

ASPECTOS ESTRUCTURALES Y CONCEPCIONES PERSONALES SOBRE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

José Antonio Fernández, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo y Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen

El objeto de este trabajo es describir e interpretar las concepciones personales de un grupo de estudiantes de bachillerato acerca del concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados y sintetizados a partir de investigaciones previas. Estos aspectos son: la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, su carácter exacto o aproximado, su consideración como proceso potencialmente infinito o finito en la práctica, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. Los estudiantes respondieron a seis cuestiones para valorar la veracidad o falsedad de enunciados relativos a estos aspectos. Basados en estos aspectos, analizamos y tipificamos respuestas obtenidas en perfiles y destacamos la riqueza de relaciones entre los aspectos estructurales descritos, particularmente la vinculación entre la alcanzabilidad y la rebasabilidad.

Términos clave: límite de una función en un punto; límite finito; concepciones personales; aspectos estructurales del concepto de límite; dualidad objeto/proceso.

Abstract

The purpose of this work is to describe and interpret the personal conceptions related to the concept of finite limit of a function at one point from a group of non-compulsory secondary education students in terms of structural aspects, compiled and synthesized from prior research. These aspects are: the interpretation of the limit notion as an object or a process, its exact or approximate character, its consideration as a potentially infinite or finite in practical process, its reachability and its possibility of being exceeded. Students answered six questions to verify the truthfulness or falsity of statements related to these properties. Based on these structural aspects, we analyze and typify the provided responses in profiles, pointing out the richness of relationships between these structural aspects, highlighting the one between reachability and the possibility of being exceeded.

Keywords: limit of a function at one point; finite limit; personal conceptions; structural aspects of the concept of limit; object/process duality.

La presencia de características estructurales que subyacen en las concepciones de los escolares acerca del concepto de límite, en particular para el límite finito de una función en un punto, está documentada en diversos autores. Así es el caso de la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980) o del carácter inalcanzable y/o irrebachable del valor del límite para una función en un punto (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Schwingendorf, Thomas, Nichols y Vidakovic, 1996; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Fernández, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2012). Aspectos estructurales y concepciones personales sobre límite finito de una función en un punto de estudiantes de bachillerato. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 149-157). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Indagar sobre las relaciones entre las concepciones expresadas por los escolares y las características citadas, ofrece la oportunidad de revisar, actualizar y discutir las interpretaciones hechas por los autores citados.

Este estudio está enfocado hacia la exploración de significados que organizan el concepto de límite, poniendo de manifiesto que las características estructurales mencionadas no han perdido actualidad, que forman parte de las concepciones de los escolares y de los usos del lenguaje. Detectamos también cómo la revisión de estas características contribuye a explicar e interpretar las concepciones específicas y globales de los alumnos, lo cual es objetivo del trabajo.

Antecedentes y Marco Teórico

Tall (1980) enfatiza la riqueza y diversidad de procesos de paso al límite (limiting processes) clasificados en dos tipos, según tradición del Análisis Matemático (Rey Pastor, 1952, pp. 27-30). En primer lugar, procesos de paso al límite continuos, tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad. En segundo lugar, procesos de paso al límite discretos, como ocurre con los límites de sucesiones y series, las expansiones decimales, o la aproximación de áreas de formas geométricas. Los procesos de paso al límite tienen fundamentación métrica, o bien una topológica más general.

Tall identifica que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y, posteriormente, la definición formal, la imagen conceptual se “contamina” con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Los estudiantes conciben, en su mayoría, la noción de límite como un proceso dinámico y no lo identifican con una cantidad numérica (Tall, 1980).

Las técnicas algorítmicas para el cálculo de límites no suelen provocar dificultades a los escolares (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005). Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) pone de manifiesto la naturaleza distinta de estas técnicas respecto a las de los algoritmos aritméticos y algebraicos a las que los escolares están acostumbrados.

Monaghan (1991) estudia la influencia del lenguaje sobre las ideas de los estudiantes con los términos “tender a”, “aproximarse a”, “converger a” y “límite”, en cuanto a su uso referido a diferentes gráficas de funciones y a los ejemplos con los que los escolares explican dichos términos. Nuestro enfoque en este caso es diferente al no pedir a los escolares que definan los términos; estimulamos su uso libre, haciendo las inferencias de significado oportunas a partir de sus producciones, lo cual permite explorar la amplitud y precisión del vocabulario utilizado por los escolares cuando hablan de límite funcional y de los matices que asocian.

Romero (1995) y Blázquez (2000) recogen los avances y limitaciones de los estudiantes frente a los conceptos de número real y límite, respectivamente. La definición que se tome de límite funcional cumple un importante papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje tal como reportan Blázquez, Gatica y Ortega (2009).

Concepciones y Aspectos Estructurales

Consideramos idealmente una *concepción personal* como la descripción que proporciona un sujeto de parte o toda su imagen conceptual, este último término adoptado en el sentido de Tall y Vinner (1981), subyacente a un concepto dado, lo que dichos autores llaman *definición conceptual*, siendo irrelevante la fidelidad entre esa descripción y la comprensión del sujeto. Las definiciones que dan los estudiantes en contextos informales manifiestan sus concepciones personales. Por otra parte, cuando

hablamos de *concepciones locales o específicas* entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual mediante estímulos apropiados, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. Las *concepciones globales* surgen de compilar y sintetizar varias concepciones específicas de un mismo sujeto. Nuestra interpretación trata sobre aquello que entendemos quiere comunicar el sujeto. La triangulación entre investigadores a la hora de interpretar los enunciados proporciona confianza sobre la validez de las interpretaciones.

Llamamos *aspectos estructurales* a aquellas características, propiedades, nociones, términos, etc., documentados en la literatura. Contribuyen a interpretar las concepciones personales, declaradas por los estudiantes de bachillerato sobre la noción de límite. Describimos a continuación tales aspectos, identificando cada aspecto con un código; subrayamos que ninguno de ellos agota el concepto de límite.

- *Dualidad objeto/proceso (O/P)*. Paralelamente a los modelos cognitivos de Cottrill et al. (1996) y Sfard (1991) que postulan la naturaleza dual de un concepto como proceso y objeto, los escolares pueden distinguir entre el “objeto” límite (un número o punto) y el “proceso” que lo origina. Este aspecto trata de dilucidar dónde el estudiante pone el énfasis cuando enuncia su concepto de límite, si en el objeto, en el proceso dinámico (Tall, 1980), o si considera ambos mediante una visión dual.
- *Naturaleza del “objeto límite”: Carácter Exacto/Aproximado (E/A)*. Sierpiska (1987) detectó concepciones que asumen el carácter definido (corresponde a un valor exacto que es posible calcular) o indefinido (sólo conocemos aproximaciones del límite).
- *Naturaleza del “proceso límite”: Carácter infinito potencial/Finito práctico (IP/FP)*. Este aspecto trata de discriminar entre los escolares que enfatizan el carácter finito del proceso (práctico o formal), los que destacan su carácter infinito potencial, o bien, aquellos que aceptan los dos.
- *Propiedad local de la función: Límite Alcanzable/No alcanzable. (Alcanz.)* Este aspecto fue tratado por Cornu (1991) y Monaghan (1991) quienes lo asocian con un uso coloquial de los términos “límite” y “tender”. Consideramos tres sentidos no excluyentes para interpretar la alcanzabilidad del límite: (a) Si la función puede o no tomar el valor del límite en un entorno reducido del punto (un entorno sin incluir el punto); (b) Considerar la alcanzabilidad “real” del límite como término “final” del proceso infinito actual que desencadena; (c) No alcanzabilidad, debida al carácter infinito potencial del proceso práctico, es decir, a la exclusión (provocada por la función o por el algoritmo) de la imagen del punto donde se lleva a cabo el estudio. Añadimos un cuarto sentido: (d) Continuidad / posibilidad de evaluación de la función en el punto. Conjeturamos que los escolares pueden manifestar estos cuatro sentidos.
- *Propiedad local de la función: Acotación superior o inferior por el valor del límite (Reb.)* Consideramos esta propiedad relacionada con la interpretación coloquial del término “límite” (Cornu, 1991; Monaghan, 1991). Un límite es considerado *no rebasable* si acota los valores de la función en el proceso de aproximación, superior o inferiormente según la monotonía creciente o decreciente, respectivamente, de la función en un entorno del punto.

El objetivo de este trabajo es valorar la pertinencia de estos aspectos estructurales para describir y relacionar las concepciones específicas declaradas por los estudiantes de bachillerato encuestados.

Contexto, Participantes y Métodos

Se trata de un estudio descriptivo basado en el método de encuesta con reactivos abiertos, cuyo diseño resumimos a continuación.

Sujetos

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes españoles de primer curso de Bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología, todos del mismo grupo académico. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia se utilizó el libro de texto *Matemáticas I* de la editorial SM y los apuntes propios del profesor.

Instrumento y aplicación

Trabajamos con un cuestionario que incluye seis preguntas de respuesta abierta, que se presentan en dos versiones diferentes, A y B. Los ítems son adaptados de Lauten, Graham y Ferrini-Mundy (1994); sus enunciados se encuentran en el Apéndice.

Las preguntas son de respuesta abierta. Requieren asignar, de manera justificada, los valores verdadero (V) o falso (F) a una afirmación sobre una propiedad relativa al concepto de límite de una función en un punto.

La Tabla 1 incluye una caracterización de los ítems de verdadero/falso en términos de los aspectos estructurales directamente vinculados y descritos en el apartado anterior.

Ítems	Aspectos estructurales				
	O/P	E/A	IP/FP	Alcanz.	Reb.
1.A	X				
2.A					X
3.A			X	X	
1.B				X	
2.B		X	X		
3.B			X		

Tabla 1: Vinculación teórica entre los reactivos de verdadero/falso del instrumento y los aspectos estructurales teóricos

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010/2011. Del total de sujetos, 18 respondieron al cuestionario A y otros 18 respondieron al cuestionario B; el instrumento se aplicó durante una sesión ordinaria en la clase de matemáticas. Durante el trabajo de campo 18 sujetos respondieron a la versión A y otros

18 sujetos a la versión B. La aplicación se llevó a cabo en una sesión ordinaria de clase de matemáticas.

Análisis de datos

La instrucción previa recibida por los estudiantes justifica la adecuación de los reactivos utilizados para que los estudiantes puedan contestarlos, siendo aceptable las respuestas en blanco o atípicas.

Para la interpretación fundada de las concepciones personales de los estudiantes buscamos características estructurales que las discriminen, sin destacar errores o aciertos. Utilizamos como categorías de análisis los aspectos estructurales antes presentados.

Recogemos y organizamos las descripciones que hacen los sujetos en respuesta a los reactivos de Verdadero/Falso. Clasificamos según perfiles basados en el o los aspectos estructurales teóricos principales asociados a cada reactivo, las respuestas recogidas en cada pregunta según afinidad de los argumentos propuestos. La existencia de subperfiles permite añadir matices al perfil correspondiente no contemplados a priori – los sujetos proporcionan información adicional a la que se solicita– por eso utilizaremos el término “empírico” para indicar que emergen de las respuestas de los sujetos.

Por razones de espacio, ejemplificaremos el análisis de las respuestas asociadas a un ítem en particular, aunque la discusión de los resultados la realizaremos de manera global.

Análisis de un ítem particular

Ilustraremos el análisis para el ítem 1.A cuyo enunciado es “Un límite describe cómo se mueve una función cuando x se mueve hacia cierto punto”. El término clave *describe cómo* relaciona “teóricamente” este ítem al aspecto estructural *objeto/proceso (O/P)*, por lo que diremos que es *principal* respecto a dicho aspecto.

Así los perfiles de respuesta que mostramos en la tabla 2 se denominan según las variantes del aspecto estructural considerado. Mientras que los subperfiles, según el caso, denotan otro/s aspecto/s estructurales diferentes, en este caso, los aspectos estructurales *Exacto/Aproximado (E/A)* y *Alcanzabilidad (Alcanz.)*, por lo que el ítem 1.A es secundario respecto a tales aspectos estructurales, y por tanto subordinados al aspecto estructural O/P.

Perfiles	Descripción de los perfiles
Perfil I (Proceso)	Opción verdadero. El límite origina y describe un proceso dinámico. Ejemplo: “ <i>Verdadero: Sí, ya que el límite nos da todos los puntos posibles que puede adquirir la función</i> ”.
Perfil II (Objeto/Proceso)	Opción verdadero. Se enfatiza el límite como el resultado del proceso dinámico que, implícitamente, también es parte del concepto; expresa una concepción dual de objeto y proceso. Ej. “ <i>Verdadero: Porque el límite describe hacia qué punto se acerca la función</i> ”
Perfil III (Objeto)	Opción falso. Se diferencia el objeto límite del proceso dinámico que lo origina. Ej. “ <i>Falso. Un límite describe hacia dónde tiende la función $f(x)$</i> ” Esa diferencia se hace patente

Perfiles	Descripción de los perfiles
	cuando se establece que el proceso dinámico no alcanza el valor del límite y en la consideración del carácter aproximado de su valor Subperfil III.1 (No Alcanzable / Aproximado) . Ej. “Falso: Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto”.

Tabla 2: Perfiles y subperfiles de argumentos para el ítem 1.A

Ejemplos de vínculos entre los aspectos estructurales teóricos propuestos

Como muestra la Tabla 2, la respuesta al ítem 1.A “Falso. Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto” remarca la distinción entre el objeto límite y el proceso correspondiente, por razón de la no alcanzabilidad.

No podemos esclarecer si el término “aproximado” se refiere a (1) la acción o efecto de aproximar el valor exacto límite; (2) el valor del límite es aproximación de otro “valor exacto”, por lo tanto, no existe una vinculación clara entre este aspecto y el carácter exacto/aproximado del valor. La respuesta que este sujeto propone para el ítem 2.A “Verdadero. Si el límite de una función es 4 un resultado de esa función no puede ser 5” parece indicar un sentido (1), luego interpretamos que el valor del límite es exacto pero “aproximado por” los valores de la función correspondiente sin llegar a alcanzarlo, y en este caso a rebasarlo.

Discusión

La Tabla 3 resume las distintas vinculaciones que se dan entre los aspectos estructurales prefijados y los ítems correspondientes que provocan tales vínculos.

Aspectos estructurales principales	Aspectos estructurales secundarios				
	O/P	E/A	IP/FP	Alcanz	Reb
O/P		1.A		1.A	
E/A	2.B		2.B		
IP/FP	2.B, 3.B	3.B		3.B, 3.A ¹	
Alcanz			1.B, 3.A ¹		1.B
Reb			2.A	2.A	

Tabla 3: Vinculación empírica entre los aspectos estructurales teóricos y los ítems secundarios implicados

Observamos que ningún aspecto estructural es considerado de manera aislada por los escolares y se establecen relaciones relevantes entre ellos. Las relaciones más llamativas son las siguientes:

¹ El ítem 3.A es principal para los aspectos estructurales *IP/FP* y *Alcanz.*, pero algunos sujetos ponen de manifiesto la equivalencia intrínseca entre el carácter infinito potencial del proceso y la no alcanzabilidad del límite, por ejemplo, “El límite no se puede alcanzar, pero sí que se aproxima la cifra cada vez más a él”.

- *OP-Alcanz-E/A*. Esta relación está ejemplificada en el apartado anterior.
- *Reb-Alcanz-IP/FP*. Aparte de la relación (IP/FP-Alcanz) dada por el ítem 3.A explicada al pie de página, el ítem 2.A induce una relación más compleja entre estos tres aspectos estructurales contemplada en la respuesta “*Verdadero: Porque un límite es un punto al que una función se aproxima infinitamente sin llegar a él*”.
- *Alcanz-Reb*. Entre estos dos aspectos se establece otro vínculo dado por el ítem 2.B, cuando un sujeto admite la alcanzabilidad del límite pero no su rebasabilidad. Por ejemplo, “*Un límite es un número que la función alcanza pero no lo sobrepasa*”, esto concuerda con resultados de Cornu (1991).
- *OP-E/A*. El ítem 2.B provoca también que los sujetos enfatizen la naturaleza del límite como un objeto, y dentro de esta naturaleza su carácter exacto, como se puede interpretar de la respuesta: “*Falso. Un límite, es un tope numérico y no es aproximativo, sino concreto*”. Su carácter procesual: “*Falso: Un límite es una aproximación que puedes hacer hasta cierto punto de precisión*”; y su naturaleza dual como en: “*Verdadero. Los límites pueden ser infinitos aproximándose a un valor que cada vez será más preciso [límite se considera como un proceso]. O también puede ser un número exacto, que cuanto más nos aproximamos más concreto será este [límite se considera un objeto]*”, además pone de manifiesto que la naturaleza exacta-aproximada del límite es relativa. Esta interpretación tiene sentido en el modelo de Sfard (1991).

La Figura 1 muestra un diagrama que detalla las vinculaciones entre los aspectos estructurales teóricos y los reactivos que las establecen. Las flechas unidireccionales expresan el sentido del vínculo, es decir, el aspecto estructural “origen” provoca vía un reactivo otro aspecto estructural “extremo”. Mientras que las flechas bidireccionales muestran que un reactivo provoca argumentos que se interpretan en términos de ambos aspectos estructurales.

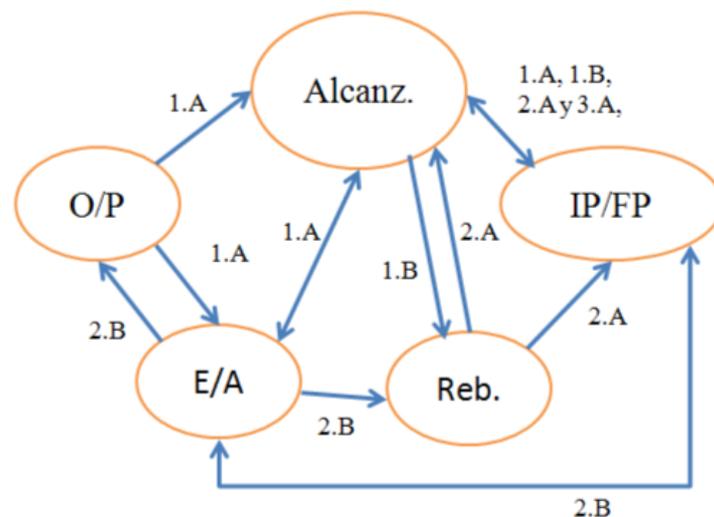


Figura 1: Diagrama de vínculos establecidos empíricamente entre los aspectos estructurales teóricos

Conclusiones

Se hace patente que los reactivos utilizados han recogido información adicional a la que en principio fueron diseñados y que muestran la riqueza de conexiones que los escolares establecen entre unos aspectos estructurales teóricos y otros. A nivel de concepciones específicas, los escolares tratan con gran amplitud los aspectos teóricos correspondientes, mientras que en cuanto al carácter global, las concepciones personales de los escolares giran en torno a una concepción de límite como un número exacto generado por un proceso infinito potencial ontológicamente diferente y que se caracteriza como inalcanzable y no rebasable, concordando con Cornu (1991), Monaghan (1991) y Sierpinska (1987), no obstante, añadimos evidencias particulares referidas a la dualidad objeto/proceso de Tall (1980) y Sfard (1991).

Las relaciones establecidas por los escolares entre los aspectos estructurales propuestos justifican la necesidad de modificaciones en la planificación de la enseñanza de este concepto, sobre todo las que implican el carácter infinito potencial del proceso, la no alcanzabilidad del límite, su no rebasabilidad y el carácter aproximado de su valor.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del 3^{er} Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

Referencias

- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid.
- Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 12(1), 145-168.
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Schwingendorf, K., Thomas, K., Nichols D. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Edwards, B.S., Dubinsky, E. y McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25.
- Gray E.M. y Tall, D.O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141.
- Lauten, A.D., Graham, K. y Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13(2), 225-237.
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 1-36.

- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.
- Tall D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. En Karplus, R. (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). Berkeley.
- Tall, D. O y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Apéndice: Ítems incluidos en los cuestionarios

Cuestionario A.

- (1.A.) Un límite describe cómo se mueve una función $f(x)$ cuando x se mueve hacia cierto punto.
- (2.A.) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.
- (3.A.) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.

Cuestionario B.

- (1.B.) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.
- (2.B.) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera
- (3.B.) Un límite es un número al cual los valores de una función $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x .