

Algoritmos en operaciones básicas: Alternativas, materiales y recursos en el aula de matemáticas

-Revisión bibliográfica de la base de datos Dialnet-

Resumen: Las operaciones básicas, como su nombre indica, son la base sobre la que se construyen muchas estructuras matemáticas. Tradicionalmente su aprendizaje ha estado ligado a su algoritmo. Tras revisar su papel en el currículo y los índices de rendimiento en matemáticas, se plantea el interrogante de qué se hace y qué se debería hacer en el aula de matemáticas. A través de la una revisión bibliográfica de la base de datos *Dialnet*, este artículo pretende ser una introducción a las claves relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de estos algoritmos. Del análisis resultante se puede extraer algunas alternativas didácticas y observar el papel de los materiales manipulativos en el aula de matemáticas.

Palabras clave: algoritmos.

Abstract: The basic operations, as the name indicates, are the basis by which a lot of mathematical structures are built. Traditionally, learning was linked to algorithms. After reviewing the role algorithms play in the curriculum and performance indices, the question remains on what to do and how to do it in the mathematics classroom. Through a bibliographic analysis from *Dialnet* database, one can find an introduction to the key to teaching and learning these algorithms. The final analysis provides some educational alternatives as well as let observe the role of manipulatives in the mathematics classroom.

Keywords: algorithms

Framit Sánchez, Rafael Manuel
Grado de Maestro de Educación Primaria
Trabajo Fin de Grado.- curso 2013/2014
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ÍNDICE	Pág.
1. INTRODUCCIÓN	3
2. OBJETIVO DEL TRABAJO	4
3. MÉTODO	4
3.1. Diseño de la investigación	5
3.2. Población y muestra	5
3.2.1. Variables cuantitativas	6
3.2.2. Variables cualitativas	6
4. ANÁLISIS DEL TEMA	7
4.1. Algoritmos	7
4.1.1. Aproximación conceptual	7
4.1.2. Propiedades	7
4.1.3. Clasificación	8
4.1.4. Algoritmos y otros procedimientos	8
4.2. Dimensión cultural e histórica de las operaciones básicas	9
4.3. Sobre la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas	9
4.3.1. Las operaciones básicas	9
4.3.2. El quehacer matemático	10
4.3.3. Sentido de la enseñanza tradicional de los algoritmos estándar	11
4.4. Pérdida de fuerza de los algoritmos tradicionales	13
4.4.1. Otros algoritmos, otras alternativas	13
4.4.2. Constructivismo	14
4.4.3. La sociedad y la calculadora	15
4.5. El maestro	16
4.5.1. La tradición	16
4.5.2. El cambio de rol del maestro	16
4.5.3. La formación del maestro	16
4.6. La comprensión	17
4.7. Materiales y Recursos	18
4.7.1. Materiales manipulativos	18
4.7.2. Recursos Electrónicos	19
5. CONCLUSIONES	19
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	21
7. ANEXOS	25

1. INTRODUCCIÓN

... sepa el señor maestro que si no le conviene la escuela puede pillar el camino e irse a otro sitio, que aquí, para lo que enseña falta no hace. (López, 2000)

Comenta López (2000)¹, sobre el episodio de Ohanes, que debía el señor maestro enseñar algo más que lo que dictaban las costumbres habituales de la época: enseñar a leer y a escribir y manejar las cuatro reglas. Nótese, además, la falta de reconocimiento hacia la labor desempeñada por el maestro, tal vez por la falta de necesidad de una mayor educación en el contexto socio-cultural de la época.

Como se puede observar, ya en el siglo XVIII el papel de las cuatro reglas (algoritmos de resolución de las cuatro operaciones básicas) en la enseñanza era esencial. Desde entonces hasta la actualidad, las cuatro reglas han sido un eje vertebrador de los currículos de la educación básica.

Revisando la *Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria* (M.E.C., 2007) podemos observar cierto cambio en la intencionalidad educativa con respecto a estos algoritmos:

- Al describir la **competencia matemática** se puede ver que incluye la aplicación de “algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica”, apuntando la idea de que hay algo más que la sencilla aplicación de un algoritmo.
- Al presentar el **área de matemáticas** vemos que no basta con dominar los algoritmos del cálculo escrito, también se necesita confianza en los números, darles un uso pertinente e identificación de relaciones básicas entre ellos.
- Como **objetivo** tenemos “reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, fórmulas mediante formas sencillas de expresión matemática o resolverlas utilizando los algoritmos correspondientes, valorar el sentido de los resultados y explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos”.
- En el desarrollo de los **contenidos** encontramos referencias a la elección de la operación, utilización de algoritmos adecuados, y uso de algoritmos estándar como estrategia de cálculo, su uso en contexto de resolución de problemas y su automatización.

¹ Se trata del estudio de unos documentos que "nos permiten seguir un curioso conflicto entre el ayuntamiento y el maestro y constituye toda una tragicomedia: comedia por el desarrollo de los acontecimientos (que provoca risa en primera instancia) y una tragedia por el triste balance, anunciado y esperado pero no evitado por las autoridades" (p. 153).

- En consonancia con esos contenidos la utilización de algoritmos adecuados, con especial atención a los algoritmos escritos es un **criterio de evaluación**.
- En las **orientaciones metodológicas** se dice que el aprendizaje de los números debe hacerse huyendo del abuso de la utilización de algoritmos repetitivos que convierten el cálculo en aburridos ejercicios.

En términos generales, el aprendizaje de las matemáticas debería desarrollar la capacidad de pensamiento y reflexión lógica, ofreciendo un conjunto de instrumentos para explorar la realidad, representarla, explicarla y poder actuar sobre ella.

Los índices del bajo rendimiento en matemáticas suponen que una mayoría de los alumnos no alcanzan niveles adecuados de conocimiento matemático, lo que puede llevar a una falta de capacidad para hacer frente a muchas situaciones de un entorno cada vez más técnico y matematizado.

Los fallos en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a los menos capacitados. Muchos alumnos competentes muestran escasos resultados en matemáticas. Otros son capaces de buenos resultados solo en situaciones que le son familiares por la práctica repetida.

Ante esta realidad, las ideas subyacentes en el currículo y el interrogante de qué se hace en las aulas, se considera oportuno realizar una revisión de los trabajos que centra su atención en el tema de los algoritmos en operaciones básicas en busca de alguna información que arroje luz sobre la cuestión.

2. OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo de este trabajo es realizar una revisión bibliográfica que sirva como introducción al tratamiento que se da en la escuela española a los algoritmos en operaciones básicas señalando las alternativas que se contemplan para la mejora de su aprendizaje.

3. MÉTODO

La metodología está orientada por la tesis de Rafael Bracho sobre visualización de la investigación en educación matemática (Bracho, 2010).

3.1. Diseño de la investigación

Este trabajo se centra en realizar un revisión del material publicado sobre el tema que le da título “Algoritmos en operaciones básicas: Alternativas, materiales y recursos en el aula de matemáticas”.

Se considera que no es abordable un estudio censal dado el excesivo número de publicaciones sobre el tema, así que se ha optado por centrar el estudio en una base de datos concreta: *Dialnet*.

Dialnet es una base de datos iniciada en 2001 por iniciativa de la Universidad de La Rioja. Comenzó especializándose en ciencias humanas y sociales y hoy día ofrece una hemeroteca de libre acceso que contiene más de 5500 revistas científicas de España y Latinoamérica, además de libros, monografías, actas de congresos y otros documentos.

3.2. Población y muestra

Se considera como población accesible toda publicación recogida en la base de datos de estudio: *Dialnet*. Se admitirán publicaciones que no sean españolas siempre que aporten algo al tema en cuestión, como tratamiento alternativo, por ejemplo.

El primer paso fue seleccionar las publicaciones a estudiar. Tras un primer acercamiento usando como *palabra clave* “algoritmos” la base de datos devolvió un resultado de 5187 referencias encontradas.

Para acotar la muestra disponible se recurrió a la clasificación en “materias” de esta base de datos. Centrando el estudio en la materia “Psicología y educación” se redujo la muestra a 213 publicaciones.

Realizando un muestreo intencional entre todas las submaterias señaladas en la base de datos, sólo se encontraron referencias posibles en algunas de estas submaterias, descartando las demás:

- Didácticas aplicadas: 55 referencias.
- Psicología: 54 referencias.
- Educación: 42 referencias.
- Sin submateria: 43 referencias.

Estudiando los datos ofrecidos por *Dialnet*, se consideraron referencias promisorias 21 referencias de la primera submateria, 3 de la segunda, 7 de la tercera y 9 sin submateria definida. Se obtuvo pues una muestra disponible de 40 referencias.

La **muestra operante final se redujo a 35 publicaciones** por la imposibilidad de acceso en tiempo y forma a la fuente primaria².

De las referencias citadas en estas fuentes, se tomaron 7 referencias promisorias que resultaron ser idóneas, por lo que fueron tenidas en cuenta en el análisis del tema.

² Para mayor exhaustividad de este análisis se añade el ANEXO I con las referencias de las fuentes primarias a las que no se pudo acceder:

3.2.1. Variables cuantitativas

Para describir la muestra se recurrió a un breve análisis cuantitativo resumido en la siguiente tabla:

Base de datos: <i>Dialnet</i> . Palabra clave: <i>algoritmos</i> . -5187 referencias-					
Materia: <i>Psicología e educación</i> . -213 referencias-					
Submaterias		Didácticas apli.	Psicología	Educación	Sin submateria
Ref. posibles		55	54	42	43
Ref. promisorias		21	3	7	9
Mues. operante		21	1	7	6
Art. Revista		21	1	7	-
Capítulo Libro		-	-	-	5
Tesis		-	-	-	1
Año publicación	<1980	-	-	-	-
	<1990	-	1	-	-
	<2000	5	-	1	-
	<2010	13	-	3	4
	>2010	3	-	3	2

La concentración de las publicaciones sobre el tema en los últimos años pone de manifiesto que se trata de una preocupación de los investigadores.

3.2.2. Variables conceptuales

El diseño de la investigación impide saber a priori los conceptos que se van a tratar dentro del tema que nos ocupa, ya que dependerán de los enfoques que hayan priorizado los autores de las referencias de la muestra operante.

Estas variables conceptuales determinarán, pues, la estructura del análisis del tema.

Las variables que se han identificado han sido las que se muestran a continuación agrupadas por relaciones entre los conceptos.

- Concepto, propiedades, clasificación, otros procedimientos.
- Algoritmos culturales e históricos.
- Enseñanza y Aprendizaje. Necesidades previas. Objetivos. Las cuatro reglas: virtudes y críticas.
- Cuestionamiento de su papel en la educación.
- El rol del maestro.
- La importancia de la comprensión.

4. ANÁLISIS DEL TEMA

Se analizará el tema comenzando por el concepto de algoritmo, se continuará con su presencia en la historia, su papel en la educación y el cuestionamiento de éste, para terminar con el rol del maestro y la importancia de la comprensión.

4.1. Algoritmos

4.1.1. Aproximación conceptual

Un algoritmo³, dice Fernández (2005), “se identifica en el conjunto de una secuencia de pasos operativos para la realización de una tarea o la resolución de un problema” (p. 32). Si bien esta definición resulta sencilla, podemos encontrar otras que completan su significado:

... serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades), en un número finito de etapas, a cierto resultado, y esto, independientemente a los datos. (Buendía, Fernández y Rico, 1990, p. 51)

... sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a una resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase. (Ifrah, 1998, p. 1616 citado en Gallardo, 2004)

Para Ñabraña (2002) un algoritmo permite obtener resultados sin tener que justificar los pasos dados; exige rigor, orden, concentración y práctica; puede ser popularizado ya que no es necesario comprender por qué funciona, basta con saber cómo funciona.

Desde un punto de vista matemático Bermejo, Betancourt y Vela (2009) definen algoritmo como un “método sistemático para resolver operaciones numéricas, que consta de un conjunto finito de pasos guiados por unas reglas que nos permiten economizar el cálculo y llegar a un resultado exacto” (p. 194).

4.1.2. Propiedades

Un algoritmo, pues, debe cumplir las siguientes propiedades (Castro et al., 1987 citado en Roa, 2007, p. 232; Buendía et al., 1990):

³ La palabra “algoritmo” se debe al matemático y astrónomo Al-Khowarizmi (Aljuarizmi) (780-850) miembro de la “Casa de la sabiduría” fundada en Bagdad por el califa Al-Mamun (809-833). Al-Khowarizmi escribió un libro sobre aritmética (traducido al latín en el s. IX por Adelardo de Bath y Roberto de Chester), en el que hace una exposición exhaustiva del sistema de numeración hindú. Este sistema se empezó a conocer como «el de Al-Khowarizmi» y, por las deformaciones que tuvo llegó a la palabra «algorismi», «algorismo» o «algoritmo». (Fernández, 2005)

- Nitidez: debe tratarse de una acción mecánica.
- Eficacia: resoluble en un número finito de pasos.
- Universalidad: de manera que sea independiente de los datos.

Bermejo et al. (2009) señalan que dichas propiedades son: “especificidad” (cada algoritmo tiene una reglas propias), “generalidad” (resuelven problemas de la misma naturaleza) y “resultabilidad” (siempre convergen a un resultado).

4.1.3. Clasificación

Krinitiski (1988) distingue los algoritmos “intuitivos” que se aplican en la vida cotidiana (basados en la experiencia y sin verificación estricta y precisa), de los algoritmos científicos. Dentro de la actividad escolar, Fernández (2005) distingue dos clases de algoritmos: el “sumiso” impuesto para realizar una acción operativa sin entender por qué se hace, el “innovador” que se aplica con opción de decisión propia, comprendiendo y entendiendo, tanto lo que se hace como el porqué de ello.

Desde otro enfoque, Pérez (2005) distingue tres tipos de algoritmos:

- Algoritmos independientes de la notación numérica (el uso de ábacos).
- Algoritmos vinculados a la notación como la multiplicación mediante celosías y el ábaco de arena.
- Algoritmos basados en otras operaciones, como la multiplicación rusa basada en la suma y las ideas de doble y mitad, o automatizaciones como regletas de Neper y, las máquinas de Pascal y de Leibnitz.

4.1.4. Algoritmos y otros procedimientos

En contraposición a la idea de algoritmo, Buendía et al. (1990), definen “estrategia” como los “procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema o del desarrollo de una investigación”.

Gallardo (2004) argumenta que un proceso algorítmico presenta una alta garantía de resolución para un número pequeño de problemas, en cambio un proceso heurístico presenta una menor garantía pero es alto el número de tipos de problemas que resuelve.

Manifestaciones del cálculo aritmético elemental (Gallardo, 2004)

Mental		Escrito			Calculadora/ Ordenador
Exacto	Aproximado (estimación)	Algoritmos estándar	Métodos propios inventados	Otros algoritmos (historia/ cultura)	

4.2. Dimensión cultural e histórica de las operaciones básicas

Crespo y Micelli (2012) destacan el hecho de que no siempre se ha dispuesto de los algoritmos estándar para resolver las operaciones básicas, y que antes de su existencia se contaba con objetos que las facilitaban. Señalan como obvio que el primer instrumento usado seguramente serían los dedos y otras partes del cuerpo, a lo que se unen los hallazgos de ábacos⁴ en la antigua Roma, China, Japón, Rusia y en los pueblos que habitaban en América antes de la llegada de los españoles, que suponen “una demostración de realidad histórica que permitió la representación numérica y la ejecución de algoritmos sin necesidad de la representación hindú arábica” (Atrio, 2007). En diferentes culturas aparecen algoritmos representativos y/o curiosos: multiplicación egipcia (cálculo de dobles y suma), varillas de calcular chinas, ábaco de arena en India, la multiplicación en cuadrícula (método de la rejilla) cuya evolución imaginable podría ser el algoritmo actual y multiplicación rusa (Padilla y Rodríguez, 2000).

Además de los diferentes algoritmos hay que tener en cuenta el sistema de numeración adoptado por cada cultura, diferente, en muchos casos al decimal. El sistema de numeración maya, por ejemplo, era de base 20 con sub-base 5, posicional y con uso del cero usando de tres símbolos (Díaz, 2006).

Hasta avanzado el s. XVI no se acabó de imponer en Europa el sistema de numeración decimal hindú-árabe. Atrio (2007) y Gallardo (2004) nos dejan constancia de la polémica entre los partidarios de las cifras y los partidarios del cálculo mediante fichas. Polémica comparable con la de las últimas décadas entre la enseñanza tradicional de los algoritmos estándar y el uso de la calculadora.

4.3. Sobre la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas

4.3.1. Las operaciones básicas

En Fernández (2005) encontramos algunas reflexiones sobre cada una de las cuatro operaciones básicas relacionadas con su aprendizaje:

- **La adición:** La suma es un número. Resulta básica la comprensión del número, no sólo estableciendo una correspondencia, entre el orden de los números, sino estableciendo una dinámica de relaciones con descomposiciones numéricas. Es fundamental conocer las descomposiciones aditivas que equivalen a un número dado, así como, por reversibilidad, encontrar fácilmente el resultado que equivale a una descomposición dada.

⁴ El ábaco en la China se llama suan pan, en el Japón: soroban, en Corea: tschu pan, en Rusia: stchoty, en Vietnam: ban tuan o ban tien, en Turquía: coulba, en Alemania: choreb. (López, 2008, p.153)

- **La sustracción:** La resta no es una operación independiente. Para saber restar es necesario saber sumar. La operación de restar se estudia principalmente, en la Educación Primaria, como sustracción y como complementariedad. La representación matemática de esta operación como sustracción no es fácil para el niño, debido a que el sustraendo se representa como cantidad distinta, sin serlo.
- **La multiplicación:** ¿Por qué hay que trabajar las tablas de multiplicar en orden? ¿Por qué no se establecen y estudian relaciones entre las tablas de multiplicar? ¿Por qué hay que distinguir entre multiplicar por una cifra, por dos o más de dos? ¿Qué sentido tiene seguir escribiendo esas filas de ceros y dejando espacios, sin saber por qué?
- **La división:** La división no existe como operación independiente. Si se sabe multiplicar se sabe dividir. En primer lugar habría que estudiar la división como inversa de la multiplicación. Después, se podría estudiar el significado del resto de una división, para terminar estableciendo relaciones que nos permitieran calcular el cociente de una división cualquiera.

Diferentes autores hacen referencia a la necesidad de dominio y comprensión de ciertos conocimientos y habilidades previos:

- Habilidad en actividades de conteo. (Denia y Serrano, 1987)
- Estrategias de agrupamiento y descomposición numérica. (Bermejo, Betancourt y Vela, 2009)
- Sistema numérico posicional de base 10 (Bermejo et al., 2009; Meavilla y Oller, 2014) y la comprensión del papel del cero (López y Sánchez, 2011).
- Propiedades básicas de las operaciones. (Meavilla y Oller, 2014)
- Manejar operaciones mentalmente. (Bermejo et al., 2009)

4.3.2. El quehacer matemático

Para Fernández (2005) hacer matemáticas debería ser establecer relaciones, ligadas al rigor entendido como claridad mental, por lo que no podemos descuidar la emoción, la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento.

Toda acción que opere significativamente en el aprendizaje de la Matemática debe:

- Basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias; más que en la instrucción.

- Atender a la manipulación de materiales con tareas que mejoren la comprensión, desafiando y motivando desde las necesidades del alumno, respetando sus propias ideas y potenciando la autoestima, la confianza, la seguridad.
- Enseñar a fundamentar mediante argumentos lógicos sus conclusiones. Familiarizarles con las reglas de la lógica para permitir el desarrollo y la mejora del pensamiento. Esta familiarización debe ser una forma de jugar a crear relaciones, contrastando las respuestas antes de optar por una de ellas.

Si la matemática no está en la aplicación reiterada de movimientos, sino en la cantidad de ideas que se relacionan, el hacer matemático no está en la aplicación del algoritmo, sino en los mecanismos intelectuales que nos han permitido llegar a él, debiendo tratarlo como un medio y no en un fin (Barba y Calvo, 2012; Fernández 2005; Pérez, 2005).

Block (1991) señala que la matemática se reduce a algoritmos convencionales, situación aún más rígida si los maestros conocen las reglas pero no el porqué de estas.

Si un problema es resoluble algorítmicamente existen infinitos algoritmos que lo resuelven (Pérez, 2005), y “la obtención de un mismo resultado no requiere necesariamente la aplicación del mismo algoritmo” (Fernández, 2005), entonces, ¿Por qué se han enseñado tradicionalmente las cuatro reglas?

Una respuesta a esta pregunta la ofrece Gómez⁵ (1999 citado en Gallardo, 2004):

al establecerse el sistema general público de enseñanza, se hizo necesario un programa común para los estudiantes de un mismo nivel educativo, un programa de mínimos que todos debían aprender y en consecuencia un solo método para cada operación; todos el mismo, el mejor por más general; desde entonces estos algoritmos serán conocidos como las cuatro reglas. (p. 22)

4.3.3. Sentido de la enseñanza tradicional de los algoritmos estándar.

Roa (2007) cuestiona el tratamiento que se ha dado a los algoritmos:

Durante mucho tiempo el aprendizaje de las operaciones ha estado ligado a su algoritmo de una manera tan fuerte que, con frecuencia, se ha producido una identificación entre ambos conceptos. Es más, por énfasis que se pone en el algoritmo parece que éste es el objeto de aprendizaje y se da más importancia al automatismo que a la comprensión. (p. 232)

Iglesias (2005) contempla estos algoritmos como estrategias estandarizadas y generalizadas por los adultos.

⁵ Referencia Secundaria: Gómez, B. (1999). *El futuro del cálculo*.

Veamos algunas virtudes y críticas a la enseñanza tradicional de los algoritmos:

Virtudes	
Buendía, Fernández y Rico (1990)	La efectividad de los ejercicios rutinarios, con retroalimentación, para mejorar la velocidad y precisión a corto plazo
Hedrem ⁶ (1998 citado en Gallardo 2004)	Métodos de cálculo efectivos refinados durante siglos. Siempre pueden ser usados del mismo modo independientemente de la complejidad de los números. Son un tesoro cultural y deben ser cuidados.
Pérez (2005)	La sencillez de los algoritmos tradicionales ha supuesto su gran éxito.
Roa (2007)	Sistema coherente con reglas comunes que garantizan rapidez en el cálculo.

Críticas	
Atrio (2007)	Pérdida de tiempo adiestrando a alumnos en procedimientos concretos sin mostrarles otras opciones del razonamiento humano.
Buendía et al. (1990)	Inefectividad para obtener comprensión a largo plazo y técnicas más significativas.
Fernández (2005)	Poco desarrollo de observación, experimentación, intuición, razonamiento lógico, creatividad y emoción por el saber hacer... “La enseñanza de los algoritmos cambiará: creatividad por automatismo estereotipado, lógica del razonamiento por sistema de rutina, pensamiento que comprende por ignorante convencimiento.”
Kamii (1985)	El empleo de procedimientos utilizados por los profesores durante la instrucción, usualmente aprendidos de memoria por los niños/as, conducen a errores sistemáticos en el aprendizaje del algoritmo.
Martínez (2001)	Pobreza de estrategias y recursos que tienen los alumnos para resolver un problema cuando no se puede aplicar directamente el algoritmo clásico. No se potencian las destrezas y capacidades que los niños tienen antes de empezar su trabajo escolar, sino que las anulan o empobrecen de forma muy notable.

⁶Referencia Secundaria: Hedrem, R. (1998). *The teaching of tradicional estandar algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupil's own methods.*

Ante este panorama puede ser difícil pensar que las cosas se pueden hacer de otra manera cuando lo cierto es que no siempre se ha calculado como actualmente y, de hecho, quizás el objetivo más importante desde el punto de vista del cálculo, entre los s. XV y XVIII, fue el de la búsqueda del mejor algoritmo para cada una de las operaciones (Roa, 2007). Pérez (2005) añade que para la sociedad los algoritmos tradicionales son tan eficaces y están tan consolidados que son un obstáculo para su renovación.

4.4. Pérdida de fuerza de los algoritmos tradicionales.

Pérez (2005) basa la pérdida de fuerza de estos algoritmos en las siguientes causas:

- Cuestionamiento de otros algoritmos en los currículums.
- Renovación pedagógica de los 50 con inspiración constructivista⁷.
- Uso social en el que cada vez menos se hacen cuentas con lápiz y papel.
- Movimientos a favor de la abolición⁸ de los algoritmos tradicionales que piden más estrategias para cálculo mental y uso de la tecnología: calculadora)

Bermejo, Betancourt y Vela (2009) describen el proceso histórico del cuestionamiento de los algoritmos tradicionales:

- Década de los 70.- Comprobación de su utilidad: se observa que los niños se preocupaban por recordar pasos y no por comprender.
- Década de los 80.- Se valora su utilidad en contextos diferentes donde el algoritmo no refleja una forma natural de operar: niños vendedores callejeros de Brasil muestran mejor ejecución.
- Década de los 90.- Algoritmos negativos para el desarrollo del cálculo de los niños: aprenden reglas y olvidan su propio conocimiento numérico.

4.4.1. Otros algoritmos, otras alternativas.

“Es bueno que los niños conozcan más de un algoritmo para una misma operación, de modo que puedan elegir según las cantidades implicadas, el tiempo disponible, etc.” (Bermejo et al., 2009).

Podemos encontrar propuestas de uso de algoritmos históricos por su interés didáctico (Barba y Calvo, 2012; Meavilla y Oller, 2014; Padilla y Rodríguez, 2000).

⁷ Sirva como resumen de esta inspiración constructivista “Decálogo de normas para orientar al docente del siglo XXI en su labor didáctica en el área de matemáticas” (Ver ANEXO II) de Don Jaime Puig Adam, recuperado por Atrio (2007).

⁸ Let’s abolish Pencil-and-Paper arithmetic, de Anthony Ralston; Manifiesto en contra de los algoritmos tradicionales de la cuatro operaciones aritméticas y de la raíz cuadrada, del Colegio Público Guamensa de las Islas canarias. (Pérez, 2005)

Kraemer (1999) propone abordar la división con algoritmos diferentes: descomposición multiplicativa a la que llegar por sustracción repetitiva hasta que no se pueda, adición repetida mientras no se pase, cálculo proporcional: doble, doble del doble...

Algoritmos alternativos (Bermejo et al., 2009)	
Suma	Sumas parciales.
Resta	Añadir a, diferencias parciales.
Multiplicación	Modelado directo, sumas repetidas (completar números), productos parciales, partición del número, algoritmo de rejilla.
División	Restas repetidas, aproximaciones sucesivas, descomposición del dividendo.

Apoyando la idea de que “un alumno sabe dividir cuando sabe resolver los problemas escolares que implican la división, independientemente de si domina o no el algoritmo asociado a esta operación” (Barba y Calvo, 2010), algunos autores confieren importancia a otros aprendizajes sobre los algoritmos:

- Cálculo mental (Iglesias, 2005; Martínez, 2001).
- Estimación (Martínez, 2001).
- Uso y construcción de materiales (Meavilla y Oller, 2014).
- Procedimientos personales: aproximación por redondeo, búsqueda de puntos de referencia por exceso y defecto, descomposiciones, intuición de proporcionalidad (Fernández, 2005; Iglesias, 2005; Meavilla y Oller, 2014).

Del uso de estos aprendizajes los mismos alumnos puede construir sus propios algoritmos (Barba y Calvo, 2012; Bermejo et al., 2009),

4.4.2. Constructivismo.

Romero (2004) manifiesta la necesidad de trabajar la matemática inicial priorizando la comprensión, el razonamiento y la construcción personal sobre el aprendizaje hueco de rutinas algorítmicas. Se trata pues de una enseñanza participativa en base a la realidad próxima al alumnado y acorde con la posibilidades de cada cual.

Bermejo y Díaz (2007) proponen el aprendizaje de estas operaciones en función de la secuencia del nivel de abstracción y la estructura semántica de los problemas en el aula de matemáticas.

Resulta llamativo que, de forma espontánea, el alumno comienza a resolver las operaciones por la izquierda buscando las cantidades más significativas, todo lo contrario que dictan los algoritmos estándar (Bermejo et al., 2009; Cabrera, 2005;

Iglesias, 2005). En un marco constructivista hay que dar importancia a lo que pudo pensar el alumno (Block, 1991).

Barba y Calvo (2012) defienden que lo que tiene que desaparecer es el carácter organizador del currículo de los algoritmos: deben estar en el aula pero desde su comprensión lo que significa trabajar con más de un algoritmo (“más allá de las cuatro reglas”) para una misma tarea. Se debe entender el algoritmo estándar como una posible manera de resolver una operación (Iglesias 2005; Meavilla y Oller, 2014).

La idea constructivista de provocar un conflicto, se refleja en la propuesta de trabajar en un ambiente de resolución de problemas que lleve a los alumnos a construir y reflexionar sobre los algoritmos (Barba y Calvo, 2012, Fernández, 2005, Iglesias, 2005). Kraemer (1999) ya ponía en valor del algoritmo para su reconstrucción.

López y Sánchez (2011) advierten que los errores de cálculo se relacionan con la comprensión de conceptos esenciales para un aprendizaje significativo, aprendizaje que tiene efectos positivos para la retención y transferencia a nuevas tareas, y afecta favorablemente a las actitudes (Buendía et al., 1990).

4.4.3. La sociedad y la calculadora.

Barba y Calvo (2012) valoran la presión social de la tradición como elemento que da inseguridad al maestro para un cambio de rol. Por el contrario Meavilla y Oller (2014) reclaman un desplazamiento de los algoritmos del centro de la enseñanza, ya que estos padecen un rechazo sociedad, situando el reto en la aritmética mental. Iglesias (2005) considera la calculadora como una mejor adaptación a la sociedad.

Desde el informe Cockcroft (1985) que afirmaba que algunas investigaciones han demostrado que los alumnos acostumbrados al uso de las calculadoras mejoran su actitud hacia las matemáticas, las destrezas de cálculo, la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas, son muchos los autores que defienden el uso de la calculadora con diferentes argumentos:

- Es un instrumento de uso cotidiano, habitual, de fácil manejo, barato, rápido y práctico. En la vida diaria, en el momento que se necesita realizar un cálculo, se utiliza la calculadora o el cálculo mental. Es muy difícil encontrarnos a alguien realizando cálculos con lápiz y papel... salvo en las escuelas. (Iglesias, 2005)
- Menor tiempo de aprendizaje, menor tiempo de ejecución, menor frecuencia de errores y mayor utilidad. (Ñabraña, 2002)

- El uso de la calculadora como instrumento de cálculo, proporciona en la escuela el tiempo necesario para concentrarse en el esfuerzo y la atención necesaria en la comprensión de conceptos y en el pensamiento crítico (Pérez, 2005).

Aunque Iglesias (2005) reconoce que ante la calculadora los algoritmos tienen menos sentido, advierte que ni uno ni otro deben sustituir la capacidad de cálculo y el razonamiento, la estimación o el dominio de operaciones.

El desarrollo tecnológico pone en tela de juicio la enseñanza tradicional de los algoritmos (Barba y Calvo, 2012; Buendía et al., 1990).

4.5. El maestro.

4.5.1. La tradición.

Block (1991) describe la algoritmización de los problemas como una mecánica de control del grupo cuyos resultados son de fácil medición, con la idea de fondo de que “el maestro lo sabe”. Muchos maestros se escudan en la existencia de programas cerrados (Iglesias, 2005). Pero los padres pueden enseñar estos procedimientos mecánicos, como apunta Fernández (2005):

Si se permitimos que aprendan con ellos lo mismo que pueden aprender con nosotros, no habrá ningún reconocimiento; no existen pautas de diferenciación profesional y los parámetros de capacitación no se perciben socialmente. (p. 42)

4.5.2. El cambio de rol del maestro.

Iglesias (2005) señala que en esta sociedad cambiante debe darse un cambio de rol del maestro de transmisor a dinamizador. Debe plantear conflictos que fomenten pensamiento independiente y autónomo, el debate, el intercambio de puntos de vista, reconociendo que en ocasiones el maestro puede aprender del alumno. Supone un esfuerzo valorar la validez de los procedimientos que los alumnos pueden manejar, algunos ni enseñados ni conocidos por el maestro, que los pone en una situación de menor control frente al grupo (Block, 1991). De alguna manera se está hablando de atención a la diversidad de ideas (Fernández, 2005). Este cambio de rol genera inseguridad en el maestro (Barba y Calvo, 2012).

Los maestros tienen que construir los procedimientos aritméticos en base a la comprensión conceptual de principios aritméticos (López y Sánchez, 2007).

4.5.3. La formación del maestro.

Conocer diferentes algoritmos, sus ventajas e inconvenientes permitirá a los maestros anticipar y tratar de paliar las dificultades de sus alumnos en el aprendizaje (Meavilla y Oller, 2014). Este dominio queda en entredicho con evidencias como la presentada por

Salinas (2003) acerca de errores de estudiantes de magisterio debidos a la aplicación mecánica del algoritmo y fallos tanto lingüístico como matemáticos y/o de interpretación. Como consecuencia de que los mismos maestros realicen una forma concreta de algoritmo de forma mecánica, sin entender su funcionamiento les resulta difícil contemplar cualquier dificultad en el aprendizaje por parte del alumno (Padilla y Rodríguez, 2000).

4.6. La comprensión.

La preocupación por la comprensión se observa en el interés y orientación de algunos autores (Romero, 2000; Godino, 2000). En el desarrollo de esta revisión se han encontrado referencias a ella (Fernández, 2005; López y Sánchez, 2007, 2011)

Gallardo y González (2006) presentan un trabajo sobre la evaluación de la comprensión en el que, desde un punto de vista epistemológico, se identifican tres categorías situacionales que permiten establecer diferencias en la comprensión del algoritmo:

- Categoría Técnica: reúne a aquellas situaciones donde el algoritmo se emplea de forma mecánica o rutinaria como un instrumento de cálculo.
- Categoría Analítica: situaciones que requieren para su resolución el análisis de la estructura y el funcionamiento externos del algoritmo.
- Categoría Formal. Incluye todas las situaciones que demandan del resolutor un uso explícito de las relaciones que sustentan y validan el mecanismo subyacente al algoritmo, entre ellas las derivadas de las propiedades del sistema de numeración decimal posicional.

En relación a esta categorización, el trabajo de Hernández (2004) pone de manifiesto la predominancia de ejercicios de comprensión técnica, frente a muy pocos de comprensión analítica y la ausencia de comprensión formal en libros de texto. Existen propuestas didácticas que se pueden encuadrar en la categoría técnica, consiguiendo minimización de errores con el uso de contextos realistas (López y Velázquez, 2007): dentro de la categoría analítica pueden incluirse las experiencias de Barroso y Gavilán (1996) basada en metodología quasi-empírica de Lakatos (1976) en busca de una matemática informal que pone en entredicho el formalismo matemático, o la de Gallardo y González (2002), trabajando la comprensión a través de reconstrucciones o algoritmos con cifras desconocidas.

Sirvan de resumen las palabras de Fernández (2005):

Cuando a un niño que entiende lo que hay que hacer se le desafía convenientemente es capaz de crear originales formas de llegar al desenlace numérico. (p. 34)

4.7. Materiales y Recursos.

4.7.1. Materiales manipulativos.

Siguiendo el trabajo de Bruner (Roa, 2007) clasificamos las actividades a realizar en tres tipos correspondientes a diferentes niveles de representación de las operaciones aritméticas:

- Enactiva: Las operaciones se representan con material físico susceptible de ejercer sobre él acciones en forma de manipulaciones.
- Icónica: Las operaciones se representan mediante dibujos que son imágenes estáticas.
- Simbólica: Las operaciones se representan mediante el lenguaje y los símbolos.

Roa (2007) señala que para la modelización de la fase enactiva se utilizan materiales estructurados. Para el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones básicas es necesario que los sujetos realicen una gran variedad de actividades con materiales de distinto nivel de concreción, incluidos “*objetos de la vida diaria*” (Pérez, 2005). Lo más adecuado para iniciar el estudio de cualquier algoritmo es partir de objetos físicos que se puedan manipular y que tengan la misma estructura que el sistema de numeración decimal y, en este sentido, son especialmente útiles los *bloques multibase*. Destaca otros materiales como objetos sueltos, ábacos y tablero de valor de posición, como el juego *Numerator* (Atrio, 2007). El algoritmo aparece en el momento en que el alumno es capaz de trabajar con números en forma simbólica y manipular dichos símbolos, en lugar de hacerlo físicamente con los objetos.

Fernández (2005) advierte que el material es un medio dirigido a producir en el que aprende resultados fructíferos, si no los produce hay que evitar su utilización. El uso didáctico de materiales y recursos en el aula estará ligado a la interpretación que se tenga de la Matemática. Que los materiales “didácticos” se apliquen en el trabajo de clase no significa que sirvan para alcanzar un aprendizaje significativo y funcional o un hacer heurístico. En sus propias palabras:

El empleo del material es, sin duda, más que necesario, pero si ha de ser fructífero y no perturbador, debe llevar implícito un fuerte conocimiento de los procesos intelectuales que se pueden conseguir y de cómo se consiguen. (p. 38)

Otros materiales recomendados son las *regletas de Cuisenaire* (Fernández, 2005), *triángulos multiplicativos* (Barba y Calvo, 2010) o, incluso, *cualquier material concreto* (Resnick y Omanson, 1987 citados por Bermejo et al., 2009).

4.7.2. Recursos Electrónicos.

Ares y Nora (2012) presentan un trabajo con el objetivo reflexionar sobre la importancia de poder relacionar e interpretar imágenes visuales (utilizando manipulables virtuales) con la información que está dada en forma simbólica. El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Por esta razón es necesario el diseño de nuevos materiales utilizando esta nueva metodología, donde muestren su uso efectivo en el aula.

El mundo educativo suele ser inmovilista (en muchos casos seguimos utilizando lo mismo que hace siglos), pero las T.I.C. están influyendo en modificar los métodos de la enseñanza. Fernández y Muñoz (2007) opinan que esas tecnologías pueden servir para una mejor adquisición de contenidos por parte de los alumnos y prepararlos de una forma satisfactoria para desenvolverse en una sociedad cada vez más tecnificada.

5. Conclusiones.

Se manifiesta que, en general, no existe una clara delimitación conceptual de la idea de algoritmo, pero sí se contemplan otros procedimientos, ya se llamen estrategias (Buendía et al., 1990), heurísticos o métodos propios inventados (Gallardo, 2004).

Durante mucho tiempo se ha centrado el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas en las llamadas “cuatro reglas” (Roa, 2007), cuyo tratamiento se ha puesto en entredicho, en las últimas décadas del s. XX, dados sus escasos beneficios didácticos (Bermejo et al., 2009).

Para afrontar el aprendizaje de algoritmos con garantías es necesario dominar y comprender ciertos conocimientos y habilidades previos (Bermejo et al., 2009; Denia y Serrano, 1987; López y Sánchez, 2011; Meavilla y Oller, 2014).

Los estudios señalan que existen otras manifestaciones del cálculo aritmético que deberían ser tenidas en cuenta en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Ares y Nora, 2012; Barba y Calvo, 2012; Bermejo et al., 2009; Fernández, 2005; Fernández y Muñoz, 2007, Kraemer, 1999; Iglesias, 2005, Martínez, 2005; Meavilla y Oller, 2014; Padilla y Rodríguez, 2000). Estimación y cálculo mental, métodos inventados por el alumno, algoritmos históricos y culturales, materiales manipulativos, calculadora y ordenador, trabajados adecuadamente pueden mejorar el proceso de aprendizaje.

Existe cierto consenso en el uso de múltiples representaciones (Bermejo et al., 2009) dónde todas estas manifestaciones tienen cabida. Aunque existen detractores de los

algoritmos (Pérez, 2005), la tendencia generalizada es la de contemplarlos como un medio y no como un fin (Barba y Calvo, 2012; Fernández, 2005; Iglesias, 2005).

La preparación y comprensión del maestro resultará esencial a la hora de anticipar las posibles dificultades que puedan surgir en el proceso de aprendizaje (Meavilla y Oller, 2014; Padilla y Rodríguez, 2000). Abandonar la seguridad de un programa cerrado de enseñanza de la aritmética básica supone una pérdida de control que genera inseguridad en el maestro (Block, 1991; Barba y Calvo, 2012; Iglesias, 2005)

En el acercamiento que debería hacerse a las operaciones básicas, la gran mayoría de las publicaciones priorizan la comprensión de las ideas que se ponen en juego sobre la mecanicidad del uso los algoritmos (Fernández, 2005; López y Sánchez, 2007).

Se pueden establecer tres categorías de comprensión de un algoritmo: técnica, analítica y formal (Gallardo y González, 2006). Hernández (2004) señala la predominancia del trabajo técnico en los libros. Serían interesantes nuevos estudios sobre la influencia de los libros de textos actuales en el tipo de comprensión adquirido por el alumnado.

El uso de materiales manipulativos es fuertemente recomendado siempre y cuando se conozcan los procesos intelectuales que se pueden conseguir y cómo se consigue (Fernández, 2005). Entre los materiales recomendados podemos encontrar *el ábaco* (Padilla y Rodríguez, 2000), *el material multibase* (Roa, 2007), *los triángulos multiplicativos* (Barba y Calvo, 2010), *Numerator y las regletas de Cuiseniere* (Fernández, 2009) o, en general, cualquier *material concreto* (Bermejo et al., 2009). (Ver anexo III)

Como prospectiva, se cree necesaria más investigación que aborde el estudio de las relaciones entre la habilidad de cálculo y la comprensión y reorganización del conocimiento a través del trabajo con algoritmos, ya que se suele dar por hecho que estas relaciones se adquieren en el proceso de aprendizaje del número. En definitiva se trataría de ofrecer planteamientos didácticos que mejoren la adquisición de estrategias de cálculo, potenciando de igual manera la comprensión de las relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental durante la práctica algorítmica.

A modo de resumen podríamos decir que la continuidad de las prácticas tradicionales, repetitivas y poco significativas (Iglesias, 2005), resultaría:

Didácticamente equivocado, conceptualmente hipertrófico, científicamente inútil e históricamente absurdo (Pascal, s.f. citado en Pastor, 1981).

Porque, en esencia, no debemos confundir “saber sumar con saber hacer sumas” (Fernández, 2005).

6. Referencias Bibliográficas.

- Ares, O.E. y Nora Gatica, S. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *EDMETIC*, 1(2), 90-109.
- Atrio Cerezo, S. (2007). La insumisión del algoritmo en el aula de educación primaria. En Aizpún López, A. y Camarena Cabeza, M.D (Coord.), *Aprender Matemáticas: metodología y modelos europeos* (pp. 123-139). Ministerio de Educación y Ciencia, Secretaría General Técnica.
- Barba Uriach, D. y Calvo, C. (2010). La división mucho más que un algoritmo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 54, 41-54.
- Barba Uriach, D. y Calvo, C. (2012). Algoritmos antiguos de cálculo. *Cuadernos de pedagogía*, 421, 62-65.
- Barroso Campos, R. y Gavilán Izquierdo, J.M. (1996). Didáctica de los algoritmos a través de reconstrucciones. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 35, 193-202.
- Bermejo, V. y Díaz, J.J. (2007). Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(3), 335-364.
- Bermejo, V.; Betancourt, S. y Vela, E. (2009). Los algoritmos. En Bermejo, V. (Coord.), *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor* (pp. 193-214). Madrid: Editorial CCS.
- Block, D. (1991). Los algoritmos en la resolución de problemas: concepciones de los maestros. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 21, 129-138.
- Bracho López, R. (2010). *Visualización de la investigación en Educación Matemática en España. Análisis cuantitativo y conceptual de la producción de artículos científicos (1999-2008)* (Tesis Doctoral no publicada). Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Buendía Eisman, L.; Fernández Cano, A. y Rico Romero, L. (1990). Algoritmos y estrategias en la enseñanza del cálculo básico. *Revista de investigación educativa, RIE*, 8(15), 51-62.
- Cabrera, J. (2005). Aparición de algoritmos en secundaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 4, 59-62.

- Cockcroft, W.H. (Coord.). (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe de la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Crespo Crespo, C.R. y Micelli, M.L. (2012). Ábacos de América Prehispánica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 5(1), 159-190.
- Denia, A.M. y Serrano, J.M. (1987). Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, 39-40, 57-69.
- Díaz Díaz, R. (2006). Apuntes sobre la aritmética maya. *Educere: Revista Venezolana de Educación*, 35, 621-627.
- Fernández Bravo, J.A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 4, 31-46.
- Fernández, J. y Muñoz Santonja, J. (2007). Las T.I.C. como herramienta educativa en matemáticas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 9, 119-147.
- Fraile Martín, J (1997). Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de las estrategias con alumnos de 8 años. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 26, 95-102.
- Gallardo Romero, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales* (Tesis Doctoral no publicada). Málaga: Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga.
- Gallardo Romero, J. y González Marí, J.L. (2002). Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 54, 469-478.
- Gallardo, J. y González, J.L. (2006). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31.
- Godino, J.D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 25, 77-87.

- Hernández Rincón, M.L. (2004). Libros de texto, algoritmos y problemas verbales: ¿cuál es el resultado de mezclar estos ingredientes? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 35, 66-73.
- Ifrah, G. (2008). *Historia universal de las cifras: la inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa Calpe.
- Iglesias Pérez, J.M. (2005). Los algoritmos tradicionales y otros algoritmos. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 4, 47-49.
- Kraemer, J.M. (1999). Dividir construyendo los números (mentalmente) ¿Una alternativa frente al algoritmo usual de la división? *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 22, 29-44.
- Krinitzki, N. (1988). *Algoritmos a nuestro alrededor*. Moscú: Mir.
- Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.
- López Arca, S. (2008). Ábaco. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 14, 153-156.
- López Domech, R. (2000). La viga de Ohanes: algo más que un conflicto escolar en el siglo XVIII. *Revista Complutense de Educación*, 11(1), 153-173.
- López Fernández, J.M. y Velázquez Estrella, A. (2007). Un ejemplo de la utilidad de los contextos en la matemática realista: los algoritmos de suma y resta por columnas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 44, 95-103.
- López Fernández, R. y Sánchez García, A.B. (2007). Los componentes generadores de errores algorítmicos caso particular de la sustracción. *Revista de educación*, 344, 231-232.
- López Fernández, R. y Sánchez García, A.B. (2011). La transferencia de aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción. *Revista de educación*, 354, 429-445.
- Martínez Montero, J. (2001). Los efectos no deseados (y devastadores) de los métodos tradicionales de aprendizaje de la numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 49, 13-26.
- Meavilla Seguí, M. y Oller Marcén, A.M. (2014). Gaspar de Texeda y los algoritmos de la multiplicación. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 75, 61-73.

- Mialaret, G. (1977). *Las matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Pablo del Río Editor.
- Ñabraña, A. (2002). Algoritmos e Matemáticas. *Eduga: revista galega do ensino*, 34, 147-166.
- Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *Boletín oficial del Estado*, 173, de 20 de julio de 2007.
- Padilla Domínguez, Y. y Rodríguez Cielos, P. (2000). Algoritmos de la multiplicación: un breve recorrido histórico. En Gámez Mellado, A.; Macías Gil, C. y Suárez Alemán, CO. (Eds.), *Matemáticos y matemáticas para el tercer milenio, de la abstracción a la realidad* (pp. 197-200). Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Pérez, A.J. (2005). Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 1, 37-44.
- Rey Pastor, J. (1981). *Elementos de Análisis Algebraico*. Madrid: Biblioteca Matemática.
- Roa Guzmán, R. (2007). Algoritmos de cálculo. En Castro Martínez, E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 231-256). Madrid: síntesis.
- Romero de Ávila, S.G. (2004). La enseñanza de las matemáticas y el cálculo vivo. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 58, 99-108.
- Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En Carrillo, J.; Climents, N.; Contreras L.C. y Sierra, M. (Coord.), *IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.35-46). Huelva: Publicaciones Universidad de Huelva.
- Salinas Portugal, M.J. (2003). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En E. Castro Martínez (Coord.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 339-348). Granada: Universidad de Granada.

7. ANEXOS

7.1 ANEXO I: Fuentes no consultadas.

- Coromoto Castro de Bustamante, J. (2004). *Análisis de los Componentes actitudinales de los docentes hacia la enseñanza de la Matemática. Caso: 1ª y 2ª Etapas de Educación Básica. Municipio de San Cristóbal-Estado Táchira*. (Tesis Doctoral no publicada). Tarragona: Universitat Rovira i Virgili.
- Redondo González, J.A. (2009). *La visualización en el aprendizaje de las matemáticas algoritmos y resolución de problemas*. (Tesis Doctoral no publicada). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Sánchez García, A.B. (2005). *Las dificultades cognitivas ("buggy") en operaciones en las que intervienen algoritmos aritméticos y su tratamiento educativo con programaciones hipermedia*. (Tesis Doctoral no publicada). Salamanca: Universidad de Salamanca
- Yáñez Mejías, G.V. (2004). Elaboración y validación de una prueba de conocimientos matemáticos para la Educación Primaria. *Apuntes de Psicología*, 22(2), 267-276.
- Zorroza, J. (1995). Los componentes cognitivos de la capacidad matemática: Representación mental, esquema, estrategias y algoritmos. *Psicológica: Revista de metodología y psicología experimental* 16(2), 305.

7.2 ANEXO II: Decálogo de normas para orientar al docente del siglo XXI en su labor didáctica en el área de matemáticas.

“Don Pedro Puig Adam (1900-1960), fue uno de los pioneros en didáctica de las matemáticas y redactó este decálogo en 1955” (Atrio, 2007):

- 1.- No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla constantemente al alumno, observándole constantemente.
- 2.- No olvidar el origen concreto de la matemática ni los procesos históricos de su evolución.
- 3.- Presentar la matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
- 4.- Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
- 5.- Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

- 6.- estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
- 7.- Promover en todo lo posible la auto-corrección.
- 8.- Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
- 9.- Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
- 10.- Procurar en todo momento que el alumno obtenga éxitos que eviten su desaliento.

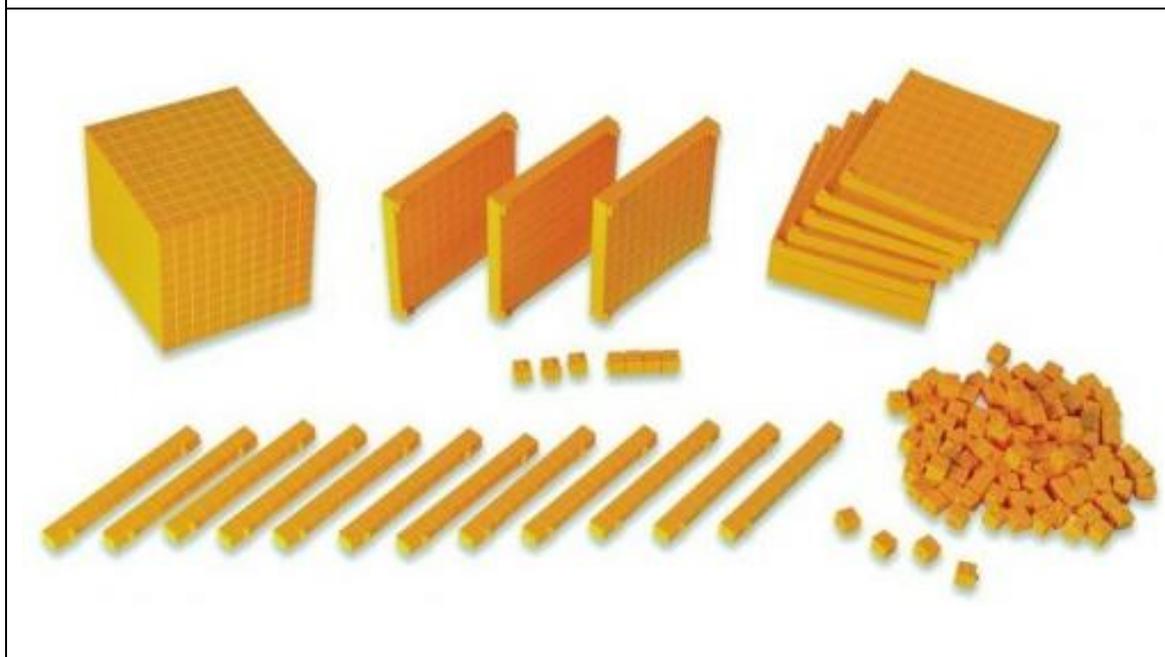
7.3 ANEXO III: Algunos materiales manipulativos.

BLOQUES MULTIBASE

Los bloques multibase son un material manipulativo que se utilizan representar, facilitando su comprensión, la estructura del sistema de numeración decimal y las operaciones fundamentales. Se emplean, principalmente, en los procesos iniciales de enseñanza y aprendizaje de los alumnos de primer ciclo.

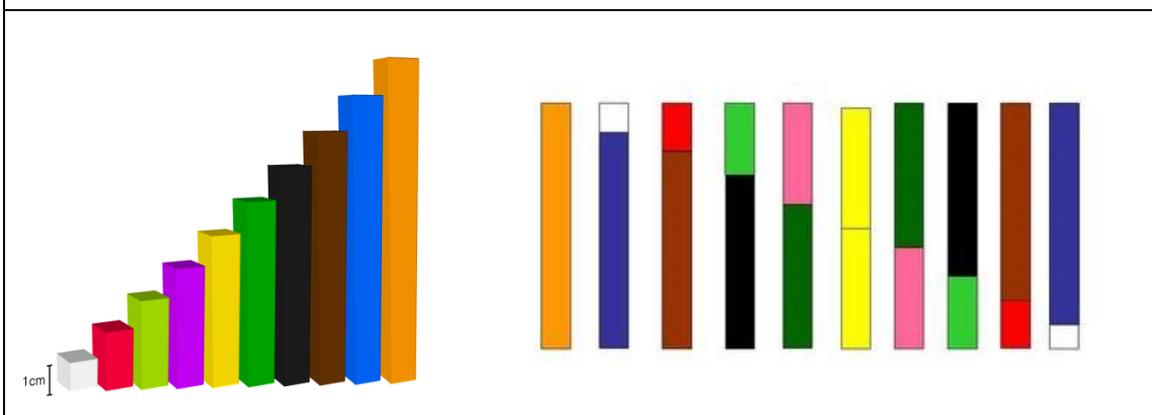
Los bloques multibase están compuestos por una determinada cantidad de cubos, barras, placas y bloques (cajas). Pueden encontrarse en diferentes materiales: madera, plástico u otro material resistente a la manipulación.

Los cubos tienen una medida aproximada a un centímetro cuadrado en cada una de sus caras. Las barras equivalen a diez cubos, las placas contienen diez barras, y los bloques están conformados por diez placas.



REGLETAS DE CUISENAIRE

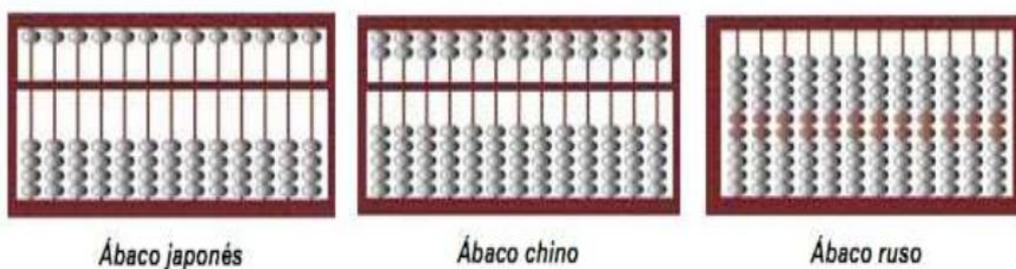
Las regletas de Cuisenaire son un juego de manipulación matemática utilizado en la escuela, así como en otros niveles de aprendizaje e incluso con adultos. Se utilizan para enseñar varios temas matemáticos, como las cuatro operaciones básicas, fracciones, área, volumen, raíces cuadradas, resolución de ecuaciones simples, los sistemas de ecuaciones, e incluso ecuaciones cuadráticas. Fue Georges Cuisenaire (1891-1976) quien las introdujo para su uso con profesores a lo largo de todo el mundo a partir de la década de 1950. Cuisenaire fue un profesor de escuela primaria de Bélgica, que publicó un libro sobre su uso en 1952, llamado *Los números en colores*.



ÁBACO

El ábaco es un dispositivo cuya utilidad es efectuar operaciones aritméticas sencillas. Consiste en un cuadro de madera con barras paralelas con bolas movibles, útil también para enseñar estos cálculos simples. Su origen se remonta a la antigua Mesopotamia, más de 2000 años antes de nuestra era.

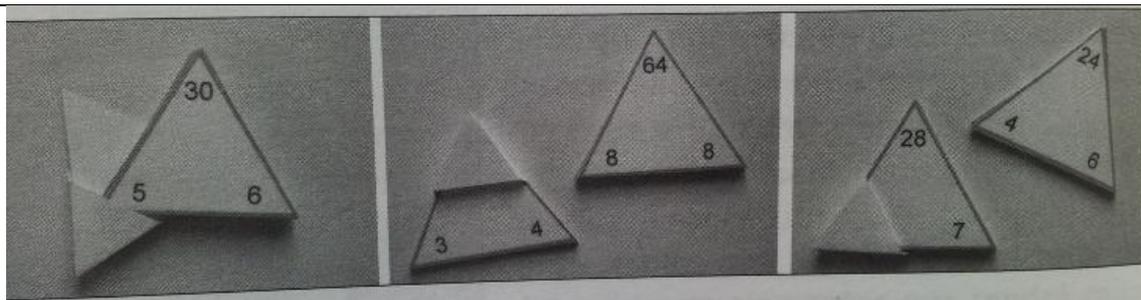
Los ábacos más conocidos son los de origen chino y ruso aunque los restos arqueológicos hallados no se asemejan a estos estilos de ábacos modernos sino que son otros muy distintos.



TRIÁNGULOS MULTIPLICATIVOS

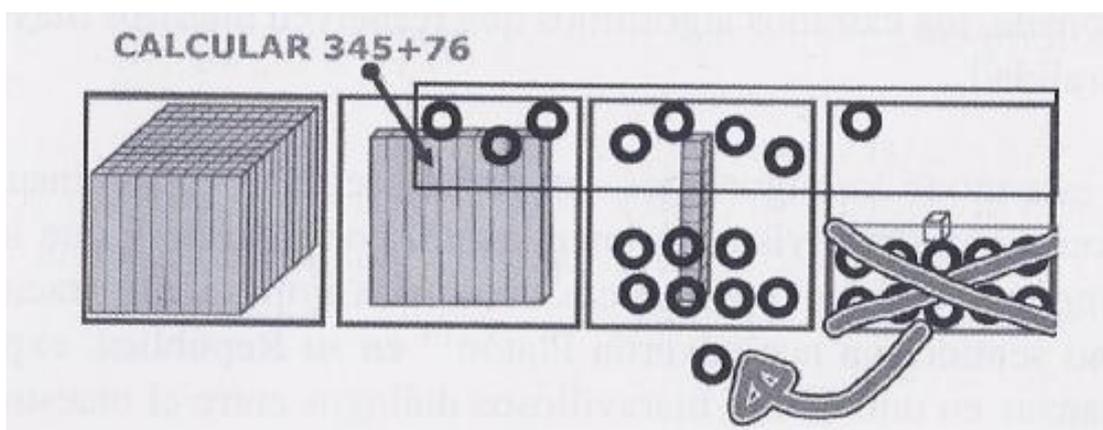
Los triángulos multiplicativos son simplemente una manera de simbolizar una multiplicación escribiendo en los vértices inferiores los factores y en el tercer vértice el producto. Pretenden ayudar a la conexión de los tres números involucrados en una multiplicación.

Si se tapa el vértice superior y preguntamos por el número que no se ve repasamos las tablas de multiplicar, pero si tapamos uno de los dos otros vértices, repasamos las de dividir.



NUMERATOR

Numerator es un material manipulativo con el que podemos ayudar al alumno a descubrir los conceptos matemáticos relacionados con el sistema de numeración. Consta de 16 cartones cuadrados. Cuatro de color naranja y otros tantos verdes, amarillos y rojos (cada uno de ellos para una base 10, 5, 4 y 2, respectivamente). Representan el mismo criterio de color que las *regletas Cuisenaire*.



7.4 ANEXO IV: Ejemplificaciones de algoritmos alternativos a las cuatro reglas.

ALGORITMO CULTURAL: Algoritmo ruso de la multiplicación

$$\begin{array}{r}
 \boxed{164} \times \boxed{313} \\
 82 \quad 626 \\
 41 \quad \quad 1252 \\
 20 \quad 2504 \\
 10 \quad 5008 \\
 5 \quad \quad 10016 \\
 2 \quad 20032 \\
 1 \quad \quad 40064 \\
 \hline
 \boxed{51332}
 \end{array}$$

Se calculan las mitades sucesivas del primer factor, descartando decimales y colocando los resultados en una columna. En paralelo se calculan los dobles sucesivos del segundo factor. Se seleccionan los resultados de la segunda columna que estén emparejados con resultados impares en la primera columna. Su suma es el resultado buscado.

ALGORITMO HISTÓRICO: multiplicación egipcia

$$\begin{array}{r}
 37 \times 26 \\
 \hline
 1x \rightarrow 26 \\
 2 \rightarrow 52 \\
 4x \rightarrow 104 \\
 8 \rightarrow 208 \\
 16 \rightarrow 416 \\
 32x \rightarrow 832 \\
 \hline
 + 832 \\
 \hline
 962
 \end{array}$$

En la primera columna escribimos los números 1 y 2, y vamos duplicando las veces que sea posible sin superar el primer factor. En la segunda columna comenzamos con el segundo factor y vamos duplicando hasta llevar el último número de la segunda columna. Marcamos en la primera columna los números que suman el primer factor, sumamos los números emparejados a estos de la segunda columna para obtener el resultado.

ALGORITMO HISTÓRICO: multiplicación en celosía o rejilla

Se colocan las cifras del primer factor sobre la rejilla y las del segundo a su derecha. Se multiplica cada combinación de fil y columna, para cavar sumando en diagonal los resultados intermedios, el resultado final será el formado por las cifras de la derecha seguidas de las de abajo de arriba abajo y de izquierda a derecha. En caso de obtener resultados intermedios de más de una cifra, se anota en la siguiente diagonal de la celosía.

