). Han obtenido también en [HM] una suerte de *principio holográfico* para las supersimetrías del borde del dominio, derivado de la estimación extrínseca anterior: todos los campos de espinores de Killing del borde son restricciones de campos paralelos del interior, por ejemplo, cuando el interior es Ricci-llano y la curvatura media del borde es no negativa.

Se puede observar que todos los teoremas de comparación para el espectro citados hasta ahora, tanto acerca del operador de Laplace como acerca del operador de Dirac, suponen que o bien la curvatura de Ricci o bien la curvatura escalar son no negativas o están minoradas por una cantidad positiva. Esto es así porque, tanto la desigualdad de Reilly para funciones [Re] como la correspondiente desigualdad espinorial (1) parecen exigir ese tipo de condiciones. Sin embargo, el trabajo que realizamos en el Capítulo 3 de la presente Memoria nos permite modificar esa desigualdad y aplicarla en el caso de variedades ambiente con curvatura escalar minorada por una constante negativa. Aprovechando el trabajo realizado en el Capítulo 2 acerca de la elipticidad de las distintas condiciones de frontera para el operador de Dirac en variedades compactas con borde, resolvemos un problema adecuado y obtenemos la siguiente versión *hiperbólica* de la estimación de Hijazi, Montiel y Zhang (ver [HMR2] y Teorema 3.3.2 de esta Memoria):

> *Supongamos que Σ es una hipersuperficie que acota un dominio compacto Ω dentro de una variedad de Riemann espinorial de dimensión $n+1$ cuya curvatura escalar S está minorada por la del espacio hiperbólico de curvatura -1 y su misma dimensión , o sea, tal que $S \geq -n(n+1)$. Si su curvatura media H respecto del normal interior satisface la desigualdad $H \geq \coth r$, con $0 < r \leq +\infty$, entonces el valor propio de su operador de Dirac con menor valor absoluto cumple*
>
> $$|\lambda_1| \geq \frac{n}{2\sinh r}.$$
>
> *La igualdad obliga a que H sea constantemente $\coth r$ y a que en Ω exista un campo de espinores de Killing imaginario no trivial (por tanto, Ω tiene curvatura de Ricci constante $-n$). Además, en este caso, el espacio propio asociado a λ_1 se genera a partir del espacio de campos de espinores de Killing de Ω.*

Esta estimación inferior es óptima y en la Memoria pondremos ejemplos de hipersuperficies del espacio hiperbólico y de variedades cuyas métricas son un producto de deformación que alcanzan la igualdad. Veremos también que, para hipersuperficies compactas embebidas en el espacio hiperbólico, nuestra estimación mejora la estimación intrínseca de Friedrich en términos de la curvatura escalar y que, de hecho, hay hipersuperficies de este tipo para las cuales sólo nuestra estimación es significativa.

El resto del Capítulo 3 está dedicado a extraer algunas consecuencias geométricas de nuestro teorema de comparación extrínseco para hipersuperficies que bordean dominios compactos en variedades de Riemann espinoriales con curvatura escalar minorada por una constante negativa. La primera de ellas es una generalización del Teorema de Alexandrov en espacios curvados negativamente que, por medios totalmente distintos había sido obtenida por Montiel [M] en 1999. Concretamente, en el Corolario 3.4.2, demostramos:

> *Sea Σ una hipersuperficie que bordea un dominio compacto en un producto de deformación (*warped*) $\mathbb{R} \times_{exp} P$, donde P es una variedad de Riemann espinorial completa que admite un campo de espinores paralelo no trivial (por ejemplo, una variedad llana o una variedad de Calabi-Yau o una variedad hiperkähleriana). Si Σ tiene curvatura media constante, entonces o bien es una esfera geodésica dentro de un espacio hiperbólico (o sea, P es llana en este caso) o bien es una hipersuperficie a altura constante $\{s\} \times P$ (y, en ese caso, P es compacta).*

La Memoria finaliza con la demostración de un principio holográfico que, en su versión más débil y quizás más comprensible, se enuncia para variedades espinoriales compactas con borde no vacío que tienen curvatura de Ricci constante negativa. En efecto, un caso particular de nuestro Teorema 3.5.1 (ver [HMR2]) afirma los siguiente:

> *Sea M una variedad de Riemann espinorial compacta de dimensión $n+1$ que tiene curvatura de Ricci constante $-n$ y cuyo borde no vacío tiene curvatura media no negativa con respecto al normal interior. Entonces cada campo de espinores de Killing real o paralelo sobre el borde es la restricción de un campo de espinores de Killing imaginario definido en todo M.*

Como consecuencia de esto, la Memoria se cierra con los siguientes resultados de unicidad para la ecuación de Einstein:

> *Una variedad de Riemann espinorial completa de dimensión $n+1$ y con curvatura de Ricci constante $-n$ cuyo borde es una hipersuperficie con curvatura media (interior) no negativa e isométrica a una esfera es necesariamente un disco hiperbólico.*

Si una variedad de Riemann espinorial completa sin borde tiene curvatura de Ricci constante negativa y admite una hipersuperficie embebida isométrica a una esfera euclídea, entonces es un espacio hiperbólico.

Capítulo 1

Variedades espinoriales y operador de Dirac

Como detallábamos en la Introducción, en la presente Memoria obtenemos algunos teoremas de comparación sobre el espectro del operador de Dirac en variedades con borde y en hipersuperficies que bordean dominios compactos en variedades riemannianas espinoriales, y los usamos para obtener algunas propiedades geométricas suyas. Este primer capítulo pretende exponer los preliminares necesarios acerca de las estructuras espinoriales sobre variedades, de los fibrados de espinores sobre variedades riemannianas espinoriales y del operador de Dirac y su espectro. Por supuesto, los contenidos que incluimos aquí se pueden encontrar en forma mucho más amplia en la literatura sobre el tema. Pretendemos exponerlos en la forma más rápida y, a nuestro entender, más fácil de asimilar e intentamos evitar las dosis considerables de ambigüedad, y algunas veces de confusión, que se pueden encontrar en los textos habituales. Sólo daremos demostraciones de los resultados más relevantes desde nuestro punto de vista, aunque en todo caso proporcionaremos indicaciones más que suficientes para que el lector pueda desarrollarlas sin demasiado esfuerzo, apoyándose, si fuera necesario en la bibliografía recomendada.

Quizás los mejores textos para introducirse en las bases algebraicas de la geometría espinorial así como en los fundamentos geométricos de la geometría riemanniana espinorial pueden ser [LM, Fr2, Wu].

1.1. Álgebras de Clifford y grupos espinoriales

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y sea q una forma cuadrática sobre V. Llamaremos *álgebra de Clifford* asociada al espacio vectorial métrico V al álgebra

$$Cl\,(V) := \frac{T\,(V)}{I_q\,(V)},$$

donde $T\,(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \ldots$ es el álgebra de tensores sobre V e $I_q\,(V)$ es el ideal bilátero generado por todos los elementos de la forma $x \otimes x + q\,(x)\,1$, con $x \in V$. La composición de la inclusión natural $V \hookrightarrow T\,(V)$ con la proyección sobre el cociente $T\,(V) \to Cl\,(V)$ es un monomorfismo que nos permite ver el álgebra de Clifford $Cl\,(V)$ como el álgebra real generada por el espacio vectorial V junto con las relaciones

$$x \cdot x = -q\,(x)\,1, \ \forall x \in V,$$

las cuales se traducen en relaciones de anticonmutatividad del tipo

$$x \cdot y + y \cdot x = -2q\,(x, y)\,1, \ \forall x, y \in V, \tag{1.1}$$

donde también representamos por q a la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática q.

El espacio vectorial subyacente al álgebra $Cl\,(V)$ es independiente de la métrica q, pues si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces

$$\{v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \ldots \cdot v_{i_k} \ / \ 0 \leq k \leq n, \ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$$

es una base de $Cl\,(V)$. La correspondencia $v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \ldots \cdot v_{i_k} \leftrightarrow v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}$ (donde $\wedge$ representa el producto exterior), define un isomorfismo de espacios vectoriales entre $Cl\,(V)$ y el álgebra exterior de V. Por tanto, $\dim Cl\,(V) = 2^n$. No obstante, se trata de un isomorfismo de álgebras únicamente cuando q es la forma nula.

No es éste el único caso en el que el álgebra de Clifford es fácil de identificar. Por ejemplo, es inmediato ver que las álgebras de Clifford asociadas a los espacios vectoriales métricos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con sus métricas euclídeas) son isomorfas a $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$, respectivamente (donde $\mathbb{H}$ representa es cuerpo de los cuaterniones). En lo sucesivo, representaremos por Cl_n al álgebra de Clifford asociada al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con su métrica euclídea. Entonces $Cl_1 \cong \mathbb{C}$ y $Cl_2 \cong \mathbb{H}$.

Fijado un $x \in Cl\,(V)$ invertible, consideremos la aplicación $Ad_x : Cl\,(V) \to Cl\,(V)$ que asocia a cada $y \in Cl\,(V)$ el producto $Ad_x\,(y) := x \cdot y \cdot x^{-1} \in Cl\,(V)$. Cuando $x = u \in V$ es un vector con $q(u) \neq 0$, las relaciones (1.1) implican que

$$Ad_u\,(v) = -v + 2\frac{q\,(v,u)}{q(u)}u \in V,\ \forall v \in V.$$

Por tanto, Ad_u, restringida a V, es *menos* la simetría q-ortogonal con respecto al plano perpendicular a u. Dado que $Ad_{u_1 \cdot u_2} = Ad_{u_1} \circ Ad_{u_2}$, podemos afirmar que la aplicación

$$u_1 \cdot \ldots \cdot u_k \in Cl\,(V) \mapsto Ad_{u_1 \cdot \ldots \cdot u_k} \in O\,(V)$$

proporciona un homomorfismo entre el grupo

$$\{u_1 \cdot \ldots \cdot u_k \in Cl\,(V)\ /\ u_1, \ldots, u_k \in V,\ q\,(u_i) = \pm 1\}$$

y el grupo ortogonal $O\,(V)$. Llamaremos *grupo espinorial* de V al subgrupo

$$Spin\,(V) := \{u_1 \cdot \ldots \cdot u_{2m} \in Cl\,(V)\ /\ u_i \in V,\ q\,(u_i) = \pm 1,\ i = 1, \ldots, 2m\}$$

del álgebra de Clifford de V. La restricción

$$u_1 \cdot \ldots \cdot u_{2k} \in Spin(V) \mapsto Ad_{u_1 \cdot \ldots \cdot u_{2k}} \in SO\,(V)$$

lleva a $u_1 \cdot \ldots \cdot u_{2k}$ en el producto de las simetrías q-ortogonales asociadas a los vectores $u_1, \ldots, u_{2k}$. Por tanto toma valores en el subgrupo $SO(V) \subset O(V)$. Supongamos que q es no degenerada. Del teorema de Cartan-Dieudonné [ST] se deduce que este homomorfismo es sobreyectivo, pues toda transformación ortogonal directa de un espacio vectorial métrico de dimensión finita n es la composición de un número par de no más de n simetrías, pero no es inyectivo pues $Ad_{-u} = Ad_u$. Tenemos pues un epimorfismo continuo

$$Spin\,(V) \xrightarrow{Ad} SO\,(V)\,. \tag{1.2}$$

Se puede comprobar que su núcleo es $\{1, -1\}$, [Fr2, página 16] o [LM, página 14]. Por lo tanto, $Spin\,(V)$, dotado de la topología inducida del espacio vectorial $Cl\,(V)$, es un recubridor de dos hojas de $SO\,(V)$. Este recubridor es conexo cuando $n \geq 2$ y q es definida positiva porque, en ese caso, los elementos 1 y -1 se pueden unir en $Spin(V)$ por una curva continua. En efecto si $u, v \in V$ son dos vectores unitarios y perpendiculares esa curva podría ser $(\cos t\, u + \sin t\, v) \cdot (\cos t\, u - \sin t\, v)$. Representaremos por $Spin_n$ al grupo espinorial del espacio vectorial métrico $\mathbb{R}^n$. Como el grupo fundamental del grupo especial ortogonal SO_n es $\mathbb{Z}_2$ si $n \geq 3$, $Spin_n$ es, en este caso, el recubridor universal de SO_n. Cuando $n = 2$, SO_2 es la circunferencia $\mathbb{S}^1$, cuyo grupo fundamental es $\mathbb{Z}$. En este caso $Spin_2$ es también isomorfo a $\mathbb{S}^1$.

1.2. Espacios de espinores

Se suelen llamar *espinores*, asociados a V, a los vectores de aquellos espacios sobre los que actúa el álgebra de Clifford $Cl\,(V)$. Desde esta perspectiva, los primeros tipos de espinores que podemos considerar son los propios elementos del álgebra de Clifford, pues ésta actúa sobre sí misma a través de su propio producto, pero no de forma irreducible. Normalmente, reservaremos el término *espinor* para los vectores de los espacios sobre los que actúa *irreduciblemente* el álgebra de Clifford. Ya que la teoría de representación de álgebras es mucho más simple en el caso complejo, es útil introducir la noción de álgebra de Clifford sobre un espacio vectorial métrico complejo.

La complexificación $V_{\mathbb{C}}$ del espacio vectorial métrico real V es un espacio vectorial métrico complejo, considerando la forma cuadrática $q_{\mathbb{C}}$ que extiende a q por linealidad respecto de $\mathbb{C}$. Se define el álgebra de Clifford $Cl\,(V_{\mathbb{C}})$ de forma análoga a como hicimos en el caso real, siendo en este caso una álgebra compleja. No es difícil ver que $Cl\,(V_{\mathbb{C}}) \cong Cl\,(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y que, por tanto, esta álgebra compleja, $Cl\,(V_{\mathbb{C}})$, contiene a $Cl\,(V)$ como subálgebra real. Por ejemplo, Cl_n es una subálgebra real de $\mathbb{C}l_n := Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl\,(\mathbb{R}^n_{\mathbb{C}}) = Cl\,(\mathbb{C}^n)$, donde en $\mathbb{C}^n$ se considera la métrica que extiende al producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^n$ de forma $\mathbb{C}$-bilineal y simétrica.

En el caso más simple, si $n = 1$, el monomorfismo $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ dado por $\gamma(e_1) = (i, -i)$ se extiende a un monomorfismo de álgebras $\gamma : \mathbb{C}l_1 \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, que se ve que es un isomorfismo si uno atiende a las dimensiones de ambos espacios. La subálgebra real Cl_1 no es más que el subespacio $\{(z, \bar{z}) \,/\, z \in \mathbb{C}\}$, que es una subágebra isomorfa a $\mathbb{C}$. Se comprueba inmediatamente que $Spin_1$ es el grupo trivial $\{(1,1)\}$.

Cuando $n = 2$, el monomorfismo de espacios vectoriales complejos $\gamma : \mathbb{C}^2 \to M_{\mathbb{C}}(2)$ dado por

$$e_1 = (1,0) \overset{\gamma}{\longmapsto} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = (0,1) \overset{\gamma}{\longmapsto} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

donde σ_1, σ_2 y $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ son las llamadas *matrices de Pauli*, nos permite identificar el álgebra de Clifford compleja $\mathbb{C}l_2$ con el álgebra de matrices $M_{\mathbb{C}}(2)$. Con esa identificación está claro que la subálgebra real Cl_2 está formada por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, \qquad z, w \in \mathbb{C},$$

que es isomorfa a $\mathbb{H}$, como ya habíamos señalado antes, y el grupo espinorial $Spin_2$ no es más que la circunferencia

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \,/\, z \in \mathbb{C},\ |z| = 1 \right\}.$$

Análogamente el monomorfismo $\gamma : \mathbb{C}^3 \to M_{\mathbb{C}}(2) \oplus M_{\mathbb{C}}(2)$ dado por

$$e_1 = (1,0,0) \overset{\gamma}{\longmapsto} (\sigma_1, -\sigma_1) \quad e_2 = (0,1,0) \overset{\gamma}{\longmapsto} (\sigma_2, -\sigma_2) \quad e_3 = (0,0,1) \overset{\gamma}{\longmapsto} (\sigma_3, -\sigma_3)$$

demuestra que $\mathbb{C}l_3$ es isomorfa a $M_{\mathbb{C}}(2) \oplus M_{\mathbb{C}}(2)$ y, de camino, que Cl_3 corresponde, bajo el correspondiente isomorfismo, a la subálgebra $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ y que el grupo espinorial de orden tres es

$$Spin_3 = \left\{ (A, A) \in M_{\mathbb{C}}(2) \oplus M_{\mathbb{C}}(2) \,/\, A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix},\ z, w \in \mathbb{C},\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\},$$

que es isomorfo al grupo especial unitario SU_2.

Como antes hemos indicado, las representaciones irreducibles de $\mathbb{C}l_n$ son más sencillas que las de Cl_n. En efecto, cada representación compleja de $\mathbb{C}l_n$ se descompone en suma directa de representaciones irreducibles. Si esto se aplica a la representación de

$\mathbb{C}l_n$ sobre sí misma que proporciona la multiplicación por la izquierda, se deduce que el álgebra $\mathbb{C}l_n$ es suma directa de ideales (por la izquierda) minimales suyos. Se demuestra que cada uno de estos ideales tiene dimensión compleja $N = 2^{[n/2]}$ (ver [Fr2]) donde $[\,]$ representa la función parte entera. Elegimos uno de ellos al que representaremos por $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{C}l_n$. Así, para cada n, disponemos de una representación irreducible

$$\gamma_n : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_n)$$

dada por

$$\gamma_n(x)\psi = x \cdot \psi \qquad x \in \mathbb{C}l_n, \psi \in \mathbb{S}_n.$$

A este espacio vectorial $\mathbb{S}_n$ lo denominaremos *espacio de espinores complejos (o de Weyl)* sobre $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que $\mathbb{S}_{2m}$ y $\mathbb{S}_{2m+1}$ son espacios vectoriales isomorfos porque poseen la misma dimensión. Cuando $n = 2m$ es par, γ_{2m} es única salvo equivalencia. De hecho, es un isomorfismo. Sin embargo, cuando $n = 2m+1$ es impar, la restricción de γ_{2m+1} a la subálgebra $\mathbb{C}l^0_{2m+1}$, engendrada por los monomios de grado par, sigue siendo irreducible. Existe otra representación irreducible γ'_{2m+1} de $\mathbb{C}l_{2m+1}$ en $\mathbb{S}_{2m+1}$ y el par $\left(\gamma_{2m+1}, \gamma'_{2m+1}\right)$ proporciona un isomorfismo entre $\mathbb{C}l_{2m+1}$ y $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_{2m+1}) \oplus End_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_{2m+1})$. Estas dos representaciones se caracterizan por las igualdades siguientes

$$\gamma_{2m+1}(\omega) = Id_{\mathbb{S}_{2m+1}}, \quad \gamma'_{2m+1}(\omega) = -Id_{\mathbb{S}_{2m+1}},$$

donde $\omega := i^{[(n+1)/2]} e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \in \mathbb{C}l_n$ es el llamado *elemento de volumen complejo* y donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es cualquier base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^n$.

En el caso par $n = 2m$, como $\omega^2 = 1$, el espacio de espinores se descompone como suma directa

$$\mathbb{S}_{2m} = \mathbb{S}^+_{2m} \oplus \mathbb{S}^-_{2m}, \tag{1.3}$$

de espacios propios de $\gamma_{2m}(\omega)$ correspondientes a los valores propios ± 1. Esta igualdad se conoce como *descomposición quiral* del espacio de espinores y, consecuentemente, se habla de *espinores de Weyl positivos* y *negativos*. Los dos subespacios quirales $\mathbb{S}^{\pm}_{2m}$ tienen la misma dimensión, ya que $\gamma_{2m}(x)$ es un isomorfismo entre ellos, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Examinemos más de cerca los casos $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, para los cuales ya habíamos identificado $\mathbb{C}l_1$, $\mathbb{C}l_2$ y $\mathbb{C}l_3$ como álgebras de matrices. En el caso $n = 1$

es inmediato ver que $\mathbb{S}_1 = \mathbb{C}$ y que $\gamma_1|_{\mathbb{C}} = \gamma$. Está claro que, en los casos restantes, $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_3 = \mathbb{C}^2$. Además $\gamma_{2|\mathbb{C}^2} = \gamma$, o sea,

$$\gamma_2(v_1, v_2) = \gamma(v_1, v_2) = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2$$

para cada $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ y se extiende como un homomorfismo de álgebras a $\mathbb{C}l_2$. Además, ya que $\gamma_2(\omega) = i\gamma(e_1)\gamma(e_2) = i\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, se tiene que la descomposición quiral de $\mathbb{S}_2$ está dada por

$$\mathbb{S}_2^+ = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, z = 0\} \qquad \mathbb{S}_2^- = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, w = 0\}.$$

En el caso de dimensión 3 se tiene que

$$\gamma_3(v_1, v_2, v_3) = \gamma(v_1, v_2, v_3) = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3$$

para cada $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$ y se extiende a $\mathbb{C}l_3$ como un homomorfismo de álgebras. Además γ_3' está determinada por la igualdad

$$\gamma'_{3|\mathbb{C}^3} = -\gamma_{3|\mathbb{C}^3}.$$

Como la esfera S_{n-1} es compacta, cualquier producto hermítico sobre $\mathbb{S}_n$ puede ser simetrizado de forma que los endomorfismos $\gamma_n(u)$ sean transformaciones unitarias cuando u es un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. De esta manera, podemos disponer de un *producto hermítico* $(\,,\,) : \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \to \mathbb{C}$ compatible con la acción del álgebra de Clifford $\mathbb{C}l_n$ en el sentido de que

$$\left(\gamma_n(u)\,\psi_1, \gamma_n(u)\,\psi_2\right) = \left(u \cdot \psi_1, u \cdot \psi_2\right) = |u|^2 \left(\psi_1, \psi_2\right), \tag{1.4}$$

para cada $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{S}_n$ y cada $u \in \mathbb{R}^n$. Como consecuencia,

$$\left(\gamma_n(u)\,\psi_1, \psi_2\right) = -\left(\psi_1, \gamma_n(u)\,\psi_2\right),$$

es decir, γ_n es una representación antihermítica. Representaremos por $\langle\,,\,\rangle = \Re(\,,\,)$ a la parte real de este producto hermítico. Pero entre todos los posibles productos hermíticos sobre $\mathbb{S}_n$ que son compatibles, en este sentido, con la acción del álgebra de Clifford hay uno que destacaremos y que será el que usemos en lo que sigue, salvo indicación contraria. En efecto, existe un único producto hermítico sobre el álgebra de Clifford $\mathbb{C}l_n$ que hace que todos los monomios de la forma $e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}$ sean unitarios y ortogonales, supuesto que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. No es difícil ver que, con esta definición, se tiene

$$(u \cdot x, u \cdot y) = (x \cdot u, y \cdot u) = (x, y) \qquad u \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n, x, y \in \mathbb{C}l_n. \tag{1.5}$$

De aquí se deduce inmediatamente (1.4), ya que $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{C}l_n$.

La restricción al grupo $Spin_n$ de la representación compleja irreducible $\gamma_n : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_n)$ (puesto que $Spin_n \subset Cl_n \subset \mathbb{C}l_n$)

$$\gamma_n|_{Spin_n} : Spin_n \subset \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_n), \tag{1.6}$$

se denominará *representación compleja espinorial* del grupo $Spin_n$. La propiedad fundamental de esta representación es que no se factoriza a través de la proyección $Ad : Spin_n \to SO_n$. Aunque proviene de una representación irreducible del álgebra de Clifford compleja, hay que hacer notar que es una representación irreducible del grupo espinorial sólo cuando n es impar. Cuando n es par los espacios de quiralidad positiva y negativa son invariantes por la representación del grupo espinorial que, restringida a esos subespacios, sí proporciona dos representaciones irreducibles no equivalentes, [LM, Proposición 5.15]. Está claro, por (1.5), que esta representación es unitaria con respecto al producto hermítico de $\mathbb{S}_n$, es decir que

$$(\gamma_n(a)\psi_1, \gamma_n(a)\psi_2) = (a \cdot \psi_1, a \cdot \psi_2) = (\psi_1, \psi_2)$$

donde $a \in Spin_n$ y $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{S}_n$.

En los casos de dimensión 2 y 3 que hemos analizado más en detalle, se puede ver fácilmente que el producto hermítico usual de $\mathbb{C}^2$ es compatible con la acción de $\mathbb{C}l_2$ y de $\mathbb{C}l_3$, de forma que tanto $Spin_2$ como $Spin_3$ se pueden ver dentro del grupo $U(2)$ de transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^2$.

1.3. Variedades espinoriales

Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión n dotada de una métrica de Riemann $g = \langle\ ,\ \rangle$. En cada $p \in M$ se dispone del espacio vectorial T_pM dotado de la métrica g_p. Se pueden pues construir las álgebras de Clifford $Cl(T_pM) \subset Cl((T_pM)_{\mathbb{C}})$

sobre él, a las que representaremos por $Cl_p(M) \subset \mathbb{C}l_p(M)$ respectivamente. No hay mucha dificultad en comprobar que a las uniones disjuntas

$$\bigcup_{p \in M} \{p\} \times Cl_p(M) \subset \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathbb{C}l_p(M)$$

se les puede dotar de una estructura diferenciable natural que las convierte en fibrados vectoriales sobre M, que representaremos respectivamente por $Cl(M)$ y $\mathbb{C}l(M)$, respectivamente (la teoría de fibrados que usaremos puede consultarse en [KN, Bi, Hu]). De hecho estos fibrados vectoriales están asociados al fibrado principal $L(M)$ de las referencias lineales sobre la variedad M mediante la representación de su grupo estructural GL_n sobre Cl_n que extiende de forma trivial la representación usual sobre $\mathbb{R}^n$. También se pueden ver como fibrados asociados al fibrado principal $O(M)$ mediante la correspondiente extensión de la representación de $O_n \subset GL_n$.

En cada fibra $\mathbb{C}l_p(M)$ del fibrado de Clifford se pueden destacar el correspondiente grupo espinorial $Spin(T_pM) \subset Cl_p(M) \subset \mathbb{C}l_p(M)$, que es una subvariedad suya, y el espacio de espinores $\mathbb{S}_n(T_pM) \subset \mathbb{C}l_p(M)$, que es un ideal minimal por la izquierda. Sin embargo, no es obvio cómo reunir esos subconjuntos de las fibras de $\mathbb{C}l(M)$ para construir fibrados sobre M cuyas fibras sean respectivamente el grupo $Spin_n$ y el espacio vectorial complejo $\mathbb{S}_n$. Las obstrucciones correspondientes son de naturaleza topológica y el lenguaje adecuado para describirlas es el de las clases características en cohomología. Quizás la teoría de cohomología que permite hacerlo más rápidamente y con más claridad es la de Čech (en [ES, Sp] puede consultarse un estudio detallado de este tipo de cohomología, y también en [Wr, página 200 y siguientes]).

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial de rango r sobre M. Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de M por abiertos conexos que trivializan el fibrado, o sea, tales que existen isomorfismos de fibrados

$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\psi_i} U_i \times \mathbb{R}^r,$$

cada cambio de trivialización

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r$$

es de la forma $(I_{U_i \cap U_j}, \sigma_{ij})$, donde cada

$$\sigma_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$$

es lineal y biyectiva en las variables de $\mathbb{R}^r$. Por tanto, se puede considerar como una aplicación diferenciable

$$\sigma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL_r.$$

Estas aplicaciones son las llamadas *funciones de transición* del fibrado E y la familia $\{\sigma_{ij}\}_{i,j\in I}$ formada por ellas lo determina unívocamente. Pero no sólo eso sino que además esas funciones de transición nos permiten construir un fibrado principal $L(E)$ sobre M con fibra el grupo GL_r. No es nada difícil ver que $L(E)$ podría construirse también como el fibrado de las *referencias lineales* de E, es decir, el que tiene como fibra en cada punto de M el conjunto de bases ordenadas de la fibra de E en ese punto. Está también claro que el fibrado vectorial asociado a $L(E)$ mediante la acción usual de GL_r sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^r$ es el propio E con el que empezamos.

La misma definición de funciones de transición nos da la igualdad

$$\sigma_{ik} = \sigma_{jk}\sigma_{ij}, \tag{1.7}$$

válida en $U_i \cap U_j \cap U_k$ para cada tres índices $i, j, k \in I$ tales que los abiertos correspondientes tengan intersección no vacía, que se suele llamar *condición de cociclo*. Esto es así aunque la familia $\{\sigma_{ij}\}_{i,j\in I}$ no proporcione un cociclo en ningún grupo de cohomología, porque está formada por aplicaciones que toman valores en GL_r, que es un grupo no abeliano. Definimos una 1-cocadena $c = \{c_{ij}\}_{i,j\in I}$, $c_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{Z}_2$, con coeficientes en el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$, que sí es abeliano, asociada al recubrimiento $\mathcal{U}$ de M por

$$c_{ij} = \frac{\det \sigma_{ij}}{|\det \sigma_{ij}|} \qquad i, j \in I.$$

La condición de cociclo (1.7) implica que

$$c_{ik} = c_{jk}c_{ij}$$

en $U_i \cap U_j \cap U_k$ para cada tres índices $i, j, k \in I$, o sea, c es un 1-cociclo asociado a $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. A la clase de cohomología $[c]$ que engendra c en el grupo $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ la representaremos por

$$w_1(E) = [c] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2).$$

Observación 1.3.1 *De la definición anterior se deducen las tres propiedades siguientes. Las dos primeras de forma inmediata. La tercera con algo más de trabajo, pero también directamente.*

1. *Si E y F son dos fibrados vectoriales sobre la misma variedad M, entonces*

$$w_1(E \oplus F) = w_1(E)w_1(F)$$

(recordemos que estamos viendo a $\mathbb{Z}_2$ y, por tanto, a $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ como grupos multiplicativos).

2. *Si $f : N \to M$ es una aplicación diferenciable, entonces*

$$w_1(f^*E) = f^*w_1(E).$$

3. *Si $L \to \mathbb{R}P^1$ es el fibrado canónico sobre la recta proyectiva, entonces*

$$w_1(L) = -1.$$

Por esas tres razones se ve que la clase de cohomología $w_1(E) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ que hemos construido no es más que la ***primera clase de Stiefel-Whitney*** *del fibrado E, [MS, capítulo 4], [Wh, página 305 y siguientes], [LM, página 79 y siguientes].*

Esta $w_1(E)$ se dice que es una *clase característica* de E, [KN, capítulo XII], ya que es una señal dejada en la cohomología de M por la existencia de tal fibrado. Supongamos que $w_1(E) = +1$, o sea, que la primera clase de Stifel-Whitney de E sea *nula*. En ese caso el cociclo c es un coborde. Así pues existe una 0-cocadena ϵ sobre M con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ y asociada a un refinamiento, [Wr, página 202], que seguiremos representando de la misma forma, del recubrimiento $\mathcal{U}$ tal que $\delta\epsilon = c$. Es decir ϵ es una familia $\{\epsilon_i\}_{i \in I}$ de aplicaciones continuas (es decir, constantes) $\epsilon_i : U_i \to \mathbb{Z}_2$ tales que

$$c_{ij} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_j}$$

en $U_i \cap U_j$, para cada par de índices $i, j \in I$. Entonces podemos pasar de las trivializaciones ψ_i a otras $\tilde{\psi}_i$ sobre cada $\pi^{-1}(U_i)$ de la siguiente forma

$$\tilde{\psi}_i = \begin{cases} \psi_i \\ (I_{U_i} \times \sigma) \circ \psi_i \end{cases} \qquad \text{según que} \qquad \begin{cases} \epsilon_i = +1 \\ \epsilon = -1, \end{cases}$$

donde σ es cualquier simetría de $\mathbb{R}^r$. No es difícil darse cuenta que las funciones de transición $\tilde{\sigma}_{ij}$ de esta nueva familia de trivializaciones de E cumplen $\det \tilde{\sigma}_{ij} > 0$, para cada par $i, j \in I$. Dicho de otra forma, la primera clase de Stiefel-Whitney de E se anula si y solamente si se puede encontrar una familia de funciones de transición para E que tomen valores en el subgrupo $GL_r^+ \subset GL_r$. Esto permite dar una orientación en cada fibra E_p, $p \in M$, de E que varía continuamente con los puntos. También se ve que cada 0-cociclo η sobre M con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ nos proporciona una orientación de E sin más que cambiar ϵ por $\epsilon\eta$. O sea, el conjunto de posibles orientaciones es un espacio afín respecto del grupo $H^0(M, \mathbb{Z}_2)$. Esto puede interpretarse alternativamente en términos del fibrado principal $L(E)$ de las referencias lineales de E.

Observación 1.3.2 *La primera clase de Stiefel-Whitney $w_1(E) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ de un fibrado vectorial E sobre la variedad M se anula si y sólo si el grupo estructural GL_r del fibrado de las referencias lineales $L(E)$ puede ser reducido a GL_r^+. O sea, existe un subfibrado $L^+(E) \subset L(E)$ con grupo estructural GL_r^+ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
L^+(E) \times GL_r^+ \arrow[r] \arrow[d] & L^+(E) \arrow[d] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & M. \\
L(E) \times GL_r \arrow[r] & L(E) \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

*Se dice entonces que E es **orientable** y que $L^+(E)$ es una **orientación** suya. De hecho, $L^+(E)$ puede identificarse con las bases de E que están positivamente orientadas (respecto de esa orientación). El fibrado vectorial asociado a ese nuevo fibrado principal $L^+(E)$ respecto de la acción usual de GL_r^+ sobre $\mathbb{R}^r$ es el mismo E de partida.*

Cuando el fibrado vectorial E está dotado de una métrica de Riemann, la anulación de $w_1(E)$, o sea, la orientabilidad de E tiene efectos sobre su estructura métrica. De hecho, en el caso riemanniano, el 1-cociclo c que representa a la clase $w_1(E)$ puede construirse a partir de una familia de funciones de transición $\{\sigma_{ij}\}_{i,j \in I}$ que tomen valores en el grupo ortogonal $O_r \subset GL_r$. Su anulación permite entonces pasar a otras funciones de transición con valores en $O_r \cap GL_r^+ = SO_r$.

Observación 1.3.3 *La primera clase de Stiefel-Whitney $w_1(E) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ de un fibrado vectorial E sobre la variedad M se anula, o sea, E es orientable, si y sólo si, para cada métrica de Riemann sobre E, el grupo estructural O_r del fibrado de las* *referencias ortonormales $O(E)$ puede ser reducido a SO_r. O sea, existe un subfibrado $SO(E) \subset O(E)$ con grupo estructural SO_r tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
SO(E) \times SO_r \arrow[r] \arrow[d] & SO(E) \arrow[d] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & M. \\
O(E) \times O_r \arrow[r] & O(E) \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

El subfibrado $SO(E)$ determina una orientación en E y puede identificarse con el fibrado de las bases ortonormales de E que están positivamente orientadas (respecto de esa orientación). El fibrado vectorial asociado a ese nuevo fibrado principal $SO(E)$ respecto de la acción usual de O_r sobre $\mathbb{R}^r$ es el mismo E de partida.

Cuando el fibrado que se considera sobre la variedad M es su fibrado tangente, es decir, cuando $E = TM$, a la clase $w_1(TM)$ se le llama primera clase de Stiefel-Whitney de la variedad M y se suele representar por $w_1(M)$. Está claro que su anulación equivale a que la variedad M sea orientable en su sentido habitual.

Toda la discusión anterior sobre orientabilidad de fibrados en términos de la primera clase de Stiefel-Whitney no es más que para poner de manifiesto la analogía con la obstrucción topológica a la existencia de espinores sobre una variedad de Riemann. Esta obstrucción es una clase característica de orden dos, de suerte que la *espinoriabilidad* se va a ver como una especie de orientabilidad de segundo orden. Partimos de un fibrado vectorial orientado $E \xrightarrow{\pi} M$. Es decir, que $w_1(E) = +1$ y además tenemos destacado un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M por abiertos que trivializan E con funciones de transición $\{\sigma_{ij}\}_{i,j \in I}$ que toman valores en GL_r^+. La descomposición polar de las matrices cuadradas muestra que el grupo especial ortogonal SO_r es un retracto de deformación de GL_r^+ y así $\pi_1(GL_r^+) = \mathbb{Z}_2$, si $r \geq 3$, y $\pi_1(GL_2^+) = \mathbb{Z}$. Por tanto tenemos a nuestra disposición, para $r \geq 2$, un grupo de Lie $\widetilde{GL}_r^+$ que es recubridor de dos hojas conexo de GL_r^+ tal que $Spin_r \subset \widetilde{GL}_r^+$ y tal que el siguiente cuadro conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
Spin_r & \subset & \widetilde{GL}_r^+ \\
\downarrow & & \downarrow \\
SO_r & \subset & GL_r^+ .
\end{array}$$

Cuando $r = 1$, consideraremos que $\widetilde{GL}_1^+ = GL_1^+$. Como podemos suponer además, sin pérdida generalidad, que todos los abiertos $U_i \cap U_j$ son 1-conexos, cada función de transición σ_{ij} puede levantarse a una aplicación

$$\widetilde{\sigma}_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \widetilde{GL}_r^+ .$$

Esta nueva familia de funciones $\{\widetilde{\sigma}_{ij}\}_{i,j\in I}$ con valores en el grupo $\widetilde{GL}_r^+$ no es siempre otra familia de funciones de transición para E, ya que la condición de cociclo (1.7) que cumple la familia $\{\sigma_{ij}\}_{i,j\in I}$ no se reproduce automáticamente en los levantamientos. De hecho, sobre cada intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$, tendremos dos posibilidades

$$\widetilde{\sigma}_{jk}\widetilde{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{\sigma}_{ik} \\ \tau\left(\widetilde{\sigma}_{ik}\right), \end{cases}$$

donde $\tau : \widetilde{GL}_r^+ \to \widetilde{GL}_r^+$ es la involución que intercambia las hojas. Esto nos permite definir una 2-cocadena $d = \{d_{ijk}\}_{i,j,k\in I}$, $d_{ijk} : U_i \cap U_j \cap U_k \to \mathbb{Z}_2$, de la cohomología de Čech de M con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ de esta forma:

$$d_{ijk} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \qquad \text{según que} \qquad \widetilde{\sigma}_{jk}\widetilde{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{\sigma}_{ik} \\ \tau\left(\widetilde{\sigma}_{ik}\right). \end{cases} \tag{1.8}$$

Esta definición y la condición (1.7) implican que

$$d_{jkl}d_{ijl} = d_{ikl}d_{ijk},$$

es decir, que d es un 2-cociclo asociado al recubrimiento $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Consideraremos la correspondiente clase de cohomología

$$w_2(E) = [d] \in H^2(M, \mathbb{Z}_2).$$

Se ve sin demasiada dificultad que $w_2(E)$ no depende de la orientación elegida en el fibrado orientable E.

Observación 1.3.4 *De la definición anterior se deducen las propiedades siguientes de $w_2(E)$. Las dos primeras son inmediatas y análogas a las señaladas para $w_1(E)$.*

1. *Si E y F son dos fibrados vectoriales orientables sobre la misma variedad M, entonces*

   $$w_2(E \oplus F) = w_2(E)w_2(F)$$

   (recordemos que estamos viendo a $\mathbb{Z}_2$ y, por tanto, a $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ como grupos multiplicativos).

2. *Si $f : N \to M$ es una aplicación diferenciable, entonces*

$$w_2(f^*E) = f^*w_2(E).$$

3. *Si $L \to M$ es un fibrado de rectas, entonces*

$$w_2(L) = +1.$$

Por esas razones se ve que la clase de cohomología $w_2(E) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ que hemos construido no es más que la ***segunda clase de Stiefel-Whitney*** *del fibrado orientado E.*

Veamos qué consecuencias geométricas tiene la anulación de esta nueva clase característica que hemos construido para el fibrado orientado E. Si $w_2(E) = +1$ es porque el 2-cociclo d es un coborde. Entonces existe una 1-cocadena ρ con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, asociada a un refinamiento del recubrimiento $\mathcal{U}$ tal que $\delta\rho = d$. Trabajaremos como si el refinamiento de $\mathcal{U}$ fuera el mismo $\mathcal{U}$. Entonces ρ es una familia de aplicaciones continuas $\rho_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{Z}_2$ tales que

$$d_{ijk} = \frac{\rho_{ij}\rho_{jk}}{\rho_{ik}} \tag{1.9}$$

en cada intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$. Estos ρ_{ij} nos permiten modificar los levantamientos $\widetilde{\sigma}_{ij}$ de la siguiente forma. Para cada par $i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j$ sea no vacío, definimos la aplicación $\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ij} : U_i \cap U_j \to \widetilde{GL}_r^+$ por la igualdad

$$\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{\sigma}_{ij} \\ \tau(\widetilde{\sigma}_{ij}) \end{cases} \qquad \text{según que} \qquad \rho_{ij} = \begin{cases} +1 \\ -1. \end{cases}$$

Se puede ver ahora, usando (1.8) y (1.9), que los nuevos levantamientos a $\widetilde{GL}_r^+$ sí cumplen la condición de cociclo, o sea,

$$\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{jk}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ij} = \widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ik}.$$

Dicho de otra forma, la familia de funciones $\{\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{ij}\}_{i,j\in I}$ forman un conjunto de funciones de transición de un nuevo fibrado principal con grupo estructural $\widetilde{GL}_r^+$. Esas funciones son levantamientos de las funciones de transición de E y, por tanto, el nuevo fibrado recubre a $L^+(E)$. Además, cada cocadena ρ que cumpla (1.9) proporciona un levantamiento de ese tipo.

Observación 1.3.5 *La segunda clase de Stiefel-Whitney $w_2(E) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ de un fibrado vectorial orientable E sobre la variedad M se anula si y sólo si, para cada orientación sobre E, el grupo estructural GL_r^+ del fibrado $L^+(E)$ de las referencias lineales positivamente orientadas puede ser levantado a $\widetilde{GL}_r^+$. O sea, existe un fibrado $\widetilde{L}^+(E)$, recubridor de dos hojas de $L^+(E)$, con grupo estructural $\widetilde{GL}_r^+$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{L}^+(E) \times \widetilde{GL}_r^+ \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{L}^+(E) \arrow[d] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & M. \\
L^+(E) \times GL_r^+ \arrow[r] & L^+(E) \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

*Se dice entonces que E es un **fibrado espinorial** y que $\widetilde{L}^+(E)$ es una **estructura espinorial** sobre E. El número de estructuras espinoriales sobre E que no son equivalentes coincide con el orden del grupo $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. A $\widetilde{L}^+(E)$ se le suele dar el nombre de **fibrado de las referencias espinoriales** sobre E. El fibrado vectorial asociado a ese nuevo fibrado principal $\widetilde{L}^+(E)$ respecto de la acción de $\widetilde{GL}_r^+$ sobre $\mathbb{R}^r$, a través de la proyección sobre GL_r^+, es el mismo fibrado E de partida.*

Es interesante destacar que toda acción del grupo recubridor $\widetilde{GL}_r^+$ sobre un espacio vectorial pasa a través de la proyección recubridora a GL_r^+ (ver [We]). Esto impide construir fibrados vectoriales asociados al nuevo fibrado principal $\widetilde{L}^+(E)$ que no sean los que ya se podían construir a partir de $L^+(E)$.

De la misma forma que cuando estudiábamos la orientabilidad, la anulación de la segunda clase $w_2(E)$ de Stiefel-Whitney de un fibrado orientado E tiene importantes efectos sobre cualquier estructura riemanniana de la que se pueda dotar a E. Esto es así ya que el 2-cociclo d que hemos construido antes para representar a $w_2(E)$, cuando hay una métrica de Riemann en E, podría haberse definido a partir de una familia de funciones de transición $\{\sigma_{ij}\}_{i,j \in I}$ que tomaran valores en el grupo especial ortogonal SO_r. La siguiente observación resume esas consecuencias.

Observación 1.3.6 *La segunda clase de Stiefel-Whitney $w_2(E) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ de un fibrado vectorial orientable E sobre la variedad M se anula, o sea, E es espinorial, si y* *sólo si, para cada orientación y cada métrica de Riemann sobre E, el grupo estructural SO_r del fibrado $SO(E)$ de las referencias ortonormales positivamente orientadas puede ser levantado a $Spin_r$. O sea, existe un fibrado principal $Spin(E)$, recubridor de dos hojas de $SO(E)$, con grupo estructural $Spin_r$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
Spin(E) \times Spin_r \arrow[r] \arrow[dd] & Spin(E) \arrow[dd] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& & M. \\
SO(E) \times SO_r \arrow[r] & SO(E) \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Cada recubrimiento $Spin(E)$ de este tipo se llama una ***estructura riemanniana espinorial*** *sobre E. A $Spin(E)$ se le suele llamar el fibrado de las referencias espinoriales de E. El fibrado vectorial asociado a ese nuevo fibrado principal $Spin(E)$ respecto de la acción de $Spin_r$ sobre $\mathbb{R}^r$, a través de la proyección sobre SO_r, es el mismo E de partida.*

Definición 1.3.7 *En el caso particular en el que el fibrado E sea el propio fibrado tangente TM de la variedad M, la clase $w_2(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ es la segunda clase de Stiefel-Whitney de la variedad y se representa por $w_2(M)$. Cuando se anula esta $w_2(M)$ se dice que M es una* ***variedad espinorial****.*

Se deduce de lo anterior que toda variedad orientable con segundo grupo de cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ que sea nulo es una variedad espinorial. Por ejemplo, *el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y el espacio hiperbólico H^n son variedades espinoriales.*

Por otro lado, si M es una hipersuperficie orientable de una variedad espinorial N, la descomposición

$$TN_{|M} = TM \oplus T^{\perp}M$$

implica, de acuerdo con las propiedades reseñadas en la Observación 1.3.4,

$$+1 = w_2(TN_{|M}) = w_2(M) w_2(T^{\perp}M) = w_2(M),$$

ya que el fibrado normal $T^{\perp}M$ es trivial. Por tanto, *toda hipersuperficie orientable de una variedad espinorial hereda esta propiedad.* Así pues, *las esferas S^n de cualquier* *dimensión son variedades espinoriales.* Por la misma razón, *toda superficie compacta orientable es espinorial.*

La situación no es siempre tan sencilla, como demuestra el hecho de que el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ sea una variedad espinorial si y sólo si $n \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)$.

Definición 1.3.8 *Sea M una variedad espinorial de dimensión n dotada de una métrica de Riemann. Diremos que M es una **variedad riemanniana espinorial**. Llamaremos **estructura riemanniana espinorial** a cualquier estructura riemanniana espinorial sobre su fibrado tangente TM. Es decir, a un fibrado principal $Spin(M)$ sobre M con grupo estructural $Spin_n$ que es un recubridor de dos hojas del fibrado $SO(M)$ de las bases ortonormales positivamente orientadas de M, compatible con las acciones de SO_n y $Spin_n$ sobre $SO(M)$ y $Spin(M)$, respectivamente. Está claro que, para cada métrica sobre M, hay tanta estructuras riemannianas espinoriales como elementos en $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.*

La compatibilidad a la que se refiere la definición anterior se traduce en que el siguiente diagrama conmuta,

$$
\begin{tikzcd}
Spin(M) \times Spin_n \arrow[r] \arrow[d, "\times Ad"] & Spin(M) \arrow[d] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & M, \\
SO(M) \times SO_n \arrow[r] & SO(M) \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde las flechas horizontales son las respectivas acciones de los grupos estructurales.

1.4. El fibrado espinorial

Supongamos que M es una variedad riemanniana espinorial de dimensión n en la que se ha fijado una orientación concreta y una estructura espinorial $Spin(M)$.

Definición 1.4.1 *Llamaremos **fibrado espinorial (complejo)**, y lo representaremos por $\mathbb{S}M$, al fibrado vectorial asociado al fibrado principal $Spin(M)$ mediante la* *representación espinorial compleja* $\gamma_n|_{Spin_n} : Spin_n \subset \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_n)$, *es decir,*

$$\mathbb{S}M := Spin(M) \times_{\gamma_n} \mathbb{S}_n.$$

Por definición, $\mathbb{S}M$ es un fibrado vectorial complejo sobre M de rango $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_n = 2^{[n/2]}$. Un *campo de espinores* sobre M será una cualquier sección diferenciable sobre este fibrado. Notaremos por $\Gamma(\mathbb{S}M)$ el espacio formado por todos los campos de espinores sobre M. Es interesante observar que, aunque se puede hablar de estructuras espinoriales sobre variedades orientadas que no estén dotadas de métricas, no así de espinores. El fibrado de espinores $\mathbb{S}M$ sólo aparece en presencia de una estructura riemanniana espinorial. Esto es así porque la representación γ_n del grupo $Spin_n$ no tiene ninguna análoga para el grupo $\widetilde{GL}_n^+$, ya que, como comentamos anteriormente, todas las representaciones de este último grupo son representaciones lineales, es decir, pasan a través de la proyección a GL_n^+.

En el caso particular de que $n = 2m$ sea par, la descomposición (1.3) de $\mathbb{S}_n$ en subespacios de espinores de Weyl positivos y negativos, que es invariante por la acción γ_n del grupo estructural, produce una descomposición en el fibrado espinorial (conocida como *descomposición quiral* del fibrado espinorial)

$$\mathbb{S}M = \mathbb{S}^+M \oplus \mathbb{S}^-M, \quad \text{donde } \mathbb{S}^{\pm}M = Spin(M) \times_{\gamma_{2m}} \mathbb{S}_{2m}^{\pm}. \tag{1.10}$$

Del hecho de que la fibra tipo $\mathbb{S}_n$ de $\mathbb{S}M$ sea un ideal a la izquierda del álgebra de Clifford $\mathbb{C}l_n$ vamos a deducir que el fibrado espinorial $\mathbb{S}M$ es un fibrado de módulos sobre el fibrado de álgebras $\mathbb{C}l(M)$.

Debemos recordar que el fibrado de Clifford se definió como un fibrado vectorial asociado a los fibrados principales $L(M)$ y $O(M)$, pero no hay ningún problema para ver que también es un fibrado vectorial asociado a $Spin(M)$, como ocurre con el fibrado espinorial $\mathbb{S}M$. En efecto, el grupo estructural $Spin_n$ actúa sobre la fibra tipo $\mathbb{C}l_n$ de dos maneras que son naturales: mediante la acción adjunta Ad dada por

$$Ad_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}, \qquad a \in Spin_n \subset \mathbb{C}l_n, \quad x \in \mathbb{C}l_n$$

y mediante la multiplicación por la izquierda γ_n dada por

$$\gamma_n(a)(x) = a \cdot x, \qquad a \in Spin_n \subset \mathbb{C}l_n, \quad x \in \mathbb{C}l_n.$$

Las dos son acciones unitarias con respecto al producto hermítico natural del álgebra de Clifford, como se desprende de (1.5). La primera de ellas originó el recubrimiento (1.2) y la segunda da lugar a la representación espinorial (1.6). Se pueden construir entonces dos fibrados vectoriales asociados a la estructura riemanniana espinorial $Spin(M)$ con la misma fibra tipo $\mathbb{C}l_n$:

$$Spin(M) \times_{Ad} \mathbb{C}l_n \qquad \text{y} \qquad Spin(M) \times_{\gamma_n} \mathbb{C}l_n.$$

Se comprueba rápidamente que la representación adjunta Ad se factoriza a través de la proyección (1.2) y así se reduce a una acción de SO_n. Esto implica que

$$Spin(M) \times_{Ad} \mathbb{C}l_n \cong \mathbb{C}l(M),$$

es decir, que el primero de esos dos fibrados asociados no es más que el fibrado de Clifford sobre la variedad. El segundo de ellos, que se suele representar como

$$\mathbb{C}l_{spin}(M) := Spin(M) \times_{\gamma_n} \mathbb{C}l_n,$$

no debe ser confundido con el primero. Las siguientes propiedades los distinguen y los relacionan estrechamente:

1. El fibrado de Clifford $\mathbb{C}l(M)$ está definido sobre cualquier variedad de Riemann, espinorial o no, y contiene como subfibrado suyo al fibrado tangente TM. Sin embargo, $\mathbb{C}l_{spin}(M)$ sólo tiene sentido en una variedad riemanniana espinorial y contiene como subfibrado suyo a $\mathbb{S}M$, ya que se da la inclusión correspondiente $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{C}l_n$ entre sus fibras tipo, y las acciones de $Spin_n$ sobre sus fibras coinciden (ambas son esencialmente la multiplicación a la izquierda del álgebra de Clifford).

2. Ambos fibrados son fibrados hermíticos, porque, en ambos, el producto hermítico natural de la fibra $\mathbb{C}l_n$ pasa a las secciones de forma diferenciable. Esto es así ya que, por (1.5), tanto γ_n como Ad actúan mediante transformaciones hermíticas. Representaremos ambos productos indistintamente por

$$(\ ,\ ) : \Gamma(\mathbb{C}l(M)) \otimes \Gamma(\mathbb{C}l(M)) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$(\ ,\ ) : \Gamma(\mathbb{C}l_{spin}(M)) \otimes \Gamma(\mathbb{C}l_{spin}(M)) \longrightarrow C^\infty(M).$$

3. Sobre ambos fibrados tenemos sendas derivaciones covariantes que provienen del levantamiento a $Spin(M)$ de la conexión de Levi-Civita de la variedad riemanniana M, que es una conexión sobre $SO(M)$, [Fr2, Sec. 3.1], [LM, Sec. II.4]. Ambas serán representadas por ∇ y ambas paralelizan los productos hermíticos anteriores. O sea,

$$X(Y,Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z) \qquad X \in \Gamma(TM) \quad Y, Z \in \Gamma(\mathbb{C}l(M))$$

$$X(\phi,\psi) = (\nabla_X \phi, \psi) + (\phi, \nabla_X \psi) \qquad X \in \Gamma(TM) \quad \phi, \psi \in \Gamma(\mathbb{C}l_{spin}(M)).$$

La conexión de $\mathbb{C}l(M)$ deja invariante el subfibrado TM, ya que $\mathbb{R}^n \subset Cl_n$ queda invariante por la acción Ad, y su restricción es la conexión de Levi-Civita de la variedad M. De la misma forma, la conexión de $\mathbb{C}l_{spin}(M)$ deja invariante el subfibrado espinorial $\mathbb{S}M$, porque $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{C}l_n$ queda invariante por la acción γ_n, que es la multiplicación a la izquierda. Se obtiene así una derivación covariante sobre el fibrado espinorial, que se también se suele llamar *conexión de Levi-Civita espinorial*. Cuando $n = 2m$ es par, el mismo argumento anterior prueba que los subfibrados quirales $\mathbb{S}^{\pm}M$ quedan invariantes para esta conexión de Levi-Civita.

4. El producto de la fibra tipo $\mathbb{C}l_n$ sólo se hereda sobre el fibrado $\mathbb{C}l(M)$, porque sólo Ad proporciona endomorfismos para el producto del álgebra $\mathbb{C}l_n$. Es decir, tenemos el producto de Clifford

$$\cdot : \Gamma(\mathbb{C}l(M)) \otimes \Gamma(\mathbb{C}l(M)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{C}l(M))$$

que es compatible con el producto hermítico y con la conexión de $\mathbb{C}l(M)$. Es decir

$$(Y \cdot Z, Y \cdot W) = |Y|^2 (Z, W) \qquad \nabla_X (Y \cdot Z) = \nabla_X Y \cdot Z + Y \cdot \nabla_X Z,$$

donde $X \in \Gamma(TM)$ e $Y, Z, W \in \Gamma(\mathbb{C}l(M))$.

5. Aunque el producto de la fibra $\mathbb{C}l_n$ no se pueda llevar a $\mathbb{C}l_{spin}(M)$, este fibrado tiene estructura de fibrado de módulos a la izquierda con respecto a $\mathbb{C}l(M)$. En efecto, el hecho de que

$$Ad_a(x) \cdot \gamma_n(a)(y) = \gamma_n(a)(x \cdot y), \qquad a \in Spin_n \quad x, y \in \mathbb{C}l_n,$$

nos proporciona un producto externo

$$\cdot : \Gamma(\mathbb{C}l(M)) \otimes \Gamma(\mathbb{C}l_{spin}(M)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{C}l_{spin}(M))$$

que también es compatible con el producto hermítico de $\mathbb{C}l_{spin}(M)$ y con las conexiones de ambos fibrados. Concretamente

$$(Y \cdot \phi, Y \cdot \psi) = |Y|^2(\phi, \psi) \qquad \nabla_X(Y \cdot \psi) = \nabla_X Y \cdot \psi + Y \cdot \nabla_X \psi,$$

para cada $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(\mathbb{C}l(M))$ y $\psi \in \Gamma(\mathbb{C}l_{spin}(M))$. Como $\mathbb{S}_n$ es un ideal (a la izquierda) del álgebra $\mathbb{C}l_n$, este producto externo estabiliza el fibrado espinorial $\mathbb{S}M$, obteniéndose así un producto

$$\cdot : \Gamma(\mathbb{C}l(M)) \otimes \Gamma(\mathbb{S}M) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{S}M)$$

con análogas propiedades. En el caso de dimensión par $n = 2m$, los subfibrados quirales $\mathbb{S}^{\pm}M$ son invariantes o quedan intercambiados por el producto de secciones de $\mathbb{C}l(M)$, según su paridad.

Como consecuencia de lo anterior, el fibrado espinorial es un fibrado de módulos a la izquierda para el fibrado de álgebras $\mathbb{C}l(M)$. Detacamos los siguientes hechos que deben estar claros después de la discusión anterior (véanse [LM, pág. 109] o [Hi4]).

Lema 1.4.2 *Sobre el fibrado espinorial $\mathbb{S}M$ de una variedad riemanniana espinorial M, se dispone tanto de una multiplicación de Clifford como de un producto escalar hermítico naturales*

$$\cdot : \Gamma(TM) \otimes \Gamma(\mathbb{S}M) \to \Gamma(\mathbb{S}M) \qquad y \qquad (\,,\,) : \Gamma(\mathbb{S}M) \otimes \Gamma(\mathbb{S}M) \to C^\infty(M, \mathbb{C}),$$

y de una conexión espinorial de Levi-Civita ∇ que son compatibles en el siguiente sentido

$$(X \cdot \phi, X \cdot \psi) = |X|^2 (\phi, \psi), \tag{1.11}$$

$$X \cdot (\phi, \psi) = (\nabla_X \phi, \psi) + (\phi, \nabla_X \psi), \tag{1.12}$$

$$\nabla_X (Y \cdot \phi) = (\nabla_X Y) \cdot \phi + Y \cdot \nabla_X \phi, \tag{1.13}$$

para cada $X, Y \in \Gamma(TM)$ y cada $\phi, \psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$.

Observación 1.4.3 *La multiplicación de Clifford $\cdot$ del fibrado espinorial $\mathbb{S}M$ de una variedad riemanniana espinorial será representada también a lo largo de esta Memoria de la forma siguiente:*

$$\gamma : \Gamma(TM) \otimes \Gamma(\mathbb{S}M) \to \Gamma(\mathbb{S}M),$$

de manera que la multiplicación de un campo tangente $X \in \Gamma(TM)$ por un campo de espinores $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ se escribirá alternativamente como

$$X \cdot \psi = \gamma(X)\psi.$$

Normalmente usaremos esta notación cuando aparezcan involucradas multiplicaciones de Clifford de varias estructuras riemannianas espinoriales y haga falta distinguir entre ellas.

Por cumplir estas tres propiedades, se dice que el fibrado $\mathbb{S}M$, dotado de la multiplicación de Clifford $\cdot$ y la conexión espinorial ∇, es un *fibrado de Dirac*. La primera propiedad nos indica que la multiplicación de Clifford por campos unitarios proporciona transformaciones unitarias. Pero también actúa sobre el fibrado espinorial mediante endomorfismos antisimétricos pues, en ese caso, también se tiene

$$(X \cdot \phi, \psi) = -\left(\phi, X \cdot \psi\right). \tag{1.14}$$

La segunda nos dice que la conexión espinorial es una *conexión métrica*.

A lo largo de esta Memoria, haremos uso fundamentalmente de las conexiones sobre los fibrados tangente TM y espinorial $\mathbb{S}M$ sobre una variedad riemanniana espinorial. Ambas provienen, como acabamos de ver, del levantamiento al fibrado principal $Spin(M)$ de la conexión de Levi-Civita de $SO(M)$, a través de los espacios fibrados asociados $\mathbb{C}l(M)$ y $\mathbb{C}l_{spin}(M)$ respectivamente. Por tanto, entre sus respectivos operadores de curvatura,

$$R(u,v) : T_pM \longrightarrow T_pM \qquad R_{spin}(u,v) : \mathbb{S}_pM \longrightarrow \mathbb{S}_pM,$$

donde $u, v \in T_pM$, $p \in M$, que pueden verse como elementos de las álgebras de Lie de sus respectivos grupos estructurales, o sea,

$$R(u,v) \in \mathfrak{so}_n \qquad R_{spin}(u,v) \in \mathfrak{spin}_n,$$

existe la relación siguiente

$$R(u,v) = ad \circ R_{spin}(u,v),$$

donde $ad : \mathfrak{spin}_n \to \mathfrak{so}_n$ es la diferencial del recubrimiento (1.2) de $Spin_n$ sobre SO_n. Puesto que es inmediato ver que

$$ad(x \cdot y) = 2\, x \wedge y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

y está claro que

$$R(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(u,v,e_i,e_j)(e_i \wedge e_j), \qquad u,v \in T_pM \quad p \in M,$$

donde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base ortonormal de T_pM, llegamos a la conclusión de que el *operador de curvatura espinorial*, al que representaremos desde ahora sin subíndice, se relaciona con el riemanniano mediante la expresión

$$R(u,v)\psi = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} R(u,v,e_i,e_k)e_i \cdot e_j \cdot \psi, \tag{1.15}$$

para cada $u,v \in T_pM$ y cada $\psi \in \mathbb{S}_pM$.

1.5. El operador de Dirac

Estamos en posición ahora de definir el operador de Dirac, que es el principal objeto de estudio de esta Memoria. Sea M una variedad riemanniana espinorial de dimensión n en la que se ha fijado una estructura espinorial. Tenemos, pues, definidos sobre M todos los fibrados asociados de los que hemos hablado en la sección anterior. En particular, el fibrado espinorial $\mathbb{S}M$, sobre cuyas secciones actuará ese operador.

Definición 1.5.1 *Llamaremos* ***operador de Dirac*** *sobre M al operador diferencial de primer orden dado por*

$$\begin{array}{rccl} D: & \Gamma(\mathbb{S}M) & \to & \Gamma(\mathbb{S}M) \\ & \psi & \mapsto & D\psi := \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi, \end{array}$$

donde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es como siempre una base local ortonormal en TM.

Si tenemos en cuenta que los subfibrados quirales (1.3) son estables para la conexión espinorial y que la multiplicación por vectores los intercambia, de esta misma definición se deduce que, en el caso de dimensión par, el operador de Dirac intercambia la quiralidad de los espinores, es decir, que

$$D\Gamma(\mathbb{S}^{\pm}M) \subset \Gamma(\mathbb{S}^{\mp}M). \tag{1.16}$$

El operador de Dirac es, por tanto, un *operador diferencial de primer orden*. Se puede ver que su símbolo principal σ_D ([BW, Sec. 3.1], [Fr2, página 68], [LM, página 113], [GT]) es, salvo la unidad imaginaria, la multiplicación de Clifford

$$\forall p \in M, \, \forall v \in T_pM, \qquad \sigma_D(v) = i\, v \cdot = i\, \gamma(v) : \mathbb{S}_pM \longrightarrow \mathbb{S}_pM. \tag{1.17}$$

Como consecuencia, si $v \neq 0$, $\sigma_D(v)$ es un isomorfismo. Es decir, que el operador de Dirac es *elíptico*, con lo cual tendremos a nuestra disposición todas las ventajas de este tipo de operadores. Fundamentalmente, que todas las soluciones débiles de ecuaciones en las que intervenga serán diferenciables.

Observemos con detalle cómo es este operador en el caso en que la variedad es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con su métrica usual. Como el fibrado tangente $T\mathbb{R}^n$ es trivial, todos los fibrados espinoriales de esta variedad riemanniana espinorial son triviales. Además la conexión de Levi-Civita de la métrica ordinaria coincide con la derivación usual. En particular, $\mathbb{S}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N$, con $N = 2^{[n/2]}$. Así, sus campos de espinores pueden ser vistos como conjuntos de N funciones diferenciables con valores en $\mathbb{C}$, es decir, que existe una identificación $\Gamma(\mathbb{S}\mathbb{R}^n) = C^\infty\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N\right)$ y el operador de Dirac es de la forma

$$D\psi = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

para cada campo de espinores ψ, y donde $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ son matrices complejas de orden N que satisfacen

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\delta_{ij} I_N.$$

Una primera e importante consecuencia de esta forma que adopta el operador de Dirac sobre los espacios euclídeos es la siguiente.

Observación 1.5.2 *La estructura riemanniana espinorial del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ asociada a la métrica euclídea usual admite $2^{[n/2]}$ campos de espinores armónicos independientes. De hecho son campos paralelos para la conexión espinorial. Bajo la identificación $\Gamma(\mathbb{S}\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{2^{[n/2]}})$ corresponden a las funciones constantes.*

Es esclarecedor considerar más de cerca los casos de dimensión menor $n = 1, 2, 3$. Cuando $n = 1$ los espinores sobre $\mathbb{R}$ son las funciones $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y así

$$D\psi = i\frac{d\psi}{dt}. \tag{1.18}$$

En el caso $n = 2$, los espinores son funciones $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$ y las matrices γ_i no son más que las matrices de Pauli que estudiamos en la Sección 1.2. Entonces el operador de Dirac actúa así

$$D\psi = \sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Es decir, si usamos la coordenada compleja $z = x + iy$ en $\mathbb{R}^2$, obtenemos

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ -\dfrac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Por análogas razones, cuando $n = 3$, en cuyo caso los espinores son funciones $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2$, el operador de Dirac es

$$D\psi = \sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3},$$

donde aparecen de nuevo las matrices de Pauli. Si interpretamos el espacio de espinores $\mathbb{C}^2$ como el espacio $\mathbb{H}$ de los cuaterniones, se puede reescribir en esta otra forma

$$D = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

donde i, j, k son las unidades imaginarias de $\mathbb{H}$.

La discusión anterior nos lleva a que pensemos en el operador de Dirac sobre una variedad riemanniana espinorial como una especie de operador de Cauchy-Riemann en dimensión arbitraria. En todos los casos, el cuadrado del operador de Dirac en $\mathbb{R}^n$ actúa como el opuesto del operador laplaciano sobre los espinores identificados como funciones, o sea, que $D^2 = -\Delta$. En la siguiente sección veremos que esta propiedad pone de manifiesto el hecho de que el espacio euclídeo posee curvatura escalar nula.

Otra propiedad elemental (e imprescindible para poder hablar de espectro discreto) del operador de Dirac es la recogida en el siguiente resultado. Consideremos sobre el espacio de campos de espinores de soporte compacto (disjunto con ∂M, en el caso de borde no vacío) $\Gamma_0(\mathbb{S}M)$ el producto escalar L^2 dado por

$$(\ ,\ )_{L^2} := \int_M (\ ,\ ). \tag{1.20}$$

El teorema de la divergencia nos garantiza que el operador de Dirac es L^2-formalmente autoadjunto (ver, por ejemplo, [Wo] o bien [Fr2, página 96]).

Proposición 1.5.3 *El operador de Dirac de una variedad riemanniana espinorial es formalmente autoadjunto, es decir,*

$$(D\phi,\psi)_{L^2} = (\phi, D\psi)_{L^2}$$

para cada par de espinores $\phi,\psi \in \Gamma_0(\mathbb{S}M)$ de soporte compacto.

Demostración: Fijamos un punto $p \in M$ y una base local ortonomal de campos en TM que en el punto p proporcionen un sistema normal de coordenadas. Entonces, usando (1.14), en ese punto,

$$(D\phi,\psi) = \sum_{i=1}^{n}(e_i \cdot \nabla_{e_i}\phi,\psi) = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\phi, e_i\cdot\psi).$$

Como la conexión espinorial paraleliza el producto de espinores y la multiplicación de Clifford, según (1.12) y (1.13), concluimos que

$$(D\phi,\psi) = -\sum_{i=1}^{n} e_i(\phi, e_i\cdot\psi) + (\phi, D\psi).$$

La demostración se acaba utilizando el teorema de la divergencia, ya que el primer sumando de la derecha es la divergencia de un campo de soporte compacto. ■

Si M es compacta, incluyendo el caso de borde no vacío, el mismo argumento demuestra que

$$(D\phi,\psi)_{L^2} - (\phi, D\psi)_{L^2} = -\int_{\partial M}(N\cdot\phi,\psi)\,, \quad \forall \phi,\psi \in \Gamma\left(\mathbb{S}M\right), \tag{1.21}$$

donde $N : \partial M \to TM$ representa el campo unitario normal interior al borde de la variedad M. Al igual que en el caso del laplaciano, la teoría espectral elemental nos proporciona las consecuencias más inmediatas en el caso compacto sin borde.

Observación 1.5.4 *Si M es una variedad riemanniana espinorial compacta sin borde, D es un operador diferencial de primer orden autoadjunto respecto de la métrica L^2. En este caso, la teoría espectral estándar ([LM, Teorema 5.8], [Fr2, página 102]) afirma que su espectro es un subconjunto discreto y no acotado de números reales, es decir, $Spec\,(D) = \{\lambda_m,\, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ de manera que $\lim_{m\to\pm\infty}\lambda_m = \pm\infty$. Cada subespacio propio asociado a un valor propio λ_m de D posee dimensión finita, y es posible* *encontrar una base ortonormal,* $\{\psi_m, m \in \mathbb{Z}\}$*, de la completación* $L^2(\mathbb{S}M)$ *como espacio de Hilbert de* $(\Gamma(\mathbb{S}M), (\ ,\ )_{L^2})$ *formada por campos de espinores (diferenciables) propios para* D*. Esta base nos permitirá desarrollar en serie cualquier campo de espinores* $\psi \in L^2(\mathbb{S}M)$ *en la forma* $\psi = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \psi_m$*, donde* $\{a_m, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ *y la serie converge en el sentido* L^2*.*

Desde el punto de vista analítico, el conocimiento del espectro del operador de Dirac y sus espacios propios es equivalente al del mismo operador. Desde un punto de vista físico, sus valores propios dan los diferentes niveles de energía del sistema físico modelado por el operador. De la misma forma que los valores propios del laplaciano determinan las distintas frecuencias asociadas a las ondas (de luz, de sonido, etc.) que genera la variedad, los valores propios del operador de Dirac determinan los niveles de energía posibles de los fermiones que puede generar la variedad. Por supuesto, como ocurre también en el caso del laplaciano, es muy difícil calcular el espectro completo del operador de Dirac de una variedad riemanniana espinorial dada. Son contados los casos en que se puede llegar a un conocimiento total del espectro y sus espacios propios asociados. Por ejemplo, las esferas dotadas de la métrica euclídea [Bä3, Su, Tr], los toros llanos [Fr3], y pocos ejemplos más [Ht, Pf]. Normalmente aspiramos a obtener estimaciones inferiores o superiores para algunos valores propios y, principalmente, a obtener teoremas de comparación. Desde una perspectiva geométrica, nos interesan sobre todo esos resultados de comparación, que desvelan la relación íntima que existe entre la geometría de la variedad, es decir, sus distintas curvaturas, y el espectro del operador estudiado, en este caso, el operador de Dirac. En la siguiente sección daremos las herramientas básicas para acceder a los teoremas de comparación clásicos sobre este operador.

1.6. La fórmula de Schrödinger–Lichnerowicz

Una de las herramientas básicas para relacionar el operador de Dirac con la geometría de una variedad espinorial es la *fórmula de Schrödinger–Lichnerowicz*, parece ser que manejada por primera vez por E. Schrödinger en 1932.

Teorema 1.6.1 (Fórmula de Schrödinger–Lichnerowicz, 1932) *Si representa-*

mos por S la curvatura escalar de una variedad riemanniana espinorial M, entonces

$$D^2\psi = -traza\,\nabla^2\psi + \frac{1}{4}S\psi$$

para cada campo de espinores $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ sobre la variedad.

Demostración: Tomemos un sistema de coordenadas ortonormal que sirva como sistema de coordenadas normales en un punto concreto de la variedad, a donde referimos exclusivamente los siguientes cálculos.

$$D^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\right)^2 = \sum_{j,k=1}^{n} e_j \cdot e_k \cdot \nabla^2_{e_j,e_k}.$$

Si hacemos conmutar por un lado $e_j e_k$ y por otro $\nabla_{e_j}\nabla_{e_k}$, nos aparece la curvatura espinorial,

$$\begin{aligned} D^2 = \sum_{j,k=1}^{n} e_j \cdot e_k \cdot \nabla^2_{e_j,e_k} &= \sum_{j,k=1}^{n} (-e_k \cdot e_j - 2\langle e_j, e_k\rangle) \cdot \nabla^2_{e_j,e_k} \\ &= -2\sum_{j=1}^{n} \nabla^2_{e_j,e_j} - \sum_{j,k=1}^{n} e_k \cdot e_j \cdot \nabla^2_{e_j,e_k} \\ &= -2\,\mathrm{traza}\nabla^2 - \sum_{j,k=1}^{n} e_k \cdot e_j \cdot \left(R(e_j,e_k) + \nabla^2_{e_k,e_j}\right) \\ &= -2\,\mathrm{traza}\nabla^2 - D^2 - \sum_{j,k=1}^{n} e_k \cdot e_j \cdot R(e_j,e_k). \end{aligned}$$

Así, usando la relación entre la curvatura espinorial y la riemanniana (1.15), tenemos

$$\begin{aligned} 2D^2 + 2\,\mathrm{traza}\nabla^2 &= -\frac{1}{4}\sum_{j,k,m,l=1}^{n} R(e_j,e_k,e_m,e_l)e_k \cdot e_j \cdot e_m \cdot e_l \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j,k,m=1}^{n} R_{jkml}e_j \cdot e_k \cdot e_m\right) \cdot e_l \end{aligned}$$

En la suma anterior, separamos los casos $m = j$ y $m = k$, y queda

$$\begin{aligned} 2D^2 + 2\,\mathrm{traza}\nabla^2 = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Bigg[\sum_{j,k=1}^{n} R_{jkjl}e_j \cdot e_k \cdot e_j + \sum_{j,k=1}^{n} R_{jkkl}e_j \cdot e_k \cdot e_k \\ + \sum_{j\neq k\neq m\neq j} R_{jkml}e_j \cdot e_k \cdot e_m\Bigg] \cdot e_l. \end{aligned}$$

En la primera suma, si $j = k$, entonces $R_{jjjl} = 0$, y si $j \neq k$, $e_j \cdot e_k \cdot e_j = e_k$. Igualmente en la segunda suma $e_j \cdot e_k \cdot e_k = -e_j$ cuando $j \neq k$. Por otro lado, cuando j, k y m son distintos, se verifica que $e_j \cdot e_k \cdot e_m = e_k \cdot e_m \cdot e_j = e_m \cdot e_j \cdot e_k$, lo que nos permite expresar el último sumando de la siguiente manera:

$$2D^2 + 2\,\mathrm{traza}\nabla^2 = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\Bigg[\sum_{j,k=1}^{n} R_{jkjl}e_k - \sum_{j,k=1}^{n} R_{jkkl}e_j + \frac{1}{3}\sum_{j\neq k\neq m\neq j}\left(R_{jkml} + R_{kmjl} + R_{mjkl}\right)e_j \cdot e_k \cdot e_m\Bigg] \cdot e_l.$$

Por la identidad de Bianchi, $R_{jkml} + R_{kmjl} + R_{mjkl} = 0$, el tercer sumando se anula. En el primero, al sumar en j queda $\sum_{j=1}^{n} R_{jkjl} = -\sum_{j=1}^{n} R_{kjjl} = -Ric_{kl}$, donde Ric denota el tensor de Ricci de la variedad M. En el segundo, al sumar en k resulta que $\sum_{k=1}^{n} R_{jkkl} = Ric_{jl}$, y entonces

$$2D^2 + 2\,\mathrm{traza}\nabla^2 = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\left[-\sum_{k=1}^{n} Ric_{kl}e_k - \sum_{j=1}^{n} Ric_{jl}e_j\right] \cdot e_l.$$

Realmente, tenemos dos veces el mismo término y resulta que

$$2D^2 + 2\,\mathrm{traza}\nabla^2 = -\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} Ric_{jl}e_j \cdot e_l.$$

Si separamos los términos para los que $j = l$, $j < l$ y $j > l$, encontramos que

$$\begin{aligned} 2D^2 + 2\,\mathrm{traza}\nabla^2 &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Ric_{jj}e_j \cdot e_j - \frac{1}{2}\sum_{j<l} Ric_{jl}e_j \cdot e_l - \frac{1}{2}\sum_{j>l} Ric_{jl}e_j \cdot e_l \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Ric_{jj} = \frac{1}{2}S, \end{aligned}$$

y esto concluye la demostración. ∎

La primera información que podemos obtener sobre los valores propios de D la dio Lichnerowicz para el caso de variedades compactas sin borde con curvatura escalar estrictamente positiva. Simplemente se trata de usar la fórmula de Schrödinger–Lichnerowicz (Teorema 1.6.1) para un campo de espinores ψ arbitrario, hacer producto hermítico por él mismo e integrar sobre la variedad, teniendo en cuenta la Proposición 1.5.3. Entonces se tiene la siguiente fórmula integral de tipo Bochner

$$\int_M \left(\frac{1}{4} S \left|\psi\right|^2 + \left|\nabla\psi\right|^2 - \left|D\psi\right|^2 \right) = 0. \tag{1.22}$$

Como $|\nabla\psi|_{L^2} \geq 0$, se concluye lo siguiente.

Teorema 1.6.2 (Lichnerowicz, 1963) *Si M es una variedad riemanniana espinorial compacta (sin borde) de curvatura escalar estrictamente positiva, entonces no hay campos no triviales de espinores armónicos, es decir, la única solución de $D\psi = 0$, para $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$, es la trivial.*

Este resultado permitió a Lichnerowicz [Li2] dar la primera obstrucción conocida a que una variedad compacta (espinorial) soportara una métrica de Riemann con curvatura escalar positiva, en términos de su $\hat{A}$-género [LM, BW]. La misma demostración de su teorema proporciona una cota inferior para los valores propios del operador de Dirac. De hecho, si $\lambda \in Spec(D)$, se tiene

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \min_M S.$$

La igualdad no se alcanza nunca, ya que en tal caso, cada campo de espinores propio sería paralelo para la conexión espinorial y, por tanto, armónico.

Algún tiempo después, T. Friedrich mejoró esta cota inferior, con la ventaja de que consiguió caracterizar cuándo se alcanza la igualdad, llegando así al primer teorema de comparación conocido para el operador de Dirac.

Teorema 1.6.3 (Desigualdad de Friedrich, 1980) *Si M es una variedad riemanniana espinorial compacta (sin borde) de dimensión n, cuya curvatura escalar satisface*

$$S \geq n(n-1),$$

o sea, está minorada por la curvatura escalar de una esfera unidad de la misma dimensión, entonces cualquier valor propio λ de su operador de Dirac cumple

$$|\lambda| \geq \frac{n}{2}$$

y se alcanza la igualdad si, y sólo si, cada campo de espinores ψ sobre M propio para el valor propio λ satisface la siguiente ecuación lineal de primer orden

$$\nabla_X \psi = \pm \frac{1}{2} X \cdot \psi, \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Observación 1.6.4 *Por supuesto, un sencillo argumento basado en una dilatación conveniente de la métrica de la variedad, prueba que el teorema de comparación anterior se puede establecer siempre que la curvatura escalar de la variedad ambiente esté acotada inferiormente por cualquier constante positiva.*

Una demostración sencilla de este teorema, no la original, se consigue repitiendo el argumento del Teorema 1.6.2 de Lichnerowicz y, en vez de minorar en la fórmula (1.22) la norma L^2 del campo de espinores propio por cero, se usa la siguiente desigualdad de Schwarz para campos de espinores.

Lema 1.6.5 *Para cada $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$, se tiene que*

$$|D\psi|^2 \leq n\,|\nabla\psi|^2. \tag{1.23}$$

La igualdad caracteriza a los campos de espinores llamados twistor*, es decir, a los que son solución de la siguiente ecuación de primer orden*

$$\nabla_X \psi = -\frac{1}{n} X \cdot D\psi, \quad \forall X \in \Gamma(TM). \tag{1.24}$$

Demostración: La definición de operador de Dirac, la desigualdad triangular en el espacio hermítico $\mathbb{S}_n$ y la desigualdad de Schwarz ordinaria implican que

$$|D\psi|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi|\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} |e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi|^2.$$

Ahora se acaba usando (1.11). El caso de la igualdad se analiza sin dificultad. ∎

De hecho, la igualdad en el Teorema 1.6.3 anterior, se da para campos *twistor* que son también campos propios asociados al valor propio $\lambda = \pm\frac{n}{2}$. En general a un campo de espinores tal que

$$\nabla_X \psi = \alpha X \cdot \psi, \quad \forall X \in \Gamma(TM). \tag{1.25}$$

se le conoce como *campo de espinores de Killing* asociado a la constante de Killing α. El nombre que reciben este tipo de campos de espinores procede de que, al construir el campo de vectores tangentes

$$X_\psi := i \sum_{j=1}^{n} (\psi, e_j \cdot \psi)\, e_j,$$

éste resulta ser un campo de Killing sobre M (es decir, para cada $Y, Z \in \Gamma(TM)$ se verifica que $\langle \nabla_Y X_\psi, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X_\psi\rangle = 0$). Aunque admitiésemos la posibilidad de que α fuese una función sobre M, este sistema de ecuaciones que define a los campos de Killing es tan particular que obliga a la función asociada al campo a ser constante. Además, también la curvatura escalar S es constante sobre M, puesto que, como consecuencia de (1.15), se obtiene la igualdad

$$S = \frac{4\,(n-1)}{n}\,\alpha^2. \tag{1.26}$$

Aún más, usando inteligentemente (1.15), si la variedad M^n admite un campo no trivial de espinores de Killing, se deduce que ha de ser una variedad de Einstein con tensor de Ricci

$$Ric = \frac{4\,(n-1)}{n^2}\,\alpha^2\langle\ ,\ \rangle. \tag{1.27}$$

Un estudio exhaustivo sobre estas propiedades y sobre otras muchas de los campos de espinores *twistor* y de Killing se puede ver en [BFGK]. Nosotros sólo destacaremos lo que sigue.

Observación 1.6.6 *La* ***constante de Killing*** α *es, o bien un número real, cuando* S *es no negativa, o bien un número imaginario puro no nulo, cuando* S *es negativa. Así se dice que un campo de espinores de Killing es* ***paralelo***, ***real*** *o* ***imaginario*** *según si su constante de Killing asociada es cero, real no nula o imaginaria pura no nula. Si la variedad* M *es completa, entonces* M *es compacta cuando* α *es una constante real, pero no es compacta cuando* α *es una constante imaginaria pura no nula. Además la función* $|\psi|^2$ *es una constante no nula sobre* M *cuando* α *es real, y es una función estrictamente positiva no constante sobre* M *cuando* α *es imaginario [Ba1, Ba2]. En cualquier caso, un campo de espinores de Killing no trivial no puede anularse en ningún punto de la variedad. También se puede ver [BFGK] que un campo de espinores* twistor *no trivial no puede anularse en un abierto.*

El interés por las variedades que poseen algún campo de Killing no trivial no es sólo matemático, sino también físico, pues tales tipos de campos de espinores aparecen en las teorías de supergravedad (véase [DNP]). Como la ecuación (1.25) que los define es sobredeterminada, son pocas las variedades que disponen de alguno de ellos, pero precisamente eso las hace más interesantes. Ya sabemos que existen importantes obstrucciones geométricas a su existencia. Por ejemplo, hemos visto que han de ser variedades de Einstein. Aparte de ello, el grupo de holonomía de la variedad queda fuertemente afectado por la existencia de un campo de ese tipo. Esto le ha permitido a M. Wang, C. Bär y H. Baum clasificar las variedades riemannianas espinoriales completas que tienen campos de espinores no triviales paralelos, de Killing reales y de Killing imaginarios, respectivamente [Fr1, Hi2, BFGK, Wa, Ht, Ba2, Bä1].

La forma en que hemos presentado la estimación de Friedrich 1.6.3 nos permite observar la analogía con el más conocido resultado de Lichnerowicz-Obata [Li2] que afirma que *si el tensor de Ricci de una variedad compacta sin borde está minorado por el de una esfera euclídea, el primer valor propio de su operador laplaciano también está minorado por el de la correspondiente esfera* (véase también [Ch, página 82]). La desigualdad de Friedrich puede verse como una versión espinorial del teorema anterior ya que $n(n-1)$ es el valor de la curvatura escalar en una esfera de dimensión n y radio uno y $\pm n/2$ son los valores propios del operador de Dirac con menor valor absoluto sobre esa misma esfera (como se verá en la sección siguiente). De la misma forma que la igualdad en el teorema de Lichnerowicz-Obata la alcanzaban las variedades que soportan soluciones no triviales de la llamada ecuación de Obata, la igualdad en el teorema de Friedrich se da en las variedades espinoriales sobre las que existen campos de espinores de Killing no triviales. En ese sentido, la ecuación (1.25) se puede ver como un análogo espinorial a las ecuaciones de Obata y Kanai [Kan].

1.7. El operador de Dirac sobre hipersuperficies

De la misma forma que la estructura riemanniana de una variedad se hereda sobre sus subvariedades a través de la métrica y la conexión de Levi-Civita inducidas, vamos a ver ahora que, en el caso particular de las hipersuperficies orientables, también se hereda de la variedad ambiente la estructura riemanniana espinorial. Como además ya hemos señalado que los espacios ambientes más comunes de la Teoría de Subvariedades están dotados de tales estructuras espinoriales, esto nos permitirá usar toda la maquinaria espinorial y el operador de Dirac para estudiar Geometría de Subvariedades, de la misma forma que se ha venido utilizando para ello el operador laplaciano en la segunda mitad del siglo pasado.

Sea M una variedad riemanniana espinorial de dimensión $n+1$ con una orientación dada y estructura riemanniana espinorial fija $Spin(M)$, y representemos por $\mathbb{S}M$ el correspondiente fibrado espinorial, por $\cdot$ la multiplicación de Clifford, y por ∇ sus conexiones riemanniana y espinorial de Levi-Civita. Sea Σ una hipersuperficie orientable de M y sea $N : \Sigma \to T^{\perp}\Sigma \subset TM$ una elección del campo normal y unitario sobre Σ. Consideraremos en Σ la orientación inducida por esta elección de normal. La variedad M induce también sobre Σ una métrica de Riemann y una conexión de Levi-Civita asociada ∇^{Σ}, que está relacionada con la de M mediante la *fórmula de Gauss*

$$\nabla_X Y = \nabla^{\Sigma}_X Y + \langle AX, Y\rangle N \tag{1.28}$$

para cada $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$, donde $A : \Gamma(T\Sigma) \to \Gamma(T\Sigma)$ es el *endomorfismo de Weingarten* definido mediante $AX := -\nabla_X N$, para cada $X \in \Gamma(T\Sigma)$.

En la Sección 1.3 vimos que, como el fibrado normal de Σ en M es trivial, la hipersuperficie Σ es una variedad espinorial. Por lo tanto, es una variedad riemanniana espinorial. Veamos, en primer lugar, que la estructura riemanniana espinorial de la variedad ambiente induce una estructura del mismo tipo sobre Σ. En efecto, cada base ortonormal positivamente orientada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ del espacio tangente a Σ en un punto da lugar a una base del mismo tipo $\{e_1, \ldots, e_n, N\}$ del espacio tangente a M en ese mismo punto. Esa aplicación determina la inclusión de fibrados

$$SO(\Sigma) \subset SO(M)|_{\Sigma},$$

correspondiente a la inclusión $SO_n \subset SO_{n+1}$ de los grupos estructurales dada por

$$A \in SO_n \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO_{n+1}. \tag{1.29}$$

Entonces el recubrimiento $Spin(M)|_{\Sigma} \to SO(M)|_{\Sigma}$ induce un recubridor de dos hojas sobre $SO(\Sigma)$ a cuyo espacio total llamaremos $Spin(\Sigma)$. Así se tiene el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} Spin(\Sigma) & \subset & Spin(M)|_\Sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(\Sigma) & \subset & SO(M)|_\Sigma. \end{array} \tag{1.30}$$

Por otro lado, usamos la inclusión $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ entre espacios euclídeos dada por

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

para definir otra inclusión entre las álgebras de Clifford correspondientes

$$\mathbb{C}l_n \subset \mathbb{C}l_{n+1}, \qquad v \in \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}l_n \mapsto v \cdot e_{n+1} \in \mathbb{C}l_{n+1}, \tag{1.31}$$

donde $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el último vector de la base canónica. De esa forma, la imagen de la inclusión entre las álgebras de Clifford es exactamente la subálgebra $\mathbb{C}l^0_{n+1}$ engendrada por los monomios de grado par. Es conveniente darse cuenta de que esta inclusión de álgebras de Clifford no lleva al subespacio $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}l_n$ en el correspondiente subespacio $\mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{C}l_{n+1}$ pero, en cambio, sí proporciona una inclusión para los grupos espinoriales que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}l_n & \supset & Spin_n & \subset & Spin_{n+1} & \subset & \mathbb{C}l_{n+1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & SO_n & \subset & SO_{n+1}, & & \end{array}$$

donde la inclusión de abajo es exactamente la que aparecía en (1.29). Se puede ver que, entonces, el grupo $Spin_n$ actúa a través de esta inclusión sobre $Spin(\Sigma)$ de manera que

$$\begin{array}{ccc} Spin(\Sigma) \times Spin_n & \longrightarrow & Spin(\Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(\Sigma) \times SO_n & \longrightarrow & SO(\Sigma) \end{array}$$

conmuta. Entonces $Spin(\Sigma)$ es una estructura riemanniana espinorial para la orientación y la métrica inducidas de la variedad ambiente M. Esta es la llamada *estructura riemanniana espinorial inducida* en la hipersuperficie.

Asociada a esta estructura inducida sobre Σ tenemos su fibrado espinorial $\mathbb{S}\Sigma = Spin(\Sigma) \times_{\gamma_n} \mathbb{S}_n$, dotado de su conexión espinorial de Levi-Civita ∇^Σ y de su multiplicación de Clifford γ^Σ. Representaremos por D^Σ al *operador de Dirac (intrínseco)* asociado al fibrado de Dirac $\left(\mathbb{S}\Sigma, \gamma^{\Sigma}, \nabla^{\Sigma}\right)$, es decir, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es cualquier base local de referencias ortonormales sobre Σ,

$$\forall\phi \in \Gamma(\mathbb{S}\Sigma), \quad D^{\Sigma}\phi = \sum_{j=1}^{n} \gamma^{\Sigma}(e_j)\nabla^{\Sigma}_{e_j}\phi.$$

Para poder relacionar los operadores de Dirac intrínsecos D de M y D^{Σ} de Σ debemos describir primeramente la relación existente entre los correspondientes fibrados espinoriales $\mathbb{S}M$ y $\mathbb{S}\Sigma$ sobre cuyas secciones actúan. Aunque esa relación está descrita de diversas formas en la bibliografía (véanse, por ejemplo, [Bä2, BFGK, HMZ1, HMZ3, Bur, Tr, Mo]), el hecho de que el interés por las estructuras espinoriales en subvariedades sea bastante reciente hace que esas descripciones sean muy diversas y muchas veces difíciles de entender. Por esta razón, nosotros desarrollaremos ahora nuestro propio esquema. Consideremos el fibrado hermítico

$$\mathbf{S} := \mathbb{S}M|_{\Sigma}$$

que se obtiene restringiendo a la hipersuperficie Σ el fibrado espinorial de la variedad ambiente. Cuando $n+1$ es par, la descomposición quiral (1.10) de $\mathbb{S}M$ induce una descomposición

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{+} \oplus \mathbf{S}^{-}, \qquad \mathbf{S}^{\pm} = \mathbb{S}^{\pm}M|_{\Sigma}.$$

Estos fibrados son fibrados vectoriales asociados al fibrado principal $Spin(M)|_{\Sigma}$ con fibras tipo $\mathbb{S}_{n+1}$ y, cuando $n+1$ es par, $\mathbb{S}^{\pm}_{n+1}$, asociados a la acción γ_{n+1} del grupo $Spin_{n+1}$, o sea,

$$\mathbf{S} = Spin(M)|_{\Sigma} \times_{\gamma_{n+1}} \mathbb{S}_{n+1} \qquad \mathbf{S}^{\pm} = Spin(M)|_{\Sigma} \times_{\gamma_{n+1}} \mathbb{S}^{\pm}_{n+1}.$$

Supongamos que n es par. Sabemos que, en ese caso, teniendo en cuenta la inclusión (1.31), $\mathbb{C}l_n \equiv \mathbb{C}l^0_{n+1}$ actúa irreduciblemente sobre $\mathbb{S}_{n+1}$. Podemos pues suponer que $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_{n+1}$ y entonces γ_n se puede ver como una representación de $Spin_n$ sobre $\mathbb{S}_{n+1}$. Se tiene así, a partir de la inclusión (1.30), una inclusión natural

$$\mathbb{S}\Sigma = Spin(\Sigma) \times_{\gamma_n} \mathbb{S}_n \subset Spin(M)|_{\Sigma} \times_{\gamma_{n+1}} \mathbb{S}_{n+1} = \mathbf{S}.$$

No es difícil comprobar que esa inclusión es, de hecho, una igualdad. Por contra, cuando n es impar, $\mathbb{C}l_n \equiv \mathbb{C}l^0_{n+1}$ no actúa irreduciblemente sobre $\mathbb{S}_{n+1}$, sino que estabiliza los subespacios quirales $\mathbb{S}^{\pm}_{n+1}$, sobre los que sí actúa de forma irreduclible. Podemos entonces suponer que $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}^{+}_{n+1}$ y, razonando como antes, se tiene una inclusión natural

$$\mathbb{S}\Sigma = Spin(\Sigma) \times_{\gamma_n} \mathbb{S}_n \subset Spin(M)|_{\Sigma} \times_{\gamma_{n+1}} \mathbb{S}^{+}_{n+1} = \mathbf{S}^{+},$$

que también es una igualdad.

En resumen, los argumentos anteriores muestran que el fibrado espinorial *extrínseco* **S** sobre la hipersuperficie Σ puede, de alguna forma, identificarse con el fibrado espinorial *intrínseco* $\mathbb{S}\Sigma$ correspondiente a la estructura espinorial inducida. Concretamente

$$\mathbf{S} = \mathbb{S}M|_{\Sigma} \equiv \begin{cases} \mathbb{S}\Sigma, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathbb{S}\Sigma \oplus \mathbb{S}\Sigma, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Recordando ahora las discusiones previas al Lema 1.4.2, donde definimos la multiplicación de Clifford y la conexión de Levi-Civita espinorial sobre el fibrado espinorial de una variedad riemanniana espinorial, y teniendo en cuenta que la inclusión de fibrados de Clifford $\mathbb{C}l(\Sigma) \subset \mathbb{C}l(M)|_{\Sigma}$ que debemos considerar es la inducida por la inclusión algebraica (1.31) y que las conexiones de Σ y M están relacionadas mediante la segunda forma fundamental de la hipersuperficie por la ecuación de Gauss (1.28), se llega a las siguientes identificaciones

$$\nabla^{\mathbf{S}} \equiv \begin{cases} \nabla^{\Sigma}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \nabla^{\Sigma} \oplus \nabla^{\Sigma}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \quad \text{y} \quad \gamma^{\mathbf{S}} \equiv \begin{cases} \gamma^{\Sigma}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \gamma^{\Sigma} \oplus -\gamma^{\Sigma}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{1.32}$$

donde la multiplicación de Clifford $\gamma^{\mathbf{S}}$ y la conexión $\nabla^{\mathbf{S}}$ *extrínsecas* sobre el fibrado **S** están dadas por

$$\gamma^{\mathbf{S}} := -\gamma(N)\gamma \qquad \text{y} \qquad \nabla^{\mathbf{S}} := \nabla - \frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}(A) = \nabla + \frac{1}{2}\gamma(N)\gamma(A). \tag{1.33}$$

Con esta multiplicación de Clifford y esta conexión el fibrado extrínseco **S** queda conformado como un fibrado de Dirac. El correspondiente *operador de Dirac (extrínseco)* **D**, que actúa sobre $\Gamma(\mathbf{S})$ y que será también un operador diferencial de primer orden elíptico y formalmente autoadjunto, se relaciona, pues, con el operador de Dirac D^{Σ} sobre la hipersuperficie de la siguiente manera

$$\mathbf{D} := \sum_{j=1}^{n} \gamma^{\mathbf{S}}(e_j)\nabla^{\mathbf{S}}_{e_j} \equiv \begin{cases} D^{\Sigma}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ D^{\Sigma} \oplus -D^{\Sigma}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{1.34}$$

Como consecuencia, si Σ es compacta, los espectros de los operadores de Dirac intrínseco y extrínseco, D^Σ y $\mathbf{D}$, están también estrechamente relacionados:

$$Spec\,(\mathbf{D}) \equiv \begin{cases} Spec\left(D^\Sigma\right), & \text{si } n \text{ es par,} \\ Spec\left(D^\Sigma\right) \oplus -Spec\left(D^\Sigma\right), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{1.35}$$

También lo están las respectivas multiplicidades:

$$mult_{\mathbf{D}}\,(\lambda) = mult_{D^\Sigma}\,(\lambda) + mult_{D^\Sigma}\,(-\lambda)\,,$$

donde si $\lambda \in Spec\left(D^\Sigma\right)$ pero $-\lambda \notin Spec\left(D^\Sigma\right)$, se entiende que $mult_{D^\Sigma}\,(-\lambda) = 0$.

Teniendo en cuenta las definiciones (1.33), se comprueba inmediatamente que

$$\mathbf{D} = \frac{nH}{2} - \gamma(N) \sum_{j=1}^{n} \gamma(e_j) \nabla_{e_j},$$

donde $H = (1/n)\,traza\,(A)$ es la *curvatura media* de la hipersuperficie Σ respecto del campo normal N. Cuando $\mathbf{D}$ se aplica a la restricción de un campo de espinores $\psi \in \Gamma\,(\mathbb{S}M)$, se puede precisar que

$$\mathbf{D}\psi = \frac{nH}{2}\psi - \gamma(N) D\psi - \nabla_N \psi, \tag{1.36}$$

donde hemos representado de la misma forma tanto al campo ψ como a su restricción a Σ. Por otro lado, la misma definición de $\nabla^{\mathbf{S}}$ nos permite asegurar que

$$\nabla^{\mathbf{S}} \gamma(N) = \gamma(N) \nabla^{\mathbf{S}} \qquad \mathbf{D}\gamma(N) = -\gamma(N)\mathbf{D}, \tag{1.37}$$

y así, si Σ es compacta, el espectro de $\mathbf{D}$ es simétrico respecto de cero, lo cual también se podría haber deducido de (1.35), ya que el espectro del operador de Dirac sobre una variedad de dimensión par es siempre simétrico por (1.16).

Una primera consecuencia de las identificaciones anteriores se obtiene considerando el caso en que la variedad ambiente M es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$ y la hipersuperficie Σ es una esfera S^n de radio uno. Es inmediato que el endomorfismo de Weingarten A de la esfera con respecto al normal interior es la aplicación identidad. Por lo tanto, en este caso particular, la igualdad (1.33) se transforma en

$$\nabla^{\mathbf{S}} = \nabla - \frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}},$$

que actúa sobre las secciones de $\mathbf{S}$, en este caso, $C^\infty(S^n, \mathbb{C}^{2^{[n/2]}})$ y donde ∇ es la conexión euclídea, o sea, la derivación ordinaria. Por lo tanto si ψ es un campo de espinores sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ representado por una función constante, o sea, un campo paralelo, su restricción a la esfera nos da un campo que satisface la ecuación

$$\nabla^{\mathbf{S}}\psi = -\frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}\psi.$$

Si tenemos en cuenta ahora las relaciones (1.32) entre las conexiones y las multiplicaciones de Clifford intrínsecas y extrínsecas sobre la esfera S^n y sus relaciones (1.33) y (1.37) con la multiplicación de Clifford por el campo normal, se obtiene el siguiente resultado.

Observación 1.7.1 *Consideremos sobre la esfera S^n de radio uno su única estructura espinorial y la métrica y orientación inducidas de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces existen $2^{[\frac{n+1}{2}]}$ campos de espinores independientes que son solución de cada una de las dos ecuaciones siguientes*

$$\nabla\psi = \pm\frac{1}{2}\gamma\psi.$$

O sea, la esfera soporta un número maximal de campos de espinores de Killing reales. Por lo tanto son campos propios para el operador de Dirac que satisfacen

$$D\psi = \pm\frac{n}{2}\psi.$$

De hecho, usando el hecho de que S^n es una hipersuperficie del espacio euclídeo, se puede calcular todo el espectro del operador de Dirac sobre la esfera (ver, por ejemplo, [Tr]). Se ve entonces que $\pm\frac{n}{2}$ son precisamente los valores propios de menor valor absoluto. Esto último es también consecuencia de la Observación 1.7.1 anterior y de la desigualdad 1.6.3 de Friedrich.

1.8. La fórmula integral de Schrödinger–Bochner–Lichnerowicz–Weitzenböck

Supongamos ahora que la hipersuperficie Σ bordea un dominio compacto $\Omega \subset M$ de la variedad ambiente (en particular, Σ es orientable, compacta y sin borde). En este caso, el campo normal y unitario $N : \Sigma \to TM$ lo elegimos para que apunte hacia el interior de Ω. Fijemos un campo de espinores $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Omega)$ y definamos dos 1-formas diferenciales $\alpha, \beta : \Gamma(T\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ mediante las expresiones

$$\forall Y \in \Gamma(T\Omega), \quad \alpha(Y) := \langle Y \cdot D\psi, \psi \rangle, \quad \beta(Y) := \langle \nabla_Y \psi, \psi \rangle.$$

El *teorema de la divergencia* afirma que

$$\int_\Omega \delta(\alpha + \beta) = -\int_\Sigma (\alpha + \beta)(N).$$

Calculemos cada miembro de la igualdad. Por un lado, observando que las funciones codiferenciales asociadas son $\delta\alpha = \langle D^2\psi, \psi\rangle - |D\psi|^2$ y $\delta\beta = -\langle \mathrm{traza}\, \nabla^2\psi, \psi\rangle + |\nabla\psi|^2$, tenemos

$$\int_\Omega \delta(\alpha + \beta) = \int_\Omega \left(\langle D^2\psi, \psi\rangle - |D\psi|^2 - \langle \mathrm{traza}\, \nabla^2\psi, \psi\rangle + |\nabla\psi|^2\right).$$

Usando ahora la fórmula de Schrödinger–Lichnerowicz (Teorema 1.6.1), obtenemos

$$\int_\Omega \delta(\alpha + \beta) = \int_\Omega \left(\frac{1}{4} S\langle\psi, \psi\rangle + |\nabla\psi|^2 - |D\psi|^2\right),$$

donde S es la curvatura escalar de la variedad ambiente M. Por otro lado, como $\alpha(N) = \langle N \cdot D\psi, \psi\rangle$ y $\beta(N) = \langle \nabla_N\psi, \psi\rangle$, se deduce que

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{4} S\langle\psi, \psi\rangle + |\nabla\psi|^2 - |D\psi|^2\right) = -\int_\Sigma \langle N \cdot D\psi + \nabla_N\psi, \psi\rangle,$$

que no es más que una versión para variedades con borde de la fórmula integral (1.22) de Bochner–Lichnerowicz que ya escribimos en el caso de borde vacío. De hecho, en 1981, E. Witten [Wi1] utilizó esta fórmula integral, cuando M es una hipersuperficie espacial de una variedad de Lorentz, en su demostración del Teorema de la Masa Positiva. La novedad que aporta toda la discusión de la Sección 1.7 precedente es que la integral en la hipersuperficie Σ del borde puede expresarse en términos de la estructura del fibrado inducido $\mathbf{S}$ y, por tanto, de la estructura intrínseca $\mathbb{S}\Sigma$. De esa forma se abre la posibilidad de hacer intervenir, en el análisis de los operadores de Dirac del dominio y de su borde, a la geometría de ese borde. En efecto, se trata sólo de usar la igualdad (1.36). Así se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.8.1 (Fórmula integral de Schrödinger–Bochner–Lichnerowicz–Weitzenböck) *Sea M una variedad riemanniana espinorial de dimensión $n+1$ y sea $\Sigma = \partial\Omega$ sea una hipersuperficie que bordea un dominio compacto Ω de M. Entonces para cada $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Omega)$ se verifica la siguiente identidad*

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{4} S\, |\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 - |D\psi|^2 \right) = \int_{\partial\Omega} \left(\langle \mathbf{D}\psi, \psi \rangle - \frac{nH}{2} |\psi|^2 \right),$$

donde S es la curvatura escalar de M y H es la curvatura media de Σ respecto de la orientación interior.

Esta igualdad integral presenta, pues, una diferencia con respecto a la más conocida fórmula de Bochner–Lichnerowicz (1.22) válida para variedades compactas sin borde: existe un término en el borde en donde aparecen el operador de Dirac de la hipersuperficie y su curvatura media. Si usamos ahora, en el lado izquierdo, la desigualdad de Schwarz (1.23), obtenemos el siguiente Corolario.

Corolario 1.8.2 (Desigualdad espinorial de Reilly) *En las mismas condiciones del Teorema 1.8.1, para cada $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Omega)$ se verifica*

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{4} S\, |\psi|^2 - \frac{n}{n+1} |D\psi|^2 \right) \leq \int_{\partial\Omega} \left(\langle \mathbf{D}\psi, \psi \rangle - \frac{nH}{2} |\psi|^2 \right), \tag{1.38}$$

y se alcanza la igualdad únicamente cuando ψ es un campo de espinores twistor *sobre el dominio Ω.*

Se puede mirar esta desigualdad integral desde dos puntos de vista diferentes. Uno de ellos consiste en poner el énfasis en su miembro izquierdo. Desde esa posición la desigualdad será útil para estudiar el operador D de la variedad con borde Ω, sujeto a condiciones de frontera convenientes. Esto lo haremos en el Capítulo 2 siguiente. Pero una segunda forma de contemplar la desigualdad anterior consiste en intentar usarla para extraer información sobre el operador de Dirac $\mathbf{D}$ de la hipersuperficie del borde y sobre su curvatura media. Esto lo haremos en el Capítulo 3 de esta Memoria. La idea original de utilizar una desigualdad integral como la anterior, para el caso del laplaciano sobre funciones, para obtener información sobre la geometría de la frontera fue de C.R. Reilly en 1976 (véase [Re]). Por ello la denominaremos en lo que sigue *desigualdad (espinorial) de Reilly*.

Capítulo 2

Teoremas de comparación para el operador de Dirac en variedades con borde

Uno de los objetos analíticos que mayor información aporta sobre un operador arbitrario es su espectro. Por ello, su estudio ha sido tradicionalmente una tarea de gran interés para matemáticos y físicos. Son innumerables, por ejemplo, los trabajos acerca del espectro del laplaciano en variedades de Riemann (ver [Ch] para una muy buena recopilación). Hemos comentado en el primer capítulo que cuando una variedad riemanniana espinorial M es compacta y sin borde, el operador de Dirac D es autoadjunto respecto del producto $(\ ,\ )_{L^2}$ definido en (1.20), y, en consecuencia, puede deducirse que su espectro es real, discreto y no acotado. Cada valor propio posee multiplicidad finita y el espacio $L^2(\mathbb{S}M)$ de campos de espinores con cuadrado integrable posee una base de Hilbert formada por campos diferenciables propios para D. El Teorema 1.6.2 de Lichnerowicz proporcionó una primera relación entre la geometría y el espectro de D y la desigualdad de Friedrich 1.6.3 nos consiguió una cota inferior alcanzable para cualquier valor propio de D, cuando la curvatura escalar de la variedad es positiva. Existe una extensa literatura acerca de este tema, con acotaciones tanto superiores como inferiores en situaciones menos generales (véase [Bä2, Gi1, Gi2, GM, Kr, Hi1, HMZ3, Mo, Zh]).

Cuando la variedad compacta posee borde no vacío, el operador de Dirac tiene en general imagen de codimensión finita pero núcleo de dimensión infinita (véanse las Observaciones 2.1.1 y 2.1.2). En tal caso, para conseguir índice finito y regularidad, parece conveniente buscar condiciones de frontera *adecuadas* para restringir la clase de campos de espinores admisibles. La teoría general de ecuaciones diferenciales pone de manifiesto que existe un tipo especial de condiciones de frontera, llamadas *elípticas*, que presentan un buen comportamiento en lo que se refiere a existencia, regularidad y unicidad de las soluciones ([GT, BW, CoH, Hö]). Para los operadores de orden dos, como el laplaciano, existen diversos métodos de estudio *ad hoc* sobre este tipo de condiciones, que suelen ser condiciones de tipo *local* (ver [GT, Ch]), tales como la condición de Dirichlet o la de Neumann. Para los de orden arbitrario, incluyendo los de orden uno, por ejemplo, el de Cauchy-Riemann y los operadores de tipo Dirac, quizás el mejor método sea el de los *operadores pseudo-diferenciales* [Hö, Se], ya que las condiciones más clásicas para ellos son de naturaleza *global*.

El caso de las variedades compactas con borde no vacío no es una mera generalización matemática del caso sin borde. Probablemente éste sea incluso menos intuitivo y, desde un punto de vista físico, los campos definidos sobre compactos con condiciones de frontera modelan situaciones de objetos físicos que están *confinados* a una determinada región del espacio [J], cosa que está mucho más de acuerdo con la realidad en la mayoría de los casos. Con el fin de estudiar el espectro del operador de Dirac en variedades compactas con borde no vacío, estudiaremos a lo largo del presente capítulo la elipticidad de cuatro condiciones de frontera que se pueden plantear asociadas al operador de Dirac sobre una variedad riemanniana espinorial compacta, cuyo borde tiene curvatura media no negativa respecto del normal interior. Dos de estas condiciones serán de naturaleza global, mientras que las otras dos serán de tipo local. Dos de ellas son más o menos conocidas y han sido usadas en diversos contextos matemáticos o físicos [APS, FS, J], aunque aquí sistematizamos su estudio y mejoramos los resultados obtenidos, y otras dos son nuevas. Demostraremos que, bajo estas cuatro condiciones, el problema de valores propios

$$\begin{cases} D\psi = \lambda\psi, & \text{sobre } M, \\ B\,\psi|_{\partial M} = 0, & \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

posee espacios propios de dimensión finita formados por campos diferenciables. La igualdad (1.21) nos convence de que, en el caso con borde, el operador de Dirac será simétrico para el producto L^2 dependiendo de la condición de frontera impuesta. El espectro pues no será necesariamente real y sólo podremos garantizar un espectro discreto en $\mathbb{C}$, salvo que sea todo el plano complejo (ver Proposición 2.1.5). Además, el cuadrado de cualquier valor propio de este problema está acotado inferiormente en términos del mínimo de la curvatura escalar S de M. De hecho, comprobaremos que la *desigualdad de Friedrich*

$$|\lambda|^2 \geq \frac{(n+1)^2}{4}$$

es aún válida bajo estas cuatro condiciones, si la curvatura escalar S de M satisface $S \geq n(n+1)$, es decir, es mayor o igual que la de una esfera de radio uno y de la misma dimensión $n+1$ que la variedad y si la curvatura media H del borde ∂M es no negativa respecto del normal interior. Cuando la variedad no poseía borde, la igualdad caracterizaba a las variedades que poseen algún campo no trivial de espinores de Killing real. El caso con borde se hace más interesante desde el punto de vista de la igualdad, puesto que estas cuatro condiciones se comportan de manera distinta: bajo dos de ellas, la igualdad nunca se alcanza, y las otras caracterizan a las semiesferas y a los dominios acotados por hipersuperficies minimales en variedades con campos no triviales de espinores de Killing.

Un resumen de este Capítulo 2, cuya referencia completa es [HMR1], ha sido publicado en Commun. Math. Phys.

2.1. Condiciones de frontera elípticas

A lo largo del presente capítulo, M será una variedad riemanniana espinorial de dimensión $n+1$, en la que se han fijado una orientación y una estructura riemanniana espinorial $Spin\,(M)$. Representaremos por $\mathbb{S}M$ al fibrado espinorial correspondiente y por ∇ a las conexiones riemanniana y espinorial de Levi-Civita. En lo sucesivo, cuando tomemos una hipersuperficie orientable de M, consideraremos sobre ella la estructura riemanniana espinorial inducida por la de M en el sentido de la Sección 1.7.

Si M es una variedad compacta sin borde, el operador de Dirac $D : \Gamma\,(\mathbb{S}M) \to$

$\Gamma(\mathbb{S}M)$ es un *operador de Fredholm* ([Fr2, página 107], [LM, Sección III.5]; [Co, Capítulo XI] hace un estudio general de este tipo de operadores), es decir, su núcleo posee dimensión finita y su imagen es un subespacio cerrado de codimensión finita. Como hemos comentado arriba, cuando M posee frontera no vacía, la condición sobre el núcleo no es necesariamente cierta. En la siguiente sección introduciremos cuatro condiciones de frontera B *adecuadas* (en el sentido de Seeley [Se]) para que la intersección entre el núcleo de D y el espacio de campos de espinores que verifiquen $B\,\psi|_{\partial M} = 0$ sea de dimensión finita, y entonces el problema de frontera

$$\begin{cases} D\psi = \Phi, & \text{sobre } M, \\ B\,\psi|_{\partial M} = \chi, & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\Phi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ y $\chi \in \Gamma(\mathbf{S})$, será de *tipo Fredholm*. En tal caso, podremos hablar de *índice* y hallar soluciones diferenciables de este problema, siempre que los datos Φ y χ del problema pertenezcan a ciertos subespacios de codimensión finita, y además estas soluciones serán únicas salvo un núcleo vectorial de dimensión finita.

Quizás sea interesante reseñar que es imposible resolver el problema de Dirichlet (2.1) para el operador de Dirac, es decir, el caso correspondiente a la elección de B como la identidad en (2.1). Sin embargo, los ejemplos sencillos que siguen, para el caso homogéneo, nos indican que parece razonable buscar condiciones de frontera que, de alguna manera, prefijen únicamente una *mitad* de estos valores.

Observación 2.1.1 *Si la variedad M es un intervalo compacto real $[a,b] \subset \mathbb{R}$, los campos de espinores son funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ y el operador de Dirac, como vimos en (1.18), es $Df = if'$. Las soluciones de la ecuación $Df = 0$ son pues las funciones constantes en $[a,b]$, que quedan completamente determinadas por su valor en un extremo del intervalo, $f(a) = c_0 \in \mathbb{C}$, es decir, sólo en la **mitad** del borde $\partial[a,b] = \{a,b\}$.*

Observación 2.1.2 *Sea ahora $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ el disco cerrado unidad. Vimos en (1.19) que cada campo de espinores ψ sobre $\mathbb{D}^2$ se puede identificar con un par de funciones complejas, $\psi \equiv (f,g) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}^2$ y que la ecuación $D\psi = 0$ equivale a que f y $\bar{g}$ sean holomorfas. Está claro, como en el caso anterior, que el núcleo del operador de Dirac D posee en esta variedad dimensión infinita. Así pues, las restricciones de f y g al borde del disco $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$, proporcionan funciones de una* *variable cuyos desarrollos de Fourier respectivos sólo poseen potencias de exponente no negativo o no positivo respectivamente, es decir, una* ***mitad*** *de sus correspondientes desarrollos es nula.*

El estudio acerca de las condiciones de frontera apropiadas para un operador elíptico $\mathfrak{D}$ de orden arbitrario, que actúe sobre las secciones diferenciables de un fibrado vectorial hermítico F sobre una variedad M, comenzó en los años cincuenta con los trabajos, entre otros, de Lopatinsky y Shapiro (véase [Hö, Lo]). La herramienta fundamental para el estudio de este tipo de condiciones fue descubierta en los años sesenta por Calderón y sistematizada posteriormente por Seeley. Se trata del *proyector de Calderón*. En el caso de operadores elípticos de primer orden, como el operador de Dirac, este objeto analítico es un operador pseudo-diferencial de orden cero (véase [BW, Se]) asociado al operador $\mathfrak{D}$, que envía secciones absolutamente continuas de la restricción $F|_{\partial M}$ del fibrado al borde de la variedad sobre restricciones $\psi|_{\partial M}$ de soluciones débiles de la ecuación $\mathfrak{D}\psi = 0$.

Observación 2.1.3 *La noción de operador pseudo-diferencial puede consultarse en [LM, Sección III.3]. Aquí únicamente señalamos que todo operador diferencial es pseudo-diferencial y que cierto tipo de proyecciones ortogonales también lo son (como veremos en la condición de frontera de Atiyah, Patodi y Singer, Sección 2.3). Hablando sin precisión, se podría decir que los operadores pseudo-diferenciales son generalizaciones de los operadores diferenciales ordinarios para las cuales sigue teniendo sentido el concepto de* ***símbolo principal*** *asociado. La composición de operadores pseudo-diferenciales también da otro operador pseudo-diferencial cuyo símbolo es la composición de los símbolos de los factores.*

Aunque existen diversos proyectores de Calderón asociados al mismo operador elíptico $\mathfrak{D}$, todos comparten un mismo símbolo principal $\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D}) : T\partial M \to End_{\mathbb{C}}(F)$, que depende únicamente del símbolo principal $\sigma_{\mathfrak{D}}$ del operador diferencial $\mathfrak{D}$, y que viene dado [Ca, FGMSS] por la expresión

$$\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D})(u) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[(\sigma_{\mathfrak{D}}(N))^{-1}\sigma_{\mathfrak{D}}(u) - \zeta I\right]^{-1} d\zeta, \tag{2.2}$$

para cada $p \in \partial M$ y cada $u \in T_p\partial M$, donde N es el campo normal y unitario interior al borde de M y Γ es un ciclo positivamente orientado en $\mathbb{C}$ que atrapa a los polos del integrando con parte imaginaria negativa. Pues bien, este símbolo principal $\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D})$ del proyector de Calderón basta para determinar cuándo una condición de frontera es *elíptica*, es decir, cuándo el correspondiente problema de frontera (2.1) está *bien planteado* (en el sentido de Seeley [Se]; ver también [BW, Cap. 18]).

Definición 2.1.4 *Sea M una variedad diferenciable con frontera no vacía, F un fibrado vectorial hermítico sobre M y $\mathfrak{D}$ un operador elíptico de primer orden que actúa sobre las secciones de F. Diremos que un operador pseudo-diferencial de orden cero $B : L^2(F|_{\partial M}) \to L^2(V)$, donde V es un fibrado vectorial hermítico sobre el borde ∂M, es una* ***condición elíptica de frontera (global)*** *para el operador $\mathfrak{D}$ cuando su símbolo principal $b : T\partial M \to Hom_{\mathbb{C}}(F|_{\partial M}, V)$ cumpla que, para cada vector no nulo $u \in T_p\partial M \diagdown \{0\}$, $p \in \partial M$,*

$$b(u)|_{im\,\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D})(u)} : im\,\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D})(u) \subset F_p \to V_p,$$

es un isomorfismo cuya imagen coincida con la de $b(u)$. Si, además, el rango de V coincide con la dimensión de la imagen $im\,\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D})(u)$ (y por tanto $b(u)|_{im\,\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D})(u)}$ sea un isomorfismo entre $im\,\mathfrak{p}_+(\mathfrak{D})(u)$ y V_p), diremos que B es una ***condición elíptica de frontera local****. Cuando B es un operador diferencial, esta definición coincide con las denominadas* ***condiciones de elipticidad de Lopatinski y Shapiro*** *(véase [Hö]).*

A continuación vamos a aplicar esta definición al caso en el que el operador $\mathfrak{D}$ es el operador de Dirac D sobre una variedad riemanniana espinorial compacta M con borde no vacío y el fibrado vectorial hermítico F es el fibrado espinorial $\mathbb{S}M$. Por lo anterior, para averiguar cuándo una condición de frontera B para el operador de Dirac es elíptica, necesitamos conocer el símbolo principal de su proyector de Calderón $\mathfrak{p}_+(D)$, que sólo depende del símbolo σ_D del operador de Dirac. Sabemos, por (1.17), que $\sigma_D(u) = i\gamma(u) : \mathbb{S}_pM \to \mathbb{S}_pM$ para $u \in T_pM$, $p \in M$. Entonces, calculando la integral compleja (2.2), se deduce que el símbolo principal $\mathfrak{p}_+(D)(u) : \mathbb{S}_pM \to \mathbb{S}_pM$ del proyector de Calderón para el operador de Dirac aplicado a un vector no nulo $u \in T_p\partial M$, $p \in \partial M$, es

$$\mathfrak{p}_+(D)(u) = -\frac{1}{2|u|}(i\gamma(N)\gamma(u) - |u|I) = \frac{1}{2|u|}\left(i\gamma^{\mathbf{S}}(u) + |u|I\right), \qquad (2.3)$$

donde $\gamma^{\mathbf{S}} = -\gamma(N)\gamma$ es la multiplicación de Clifford del fibrado espinorial restringido a la frontera $\mathbf{S} = \mathbb{S}M|_{\partial M}$ definida en (1.33). Dado que $\left(i\gamma^{\mathbf{S}}(u)\right)^2 = |u|^2 I$, la aplicación

$i\gamma^{\mathbf{S}}(u) : \mathbb{S}_p M \to \mathbb{S}_p M$ es un isomorfismo. Por ser autoadjunto respecto de la métrica hermítica, sabemos que es diagonalizable y que sus únicos valores propios son entonces $\pm|u|$. Los dos poseen la misma multiplicidad, pues el endomorfismo $\gamma(N)$ intercambia biyectivamente los subespacios propios. Así podemos descomponer $\mathbb{S}_p M$ como la suma directa $V^p_{|u|} \oplus V^p_{-|u|}$ de los subespacios propios de $i\gamma^{\mathbf{S}}(u)$ de manera que

$$\dim V^p_{|u|} = \dim V^p_{-|u|} = \frac{1}{2}\dim \mathbb{S}_p M.$$

Con esta notación, $\mathfrak{p}_+(D)(u)$ es, salvo una constante, el operador de proyección sobre el subespacio propio del operador $i\gamma^{\mathbf{S}}(u)$ asociado al valor propio $|u|$, por lo que su imagen es

$$im\, \mathfrak{p}_+(D)(u) = V^p_{|u|}.$$

En particular, $\dim im\, \mathfrak{p}_+(D)(u) = (1/2)\dim \mathbb{S}_p M$, y para un espinor $\eta \in \mathbb{S}_p M$ se verifica que

$$\eta \in im\, \mathfrak{p}_+(D)(u) \Leftrightarrow i\gamma(N)\gamma(u)\eta = -|u|\eta. \tag{2.4}$$

Esta descripción del símbolo principal $\mathfrak{p}_+(D)$ del proyector de Calderón del operador de Dirac sobre una variedad con borde nos permite averiguar cuándo una condición de frontera es elíptica (véase [BrL, BW, GLP, Hö, Se]).

Proposición 2.1.5 *Sean M una variedad riemanniana espinorial compacta con borde no vacío, $\mathbf{S} = \mathbb{S}M|_{\partial M}$ la restricción al borde del fibrado espinorial $\mathbb{S}M$ de M, y V un fibrado vectorial hermítico sobre ∂M. Un operador pseudo-diferencial de orden cero $B : L^2(\mathbf{S}) \to L^2(V)$ es una condición elíptica de frontera para el operador de Dirac de M si y sólo si su símbolo principal $b : T\partial M \to Hom_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}, V)$ satisface las dos siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \ker b(u) \cap \{\eta \in \mathbb{S}_p M \ / \ i\gamma(N)\gamma(u)\eta = -|u|\eta\} = \{0\}, \\ &(2) \quad \dim im\, b(u) = \frac{1}{2}\dim \mathbb{S}_p M, \end{aligned}$$

para cada $u \in T_p\partial M \setminus \{0\}$ y $p \in \partial M$. El operador B es una condición elíptica de frontera local cuando el rango de V es la mitad del rango del fibrado espinorial $\mathbb{S}M$. Cuando se dan estas condiciones de elipticidad, el problema de frontera (2.1)

$$\begin{cases} D\psi = \Phi, & \textit{sobre } M, \\ B\,\psi|_{\partial M} = \chi, & \textit{sobre } \partial M, \end{cases}$$

es de tipo Fredholm, con soluciones diferenciables, y el correspondiente problema de valores propios para D, con la condición de frontera $B = 0$, o sea,

$$\begin{cases} D\psi = \lambda\psi, & \textit{sobre } M, \\ B\ \psi|_{\partial M} = 0, & \textit{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{2.5}$$

posee un espectro discreto en $\mathbb{C}$ con subespacios propios asociados de dimensión finita formados por campos de espinores diferenciables, salvo en el caso de que sea el plano complejo entero.

Demostración: Fijado un punto $p \in \partial M$ y un vector no nulo $u \in T_p\partial M$, se tiene que

$$b(u)|_{im\,\mathfrak{p}_+(D)(u)} \text{ es inyectivo} \Leftrightarrow \ker b(u) \cap im\,\mathfrak{p}_+(D)(u) = \{0\},$$

y dado que $im\,\mathfrak{p}_+(D)(u) = V^p_{|u|}$, la equivalencia (2.4) nos dice que esta condición es la misma que expresa la propiedad (1). Supuesto que $b(u)|_{im\,\mathfrak{p}_+(D)(u)}$ sea inyectivo, tenemos que

$$\dim im\ b(u)|_{im\,\mathfrak{p}_+(D)(u)} = \dim im\,\mathfrak{p}_+(D)(u).$$

Entonces su imagen será la misma que la de $b(u)$ cuando

$$\dim im\, b(u) = \dim im\,\mathfrak{p}_+(D)(u) = \dim V^p_{|u|} = \frac{1}{2}\dim \mathbb{S}_p M.$$

Ahora, una vez establecida la elipticidad de la condición de frontera B, el hecho de que los problemas (2.1) y (2.5) son de tipo Fredholm y el resto de las afirmaciones sobre valores y subespacios propios se deducen de una forma estándar (véase [BW, Hö]). ■

2.2. Estimación de valores propios

Antes de introducir las cuatro condiciones de frontera, que anunciamos al comienzo de este Capítulo 2, para las cuales estudiaremos el espectro del operador de Dirac de una variedad con borde, vamos a describir la técnica común que usaremos para estimar los valores propios correspondientes. Haremos dos hipótesis relativas respectivamente a la geometría de la variedad M y a la geometría de su borde ∂M. Supondremos que la curvatura escalar S de M y curvatura media H de la hipersuperficie ∂M respecto del campo normal interior satisfacen las siguientes desigualdades

$$S \geq n(n+1) \qquad H \geq 0.$$

La desigualdad espinorial de Reilly (Corolario 1.8.2) implica, en estas condiciones, que

$$\int_M \left(\frac{n(n+1)}{4} |\psi|^2 - \frac{n}{n+1} |D\psi|^2 \right) \leq \int_{\partial M} \langle \mathbf{D}\psi, \psi \rangle,$$

para cada $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$, alcanzándose la igualdad únicamente si ψ es un campo de espinores *twistor* (ver 1.24) y $S \equiv n(n+1)$ y $H \equiv 0$, si ψ es no trivial.

En esta desigualdad integral elegimos el campo de espinores ψ como un campo propio para el operador de Dirac D de la variedad M, sujeto a una condición de frontera elíptica B y correspondiente al valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$. Es decir, ψ es una solución no trivial $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ de

$$\begin{cases} D\psi = \lambda\psi, & \text{sobre } M, \\ B\,\psi|_{\partial M} = 0, & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

La desigualdad anterior se convertirá pues en esta otra

$$n \left(\frac{n+1}{4} - \frac{1}{n+1} |\lambda|^2 \right) \int_M |\psi|^2 \leq \int_{\partial M} \langle \mathbf{D}\psi, \psi \rangle. \tag{2.6}$$

Como el campo propio ψ es no trivial, si conseguimos ver que nuestra condición de frontera $B\psi = 0$ obliga a que el término en el borde cumpla

$$\int_{\partial M} \langle \mathbf{D}\psi, \psi \rangle \leq 0,$$

concluiremos que

$$|\lambda|^2 \geq \frac{(n+1)^2}{4},$$

que es precisamente la misma estimación de Friedrich (Teorema 1.6.3) para el caso de las variedades compactas sin borde. Además, de darse esta desigualdad, no todo número complejo podría ser un valor propio de D. Por tanto, según la Proposición 2.1.5 anterior, el espectro de D, sujeto a la condición de frontera B, sería un subconjunto discreto de $\mathbb{C}$. Si el valor propio de menor módulo λ_1 alcanza la igualdad, cualquier campo propio asociado a él sería un campo de espinores *twistor*. Pero, como también es propio, será un campo de espinores de Killing no trivial con constante de Killing $-\lambda_1/(n+1)$ y, por tanto, según la Observación 1.6.6, no nulo en ningún punto. Entonces M tendría curvatura escalar constante $n(n+1)$ y la hipersuperficie del borde ∂M sería minimal. Por otro lado, M sería una variedad de Einstein, por soportar un campo de Killing no trivial, y, dada la relación entre la constante de Killing y la curvatura escalar, el valor propio λ_1, si se da la igualdad en la estimación anterior, sólo podría ser un número real.

Está claro que, si la curvatura escalar de la variedad está acotada inferiormente por una cantidad positiva cualquiera, no precisamente por $n(n+1)$, una precisión análoga a la hecha en la Observación 1.6.4 sería de aplicación en este caso y se conseguiría una cota inferior correspondiente para el espectro del operador de Dirac.

2.3. Condición de frontera de Atiyah, Patodi y Singer

Como la frontera ∂M de nuestra variedad M de dimensión $n+1$ es una variedad riemanniana espinorial compacta sin borde, su operador de Dirac *extrínseco* $\mathbf{D}$, definido en (1.34), que coincide con $D^{\partial M}$, si n es par, o con $D^{\partial M} \oplus -D^{\partial M}$, si n es impar, posee un espectro discreto real no acotado ni inferior ni superiormente, como ya señalamos en la Observación 1.5.4. Además, por (1.37), sabemos que es simétrico respecto de cero, es decir, $Spec(\mathbf{D}) = \{\lambda_m,\, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, de manera que

$$\begin{aligned} &\ldots \leq \lambda_{-m} \leq \ldots \leq \lambda_{-1} < 0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots, \\ &\lambda_{-m} = -\lambda_m,\ \forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \lim_{m\to\pm\infty} \lambda_m = \pm\infty, \end{aligned}$$

donde reservamos el símbolo λ_0 por si el cero es un valor propio de $\mathbf{D}$. En caso contrario, supondremos que λ_0 no está en el espectro. Así, cada campo $\phi \in L^2(\mathbf{S})$ puede desarrollarse en serie en la forma $\phi = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi_m$, donde $\mathbf{D}\phi_m = \lambda_m\phi_m$, para cada $m \in \mathbb{Z}$. Consideremos como fibrado hermítico V al propio fibrado restringido $\mathbf{S} = \mathbb{S}M|_{\partial M}$, y definamos B_{APS} como el operador de proyección ortogonal sobre el subespacio generado por los espinores propios asociados a valores propios no negativos

$$B_{APS}: L^2(\mathbf{S}) \to L^2(\mathbf{S}), \qquad \phi = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi_m \mapsto B_{APS}\phi := \sum_{m=0}^{+\infty} \phi_m \tag{2.7}$$

En [APS], con objeto de extender al caso con borde el celebrado Teorema del Índice, Atiyah, Patodi y Singer demostraron que B_{APS} es un operador pseudo-diferencial de orden cero cuyo símbolo principal, para cada $u \in T_p\partial M \setminus \{0\}$, $p \in \partial M$, coincide con la proyección ortogonal sobre el subespacio propio del símbolo principal $\sigma_{\mathbf{D}}(u) = i\gamma^{\mathbf{S}}(u)$ asociado a su único valor propio positivo $|u|$. Esto es así, como se puede ver en [BW, Proposición 14.2], para cualquier proyección de tipo espectral. En nuestro caso,

$$b_{APS}(u) = \frac{1}{2}\left(i\gamma^{\mathbf{S}}(u) + |u|\, I\right) = \frac{1}{2}\left(-i\gamma(N)\,\gamma(u) + |u|\, I\right). \tag{2.8}$$

Esto demuestra, según (2.3), que $b_{APS}(u) = |u|\, \mathfrak{p}_+(D)(u)$. Al coincidir estos símbolos salvo una constante real no nula, las condiciones (1) y (2) de la Proposición 2.1.5 están garantizadas, y B_{APS} es una condición de frontera elíptica para el operador de Dirac, que es de tipo global. Aquí esta *globalidad* de la condición se hace manifiesta, ya que la determinación de $B_{APS}\phi$ en un punto, para cada $\phi \in L^2(\mathbf{S})$, involucra al campo ϕ en todos sus puntos, puesto que depende de su desarrollo en serie de campos propios.

Una vez comprobada la elipticidad, veamos que la condición de Atiyah, Patodi y Singer $B_{APS} = 0$ hace que el operador de Dirac sea L^2-simétrico, es decir,

$$\forall \phi, \psi \in \Gamma(\mathbb{S}M) \text{ con } B_{APS}\phi = B_{APS}\psi = 0, \quad (D\phi, \psi)_{L^2} = (\phi, D\psi)_{L^2}.$$

En efecto, si usamos la notación $\phi_+ := B_{APS}\phi$ y por $\phi_- := \phi - \phi_+ = \sum_{m<0} \phi_m$, podemos observar que la descomposición $\phi = \phi_+ + \phi_-$ es única y ortogonal respecto del producto hermítico. Como $\phi_+ = \psi_+ = 0$, sabemos que $\phi = \phi_-$ y $\psi = \psi_-$. Como además, de acuerdo con (1.37), la multiplicación de Clifford $\gamma(N)$ por el campo normal al borde intercambia los valores propios positivos y negativos de $\mathbf{D}$, tenemos que $\gamma(N)\,\phi = (\gamma(N)\,\phi)_+$ y $\gamma(N)\,\psi = (\gamma(N)\,\psi)_+$. Entonces, usando (1.21), obtenemos

$$(D\phi, \psi)_{L^2} - (\phi, D\psi)_{L^2} = -\int_{\partial M} (\gamma(N)\,\phi, \psi) = 0.$$

Esto demuestra que el espectro del operador de Dirac D de M, con la condición de frontera B_{APS} de Atiyah, Patodi y Singer

$$\begin{cases} D\psi = \lambda^{APS}\psi, & \text{sobre } M, \\ B_{APS}\, \psi|_{\partial M} = 0, & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{2.9}$$

es un subconjunto discreto de números reales que no está acotado (véase [Hö, GLP]).

Por otro lado, veamos que la condición de frontera B_{APS} que estamos estudiando nos permite controlar el término de frontera (2.6) que necesitamos para estimar el correspondiente espectro. En efecto, si $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ es un campo con $B_{APS}\psi = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \langle \mathbf{D}\psi, \psi\rangle &= \int_{\partial M} \langle \mathbf{D} \sum_{m<0} \psi_m, \sum_{k<0} \psi_k\rangle = \int_{\partial M} \langle \sum_{m<0} \lambda_m \psi_m, \sum_{k<0} \psi_k\rangle \\ &= \sum_{m<0} \int_{\partial M} \lambda_m \left|\psi_m\right|^2 \leq 0,\end{aligned}$$

porque $\lambda_m < 0$ si $m < 0$. De hecho, se da la igualdad si y sólo si $\psi_m = 0$, para cada $m < 0$, es decir, $\psi_- = 0$ lo que, unido a que $\psi_+ = 0$, nos diría que $\psi|_{\partial M} = 0$.

Por tanto, si $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ es cualquier solución no trivial del problema de valores propios (2.9), es decir, un campo de espinores propio para el valor propio λ^{APS}, y aceptamos las hipótesis geométricas de la Sección 2.2, tenemos, por (2.6), que

$$n \left(\frac{n+1}{4} S_0 - \frac{1}{n+1} \left(\lambda^{APS}\right)^2 \right) \int_M |\psi|^2 \leq 0.$$

De aquí, $\left(\lambda^{APS}\right)^2 \geq (n+1)^2 / 4$. Si se diese la igualdad, ψ sería un campo de Killing real, pero entonces su módulo sería constante, y como $\psi|_{\partial M} = 0$, se tendría que $\psi = 0$, lo que contradice que ψ es no trivial. Así, la igualdad no puede alcanzarse, y hemos demostrado el siguiente enunciado (véase [HMZ1, HMZ2] y también [FS, Teorema 10] para una versión débil).

Teorema 2.3.1 *Sea M una variedad riemanniana espinorial compacta de dimensión $n+1$, cuya curvatura escalar cumple $S \geq n(n+1)$ y cuyo borde no vacío tiene curvatura media H no negativa (respecto del campo normal interior). Entonces el espectro del operador de Dirac D sobre M, bajo la condición de frontera de Atiyah, Patodi y Singer, es una sucesión no acotada de números reales $\left\{\lambda_m^{APS},\, m \in \mathbb{Z}\right\}$ que satisfacen la desigualdad estricta*

$$\left(\lambda^{APS}\right)^2 > \frac{(n+1)^2}{4}.$$

2.4. Condición de frontera asociada a un operador de quiralidad

Supongamos ahora que sobre la variedad riemanniana espinorial compacta M hay definido un *operador de quiralidad*, es decir, un operador $F : \Gamma(\mathbb{S}M) \to \Gamma(\mathbb{S}M)$ que satisface las cuatro condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} (1) & F^2 = I, \\ (2) & (F\phi, F\psi) = (\phi, \psi)\,, \\ (3) & \nabla_X F\phi = F\nabla_X\phi, \text{ es decir, } \nabla F = 0, \\ (4) & \gamma\,(X)\,F\phi = -F\gamma\,(X)\,\phi, \end{array}$$

para cada $X \in \Gamma\,(TM)$ y cada $\phi, \psi \in \Gamma\,(\mathbb{S}M)$. El nombre que se otorga a este tipo de operadores procede de la situación que se tiene cuando la dimensión de la variedad M es par. En ese caso, es un simple ejercicio ver que la aplicación de conjugación usual $F = \gamma\,(\omega)$, donde ω es el elemento de volumen complejo, definido en la Sección 1.2, que cambia el signo de la componente de quiralidad negativa de cada campo de espinores, satisface esas cuatro condiciones. No obstante, existen otras situaciones en las que aparecen de forma natural este tipo de operadores: por ejemplo, cuando M es una hipersuperficie espacial de una variedad de Lorentz espinorial N, y se induce sobre M la estructura riemanniana y espinorial usual. Si T es un campo temporal unitario sobre la hipersuperficie M, la elección $F = \gamma^N\,(T)$ [He1] también proporciona un operador de quiralidad sobre M (aquí γ^N representa la multiplicación de Clifford sobre N).

Cualquiera que sea su procedencia, si F es un operador de quiralidad sobre M, podemos considerar la composición $\gamma\,(N)\,F : L^2(\mathbf{S}) \to L^2(\mathbf{S})$, donde hemos considerado la extensión L^2 del operador de quiralidad F sobre M. De acuerdo con las propiedades (1) y (2) de F y con (1.11), $\gamma\,(N)\,F$ es autoadjunto respecto del producto hermítico en cada fibra, y su cuadrado es

$$(\gamma\,(N)\,F)^2 = \gamma\,(N)\,F\gamma\,(N)\,F = -\gamma\,(N)^2\,F^2 = I.$$

Así, en cada fibra de $\mathbf{S}$, $\gamma\,(N)\,F$ es un isomorfismo con valores propios ± 1 de la misma multiplicidad, porque el isomorfismo $\gamma\,(N) : \Gamma\,(\mathbf{S}) \to \Gamma\,(\mathbf{S})$ intercambia biyectivamente sus subespacios propios.

Elijamos como fibrado V, en orden a aplicar la Proposición 2.1.5, alguno de los dos subfibrados propios de $\mathbf{S}$ correspondientes al valor propio $+1$ o al -1 del isomorfismo $\gamma(N)\,F$, o sea,

$$V^{\pm} := \{\eta \in \mathbf{S} \,/\, \gamma(N)\,F\phi = \pm\phi\}\,.$$

Claramente $V^{\pm}$ son fibrados de rango igual a la mitad del rango de $\mathbf{S}$, por lo que las condiciones de frontera que vamos a definir serán locales. Llamemos $B^{\pm}_{QUI} : L^2(\mathbf{S}) \to L^2(V^{\pm})$ a las proyecciones ortogonales fibra a fibra sobre los subfibrados propios $V^{\pm}$, es decir,

$$B^{\pm}_{QUI} := \frac{1}{2}\left(I \pm \gamma(N)\,F\right).$$

Los operadores $B^{\pm}_{QUI}$ son operadores diferenciales de orden cero y, en particular, operadores pseudo-diferenciales del mismo orden. Por tanto, sus símbolos principales $b^{\pm}_{QUI}$, sobre cada vector no nulo $u \in T_p\partial M$, $p \in \partial M$, coinciden consigo mismos

$$b^{\pm}_{QUI}(u) : \mathbf{S}_p = \mathbb{S}_pM \to V^{\pm}_p, \quad b^{\pm}_{QUI}(u) = \frac{1}{2}\left(I \pm \gamma(N)\,F\right).$$

En particular, $b^{\pm}_{QUI}(u)$ son sobreyectivos por ser proyecciones. Así se cumple la condición (2) de la Proposición 2.1.5. Comprobemos que también ocurre lo mismo para la condición (1) de inyectividad. Sea $u \in T_p\partial M$ y $\eta \in \mathbb{S}_pM = \mathbf{S}_p$ tal que $b^{\pm}_{QUI}(u)\,\eta = 0$ y $i\gamma(N)\,\gamma(u)\,\eta = -|u|\,\eta$. Entonces

$$b^{\pm}_{QUI}(u)\,\eta = 0 \Leftrightarrow \gamma(N)\,F\eta = \mp\eta,$$

y así

$$-|u|\,\eta = i\gamma(N)\,\gamma(u)\,\eta = -i\gamma(u)\,\gamma(N)\,F^2\eta = i\gamma(u)\,F\gamma(N)\,F\eta = \mp i\gamma(u)\,F\eta.$$

Esto nos dice que η es un espinor propio del endomorfismo $i\gamma(u)\,F$ asociado al valor propio real $\pm|u|$. Sin embargo, este endomorfismo no puede tener ningún valor propio real, ya que $(i\gamma(u)\,F)^2 = -|u|^2\,I$. Como $u \neq 0$, deducimos que $\eta = 0$, y se cumple la condición de inyectividad. En definitiva, las dos $B^{\pm}_{QUI}$ proveen unas condiciones de frontera elípticas para el operador de Dirac. Hay que señalar que distintos autores [Bun1, FS] han considerado operadores de este tipo, aunque nunca han llegado a conseguir estimaciones alcanzables del espectro correspondiente.

Veamos que las condiciones de frontera $B^{\pm}_{QUI}\phi = 0$ hacen que el operador de Dirac sea, como para la condición de frontera de Atiyah, Patodi y Singer, simétrico respecto del producto hermítico. En efecto, sean $\phi, \psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ de manera que

$B^{\pm}_{QUI}\phi = B^{\pm}_{QUI}\psi = 0$. Esto significa que $\gamma(N)F\phi = \mp\phi$ y $\gamma(N)F\psi = \mp\psi$. Entonces

$$\begin{aligned}(\gamma(N)\phi,\psi) &= (F\gamma(N)\phi, F\psi) = -(\gamma(N)F\phi, F\psi) = \pm(\phi, F\psi) = \\ &= \pm(\gamma(N)\phi, \gamma(N)F\psi) = -(\gamma(N)\phi,\psi),\end{aligned}$$

y así $(\gamma(N)\phi,\psi) = 0$ sobre ∂M. Esto obliga a que, de la misma forma que al trabajar con la condición de Atiyah, Patodi y Singer,

$$\forall\phi,\psi\in\Gamma(\mathbb{S}M) \text{ con } B^{\pm}_{QUI}\phi = B^{\pm}_{QUI}\psi = 0, \quad (D\phi,\psi)_{L^2} = (\phi, D\psi)_{L^2},$$

de donde deducimos que el espectro correspondiente del operador de Dirac dado por

$$\begin{cases} D\psi = \lambda^{QUI}\psi, & \text{sobre } M, \\ B^{\pm}_{QUI}\ \psi|_{\partial M} = 0, & \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

es real y, por tanto, discreto (pues no puede ser el plano complejo entero).

Sea ψ cualquier campo de espinores del fibrado inducido $\mathbf{S}$ sobre el borde ∂M que cumpla una de las condiciones de frontera $B^{\pm}_{QUI}\psi = 0$. En este caso, vamos a demostrar que el término de frontera

$$\int_{\partial M}\langle\mathbf{D}\psi,\psi\rangle$$

de la desigualdad (2.6) es, en realidad, cero, porque F y $\mathbf{D}$ conmutan. En primer lugar, observemos que, de la condiciones (3) y (4) y de la misma Definición 1.5.1 de operador de Dirac, podemos deducir que F anticonmuta con el operador de Dirac D de la variedad M. Esta propiedad, además, nos garantiza que el espectro de D, bajo la condición de frontera $B^{+}_{QUI} = 0$, es el opuesto del espectro de D, sujeto a la condición dual $B^{-}_{QUI} = 0$, pues si $D\psi = \lambda\psi$, entonces $DF\psi = -\lambda F\psi$ y si $\gamma(N)F\psi = -\psi$ entonces $\gamma(N)F(F\psi) = F\psi$. Por otro lado, F conmuta con la conexión inducida $\nabla^{\mathbf{S}}$ ya que, según la expresión (1.33), tenemos, para cada $X\in\Gamma(T\partial M)$,

$$\begin{aligned}F\left(\nabla^{\mathbf{S}}_X\psi\right) &= F\left(\nabla_X\psi + \frac{1}{2}\gamma(N)\gamma(AX)\psi\right) = F(\nabla_X\psi) - \frac{1}{2}\gamma(N)F\gamma(AX)\psi \\ &= \nabla_X(F\psi) + \frac{1}{2}\gamma(N)\gamma(AX)F\psi = \nabla^{\mathbf{S}}_X(F\psi).\end{aligned}$$

Finalmente, F y $\mathbf{D}$ conmutan, pues

$$\begin{aligned}
F\mathbf{D}\psi &= F\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma^{\mathbf{S}}(e_j)\,\nabla^{\mathbf{S}}_{e_j}\psi\right) = -\sum_{j=1}^{n}F\gamma(N)\,\gamma(e_j)\,\nabla^{\mathbf{S}}_{e_j}\psi \\
&= \sum_{j=1}^{n}\gamma(N)\,F\gamma(e_j)\,\nabla^{\mathbf{S}}_{e_j}\psi = -\sum_{j=1}^{n}\gamma(N)\,\gamma(e_j)\,F\nabla^{\mathbf{S}}_{e_j}\psi \\
&= \sum_{j=1}^{n}\gamma^{\mathbf{S}}(e_j)\,\nabla^{\mathbf{S}}_{e_j}(F\psi) = \mathbf{D}F\psi.
\end{aligned}$$

Sabiendo que $B^{\pm}_{QUI}\psi = 0$, es decir, $\gamma(N)\,F\psi = \mp\psi$, esta última propiedad nos garantiza que el término de frontera asociado al problema es nulo, pues todo el integrando es nulo, ya que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}\psi,\psi) &= (F\mathbf{D}\psi, F\psi) = (\mathbf{D}F\psi, F\psi) = (\gamma(N)\,\mathbf{D}F\psi, \gamma(N)\,F\psi) \\
&= -\left(\mathbf{D}\gamma(N)\,F\psi, \gamma(N)\,F\psi\right) = -\left(\mathbf{D}\psi,\psi\right).
\end{aligned}$$

Aplicando el mismo razonamiento que utilizamos para la condición anterior, si suponemos que ψ es un campo de espinores sobre M propio para el operador de Dirac para la condición de frontera $B^{\pm}_{QUI}\psi = 0$ y que $S \geq n(n+1)$ y $H \geq 0$, se obtiene la desigualdad

$$n\left(\frac{n+1}{4} - \frac{1}{n+1}\left(\lambda^{QUI}\right)^2\right)\int_M |\psi|^2 \leq \int_{\partial M}\langle\mathbf{D}\psi,\psi\rangle = 0,$$

de donde $\left(\lambda^{QUI}\right)^2 \geq (n+1)^2/4$ porque ψ es no trivial. Si se alcanzase la igualdad, el borde sería minimal y el campo ψ sería un campo de Killing real no trivial, es decir, verificaría la ecuación dada en (1.25),

$$\nabla_X\psi = \pm\frac{1}{2}\gamma(X)\,\psi,$$

para cada $X \in \Gamma(TM)$. Como λ^{QUI} es un número real, sabemos que la función $|\psi|^2$ es una constante no nula y que M es, según (1.27), una variedad de Einstein con curvatura escalar constante no negativa $S = n(n+1)$.

Para ahondar más en el caso de la igualdad, definamos la función compleja $f : M \to \mathbb{C}$ por

$$f := (\psi, F\psi).$$

En realidad, la función f sólo toma valores reales, porque $(\psi, F\psi) = (F\psi, F^2\psi) = (F\psi, \psi) = \overline{(\psi, F\psi)}$. Veamos que, además, f no es idénticamente nula. En efecto, según (1.21),

$$\begin{aligned}(D\psi, F\psi)_{L^2} - (\psi, DF\psi)_{L^2} &= -\int_{\partial M} (\gamma(N)\psi, F\psi) = \int_{\partial M} (\psi, \gamma(N) F\psi) \\ &= \mp \int_{\partial M} |\psi|^2 = \mp |\psi|^2 Vol(\partial M) \neq 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $D\psi = \lambda^{QUI}\psi$, y también $DF\psi = -FD\psi = -\lambda^{QUI}F\psi$, el primer término es

$$\begin{aligned}(D\psi, F\psi)_{L^2} - (\psi, DF\psi)_{L^2} &= \left(\lambda^{QUI}\psi, F\psi\right)_{L^2} - \left(\psi, -\lambda^{QUI}F\psi\right)_{L^2} \\ &= 2\lambda^{QUI}\int_M (\psi, F\psi) = 2\lambda^{QUI}\int_M f.\end{aligned}$$

En particular, se tiene que

$$2\lambda^{QUI}\int_M f = \mp |\psi|^2 Vol(\partial M) \neq 0,$$

lo que implica que la función f no puede ser idénticamente nula sobre M. Calculemos el hessiano de la función f. Por un lado, para cada $X \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, X\rangle &= X(\psi, F\psi) = (\nabla_X\psi, F\psi) + (\psi, \nabla_X F\psi) = (\nabla_X\psi, F\psi) + (\psi, F\nabla_X\psi) \\ &= (\nabla_X\psi, F\psi) + (F\psi, \nabla_X\psi) = (\nabla_X\psi, F\psi) + \overline{(\nabla_X\psi, F\psi)} = 2\Re(\nabla_X\psi, F\psi).\end{aligned}$$

Como ψ es un campo de Killing asociado a la constante real $\pm 1/2$, tenemos

$$\langle \nabla f, X\rangle = \pm\langle \gamma(X)\psi, F\psi\rangle.$$

Si volvemos a derivar, encontramos

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 f\right)(X,X) &= \langle \nabla_X\nabla f, X\rangle = X\langle \nabla f, X\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X X\rangle \\ &= \pm X\left(\langle \gamma(X)\psi, F\psi\rangle\right) - \left(\pm\langle \gamma(\nabla_X X)\psi, F\psi\rangle\right) \\ &= \pm\left[\langle \gamma(\nabla_X X)\psi, F\psi\rangle + \langle \gamma(X)\nabla_X\psi, F\psi\rangle\right. \\ &\qquad \left.+\langle \gamma(X)\psi, \nabla_X(F\psi)\rangle\right] \pm \langle \gamma(\nabla_X X)\psi, F\psi\rangle.\end{aligned}$$

El primer y el último sumando se cancelan, y queda

$$\left(\nabla^2 f\right)(X,X) = \pm\left(\langle \gamma(X)\nabla_X\psi, F\psi\rangle + \langle \gamma(X)\psi, F(\nabla_X\psi)\rangle\right).$$

Sustituyendo $\nabla_X \psi$ por su valor, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 f\right)(X,X) &= \frac{1}{2}\left(\langle \gamma(X)\gamma(X)\psi, F\psi\rangle + \langle \gamma(X)\psi, F\gamma(X)\psi\rangle\right) \\ &= \langle \gamma(X)^2 \psi, F\psi\rangle = -f\,\langle X, X\rangle.\end{aligned}$$

Concluimos que la función real f sobre M es una solución no trivial de la ecuación de Obata

$$\nabla^2 f = -f\,\langle\, ,\, \rangle. \tag{2.10}$$

Por otro lado, volviendo a usar la condición de frontera $\gamma(N)F\psi = \mp\psi$, encontramos que f se anula sobre el borde, ya que

$$f|_{\partial M} = \langle \psi, F\psi\rangle|_{\partial M} = \langle \gamma(N)\psi, \gamma(N)F\psi\rangle|_{\partial M} = \mp\,\langle \gamma(N)\psi, \psi\rangle|_{\partial M} = 0,$$

Aplicando la versión con frontera debida a Reilly [Re, Lema 3] del Teorema de Obata, concluimos que M es una semiesfera de radio uno.

Teorema 2.4.1 *Sea M una variedad riemanniana espinorial compacta de dimensión $n+1$, en la que existe un operador de quiralidad F. Supongamos que su curvatura escalar satisface $S \geq n(n+1)$ y que tiene borde no vacío con curvatura media H no negativa respecto del campo normal interior. Entonces el espectro del operador de Dirac D sobre M, con cualquiera de las condiciones de frontera $B^{\pm}_{QUI} = 0$ asociada a ese operador de quiralidad, es una sucesión simétrica respecto de cero, no decreciente y no acotada de números reales $\left\{\lambda^{QUI}_m,\, m \in \mathbb{Z}\right\}$, de manera que*

$$\left(\lambda^{QUI}\right)^2 \geq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

La única variedad que alcanza la igualdad en la desigualdad anterior es la semiesfera euclídea de radio uno.

2.5. Versión riemanniana de la condición del MIT

La idea para construir esta nueva condición de frontera es parecida a la del caso anterior. Consideramos el isomorfismo $i\gamma(N) : \Gamma(\mathbf{S}) \to \Gamma(\mathbf{S})$, que también es autoadjunto respecto de la métrica hermítica y cuyo cuadrado es la identidad. Sus únicos valores propios son, por tanto, ± 1, y poseen la misma multiplicidad porque, en cada fibra, la multiplicación de Clifford por un vector no nulo tangente a ∂M intercambia los subespacios propios. Elijamos como V el subfibrado propio asociado al valor propio positivo

$$V := \{\phi \in \mathbf{S} \,/\, i\gamma(N)\,\phi = \phi\},$$

y como condición de frontera $B^+_{MIT} : L^2(\mathbf{S}) \to L^2(V)$ la proyección ortogonal sobre este subfibrado propio

$$B^+_{MIT} := \frac{1}{2}\left(I + i\gamma(N)\right).$$

Por las mismas razones que en la condición de frontera anterior, B^+_{MIT} es un operador (pseudo)-diferencial de orden cero cuyo símbolo principal, sobre cada $u \in T\partial M$, coincide con él mismo, es decir,

$$b^+_{MIT}(u) = \frac{1}{2}\left(I + i\gamma(N)\right).$$

Por ser B^+_{MIT} una proyección ortogonal, claramente se verifica la condición de sobreyectividad (2) de la Proposición 2.1.5. La inyectividad se deduce como sigue. Si existiese un espinor $\eta \in \ker\left(b^+_{MIT}(u)\right)$, es decir, con $i\gamma(N)\,\eta = -\eta$, y tal que $i\gamma(N)\,\gamma(u)\,\eta = -|u|\,\eta$, se tendría que

$$|u|\,\eta = -i\gamma(N)\,\gamma(u)\,\eta = \gamma(u)\left(i\gamma(N)\,\eta\right) = -\gamma(u)\,\eta.$$

Pero $\gamma(u)^2 = -|u|^2 I$ y $u \neq 0$. En consecuencia $\eta = 0$ y esto nos dice que la condición de frontera B^+_{MIT} es una condición de frontera elíptica local, según la Definición 2.1.4, ya que está claro que el rango del fibrado V es la mitad del rango de $\mathbf{S}$. Esta condición fue introducida, para el operador de Dirac sobre variedades de Lorentz, por un grupo de investigadores del Instituto de Tecnología de Massachussets (M.I.T.) para modelar campos fermiónicos en regiones confinadas del espacio. Su estudio en el contexto riemanniano es nuevo.

Encontramos ahora una diferencia con los casos anteriores: el operador de Dirac D sobre la variedad con borde M no es simétrico para el producto hermítico de campos de espinores en el núcleo de B^+_{MIT}. Por el contrario, veamos que el espectro del D para esta condición de frontera, o sea, para el problema

$$\begin{cases} D\psi = \lambda^{MIT}\psi, & \text{sobre } M, \\ B^+_{MIT}\,\psi|_{\partial M} = 0, & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{2.11}$$

está formado por números complejos de parte imaginaria no negativa. En efecto, sea ψ cualquier solución no trivial del sistema anterior. La condición $B^{+}_{QUI}\,\psi|_{\partial M}=0$ es equivalente a decir que $i\gamma\,(N)\,\psi=-\psi$ sobre ∂M. Entonces la identidad (1.21) aplicada a ψ e $i\psi$ nos dice que

$$(D\psi,i\psi)_{L^2}-(\psi,Di\psi)_{L^2}=-\int_{\partial M}(\gamma\,(N)\,\psi,i\psi)=-\int_{\partial M}|\psi|^2\in\mathbb{R}.$$

Como $D\psi=\lambda^{MIT}\psi$, el primer miembro es

$$(D\psi,i\psi)_{L^2}-(\psi,Di\psi)_{L^2}=2\,|\psi|^2_{L^2}\,\Im\lambda^{MIT}.$$

Como ψ es no trivial, tenemos que $\Im\lambda^{MIT}$ debe ser no positivo. Este detalle garantiza que el espectro del problema de valores propios (2.11) no puede ser el plano complejo entero, y así, de acuerdo con la Proposición 2.1.5, debe estar formado por una sucesión no acotada de números complejos de parte imaginaria no positiva.

No obstante lo anterior, vamos a demostrar que, en las hipótesis geométricas de la Sección 2.2, o sea, si la curvatura escalar S de M es mayor o igual que su valor $n(n+1)$ en la esfera de radio uno y la curvatura media del borde ∂M respecto del normal interior es no negativa, el término de frontera en nuestra desigualdad (2.6) es nulo. En efecto, usando la anticonmutatividad (1.37),

$$(\mathbf{D}\psi,\psi)=(i\gamma\,(N)\,\mathbf{D}\psi,i\gamma\,(N)\,\psi)=-\,(i\mathbf{D}\gamma\,(N)\,\psi,i\gamma\,(N)\,\psi)=-\,(\mathbf{D}\psi,\psi)\,.$$

Nos queda pues

$$n\left(\frac{n+1}{4}-\frac{1}{n+1}\left|\lambda^{MIT}\right|^2\right)\int_M|\psi|^2\leq\int_{\partial M}\langle\mathbf{D}\psi,\psi\rangle=0.$$

Deducimos de ahí que $|\lambda^{MIT}|^2\geq(n+1)^2\,/\,4$. Si se diese la igualdad, ψ sería un campo no trivial de Killing asociado a la constante $-\lambda^{MIT}/\,(n+1)$, que en este caso es un valor imaginario puro, porque ψ, por ser un campo de Killing no trivial, no puede anularse en ningún punto (ver la Observación 1.6.6). No obstante, como ya razonamos al final de la Sección 2.2, las variedades con un campo de Killing imaginario poseen curvatura escalar constante y negativa y, sin embargo, en el caso de la igualdad que estamos tratando se tiene $S=n(n+1)$. En consecuencia, nunca se alcanza la igualdad y así se puede enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.5.1 *Sea M una variedad riemanniana espinorial compacta de dimensión $n+1$ cuya curvatura escalar satisface $S \geq n(n+1)$ y cuyo borde es una hipersuperficie con curvatura media H no negativa respecto del campo normal interior. Entonces el espectro del operador de Dirac D sobre M, bajo la condición de frontera MIT, es una sucesión no acotada de números complejos de parte imaginaria no positiva $\left\{\lambda_m^{MIT},\, m \in \mathbb{Z}\right\}$, que satisfacen la siguiente desigualdad estricta*

$$\left|\lambda^{MIT}\right|^2 > \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Observación 2.5.2 *Debemos señalar que, en la definición de la condición de frontera B_{MIT}, como ocurría con la condición asociada a un operador de quiralidad, no juega ningún papel especial el signo del valor propio del endomorfismo $i\gamma(N)$. Es decir, podríamos haber elegido el fibrado V, al comienzo de esta sección, como el asociado al valor propio negativo -1 y la correspondiente condición de frontera hubiera sido $B^-_{MIT} = (I - i\gamma(N))/2$. Se puede comprobar fácilmente que las condiciones de elipticidad que exige la Proposición 2.1.5 se hubieran dado igualmente, así como la anulación del término de frontera en (2.6). La única diferencia estribaría en que los valores propios correspondientes a esa otra condición de frontera serían números complejos con parte imaginaria no negativa. Por el contrario, tanto en la definición de la condición B_{APS} de Atiyah, Patodi y Singer que estudiamos en la sección anterior, como en la que estudiaremos a continuación, es determinante escoger la proyección sobre el subespacio engendrado por los espinores propios correspondientes a valores propios* ***no negativos****. De hecho, se puede ver sin mucha dificultad que la elipticidad se mantiene si se toma la proyección sobre las componentes desde un valor propio cualquiera en adelante, pero no desde un valor propio hacia atrás.*

2.6. Una nueva condición de frontera

Desde una perspectiva de geómetras, el borde de una variedad compacta es una hipersuperficie cuya geometría y su interacción con la geometría y propiedades analíticas del interior son objetos dignos de interés. De ahí que los teoremas de comparación anteriores 2.3.1, 2.4.1 y 2.5.1 para el *primer* valor propio del operador de Dirac para variedades compactas con borde no sean del todo satisfactorios, ya que en dos de los casos proporcionan desigualdades que no se alcanzan y en el otro la igualdad sólo caracteriza a las semiesferas. Introducimos aquí una nueva condición de frontera asociada al operador de Dirac para la cual el estudio del espectro presenta novedades interesantes, ya que destaca de entre todas las hipersuperficies borde a las que son minimales.

Elijamos de nuevo el fibrado hermítico V de la Proposición 2.1.5 como el propio fibrado restringido $\mathbf{S}$ sobre ∂M y consideremos el operador $B_{mAPS} : L^2(\mathbf{S}) \to L^2(\mathbf{S})$ dado por la composición

$$B_{mAPS} := B_{APS} \circ (I + \gamma(N)),$$

donde B_{APS} es el operador de Atiyah, Patodi y Singer definido en (2.7). El operador $I + \gamma(N)$ es un operador diferencial de orden cero, mientras que ya señalamos que B_{APS} es un operador pseudo-diferencial de orden cero cuyo símbolo principal está descrito en (2.8). La composición de ambos es, de acuerdo con la Observación 2.1.3, otro operador pseudo-diferencial de orden cero cuyo símbolo principal es la composición de los respectivos símbolos, es decir, que

$$b_{mAPS}(u) = b_{APS}(u) \circ (I + \gamma(N)) = \frac{1}{2}(-i\gamma(N)\gamma(u) + |u|\, I) \circ (I + \gamma(N)),$$

para cada u tangente en algún punto del borde ∂M.

Comprobemos que B_{mAPS} define una condición de frontera elíptica. Por un lado, sea $\eta \in \ker b_{mAPS}(u)$ un espinor tal que $i\gamma(N)\gamma(u)\eta = -|u|\,\eta$. Entonces

$$0 = b_{mAPS}(u)\eta = |u|\,\eta + |u|\,\gamma(N)\eta.$$

Como $u \neq 0$, deducimos que $\gamma(N)\eta = -\eta$ y por tanto $\eta = 0$. Así tenemos garantizada la inyectividad (1) en la Proposición 2.1.5. Por otro lado, observemos que $(I + \gamma(N))^2 = 2\gamma(N)$, y entonces $(I + \gamma(N))^4 = (2\gamma(N))^2 = -4I$. En particular, $I + \gamma(N)$ es un isomorfismo. Por tanto, la imagen de $b_{mAPS}(u)$ tiene la misma dimensión que la imagen de $b_{APS}(u)$ que ya comprobamos en la Sección 2.3 que es exactamente la mitad de la dimensión de $\mathbb{S}_pM$. En definitiva, esto demuestra que B_{mAPS} define una condición elíptica de frontera para el operador de Dirac de M, que es de naturaleza global.

Demostraremos ahora que el operador de Dirac es simétrico respecto del producto hermítico bajo esta nueva condición de frontera. En efecto, sean $\phi, \psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ con $B_{mAPS}\phi = B_{mAPS}\psi = 0$, lo que equivale a decir que

$$B_{APS}(\phi + \gamma(N)\phi) = B_{APS}(\psi + \gamma(N)\psi) = 0.$$

Como hicimos en la Sección 2.3, sean $\psi_+ = B_{APS}\psi$ y $\psi_- = \psi - \psi_+$. Entonces la descomposición $\psi|_{\partial M} = \psi_+ + \psi_-$ es única y ortogonal. Como $\mathbf{D}$ y $\gamma(N)$ anticonmutan,

$$0 = B_{APS}\left(\psi + \gamma(N)\psi\right) = \left(\psi + \gamma(N)\psi\right)_+ = \psi_+ + \gamma(N)\psi_0 + \gamma(N)\psi_-,$$

donde ψ_0 es la componente de ψ en el espacio propio del operador $\mathbf{D}$ correspondiente al valor propio cero. De ahí se deduce que

$$\psi_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \psi_+ = -\gamma(N)\psi_-.$$

Por tanto, el campo $\psi|_{\partial M}$ se descompone realmente como $\psi|_{\partial M} = -\gamma(N)\psi_- + \psi_-$, y esta descomposición es ortogonal. Algo análogo ocurre para el campo ϕ. Entonces

$$\int_{\partial M} (\gamma(N)\phi, \psi) = \int_{\partial M} (\phi_- + \gamma(N)\phi_-, -\gamma(N)\psi_- + \psi_-) = 0.$$

Entonces, usando (1.21), se tiene la simetría buscada

$$(D\phi, \psi)_{L^2} - (\phi, D\psi)_{L^2} = -\int_{\partial M} (\gamma(N)\phi, \psi) = 0.$$

Nuevamente, el espectro del operador de Dirac sometido a la nueva condición de frontera B_{mAPS}, o sea, el espectro de

$$\begin{cases} D\psi = \lambda^{mAPS}\psi, & \text{sobre } M, \\ B_{mAPS}\,\psi|_{\partial M} = 0, & \text{sobre } \partial M, \end{cases} \tag{2.12}$$

debe ser real y, por no ser el plano complejo entero, debe ser exactamente, según la Proposición 2.1.5, una sucesión de números reales.

Sea ψ cualquier campo de espinores propio para el problema anterior. Vamos a demostrar que

$$\int_{\partial M} \langle \mathbf{D}\psi, \psi \rangle = 0,$$

o sea, que el término de frontera en (2.6) se anula, abriéndose así la posibilidad de utilizar de nuevo los argumentos de la Sección 2.2 y de conseguir el correspondiente resultado de comparación. En efecto, basta usar de nuevo que la condición de frontera $B_{mAPS}\psi = 0$ del campo propio puede expresarse como

$$\psi|_{\partial M} = -\gamma(N)\psi_- + \psi_-,$$

tener en cuenta que, por (1.37), el operador de Dirac extrínseco $\mathbf{D}$ y la multiplicación $\gamma(N)$ anticonmutan y que, por definición, $(\mathbf{D}\psi_-)_+ = 0$. Entonces

$$\int_{\partial M} \langle \mathbf{D}\psi, \psi \rangle = \int_{\partial M} \langle \gamma(N)\mathbf{D}\psi_- + \mathbf{D}\psi_-, -\gamma(N)\psi_- + \psi_- \rangle = 0.$$

A partir de aquí, el razonamiento que varias veces hemos aplicado nos garantiza la acotación $\lambda^2 \geq (n+1)^2/4$, si suponemos que $S \geq n(n+1)$ y que $H \geq 0$. Si se diese la igualdad, ψ sería un campo de espinores de Killing real y no trivial asociado a uno de los números $\pm 1/2$ y la curvatura media H sería constantemente cero. Por tanto, $|\psi|^2$ es constante sobre M y la curvatura escalar debe ser también constante e igual a $n(n+1)$. Entonces, la ecuación (1.36) implica que

$$\mathbf{D}\psi = \pm \frac{n}{2} \gamma(N)\psi.$$

En particular, $\psi + \gamma(N)\psi$ es otro campo no trivial que es propio para $\mathbf{D}$ para el valor propio $\pm n/2$, ya que, usando (1.37), tenemos

$$\mathbf{D}(\psi + \gamma(N)\psi) = \pm \frac{n}{2}(\psi + \gamma(N)\psi). \tag{2.13}$$

Como, por otro lado, $B_{APS}(\psi + \gamma(N)\psi) = 0$, todas las componentes de su desarrollo en serie de campos propios están asociadas a valores propios estrictamente negativos. En consecuencia, de los dos valores propios posibles hay que quedarse con $-n/2$. De aquí se deduce que $\lambda = (n+1)/2$. Esto demuestra lo siguiente.

Teorema 2.6.1 *Sea M una variedad riemanniana espinorial compacta de dimensión $n+1$ con curvatura escalar S mayor o igual que la de una esfera de radio uno y su misma dimensión y cuyo borde no vacío tiene curvatura media H no negativa respecto del campo normal interior. Entonces el espectro del operador de Dirac D sobre M, bajo la condición de frontera $B_{mAPS} = B_{APS} \circ (I + \gamma(N))$, es una sucesión no acotada de números reales $\{\lambda_m,\ m \in \mathbb{Z}\}$ que satisfacen la desigualdad*

$$\lambda^2 \geq \frac{(n+1)^2}{4}. \tag{2.14}$$

Además, la igualdad ocurre si, y sólo si, M posee un campo no trivial de espinores de Killing real asociado a la constante negativa $-1/2$ y la hipersuperfice borde ∂M es minimal.

El recíproco que hemos enunciado se deduce de lo siguiente. Si M posee una frontera minimal y un campo no trivial de espinores de Killing asociado a $-1/2$, entonces se llega a $D\psi = \frac{n+1}{2}\psi$ de manera inmediata. Por otro lado, como $H \equiv 0$, (1.36) demuestra que

$$\mathbf{D}\psi = -\frac{n}{2}\gamma\left(N\right)\psi,$$

y de aquí, al igual que en (2.13), se concluye que

$$\mathbf{D}\left(\psi + \gamma\left(N\right)\psi\right) = -\frac{n}{2}\left(\psi + \gamma\left(N\right)\psi\right).$$

Como $-n/2 < 0$, el campo de espinores $\psi + \gamma\left(N\right)\psi$ sólo posee componente negativa, por lo que

$$B_{mAPS}\psi = B_{APS}\left(\psi + \gamma\left(N\right)\psi\right) = 0.$$

Entonces ψ es un campo de espinores no trivial propio para el operador de Dirac de M para el valor propio $(n+1)/2$ que cumple la condición de frontera (2.12). Por tanto se da la igualdad en (2.14).

Capítulo 3

Operador de Dirac de hipersuperficies que bordean un dominio

Cuando establecimos la desigualdad de Reilly, en el Corolario 1.8.2, para campos de espinores sobre variedades compactas con borde, ya comentamos que se podría intentar utilizar o bien para obtener información acerca del espectro del operador de Dirac de la variedad, sujeto a diversas condiciones en el borde, como se ha hecho en el Capítulo 2 anterior, o bien para obtenerla acerca del operador de Dirac de la misma hipersuperficie del borde y su relación con su geometría extrínseca. La esperanza de lograr resultados de esta naturaleza tenía un sólido apoyo en el hecho de que Reilly ya los obtuvo para el operador de Laplace, usando una fórmula integral análoga para funciones (ver [Re]) y también otros geómetras lo hicieron posteriormente (ver [CW, Ro]). En esta desigualdad integral de Reilly aparece la geometría de la variedad representada por su curvatura de Ricci, no por la escalar, como en el caso espinorial, y una característica común a todos los trabajos citados es que necesitan suponer que esta curvatura de Ricci de la variedad ambiente es no negativa.

En una serie de trabajos recientes, [HMZ1, HMZ2, HM], O. Hijazi, S. Montiel y X. Zhang han explotado esta desigualdad de Reilly espinorial para estudiar el espectro del operador de Dirac de una hipersuperficie Σ que bordee un dominio compacto Ω en una variedad riemanniana espinorial M de dimensión $n+1$. Se parte de un campo de espinores ϕ sobre la hipersuperficie Σ que sea propio para el operador de Dirac de la estructura riemanniana espinorial inducida y se coloca en la desigualdad un campo de espinores ψ armónico, es decir, que cumple $D\psi = 0$ sobre Ω y que satisface una cierta condición de frontera relacionada con ϕ. Se obtiene entonces información para el valor propio λ al que ϕ está asociado, supuesto que la curvatura escalar de la variedad ambiente M es no negativa. De hecho, se llega al siguiente resultado.

Teorema 3.0.2 (Hijazi, Montiel, Zhang, [HMZ1]) *Sea Σ una hipersuperficie de una variedad riemanniana espinorial de dimensión $n+1$ y curvatura escalar no negativa que bordea un dominio compacto Ω. Si la curvatura media H de Σ respecto del normal interior cumple $H \geq 1$, entonces el valor propio λ_1 de menor valor absoluto del operador de Dirac de la estructura riemanniana espinorial inducida en Σ satisface la desigualdad*

$$|\lambda_1| \geq \frac{n}{2}.$$

La igualdad se da si y sólo si en Ω existe un campo de espinores paralelo no trivial y H es constantemente 1. *Además el espacio propio asociado a λ_1 está* formado *por las restricciones a Σ de los espinores paralelos de Ω, si $\lambda_1 \geq 0$, y por sus imágenes bajo $\gamma(N)$, si $\lambda_1 \leq 0$.*

Se puede ver esta estimación como un resultado de comparación entre la inmersión $\Sigma \subset M$ y la inmersión canónica de la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Si la curvatura escalar de M está minorada por la de $\mathbb{R}^{n+1}$ y la curvatura media de Σ lo está por la de S^n, entonces el espectro del operador de Dirac de Σ está minorado por el primer valor propio del operador de Dirac de la esfera (ver la Observación 1.7.1).

También se puede observar que el resultado anterior provee la misma acotación inferior que la desigualdad de Friedrich 1.6.3, con la ventaja de que funciona aunque la curvatura escalar de la hipersuperficie tome valores negativos. Como además, para una hipersuperficie del espacio euclídeo, la curvatura escalar S y la curvatura media H están relacionadas por la desigualdad $S \leq n(n-1)H^2$, el teorema anterior mejora la estimación de Friedrich en el caso de las hipersuperficies compactas embebidas en el espacio euclídeo. Es de destacar que una minoración de estas características es imposible para el operador de Laplace, ya que se pueden encontrar ejemplos de hipersuperficies compactas embebidas en el espacio euclídeo con curvatura media acotada inferiormente por una misma constante positiva que, sin embargo, tienen primeros valores propios del laplaciano arbitrariamente pequeños.

De la estimación extrínseca de Hijazi, Montiel y Zhang se pueden extraer varias consecuencias acerca de la geometría de las hipersuperficies que bordean dominios en ambientes espinoriales de curvatura escalar no negativa. La primera es una demostración trivial (ver [HMZ1]) del Teorema de Alexandrov [Al] que afirma que las únicas hipersuperficies compactas embebidas en el espacio euclídeo con curvatura media constante son las esferas. La segunda es que proporciona condiciones [HM] para saber cuándo los campos de espinores de Killing reales del borde de una variedad espinorial compacta provienen de los campos paralelos del interior, o sea, nos da una especie de *principio holográfico* (véase [Wi2]) para las simetrías espinoriales (*supersimetrías*, suelen decir los físicos). La tercera es que se deducen algunos teoremas de estructura sobre variedades compactas con borde Ricci-llanas (ver [HM]).

Todos los resultados precedentes, derivados o relacionados con el Teorema 3.0.2 citado antes, suponen que la variedad ambiente tiene curvatura escalar no negativa. En el presente Capítulo 3 de esta Memoria vamos a sacarle partido a la desigualdad espinorial de Reilly 1.8.2 en el caso en que la curvatura escalar de la variedad ambiente esté minorada por una constante negativa. En tal caso, veremos que, realizando las modificaciones oportunas al método que utilizaron los mencionados autores, podremos deducir resultados análogos a los ya establecidos. Entre tales modificaciones estará el resolver problemas de frontera para el operador de Dirac adecuados a la nueva situación de la geometría del espacio ambiente. A esto nos ayudarán de forma particular los resultados que ya hemos conseguido en el Capítulo 2 anterior.

Un resumen de este Capítulo 3, cuya referencia completa es [HMR2], ha sido publicado en Ann. Global Anal. Geom.

3.1. Variedades espinoriales con curvatura escalar minorada por una constante negativa

Como hemos comentado anteriormente, en el presente capítulo trabajaremos con una variedad riemanniana espinorial M de dimensión $n+1$ cuya curvatura escalar S está minorada por una constante negativa

$$S \geq -\alpha, \quad \text{donde } \alpha \in \mathbb{R}^{+}.$$

Un simple cambio de escala en la métrica permite prefijar el valor de esa constante. Para ganar en claridad, vamos a normalizar la métrica para que la curvatura escalar esté minorada por el valor que toma en el espacio hiperbólico de curvatura -1. Es decir, supondremos que M es una variedad de curvatura escalar que satisface

$$S \geq S_{H^{n+1}} = -n\,(n+1)\,. \tag{3.1}$$

Como nuestra variedad espinorial ambiente M va a estar sujeta a comparación con el espacio hiperbólico, conviene hacerse una idea clara de las estructuras riemanniana y espinorial que se consideran tácitamente en tal espacio. Ya señalamos tras la Definición 1.3.7 que el espacio H^{n+1} es una variedad espinorial. La estructura riemanniana espinorial que consideraremos en el espacio hiperbólico será la única (ya que $H^1(H^{n+1}, \mathbb{Z}_2) = 0$) correspondiente a la métrica usual de curvatura seccional constante -1. Quizás la forma más cómoda de visualizar esa métrica y los fibrados espinoriales asociados resulte de ver el espacio hiperbólico como una hipersuperficie espacial totalmente umbilical dentro del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n+2}_1$

$$H^{n+1} = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+2}_1 \;/\; \langle p, p\rangle = -1, p_0 \geq 1 \right\}.$$

De esta manera se acentúa el paralelismo entre este espacio modelo de curvatura negativa y las esferas euclídeas, que son los modelos de curvatura positiva. En efecto, aunque el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n+2}_1$ no es una variedad riemanniana, sí posee una estructura de Lorentz espinorial con propiedades análogas a las que señalamos en el Capítulo 1 para la estructura riemanniana espinorial del espacio euclídeo (ver Observación 1.5.2). En particular, el fibrado espinorial $\mathbb{S}\mathbb{R}^{n+2}_1$ es trivial y sus secciones se puede identificar pues con las funciones de $C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+2}_1, \mathbb{C}^{2^{[n/2]+1}})$. Además también las conexiones, tanto métrica como espinorial, coinciden con las derivaciones ordinarias. La diferencia fundamental con el caso euclídeo radica en el hecho de que el producto hermítico natural del álgebra de Clifford $\mathbb{C}l(\mathbb{R}_1^{n+2})$ no es definido positivo, aunque sí es no degenerado. Por tanto, lo mismo pasa para el correspondiente espacio de espinores. Una manera rápida de convencerse de ello, si no se quiere acudir a la definición que hicimos en la Sección 1.2, es que nos demos cuenta de que la propiedad análoga a la (1.11) implica que

$$|\gamma(X)\psi|^2 = -|\psi|^2$$

para cada $\psi \in \Gamma\left(\mathbb{S}\mathbb{R}_1^{n+2}\right)$ y cada campo X temporal unitario sobre $\mathbb{R}_1^{n+2}$. (Como consecuencia, la signatura de este producto hermítico ha de ser la mitad de la dimensión del espacio de espinores.) De manera análoga a como vimos en la Sección 1.7, sobre el espacio hiperbólico H^{n+1}, contemplado como una hipersuperficie del espacio de Minkowski se induce una estructura métrica espinorial, que es riemanniana por ser la hipersuperficie espacial. Si $\mathbf{S}$ es la restricción a H^{n+1} del fibrado espinorial del espacio de Minkowski, se puede identificar este fibrado, como se hizo en la Sección 1.7, con una o dos copias del fibrado espinorial intrínseco, según la paridad de n. Sin embargo, si N es un campo (temporal) normal unitario sobre el espacio hiperbólico (se puede tomar, como en la esfera, el opuesto del vector de posición), las igualdades (1.33) que definían la multiplicación de Clifford y la conexión extrínsecas, deben ahora modificarse levemente para adaptarse al hecho de que $|N|^2 = -1$. Se tiene

$$\gamma^{\mathbf{S}} = -i\gamma(N)\gamma \qquad \text{y} \qquad \nabla^{\mathbf{S}} = \nabla - \frac{1}{2}\gamma(N)\gamma = \nabla + \frac{i}{2}\gamma^{\mathbf{S}},$$

donde hemos tenido en cuenta que el endomorfismo de Weingarten A correspondiente a nuestro campo normal es la identidad. Con estos datos, el lector puede repasar los detalles necesarios para ver que la estructura riemanniana espinorial del espacio hiperbólico es, en cierto sentido, dual de la de la esfera.

Observación 3.1.1 *Consideremos sobre el espacio hiperbólico H^{n+1} su única estructura espinorial y la métrica y orientación inducidas del espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^{n+2}$. Entonces existen $2^{[\frac{n}{2}]+1}$ campos de espinores independientes que son solución de cada una de las dos ecuaciones siguientes*

$$\nabla\psi = \pm\frac{i}{2}\gamma\psi.$$

O sea, el espacio hiperbólico admite un número maximal de campos de espinores de Killing imaginarios. Por lo tanto son campos propios para el operador de Dirac que satisfacen

$$D\psi = \pm\frac{n+1}{2}i\psi.$$

Con distintas formulaciones a la que hemos empleado aquí, se pueden consultar para ampliar el conocimiento del operador de Dirac del espacio hiperbólico (que no tiene espectro discreto porque no es una variedad compacta) los trabajos [Ba2, BFGK, Bun2, CH].

Una vez señaladas estas características principales de la estructura espinorial del espacio hiperbólico, vamos a ver que la desigualdad espinorial de Reilly (1.38), que será de nuevo una herramienta fundamental, adopta una forma especial cuando la curvatura escalar de la variedad espinorial está acotada inferiormente por la del espacio hiperbólico. Si la hipersuperficie Σ es el borde de un dominio compacto Ω de una variedad riemanniana espinorial compacta M cuya curvatura escalar verifica la acotación (3.1), el primer miembro de dicha fórmula queda acotado de la forma siguiente

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{4}S\,|\psi|^2 - \frac{n}{n+1}\,|D\psi|^2\right) \geq -\frac{n}{n+1}\int_\Omega \left(\left|\frac{n+1}{2}i\psi\right|^2 + |D\psi|^2\right).$$

Utilizamos ahora la siguiente igualdad puntual trivial

$$\left|D\psi \mp \frac{n+1}{2}i\psi\right|^2 = |D\psi|^2 + \left|\frac{n+1}{2}i\psi\right|^2 \mp (n+1)\,\langle D\psi, i\psi\rangle.$$

Se consigue entonces la desigualdad

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{4}S\,|\psi|^2 - \frac{n}{n+1}\,|D\psi|^2\right) \geq -\frac{n}{n+1}\int_\Omega \left(\left|D\psi \mp \frac{n+1}{2}i\psi\right|^2 \pm (n+1)\,\Re\,(D\psi, i\psi)\right).$$

La integral sobre Ω del segundo sumando de la derecha se puede transformar en una integral sobre el borde Σ, ya que aplicando la fórmula (1.21) a los campos ψ e $i\psi$, nos queda

$$\int_\Sigma \langle i\gamma\,(N)\,\psi, \psi\rangle = \int_\Omega (D\psi, i\psi) - \int_\Omega (\psi, Di\psi) = 2\int_\Omega \langle D\psi, i\psi\rangle.$$

Usando esta ecuación en la última desigualdad, llegamos a

$$-\frac{n}{n+1}\int_\Omega \left|D\psi \mp \frac{n+1}{2} i\psi\right|^2 \leq \int_\Sigma \left(\left\langle \left(\mathbf{D} \pm \frac{n}{2} i\gamma(N)\right)\psi, \psi\right\rangle - \frac{nH}{2}|\psi|^2\right).$$

Si se diese la igualdad para un campo no trivial ψ, la desigualdad espinorial de Reilly nos diría que ψ es un campo *twistor*. Por tanto, como es no trivial, es no nulo en un conjunto denso, y de la acotación en (3.1), deducimos que la curvatura escalar S es constantemente $-n(n+1)$. Hemos demostrado entonces la siguiente versión de la desigualdad espinorial de Reilly.

Proposición 3.1.2 *Sea Ω un dominio compacto de una variedad riemanniana espinorial M cuya curvatura escalar cumpla*

$$S \geq -n(n+1)$$

y cuyo borde es la hipersuperficie Σ. Entonces cada campo de espinores $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Omega)$ satisface

$$-\frac{n}{n+1}\int_\Omega \left|D\psi \mp \frac{n+1}{2} i\psi\right|^2 \leq \int_\Sigma \left(\langle \widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}\psi, \psi\rangle - \frac{n}{2}H|\psi|^2\right), \tag{3.2}$$

donde $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm} : \Gamma(\mathbf{S}) \to \Gamma(\mathbf{S})$ son los operadores diferenciales sobre el fibrado espinorial extrínseco de Σ dados por

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm} := \mathbf{D} \pm \frac{n}{2} i\gamma(N), \tag{3.3}$$

y N es el normal unitario interior a lo largo de Σ. Un campo no trivial alcanza la igualdad en (3.2) si, y sólo si, es un campo de espinores twistor *y la curvatura escalar S de Ω es constantemente $-n(n+1)$.*

Uno de los primeros objetivos que nos hemos propuesto para este Capítulo 3 es el de estimar los valores propios del operador de Dirac intrínseco D^Σ de la hipersuperficie que bordea un dominio compacto de una variedad riemanniana espinorial. La relación (1.35) existente entre los espectros de los operadores de Dirac asociados al borde, el intrínseco D^Σ y el extrínseco $\mathbf{D}$, nos permitirá hacer esa estimación estudiando el espectro de $\mathbf{D}$. Si observamos ahora la Proposición 3.1.2 anterior, veremos que un cierto control sobre los valores propios de los nuevos operadores diferenciales $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ ayudará a conocer los respectivos valores propios de $\mathbf{D}$, lo cual se traducirá posteriormente en información sobre los de D^Σ.

Lema 3.1.3 *Sea Σ una hipersuperficie orientable inmersa en una variedad riemanniana espinorial M de dimensión $n+1$ y sea $\mathbf{D}$ el operador de Dirac extrínseco que actúa sobre el fibrado espinorial restringido $\mathbf{S}$. Entonces los operadores diferenciales de primer orden*

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm} = \mathbf{D} \pm \frac{n}{2} i\gamma(N),$$

donde N es un campo normal unitario sobre Σ, son elípticos y formalmente autoadjuntos. Además, si Σ es compacta, sus respectivos espectros satisfacen

(1) $\quad Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) = -Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-}),$

(2) $$\left\{ \pm\sqrt{\lambda^2 + \frac{n^2}{4}} \Big/ \ \lambda \in Spec(\mathbf{D}),\ \lambda \neq 0 \right\} \subset Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \cap Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-}),$$

(3) $$Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \cup Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-}) = \left\{ \pm\sqrt{\lambda^2 + \frac{n^2}{4}} \Big/ \ \lambda \in Spec(\mathbf{D}) \right\}.$$

Demostración : Dado que $\mathbf{D}$ y $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ difieren únicamente en un múltiplo del campo de endomorfismos $i\gamma(N)$ que es autoadjunto por (1.14), los nuevos operadores $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ son operadores diferenciables de primer orden, que heredan las propiedades de $\mathbf{D}$. Son, pues, elípticos porque poseen el mismo símbolo principal y son formalmente autoadjuntos. Si suponemos que la hipersuperficie Σ es compacta, por las mismas razones de la teoría espectral estándar que para el espectro de $\mathbf{D}$, se deduce para $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ que sus espectros son sucesiones no acotadas (ni inferior ni superiormente) de números reales.

La propiedad (1) a demostrar es clara, pues el automorfismo $\gamma(N) : \Gamma(\mathbf{S}) \to \Gamma(\mathbf{S})$ intercambia, por (1.37), los respectivos subespacios propios asociados a valores propios opuestos.

Para demostrar (2), tomemos un valor propio no nulo λ de $Spec(\mathbf{D})$ y un campo propio asociado $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$. Llamemos $\tilde{\lambda} := \sqrt{\lambda^2 + n^2/4} > n/2$, y definamos los nuevos campos de espinores

$$\psi^{\pm} = \frac{n}{2}\varphi \pm \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma(N)\varphi, \tag{3.4}$$

$$\xi^{\pm} = \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)\varphi \mp \frac{n}{2} i\gamma(N)\varphi. \tag{3.5}$$

Como φ es no trivial, ninguno de estos campos puede anularse, ya que se tendría que $(\tilde{\lambda} - \lambda)^2 = n^2/4$, lo cual es imposible pues λ es no nulo. Además, como $\mathbf{D}\varphi = \lambda\varphi$, usando la anticonmutatividad (1.37), se tiene que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}\psi^{\pm} &= \left(\mathbf{D} \pm \frac{n}{2} i\gamma(N)\right)\left(\frac{n}{2}\varphi \pm \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma(N)\varphi\right) \\
&= \frac{n}{2}\lambda\varphi \pm \frac{n^2}{4} i\gamma(N)\varphi \mp \lambda\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma(N)\varphi + \frac{n}{2}\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)\varphi \\
&= \tilde{\lambda}\frac{n}{2}\varphi \pm \left(\frac{n^2}{4} + \lambda^2 - \lambda\tilde{\lambda}\right) i\gamma(N)\varphi \\
&= \tilde{\lambda}\frac{n}{2}\varphi \pm \left(\tilde{\lambda}^2 - \lambda\tilde{\lambda}\right) i\gamma(N)\varphi = \tilde{\lambda}\psi^{\pm}.
\end{aligned}$$

Igualmente se deduce que $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}\xi^{\pm} = -\tilde{\lambda}\xi^{\pm}$, y como los campos no son triviales, deducimos que

$$\pm\tilde{\lambda} = \pm\sqrt{\lambda^2 + \frac{n^2}{4}} \in Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \cap Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-}).$$

Esto significa que la propiedad (2) es cierta.

Para probar (3), veamos primeramente que si el número cero es un valor propio de $\mathbf{D}$, entonces $\pm n/2 \in Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \cup Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-})$. En efecto, si $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$ verifica que $\mathbf{D}\varphi = 0$, de la misma manera que antes, podemos demostrar que

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}(\varphi + i\gamma(N)\varphi) = \pm\frac{n}{2}(\varphi + i\gamma(N)\varphi)$$

y que

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}(\varphi - i\gamma(N)\varphi) = \mp\frac{n}{2}(\varphi - i\gamma(N)\varphi).$$

En este caso, alguno de los campos $\varphi \pm i\gamma(N)\varphi$ podría anularse, pero no los dos simultáneamente, porque φ es no trivial. Entonces, $\pm n/2 \in Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \cup Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-})$. Recíprocamente, tomemos un valor propio cualquiera $\tilde{\lambda} \in Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+})$ y un campo propio no trivial ψ asociado. Este campo es propio para el operador $\mathbf{D}^2$, pues

$$\mathbf{D}^2\psi = \left((\widetilde{\mathbf{D}}^{+})^2 - \frac{n^2}{4}\right)\psi = \left(\tilde{\lambda}^2 - \frac{n^2}{4}\right)\psi,$$

pero como $\mathbf{D}^2$ sólo posee valores propios reales no negativos, deducimos que $\tilde{\lambda}^2 \geq n^2/4$, y podemos definir $\lambda := \sqrt{\tilde{\lambda}^2 - n^2/4} \geq 0$ y el campo de espinores

$$\varphi = \frac{n}{2}\psi - \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma(N)\psi.$$

Las manipulaciones usuales y el hecho de que $\widetilde{\mathbf{D}}^{+}\psi = \tilde{\lambda}\psi$ nos llevan a

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\varphi &= \frac{n}{2}\mathbf{D}\psi + \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma\left(N\right)\mathbf{D}\psi \\
&= \frac{n}{2}\left(\widetilde{\mathbf{D}}^{+} - \frac{n}{2}i\gamma\left(N\right)\right)\psi + \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma\left(N\right)\left(\widetilde{\mathbf{D}}^{+} - \frac{n}{2}i\gamma\left(N\right)\right)\psi \\
&= \frac{n}{2}\tilde{\lambda}\psi - \frac{n^2}{4}i\gamma\left(N\right)\psi + \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma\left(N\right)\tilde{\lambda}\psi - \frac{n}{2}\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right)\psi \\
&= \frac{n}{2}\lambda\psi + \left(\tilde{\lambda}^2 - \frac{n^2}{4} - \lambda\tilde{\lambda}\right) i\gamma\left(N\right)\psi \\
&= \frac{n}{2}\lambda\psi + \left(\lambda^2 - \lambda\tilde{\lambda}\right) i\gamma\left(N\right)\psi = \lambda\varphi.
\end{aligned}$$

La posibilidad de que $\varphi = 0$ se daría únicamente en el caso de que $\tilde{\lambda} = \pm n/2$. Por tanto, si suponemos que $|\tilde{\lambda}| > n/2$, λ es un valor propio de $\mathbf{D}$ y ya tenemos la otra inclusión de la propiedad (3), es decir, $Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \subset \{\pm\sqrt{\lambda^2 + n^2/4} \,/\, \lambda \in Spec\left(\mathbf{D}\right)\}$, porque $\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 + n^2/4$ por la propia definición de λ. Por último, supongamos que $\tilde{\lambda} = \pm n/2$ y que $\varphi = 0$. En este caso, obligatoriamente $\lambda = 0$ y tenemos que

$$0 = \varphi = \frac{n}{2}\psi \mp \frac{n}{2}i\gamma\left(N\right)\psi \quad \Rightarrow \quad \psi = \pm i\gamma\left(N\right)\psi.$$

Entonces el mismo ψ es un campo propio para $\mathbf{D}$ asociado al valor propio cero, ya que

$$\mathbf{D}\psi = \left(\widetilde{\mathbf{D}}^{+} - \frac{n}{2}i\gamma\left(N\right)\right)\psi = \pm\frac{n}{2}\psi - \frac{n}{2}i\gamma\left(N\right)\psi = 0.$$

Por lo tanto $0 \in Spec\left(\mathbf{D}\right)$ y también hemos demostrado la otra inclusión de la propiedad (3).

Si hubiésemos partido de un valor propio $\tilde{\lambda} \in Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-})$ y de un campo propio ψ asociado, por la misma razón tendríamos que $\tilde{\lambda}^2 \geq n^2/4$, y hubiésemos definido λ de la misma forma que antes y, en cambio,

$$\varphi = \frac{n}{2}\psi + \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma\left(N\right)\psi,$$

y el razonamiento anterior sería completamente análogo, por lo que también tenemos que $Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-}) \subset \{\pm\sqrt{\lambda^2 + n^2/4}/\, \lambda \in Spec\left(\mathbf{D}\right)\}$. Esto completa la demostración. ■

Este Lema 3.1.3 no sólo nos proporciona la relación entre los valores propios de $\mathbf{D}$ y $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$, sino que además construye explícitamente los correspondientes isomorfismos entre sus subespacios propios asociados. En efecto, representemos por $E_{\lambda}\left(\mathbf{D}\right)$ y por $E_{\tilde{\lambda}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm})$ a los subespacios propios de $\mathbf{D}$ y $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ asociados a los respectivos valores propios λ y $\tilde{\lambda}$. El lema anterior nos dice que nos podemos encontrar ante dos casos distintos:

1. Si $0 \neq \lambda \in Spec\,(\mathbf{D})$, entonces $\pm\tilde{\lambda} = \pm\sqrt{\lambda^2 + n^2/4} \in Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \cap Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-})$, y las aplicaciones lineales que intervienen en las expresiones (3.4) y (3.5)

$$\frac{n}{2}I \pm \left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) i\gamma\,(N) : E_\lambda\,(\mathbf{D}) \to E_{\tilde{\lambda}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}),$$
$$\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) I \mp \frac{n}{2} i\gamma\,(N) : E_\lambda\,(\mathbf{D}) \to E_{-\tilde{\lambda}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}),$$

son isomorfismos.

2. Si $\lambda = 0 \in Spec\,(\mathbf{D})$, entonces $\pm n/2 \in Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) \cup Spec(\widetilde{\mathbf{D}}^{-})$, y en el lema anterior hemos demostrado que se verifican las igualdades

$$E_{+\frac{n}{2}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) = E_0^{+}\,(\mathbf{D}) = \{\psi \in E_0\,(\mathbf{D}) \;/\; i\gamma\,(N)\,\psi = \psi\}\,,$$
$$E_{-\frac{n}{2}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{+}) = E_0^{-}\,(\mathbf{D}) = \{\psi \in E_0\,(\mathbf{D}) \;/\; i\gamma\,(N)\,\psi = -\psi\}\,.$$

Por un razonamiento análogo deducimos que

$$E_{+\frac{n}{2}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{-}) = E_0^{-}\,(\mathbf{D}) \qquad \text{y} \qquad E_{-\frac{n}{2}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{-}) = E_0^{+}\,(\mathbf{D})\,,$$

por lo que finalmente tenemos

$$E_0^{+}\,(\mathbf{D}) = E_{\pm\frac{n}{2}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}) \qquad \text{y} \qquad E_0^{-}\,(\mathbf{D}) = E_{\mp\frac{n}{2}}(\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}).$$

3.2. Un problema de frontera adecuado

En [HMZ1], para estudiar hipersuperficies en ambientes de curvatura escalar no negativa, la desigualdad de Reilly (1.38) invitaba a buscar espinores armónicos con una condición de frontera conveniente. La nueva versión (3.2) de esa desigualdad para variedades de curvatura escalar minorada por una cantidad negativa parece indicar que, dado un cierto campo de espinores sobre la hipersuperficie Σ que bordea al dominio Ω, sería útil poner en la desigualdad una extensión suya a Ω que sea solución de una de las dos ecuaciones de valores propios siguientes

$$D\psi = \pm\frac{n+1}{2} i\psi.$$

En la variedad de referencia, que es el espacio hiperbólico, sabemos por la Observación 3.1.1 que tales espinores existen y que son, de hecho, los campos de Killing imaginarios.

Por otro lado, como se ve en el trabajo ya citado [HMZ1] o en [HMZ2], es importante elegir una condición de frontera adecuada a la naturaleza del problema que se quiere estudiar. Dado que en el término de frontera de la versión que ahora usaremos de la desigualdad de Reilly aparece, en la definición de los operadores modificados $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$, el campo de endomorfismos autoadjuntos $i\gamma(N)$, donde N es el normal interior de Σ, parece quizás más oportuno considerar la condición de frontera MIT (ver la Sección 2.5) que trabajamos en el Capítulo 2 anterior. Para todo ello, necesitaríamos que los problemas

$$\begin{cases} D\psi = \pm\frac{n+1}{2}i\psi, & \text{sobre } M, \\ \psi_{\pm} = \varphi_{\pm}, & \text{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

tuvieran solución para cualquier campo $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$, donde los subíndices $+$ y $-$ significan

$$\psi_{\pm} = B^{\pm}_{MIT}\psi = \frac{1}{2}\left(I \pm i\gamma(N)\right)\psi,$$

como en la Secciones 2.4 y 2.5. Habida cuenta de que, en la citada Sección 2.5 demostramos que cualquiera de las dos posibles condiciones MIT es elíptica (ver también la Observación 2.5.2) y que, por lo tanto, según la Proposición 2.1.5, los problemas anteriores son de Fredholm y tienen soluciones diferenciables, sólo deberemos analizar cuál es el comportamiento de los problemas homogéneos correspondientes a sus operadores adjuntos. El siguiente resultado pone de manifiesto que esos operadores adjuntos no nos son desconocidos.

Lema 3.2.1 *Sea Ω un dominio compacto de una variedad riemanniana espinorial bordeado por la hipersuperficie Σ. Sean D el operador de Dirac de la variedad y $B^{\pm}_{MIT}$ las condiciones de frontera asociadas a los valores propios del operador $i\gamma(N)$, donde N es el normal interior a lo largo de Σ. Entonces el operador adjunto (en el sentido de la teoría de operadores no acotados) respecto del producto L^2 definido en (1.20) del operador $D \pm \frac{n+1}{2}i$ con dominio*

$$dom\left(D \pm \frac{n+1}{2}i\right) = \{\psi \in \Gamma(\mathbf{S}) \,/\, \psi_{\pm} = 0\}$$

es el operador $D \mp \frac{n+1}{2}i$ con dominio

$$dom\left(D \mp \frac{n+1}{2}i\right) = \{\psi \in \Gamma(\mathbf{S}) \,/\, \psi_{\mp} = 0\}$$

Demostración : Sea $\varphi \in dom\left(D \pm \frac{n+1}{2}i\right)$ y sea $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$. Entonces, teniendo en cuenta (1.21),

$$\left(\left(D \pm \frac{n+1}{2}i\right)\varphi, \psi\right)_{L^2} - \left(\varphi, \left(D \mp \frac{n+1}{2}i\right)\psi\right)_{L^2} = -\int_\Sigma (\gamma(N)\varphi, \psi) = \pm \int_\Sigma (i\varphi, \psi).$$

Por lo tanto, usando campos φ que se anulen en Σ se llega a que

$$\left(D \pm \frac{n+1}{2}i\right)^* \psi = \left(D \mp \frac{n+1}{2}i\right)\psi,$$

si $\psi \in dom\left(D \pm \frac{n+1}{2}i\right)^*$. Como consecuencia, hemos de tener

$$\int_\Sigma (i\varphi, \psi) = 0$$

para cada $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$ con $\varphi_\pm = 0$. Es decir que $\psi_\mp = 0$, como queríamos. ■

Supongamos ahora que

$$\lambda = \pm \frac{n+1}{2}i$$

es un valor propio del operador de Dirac D sujeto a la condición de frontera $B^\pm_{MIT}$. En tal caso, existe un campo de espinores no trivial ψ que cumple

$$\begin{cases} D\psi = \pm\frac{n+1}{2}i\psi, & \text{sobre } \Omega, \\ \psi_\pm = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Si suponemos que la curvatura escalar de M sobre el dominio Ω está minorada por $S \geq -n\,(n+1)$, la Proposición 3.1.2 nos proporciona la desigualdad

$$0 \leq \int_{\partial\Omega} \left(\langle \widetilde{\mathbf{D}}^\pm \psi, \psi\rangle - \frac{n}{2}H\,|\psi|^2\right), \tag{3.6}$$

dándose la igualdad únicamente cuando ψ es un campo *twistor* y la curvatura escalar es constantemente $-n\,(n+1)$. Por otro lado, teniendo en cuenta que ψ_+ y ψ_- son perpendiculares por ser proyecciones a los dos espacios propios de $i\gamma(N)$, y que, por (1.37), el operador $\mathbf{D}$ intercambia dichos espacios propios, se tiene

$$\langle \widetilde{\mathbf{D}}^\pm \psi, \psi\rangle = 2\langle \mathbf{D}\psi_+, \psi_-\rangle \pm \frac{n}{2}|\psi_+|^2 \mp \frac{n}{2}|\psi_-|^2. \tag{3.7}$$

Entonces, la condición $\psi_\pm = 0$ sobre Σ, implica

$$\int_\Sigma \langle \widetilde{\mathbf{D}}^\pm \psi, \psi\rangle = -\frac{n}{2}\int_\Sigma |\psi_\mp|^2.$$

Esta desigualdad nos indica que, si suponemos que la curvatura media H del borde (respecto del campo normal interior) está minorada por -1, realmente se da la igualdad en (3.6). Esto garantiza que Ω posee curvatura escalar constante $-n\,(n+1)$ y que ψ es un campo de espinores *twistor*. Pero, como también es propio para el operador de Dirac, realmente es un campo de Killing asociado a la constante de Killing imaginaria $\mp\frac{i}{2}$, es decir, para cada campo diferenciable $X \in \Gamma\,(\mathbb{S}\Omega)$, se cumple

$$\nabla_X \psi = \mp\frac{i}{2}\gamma\,(X)\,\psi.$$

Además, se debe dar la igualdad $H = -1$ en los puntos del borde en los que $\psi|_\Sigma$ no se anula, pero como ψ es un campo de Killing no trivial, no puede anularse en ningún punto (ver la Observación 1.6.6). Esto demuestra que la curvatura media es constantemente -1, y con ello hemos comprobado la alternativa que ofrece el siguiente lema.

Lema 3.2.2 *Si Ω es un dominio compacto de una variedad riemanniana espinorial M de dimensión $n+1$ sobre el que la curvatura escalar satisface $S \geq -n\,(n+1)$ y cuya hipersuperficie frontera Σ posee curvatura media $H \geq -1$ (respecto del campo normal interior), entonces alguna de las dos siguientes afirmaciones es verdadera:*

1. El número complejo $\lambda = \pm\frac{n+1}{2}i$ no es un valor propio del operador de Dirac sobre Ω sujeto a la condición de frontera $B^{\pm}_{MIT} = 0$ sobre el borde Σ.

2. Existe un campo de espinores de Killing no trivial sobre Ω asociado a la constante de Killing $\mp i/2$, y la curvatura media H es la función constante -1 sobre Σ.

En la segunda afirmación, no es necesario resaltar que la curvatura escalar de Ω tomaría constantemente el valor $-n\,(n+1)$, ya que ello está implícito en las restricciones que impone el hecho de poseer un campo no trivial de Killing.

Cuando se conoce un número complejo que no está en el espectro de un operador de Fredholm, es posible utilizar la teoría general para deducir que un problema correspondiente no homogéneo tiene siempre solución única. En nuestro caso particular, sabemos, por la elipticidad de la condición de frontera que usamos (véase [BW, Cap. 19]), que la realización del operador $D \mp \frac{n+1}{2}i$ sobre Ω bajo la condición de frontera $B^{\pm}_{MIT}$ es un operador de Fredholm. Por tanto, cuando $\lambda = \pm\frac{n+1}{2}i$ no es un valor propio del operador de Dirac sobre Ω sujeto a la condición de frontera $B^{\pm}_{MIT} = 0$ sobre el borde Σ, es que

$$\ker\left(D \mp \frac{n+1}{2}i, B^{\pm}_{MIT}\right) = \{0\}.$$

Por tanto, como el núcleo de un operador y el conúcleo de su adjunto coinciden, se tiene

$$\operatorname{coker}\left(D \mp \frac{n+1}{2}i, B^{\pm}_{MIT}\right)^{*} = \{0\}.$$

Pero, en el Lema 3.2.1 anterior, habíamos calculado esos adjuntos. Así

$$\operatorname{coker}\left(D \pm \frac{n+1}{2}i, B^{\mp}_{MIT}\right) = \{0\}.$$

O sea, el operador $D \pm \frac{n+1}{2}i$, con la condición de frontera $B^{\mp}_{MIT} = 0$ es sobreyectivo. Como la elipticidad de nuestro problema garantiza la regularidad de las soluciones, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.3 *Sea Σ una hipersuperficie que acota un dominio compacto Ω en una variedad riemanniana espinorial de dimensión $n+1$ con curvatura escalar $S \geq -n(n+1)$ sobre Ω. Supongamos que la curvatura media H de Σ (respecto del normal interior) satisface $H \geq -1$. Entonces alguna de las dos siguientes afirmaciones es verdadera:*

1. El problema de frontera no homogéneo

$$\begin{cases} D\psi = \pm\frac{n+1}{2}i\psi, & \textit{sobre } \Omega, \\ (\psi|_{\Sigma})_{\pm} = \varphi_{\pm}, & \textit{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

posee una única solución diferenciable $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}\Omega)$ sea cual sea la condición inicial $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$.

2. Existe un campo no trivial de Killing sobre Ω asociado a la constante de Killing $\mp i/2$, y la curvatura media H es la función constante -1 sobre Σ.

Una forma bastante sencilla de excluir la segunda posibilidad consiste en suponer que la curvatura media del borde es estrictamente mayor que -1. Haremos uso de esta observación en la siguiente sección, donde nos pondremos en el caso de que $H \geq 0$, y así podremos resolver con unicidad el problema de frontera arriba planteado, lo cual nos servirá para acotar adecuadamente valores propios del operador de Dirac extrínseco $\mathbf{D}$ sobre la hipersuperficie Σ.

3.3. Una estimación extrínseca para los valores propios del operador de Dirac de la hipersuperficie

En la presente sección, vamos a dar una acotación inferior de los valores propios de los operadores $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$, definidos en (3.3) y, por tanto, según el Lema 3.1.3, de los valores propios de $\mathbf{D}$. Utilizaremos la versión de la desigualdad de Reilly obtenida en la Proposición 3.1.2 para acotar el menor valor propio no negativo de $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$, y así obtendremos una estimación correspondiente para los valores propios de $\mathbf{D}$. El siguiente teorema es el análogo al que obtuvieron O. Hijazi, S. Montiel y X. Zhang en [HMZ1] en el caso de variedades con curvatura escalar no negativa.

Teorema 3.3.1 *Sea M una variedad riemanniana espinorial de dimensión $n+1$ con curvatura escalar $S \geq -n(n+1)$. Sea Σ una hipersuperficie de M que acote un dominio compacto Ω en M, y cuya curvatura media H, respecto del normal interior, sea no negativa. Entonces los menores valores propios no negativos $\tilde{\lambda}_1^{\pm}$ de los operadores de Dirac modificados $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ satisfacen*

$$\tilde{\lambda}_1^{\pm} \geq \frac{n}{2} \inf_{\Sigma} H.$$

Además, si se alcanza la igualdad, existe un campo no trivial de Killing sobre Ω asociado a la constante de Killing $\mp i/2$, Σ posee curvatura media constante y el subespacio propio de $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ asociado al valor propio $\lambda_1^{\pm}$ está formado por la restricción a Σ de todos los espinores de Killing sobre Ω asociados a la constante $\mp i/2$.

Demostración: Sea $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$ cualquier campo propio para $\widetilde{\mathbf{D}}^{+}$ asociado al valor propio λ_1^{+}, es decir, $\widetilde{\mathbf{D}}^{+}\varphi = \lambda_1^{+}\varphi$ o, equivalentemente, si se tienen en cuenta la definición (3.3) y el hecho de que $\mathbf{D}$ intercambia los espacios propios de $i\gamma(N)$,

$$\mathbf{D}\varphi_{+} = \left(\lambda_1^{+} + \frac{n}{2}\right)\varphi_{-}, \qquad \mathbf{D}\varphi_{-} = \left(\lambda_1^{+} - \frac{n}{2}\right)\varphi_{+}. \tag{3.8}$$

Como $H \geq 0$, es imposible que la curvatura media sea constantemente -1 sobre el borde, lo que excluye la segunda posibilidad en la conclusión del Lema 3.2.3. Sea $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}M)$ la única solución del problema de frontera

$$\begin{cases} D\psi = \frac{n+1}{2} i\psi, & \text{sobre } \Omega, \\ (\psi|_{\Sigma})_{+} = \varphi_{+}, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Aplicando el Lema 3.1.2 a esta solución, encontramos que

$$0 \leq \int_\Sigma \left(\langle \widetilde{\mathbf{D}}^+ \psi, \psi \rangle - \frac{n}{2} H \, |\psi|^2 \right), \tag{3.9}$$

alcanzándose la igualdad únicamente si ψ es un campo *twistor* (y la curvatura escalar de Ω es constantemente $-n\,(n+1)$), lo que unido a que es propio para el operador de Dirac, nos garantizaría que es un campo de Killing imaginario asociado a la constante $-i/2$. Por otra parte, combinando la condición $(\psi|_\Sigma)_+ = \varphi_+$ con las igualdades (3.8) y (3.7), se consigue

$$\int_\Sigma \langle \widetilde{\mathbf{D}}^+ \psi, \psi \rangle = \int_\Sigma \left(2 \left(\lambda_1^+ + \frac{n}{2} \right) \langle \varphi_-, \psi_- \rangle + \frac{n}{2} |\varphi_+|^2 - \frac{n}{2} |\psi_-|^2 \right).$$

La desigualdad elemental

$$2 \langle \varphi_-, \psi_- \rangle \leq |\varphi_-|^2 + |\psi_-|^2$$

implica entonces

$$\int_\Sigma \langle \widetilde{\mathbf{D}}^+ \psi, \psi \rangle \leq \int_\Sigma \left(\left(\lambda_1^+ + \frac{n}{2} \right) |\varphi_-|^2 + \lambda_1^+ |\psi_-|^2 + \frac{n}{2} |\varphi_+|^2 \right).$$

Ahora bien, si en las dos igualdades (3.8) multiplicamos escalarmente por φ_- y por φ_+ respectivamente e integramos en Σ, como el operador $\mathbf{D}$ es autoadjunto, tenemos

$$\int_\Sigma \left(\lambda_1^+ + \frac{n}{2} \right) |\varphi_-|^2 = \int_\Sigma \left(\lambda_1^+ - \frac{n}{2} \right) |\varphi_+|^2.$$

Sustituyendo en la desigualdad integral anterior, obtenemos

$$\int_\Sigma \langle \widetilde{\mathbf{D}}^+ \psi, \psi \rangle \leq \int_\Sigma \lambda_1^+ \left(|\varphi_+|^2 + |\psi_-|^2 \right) = \int_\Sigma \lambda_1^+ |\psi|^2,$$

dándose la igualdad entre los extremos únicamente si $\psi|_\Sigma = \varphi$. Introduciendo esta información en la desigualdad (3.9), nos queda que

$$0 \leq \int_\Sigma \left(\lambda_1^+ - \frac{n}{2} H \right) |\psi|^2 \leq \left(\lambda_1^+ - \frac{n}{2} \inf_\Sigma H \right) \int_\Sigma |\psi|^2.$$

De aquí se deduce que $\tilde{\lambda}_1^+ \geq \frac{n}{2} \inf_\Sigma H$. Si se diese la igualdad, $\varphi = \psi|_\Sigma$ sería la restricción a Σ de un campo de espinores de Killing imaginario no trivial asociado a $-i/2$, y la curvatura media H sería constante. La demostración de la desigualdad para λ_1^- y la discusión del caso de la igualdad es completamente análoga. ∎

Sólo hay que combinar el teorema anterior con el Lema 3.1.3 y las observaciones posteriores a dicho lema para obtener el resultado central de esta sección: un teorema de comparación extrínseco para el espectro de una hipersuperficie que bordea un dominio.

Teorema 3.3.2 *Sea Σ una hipersuperficie que bordea un dominio compacto Ω de una variedad riemanniana espinorial M de dimensión $n+1$ cuya curvatura escalar cumple $S \geq -n\,(n+1)$. Supongamos que la curvatura media H de Σ respecto del campo normal y unitario interior verifica $H \geq \coth r$, para $0 < r \leq +\infty$. Entonces el valor propio con menor valor absoluto, λ_1^Σ, del operador de Dirac D^Σ de la estructura riemanniana espinorial inducida sobre la hipersuperficie Σ satisface la desigualdad*

$$\left|\lambda_1^\Sigma\right| \geq \frac{n}{2\sinh r}$$

Si se alcanza la igualdad, entonces Ω es una variedad de Einstein con curvatura de Ricci $-n$, la curvatura media H es constante $\coth r$ y el subespacio propio $E_{\frac{n}{2\sinh r}}\left(\mathbf{D}\right)$ está dado en términos de restricciones a Σ de campos de espinores de Killing imaginarios sobre Ω de la siguiente manera:

$$\begin{cases} E_{\frac{n}{2\sinh r}}\left(\mathbf{D}\right) = \left(I \pm \tanh\frac{r}{2}\, i\gamma\left(N\right)\right)\mathcal{K}_{\mp\frac{i}{2}}\left(\Omega\right)\Big|_\Sigma, & si\ r < +\infty, \\ \\ E_0^\pm\left(\mathbf{D}\right) = \mathcal{K}_{\mp\frac{i}{2}}\left(\Omega\right)\Big|_\Sigma, & si\ r = +\infty, \end{cases}$$

donde $\mathcal{K}_\mu\left(\Omega\right)$ representa el espacio de campos de espinores de Killing sobre Ω asociados a la constante μ.

Observación 3.3.3 *La estimación dada en el teorema anterior es óptima. De hecho, la igualdad la alcanzan las esferas geodésicas del espacio hiperbólico, cuando $H > 1$ (o sea, cuando $r < +\infty$), o las secciones $\{t\} \times P$ en un producto de deformación $\mathbb{R} \times_{\exp} P$, cuando $H = 1$ (o sea, cuando $r = +\infty$), donde P es una variedad espinorial compacta que posea campos de espinores no triviales y paralelos (véanse [Bä2], [M] y la siguiente sección).*

La estimación de Friedrich, aplicada a nuestra situación, nos indicaría que

$$(\lambda_1^\Sigma)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \inf_\Sigma S^\Sigma,$$

donde S^Σ denota la función curvatura escalar de la hipersuperficie frontera Σ. En general, esta acotación es independiente de la que hemos obtenido en el Teorema 3.3.2. Sin embargo, existen situaciones especialmente interesantes en las que se pueden relacionar. A partir de la fórmula de Gauss para el embebimiento $\Sigma \subset \Omega$, podemos relacionar las curvaturas escalares de ambas variedades mediante la expresión

$$S^{\Sigma} = S - 2Ric\,(N,N) + n^2H^2 - |\sigma|^2\,,$$

donde Ric es el tensor de Ricci de Ω y σ es la segunda forma fundamental del embebimiento. Supongamos que el tensor de Einstein $Ric - (S/2)\,\langle\,,\,\rangle$ de Ω está minorado *en la dirección normal a la hipersuperficie* por el correspondiente del espacio hiperbólico, es decir, cumple

$$Ric\,(N,N) - \frac{1}{2}S \geq \frac{1}{2}n\,(n-1)\,. \tag{3.10}$$

La desigualdad de Schwarz $nH^2 \leq |\sigma|^2$ nos proporciona entonces la siguiente relación

$$S^{\Sigma} \leq n\,(n-1)\left(H^2-1\right).$$

Por tanto, en presencia de la hipótesis (3.10), nuestra estimación lleva a la de Friedrich, ya que, en nuestro caso,

$$S^{\Sigma} \geq \frac{n(n-1)}{\sinh^2 r}$$

y, por tanto, la desigualdad de Friedrich implica

$$\left(\lambda_1^{\Sigma}\right)^2 \geq \frac{n^2}{4\sinh^2 r}.$$

Cada hipersuperficie compacta embebida en el espacio hiperbólico con curvatura escalar positiva está en la situación anterior. Ha de bordear un dominio compacto por el teorema de Jordan-Brower y en [MR2] se puede ver que, en tal caso, $H > 1$.

Aún más, existen hipersuperficies compactas embebidas en el espacio hiperbólico para las cuales únicamente nuestra cota extrínseca es significativa, pues su curvatura media se puede hacer positiva y arbitrariamente grande pero poseen puntos de curvatura escalar negativa. En efecto, tomemos como variedad ambiente H^3, y trabajemos con el modelo de Poincaré. Entonces la curvatura media H de una superficie cualquiera satisface (véase, por ejemplo, [LoM, pág. 178])

$$H = x_3H^e + N_3^e,$$

donde H^e es la curvatura media respecto de la métrica euclídea del semiespacio, x_3 es la tercera función coordenada y N_3^e es la tercera componente de la aplicación de

Gauss euclídea. Si consideramos un toro de curvatura media euclídea positiva (es decir, suficientemente fino para que la curvatura principal positiva sea siempre mayor que la posible curvatura principal negativa) que esté arbitrariamente alejado del plano del infinito (así x_3 es tan grande como se desee), tendremos una hipersuperficie de curvatura media hiperbólica H arbitrariamente grande y, sin embargo, por ser un toro, han de existir puntos de curvatura escalar (de Gauss, en este caso) estrictamente negativa.

Observación 3.3.4 *Cuando la variedad ambiente M es un espacio hiperbólico H^{n+1}, N. Ginoux ha probado en [Gi1, Gi2] que*

$$\left(\lambda_1^{\Sigma}\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}\left(\sup_{\Sigma} H^2 - 1\right)$$

para cada hipersuperficie inmersa, compacta y orientable Σ. De esta manera, ha mejorado una anterior estimación de C. Bär en [Bä2, Corolario 4.5].

3.4. Ambientes con campos de espinores de Killing imaginarios

Cuando se alcanza la igualdad en el Teorema 3.3.2, la variedad ambiente Ω posee campos imaginarios no triviales de espinores de Killing asociados a alguna de las constantes $\pm i/2$, cuyas restricciones a la hipersuperficie frontera determinan el subespacio propio asociado al valor propio de menor valor absoluto de su operador de Dirac. Ya dijimos en la Observación 1.6.6 que este tipo de variedades presenta propiedades especiales y, en esta sección, vamos a adoptarlas como variedades ambiente. Como ya sabemos, la existencia de un tal campo impone muchas restricciones sobre la geometría de M^{n+1}; por ejemplo, su curvatura escalar coincide con la del espacio hiperbólico H^{n+1}, es decir, es constante y vale $-n\,(n+1)$. Cuando la variedad M es completa, H. Baum demostró en [Ba2] (véase también [Ba1]) que M debe ser un producto de deformación $\mathbb{R} \times_{\exp} P$, es decir, la variedad producto $\mathbb{R} \times P$ dotada de la métrica

$$dt^2 + e^{2t}\langle\, , \,\rangle_P,$$

donde P es una variedad riemanniana espinorial completa de dimensión n que posee algún campo de espinores paralelo no trivial. Las posibilidades para P fueron anteriormente descritas en [Wa]: o bien son variedades llanas, o bien variedades de Calabi-Yau, o variedades hiperkaehlerianas, u otras variedades de dimensiones 7 u 8 con holonomía especial. Las variedades del tipo $\mathbb{R} \times_{\exp} P$, donde P es una variedad de Riemann arbitraria, fueron denominadas *espacios pseudohiperbólicos* por Tashiro en [Tas], pues en el caso de que se tome P como el espacio euclídeo usual, dan lugar al espacio hiperbólico de curvatura seccional constante -1. Este autor las caracterizó como las únicas variedades completas que poseen una solución no trivial $f \in C^{\infty}(M)$ de la siguiente versión hiperbólica de la ecuación de Obata (2.10) (véase también [Kan])

$$\nabla^2 f = f\langle\, , \rangle.$$

De hecho, la clasificación de Baum podría rehacerse a partir de la caracterización de Tashiro, pues, dado un campo de espinores de Killing imaginario asociado a $\pm i/2$, su longitud al cuadrado es una solución no trivial de la ecuación de Obata (2.10).

Supongamos, pues, que existe en M un campo de espinores de Killing imaginario no trivial $\psi_0 \in \Gamma(\mathbb{S}M)$. Después de hacer un cambio de escala en la métrica, si es necesario, podemos suponer que la correspondiente constante de Killing es $i/2$ o $-i/2$, por lo que para cada campo $X \in \Gamma(TM)$ se verificaría

$$\nabla_X \psi_0 = \pm\frac{i}{2}\gamma(X)\,\psi_0. \tag{3.11}$$

Si restringimos el campo ψ_0 a la hipersuperficie Σ encontramos, según (1.36) y (3.11), que

$$\mathbf{D}\psi_0 = \frac{n}{2}H\psi_0 \pm \frac{n}{2}i\gamma(N)\,\psi_0. \tag{3.12}$$

En términos de los operadores modificados $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ definidos en (3.3), podemos reescribir la anterior identidad como

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\mp}\psi_0 = \frac{n}{2}H\psi_0.$$

Si suponemos que la curvatura media H (respecto del normal interior) es constante y no negativa, tendríamos que $\lambda_1^{\mp} \leq nH/2$. Si la hipersuperficie Σ es el borde de un dominio compacto Ω con curvatura escalar minorada por $-n(n+1)$, entonces el Teorema 3.3.1 nos asegura que $\tilde{\lambda}_1^{\mp} = nH/2$, y que la restricción de ψ_0 al borde es un campo propio asociado a este valor propio. Haciendo una sencilla modificación del campo ψ_0 podemos encontrar otro campo propio asociado al mismo valor. Definamos

$$\psi^{\pm} := (H \pm i\gamma(N))\,\psi_0 \in \Gamma(\mathbf{S}).$$

Como H es constante, usando (1.37) y (3.12), se deduce que $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}\psi^{\pm} = (nH/2)\,\psi^{\pm}$. El Teorema 3.3.1 asegura que, o bien $\psi^{\pm} = 0$ o bien $\psi^{\pm}$ es la restricción a la hipersuperficie frontera de un campo imaginario no trivial de espinores de Killing definido sobre toda la variedad y asociado a la constante $\mp i/2$. Cualquiera que sea el caso, se tiene que

$$\nabla_X \psi^{\pm} = \mp\frac{i}{2}\gamma\,(X)\,\psi^{\pm}, \quad \forall X \in \Gamma\,(TM|_{\Sigma})\,.$$

Si expresamos $\psi^{\pm}$ en términos de ψ_0 según su definición, la identidad superior, aplicada a cualquier vector tangente $u \in T\Sigma$, nos dice que

$$\mp i\gamma\,(Au)\,\psi_0 + (H \pm i\gamma\,(N))\,\nabla_u\psi_0 = \mp\frac{i}{2}\gamma\,(u)\,(H \pm i\gamma\,(N))\,\psi_0,$$

donde A es el endomorfismo de Weingarten asociado al normal N. Ahora, según (3.11), tenemos

$$\mp i\gamma\,(Au)\,\psi_0 \pm \frac{i}{2}\,(H \pm i\gamma\,(N))\,\gamma\,(u)\,\psi_0 = \mp\frac{i}{2}\gamma\,(u)\,(H \pm i\gamma\,(N))\,\psi_0.$$

Finalmente, deducimos que $\gamma\,(Au)\,\psi_0 = H\gamma\,(u)\,\psi_0$ para cada $u \in T\Sigma$, y como ψ_0 es no trivial, concluimos que $A = HI$, es decir, la hipersuperficie es totalmente umbilical porque todas las curvaturas principales son idénticas. Hemos demostrado lo siguiente.

Teorema 3.4.1 *Sea M una variedad riemanniana espinorial de dimensión $n+1$ que posee un campo de espinores de Killing imaginario no trivial, y sea Σ una hipersuperficie que bordea un dominio compacto en M. Supongamos además que su curvatura media H (respecto del normal interior) es constante y no negativa. Entonces Σ es totalmente umbilical.*

Si unimos el resultado anterior a la clasificación obtenida por Baum en [Ba2] de todas las variedades completas con campos de espinores de Killing imaginarios no triviales y a la clasificación dada en [M] de las hipersuperficies umbilicales en determinadas variedades riemannianas dotadas de métricas de deformación, encontramos un *teorema de tipo Alexandrov* (véase [Al]) para espacios pseudohiperbólicos, los cuales incluyen el caso del espacio hiperbólico usual. Un teorema más general fue obtenido por S. Montiel en [M] usando métodos completamente distintos.

Corolario 3.4.2 (Teorema de Alexandrov para espacios pseudohiperbólicos) *Sea Σ una hipersuperficie que acota un dominio compacto en un espacio pseudohiperbólico $\mathbb{R} \times_{\exp} P$, donde P es una variedad riemanniana espinorial completa que* *posee algún campo de espinores paralelo no trivial. Si Σ tiene curvatura media constante, entonces o bien Σ es una esfera y, en este caso, P es una variedad llana y, por tanto, $\mathbb{R} \times_{\exp} P$ es un espacio hiperbólico y $H > 1$; o bien es una hipersuperficie de nivel $\{s\} \times P$ y, en este caso, P es compacta y $H = 1$.*

Demostración : En primer lugar, observemos que todas las copias de P a distintas alturas $\{s\} \times P$ son hipersuperficies de curvatura media constante 1 con respecto al normal que apunta en la dirección decreciente de la primera proyección s (pueden consultarse los detalles en [M]). Dado que Σ es compacta, existe un punto p en el que la proyección sobre la primera componente alcanza su valor máximo. En dicho punto, como se demuestra en [M], todas las curvaturas principales de Σ son mayores o iguales que 1, por lo que su media, que es H, también es mayor o igual que 1. Como H es constante, deducimos que $H \geq 1$ (geométricamente, este hecho tiene su justificación en la comparación entre Σ y la sección $\{s_0\} \times P$ que pasa por el punto p). Se abren ahora dos posibilidades. Si suponemos que Σ es la frontera de un dominio compacto en $\mathbb{R} \times_{\exp} P$, podemos aplicar el Teorema 3.4.1, que nos garantiza que la hipersuperficie Σ es totalmente umbilical. Si, a pesar de que Σ sea compacta, no es la frontera de ningún dominio compacto, podemos usar nuevamente los teoremas de comparación entre Σ y la sección que pasa por el punto donde la proyección de Σ sobre la componente real alcanza su mínimo absoluto. En dicho punto se podrá deducir que $H \leq 1$, pero como ya sabemos que $H \geq 1$, concluimos que $H = 1$. En este caso, una sencilla aplicación del principio del máximo nos garantiza que Σ es una sección del tipo $\{s_0\} \times P$.

En cualquiera de los dos casos, la demostración se concluye aplicando [M, Lema 4], donde S. Montiel clasificó las hipersuperficies umbilicales en esta clase de espacios ambientes. ∎

3.5. Hipersuperficies que poseen un campo de espinores de Killing real

Como vimos tras la Observación 3.3.3, bajo hipótesis geométricas convenientes sobre el dominio Ω y la hipersuperficie Σ, es posible relacionar la estimación intríseca de

Friedrich (véase el Teorema 1.6.3) con la estimación extrínseca obtenida en el Teorema 3.3.2. De hecho, la igualdad en la desigualdad de Friedrich sólo ocurre cuando la hipersuperficie $\Sigma = \partial\Omega$ posee un campo de espinores de Killing real no trivial, mientras que en nuestro Teorema 3.3.2 se alcanza la igualdad cuando en el dominio interior Ω hay un campo de espinores de Killing imaginario no trivial. Estas propiedades nos conducirán a demostrar una clase de *principio holográfico*: hay circunstancias en las que las supersimetrías reales sobre la frontera proceden de supersimetrías imaginarias de la variedad completa (véase [HM] para una versión en el caso de curvatura escalar no negativa).

En lo sucesivo, representaremos por $\mathcal{K}^{\pm}(\Sigma)$ a los espacios de campos de espinores de Killing reales sobre Σ asociados respectivamente a constantes positivas y a negativas (realmente, como máximo, y debido a la identidad (1.26), sólo puede haber una positiva y otra negativa, que son opuestas). Cuando $n = \dim \Sigma$ sea impar, representaremos por $\mathcal{P}(\Sigma)$ el espacio de campos de espinores paralelos, mientras que si n es par, merece la pena destacar los subespacios $\mathcal{P}^{\pm}(\Sigma)$, definidos por las descomposiciones quirales de los campos de espinores paralelos. A la vista de las identificaciones de la Sección 1.7 que relacionan el fibrado de Dirac intrínseco $\mathbb{S}\Sigma$ y el fibrado extrínseco $\mathbf{S}$, podemos dar una descripcción de los espacios que aquí consideramos haciendo uso de los denominados *campos extrínsecos reales de espinores de Killing*, definidos en [HM], que son los que verifican la identidad que caracteriza a los campos de Killing pero con los elementos geométricos extrínsecos, es decir, los campos $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ que satisfacen

$$\nabla^{\mathbf{S}}_Y \psi = \lambda \gamma^{\mathbf{S}}(Y)\,\psi, \quad \forall Y \in \Gamma(T\Sigma).$$

Como en el caso intrínseco, la existencia de un tal campo no trivial implicaría que la curvatura escalar de Σ sería constantemente $S^{\Sigma} = 4(n-1)\lambda^2/n$. Como el isomorfismo $i\gamma(N)$ intercambia los espacios correspondientes a campos extrínsecos de espinores asociados a un valor y a su opuesto, sólo tiene interés considerar el espacio $\mathcal{EK}^{+}(\Sigma)$ formado por todos los campos extrínsecos reales de espinores de Killing sobre Σ asociados a números reales positivos. Así, es fácil de comprobar que existe una nueva identificación entre los espacios intrínsecos y extrínsecos

$$\mathcal{EK}^{+}(\Sigma) \equiv \begin{cases} \mathcal{K}^{+}(\Sigma) \equiv \mathcal{K}^{-}(\Sigma), & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathcal{K}^{+}(\Sigma) \oplus \mathcal{K}^{-}(\Sigma), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Igualmente, cuando un campo $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ verifica que $\nabla^{\mathbf{S}}\psi = 0$, se le denomina un *campo de espinores paralelo extrínseco*, y $\mathcal{EP}^{\pm}(\Sigma)$ serán los espacios de tales tipos de campos que, además, sean campos propios asociados a los valores propios ± 1 del automorfismo $i\gamma(N)$. Así, existen también identificaciones

$$\mathcal{EP}^{\pm}(\Sigma) \equiv \begin{cases} \mathcal{P}^{\pm}(\Sigma), & \text{si } n \text{ es par,} \\ \mathcal{P}(\Sigma), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

El siguiente teorema nos ayuda a describir los espacios de campos paralelos y reales de Killing a través de los correspondientes espacios extrínsecos.

Teorema 3.5.1 *Sea Ω un dominio compacto de una variedad riemanniana espinorial compacta de dimensión $n+1$ y curvatura escalar $S \geq -n(n+1)$, cuya frontera Σ tiene curvatura media H no negativa (respecto del normal interior N). Supongamos que el tensor de Einstein de M, $Ric - (S/2)\langle\, , \rangle$, es mayor o igual que $n(n-1)/2$ en la dirección normal a Σ.*

1. Si existe una campo de espinores de Killing real no trivial sobre Σ, entonces Σ es totalmente umbilical, $H > 1$ es una función constante y

$$\mathcal{EK}^{+}(\Sigma) = \left(I \pm \left(H - \sqrt{H^2 - 1}\right) i\gamma(N)\right) \mathcal{K}_{\mp\frac{i}{2}}(\Omega)\Big|_{\Sigma}.$$

2. Si existe una campo paralelo no trivial de espinores sobre Σ, entonces Σ es totalmente umbilical, H es constantemente 1 y

$$\mathcal{EP}^{\pm}(\Sigma) = \mathcal{K}_{\mp\frac{i}{2}}(\Omega)\Big|_{\Sigma}.$$

Demostración: En cualquiera de los dos casos del enunciado, la curvatura escalar S^{Σ} de la hipersuperficie Σ sería constante, y a causa de la existencia de un tal campo, se alcanzaría la igualdad en la desigualdad de Friedrich, por lo que

$$\left(\lambda_1^{\Sigma}\right)^2 = \frac{n}{4(n-1)} S^{\Sigma}.$$

Por otro lado, nuestra hipótesis sobre el tensor de Einstein en la dirección perpendicular a la hipersuperficie del borde, como vimos después de la Observación 3.3.3, obliga a la desigualdad

$$S^{\Sigma} \leq n(n-1)\left(H^2 - 1\right).$$

Como S^Σ es constante, podemos tomar ínfimo sobre Σ, quedando

$$S^\Sigma \leq n\,(n-1) \inf_\Sigma \left(H^2 - 1\right).$$

Entonces

$$\left(\lambda_1^\Sigma\right)^2 = \frac{n}{4\,(n-1)} S^\Sigma \leq \frac{n^2}{4} \inf_\Sigma \left(H^2 - 1\right).$$

Como H es no negativa, deducimos que $\inf_\Sigma H \geq 1$. En tal caso, el Teorema 3.3.2 nos proporciona la otra desigualdad, y dado que se obtiene la igualdad,

$$\lambda_1^\Sigma = \pm\,(n/2)\sqrt{H^2 - 1}$$

y dicho teorema describe, en el caso de la igualdad, el subespacio propio asociado a λ_1^Σ, tenemos la descripción deseada de los subespacios $\mathcal{EK}^+(\Sigma)$ y $\mathcal{EP}^\pm(\Sigma)$. ■

Si existiese un campo de espinores no trivial que fuese paralelo o de Killing real sobre una componente conexa concreta de $\Sigma = \partial M$, podríamos extenderlo por cero a las demás componentes, y, mediante las identificaciones descritas, encontraríamos un campo extrínseco no trivial en $\mathcal{EK}^+(\Sigma)$ o en $\mathcal{EP}^+(\Sigma)$ (que se anula en las restantes componentes conexas). Bajo la hipótesis del Teorema 3.5.1, este campo procedería, a través de un isomorfismo, de un campo de espinores de Killing imaginario no trivial sobre el dominio interior Ω, que no puede anularse en ningún punto. Esto contradice que el primer campo se anulase en las restantes componentes conexas, por lo que, obligatoriamente, Σ es una hipersuperficie conexa. Esta observación conduce a un cierto resultado de unicidad de las ecuaciones de Einstein con condiciones de frontera (véase [Sch]).

Corolario 3.5.2 *Las únicas variedades de Einstein espinoriales y completas de dimensión $n+1$, $n \geq 2$, que poseen curvatura de Ricci constante $-n$ y frontera con curvatura media no negativa respecto del normal interior, isométrica a una esfera son los discos hiperbólicos.*

Demostración : Sea M una tal variedad y $\tilde{M}$ su recubridor universal, al cual se pueden levantar las estructuras riemanniana y espinorial. Como en la demostración del Teorema 3.5.1, tenemos

$$0 < \frac{n\,(n-1)}{r^2} = S^{\partial\tilde{M}} \leq n\,(n-1)\left(H^2_{\partial\tilde{M}} - 1\right),$$

donde r es el radio de la esfera. Esto demuestra que las componentes conexas del borde $\partial\tilde{M}$, que son isométricas a la misma esfera euclídea redonda, poseen curvatura media mayor de 1 y, respecto del normal interior, se tiene $\inf_{\partial\tilde{M}} H_{\partial\tilde{M}} > 1$. En estas condiciones, podemos aplicar un resultado de Kasue, [Kas, Teorema C], y habremos deducido que $\tilde{M}$ es compacta. Como cada componente de $\partial\tilde{M}$ es isométrica a una esfera, y la esfera, con $n \geq 2$, tiene una única estructura espinorial (ver Observación 1.7.1), posee campos de espinores de Killing reales no triviales, pero según la observación precedente, esto obliga a que su borde sea conexo. En consecuencia, el recubridor sólo posee una hoja y M debe ser una variedad simplemente conexa. Además, el propio Teorema 3.5.1 nos garantiza que cada campo real de Killing sobre el borde (que es una esfera y, por tanto, dispone de $2^{[(n+1)/2]}$ de este tipo) se puede levantar a dos campos imaginarios de Killing sobre toda la variedad M. Así, sobre la variedad M existe una cantidad maximal de campos de Killing imaginarios linealmente independientes asociados a $\pm i/2$, y así M es isométrica a un disco hiperbólico de un espacio de curvatura seccional constante negativa -1 (véase [BFGK, Fr2]). ■

Un razonamiento similar al que se usó en [HM, Corolario 7] nos permite enunciar el último resultado de esta Memoria.

Corolario 3.5.3 *La única variedad espinorial de Einstein completa y sin borde con dimensión mayor o igual que tres y con curvatura de Ricci negativa en la que se puede embeber una esfera euclídea es un cociente del espacio hiperbólico.*

Demostración: Sea Σ una hipersuperficie isométrica a una esfera de radio $r > 0$ embebida en la variedad M. Como Σ es simplemente conexa, ese embebimiento se puede levantar al recubridor universal $\tilde{M}$ de M, que también es una variedad espinorial completa y sin borde con curvatura de Ricci constantemente $-n$. Entonces, por el Teorema de Jordan-Brower, Σ divide a $\tilde{M}$ en dos dominios de los que ella es su frontera común. El argumento de la demostración anterior prueba que también en este caso se tiene $H^2 - 1 \geq 1/r^2$. Por tanto, para cierta elección de normal ha de tenerse que $H > 1$. Consideramos ahora el dominio Ω para el cual ese campo normal es interior y aplicamos el Corolario 3.5.2 a ese Ω. Entonces Ω es un disco hiperbólico. Pero, como una variedad de Einstein es siempre analítica (ver [Be])), si tiene un abierto hiperbólico, toda la variedad ha de ser hiperbólica, como queremos. ■

Bibliografía

[AF] I. Agricola, T. Friedrich, *Upper bounds for the first eigenvalue of the Dirac operator on surfaces*, J. Geom. Phys., **30** (1999), 1-22.

[Al] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large I*, Vesnik Leningrad Univ., **11** (1956), 5-17.

[Alm] F.J. Almgren, *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Berntein's theorem*, Ann. of Math., **84** (1966), 277-292.

[Am] B. Ammann, *The Willmore conjecture for immersed tori with small curvature integral*, Manuscripta Math., **101** (2000), 1-22.

[APS] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I, II and III*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **77** (1975), 43-69; **78** (1975), 405-432 and **79** (1976), 71-99.

[AS] M.F. Atiyah, I.M. Singer, *The index of elliptic operators I, II, III, IV and V*, Ann. of Math., **87** (1968), 484-604; **93** (1971), 119-149.

[Bä1] C. Bär, *Real Killing spinors and holonomy*, Commun. Math. Phys., **154** (1993), 509-521.

[Bä2] C. Bär, *Extrinsic bounds of the Dirac operator*, Ann. Global Anal. Geom., **16** (1998), 573-596.

[Bä3] C. Bär, *The Dirac operator on space forms of positive curvature*, J. Math. Soc. Japan, **48** (1996), 69-83.

[Ba1] H. Baum, *Odd-dimensional Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Global Anal. Geom., **7** (1989), 141-154.

[Ba2] H. Baum, *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Global Anal. Geom., **7** (1989), 205-226.

[BFGK] H. Baum, T. Friedrich, R. Grünewald, I. Kath, *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Seminarberichte **108**, Humboldt-Universität zu Berlin, 1990.

[Ber] P. Bérard, *Spectral geometry: direct and inverse problems*, Lect. Notes in Math., **1207**, 1986.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes in Math., **194** (1971).

[Be] A. Besse, Einstein Manifolds, Springer, Berlin, 1987.

[Bi] R.L. Bishop, R.J. Crittenden, Geometry of manifolds, Academic Press, New York, 1964.

[BW] B. Booß-Bavnbek, K.P. Wojciechowski, Elliptic Boundary Problems for the Dirac Operator, Birkhäuser, Basel, 1993.

[BHMM] J.P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, A. Moroianu, A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry, Monograph (In Preparation).

[BrL] J. Brüning, M. Lesch, *Spectral theory of boundary value problems for Dirac type operators*, Contemp. Math., **242** (1999), 203-215.

[Bun1] U. Bunke, *Comparison of Dirac operators on manifolds with boundary*, Supplemento di Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, **30** (1993), 133-141.

[Bun2] U. Bunke, *The spectrum of the Dirac operator on the hyperbolic space*, Math. Nachr., **153** (1991), 179-190.

[Bur] J. Bureš, *Dirac operator on hipersurfaces*, Comment. Math. Univ. Carolin., **34** (1993), 313-322.

[BFLPP] F. Burstall, D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, U. Pinkall, *Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions*, Lect. Notes in Math., **1772**, 2002.

[C1] É. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Bull. Soc. Math. France, **41** (1913), 53-96.

[C2] É. Cartan, La théorie des spineurs, Hermann, Paris, 1937; y segunda edición: The theory of spinors, Hermann, Paris, 1966.

[Ca] A.P. Calderón, *Lecture notes on pseudodifferential operators and elliptic boundary value problems, I* (Publicaciones de I.A.M., Buenos Aires, 1976).

[CH] R. Camporesi, A. Higuchi, *On the eigenfunctions of the Dirac operator on spheres and real hyperbolic spaces*, J. Geom. Phys., **39** (1994), 123-137.

[Ch] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian geometry, Academic Press, New York, 1984.

[Chev] C. Chevalley, Algebraic theory of spinors, Columbia Univ. Press, New York, 1954.

[CJJTW] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V.F. Weisskopf, *New extended model of hadrons*, Phys. Rev. D, **10** (1974), 2599-2604.

[CW] H.I. Choi, A.N. Wang, *A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 559-562.

[Co] Conway, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 2000.

[CoH] R. Courant, D. Hilbert, Methods in mathematical physics, Wiley Interscience, vol. I (1953), vol II (1967), New York

[D] P.A.M. Dirac, *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy. Soc. London, **A 117** (1928), 610-624.

[DNP] M.J. Duff, B.E.W. Nilsson, C.N. Pope, *Kaluza-Klein supergravity*, Phys. Rep., **130** (1986), 1-142.

[Es] J.F. Escobar, *A comparison theorem for the first non-zero Steklov eigenvalue*, J. Funct. Anal., **178** (2000), 143-155.

[ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Homological algebra, Princeton University Press, Princeton, 1952.

[FGMSS] H. Falomir, R.E. Gamboa, M.A. Muschietti, E.M. Santangelo, J.E. Solomin, *Determinant of Dirac operators with local boundary conditions*, J. Math. Phys., **37** (1996), 5805-5819.

[FS] S. Farinelli, G. Schwarz, *On the spectrum of the Dirac operator under boundary conditions*, J. Geom. Phys., **28** (1998), 67-84.

[FLPP] D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, U. Pinkall, *Quaternionic holomorphic geometry: Plücker formula, Dirac eigenvalue estimates and energy estimates of hamonic 2-tori*, Invent. Math., **146** (2001), 507-593.

[Fr1] T. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannifaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung*, Math. Nach., **97** (1980), 117-146.

[Fr2] T. Friedrich, Dirac Operators in Riemmanian Geometry, A.M.S. Graduate Studies in Math., vol 25, 2000.

[Fr3] T. Friedrich, *Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur*, Coll. Math., **48** (1984), 57-62.

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[GLP] P.B. Gilkey, J.V. Leahy, J. Park, Spectral Geometry, Riemmanian Submersions and the Gromov-Lawson Conjecture, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/Crc, Boca Raton, 1999.

[Gi1] N. Ginoux, *Reilly-type spinorial inequalities*, Math. Z., (2002), .

[Gi2] N. Ginoux, *Dirac operators on submanifolds*, Ph. D. Thesis, Université Henri Poincaré, Nancy (France), 2002.

[GM] N. Ginoux, B. Morel, *On eigenvalue estimates for the submanifold Dirac operator*, Int. J. Math., **13** (2002), 533-548.

[GWW] C. Gordon, D.L. Webb, S. Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 134-138.

[GL] M. Gromov, H.B. Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Publ. Math. I.H.E.S., **57** (1982), 295-408.

[He1] M. Herzlich, *The positive mass theorem for black holes revisited*, J. Geom. Phys., **26** (1998), 97-111.

[He2] M. Herzlich, *A Penrose-like inequality for the mass of Riemmannian asymptotically flat manifolds*, Commun. Math. Phys., **188** (1997), 121-133.

[Hi1] O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys., **104** (1986), 151-162.

[Hi2] O. Hijazi, *Caractérisation de la sphère par le premières valeurs propres de l'operateur de Dirac en dimensions 3, 4, 7 et 8*, C.R. Acad. Sci. Paris, **303** (1986), 417-419.

[Hi3] O. Hijazi, *Premiére valeur propre de l'operateur de Dirac et nombre de Yamabe*, C.R. Acad. Sci. Paris, **313** (1991), 865-868.

[Hi4] O. Hijazi, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures*, World Scientific Publishing, collection Geometric methods for quantum field (Villa de Leyva, 1999), River Edge, NJ, 2001, 116-169.

[HM] O. Hijazi, S. Montiel, *Extrinsic Killing spinors*, Math. Z., **244** (2003), 337-347.

[HMR1] O. Hijazi, S. Montiel, A. Roldán, *Eigenvalue boundary problems for the Dirac operator*, Commun. Math. Phys., **3** (2002), 375-390.

[HMR2] O. Hijazi, S. Montiel, A. Roldán, *Dirac operators on hypersurfaces of manifolds with negative scalar curvature*, Ann. Global Anal. Geom., **23** (2003), 247-264.

[HMZ1] O. Hijazi, S. Montiel, X. Zhang, *Dirac operators on embbeded hypersurfaces*, Math. Res. Lett., **8** (2001), 195-208.

[HMZ2] O. Hijazi, S. Montiel, X. Zhang, *Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary*, Commun. Math. Phys., **221** (2001), 255-265.

[HMZ3] O. Hijazi, S. Montiel, X. Zhang, *Conformal lower bounds for the Dirac operator of embbeded hypersurfaces*, Asian J. Math., **6** (2002), 23-36.

[Ht] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Adv. Math., **14** (1974), 1-55.

[Hö] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer, Berlin, 1985.

[Hu] D. Husemöller, Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[J] K. Johnson, *The M.I.T. bag model*, Acta Phys. Pol., **B6** (1975), 865-892.

[K] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly, **73** (1966), 1-23.

[Kan] M. Kanai, *On a differential equation characterizing a Riemannian structure on a manifold*, Tokyo J. Math., **6** (1983), 143-151.

[Kas] A. Kasue, *Ricci curvature, geodesics and some geometric properties of Riemannian manifolds with boundary*, J. Math. Soc. Japan, **35** (1983), 117-131.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry I, II, Intersience, John Wiley, New York, 1963, 1969.

[Kr] M. Kraus, *Lower bounds for eigenvalues of the Dirac operator on surfaces of rotation*, J. Geom. Phys., **31** (1999), 209-216.

[LM] H.B. Lawson, M.L. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton Math. Series, vol. 38, Princeton university Press, 1989.

[Li1] A. Lichnerowicz, *Geométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[Li2] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C.R. Acad. Sci. Paris, **257** (1963), Série I, 7-9.

[Lo] J. Lopatinsky, *On a method for reducing boundary problems for systems of differential equations of elliptic type to regular integral equations*, Ukrain Math. Z., **5** (1953), 125-151.

[LoM] R. López, S. Montiel, *Existence of constant mean curvature graph in hyperbolic space*, Calc. Var., **8** (1999), 177-190.

[MS] J.W. Milnor, J.D. Stasheff, Characteristic classes, Ann. of Math. Studies, **76**, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[Mi] M. Min-Oo, *Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds*, Math. Ann., **285** (1989), 527-539.

[M] S. Montiel, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J., **48** (1999), 711-748.

[MR1] S. Montiel, A. Ros, *Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area*, Invent. Math., **83** (1986), 153-166.

[MR2] S. Montiel, A. Ros, *Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **52** (1991) (in honor to M.P. do Carmo; edited by B. Lawson and K. Tenenblat), 279-296.

[Mo] B. Morel, *Eigenvalues estimates for the Dirac-Schrödinger operator*, J. Geom. Phys., **38** (2001), 1-18.

[Ob] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan, **14** (1962), 333-340.

[Og] K. Ogiue, *Some open problems in differential geometry*, Proc. Symp. Pure Math., vol. XXVII (1973), 407-411.

[P] W. Pauli, *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons*, Z. Phys., **43** (1927), 601.

[Pf] F. Pfäffle, *The Dirac spectrum of Bieberbach manifolds*, J. Geom. Phys., **35** 2000, 367-385.

[Re] R.C. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 459-472.

[Ro] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant sacalar curvature and a congruence theorem*, J. Diff. Geom., **27** (1988), 215-220.

[Sch] J.-M. Schlenker, *Einstein manifolds with convex boundaries*, Comm. Math. Helv., **76** (2001), 1-28.

[Schm] M.U. Schmidt, *A proof of the Willmore conjecture*, arXiv:math.DG/0203224.

[Se] R. Seeley, *Singular integrals and boundary problems*, Amer. J. Math., **88** (1966), 781-809.

[Sp] E.H. Spanier, Algebraic topology, Springer Verlag, New York, 1966.

[ST] E. Snapper, R.J. Troyer, Metric affine geometry, Academic Press, New York, 1971.

[Su] S. Sulanke, *Berechnung des Spektrums des Quadrates des Dirac-Operators auf der Sphäre*, Doktorarbeit, Humboldt University Berlin, 1979.

[T] I.A. Taimanov, *Dirac operator and conformal invariants of tori in 3-space*, arXiv:math.DG/0005223.

[Ta] T. Takahashi, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), 380-385.

[Tas] Y. Tashiro, *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, Trans. Amer, Math. Soc., **117** (1965), 251-275.

[Tr] A. Trautman, *The Dirac operator on hypersurfaces*, Acta Phys. Pol., **26** (1995), 1283-1310.

[Wa] M.Y. Wang, *Parallel spinors and parallel forms*, Ann. Global Anal. Geom., **7** (1989), 59-68.

[Wr] F.W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1971.

[Wh] G.W. Whitehead, Elements of homotopy theory, Springer Verlag, New York, 1995.

[We] H. Weyl, The classical groups, their invariants and representations, Princeton Math. Series, **1**, Princeton Univ. Press, octava edición, 1973.

[Wi1] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys., **80** (1981), 381-402.

[Wi2] E. Witten, *Anti-De Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys., **2** (1998), 253-291.

[Wo] J. Wolf, *Essential self-adjointness for the Dirac operator and its square*, Indiana Univ. Math. J., **22** (1972/73)m 611-640.

[Wu] H. Wu, *The Bochner technique*, Proc. Beijing Symp. Diff. Geom. and Diff. eq., 1980, Gordon and Breach, 1982, 929-1071.

[Y] S.T. Yau, *Problem section*, Ann. Math. Studies, **102** (1982), 669-706.

[Zh] X. Zhang, *Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators*, Math. Res. Lett., **5** (1998), 199-210.