

ERRORES EN LA TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO Y VERBAL

Susana Rodríguez-Domingo, Marta Molina, María C. Cañadas y Encarnación Castro

Este artículo describe parte de una investigación sobre las traducciones de expresiones algebraicas, entre los sistemas de representación simbólico y verbal, que realizan escolares de educación secundaria. El objetivo principal abordado es identificar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar dichas traducciones. Entre los resultados obtenidos destacamos la influencia de las características del simbolismo algebraico en los errores cometidos en la traducción de expresiones verbales a simbólicas y la mayor facilidad para traducir enunciados del sistema de representación simbólico al verbal.

Términos clave: Enunciados algebraicos; Errores; Sistema de representación simbólico; Sistema de representación verbal; Traducción entre representaciones

Errors in the Translation of Algebraic Statements between Symbolic and Verbal Representation Systems

This article describes part of a study on secondary students' translations between the symbolic and the verbal representation systems. The main objective is to identify and classify the errors they made when performing these translations. Among the obtained results we highlight the influence of the characteristics of algebraic symbolism in the errors made when translating from verbal to symbolic expressions and the larger ease to translate statements from the symbolic to the verbal representation system.

Keywords: Algebraic statements; Errors; Symbolic representation system; Translation between representations; Verbal representation system.

En Educación Matemática el estudio de los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje tiene gran relevancia pues, entre otros aspectos, permite conocer la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales y los procesos de construcción del conocimiento matemático. Rico (1995) reivindica que el error es una posibilidad perma-

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9(4), 273-293.

nente en la adquisición y consolidación del conocimiento. Los errores, entendidos como indicadores de la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, dan información sobre las dificultades que presentan contenidos específicos de matemáticas a las que es necesario prestar atención en la enseñanza (Socas, 1997). Estudios que han indagado sobre errores aportan diferentes clasificaciones de los mismos, informan de dificultades asociadas y sugieren propuestas didácticas que parten del error para la construcción del conocimiento matemático (Rico, 1995).

Nuestro foco de interés en este artículo son los errores en que los estudiantes de educación secundaria incurren al abordar la traducción de enunciados algebraicos descontextualizados entre los sistemas de representación simbólico y verbal. Identificar y clasificar estos errores puede ayudar a conocer cómo los estudiantes adquieren nociones sobre simbolización algebraica y su aplicación a la resolución de problemas. En lo que sigue, presentamos el significado de los términos sistemas de representación y traducciones, que son claves en este trabajo, y aportamos una síntesis del estado de la cuestión en relación a los procesos de traducción entre el simbolismo algebraico y el lenguaje verbal. Posteriormente, detallamos el estudio empírico realizado en el contexto de un aula de 4º curso de educación secundaria (15-16 años).

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

El conocimiento en general, y el matemático en particular, requieren de representaciones. Por una parte, para pensar sobre ideas matemáticas, razonar sobre ellas y organizar el conocimiento que proporcionan, es necesaria la formación de una representación interna de las mismas (Goldin, 2002). Por otra parte, para expresar y comunicar ideas matemáticas son necesarias las representaciones externas, mediante las cuales se materializan los conceptos matemáticos (Castro, 1994; Hiebert y Carpenter, 1992). Ambos tipos de representaciones, internas y externas, están en estrecha conexión pudiendo llegar a considerarse las internas como una asimilación de las representaciones externas (Castro y Castro, 1997). En nuestra investigación nos centramos en estas últimas aunque no lo precisemos cuando empleamos el término representación.

Como consecuencia de la organización de los conceptos matemáticos en estructuras, se emplea el término sistemas de representación, entendiendo como tales un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que permiten expresar conceptos, propiedades del mismo y conexiones con otros conceptos (Gómez, 2007; Rico, 2009). Para un mismo concepto existe una diversidad o modos de representación, cada uno de los cuales destaca diferentes propiedades de ese concepto (Gómez, 2007; Janvier, 1987; Rico, 1997), siendo necesario el dominio de todos ellos para una mayor comprensión del concepto (Castro, 1994; Goldin, 1998; Kaput, 1992).

El procedimiento mediante el cual un objeto matemático expresado en un sistema de representación pasa a ser expresado en otro sistema de representación se conoce como una traducción entre esos dos sistemas de representación (Gómez, 2007). Este

procedimiento consiste en transformar la forma de expresar los conceptos y sus atributos. Así, se pasa de expresar elementos en un sistema de representación a otro sistema de representación. Las traducciones entre sistemas de representación se consideran útiles para la adquisición de conceptos y afectan al rendimiento en la resolución de problemas (Villegas, 2002). Así mismo, la investigación ha mostrado que son mejores resolutores aquellos estudiantes que desde temprana edad (Friedlander y Tabach, 2001) se mueven fácilmente de un sistema de representación a otro; esto en parte se debe a que el empleo de diferentes sistemas de representación facilita el acceso a una mayor riqueza de estrategias (Cañadas, Castro y Castro, 2008; Cañadas y Figueiras, 2011).

Estos argumentos avalan la necesidad de que en la enseñanza de las matemáticas se trabajen los diferentes sistemas de representación que permiten expresar cada concepto y procedimiento matemático, así como la traducción entre ellos. En este trabajo nos centramos en dos sistemas de representación: el verbal y el simbólico. El primero de ellos está determinado por el uso del lenguaje cotidiano, incluyendo terminología específica del lenguaje matemático académico. El segundo se caracteriza por la expresión escrita de numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra. A las proposiciones generales de relaciones numéricas susceptibles de ser expresadas mediante simbolismo algebraico las denominamos enunciados algebraicos. Un ejemplo de enunciado algebraico representado de forma verbal es “un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”, siendo $x + (x + 1) = y - 2$ una representación simbólica algebraica del enunciado anterior. Ambas expresiones, simbólica y verbal, tienen significados equivalentes.

TRADUCCIONES ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO Y VERBAL

La mayoría de los estudios que atienden a los procesos de traducción en el ámbito del álgebra escolar se centran en los sistemas de representación tabular, gráfico y simbólico (Kieran, 2007). Estos estudios evidencian las dificultades de los estudiantes para mantener la congruencia semántica que caracteriza estos procesos, aunque muestren comprensión de las representaciones inicial y final. Son escasas las investigaciones que centran su atención en la traducción entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico. Autores como Kaput, Sims-Knight y Clement (1985) y Kaput (1989) han destacado que para realizar de forma exitosa dichas traducciones, los estudiantes requieren comprender tanto las variables y las relaciones de dependencia mutua entre ellas descritas en el enunciado verbal, como las características sintácticas de la representación simbólica. Así mismo, estos investigadores proponen que es necesario que alternen las formas sintácticas y semánticas de analizar ambas representaciones durante el proceso de traducción.

Se recomienda que los estudiantes: (a) tomen conciencia de qué relaciones fáciles de expresar mediante una representación verbal, precisan de cierta reorganización an-

tes de ser traducidas al simbolismo algebraico (MacGregor y Stacey, 1993) y (b) reconozcan la mayor precisión del simbolismo algebraico frente al lenguaje verbal y la posibilidad de lecturas secuenciales y no secuenciales de expresiones simbólicas (Socas, 1997).

A continuación atendemos, de forma separada, a ambos sentidos de la traducción: del sistema de representación verbal al simbólico y viceversa.

Del lenguaje verbal al simbolismo algebraico

La traducción del sistema de representación verbal al simbólico es un proceso en el que los estudiantes de educación secundaria presentan numerosas dificultades (Cerdán, 2010; MacGregor y Stacey 1993; Wagner y Parker, 1993; Weinberg, 2007). La mayoría de los estudios que toman como objeto de análisis estos procesos de traducción, se ubican en un contexto de resolución de problemas. En estos casos, el problema se presenta mediante un enunciado verbal y es necesaria su traducción a simbolismo algebraico para su resolución. Se constata que los estudiantes muestran resistencia al uso del simbolismo algebraico y prefieren utilizar estrategias y representaciones de tipo aritmético (Kieran, 2007).

Para la traducción del enunciado verbal al simbolismo algebraico, MacGregor y Stacey (1993) identifican dos formas de abordar este proceso por los estudiantes: (a) realizar una traducción sintáctica, es decir, proceder de izquierda a derecha y traducir palabra por palabra o buscar palabras clave, sin necesidad de atender al significado global del enunciado verbal, y (b) realizar una traducción semántica, es decir, mediante una comparación estática, tratando de expresar de forma simbólica el significado global del enunciado verbal a partir de la construcción de un esquema mental de las relaciones matemáticas descritas en el enunciado dado. Ambas formas de abordaje pueden conducir a una traducción correcta.

Los estudios de Cerdán (2008a, 2008b, 2010) informan sobre algunas de las características que presentan las traducciones de enunciados verbales a simbolismo algebraico, realizadas por estudiantes de bachillerato (16-18 años): (a) los estudiantes proponen diversidad de traducciones; (b) el número de cantidades contenidas en el enunciado verbal no coincide con el número de símbolos diferentes utilizados; (c) tienden a utilizar más letras del mínimo necesario, una de las cuales corresponde a la incógnita del enunciado; y (d) “existe una cierta preferencia por la elección de las cantidades que deben ser designadas con una letra” (Cerdán, 2008b, p. 246).

Investigaciones realizadas con estudiantes de educación secundaria y bachillerato (Cerdán, 2008b, 2010; MacGregor y Stacey, 1993; Weinberg, 2007) reportan traducciones erróneas del sistema de representación verbal al simbólico con una presencia de entre un 30 y un 60 por ciento del total. Uno de los errores más frecuentes es el denominado error de inversión. Este error consiste en representar la relación opuesta a la indicada. Así, por ejemplo, traducen como $6S = P$ el enunciado verbal “hay 6 estudiantes por cada profesor”, donde S es la letra asignada a los estudiantes y P a los profesores. Cerdán (2008a, 2008b, 2010), Ruano, Socas y Palarea (2008), y Rodríguez-Domingo y Molina (2013) identifican posibles causas que subyacen a los errores que

se detectan: (a) utilizar un procedimiento puramente sintáctico al abordar la traducción, (b) elaborar un esquema mental basado en relaciones de comparación entre las variables en lugar de basado en relaciones de igualdad, (c) considerar el signo igual como indicador de una correspondencia o asociación, (d) interpretar los numerales como adjetivos, (e) no comprender el enunciado verbal debido a la compleja sintaxis del lenguaje verbal y (f) poseer una limitada comprensión del concepto de variable y de las características sintácticas de los enunciados simbólicos.

Por lo general, cuando los estudiantes realizan traducciones del sistema de representación verbal al simbólico, la presencia de información no explícita y de información irrelevante o confusa en los enunciados son condicionantes de la dificultad de las traducciones (Bossé, Adu-Gyamfi y Cheetham, 2011a, 2011b). También puede estar influenciada por la presencia y el tipo de contexto implicado en la representación verbal dada. Hasta el momento no existen evidencias claras sobre la naturaleza de esta influencia, pues si bien algunos trabajos la descartan (Wollman, 1983), la familiaridad del contexto es un factor reconocido en los procesos de resolución de problemas (Ambrose y Molina, 2014) e incluso recomendado para dotar de significación concreta al lenguaje matemático (Gómez-Granell, 1989).

Del simbolismo algebraico al lenguaje verbal

La traducción del sistema de representación simbólico al verbal es un proceso sobre el que se han realizado un menor número de investigaciones, utilizándose como metodología en algunos casos la invención de problemas resolubles mediante una ecuación o sistema de ecuaciones (Fernández-Millán, 2013; Isik y Kar, 2012; Resnick, Cauxinille-Marmeche y Mathieu, 1987). Según Fernández-Millán (2013), los estudiantes encuentran más dificultades para proponer un problema cuando la ecuación dada incluye multiplicación de incógnitas o coeficientes diferentes de uno y dos. Además, los estudiantes tienden a asignar diferente valor a una misma incógnita cuando esta aparece en miembros diferentes. Isik y Kar (2012) identifican errores relacionados con el lenguaje, con el realismo del problema y con la falta de relación entre ecuaciones de los sistemas de ecuaciones planteados. Para las ecuaciones de primer grado, los errores identificados se deben a la traducción incorrecta de la notación matemática, la asignación de valores no realistas a las incógnitas de los problemas inventados, el cambio de la estructura de la ecuación en el problema inventado, el uso de simbolismo algebraico en el enunciado del problema y establecer de forma incorrecta una relación parte-todo.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Este estudio se enmarca en una línea de trabajo en la que indagamos en los procesos de traducción de enunciados algebraicos que realizan estudiantes de educación secundaria entre los sistemas de representación simbólico y verbal. Concretamente, en el trabajo que aquí recogemos, nos proponemos como objetivo identificar y clasificar los errores en los que incurren un grupo de estudiantes al realizar dichas traducciones al término de su formación algebraica en la educación secundaria obligatoria.

METODOLOGÍA

Planteamos una investigación de naturaleza exploratoria de tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2003), ante la escasez de estudios previos que aporten información sobre el problema de investigación.

La muestra considerada está compuesta por 26 estudiantes de 4º curso de educación secundaria obligatoria (ESO, 15-16 años) que cursaban la asignatura Matemáticas opción A en un centro público español, siendo su profesora la primera autora de este artículo. El nivel socio-cultural y económico de los habitantes de la zona donde se encuentra el centro educativo es bajo. Muchos de los estudiantes faltaban a clase con frecuencia y presentaban escasa motivación e interés por el aprendizaje y el estudio.

Los estudiantes de la muestra provienen de tres grupos diferentes¹: ocho del grupo A, nueve del grupo B y nueve del grupo C. En función del grupo del que proviene el alumnado, nos referiremos a ellos con un código alfanumérico: desde 1A a 8A, 1B a 9B, y 1C a 9C.

Diseño del instrumento de recogida de datos

Las características de los estudiantes hicieron recomendable diseñar una recogida de datos en la que las traducciones de enunciados algebraicos se presentaran en el marco de una tarea motivadora para ellos. Diseñamos un dominó algebraico que permitía obtener los datos en un contexto de juego. En este dominó, a diferencia del tradicional, no hay piezas dobles ni blancas, y las piezas incluyen enunciados algebraicos expresados de forma verbal o simbólica.

Para la selección de los enunciados incluidos en el dominó, partimos de las expresiones algebraicas que los estudiantes habían trabajado anteriormente en el aula, la mayoría de las cuales provenían del libro de texto usado en clase (de la editorial Anaya). El análisis de las mismas nos permitió fijar diferentes variables de tarea: (a) tipo de relación numérica diferenciando las aditivas de las multiplicativas y, dentro de estas, las potencias; (b) número de letras; (c) secuencialidad² de los enunciados verbales; y (d) inclusión del signo igual, que nos permite distinguir entre enunciados cerrados y abiertos³.

Considerando dichas variables de tarea, seleccionamos los doce enunciados propuestos a los estudiantes (ver tabla 1). Seis enunciados representados de forma verbal y otros seis de forma simbólica, de modo que en cada caso hay un enunciado aditivo, uno multiplicativo, uno de potencia, uno aditivo y multiplicativo, uno aditivo y de potencia, y otro multiplicativo y de potencia. La mitad de los enunciados son abiertos y

¹ En el momento en el que se realizó la recogida de datos de este estudio, la ratio en las aulas era reducida dadas las características del alumnado de este centro educativo.

² Enunciado secuencial es aquel que se corresponde con la lectura secuencial de una expresión algebraica.

³ Enunciado cerrado es aquel que establece una igualdad entre enunciados, es decir, equivale a una ecuación. En caso contrario se dice que un enunciado es abierto.

la otra mitad cerrados. La mitad tienen solo una letra y la otra mitad dos letras. Así mismo, la mitad de los enunciados verbales son secuenciales y la otra mitad no. Denotamos desde E1 hasta E12 a los enunciados considerados, asignando esta numeración comenzando en el primer recuadro de la esquina superior izquierda de la figura, en el sentido de las agujas del reloj.

Tabla 1
Enunciados y sus características

Expresión de los enunciados algebraicos	Relación numérica	Características	Código
Enunciados en sistema de representación verbal			
Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Ad	Secuencial, Cerrado, 2 letras	E3
El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	Mu	No secuencial, Abierto, 2 letras	E1
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número	Po	No secuencial, Cerrado, 1 letra	E11
Un número par menos la cuarta parte de otro número	AdMu	Secuencial, Abierto, 2 letras	E8
El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	AdPo	No secuencial, Abierto, 1 letra	E7
Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo	MuPo	Secuencial, Cerrado, 1 letra	E4
Enunciados en sistema de representación simbólico			
$x + (x + 1) - 4$	Ad	Abierto, 1 letra	E12
$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	Mu	Cerrado, 1 letra	E2
$(\sqrt{x})^y$	Po	Abierto, 2 letras	E9
$x \cdot (x + 1) = 7x$	AdMu	Cerrado, 1 letra	E5
$x^2 - y^2 = 11$	AdPo	Cerrado, 2 letras	E10
$(x \cdot y)^3$	MuPo	Abierto, 2 letras	E6

Nota. Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia.

Recogida de información

Presentamos la tarea a los estudiantes en un folio tamaño A3, simulando un tablero con una partida de dominó concluida, donde cada una de las piezas tiene una parte en blanco (ver figura 1). Estas partes en blanco deben ser completadas por el estudiante, de tal forma que el emparejamiento de piezas resultante sea correcto y la unión se produzca entre enunciados algebraicos expresados en diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, si en una ficha hay un extremo donde está la expresión “ $x + 2$ ”, en la parte de otra ficha que se une a ella debe estar la expresión “un número más dos” u otra equivalente a esta representada verbalmente.

Los estudiantes realizaron el trabajo como una actividad individual, en el aula habitual y durante una sesión de clase de 55 minutos. La primera autora de este artículo, profesora de los estudiantes, fue la responsable de recoger los datos.

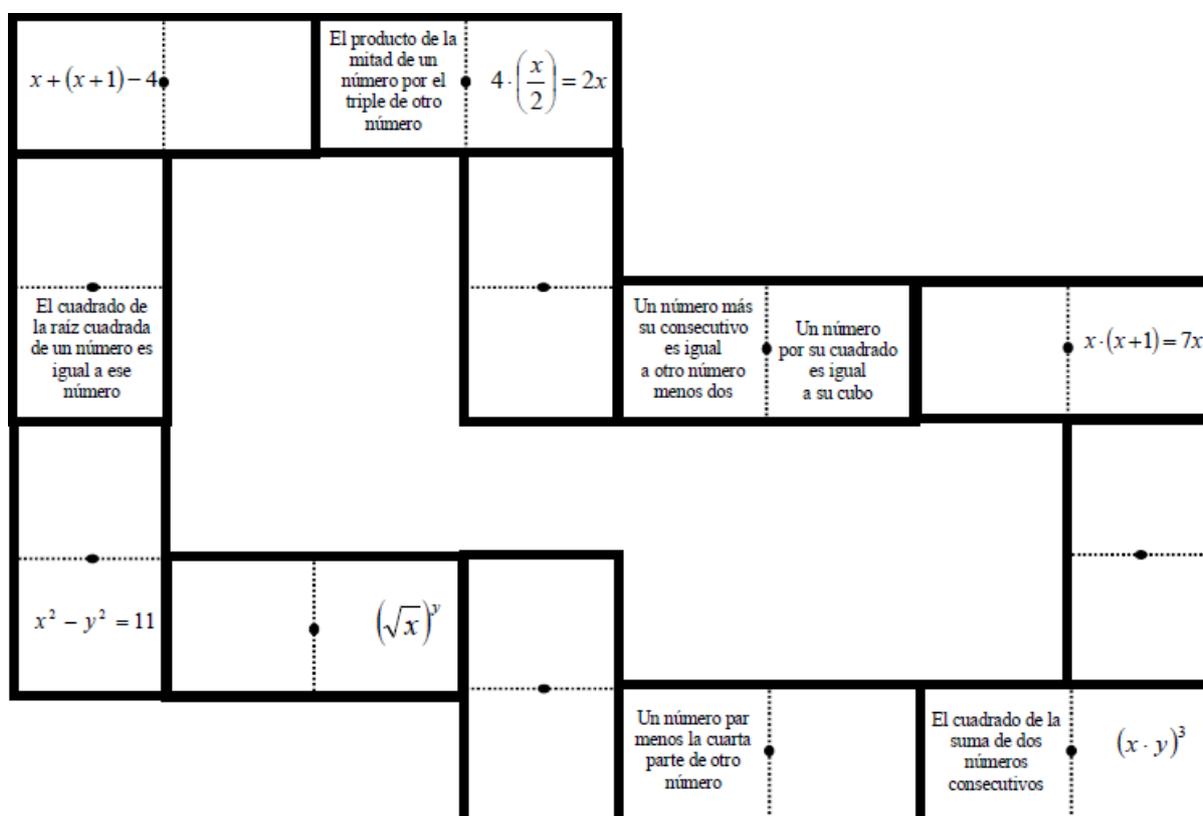


Figura 1. Documento para la primera fase de la recogida de información

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Mediante un proceso inductivo de elaboración de categorías a partir de los datos, siguiendo el método propio de la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), obtenemos la clasificación que recogemos en la tabla 2. Adoptamos la denominación de dos de los tipos de errores identificados de Socas (1997): errores que tienen su origen en la aritmética y errores derivados de las características propias del simbolismo alge-

braico. A continuación, definimos y ejemplificamos dicha clasificación pasando posteriormente a presentar los resultados que se obtienen de la aplicación de la misma.

Tabla 2
Clasificación de errores

Subcategoría o tipo	Código
I. Según la completitud del enunciado	
Incompleto	I.1
Desmedido	I.2
II. Derivados de la aritmética	
Paréntesis	II.1
División – Multiplicación	II.2
Potenciación – Multiplicación	II.3
Suma – Multiplicación	II.4
División – Potenciación	II.5
III. Derivados de las características propias del simbolismo algebraico	
Generalización	III.1
Particularización	III.2
Letras	III.3
Complicación estructural	III.4

Clasificación de los errores en los procesos de traducción

Distinguimos tres tipos de errores: relativos a la completitud del enunciado, derivados de la aritmética y derivados de las características propias del simbolismo algebraico (ver tabla 2). En la tabla 2 también recogemos el código con el que hacemos referencia a cada tipo de error en el que incurren los estudiantes en el resto del trabajo.

Los errores según la completitud del enunciado hacen referencia a la falta o sobra de algún símbolo o palabra para que la expresión, simbólica o verbal, pueda ser considerada correcta. En esta categoría diferenciamos dos tipos de errores.

I.1 Si falta algún elemento, corresponden a la subcategoría de “incompleto”. Distinguimos si en la expresión falta una letra o un número (coeficiente o término independiente). Por ejemplo, expresar verbalmente la traducción del enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ como “un número por su consecutivo es igual a siete” corresponde a un error del tipo incompleto, al faltar una letra para que la traducción sea correcta.

I.2 Si sobra algún elemento, corresponden a la subcategoría “desmedido”. Distinguimos también si los elementos que sobran en la expresión son una letra o un número (coeficiente o término independiente). Por ejemplo, expresar el enunciado verbal “el

producto de la mitad de un número por el triple de otro número” como $x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot 3y$ en simbolismo algebraico, corresponde a un error del tipo desmedido, pues le sobra la primera letra para considerar que la traducción dada es correcta.

Los errores derivados de la aritmética son los que provienen del incorrecto uso o interpretación de los signos u operaciones. Distinguimos cinco tipos de errores o subcategorías (ver ejemplos en tabla 3). La primera, “paréntesis”, corresponde a errores debidos a la mala posición de un paréntesis o a la falta del mismo, que hacen que la expresión algebraica no sea correcta. Las demás subcategorías se refieren a errores en los que las operaciones indicadas son intercambiadas al realizar la traducción. Distinguimos cuatro subcategorías de este tipo: II.2 División–multiplicación, II.3 Potenciación–multiplicación, II.4 Suma–multiplicación y II.5 División-potenciación.

Tabla 3
Ejemplos de errores derivados de la aritmética

Subcategorías	Enunciado propuesto	Ejemplos de traducciones
II.1 Paréntesis	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$(x + (x + 1))^2$
II.2 División–multiplicación	$(x \cdot y)^3$	“Un número entre otro número elevado a tres”
II.3 Potenciación–multiplicación	$(\sqrt{x})^y$	“La raíz cuadrada de un número por otro número distinto”
II.4 Suma–multiplicación	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$x \cdot (x + 1) = y - 2$
II.5 División-potenciación	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$2x - y^4$

Los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico son específicos y asociados al uso del sistema de representación simbólico. En esta categoría diferenciamos cuatro tipos de errores.

III.1 Errores en los que se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto. Por ejemplo, un sujeto que, en vez de especificar que -4 equivale a “se resta el número cuatro”, expresa “se resta un número par”.

III.2 Errores debidos a la particularización de números o relaciones concretas de una expresión general. Así, al traducir simbólicamente el enunciado “un número par”, lo expresan particularizando el número par a un número concreto, por ejemplo 2.

III.3 Error de letra. Cuando los sujetos no diferencian, de manera correcta, el uso de distintas letras en el enunciado. Distinguimos en esta subcategoría el expresar con dis-

tintas letras una misma incógnita o varias incógnitas con la misma letra. Un ejemplo lo encontramos cuando al representar de forma simbólica el enunciado “un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”, el estudiante representa con el mismo símbolo las incógnitas que representan al primer número y al que aparece después de la palabra igual, pese a corresponder a números diferentes.

III.4 Error de complicación estructural. Es aquel en el que los sujetos no interpretan apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo. Por ejemplo, un sujeto que representa simbólicamente el enunciado “un número par menos la cuarta parte de otro número” como $2x - \frac{4}{y}$.

Análisis de los errores detectados

En la tabla 4 presentamos los tipos de errores en que incurren los estudiantes al traducir enunciados, de forma simbólica a verbal, y viceversa; la frecuencia de dichos errores; el enunciado donde se han producido y los sujetos que han incurrido en dichos errores.

Tabla 4

Tipo de errores y frecuencia al realizar las traducciones

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
De simbólico a verbal			
I.1	3 (18%)	E5	3B, 6B
		E10	9B
I.2	1 (6%)	E5	3B
II.3	7 (40%)	E6	4B, 9C
		E9	6B, 9B, 2C, 9C
		E10	4B
III.1	4 (24%)	E2	4B
		E5	4A
		E10	4B
		E12	4B
III.3	2 (12%)	E5	9B
		E12	8B
Total	17 (100%)		
De verbal a simbólico			
I.1	5 (9%)	E7	3A, 3B, 5B, 6B, 1C

Tabla 4
Tipo de errores y frecuencia al realizar las traducciones

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
I.2	4 (7%)	E1	5A, 4B, 6B, 3C
II.1	2 (4%)	E7	3A, 1C
II.2	2 (4%)	E1	5B
		E8	2A
II.3	4 (7%)	E1	7A, 2B, 3B, 7C
II.4	1 (2%)	E4	7B
II.5	1 (2%)	E8	5A
III.2	7 (13%)	E8	2A, 5A, 4B, 5B, 6B, 6C, 7C
III.3	13 (24%)	E1	7A, 3B, 6B, 7B, 8B, 9B
		E3	5A, 7A, 6B, 8B, 9B
		E8	6A, 7A
III.4	15 (28%)	E3	8A, 6C
		E7	2A, 6A, 3B, 5B, 6B, 1C, 9C
		E8	4A, 7A, 8B, 9B, 1C, 5C
Total	54 (100%)		

Un primer análisis de los datos recogidos en la tabla 4 nos desvela que la mayoría de los errores analizados corresponden a las traducciones del sistema de representación verbal al simbólico. Al transformar enunciados del simbolismo algebraico al lenguaje verbal, los estudiantes incurren en: (a) un error proveniente de la aritmética, del tipo II.3 (potenciación-multiplicación); (b) errores según la completitud del enunciado; y (c) dos errores derivados de las características del simbolismo algebraico: tipos III.1 (generalización) y III.3 (letras) al asignar el mismo significado a letras diferentes. En cambio, en las traducciones en sentido contrario se presentan todos los tipos de errores distinguidos en nuestra clasificación con la salvedad del error tipo III.1 (generalización).

Así mismo se observa que solo 8 alumnos incurren en errores en traducciones del sistema de representación simbólico al verbal mientras que 21 de los 26 lo hacen en sentido contrario.

En la figura 2 observamos que la frecuencia de errores sigue un comportamiento similar, según el sentido de traducción, salvo en el caso de errores de tipo II.3 (potenciación-multiplicación) y en los de la categoría III (derivados de las características propias del simbolismo algebraico).

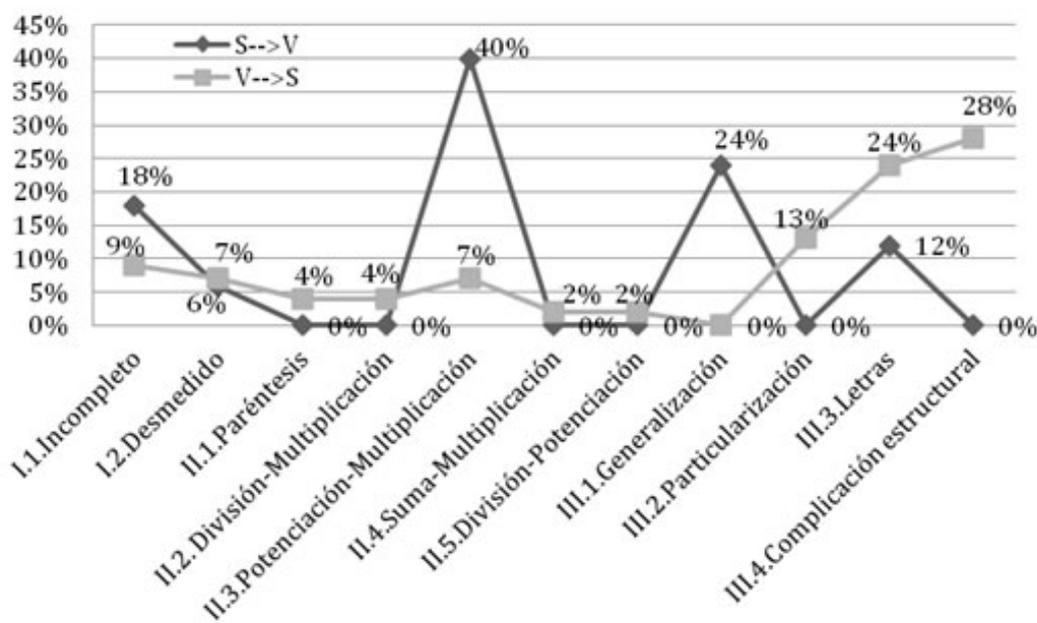


Figura 2. Frecuencia de la presencia de error según el sentido de traducción

Para profundizar en este análisis de los errores, a continuación atendemos por separado a los dos tipos de traducciones realizadas por los estudiantes.

Errores en la traducción del sistema de representación simbólico al verbal

Como hemos señalado, en las traducciones del sistema de representación simbólico al verbal, únicamente se manifiestan cinco tipos de errores de los once considerados en nuestra clasificación. Corresponden a las producciones de ocho alumnos. La mayoría de los errores son del tipo II.3 (potenciación-multiplicación), concentrados en tres de los seis enunciados simbólicos, siendo cinco estudiantes los que incurren en ellos. Los errores tipo III.1 (generalización) le siguen en frecuencia, con cuatro ocurrencias, en cuatro enunciados diferentes, tres de ellas procedentes del mismo estudiante.

Analizamos a continuación los errores en los que incurren los estudiantes al realizar las traducciones, considerando las características de los enunciados. En la tabla 5 se observa que el bajo número de errores en que incurre el alumnado en este tipo de traducciones se distribuye en todos los tipos de enunciados considerados. Por frecuencia, destaca ligeramente el enunciado que involucra potencias (Po) y el enunciado aditivo y multiplicativo (AdMu) (24% y 28% respectivamente).

Tabla 5

Errores según todas las variables de tarea de S → V

Enunciado	Características de los enunciados			Nº errores	Sujetos
E12	Ad	Cerrado	2 letras	2 (12%)	4B,8B
E2	Mu	Abierto	2 letras	1 (6%)	4B

Tabla 5
Errores según todas las variables de tarea de $S \rightarrow V$

Enunciado	Características de los enunciados			Nº errores	Sujetos
E9	Po	Cerrado	1 letra	4 (24%)	6B,9B,2C,9C
E5	AdMu	Abierto	1 letra	5 (29%)	4A,3B,3B,6B,9B
E10	AdPo	Abierto	2 letras	3 (18%)	4B,4B,9B
E6	MuPo	Cerrado	1 letra	2 (11%)	4B,9C
Total				17 (100%)	

Nota. Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia. Cuando un sujeto incurre en más de un error en un enunciado, aparece repetido el estudiante por cada tipo de error distinto.

Si atendemos a los errores distinguiendo si los enunciados verbales propuestos son abiertos o cerrados, vemos que apenas se detecta influencia de esta variable de tarea al presentarse ocho y nueve errores, respectivamente. También cabe mencionar que el número de sujetos que incurren en errores, según esta variable de tarea, es seis para el caso de enunciados abiertos y cinco para el caso de enunciados cerrados.

El número de letras implicadas en el enunciado tampoco se muestra como una variable de tarea influyente en el número de errores. Además, el número de sujetos que incurren en errores, según esta variable de tarea, es seis para el caso de enunciados con solo una letra y cinco para el caso de enunciados con dos letras.

Al considerar de forma combinada las variables de tarea empleadas en el diseño de los enunciados, encontramos que dentro de los enunciados cerrados hay mayor frecuencia de errores si estos tienen solamente una letra (6/17, 35%) que cuando tienen dos letras (2/17, 12%), no detectándose influencia del número de letras cuando los enunciados son abiertos (5/17 frente a 4/17). Atendiendo en primer lugar al número de letras se observa que, si los enunciados tienen dos letras y son cerrados los errores se presentan en menor número (2/17, 12%) que si tienen dos letras y son abiertos (4/17, 24%). En cambio, cuando los enunciados incluyen una única letra, la frecuencia de errores es mayor cuando los enunciados son cerrados (6/17 frente a 3/17).

Errores en la traducción del sistema de representación verbal al simbolismo algebraico

Como hemos señalado, en las traducciones del sistema de representación verbal al simbólico se manifiestan todos los tipos de errores considerados en nuestra clasificación, salvo uno, distribuidos en las producciones de 21 alumnos. Del total de 54 errores en los que incurren los estudiantes en estas traducciones, la mayoría se deben a las características propias del simbolismo algebraico, concretamente errores de tipo III.4 (complicación estructural) (15/54, 28%) y de tipo III.3 (letras) (13/54, 24%). En ambos casos los errores se manifiestan en solo tres de los seis enunciados (ver tabla 3), siendo 8 y 14 estudiantes respectivamente los que incurren en ellos. Los errores tipo

III.3 (letras) son en todos los casos resultado del uso de una misma letra para representar distintas variables.

Destaca que los errores de tipo III.2 (particularización) se produzcan únicamente en el enunciado E8: “un número par menos la cuarta parte de otro número”. Los siete sujetos que incurren en él toman un número par concreto para expresar la relación de manera simbólica.

Considerando las características de los enunciados, en cuanto a la relación implicada en el enunciado, destaca por cantidad de errores el enunciado aditivo multiplicativo (AdMu), seguido del enunciado multiplicativo (Mu) y del que combina una relación aditiva con potencias (AdPo).

Tabla 6

Errores según todas las variables de tarea de $V \rightarrow S$

Enunciado	Características de los enunciados				N°	
					Errores	Sujetos
E3	Ad	Cerrado	2 letras	Secuencial	7(13%)	5A,7A,8A,6B,8B,9B,6C
E1	Mu	Abierto	2 letras	No-secuencial	15 (28%)	5A,7A,7A,2B,3B,3B,4B,5B,6B,6B,7B,8B,9B,3C,7C
E11	Po	Cerrado	1 letra	No-secuencial	0 (0%)	
E8	AdMu	Abierto	1 letra	Secuencial	17 (31%)	2A,2A,4A,5A,5A,6A,7A,7A,4B,5B,6B,8B,9B,1C,5C,6C,7C
E7	AdPo	Abierto	2 letras	No-secuencial	14 (26%)	2A,3A,3A,6A,3B,3B,5B,5B,6B,6B,1C,1C,1C,9C
E4	MuPo	Cerrado	1 letra	Secuencial	1 (2%)	7B
Total					54 (100%)	

Nota. Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia

Si atendemos a los errores distinguiendo si los enunciados verbales propuestos son abiertos o cerrados, en este sentido de traducción sí encontramos diferencias. Si los enunciados son cerrados, se presentan solo 8 de los 54 errores hallados en el trabajo

de 8 de los estudiantes. Sin embargo, la mayoría de los errores (46/54, 85%) se presentan en los enunciados abiertos, en el trabajo de 20 estudiantes.

Observamos también un mayor número de errores en los enunciados con dos letras que en los enunciados con una letra (36/54 vs 18/54), identificándose en el trabajo de 20 y 15 estudiantes respectivamente.

Al distinguir los enunciados por su secuencialidad, detectamos frecuencias similares en el número de estudiantes que incurren en errores (16 y 17 respectivamente) y el número de errores que se presentan (25/54 y 29/54 respectivamente).

Considerando de forma conjunta las variables de tarea utilizadas en el diseño de los enunciados, observamos los resultados que exponemos a continuación. No hay errores si el enunciado es cerrado, con una letra y no secuencial (E11). También se observa que los enunciados en los que se presentan menos errores son los que corresponden a identidades algebraicas (E11 y E4).

CONCLUSIONES

Como hemos puesto de manifiesto en el apartado anterior, algo menos de la tercera parte de los estudiantes participantes incurrieron en errores cuando los enunciados propuestos estaban expresados mediante simbolismo algebraico. Presentaron una frecuencia similar en las tres grandes categorías de errores de la clasificación utilizada (según la completitud del enunciado, derivados de la aritmética, y derivados de las características propias del lenguaje algebraico). La frecuencia y diversidad de errores así como el número de estudiantes que incurren en ellos es mayor cuando los enunciados se encuentran en el sistema de representación verbal. En estos casos, el número de errores es notablemente más destacado en los clasificados como derivados de las características propias del simbolismo algebraico.

La baja presencia de errores según la completitud del enunciado, pone de manifiesto, en este alumnado, competencia para reconocer la estructura de expresiones simbólicas que les facilita no incurrir en la omisión o inclusión excesiva de elementos en los enunciados algebraicos expresados de forma simbólica. Los errores derivados de la aritmética, presentes con mayor frecuencia que los anteriores, sugieren la necesidad de que sean explícitamente abordados en la enseñanza ya que ponen de manifiesto lo que consideramos un obstáculo en el progreso de su comprensión: una inadecuada interpretación o confusión de operaciones implicadas en los enunciados.

Los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico destacan por su frecuencia en las traducciones del sistema de representación verbal al simbólico. Estos errores, en la mayoría de los casos, están asociados a la complejidad estructural del simbolismo algebraico y al uso de letras, con cierta presencia de errores debidos a la particularización de términos de las expresiones. En cambio, en las traducciones en sentido contrario detectamos el uso de un mismo signo literal para representar cantidades desconocidas diferentes. Pedir al estudiante que precise qué representa cada letra puede ser clave para ayudarle a detectar y corregir este tipo de errores.

En el contexto de la resolución de problemas, González-Calero, Arnau y Puig (2013) han observado que dicha precisión no es habitual en los procesos de traducción que realizan los estudiantes de secundaria y que la ambigüedad con la que definen las letras implicadas es la causa de algunas de las dificultades que encuentran en la resolución de problemas que requieren ecuaciones algebraicas.

En la traducción de expresiones dadas simbólicamente, los enunciados cerrados son los que suponen mayores dificultades a los estudiantes, especialmente si incluyen una letra. En el caso de las traducciones en sentido contrario, es en los enunciados abiertos y en los enunciados con dos letras en los que se registra un mayor número de errores y donde mayor número de estudiantes incurren en ellos. La secuencialidad de los enunciados no se identifica como una variable de tarea condicionante de la dificultad de la traducción. Destacan las identidades algebraicas por presentar un menor número de errores.

La información de la presencia de las variables de tarea consideradas en nuestra investigación puede ser de utilidad para los docentes y para los editores de libros de texto ya que les puede permitir dirigir la atención a características de las tareas que supongan dificultad para los procesos de traducción de los estudiantes e incrementar la práctica de traducciones en las que estén implicadas.

Es relevante que se presente una mayor frecuencia de errores en aquellas traducciones que más se trabajan en la práctica escolar: la traducción del sistema de representación verbal al simbólico. Una posible explicación de este hecho es que los estudiantes aborden esta traducción de forma semántica y creen una estructura cognitiva de la situación, diferente a la expresada por el enunciado verbal. Este fenómeno ha sido observado en los procesos de traducción implicados en la resolución de problemas manifestándose en la modificación del enunciado verbal, afectando a su significado, al realizar la interpretación del mismo (Mitchell, 2001). Se interpreta como resultado de la interacción entre la relativa ambigüedad del lenguaje verbal y la relativa precisión del lenguaje matemático. En este estudio los enunciados considerados carecen de referencias a un contexto no matemático y, por tal motivo, presentan una menor ambigüedad en su significado. No obstante, se hace necesario explorar estos procesos de traducción solicitando a los estudiantes la descripción en voz alta de sus procesos de pensamiento para identificar si el fenómeno descrito por Mitchell pueda ser la explicación de la alta presencia de errores relativos a las características propias del simbolismo algebraico.

Consideramos que la enseñanza podría hacer uso de la mayor facilidad para traducir enunciados algebraicos dados en simbolismo algebraico a su representación verbal, que evidencian los estudiantes como apoyo para el desarrollo de su comprensión del simbolismo algebraico y la mejora de los procesos de traducción inversos. Desde la perspectiva de la invención de problemas, se puede aprovechar esta mayor facilidad para que sean los estudiantes los que propongan problemas a partir de enunciados algebraicos expresados simbólicamente y, posteriormente, abordar la traducción del sistema de representación verbal al simbólico partiendo de dichos problemas. El trabajo integrado de invención y resolución de problemas puede ser de utilidad para ayudar a

los estudiantes a tomar conciencia de la mayor precisión y capacidad sintética del simbolismo algebraico frente al lenguaje verbal (Goldin, 2002), las cuales identificamos como dos de las causas de los errores más persistentes de entre los detectados — los errores debidos a la complejidad estructural del simbolismo algebraico— que se manifiestan especialmente en las traducciones del sistema de representación verbal a simbólico.

Reconocemos que nuestro trabajo presenta una limitación, al estar restringida la recogida de datos a un grupo de 26 estudiantes y un total de 12 enunciados. Se requiere realizar posteriores estudios que permitan confirmar las observaciones recogidas. La categorización elaborada, que ha sido de utilidad para el análisis de los errores realizado, es un aporte de este estudio de utilidad para posteriores investigaciones que continúen indagando en los procesos de traducción de enunciados algebraicos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

- Ambrose, R. y Molina, M. (2014). Spanish/English bilingual students' comprehension of story problem texts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(6), 1469-1496. DOI 10.1007/s10763-013-9472-2.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. y Cheetham, M. R. (2011a). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(3), 113-133.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. y Cheetham, M. (2011b, June 15th). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*. Descargado de <http://www.cmit.plymouth.ac.uk/journal/default.htm>.
- Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Description of a procedure to identify strategies: the case of the tiles problem. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. (Vol. 2, pp. 257-264). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.
- Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, 34(4), 409-425.
- Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada, España: Comares.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

- Cerdán, F. (2008a). *Estudio sobre la familia de problemas aritméticos – algebraicos*. Valencia, España: Server de Publicacions de la Universitat de València.
- Cerdán, F. (2008b). Las igualdades producidas en el proceso de traducción algebraico: estudio de las igualdades correctas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: SEIEM.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99-110.
- Corbin, J. y Strauss, A. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Londres, Reino Unido: Sage.
- Fernández-Millán, E. (2013). Invención de problemas por estudiantes de secundaria: evaluación de su conocimiento sobre simbolismo algebraico (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/2148/>
- Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. En A. A. Cuoco (Ed.), *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VI: NCTM.
- Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 3-4, 5-16.
- González-Calero, J. A., Arnau, D. y Puig, L. (2013). Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao, España: SEIEM.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ª ed). México, DF: Mac Graw Hill.
- Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Nueva York, NY: MacMillan Publishing Company.
- Isik, C. y Kar, T. (2012). The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations. *Australian Journal of Teacher Education*, 37(9), 93-113.

- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.
- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). Nueva York, NY: MacMillan.
- Kaput, J., Sims-Knight, J. y Clement, J. (1985). Behavioral objections: A response to Wollman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 56-63.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 217-232.
- Mitchell, J. M. (2001). Interactions between natural language and mathematical structures: The case of "wordwalking". *Mathematical Thinking and Learning*, 3(1), 29-52.
- Resnick, L., Cauxinille-Marmeche, E. y Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. En J. Slodoba y D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp.169-203). Oxford, Reino Unido: Science Publications.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-60). Barcelona, España: Horsori.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rodríguez-Domingo, S. y Molina, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 111-118). Granada, España: Comares. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/5840/>
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.

- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horso-ri.
- Villegas, J. L. (2002). *Representaciones en resolución de problemas: un marco de análisis de protocolos* (Trabajo de Investigación Tutelada). Universidad de Granada, España.
- Wagner, S. y Parker, S. (1993). Advancing algebra. En P. S. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (pp. 119-139). New York, NY: Macmillan.
- Weinberg, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. En T. Lamberg, T. y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the PME-NA* (pp. 164-170). Stateline, NV: University of Nevada.
- Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 169-181.

Susana Rodríguez-Domingo
Universidad de Granada
susana.roddom@gmail.com

Marta Molina
Universidad de Granada
martamg@ugr.es

María C. Cañadas
Universidad de Granada
mconsu@ugr.es

Encarnación Castro
Universidad de Granada
encastro@ugr.es

Recibido: Octubre 2014. Aceptado: Noviembre 2014.