Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria

Hernán R. Rivas Catricheo

Tesis Doctoral

Universidad de Granada

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Granada, Junio de 2014

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Hernán R. Rivas Catricheo
D.L.: GR 2042-2014
ISBN: 978-84-9083-227-1

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor:
D.L.: En trámite
ISBN: En trámite

Universidad de Granada

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los doctores Juan Díaz Godino y José Pedro Arteaga Cezón, que presenta D. Hernán R. Rivas Catricheo para optar al grado de Doctor en el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Fdo. Hernán R. Rivas Catricheo

Vº Bº de los Directores:

Fdo: Juan Díaz Godino   Fdo: José Pedro Arteaga Cezón

El doctorando, Hernán R. Rivas Catricheo y los directores de la tesis, Dr. Juan Díaz Godino y Dr. Pedro Arteaga Cezón garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, a 23 de Junio de 2014.

Fdo. Hernán R. Rivas Catricheo

Vº Bº de los Directores:

Fdo: Juan Díaz Godino

Fdo: José Pedro Arteaga Cezón

RECONOCIMIENTOS:

Esta investigación ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, (Ministerio de Economía y Competitividad, España), proyecto EDU2010-14947, y del Programa de Capital Humano Avanzado de la Comisión Nacional Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile, dentro del Grupo de Investigación FQM-126, Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística (Junta de Andalucía).

AGRADECIMIENTOS:

A Dios. Por su infinito amor y permanente compañía, y por manifestar en mi experiencia personal su existencia y naturaleza.

Al Dr. Juan Díaz Godino. Por haber aceptado la dirección de esta tesis doctoral y por su apoyo constante en el camino recorrido. Agradezco con toda sinceridad su excelente disposición y el tiempo dedicado; su rol como director y su capacidad para promover una actitud investigativa y de reflexión fundada, han sido fundamentales para llevar a buen término el desarrollo de esta investigación. Me siento honrado de haber trabajado con un investigador de tan alta cualificación profesional y calidad humana.

Al Dr. José Pedro Arteaga Cezón, quien junto al Dr. J. D. Godino, han dirigido esta investigación. Sus aportaciones y el trabajo conjunto han sido fuente de aprendizaje y han resultado claves para el cumplimiento de los objetivos y el logro de resultados obtenidos.

A los profesores y profesoras del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Por la formación aportada en cada uno de los cursos y seminarios; éstos han sido una instancia de crecimiento profesional que se ve reflejada en el presente trabajo.

A la Pontificia Universidad Católica de Chile; en particular, a mis colegas y amigos de la Sede Villarrica. Por el apoyo recibido y la confianza que me han dado.

A mi madre, hermanos, hermanas y a toda mi familia, por su cariño y preocupación. Gracias por sus palabras y por los contactos que hemos tenido, me hacen sentir que están cerca y le dan un sentido especial a los momentos cotidianos de mi vida.

A Evelyn, por compartir su vida conmigo. Su amor y apoyo constante, me han dado fuerzas para seguir adelante e ir logrando nuevas cosas en mi vida. Agradezco también a sus padres y familia, por su comprensión y por ser un soporte fundamental para mi hija.

Finalmente, agradezco a mis amigos y amigas de infancia con quienes he crecido. De ellos he aprendido valores importantes y serán siempre un motivo de alegría.

RESUMEN

Esta investigación está centrada en el desarrollo y aplicación de la teoría de la idoneidad didáctica en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). El desarrollo se hace en dos direcciones: (1) la elaboración de sistemas de indicadores empíricos de idoneidad a partir del análisis del contenido de documentos curriculares y resultados de las investigaciones didácticas; (2) la aplicación de las distintas facetas de la idoneidad y las herramientas de análisis didáctico del EOS a la investigación de diseño o ingeniería didáctica. Ambos estudios se realizan en el contexto de la formación estadística de futuros profesores de educación primaria.

La evaluación de la idoneidad didáctica de planes y procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere disponer de instrumentos adecuados que orienten de manera fundamentada dicha evaluación. En el primer estudio describimos una metodología para la mejora progresiva de instrumentos de evaluación de la idoneidad de procesos de instrucción matemática/estadística mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares. Las unidades de análisis son clasificadas según las facetas y componentes propuestos en la Teoría de la Idoneidad Didáctica para identificar normas e indicadores de idoneidad, los cuales son confrontados con el sistema propuesto por dicha teoría, a fin de identificar concordancias y complementariedades. La guía desarrollada para la valoración de la idoneidad didáctica se aplica al análisis de un caso de plan de formación en estadística de futuros profesores.

En el segundo estudio se desarrolla una visión ampliada de la ingeniería didáctica, entendida como una clase específica de investigación basada en el diseño. Como método de investigación, la ingeniería didáctica busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático. Este conocimiento didáctico se refiere necesariamente a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico. En esta investigación se propone un desarrollo de las fases de la ingeniería didáctica fundamentadas en el EOS. Estas fases (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación), analizadas según las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica se ejemplifican en un estudio de caso sobre enseñanza de la estadística para la formación inicial de profesorado de Educación Primaria. Las herramientas teóricas utilizadas permiten revelar hechos didácticos significativos, que determinan, por un lado, pautas para la determinación de trayectorias didácticas idóneas para la enseñanza del tópico estadístico y, por otro lado, fundamentos para valorar la ingeniería didáctica como una metodología de la investigación extrapolable a distintos enfoques teóricos.

ABSTRACT

This research is focused on the development and application of didactical suitability theory under the onto-semiotic approach of mathematical knowledge and instruction (OSA). The development of this work is done in two directions: (1) building systems of empirical indicators suitability from content analysis of curricular documents and educational research results; (2) the application of the different suitability facets and the OSA theoretical tools for didactical analysis to design research or didactical engineering. Both studies were performed in the context of statistical education of prospective primary school teachers.

Assessing the didactical suitability of teaching plans and teaching and learning mathematical processes requires elaborating adequate instruments to guide in a founded manner this assessment. In the first study we describe a methodology for the progressive improvement of assessing instruments for the suitability of mathematical / statistical instruction processes through content analysis of curriculum proposals. The units of analysis are classified according to the facets and components proposed in the Didactical Suitability Theory to identify suitability standards and indicators, which are confronted with the system proposed by this theory, with the aim of identifying commonalities and complementarities. The guide developed for assessing the didactical suitability is applied to the analysis of a formative plan to teach statistics for prospective primary school teachers.

In the second study a broader vision of didactical engineering is developed, understood as a specific kind of design-based research. As a method of research, didactical engineering seeks to create knowledge about how the mathematical knowledge is built and communicated. This didactical knowledge necessarily refers to a theoretical framework, which is the basis in the different phases of the methodological process. In this research, a development of the didactical engineering phases founded on the OSA is proposed. These phases (preliminary study, design, implementation and evaluation), analysed according to the epistemic, cognitive, affective, interactional, mediational and ecological dimensions have been exemplified in a case study on teaching statistics for the initial training of prospective primary school teachers. The theoretical tools used allow revealing didactical significant facts, which determine, first, guidelines for determining suitable educational trajectory for teaching statistical topics and, secondly, foundations to asses didactical engineering as a research methodology extrapolated to different theoretical approaches.

ÍNDICE

CAPÍTULO 3

CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA Y SU APLICACIÓN A UN PLAN DE ESTUDIOS

CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE ESTUDIO IMPLEMENTADO

CAPÍTULO 6.

SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

ANEXOS

INTRODUCCIÓN

La estadística es una de las áreas de la matemática escolar cuya enseñanza ha experimentado un desarrollo importante durante los últimos años. Estos contenidos se han incorporado de forma generalizada al currículo de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria en la mayoría de los países desarrollados, como así también en diferentes países en vías de desarrollo. A nivel internacional, la propuesta curricular sobre los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) incluye, dentro de los estándares de contenido, el estándar Análisis de datos y Probabilidad, en el cual se propone un conjunto de capacidades que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían contemplar. Por otra parte, las Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE), proporcionan un marco conceptual para la educación estadística en la etapa Pre-K-12 (Infantil hasta Secundaria), centrado en la resolución de problemas de análisis de datos que promueven distintos niveles de alfabetización estadística (Franklin y cols., 2005). En España, los actuales diseños curriculares para la enseñanza obligatoria (MEC 2006a; MEC 2006b) incluyen un bloque específico sobre estadística y probabilidad en todos los niveles de enseñanza, tanto de educación primaria como secundaria. En la enseñanza primaria, estos contenidos se encuentran incluidos en el bloque 4, Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

El desarrollo que ha experimentado la estadística en los currículos escolares, ha despertado el interés de la comunidad de investigadores por realizar estudios sobre la temática, siendo uno de sus focos, la preparación de los profesores para enseñar la disciplina (Batanero, Burrill y Reading, 2011). Entre estas investigaciones, la mayoría de los trabajos han estado centrados en identificar "dificultades" específicas (cognitivas, afectivas, instruccionales) que manifiestan los profesores en ejercicio o en formación para abordar con seguridad los objetivos en el aula. Sin embargo, la implementación de las directrices curriculares sobre educación estadística en las aulas, requiere que los profesores de matemáticas reciban la formación adecuada. Determinar cómo debe ser dicha formación para que los profesores estén capacitados para desarrollar la comprensión y uso de las ideas estadísticas por parte de los escolares es un problema abierto en el campo de investigación sobre educación estadística.

En nuestra investigación abordamos, dos problemas relativos a la formación de profesores sobre estadística. En primer lugar, la construcción de instrumentos de evaluación de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción estadística mediante el *análisis de contenido* de propuestas curriculares y resultados de las investigaciones en educación estadística. En segundo lugar investigamos el diseño, análisis y valoración de un proceso de enseñanza-aprendizaje sobre estadística con futuros profesores de educación primaria aplicando una modalidad de *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989; 2011) o *investigación de diseño* (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer, y Schauble, 2003; Kelly, Lesh y Baek, 2008) propuesta por Godino y cols. (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013; Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2013). La investigación se realiza aplicando herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) teniendo en cuenta las facetas *epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional* (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011), tanto en la construcción del instrumento como en el proceso de ingeniería didáctica. En este último caso, aplicamos además las nociones de *práctica matemática, configuración de objetos y procesos matemáticos*, *configuración y trayectoria didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica*.

En cuanto a su estructura, la investigación está conformada por cinco capítulos. En el capítulo 1, damos a conocer los principales modelos sobre el conocimiento profesional del profesor de matemática y algunas propuestas teóricas sobre formación de profesores en estadística y su didáctica. Hacemos también una revisión de los principales estudios que han estado centrados en la formación de profesores de educación primaria para enseñar estadística, realizando una clasificación de la literatura en tres grandes temas: estudios sobre el conocimiento del contenido de estadística, estudios sobre didáctica de la estadística y estudios sobre actitudes y creencias. Finalmente, a partir de los resultados de las investigaciones identificamos los principales desafíos que presenta la formación de los profesores de educación primaria para enseñar estadística, teniendo en cuenta las seis dimensiones de la idoneidad didáctica que se utilizan en el modelo didáctico-matemático del conocimiento del profesor basado en el EOS (Godino 2009): dimensiones *epistémica-ecológica*, *cognitiva-afectiva* e *interaccional-mediacional*.

En el capítulo 2, presentamos el problema de investigación, el marco teórico y la metodología. En la descripción del problema abordamos elementos de su justificación y puntualizamos las hipótesis, preguntas de investigación y objetivos del estudio; en el marco teórico presentamos una síntesis de las principales nociones desarrolladas en el EOS, describiendo su aplicación en las diferentes fases de la investigación; y en la descripción de la metodología damos cuenta del tipo de investigación y profundizamos en la metodología, técnicas e instrumentos aplicados en cada estudio (el estudio 1 corresponde a la construcción del instrumento de evaluación de idoneidad didáctica y el estudio 2 al desarrollo de la ingeniería didáctica).

En el capítulo 3, presentamos la construcción del instrumento de valoración de la idoneidad didáctica y su aplicación a un plan de formación estadística de profesores de educación primaria. Para ello, inferimos indicadores de idoneidad didáctica a partir de principios y orientaciones del currículo escolar nacional (MEC, 2006a; MEC 2006b) e internacional (Franklin y cols., 2005; NCTM, 2000); luego, confrontamos dichas normas con la literatura investigativa, en particular con la propuesta de indicadores de idoneidad propuestos en Godino 2011; y finalmente, aplicamos los indicadores inferidos en la valoración de un plan de formación de profesores a fin de conocer su aplicabilidad y valorar de forma objetiva la idoneidad del plan de formación .

En el capítulo 4, se presenta el diseño de un proceso de instrucción para la formación estadística de profesores de educación primaria. Este proceso se realiza considerando dos fases: *estudio preliminar* y *diseño de la trayectoria didáctica.* En la primera fase, la indagación se realiza teniendo en cuenta las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional (interaccional y mediacional). En la segunda fase, se realiza la selección y secuenciación de los problemas, se presenta la solución esperada y se realiza el *análisis a priori* de las situaciones propuestas. Cada problema es interpretado como una *configuración didáctica* y su secuenciación da origen a la *trayectoria didáctica* diseñada. En el análisis a priori se aplican las nociones de *prácticas* y de *objetos y procesos* desarrolladas en el EOS. El diseño de la trayectoria didáctica incluye además un análisis de las normas que condicionan el diseño.

En el capítulo 5, se presenta la descripción y análisis del proceso de estudio implementado y se realiza el *análisis retrospectivo* del diseño. La descripción y análisis de la implementación se efectúa aplicando las nociones de *configuración, subconfiguración* y *trayectoria didáctica* y tiene como fin último la clasificación e interpretación de “hechos didácticos significativos” que interesa analizar de acuerdo a los objetivos de la investigación. El análisis retrospectivo comienza con el *análisis a* *posteriori* de cada problema usando las mismas herramientas teóricas del análisis a priori; este análisis se completa con algunas reflexiones sobre la *dimensión normativa* y con una valoración global de la *idoneidad didáctica* del proceso de estudio implementado y tiene como finalidad la identificación de "puntos de mejora" para la implementación de nuevos ciclos del proceso de ingeniería.

Finalmente, en el capítulo 6, se presenta una síntesis con las principales conclusiones obtenidas tras la realización del presente trabajo.

CAPÍTULO 1

LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Los fuertes cambios experimentados por la sociedad durante los últimos años, han venido demandando la formación de una "cultura estadística" en los ciudadanos. Dicha cultura estadística se refiere, según Gal (2002), a dos aspectos interrelacionados: (1) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos de diferentes contextos, y (2) capacidad para discutir o comunicar opiniones respecto a tales informaciones estadísticas. En este sentido la formación de una cultura estadística va más allá del dominio de "definiciones" y "procedimientos", siendo el *razonamiento estadístico* un elemento esencial en dicha formación.

La importancia de desarrollar el razonamiento, y no sólo el conocimiento estadístico en los estudiantes, está siendo considerada en los currículos de países desarrollados y también en vías de desarrollo. Esta tendencia se ha visto reflejada en la realización de reformas que incorporan el razonamiento estadístico como un elemento central desde los primeros niveles de enseñanza. El "camino" que ha tomado la estadística en los currículos escolares ha motivado una preocupación creciente por la formación del profesorado para la enseñanza de estos contenidos. La International Association for Statistical Education (IASE) y la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) han realizado esfuerzos conjuntos para abordar esta problemática. El año 2008 han realizado en la ciudad de Monterrey en México, un "Joint ICMI/IASE Study" específicamente orientado a promover la investigación a nivel internacional sobre la educación y desarrollo profesional del profesor para enseñar estadística. Sus resultados se recogen en Batanero, Burrill y Reading (2011) y son una fuente actualizada de referencia para dar a conocer una panorámica global de las investigaciones realizadas en la formación estadística de los profesores de matemáticas. En el presente capítulo, recogiendo los resultados de estas y otras investigaciones desarrolladas en los últimos años, se presenta una panorámica global de la formación estadística del profesor de matemática como campo de investigación.

El capítulo está estructurado en las siguientes secciones. En la sección 2, se dan a conocer algunas ideas teóricas sobre el conocimiento profesional del profesor de matemática. En la sección 3, se presentan algunos marcos teóricos sobre la formación de profesores en estadística y su didáctica. En la sección 4, se exponen los principales resultados de estudios recientes cuyo foco de interés ha sido la formación de profesores para enseñar estadística; estos estudios se encuentran clasificados en tres grandes temas en que se han desarrollado la mayoría de las investigaciones: investigaciones sobre el conocimiento del contenido de estadística, estudios sobre didáctica de la estadística (se incluyen estudios sobre el conocimiento didáctico de la estadística y algunos enfocados en el diseño y/o evaluación de propuestas de enseñanza) y estudios sobre actitudes y creencias. En la sección 5, se sintetizan los principales desafíos que presenta la formación estadística de profesores de educación primaria de acuerdo a las dimensiones del conocimiento profesional del profesor propuestas en Godino (2009). Finalmente, en la sección 6, se exponen algunas conclusiones obtenidas tras el desarrollo del capítulo.

2. CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Son muchas las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor que proponen modelos que permiten caracterizar las distintas componentes del conocimiento del profesor de matemática (Shulman, 1986; Wilson, Shulman y Richert, 1987; Llinares y Sánchez, 1990; Llinares, Sánchez y García, 1994; Ball, 2000; Ball, Lubenski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Shilling, 2008; Godino, 2009).

Shulman, precursor de la perspectiva teórica sobre el conocimiento del contenido para la enseñanza, propuso inicialmente tres categorías con las cuales se podría estudiar el conocimiento de los profesores, con especial énfasis en los contenidos (Shulman, 1986): *el conocimiento del contenido de la materia específica, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular*.

Más tarde, Shulman (1987) amplía las categorías anteriores, estableciendo con ello, una nueva caracterización más detallada sobre las componentes del conocimiento profesional del profesor, que son base para la enseñanza y que todo profesor debe manejar. Las componentes del conocimiento propuestas por Shulman en su nueva propuesta son:

a. Conocimiento del contenido.
b. Conocimientos pedagógicos generales.
c. Conocimiento del currículo.
d. Conocimiento pedagógico del contenido.
e. Conocimiento de los estudiantes y de sus características.
f. Conocimiento de los contextos educacionales.
g. Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educacionales, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

En la última década, Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball et al., 2001) tratan de caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas e introducen la noción de *conocimiento matemático para la enseñanza*, entendido como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill et al., 2008, p. 374).

Estos autores, clasifican los conocimientos puestos en juego por el profesor de matemáticas en dos tipos*: el conocimiento del contenido* y *el conocimiento pedagógico del contenido*. En el conocimiento del contenido, distinguen tres tipos de conocimientos: el *conocimiento común del contenido* que refiere al conocimiento puesto en juego al resolver problemas matemáticos; el *conocimiento especializado del contenido* que incluye la capacidad para representar con exactitud ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes; y el *conocimiento en el horizonte matemático* que requiere poner en relación aspectos elementales del tema con ideas matemáticas más avanzadas. Para el conocimiento pedagógico del contenido proponen tener en cuenta, el *conocimiento del contenido y los estudiantes*, el *conocimiento del contenido y la enseñanza*, y el *conocimiento del currículo.* En la figura 1.1 se muestra un esquema del modelo propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008).

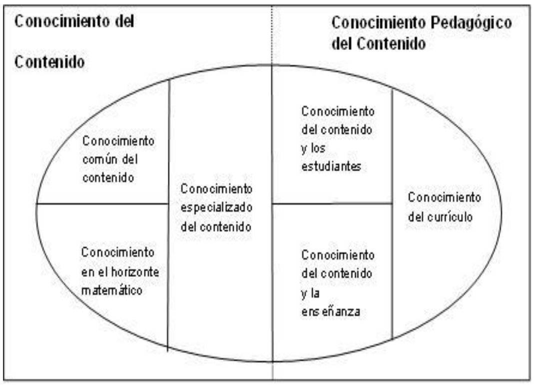


Figura 1.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

Godino (2009), hace un análisis de las propuestas anteriores y propone un modelo "didáctico-matemático" del conocimiento del profesor basado en el EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). En esta propuesta, se utilizan las diferentes facetas de la idoneidad didáctica propuestas por el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) para describir y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática como categorías primarias de conocimientos del profesor de matemáticas: Conocimientos sobre las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

La primera categoría, se refiere a la *faceta epistémica* del conocimiento del profesor; incluye los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio y tiene en cuenta los tres tipos de conocimiento definidos por Hill y colaboradores (2008): el conocimiento común del contenido, el conocimiento en el horizonte matemático y el conocimiento especializado del contenido. El primero es interpretado como el conocimiento que el profesor comparte con los estudiantes de la etapa educativa en la que enseña; el segundo el compartido con los estudiantes de etapas educativas posteriores; mientras que el especializado implica el conocimiento de los diversos significados de los contenidos y las configuraciones de objetos y procesos ligados a dichos significados (Godino, 2014).

El conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, se interpreta según la *faceta cognitiva y afectiva.* La faceta cognitiva, tiene en cuenta los aprendizajes (incluye los errores, dificultades, conflictos y concepciones) y la faceta afectiva, las actitudes, emociones, creencias y valores.

El conocimiento del contenido en relación a la enseñanza, se interpreta según las facetas *interaccional y mediacional.* Este conocimiento considera dos grandes aspectos: las configuraciones didácticas y la trayectoria didáctica. Las primeras, incluyen el rol del profesor y los estudiantes con relación a la tarea o contenido, los modos de interacción (profesor-estudiante y estudiantes entre sí), los recursos materiales y el tiempo asignado. La trayectoria didáctica está relacionada con el modo de seleccionar las secuencias y gestionar las configuraciones didácticas.

Finalmente, el conocimiento del currículo y las conexiones intra e interdisciplinares, están relacionadas con la *faceta ecológica* del conocimiento matemático. En esta categoría se contemplan las orientaciones curriculares, las conexiones entre distintas áreas de la matemática y las relaciones de las matemáticas con otras disciplinas y con factores de índole socio-cultural.

De manera general, estos tipos de conocimientos están presentes en la descripción de las investigaciones que se resumen en el apartado 4 y han sido utilizados como "punto de partida" para establecer una clasificación de dicha literatura.

3. CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE ESTADÍSTICA

La literatura sobre formación de profesores en estadística y su didáctica tiene un desarrollo menor y más reciente que la relacionada con la formación profesional del profesor de matemáticas. Uno de los primeros trabajos que hemos encontrado es el realizado por Godino, Batanero y Flores (1999) quienes aluden a cuatro componentes básicos que se deben tener en cuenta en la formación del profesor de estadística: (1) la reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico (conceptos, procedimientos, lenguajes…), su desarrollo y evolución; (2) análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a distintos niveles de enseñanza; (3) estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas; y (4) Análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos.

Otro de los trabajos sobre la formación del profesor en estadística y su didáctica es el de Watson (2001). En este trabajo se presenta la elaboración de un instrumento (cuestionario) para medir los perfiles de competencia de los profesores para enseñar estadística teniendo en cuenta los siete tipos de conocimientos propuestos en Shulman (1987). Más específicamente, el cuestionario evalúa el conocimiento del profesor de estadística en relación con: factores significativos en la enseñanza, planificación de la enseñanza (incluyendo recursos y fuentes de consulta), prácticas de enseñanza y evaluación de dificultades de los estudiantes, creencias acerca de la estadística en la vida diaria, análisis de respuestas de los estudiantes y cómo usarlas en la sala de clases.

En Batanero, Godino y Roa (2004) se amplían algunas ideas sobre la formación profesional del profesor para enseñar estadística propuestas en trabajos previos (Godino et al., 1999; Batanero 2002) y se propone un conjunto de dimensiones encaminadas a desarrollar las siguientes capacidades: (1) capacidad de profundizar en reflexiones de tipo epistemológico sobre el significado de los conceptos que se enseñan, considerando aspectos de tipo histórico, filosóficos y culturales, así como las relaciones con otros dominios de la ciencia; (2) capacidad para adaptar el conocimiento estadístico a diferentes niveles de enseñanza y a las capacidades de los estudiantes; (3) capacidad crítica para analizar libros de textos y materiales curriculares; (4) capacidad para predecir, interpretar y remediar dificultades, errores, estrategias y obstáculos de los estudiantes al resolver determinados problemas; y (5) capacidad para diseñar e implementar situaciones didácticas incorporando medios materiales apropiados.

Un trabajo posterior es el realizado por Burgess (2006) quien a partir del estudio de diferentes marcos teóricos sobre formación profesional del profesor de matemática propone un modelo sobre el conocimiento del profesor de estadística. En su modelo, Burgess tiene en cuenta los siguientes componentes del razonamiento estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch (1999): *reconocimiento de la necesidad de los datos*; *transnumeración* (cambio de las representaciones de los datos para facilitar la comprensión); *variación* (el pensamiento estadístico moderno se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual surge de la omnipresente variación); *uso de un conjunto de modelos* (como resúmenes de los datos en tablas, gráficos); *conocimiento estadístico relacionado con el contexto* (el material de base del pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos. El pensamiento en sí mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, comprensiones y conjeturas).

Además de los componentes anteriores, Burgess completa su modelo con los siguientes elementos: *ciclo de una investigación* (problema, plan, datos, análisis y conclusión), el *ciclo interrogativo* (generar, buscar, interpretar, criticar y juzgar) y las *disposiciones*, tales como escepticismo e imaginación. En la figura 1.2 se muestra el modelo del conocimiento profesional del profesor de estadística propuesto por Burgess.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="4">Conocimiento estadístico para la enseñanza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conocimiento del contenido</td><td colspan="2">Conocimiento didáctico del contenido</td></tr>
<tr><td>Conocimiento común del contenido</td><td>Conocimiento especializado del contenido</td><td>Conocimiento del contenido y estudiantes</td><td>Conocimiento del contenido y enseñanza</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Pensamiento estadístico en investigaciones empíricas</td><td rowspan="5">Tipos de pensamientos</td><td>Reconocimiento de la necesidad de los dato</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Transnumeración</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Variación</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Uso de modelos</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Conocimiento estadístico relacionado con el contexto</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ciclo investigativo</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Ciclo interrogativo</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Disposiciones</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 1.2. Modelo del conocimiento profesional del profesor de estadística (Burgess, 2008, p.3)

Otro de los trabajos sobre formación de profesores en estadística y su didáctica es el realizado por Garfield y Ben-Zvi (2008). Si bien este trabajo puede no ser considerado un modelo como tal, en él se proponen cinco competencias que se deben desarrollar en la formación del profesor de estadística: (1) dominio de las ideas estadísticas fundamentales; (2) capacidad para trabajar con datos reales; (3) habilidad para diseñar actividades de aula integrando herramientas tecnológicas; (4) dominio del discurso en el aula; y (5) uso de métodos interactivos de evaluación.

Finalmente, con relación a la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación[1] (TIC) en la enseñanza de la estadística Lee y Hollebrands (2008) proponen un marco sobre el conocimiento profesional del profesor que considera cuatro componentes: (1) concepciones sobre cómo enseñar contenidos específicos integrando las TIC; (2) conocimiento de estrategias de enseñanza e implicancia de las representaciones al estudiar temas específicos con uso de TIC; (3) conocimiento sobre el razonamiento, aprendizaje y comprensión al usar las TIC; y (4) conocimiento del currículo y los instrumentos curriculares (como el texto de estudio) que promueven el uso de las TIC y el razonamiento estadístico.

[1] Entendemos que las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) incluyen cualquier dispositivo (ordenador, calculadora, teléfono móvil,…), los software asociados y la información disponible en dichos “artefactos”, como así también las técnicas de uso.

4. INVESTIGACIONES SOBRE FORMACIÓN DE PROFESORES PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA

Como ya hemos señalado en la introducción de este capítulo, la problemática sobre la formación de profesores para la enseñanza de la estadística ha sido reconocida y asumida por organismos como el IASE e ICMI quienes organizaron en 2008 un "ICMI Study" enfocado especialmente en analizar la enseñanza de la estadística a nivel escolar y en la problemática de formación del profesorado en estadística y su didáctica (http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/; Batanero, Burrill y Reading (2011). Los principales resultados sobre formación de profesores para enseñar estadística que fueron presentados en la Joint ICMI/IASE Study junto a otros recogidos en la literatura de investigación de los últimos años, son tenidos en cuenta para presentar una panorámica global sobre el tema en este apartado.

Hemos clasificado la literatura investigativa con un criterio general de acuerdo a las siguientes áreas de estudio: (1) *investigaciones sobre el conocimiento del contenido de estadística;* (2) *estudios sobre didáctica de la estadística;* y (3) *investigaciones sobre actitudes y creencias.*

En el primer grupo, se incluyen las investigaciones enfocadas en "evaluar" el conocimiento que profesores en ejercicio o en formación tienen sobre los contenidos de estadística. La mayoría de estos trabajos muestran también "dificultades" que se manifiestan en el aprendizaje de dichos contenidos.

En el segundo grupo, situamos aquellos trabajos que se centran en el estudio de la estadística en relación con su enseñanza y aprendizaje. En esta categoría se incluyen investigaciones enfocadas en evaluar los conocimientos que manifiestan profesores en ejercicio o en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística; como así también, aquellas centradas en el diseño y/o implementación de propuestas de formación estadística de profesores de educación primaria.

En la última clasificación, se resumen investigaciones que han estado centradas en estudiar "actitudes" y "creencias" que se manifiestan en los profesores en ejercicio y en formación con relación a la estadística, su enseñanza o aprendizaje.

Esta clasificación no pretende ser excluyente, ya que por cierto, hay estudios que por su diversidad de objetivos pueden ser clasificados en más de una de las áreas temáticas. Sin embargo, la separación resulta conveniente dado que permite hacer una caracterización preliminar de las investigaciones revisadas y al mismo tiempo, posibilita abordar con más detalle las peculiaridades de dichos trabajos.

4.1. **Investigaciones sobre el conocimiento del contenido de estadística**

En este apartado resumimos algunos estudios centrados en evaluar el conocimiento del contenido estadístico que profesores de matemáticas en ejercicio o en formación de educación primaria y primeros niveles de educación secundaria poseen con respecto a objetos estadísticos presentes en los currículos escolares. En nuestro caso, las investigaciones que versan sobre temáticas del currículo escolar de educación primaria son asociadas al *conocimiento común* del contenido y las que tratan objetivos del currículo de educación secundaria, al *conocimiento avanzado*. En ambos casos las investigaciones se conectan con uno o más aspectos de la faceta epistémica (conceptos, lenguajes, propiedades,…) del conocimiento del profesor en el modelo del conocimiento didáctico – matemático del profesor propuesto en el EOS (Godino, 2009).

Uno de los tópicos de la estadística sobre los cuáles versan las investigaciones revisadas son las medidas de tendencia central (media, mediana y moda). En relación con estos contenidos destacan los estudios realizados por Batanero, Godino y Navas (1997); Estrada, Batanero y Fortuny (2004); Groth y Bergner (2006); y Jacobbe (2008).

En el primer estudio, Batanero et al. (1997) dan a conocer los resultados de una investigación realizada con 273 profesores de educación primaria en formación sobre aspectos relacionados con la media aritmética. En el estudio aplicaron un cuestionario compuesto por cuatro ítems de opción múltiple considerando distintos aspectos interpretativos de esta noción, complementándolo con una entrevista a estudiantes que manifiestan errores repetidos. Los resultados muestran la existencia de errores conceptuales y dificultades para aplicar la media en "situaciones prácticas". Entre los principales resultados se señala que el 40% de los estudiantes no prescinden de los valores atípicos para calcular la media cuando la situación lo requiere, el 30% no interpreta correctamente la dispersión de los datos y el 60% no reconoce la aplicación de la mediana en lugar de la media en distribuciones asimétricas. Una de las explicaciones dadas por los autores a estas dificultades radica en que la enseñanza de los promedios, y en general la de los contenidos estadísticos, se realiza habitualmente centrada en el aprendizaje de fórmulas y su aplicación en casos estereotipados.

En el segundo estudio, Estrada et al. (2004) presentan los resultados de una investigación realizada con 387 profesores de educación primaria en formación sobre diversos contenidos de la estadística elemental, incluido el uso de la media. Con respecto a este contenido, los resultados de la investigación muestran que el 45% de los estudiantes de la muestra no tuvo en cuenta los efectos de los valores atípicos sobre esta medida de tendencia central y un 24% tuvo dificultades con el algoritmo. Otros resultados obtenidos en este estudio fueron que un 28% de los estudiantes de la muestra no realizaron una interpretación correcta de la concepción frecuencial de la probabilidad; el 45% confundieron correlación y causalidad; el 30% fueron insensibles al sesgo en el muestreo; el 15% plantearon que no es posible dar una estimación cuando hay fluctuación aleatoria y otro 30% tuvo otras confusiones respecto al muestreo.

En Groth y Bergner (2006), se realiza un estudio con 45 profesores de educación primaria en formación para indagar sobre la comprensión que estos estudiantes tienen de los conceptos de media, mediana y moda. Para recabar información se pidió a los estudiantes establecer las diferencias y semejanzas entre los tres conceptos estadísticos. Los autores distinguen cuatro categorías sobre la comprensión de estos conceptos por parte de los profesores en formación: (1) uniestructural/concreto simbólico, que refiere a las respuestas en las que solo se usa la definición “literal” de los conceptos; (2) multiestructural/concreto simbólico, la respuesta alude a que los promedios representan un objeto matemático más que un procedimiento de cálculo; (3) relacional/concreto simbólico, la respuesta va más allá del procedimiento de cálculo permitiendo concluir características “típicas” sobre un conjunto de datos; y (4) nivel abstracto, la respuesta incluye una justificación sobre cuando una medida de tendencia central es más útil para un determinado conjunto de datos. De acuerdo con las respuestas recogidas, 8 profesores se ubicaron en el primer nivel, 21 en el segundo, 13 en el tercero y solo 3 alcanzaron el nivel superior.

En Jacobbe (2008) se presentan los resultados de un estudio de casos con tres profesoras de la escuela primaria en el que explora su comprensión sobre la media y la mediana. Dos de estas tres maestras manifestaron falta de conocimiento en el procedimiento para calcular la mediana (uno de los errores fue no ordenar los números de menor a mayor), dificultades para explicar lo que estas medidas de tendencia central representan al momento de proporcionar ejemplos en los que la mediana sería más informativa que la media para una situación dada, y una de las profesoras no comprende la diferencia entre la media y la mediana. En general, la investigación demuestra que ninguna de las tres profesoras participantes en el estudio posee los conocimientos básicos sobre la media y la mediana de acuerdo con las exigencias actuales; es decir, su conocimiento del contenido media y mediana es "pobre" a pesar de que los currículos para la educación primaria incluyen el trabajo con promedios.

Otras investigaciones analizan simultáneamente el uso de las medidas de tendencia central y de dispersión[2]. Entre estos trabajos están los realizados por Borim y Queiroz (2008), Makar y Confrey (2005) y Silva y Coutinho (2008).

Borim y Queiroz (2008), realizaron una investigación que estuvo enfocada en estudiar el razonamiento acerca de la variabilidad en maestros de matemática de secundaria. Los resultados del estudio dan cuenta que aun cuando los profesores manejan algunos conceptos y procedimientos estadísticos, los utilizan con frecuencia de manera incorrecta y sin lograr una comprensión completa acerca de su significado al aplicarlos en una "situación real". Esta es una deficiencia que limita el razonamiento de los profesores y que no les permite enseñar a sus estudiantes el significado de medidas tales como la desviación estándar; en su lugar, restringen su enseñanza al uso de los algoritmos sin establecer relaciones entre conceptos como la media, la mediana y la desviación estándar.

Makar y Confrey (2005), realizaron una investigación con 17 futuros profesores de educación secundaria para conocer cómo usaban la idea de variación al comparar dos distribuciones; para ello, realizaron varias entrevistas a lo largo de un curso que estaban impartiendo. El estudio muestra que los futuros profesores expresan sus ideas usando tanto el lenguaje convencional de la estadística como "no convencional". Algunas de las expresiones de uso convencional empleadas por los estudiantes fueron: proporción, media, máximo, mínimo, tamaño muestral, valores atípicos, rango, forma y desviación típica. La inclusión de estas expresiones fue incrementando a lo largo de las sesiones de clase, aunque se destaca que el término "desviación típica" fue escasamente utilizado (un estudiante lo empleó en la primera entrevista y dos en la segunda). Con las expresiones de uso no convencional se establecieron dos categorías de ideas relacionadas con la variabilidad: la idea de dispersión como "agrupado" y "disperso" y

---

[2] A veces los autores utilizan informalmente el término variación como sinónimo de dispersión, pero estos términos no son equivalentes. La variación (o variabilidad) es más amplia, incluye la variación no aleatoria, variación en muestreo, etc. La dispersión usualmente supone una comparación de los datos o valores respecto a una tendencia central o a un modelo.

la idea de distribución como “agrupamientos modales”. El uso de estos términos también se vio incrementado con el transcurso de las clases.

Silva y Coutinho (2008), realizaron una investigación con profesores brasileños analizando su razonamiento sobre dispersión. En el estudio se pidió a los profesores aplicar una encuesta y usar los datos obtenidos sobre la edad de los participantes para crear su distribución. Una vez que resumieron los datos en tablas de frecuencias y gráficos (un histograma), se les solicitó analizar distintos modos de representar el conjunto de las edades. Ninguno de los profesores fue capaz de integrar en su razonamiento el significado de la media conjuntamente con el significado de la desviación típica, lo cual limita la enseñanza de estos contenidos al uso de los algoritmos.

El contenido de distribución y su conexión con el razonamiento estadístico es otro de los temas que han sido objeto de estudio dentro las investigaciones sobre formación estadística (Canada, 2008; Mickelson y Heaton 2004).

Canada (2008), presenta los resultados de una investigación en la que analiza el razonamiento de estudiantes de secundaria y de futuros profesores de este nivel cuando comparan conjuntos de datos que tienen la misma media y diferente dispersión. En este estudio, si bien los profesores en formación obtuvieron mejor resultado que los estudiantes de secundaria, se muestra que el 35% de ellos solo tuvo en cuenta los promedios para hacer la comparación concluyendo que ambos conjuntos de datos resultan iguales. Esto demuestra que la idea de distribución que estos profesores en formación tienen no es completa; su comprensión se manifiesta cuando se es capaz de razonar simultáneamente sobre los promedios y dispersiones (Canada, 2008).

En el estudio realizado por Mickelson y Heaton (2004), se muestra el razonamiento de una profesora de primaria al trabajar con sus alumnos un proyecto de análisis de datos. Los resultados dan cuenta que la idea de distribución manejada por la profesora se presentó débil, no logrando aplicarla de manera apropiada en todas las situaciones.

La construcción e interpretación de gráficos también han sido objeto de estudio de diversas investigaciones (Arteaga, 2011; Espinel, 2007; Espinel, Bruno y Plasencia, 2008; Ruiz, Arteaga y Batanero, 2009).

En el primer estudio Arteaga (2011), como parte de su tesis doctoral, analiza las producciones gráficas de una muestra de profesores de educación primaria en formación en la realización de un proyecto abierto de análisis de datos. Los resultados relacionados con los conocimientos estadísticos, muestran algunos conocimientos deficitarios en la lectura y producción de gráficos, y con la capacidad para establecer conclusiones al proyecto que tuvieron que realizar. En la construcción de gráficos, se observaron errores como el uso de escalas demasiado amplias para el rango de variación y valor de la variable, omisión de rótulos, introducción de líneas innecesarias, cambio de la variable independiente por la dependiente (representando la frecuencia en el eje X), no centrar los intervalos de frecuencias en los histogramas, representar el producto de los valores de la variable por su frecuencia y representar en el mismo gráfico frecuencia y variable. También se observó que el manejo de la hoja de cálculo Excel es poco familiar, a pesar de haber realizado durante su formación algunas prácticas con este recurso. Los errores en los gráficos se agravan con el uso de software. En cuanto a la capacidad de lectura de gráficos, un porcentaje importante de la muestra presenta dificultades a la hora de leerlos debido a que no alcanzan un nivel de lectura suficiente o bien confunden elementos del gráfico. Respecto a la obtención de conclusiones, el estudio deja ver que sólo un pequeño número de estudiantes llega a establecer conclusiones completas. Esto es particularmente preocupante, debido a que los conocimientos disciplinares del profesor implican recorrer todos los pasos del método estadístico, desde el planteamiento del problema, la definición de las preguntas, la recogida y análisis de datos y la obtención de conclusiones.

En el segundo estudio, Espinel (2007) da a conocer dificultades conceptuales e interpretativas que se manifiestan en los futuros profesores en la construcción de histogramas y polígonos de frecuencias, tales como: no considerar los intervalos de frecuencia cero, mal etiquetado de los números reales en los ejes, barras separadas en la construcción de los histogramas o no completar polígonos de frecuencias. También se pone en evidencia, una marcada incoherencia entre la forma en que algunos de los futuros profesores construyeron sus propios gráficos y los errores de interpretación que cometieron al momento de corregir los gráficos de otros estudiantes, lo cual, afectaría a su capacidad para evaluar el aprendizaje de sus futuros alumnos.

En Espinel y colaboradores (2008), se muestran los resultados de una investigación con futuros profesores (350 estadounidenses y 190 españoles) y con un grupo de 44 profesores españoles en ejercicio. El análisis arroja dificultades con la lectura e interpretación correcta de una distribución de datos presentada mediante gráficos.

Algunas de estas dificultades, que se hicieron presentes indistintamente en los diferentes grupos, fueron: dificultad para interpretar si una variable es discreta o continua; manifestación de errores relacionados con la simetría (pensar que un gráfico con un valor atípico no puede ser simétrico), los valores atípicos y las frecuencias acumuladas; confusión con la media y la mediana, con los gráficos de barra e histogramas y con la interpretación entre la frecuencia simple y la frecuencia acumulada; y por último, la imposibilidad de razonar más allá de la información explícita en los gráficos. En síntesis, la investigación pone de manifiesto que no se tiene en cuenta la distribución en su conjunto, sino más bien, los aspectos específicos del gráfico.

Finalmente, en el trabajo realizado por Ruiz et al. (2009) se exponen, entre otros, los siguientes errores cometidos por una muestra de futuros profesores de educación primaria en un proyecto de análisis de datos en el que han de comparar dos distribuciones: uso de escalas no homogéneas en el eje de las abscisas, no se relacionan las variables entre sí produciéndose gráficos separados para cada distribución, conflicto en la idea de moda al interpretarla como la variable que tiene mayor número de datos y no como el valor que más se repite dentro de una variable, se confunde la frecuencia con el valor de la variable, se considera como mediana el centro del rango, no se ordenan los datos para calcular la mediana, no se percibe la variabilidad en una distribución de datos, se comparan valores aislados lo que indica que no se ve el dato como un valor de una variable, y no se usa la media para comparar dos conjuntos de datos, en lugar de ello, se centran en las frecuencias absolutas.

4.2. **Estudios sobre didáctica de la estadística**

En esta sección se resumen dos "tipos" de estudios: (1) aquellos enfocados en estudiar el conocimiento que manifiestan los profesores en ejercicio o en formación sobre la estadística en relación con su enseñanza y aprendizaje, y (2) investigaciones centradas en el diseño y/o evaluación de propuestas de formación estadística de profesores de educación primaria. En la perspectiva adoptada por Godino (2009), las primeras investigaciones se vinculan tanto con las dimensiones cognitiva y afectiva (aprendizaje), como con las facetas interaccional y mediacional (enseñanza). Las segundas, están relacionadas principalmente con la faceta instruccional.

En el primer tipo de estudios, que interpretaremos como investigaciones sobre el conocimiento didáctico de la estadística (CDE), situamos los trabajos realizados por Burgess (2008); Cai y Gorowara (2002); Watson (2001, 2005) y Watson, Callingham y

Donne (2008). Otros estudios en los que se aborda también esta temática son las tesis doctorales de Arteaga (2011) y Pinto (2010).

En la investigación realizada por Burgess (2008), el autor utilizó su modelo que propone sobre el conocimiento estadístico para la enseñanza (Burgess, 2006) para estudiar el conocimiento de dos profesores de educación primaria. La investigación consistió en comparar el conocimiento de estos dos profesores en la implementación de una propuesta de enseñanza que incluía varios conjuntos de datos multivariados. Para recoger los datos se realizaron grabaciones de clase a través de video dejando registro de todas las lecciones realizadas. Para analizar el conocimiento de cada profesor el autor clasifica diferentes "episodios" de la puesta en práctica de las lecciones de acuerdo a las diferentes categorías propuestas en su marco teórico. En los resultados se muestra que durante la aplicación de las lecciones hubo momentos en que ambos profesores desaprovecharon oportunidades para poner a funcionar conocimientos de los propuestos en el "modelo". Aunque también se muestra una clara diferencia entre la capacidad demostrada por cada profesor; uno de ellos desaprovechó 14 momentos y el otro solo 4.

El trabajo de Cai y Gorowara (2002), consistió en una investigación en la que se estudiaron las concepciones y la construcción de representaciones para la enseñanza del concepto de media por parte de dos grupos de profesores: uno compuesto por 12 profesores noveles licenciados en matemática o psicología y el otro, por 11 profesores "experimentados" que se encontraban trabajando en los niveles escolares de sexto y séptimo grado; estos profesores, tenían también la característica de ser profesores líderes dentro de sus escuelas. Para llevar a cabo la investigación se propuso realizar las siguientes actividades: (1) planificar una lección para la enseñanza del concepto de media, (2) responder de todas las formas posibles en que los estudiantes de sexto o séptimo grado podrían responder determinadas preguntas relacionadas con la media y (3) evaluar la respuestas de los estudiantes a algunas de las preguntas planteadas. En los resultados de la investigación se destaca que, frente a la situación que se les propuso en el segundo apartado, 8 de los 11 profesores experimentados fueron capaces de proporcionar diferentes estrategias para resolver los problemas; en cambio de los 12 profesores nóveles, hubo sólo 2. También se menciona que de entre los profesores nóveles solo uno de ellos resolvió las situaciones sin emplear un enfoque algorítmico. Otro de los resultados que se muestran en este estudio es que los profesores experimentados demostraron un mayor conocimiento para identificar y corregir errores que el grupo de los profesores nóveles. Respecto a las situaciones 1 y 3 los resultados fueron similares, observándose un mayor conocimiento de los profesores experimentados.

El trabajo realizado por Watson (2001), estuvo enfocado en investigar el conocimiento de un grupo de 43 profesores de educación primaria y secundaria para identificar dificultades de sus alumnos en contenidos relativos a probabilidad y estadísticas. Para ello les aplicó un instrumento compuesto por 10 secciones con ítems que permitían explorar diversos aspectos del CDE. Entre los resultados de su estudio destaca que algunos profesores tenían una apreciación muy limitada de la forma en que sus alumnos podrían responder preguntas tales como encontrar un error en un gráfico circular o identificar un error en un informe relacionado con la media sobre el muestreo de una población. Más tarde, Watson (2005), empleó el cuestionario anterior como base para elaborar un nuevo cuestionario enfocado en evaluar el conocimiento de los profesores para conseguir una alfabetización cuantitativa; es decir, la habilidad que tienen para conectar la matemática con aspectos de la vida cotidiana.

En la investigación de Watson, et al. (2008) se estudia el conocimiento de 42 profesores de matemáticas de educación secundaria en tres estados de Australia con el objetivo de conocer su capacidad en diferentes aspectos del CDE. Uno de los aspectos que midió la investigación fue su capacidad para predecir posibles respuestas de sus estudiantes ante una determinada pregunta y para explicar cómo se podría utilizar esta situación en sus aulas; incluyendo la forma en que podrían intervenir para hacer frente a respuestas inadecuadas. En los resultados (sobre la base de las habilidades individuales) los profesores se dividieron en tres grupos: bajo, medio y alto. En el nivel bajo, quedaron ubicados 14 profesores quienes solo fueron capaces de comenzar a predecir las respuestas de sus estudiantes y el uso de algunos materiales. En el nivel medio, se situaron 19 docentes, los cuales, fueron capaces de predecir respuestas correctas e incorrectas y de hacer sugerencias genéricas para gestionar el trabajo en el aula. Y en el nivel alto, se ubicaron 9 profesores que además de lograr las capacidades anteriores, fueron capaces de usar las respuestas de los estudiantes para planificar acciones apropiadas de intervención.

Arteaga (2011), en su tesis doctoral, expone algunos resultados en relación con el CDE, evaluando este tipo de conocimiento en futuros profesores de educación primaria. Para la recogida de la información, utiliza la *Pauta de análisis de la idoneidad didáctica de* *procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática* propuesta por Godino y Batanero (2008), con la cual, los profesores en formación debieron valorar una experiencia de enseñanza de la estadística que ellos mismos vivenciaron. Esta actividad, permitió conocer el CDE de los estudiantes desde un enfoque sistémico: el propuesto por el EOS, que considera las facetas epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica. Los resultados de la investigación, si bien muestran algunos logros, ponen también en evidencia diversas dificultades. El dominio mejor alcanzado por los estudiantes es la valoración de los conocimientos previos como un aspecto central en el proceso cognitivo. Entre los aspectos deficitarios se manifiestan: (1) falta de conocimientos para detectar conflictos cognitivos potenciales y para evaluar logros en el aprendizaje; (2) un conocimiento débil sobre los procesos instruccionales (los estudiantes no identifican con suficiente claridad la lógica del trabajo con proyectos ni los roles que deben asumir en relación con los contenidos estadísticos); (3) falta de preparación para integrar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre de estadística; (4) manejo deficiente de las directrices curriculares y; (5) dificultad para establecer relaciones entre la estadística con otras áreas de la matemática, con otras materias y con la vida personal y social de sus futuros estudiantes.

En la tesis doctoral realizada por Pinto (2010), se reporta los resultados de un estudio de casos donde uno de los sujetos tiene formación inicial en matemáticas e imparte la asignatura de estadística en la carrera de educación. Los resultados expuestos, dejan en evidencia un conjunto de limitaciones en relación al CDE que reportan información importante para nuestra investigación. En primer lugar, los resultados demuestran que el aprendizaje es concebido como la "apropiación" de conceptos y procedimientos, y la capacidad para utilizarlos en situaciones "poco variadas". Al mismo tiempo, se pone de manifiesto que existen dificultades para reconocer "conflictos cognitivos" propios de la educación estadística, y aun cuando se logran identificar algunos fenómenos de interés, el conocimiento didáctico que se tiene resulta insuficiente para comprenderlos y corregirlos de manera oportuna. Por otra parte, la investigación reporta el uso de formas poco innovadoras de instrucción, centradas principalmente en la trasmisión de información. En consecuencia, las interacciones profesor-alumno en la clase de estadística, siguen los pasos típicos de una "clase tradicional": presentación de una definición, se dan a conocer los procedimientos, presentación de algunos ejemplos y desarrollo de ejercicios. La investigación da cuenta también de una falta de conocimiento en el dominio de estrategias para integrar las TIC como una herramienta que puede enriquecer las oportunidades de aprendizaje y facilitar los procesos de enseñanza.

Con relación al segundo tipo de estudios que hemos situado en esta categoría (investigaciones centradas en el diseño y/o evaluación de propuestas de formación estadística de profesores), las propuestas revisadas evidencian que en la actualidad existe una preocupación creciente por diseñar y validar "modelos" que den respuesta a la necesidad de desarrollar en los profesores las capacidades para producir e interpretar información estadística, y al mismo tiempo, lograr las competencias didácticas para desarrollar dichas capacidades en sus alumnos.

Algunas *investigaciones aplicadas* que apuntan en este sentido corresponden a propuestas enfocadas en el desarrollo de contenidos estadísticos fundamentándose en enfoques "metodológico didácticos" de la educación matemática en general (enfoque realista, uso de TIC) y otros, resultan más específicos de la enseñanza de la estadística (uso de proyectos de análisis de datos). Además de estas investigaciones, hemos localizado algunos trabajos, que a partir de un estudio bibliográfico, reportan conclusiones y reflexiones sobre aspectos a tener en cuenta en el diseño de propuestas en didáctica de la estadística.

Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008), describen los resultados de una propuesta didáctica basada en un proyecto de análisis de datos enfocada en aumentar el conocimiento de los contenidos estadísticos y didácticos de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria. El proyecto consistió en pedir a los estudiantes inventar una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada y luego obtener otra secuencia de 20 lanzamientos lanzando realmente la moneda. Se pidió a los estudiantes que contasen el número total de caras en cada secuencia (simulada y real), y luego se les entregó una hoja de datos que contenía el número de caras obtenidas por cada uno de los estudiantes. A partir de estas cuestiones y actividades iniciales, se trabajaron diferentes conocimientos estadísticos y luego, se solicitó a los estudiantes valorar la experiencia aplicando una "pauta" con indicadores de idoneidad didáctica, lo que permitió desarrollar contenidos didácticos.

Respecto a los resultados del estudio, se señala que el proyecto permitió contextualizar nociones y procedimientos elementales de la estadística que figuran en los niveles de educación primaria, favoreciendo también la reflexión didáctica.

Otro estudio es el realizado por Giambalvo y Gattuso (2008). Estas autoras muestran los resultados de una propuesta didáctica para la enseñanza de la estadística basada en el enfoque de la matemática realista (Freudenthal, 1991) que fue aplicada con futuros profesores de matemática de educación secundaria. La propuesta contempló la realización de una presentación inicial sobre la importancia de las estadísticas en el mundo actual y la necesidad de darle un lugar significativo dentro de la escuela. Esto fue seguido con algunas lecciones para actualizar los conocimientos de los estudiantes en las estadísticas básicas. Luego, se formaron grupos de trabajo a los que se les pidió preparar una lección sobre uno de los siguientes temas: organización de cuadros y gráficos, medidas de posición central y de variabilidad, relación entre las variables y extracción de información más allá de los datos. Para realizar el trabajo se proporcionaron datos reales recogidos previamente. Un aspecto novedoso fue la incorporación de un "estadístico" durante el desarrollo de las clases como profesional de apoyo al profesor habitual.

Los resultados globales de este experimento, demuestran que uno de los puntos fuertes de la propuesta fue el uso de datos procedentes de un experimento real. Estos datos proporcionaron un contexto excelente para los contenidos y se presentaron como un elemento potente para la enseñanza de la estadística, favoreciendo el aprendizaje de conceptos, procedimientos y razonamientos estadísticos. Además el desarrollo de la experiencia permitió un aprendizaje activo y creativo. Algunas debilidades reportadas fueron: la respuesta negativa de algunos estudiantes frente al estilo de enseñanza y la imposibilidad de profundizar algunas ideas interesantes por motivos de tiempo. También se destaca que si bien la incorporación de un estadístico fue acertada para reforzar aspectos teóricos, se presentó una contradicción con el enfoque de la propuesta al replicarse en algunos momentos una enseñanza cargada de formalismo.

Lee y Hollebrands (2008) muestran los resultados de una propuesta didáctica en la que se incorporaron las TIC como un medio para potenciar aprendizajes estadísticos y didácticos. Para estudiar la efectividad de la propuesta se utilizó un grupo control y tres grupos experimentales aplicándose un pre y pos test para evaluar los conocimientos estadísticos y algunos relacionados con el dominio de habilidades en el uso de TIC. La valoración de los conocimientos didácticos, se hizo a través elaboración de planificaciones y entrevistas. En los resultados se observó que el grupo experimental Nº 1 obtuvo un avance significativo en los conocimientos disciplinares y en los relacionados con el uso de las TIC. El grupo experimental Nº 2 experimentó un leve descenso en relación a los avances obtenidos en el grupo experimental Nº 1 en cuanto al contenido y la tecnología, a la vez que hubo un aumento en relación al conocimiento didáctico. De todas formas, este grupo también experimentó avances importantes con respecto al grupo control. El grupo experimental Nº 3 obtuvo puntuaciones más altas que los grupos uno y dos en el conocimiento del contenido disciplinar y en las tecnologías, y en el conocimiento del contenido didáctico fue superior al grupo uno, pero ligeramente inferior al grupo dos. Con respecto al grupo control, este grupo experimental obtuvo un avance significativo en todos aspectos evaluados.

En síntesis, esta propuesta didáctica aplicada resultó ser eficaz respecto de sus objetivos.

Algunos trabajos de síntesis (basados en reflexiones teóricas) que proporcionan elementos conceptuales para la enseñanza de la estadística son los trabajos de Batanero y Díaz (2005), y de Estepa (2008). Estepa, hace un análisis de las dificultades, la disponibilidad de recursos y los principios a considerar en la formación de maestros de primaria sobre procesos estocásticos. En cuanto a las dificultades, se plantea tener en cuenta los niveles de conocimientos en relación a los contenidos estocásticos, los errores conceptuales básicos, la falta de interés por la asignatura, los diferentes niveles en el dominio de habilidades para usar las TIC, y las concepciones arraigadas en los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de los procesos estocásticos. Con respecto a los recursos señala los planes curriculares, los libros de texto para la enseñanza y la literatura de investigación como medios que deben ser conocidos. Por último, en cuanto a los principios, se menciona que se deben considerar los aprendizajes previos de los estudiantes, la utilidad de los procesos estocásticos para resolver problemas relacionados de la vida diaria y de otras disciplinas, la validez y adaptación del conocimiento a las necesidades de la sociedad, y que los conocimientos deben ser útiles en la formación profesional.

Por otra parte, Batanero y Díaz (2005) exponen una idea de cómo dar respuesta a las exigencias actuales en cuanto a la formación de conocimientos estadísticos a través de una metodología didáctica basada en el trabajo con proyectos de análisis de datos. Esta forma de trabajo, apunta a presentar las diferentes fases de una investigación estadística: formulación de un problema (alguno de los cuales pueden ser planteados por el profesor y otros escogidos libremente por los estudiantes), decisión sobre los datos a recoger, recogidas y análisis de datos, obtención de conclusiones sobre el problema planteado y redacción del informe final. Estas autoras, proponen las siguientes ventajas por las que sería importante introducir esta forma de trabajo: (1) la posibilidad de trabajar diferentes contenidos (aplicaciones de la estadística, conceptos y propiedades, notaciones y representaciones, técnicas y procedimientos, actitudes y formas de razonamiento); (2) permite contextualizar la estadística y hacerla más relevante, reforzar el interés por el tema, dar a conocer que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos, y aprender más sobre datos reales que no aparecen en los procedimientos algorítmicos (precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición y sesgos); y (3) se hace posible la integración de las TIC ya sea para la recogida de los datos a través de Internet o como herramienta de análisis de datos y para facilitar los cálculos.

4.3. **Investigaciones sobre actitudes y creencias**

Las investigaciones que se resumen en este apartado corresponden a trabajos enfocados en estudiar actitudes y creencias que se manifiestan en los profesores en ejercicio y en formación que podrían afectar favorable o desfavorablemente su desempeño como profesores de estadística. Este grupo de estudios no se conecta, al menos explícitamente, con los modelos sobre el conocimiento profesional del profesor[3]. Es por ello, que presentamos a continuación algunas ideas de los conceptos de *actitudes* y *creencias* que se ha tenido en cuenta para clasificar los estudios que corresponden a esta "categoría". Para McLeod (1992), una actitud es una respuesta estable o un sentimiento intenso que se desarrolla por repetición de respuestas emocionales y que se automatizan con el tiempo; las creencias en cambio, son entendidas como ideas individuales mantenidas durante un largo tiempo que se tienen sobre la materia, sobre uno mismo como estudiante o sobre el contexto social en el que se realiza el aprendizaje. Con respecto a las actitudes, Gal, Ginsburg y Garfield (1997) las definen como "una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio" (p.40). Estrada (2002) les atribuye a su vez las siguientes características: son predisposiciones; incluyen procesos cognitivos y afectivos; evocan un objeto o sector de la realidad; son relativamente estables (al contrario de un sentimiento que puede ser pasajero) y son siempre algo adquirido, bien por la

[3] Las categorías propuesta por Ball y cols (modelo sobre MKT) se refieren esencialmente a tipos de "conocimientos" del profesor de matemáticas. Las actitudes, creencias y valores del profesor pueden ser incluidas en un modelo más general que tenga en cuenta, no solo la dimensión cognitiva sino también la meta-cognitiva, esto es, las reflexiones, valoraciones y creencias del profesor sobre la matemática y su enseñanza. La dimensión afectiva del modelo CDM propuesto por Godino (2009) incluye como componentes las actitudes, creencias y valores.

experiencia o por imitación del comportamiento de otros. Estrada (2007) también establece que la diferencia entre actitudes y creencias es que las primeras están más relacionadas con los afectos y las segundas con la cognición. Ambas inciden en la acción de las personas y se relacionan recíprocamente; los afectos condicionan el aprendizaje y el aprendizaje provoca reacciones afectivas.

A continuación presentamos una síntesis de algunas investigaciones enfocadas en estudiar las actitudes y creencias que se manifiestan en los profesores en ejercicio y en formación hacia la estadística.

4.3.1. *Estudios sobre actitudes hacia la estadística*

Los primeros estudios sobre actitudes relativos a la estadística estuvieron principalmente centrados en la creación de escalas de medición de actitudes. En Carmona (2004), se describen en detalle las principales características psicométricas de dichos instrumentos. Las investigaciones enfocadas en estudiar las actitudes que se manifiestan en los profesores en ejercicio y en formación hacia la estadística son más escasas, entre estas investigaciones están las realizadas por Chick y Pierce (2008); Estrada (2002); Estrada, Batanero, Fortuny y Díaz (2005); Estrada y Batanero (2008); Onwuegbuzie (1998); Sedlmeier y Wassner (2008); Watson, Kromrey, Ferron, Lang y Hogarty (2003).

En Chick y Pierce (2008), se reportan algunas actitudes negativas que se manifiestan en un grupo de profesores de Educación Primaria en formación, dando cuenta que el 44% de ellos manifiestan un cierto "distanciamiento" de la estadística, ya que señalan no tener un manejo suficiente de los contenidos para llevar a cabo la enseñanza. Estos resultados son en cierto punto concordantes con los de Estrada y Batanero (2008), quienes demuestran que en gran medida las actitudes negativas estarían relacionadas con la falta de conocimientos y con experiencias de aprendizaje demasiado formales.

Estrada (2002) realizó un estudio con 74 profesores de educación primaria en ejercicio y 66 en formación para "medir" sus actitudes hacia la estadística. Para ello construyó un instrumento compuesto por 25 ítems en el que además de tener en cuenta los tres componentes básicos de las actitudes (afecto, cognición, comportamiento) incluyó otras tres dimensiones: (1) *social,* relativa a la percepción que se tiene del valor de la estadística en la sociedad; (2) *educativa,* que refiere al interés por aprender y enseñar estadística; y (3) *instrumental,* que alude a la percepción del uso de la estadística en otras áreas de conocimiento. Los resultados de ambos grupos fueron similares; los aspectos mejor valorados fueron el carácter instrumental de la estadística (grado de comprensión de información presentada a través de gráficos) y su valor educativo (importancia de aprender estadística en la escuela). Las puntuaciones más bajas se obtuvieron en los ítems asociados a la seguridad y confianza en la estadística para manejar aspectos de la realidad y la afectividad hacia la estadística (nivel de agrado con los cursos de estadística).

El estudio realizado por Estrada y colaboradores (2005), da cuenta de la aplicación de un cuestionario para "medir" las actitudes a una muestra de 367 futuros profesores de educación primaria. Los autores analizaron además las relaciones entre actitudes y conocimientos estadísticos de estos estudiantes a través de algunos ítems abiertos. Estos ítems sirvieron también para evaluar la comprensión de los principales contenidos de estadística presentes en el currículo de educación primaria español (razonamiento sobre datos estadísticos, gráficos, promedios y dispersión, sesgos en muestreos y azar). Los resultados de la aplicación del cuestionario reflejan que hubo actitudes positivas en los ítems sobre competencia cognitiva (seguridad en sí mismo para aprender estadística) y en los relacionados con el valor de la estadística (utilidad de la estadística en diferentes ámbitos). Se encontraron también correlaciones entre las subescalas de "Afectos y Competencia Cognitiva" y "Afectos y Valor de la Estadística"; el gusto o no por la estadística estuvo relacionado con la percepción que se tiene de la capacidad para aprender estadística y el valor que se da a la "disciplina". La aplicación de los ítems abiertos arrojó que un importante porcentaje de los estudiantes de la muestra no dominaban algunos contenidos elementales que deberían enseñar. Se obtuvo una importante correlación entre las actitudes y el número de cursos de estadística cursados, observándose que las actitudes mejoran de acuerdo al número de cursos y los conocimientos estadísticos que se poseen.

El estudio anterior muestra una continuidad en el trabajo realizado en Estrada y Batanero (2008). En esta investigación se aplicaron los ítems en los que se obtuvieron las puntuaciones más bajas en el estudio de Estrada y colaboradores (2005) a una muestra de 121 futuros profesores de educación primaria a fin de profundizar en las actitudes negativas y las concepciones erróneas obtenidas. Entre los resultados se destaca que las actitudes positivas, según las explicaciones de los estudiantes, estarían relacionadas con: (1) la consideración de la estadística como un contenido fácil de aprender; (2) experiencias satisfactorias de aprendizaje; (3) lo novedoso del tema; (4) percepción de la utilidad de la estadística para un profesor; y (5) el valor formativo de la estadística. Las actitudes negativas, se explican por (1) la falta de conocimientos previos; (2) dificultad con el razonamiento estadístico; y (3) la enseñanza de una estadística demasiado formal.

En el estudio realizado por Onwuegbuzie (1998) se utilizó un modelo multivariado para estudiar la ansiedad y actitudes de los profesores. Los resultados muestran que hubo correlaciones significativas entre el número de asignaturas de estadística cursadas y las puntuaciones obtenidas en el cuestionario de actitudes. También se comprobó que las actitudes y la ansiedad hacia la estadística influyen en los resultados de aprendizaje de estos contenidos.

Sedlmeier y Wassner (2008) realizaron un estudio exploratorio con profesores de matemática alemanes indagando, entre otras cosas, acerca de sus puntos de vistas referentes a la estadística en general y de sus creencias sobre los elementos que deben ser considerados en un buen proceso de instrucción. Estos autores dan cuenta de que, en general, los profesores están muy interesados en la disciplina; los maestros reconocen la importancia práctica de las estadísticas (sólo el 10% piensa que la estadística es menos importante que otros temas de matemáticas) y también están dispuestos a dedicar más tiempo en su enseñanza, incluso si eso implica que otros temas de la asignatura tuvieran menos atención. Así mismo, respecto a las características que debiera tener un buen proceso de instrucción, los profesores valoran la importancia de la incorporación de "buenos problemas", el empleo de diferentes representaciones gráficas para fomentar el entendimiento y el uso flexible de estrategias de aprendizaje y enseñanza.

Entre las creencias y actitudes negativas detectadas en este trabajo, se deja en evidencia un importante grado de insatisfacción de los profesores con los currículos escolares y una renuncia notable a incorporar las TIC en el desarrollo de los contenidos estadísticos.

Watson et al. (2003), realizan una investigación enfocada en estudiar la correlación entre actitud y ansiedad. Para ello se aplicó a un grupo de estudiantes un cuestionario de actitudes y otro sobre ansiedad. El segundo cuestionario estuvo compuesto por preguntas abiertas que permiten inferir las motivaciones y causas de las actitudes manifestadas por los estudiantes. Los resultados de este trabajo mostraron una alta correlación entre actitud y ansiedad. Resultados similares se muestran en los trabajos de Nasser y colaboradores (Nasser. 1999; Wisenbaker, Nasser y Scott, 1999; Nasser 2004).

4.3.2. *Estudios sobre creencias hacia la estadística*

Los trabajos cuyo objeto de estudio es indagar las creencias que se manifiestan en los profesores en ejercicio o en formación hacia la estadística resultan escasos. Entre estos estudios hemos encontrado los de Eichler (2008) y Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006).

Eichler (2008), realizó un estudio cualitativo con profesores alemanes sobre sus creencias hacia la estadística en relación a diferentes "fases" del currículo: el currículo oficial, marcado por las directrices curriculares; el currículo pretendido por el profesor; el llevado al aula; y el pretendido por los estudiantes. Entre los resultados se destaca una alta aceptación del currículo de estadística por parte de los profesores, quienes en su mayoría están a favor de la enseñanza de estos contenidos. Así mismo, se plantea que el currículo pretendido por los profesores se adecua, en general, al currículo oficial marcado en las directrices curriculares. Sin embargo, el currículo llevado al aula para estudiantes del mismo nivel educativo varía dependiendo de determinadas creencias; particularmente, de si se tiene una visión "estática" o "dinámica" de la estadística y de si se concibe como una disciplina formal o con un sentido práctico. Esto estaría también afectando el aprendizaje de los estudiantes puesto que está influenciado por la enseñanza que reciben.

Serradó et al. (2006) realizaron un estudio de casos con cinco profesores para intentar comprender las razones por las cuales omitían la enseñanza de la probabilidad e indagar en las fuentes de información que podrían afectar dicha decisión. Para llevar a cabo el estudio aplicaron cuestionarios y entrevistas dando a conocer los resultados de dos de los profesores que participaron del estudio. Uno de estos profesores (profesor A) era licenciado en matemática con especialidad en estadística y cinco años de experiencia; el otro (profesor B), licenciado en matemática y con dos años de experiencia. Los resultados obtenidos de estos dos profesores dan cuenta que el profesor A, omitía los contenidos de probabilidad debido a la creencia de que este contenido no tiene suficiente consistencia educativa en la enseñanza obligatoria ni garantiza ningún propósito práctico para estos estudiantes. Las fuentes de información empleadas por este profesor eran principalmente los libros de texto de secundaria los cuales reforzaban una visión formal. El profesor B, entre sus argumentos señaló que omitía la enseñanza de la probabilidad por considerarla un contenido difícil de aprender para sus estudiantes. Al mismo tiempo aludió a falta de fuentes de información para incorporar convenientemente los contenidos en el proceso de enseñanza.

5. DESAFÍOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA

A continuación sintetizamos los principales desafíos que presenta la formación de los profesores de educación primaria para enseñar estadística según los resultados de las investigaciones revisadas. Estos desafíos son presentados teniendo en cuenta las seis dimensiones de la idoneidad didáctica que se utilizan en el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor basado en el EOS (Godino 2009): *epistémica-ecológica*, *cognitiva-afectiva* e *interacional-mediacional*.

5.1. **Faceta epistémica-ecológica**

Estas dimensiones aluden a las características que presenta la formación de profesores con relación al contenido estadístico (faceta epistémica) y sus conexiones con elementos intra e interdisciplinares y socioculturales (faceta ecológica). Desde el punto de vista epistémico, la formación estadística de los profesores de educación primaria tiene desafíos importantes en cuanto a lograr que los profesores se encuentren mejor preparados en el dominio de los contenidos estadísticos y en su capacidad para establecer relaciones con otros contenidos y áreas del conocimiento. Las investigaciones muestran que tanto los profesores en ejercicio como en formación tienen carencias para resolver situaciones que involucran proyectos de análisis de datos, lo que estaría reflejando que no ha desarrollado los diferentes componentes del *razonamiento estadístico* (Wild y Pfannkuch, 1999). Así mismo, queda en evidencia que se requiere una *mayor comprensión en los conceptos y procedimientos básicos de la estadística*. Dichos conceptos y procedimientos están relacionados con contenidos que son incluidos en el currículo español de educación primaria y primeros niveles de educación secundaria (MEC, 2006a; MEC 2006b; MECD, 2014) como así también en propuestas internacionales (NCTM, 2000) para estos niveles educativos (medidas de tendencia central, indicadores de dispersión, valor atípico, variabilidad,...). Otro aspecto que se manifiesta deficitario es el *dominio de conocimientos para la producción de gráficos estadísticos con y sin uso de tecnologías.* El currículo escolar de educación primaria en España (MEC 2006a) propone el estudio de diferentes gráficos univariantes (gráfico de barras, gráficos de sectores, histogramas, polígono de frecuencia, gráficos de líneas y gráfico de puntos) y bivariantes (gráficos de barras adosados o apilados, polígonos de frecuencias o gráficos de líneas múltiples, gráficos de puntos múltiples e histogramas adosados) que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación y que por tanto deben ser conocidos. La *lectura e interpretación de gráficos estadísticos* es otro contenido que exige una mejor preparación por parte de los profesores, este contenido es un continuo en diferentes niveles del currículo español (MEC 2006a, MEC 2006b) y también en la propuesta del NCTM (2000).

Desde la perspectiva ecológica, las investigaciones dan cuenta que tanto los profesores en ejercicio como en formación manifiestan un manejo deficiente de las directrices curriculares y tienen dificultades para establecer relaciones entre la estadística con otras áreas de la matemática, con otras materias y con la vida personal y social de sus estudiantes.

De acuerdo a las debilidades que presenta la formación de profesores en este ámbito (epistémico-ecológico), se hace necesario enfatizar en el trabajo con "situaciones problemas" que permitan trabajar los diferentes aspectos del razonamiento estadístico y no solo conceptos y procedimientos para poder aplicarlos. En estadística las situaciones problemas toman la figura de proyectos de análisis de datos, lo que conlleva la realización de los siguientes pasos: formular o responder preguntas; recopilar datos; analizar los datos; interpretar resultados (obtener conclusiones); y comunicar la información obtenida. Estos problemas deben promover conexiones entre los contenidos estadísticos con otras áreas de las matemáticas, con otras disciplinas y con elementos socio-culturales del entorno. Así mismo, se requiere que los profesores en ejercicio y en formación logren un mayor conocimiento didáctico que les permita crear o seleccionar "problemas" que tengan en cuenta las exigencias epistémicas y ecológicas propias del nivel educativo en el que se deben desempeñar.

5.2. **Faceta cognitiva-afectiva**

La faceta cognitiva-afectiva recoge elementos relativos al aprendizaje, y a los afectos, intereses y necesidades de los estudiantes. En este ámbito, las investigaciones revisadas dan cuenta de aspectos que deben ser mejorados en la formación de los profesores de educación primaria para enseñar estadística en una doble dimensión: por una parte, se muestran resultados que ponen en evidencia "características" cognitivas y afectivas de los propios profesores hacia la estadística y por otra, su conocimiento didáctico sobre aspectos cognitivos y afectivos para llevar a cabo la enseñanza a nivel escolar.

Con respecto a las características cognitivas y afectivas de los profesores en relación a la estadística, se observa que hay contenidos del nivel escolar que no son lo suficientemente comprendidos, lo cual estaría afectando los intereses, actitudes y emociones de los propios profesores hacia la estadística. En efecto, tanto los profesores en ejercicio como en formación manifiestan inseguridad respecto al dominio de los contenidos estadísticos y una percepción de la estadística como una disciplina difícil y formal. En estos dos aspectos, además de la falta de preparación en el dominio de los contenidos estadísticos, juegan un rol fundamental las experiencias cognitivas y afectivas que los profesores han tenido como estudiante; un aprendizaje centrado principalmente en "formalismos", difícilmente conducirá a una autoestima positiva y a una valoración favorable de los contenidos estudiados.

En cuanto al conocimiento didáctico de los profesores sobre aspectos cognitivos y afectivos para enseñar estadística a nivel escolar, si bien hay elementos que son reconocidos y valorados por los profesores (como la importancia de los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes) hay otros que se manifiestan deficitarios, como son: la dificultad para identificar posibles estrategias de los estudiantes del nivel escolar al resolver problemas estadísticos; falta de conocimientos para detectar y "corregir" conflictos cognitivos; y el desconocimiento de estrategias para evaluar logros de aprendizaje.

En relación a lo anterior, si bien es cierto existen algunas propuestas que pueden orientar sobre la formación didáctica del profesor de estadística, faltan estudios que permitan profundizar en los aspectos cognitivos y afectivos que se deberían tener en cuenta en dicha formación.

5.3. **Faceta interaccional-mediacional**

En estas dimensiones se incluye el rol del profesor y los estudiantes con relación a la clase de estadística, y al mismo tiempo, la forma de seleccionar las situaciones y los materiales, y de organizar las secuencias de enseñanza. La formación didáctica del profesor de educación primaria para enseñar estadística presenta desafíos importantes respecto a estas dos dimensiones; en efecto, los resultados de las investigaciones dan cuenta que los profesores (en ejercicio y en formación) no se encuentran lo suficientemente preparados para planificar e implementar situaciones de enseñanza centradas en resolución de problemas (proyectos de análisis de datos) que favorezcan modos eficaces de interacción entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor. Así mismo se evidencian claras dificultades para integrar las TIC como medios que pueden favorecer el desarrollo de aprendizajes estadísticos.

Existen algunos esfuerzos por abordar la dimensión instruccional (interaccional y mediacional) de la estadística a través del diseño y/o evaluación de propuestas didácticas y de estudios teóricos que muestran resultados interesantes. Sin embargo, dichos trabajos están enfocados principalmente en promover el desarrollo de "metodologías didácticas innovadoras" (uso de proyectos, enfoque realista, uso de TIC) para la formación estadística de profesores en ejercicio y en formación, sin profundizar mayormente en la formación didáctica de dichos profesores para que puedan replicar las mismas metodologías didácticas con los estudiantes de las escuelas. Esto supone un desafío importante desde el punto de vista de la formación profesional del profesor, ya que no basta con vivenciar "situaciones óptimas" de enseñanza (en el rol de estudiantes) para saber aplicarlas como profesor. Se requiere de algún tipo de reflexión o "instrucción didáctica" para llegar a comprender y organizar las relaciones de los diferentes actores del sistema didáctico con los conocimientos estadísticos, y con los recursos materiales que debieran ser utilizados.

6. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos logrado algunos resultados preliminares respecto al propósito de nuestra investigación. En primer lugar, hemos conocido las principales ideas que se han desarrollado sobre la formación profesional del profesor de matemática así como también sobre la formación del profesor para enseñar estadística; lo que hemos constatado, es que si bien existen algunos "marcos teóricos" sobre la formación de profesores para enseñar estadística, estos son más recientes y menos desarrollados que los modelos sobre formación profesional del profesor de matemática. En segundo lugar, el estudio de la literatura sobre formación de profesores de educación primaria para enseñar estadística nos ha llevado a establecer una clasificación inicial de las investigaciones realizadas en tres grandes temas: (1) investigaciones sobre el conocimiento del contenido de estadística; (2) estudios sobre didáctica de la estadística, donde hemos incluido los estudios sobre conocimiento didáctico de estadística y aquellos enfocados en el diseño y/o evaluación de propuestas de enseñanza; y (3) estudios sobre actitudes y creencias. Esta clasificación, nos ha permitido hacer una primera aproximación a las especificidades que presenta la formación estadística de los profesores de educación matemática en los niveles de la educación primaria. En tercer lugar, hemos logrado establecer una correspondencia entre los resultados de las investigaciones y las facetas propuestas en el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor basado en el EOS (Godino 2009). Esto nos ha permitido sintetizar los principales desafíos que presenta la formación de profesores de educación primaria para enseñar estadística. Lo que se observa, es que hay desafíos importantes en todos los ámbitos de la formación profesional (epistémico, ecológico, cognitivo, afectivo, interaccional y medicional). Dichos desafíos, deben ser considerados, puesto que, son parte de los conocimientos que debe manejar el profesor para dar respuesta a las actuales exigencias de las propuestas curriculares nacionales (MEC, 2006a; MEC, 2006b; MECD, 2014) e internacionales como son los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000)

CAPÍTULO 2

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrollan tres grandes temas: el problema de investigación, el marco teórico y la metodología. El problema de investigación se caracteriza teniendo en cuenta su justificación (relevancia e implicaciones prácticas), las preguntas de investigación y los objetivos.

El marco teórico que utilizamos en la investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino y colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007); en particular, aplicamos las nociones de idoneidad didáctica, sistema de prácticas, noción de objetos y procesos, configuración y trayectoria didáctica, hecho didáctico significativo y, dimensión normativa. Así mismo, por tratarse de un estudio sobre formación estadística de profesores, aplicamos las nociones de conocimiento común y avanzado del contenido desde la interpretación adoptada en el modelo didáctico-matemático del conocimiento del profesor de Godino y colaboradores (Godino, 2009).

Con respecto a la metodología, en el *estudio 1,* aplicamos la técnica de análisis de contenido (cualitativo) (Krippendorff, 1990; Hernández, Fernández y Baptista, 2006) y en el *estudio 2,* empleamos una metodología específica de ingeniería didáctica (Artigue, 1989; 2011) o investigación de diseño (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer, y Schauble, 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008) basada en nuestro caso en la aplicación de las herramientas teórica del EOS.

El capítulo está estructurado de la siguiente forma: en el apartado 2, se presenta el problema de investigación; en el apartado 3, se expone una síntesis de las nociones teóricas que fundamentan el estudio enfatizando en aquellas ideas que son aplicadas en el desarrollo de la investigación; en el apartado 4, se describe la metodología de investigación empleada en cada estudio; y finalmente, en el apartado 5 se presenta una síntesis con las principales conclusiones del capítulo.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En la actualidad se ha venido demandando cada vez más el desarrollo de una cultura estadística en los ciudadanos (Batanero, 2002; Gal, 2002). Esta demanda se ha visto acrecentada por el acceso que nos brindan las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y otros medios de comunicación a diversos temas que contienen información estadística (salud, educación, economía, política, deporte,…) y que, por tanto, exigen un nivel mínimo de "preparación estadística" para poder comprenderlos y tomar decisiones de manera informada. La necesidad de desarrollar una cultura estadística en los ciudadanos ha provocado cambios importantes en los currículos escolares de diferentes países del mundo (p. ej., Estados Unidos, Brasil, Chile, España…) donde se ha incorporado el tema del *razonamiento estadístico* como un componente central en el estudio de los contenidos estadísticos desde los primeros niveles de enseñanza.

Uno de los documentos curriculares de consenso internacional que han sido la base para la reforma de los currículos de matemáticas en distintos países son los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). En esta propuesta curricular se incluye, dentro de los estándares de contenido, el estándar *Análisis de datos y Probabilidad*, en el cual se propone un conjunto de capacidades que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían contemplar:

- Formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas.
- Seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos.
- Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos.
- Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.

El estándar de Análisis de datos y Probabilidad propuesto en el NCTM (2000) recomienda que:

> "los alumnos formulen preguntas que puedan contestarse mediante datos y afronten lo que esto requiere: la recogida de los datos y su acertado uso.

Deberían aprender a recoger datos, organizar los propios y los ajenos, y representarlos en gráficos y diagramas que resulten útiles para responder a las preguntas. Incluyen también el aprendizaje de algunos métodos para analizar los datos y algunas formas de hacer inferencias y obtener conclusiones a partir de ello. También se abordan los conceptos y las aplicaciones básicas de la probabilidad, haciendo hincapié en cómo se relaciona ésta y la estadística." (NCTM, 2000, p. 51).

Otro documento de consenso internacional que complementa la propuesta del NCTM (2000) con respecto al estándar Análisis de datos y Probabilidad, son las Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE). Este documento proporcionan un marco conceptual para la educación estadística en la etapa Pre-K-12 (Infantil hasta Secundaria), centrado en la *resolución de problemas de análisis de datos* que promueven distintos niveles (niveles A, B y C) de alfabetización estadística (Franklin y cols., 2005). Estos niveles no se conectan directamente con grados o cursos del currículo escolar. Sin embargo, consideramos que en los niveles A y B se incluyen las principales competencias que se deberían tener en cuenta en los cursos de educación primaria (1º a 6º grado) y primeros niveles de la eduación secundaria (7º y 8º grado).

En el nivel A, se propone que los estudiantes deben comprender que los datos son "algo más que números"; los datos se generan en contextos o situaciones particulares y se utilizan para responder preguntas relativas a dichos contextos o situaciones. En este sentido, se sugiere dar oportunidades a los estudiantes para que, apoyados por el profesor, planteen preguntas acerca de contextos particulares (p. ej., su sala de clase) y que determinen los datos que deben ser recopilados para responder dichas preguntas; así mismo, se sugiere que los estudiantes deben aprender a utilizar las herramientas básicas de la estadística para analizar los datos y hacer inferencias "informales" para responder las preguntas planteadas.

Por último, se propone que los estudiantes deben desarrollar las ideas básicas de la probabilidad con el fin de apoyar su uso posterior en la elaboración de inferencias en los niveles B y C.

Específicamente, en el nivel A, se recomienda tener en cuenta los siguientes aspectos en la resolución de problemas de análisis de datos:

a. *Formulación de preguntas:* los profesores deben guiar a los estudiantes en el planteamiento de preguntas que sean de interés para ellos (se recomienda el uso del contexto de la sala de clase); los estudiantes deben distinguir entre las respuestas no deterministas de la estadística y las respuestas de tipo deterministas.
b. *Recopilación de datos para responder las preguntas:* realización de censos en la sala de clases (aplicación de encuestas); comprensión de la variabilidad natural que se da entre los sujetos (personas); uso de experimentos aleatorios simples; comprensión de la variabilidad inducida (atribuible a una condición experimental).
c. *Análisis de los datos:* comparar un individuo a otro; comparar un individuo a un grupo; comparar grupos; describir una distribución; analizar la relación entre dos variables; uso de diferentes herramientas para analizar las distribuciones y relaciones (gráfico de barras, gráfico de puntos, diagrama de tallo y hoja, diagrama de dispersión, tablas de frecuencias, media, mediana, moda y rango).
d. *Interpretación de resultados:* establecer inferencias sobre las muestras; reconocer que los resultados pueden ser diferentes en otras muestras; reconocer la limitación del ámbito de aplicación de las inferencias.

En el nivel B, el proyecto GAISE, propone que la estadística debe basarse en el desarrollo logrado en el nivel A y tener en cuenta las exigencias de la estadística del nivel C. En este nivel se hace hincapié en las cuatro fases del proceso de investigación estadística y en el "espíritu" de una práctica estadística genuina, promoviéndose el uso del razonamiento estadístico como un proceso para resolver problemas a través de los datos. Se asume que en este nivel los estudiantes se hacen más conscientes de las preguntas que admiten respuestas basadas en datos que varían en comparación con una pregunta de tipo determinista. También se propone que los estudiantes deben ser capaces de tomar decisiones acerca de las variables a medir y de cómo medirlas con el fin de dar respuesta a las cuestiones planteadas.

En este nivel se propone utilizar y ampliar los gráficos, tablas y resúmenes numéricos presentes en el nivel A y de investigar problemas más complejos. Además, en la selección de una muestra, se espera que los estudiantes comprendan el rol de la probabilidad (orden aleatorio de selección, asignación al azar) al llevar a cabo un experimento.

Específicamente, en el nivel B, se recomienda tener en cuenta los siguientes aspectos en la resolución de problemas de análisis de datos:

a. *Formulación de preguntas:* los estudiantes comienzan a plantear su propias preguntas; las cuestiones planteadas deben ir más allá del contexto inmediato (la sala de clase); y se debe comenzar la distinción entre censo, población y muestra.
b. *Recopilación de datos para responder las preguntas:* aplicación de censos de dos o más salones de clase; aplicación de encuestas por muestreo y uso de selección al azar; diseño y realización de experimentos comparativos comenzando a utilizar la asignación aleatoria.
c. *Análisis de los datos:* cuantificación de la variabilidad; comparación de dos o más distribuciones mediante gráficos y resúmenes numéricos; uso de herramientas más sofisticadas para resumir y comparar distribuciones (histogramas, diagramas de caja, desviación media absoluta,…); reconocimiento de errores de muestreo; cuantificación de la relación entre dos variables.
d. *Interpretación de resultados:* establecer inferencias con relación a dos o más distribuciones teniendo en cuenta medidas de tendencia central, dispersión y forma; reconocimiento de si una muestra es o no representativa de una población; comprensión de las interpretaciones básicas de medidas de asociación; distinción entre "asociación" y "causa y efecto".

En España, los actuales diseños curriculares para la enseñanza obligatoria (MEC 2006a; MEC 2006b) incluyen un bloque específico sobre estadística y probabilidad en todos los niveles de enseñanza, tanto de educación primaria como secundaria. En la enseñanza primaria, estos contenidos se encuantran incluidos en el bloque 4, Tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el cual se establecen los siguientes contenidos:

- Primer ciclo: descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos; utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos; distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad; participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales y; respeto por el trabajo de los demás.

- Segundo ciclo: tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos; recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición; lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana; interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares; disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara; valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto; introducción al lenguaje del azar y; confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica.
- Tercer ciclo: recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición; distintas formas de representar la información; tipos de gráficos estadísticos; valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos; la media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares; disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara; obtención y utilización de información para la realización de gráficos; presencia del azar en la vida cotidiana; estimación del grado de probabilidad de un suceso; valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas y; confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.

Respecto al tratamiento de estos contenidos, en el decreto de educación primaria, se enfatiza en la conexión de los contenidos estadísticos con otras áreas del conocimiento, en su utilidad para comprender y usar críticamente información presente en diferentes medios y en valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones. A su vez, los contenidos de este bloque son especialmente valorados en su relación con el bloque sobre contenidos actitudinales, puesto que, favorecen la presentación de la información en forma ordenada y permiten descubrir la importancia de la matemática en la vida diaria.

El desarrollo que ha experimentado la estadística en los currículos escolares, ha despertado el interés de la comunidad de investigadores por realizar estudios sobre la temática, siendo uno de sus focos, la preparación de los profesores para enseñar la disciplina (Batanero, Burrill y Reading, 2011). Entre estas investigaciones, la mayoría de los trabajos han estado centrados en identificar "dificultades" específicas (cognitivas, afectivas, instruccionales) que manifiestan los profesores en ejercicio o en formación para abordar con seguridad los objetivos en el aula. Sin embargo, la implementación de las directrices curriculares sobre educación estadística en las aulas, requiere que los profesores de matemáticas reciban la formación adecuada. *Determinar cómo debe ser dicha formación para que los profesores estén capacitados para desarrollar la comprensión y uso de las ideas estadísticas por parte de los escolares es un problema abierto en el campo de investigación sobre educación estadística*.

Con relación a este problemática, nos hemos planteado dos estudios: el estudio 1, está enfocado en la construcción de un instrumento de evaluación de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción estadística de profesores de educación primaria y el estudio 2, se centra en el diseño, análisis y evaluación de un proceso de enseñanza-aprendizaje sobre estadística con futuros profesores de educación primaria.

Con respecto al problema de investigación y los estudios que nos proponemos abordar nos plateamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué conocimientos estadísticos y didácticos deberían tener los maestros para que su enseñanza sobre este bloque temático en primaria tenga niveles altos de idoneidad didáctica?,
- ¿Qué característica deberían reunir los procesos formativos sobre estadística de los maestros en formación para que estén capacitados para planificar, implementar y evaluar procesos de enseñanza de la estadística con alta idoneidad didáctica?

Teniendo en cuenta las preguntas anteriores nos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

- *Objetivo general:* Caracterizar y valorar la idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria y proponer criterios de mejora.
- *Objetivos específicos:*
  - ✓ OE 1: Analizar las investigaciones teóricas y empíricas del campo de la educación estadística a fin de identificar conocimientos estadísticos y didácticos que se deben poner en juego en un proceso de formación estadística de profesores de primaria para que dicho proceso tenga altos niveles de idoneidad.
  - ✓ OE 2: Identificar las principales normas sobre educación matemática y estadística que subyacen en las actuales propuestas curriculares para la educación primaria e inferir indicadores de idoneidad didáctica a partir de dichas normas.
  - ✓ OE 3: Construir un sistema de indicadores de idoneidad didáctica para evaluar planes y acciones formativas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística en procesos de formación inicial de profesores de educación primaria.
  - ✓ OE 4: Describir y analizar el diseño e implementación de acciones formativas específicas sobre estadística en un curso de formación inicial de profesores de educación primaria con el fin de elaborar una metodología de ingeniería didáctica basada en la aplicación de las herramientas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Indicamos a continuación algunas hipótesis básicas, entendidas como exceptivas de resultados de la investigación, que orientarán las fases y actividades a realizar.

- H1. El análisis sistemático del contenido de documentos curriculares, y de resultados de la investigación en educación estadística, aportará indicadores de idoneidad didáctica de planes y procesos instruccionales sobre contenidos matemáticos y estadísticos, que al confrontarlos con la pauta propuesta en el marco del EOS (Godino 2011) y con resultados de investigaciones sobre formación de profesores para enseñar estadística permitirá obtener un instrumento específico para la valoración de la idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria. En particular, se espera encontrar nuevos indicadores de idoneidad para la dimensión epistémica y algunos que permitirán complementar los indicadores de las otras dimensiones.

- H2. El diseño, implementación y evaluación de un proceso formativo sobre estadística con futuros profesores de educación primaria permitirá sistematizar el uso de las principales herramientas del EOS y determinar su aplicabilidad en las diferentes fases de la ingeniería didáctica.
- H3. El análisis y valoración del diseño e implementación de una experiencia formativa en educación estadística permitirán identificar criterios de mejora de su idoneidad en las diferentes facetas. De manera más específica, se espera encontrar:
    - ✓ Faceta epistémica: Se pondrán en juego la mayoría de los objetos matemáticos primarios (problemas, conceptos, lenguajes, proposiciones, procedimientos argumentos) de la estocástica elemental. Sin embargo, habrá contenidos relevantes no contemplados que pueden ser abordados a través de las situaciones propuestas.
    - ✓ Faceta ecológica: Escasa conexión entre los contenidos estadísticos con otras disciplinas de la formación profesional y entre los contenidos estadísticos de distintos niveles de enseñanza del ámbito escolar.
    - ✓ Faceta cognitiva: Deficiente comprensión de conceptos y procesos estadísticos básicos y dificultades para aplicar adecuadamente el uso del razonamiento estadístico.
    - ✓ Faceta afectiva: Falta de compromiso personal de algunos estudiantes para asumir la responsabilidad de su estudio, lo cual demandará una atención especial por parte del profesor formador.
    - ✓ Faceta interaccional: Escasa interacción docente-discente a nivel individualizado; no se identifican conflictos cognitivos en la interacción intra-equipos y; prevalencia de procesos instruccionales expositivos.
    - ✓ Faceta mediacional: La incorporación de la hoja de cálculo y software de simulación supondrá una dificultad especial para algunos estudiantes no familiarizados con dichas herramientas. Así mismo, el alto número de alumnos hará difícil un seguimiento individualizado del progreso de los aprendizajes.

3. MARCO TEÓRICO

Como ya hemos señalado, el marco teórico que sustenta la investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino y cols (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, et al., 2007; Font, Godino y D'Amore, 2007). El EOS adopta una postura sistémica que integra diversas aproximaciones y enfoques teóricos usados en la investigación en educación matemática, configurando así, un modelo epistemológico (basado en presupuestos antropológicos/socioculturales), un modelo cognitivo (sobre bases semióticas), un modelo instruccional (sobre bases socio-constructivas) un modelo sistémico ecológico (que relaciona las dimensiones anteriores entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática).

Para describir, explicar y valorar los procesos de diseño e instrucción de la actividad matemática, en el EOS se han desarrollado diferentes nociones de las cuales en el presente estudio aplicamos las siguientes: (1) idoneidad didáctica; (2) sistema de prácticas y noción de objetos y procesos; (3) configuración y trayectoria didáctica; (4) hecho didáctico significativo; y (5) dimensión normativa. Además, teniendo en cuenta que la investigación se centra en estudiar procesos de formación estadística de profesores, aplicamos las nociones de *conocimiento común* y *avanzado del contenido matemático* desde la interpretación hecha en el modelo didáctico-matemático del conocimiento del profesor desarrollada en el EOS (Godino, 2009).

A continuación sintetizamos cada una de estas nociones explicando la forma en que son utilizadas en la investigación.

3.1. **Noción de idoneidad didáctica**

La idoneidad didáctica (Godino, et al., 2007; Godino, Contreras y Font, 2006) es entendida como el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico es la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados. Para hacer operativa esta definición, se introducen seis dimensiones o facetas, cuya articulación coherente y sistémica determinan la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción (Godino, et al., 2007). En la figura 2.1, se resumen las seis facetas que componen la idoneidad didáctica representadas mediante un hexágono regular que a priori suponen un grado máximo de idoneidades parciales de un proceso de estudio diseñado o implementado. El hexágono inscrito correspondería a idoneidades efectivamente logradas.

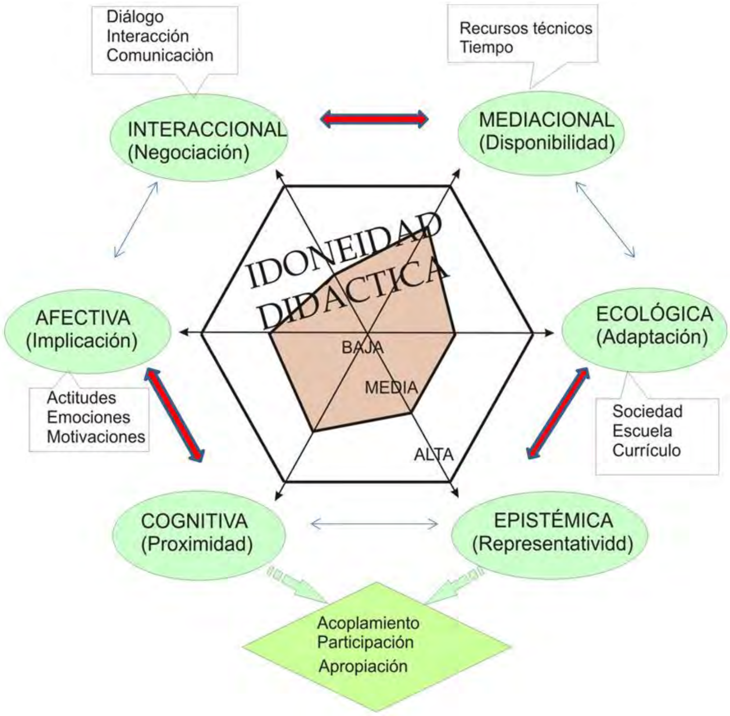


Figura 2.1. Facetas de la idoneidad didáctica (Godino, 2014, p. 42)

Las facetas anteriores son interpretadas de la siguiente forma:

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación,…) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con

factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

- *Idoneidad interaccional.* Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Cada una de estas facetas está formada por componentes que permiten un desglose operativo de dichas dimensiones. En la tabla 2.1. se muestran los componentes asociados a cada faceta:

Tabla 2.1. Facetas de la idoneidad didáctica y sus componentes

DIMENSIONES	COMPONENTES
Epistémica	Situaciones problemas Lenguajes Reglas Argumentos
Ecológica	Innovación Adaptación socio-cultural y profesional Conexiones intra e inter disciplinares
Cognitiva	Conocimientos previos Diferencias individuales Aprendizajes (evaluación sumativa)
Afectiva	Intereses Actitudes Emociones
Interaccional	Interacción docente-discente Interacción entre discentes Autonomía Evaluación formativa
Mediacional	Recursos materiales Número de alumnos Condiciones del aula Tiempo para la enseñanza y el aprendizaje

En Godino (2011), teniendo en cuenta estas facetas y componentes, se sistematizan y amplían indicadores de idoneidad didáctica propuestos en trabajos previos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006), al tiempo que se relacionan dichos indicadores con principios didácticos asumidos por diversas teorías usadas en didáctica de las matemáticas, principalmente la Teoría de situaciones (Brousseau, 1986, 1998) y la Matemática realista (Freudenthal, 1991).

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, componentes y criterios, han sido introducidos en el EOS como herramientas que permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula (Godino, 2011). En nuestro trabajo aplicamos esta noción como una herramienta central en toda la investigación. En el estudio 1, se aplica para identificar y clasificar "normas" presentes en documentos curriculares y seguidamente para inferir y redactar indicadores a partir de dichas normas. En el estudio 2, determina las dimensiones de análisis que se deben tener en cuenta en cada una de las fases de la ingeniería didáctica (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación). La noción de idoneidad didáctica ha sido usada por otros investigadores como De Castro (2007), Alsina y Domingo (2010) y Andrade (2014).

3.2. **Sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos**

Las nociones de *sistemas de prácticas* y de *objetos y procesos* resultan complementarias respecto al tipo de análisis que permiten realizar. Como se detalla en Godino (2012) el par "sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos" introducidas en el EOS (Godino, 2002; Godino, et al., 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) se consideran nociones claves para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos requeridos en didáctica de las matemáticas.

3.2.1. *Sistema de prácticas*

Según Godino y Batanero (1994) una práctica matemática puede ser de tipo *operativa* o *discursiva* y es considerada como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. En el EOS se propone una tipología básica de significados y de relaciones que se manifiestan entre *significados personales e institucionales* en la resolución de problemas matemáticos (figura 2.2).

Figura 2.2. Significados personales e institucionales (Godino, 2014, p. 13)

Entre los significados personales se proponen tres tipos: (1) *global*, corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático; (2) *declarado,* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; y (3) *logrado,* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados *iniciales o previos* de los estudiantes y los *emergentes*.

En relación a los significados institucionales se proponen los siguientes: (1) *Referencial,* sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido; (2); *pretendido,* alude al sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio; (3) *implementado,* es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente y (4); *evaluado,* el subsistema de prácticas utilizado por el docente para evaluar los aprendizajes.

3.2.2. *Objetos y procesos matemáticos*

Los objetos matemáticos intervienen y emergen de los sistemas de prácticas. Se consideran dos niveles de objetos, los *objetos primarios* y los *objetos secundarios.*

Los objetos primarios están compuestos por:

- *Situaciones-problemas,* aplicaciones extra o intra matemáticas, tareas, ejercicios, ...
- *Lenguajes,* términos, expresiones, notaciones, gráficos,…
- *Conceptos,* introducidos mediante definiciones o descripciones.
- *Proposiciones,* enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos,* algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…
- *Argumentos,* enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

Los objetos secundarios están compuestos por las siguientes facetas o dimensiones duales:

- *Expresión-contenido,* relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado).
- *Personal-institucional,* se consideran objetos personales los que emergen de sistemas de prácticas específicas a una persona, mientras que si los objetos emergen de sistemas de prácticas compartidas en el seno de una institución son entendidos como objetos institucionales.
- *No ostensivo-ostensivo,* los objetos ostensivos son aquellos objetos que se pueden mostrar a otros (notaciones, símbolos,…) y los no ostensivos son los no perceptibles por sí mismos (los objetos institucionales y personales).
- *Unitario-sistémico,* en algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias, supuestamente conocidas y en otras, se deben descomponer para su estudio, p.ej., el sistema de numeración decimal (unidad, decena, centena,…) es visto como una entidad unitaria elemental en el estudio de la adición, pero en cursos anteriores es considerado de manera sistémica.
- *Ejemplar-tipo (extensivo-intensivo),* un objeto que interviene como un caso particular es un objeto de tipo ejemplar (p.ej., la función $y=2x+1$), en cambio una clase más general adquiere el status de un objeto tipo (p.ej., la familia de funciones $y=mx+n$).

Tanto las configuraciones de objetos primarios como las dualidades se pueden analizar desde la perspectiva *proceso-producto* lo cual lleva a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos: *representación - significación; institucionalización-personalización; materialización - idealización; descomposición - reificación;*

particularización - generalización. En la figura 2.3 se representan las nociones teóricas que hemos sintetizado sucintamente.

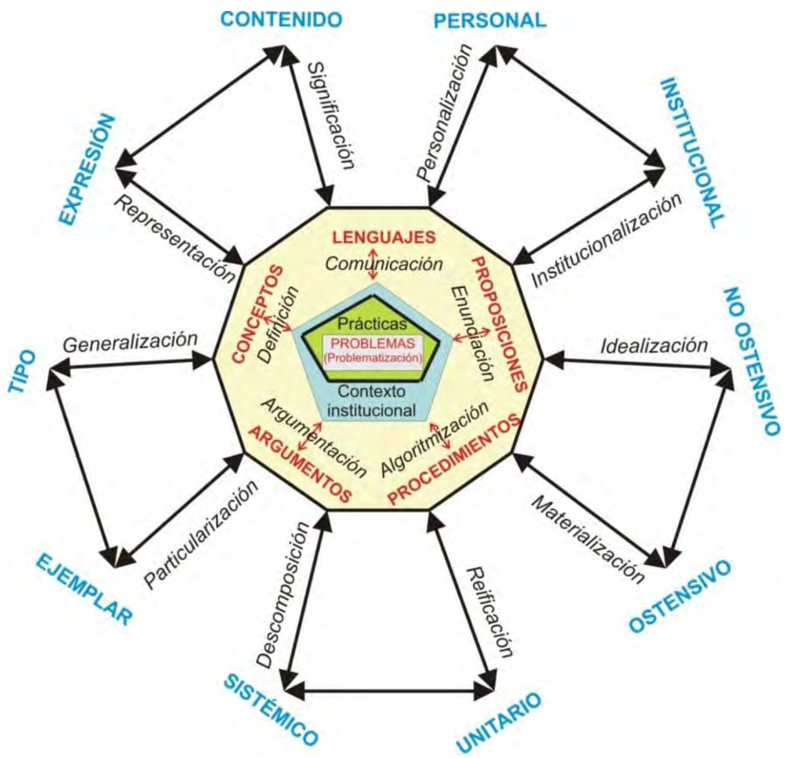


Figura 2.3. Configuración de objetos y procesos (Godino, 2014, p. 23)

Las *situaciones problemas* ocupan el lugar central; son vistas como el origen o la razón de ser de la actividad matemática. Los objetos primarios amplían la distinción tradicional que se hace entre entidades conceptuales y procedimentales y se constituyen en una herramienta potente para describir los *objetos intervinientes* y *emergentes* de la actividad matemática. Así mismo, los objetos secundarios y los procesos permiten un análisis más detallado de la actividad matemática.

Las nociones de sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos permiten abordar los análisis epistemológicos y cognitivos en didáctica de las matemáticas según el marco del EOS. En particular, permiten caracterizar los conocimientos institucionales (componente epistémico) y los conocimientos personales (componente cognitivo). En nuestro caso aplicamos principalmente las nociones de sistema de prácticas, objetos primarios y la noción de procesos como herramientas de análisis y descripción en el desarrollo de la ingeniería didáctica que abordamos en esta investigación.

3.3. **Configuración y trayectoria didáctica**

En Godino, Contreras y Font (2006) se introducen estas nociones teóricas para el análisis de los procesos de instrucción matemática. Una *configuración didáctica*[1] es un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación-problema diseñada o implementada. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea. La situación-problema sobre la cual se delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas cada una de las cuales se puede considerar como una *subconfiguración*. Una *trayectoria didáctica* se define como la secuencia de configuraciones didácticas mediante las cuales se aborda el estudio del contenido pretendido.

En nuestro estudio las nociones de configuración y subconfiguración tienen una doble función en el desarrollo de la ingeniería didáctica: por una parte, aplicamos estas herramientas para dividir la crónica del proceso de estudio implementado en unidades de análisis y por otra, las utilizamos junto a la noción de trayectoria didáctica para realizar una descripción narrativa de la implementación (experimentación).

3.4. **Noción de hecho didáctico significativo**

La noción de hecho didáctico significativo (HDS), tal como la usamos en este trabajo, complementa las posibilidades de análisis realizadas mediante las nociones de configuración y subconfiguración. En efecto, en el transcurso de una subconfiguración didáctica pueden ocurrir *hechos didácticos* que interesa analizar. En (Wilhelmi, Font y Godino, 2005) se define un *hecho didáctico* como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción matemática y que, por alguna razón, se considera como una unidad (por ejemplo, resolver una ecuación en la pizarra). Los hechos que implican una cierta *regularidad explicable* en el marco de una teoría constituyen un *fenómeno*; pero también pueden carecer de esa regularidad en cuyo caso se tiene un fenómeno singular (dan pie a “teoremas de existencia y a contraejemplos”).

[1] La noción de configuración didáctica en la *teoría de la génesis instrumental* hace referencia a las disposiciones particulares de los artefactos del entorno, correspondientes a cada fase de una situación. La orquestación instrumental incluye las configuraciones didácticas, sus modos de explotación y su articulación (Trouche, 2004). El foco de atención no es la situación problema, sino los artefactos usados y los modos en que se usan y articulan.

En este trabajo se considera que un *hecho didáctico* es *significativo* si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del estudiante, o bien desde un punto de vista institucional externo al sistema didáctico, es decir, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional. Se pueden asimilar a fenómenos singulares ya que la interpretación se hace siempre desde una cierta teoría.

La noción de HDS se utiliza en el desarrollo de la ingeniería didáctica como criterio para seleccionar unidades de análisis y a la vez como herramienta para sintetizar e interpretar la trayectoria didáctica implementada.

3.5. **Dimensión normativa**

El reconocimiento de las normas que condicionan y hacen posible los procesos de estudio matemático han sido objeto de diversas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Tal es el caso de la noción de *contrato didáctico* (Brousseau, 1998), y de otras nociones basadas en el *interaccionismo simbólico* (Blumer, 1969), como *patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas* (Cobb y Bauersfeld, 1995). Se trata de tener en cuenta las reglas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como "microsociedad", que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes.

El foco de atención, en estas aproximaciones, ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos. En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva unificada del conocimiento y la instrucción matemática que proporciona el EOS, tratando de identificar sus conexiones mutuas y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa que proponen Godino et al. (2009) – epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva, instruccional (interaccional y mediacional) – permiten:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas, y su tipología, que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.
- Sugerir posibles cambios en las normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

La reflexión sobre las normas se realiza en dos fases del proceso metodológico de la ingeniería didáctica: primero, como parte del diseño y posteriormente en la fase de análisis retrospectivo.

3.6. **Conocimiento didáctico-matemático**

En Godino (2009) se han aplicado las herramientas teóricas del EOS para elaborar un sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas que designa como modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Cuando el foco de atención son los conocimientos que el profesor de matemáticas debe poner en juego como organizador y gestor de un proceso de enseñanza y aprendizaje tales conocimientos incluyen los relativos a cada una de las seis facetas implicadas en tales procesos, como se indica en la figura 2.4. El modelo incluye además las categorías relativas al conocimiento matemático común y avanzado (conocimiento en el horizonte matemático) introducidas en el modelo del MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) (Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008).

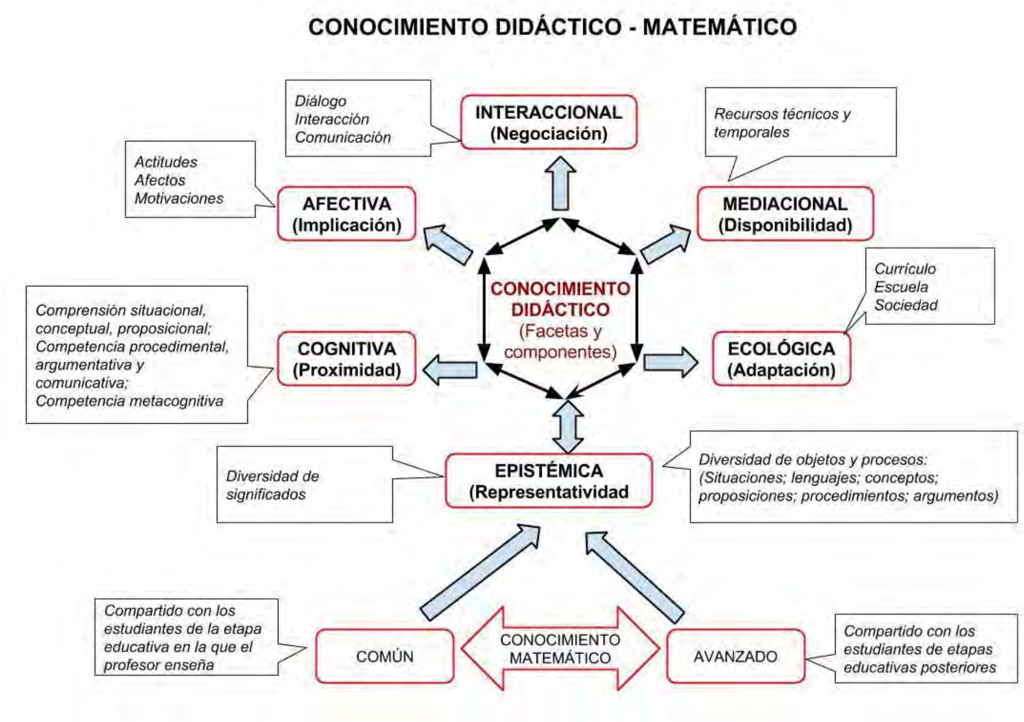


Figura 2.4. Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2014, p. 52)

4. METODOLOGÍA

En este apartado se describen los procesos metodológicos empleados en la investigación. Estos procesos metodológicos están asociados a los dos estudios que hemos realizado: el estudio 1, correspondiente a la construcción del instrumento de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria y el estudio 2, que corresponde al diseño, implementación y evaluación de un proceso de formación estadística con futuros profesores de educación primaria.

4.1. **Metodología de investigación empleada en el estudio 1**

Este estudio corresponde a una investigación cualitativa de tipo exploratoria descriptiva donde la técnica empleada es el análisis de contenido. Es una investigación cualitativa puesto que reúne características propias de estos estudios: se usa un proceso inductivo (explorar, describir y luego generar perspectivas generales); los datos no se reducen a valores numéricos; la técnica para recolectar datos es la revisión de documentos; se fundamenta en una perspectiva interpretativa; y por último, no se pretenden generalizar de manera probabilística los resultados (Hernández, Fernández y Baptista; 2006). El estudio es de tipo exploratorio, en tanto que, el estado del conocimiento sobre la problemática que se aborda se encuentra poco estudiado; en efecto, la revisión de la literatura arroja que las investigaciones se relacionan vagamente con la complejidad del tema y por tanto, se requiere de investigaciones que permitan aumentar el grado de familiaridad con dicho fenómeno. “Los estudios exploratorios se efectúan, normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado antes” (Hernández, Fernández y Baptista, 1997, p. 57). Finalmente, los elementos que hacen que esta investigación sea de tipo descriptiva, están determinados por el nivel de especificidad en que se llega a describir el fenómeno en estudio. Según Dankhe, (1986, citado en Hernández et al. 1997) los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades importantes de cualquier fenómeno que sea sometido a análisis.

La técnica utilizada para recoger la información es el análisis de contenido. Esta técnica en un sentido amplio, que es como lo vamos entender en el marco de este trabajo, es según Andréu (2011):

> “una técnica de interpretación de textos, ya sean escritos, grabados, pintados, filmados..., u otra forma diferente (…) el denominador común de todos estos materiales es su capacidad para albergar un contenido que leído e interpretado adecuadamente nos abre las puertas al conocimientos de diversos aspectos y fenómenos de la vida social” (Andréu, 2011, p. 2)

Las técnicas de análisis de contenido pueden ser de tipo cuantitativa o cualitativa. La primera, da importancia en el análisis de la información a la *frecuencia de la aparición de ciertas características del contenido*. El análisis cualitativo, en cambio, considera que lo útil de la información es la *presencia o ausencia de una característica del contenido,* en un cierto fragmento de mensaje que es tomado en consideración (Krippendorff, 1990; Hernández et al., 2006).

En este estudio aplicamos la técnica de análisis de contenido cualitativa para extraer y sistematizar “normas” de idoneidad didáctica contenidas en documentos curriculares de consenso internacional (NCTM, 2000 y proyecto GAISE) y en el currículo escolar de España (MEC 2006a; MEC 2006a). A partir de dichas normas se infieren indicadores de idoneidad para las diversas facetas o dimensiones de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, estos indicadores son confrontados con resultados de investigaciones para optimizar su formulación inicial enfocado en la formación estadística de profesores.

A continuación presentamos las cuatro que distinguimos en este proceso metodológico.

a. *Selección y clasificación de unidades de análisis*; en una primera fase, se seleccionan unidades de análisis (UA) clasificándolas según las facetas y componentes que propone la Teoría de Idoneidad Didáctica.
b. *Comparación y reducción de unidades de análisis*; las UA son comparadas entre sí y reducidas a fin de evitar reiteraciones. El proceso consiste en identificar UA que pudieran estar contenidas en otra unidad o que no aportan información nueva y relevante para dejarlas representadas en una única UA de análisis final.
c. *Inferencia de indicadores*; a partir de las UA resultantes se infieren indicadores de idoneidad didáctica. En nuestro caso, dichos indicadores están enfocados en valorar procesos de instrucción matemática/estadística.
d. *Contraste de indicadores con la literatura investigativa*; los indicadores inferidos son confrontados con resultados de investigaciones a fin de identificar concordancias y complementariedades. En nuestro estudio, confrontamos los indicadores inferidos con el sistema de indicadores propuestos en Godino (2011) y con resultados de investigaciones sobre formación de profesores de educación primaria para enseñar estadística; obteniendo así, un instrumento enfocado en procesos de formación estadística de profesores.

Los indicadores resultantes son utilizados para valorar la idoneidad didáctica de un plan de formación estadística de futuros profesores de educación primaria de una universidad de Chile.

En el desarrollo de las fases anteriores se tienen en cuenta los siguientes elementos que son característicos de la técnica de análisis cualitativa: (1) determinación del objeto o tema de análisis; (2) definición del sistema de categorías y reglas de codificación; (3) comprobación de la fiabilidad y validez del sistema de categorización-codificación; y (4) establecimiento de inferencias (Andréu, 2011; Krippendorff, 1990). A continuación explicamos cada una de estas fases y la forma en que han sido aplicadas.

4.1.1. *El objeto o tema de análisis: unidades de muestreo, de registro y de contexto*

Determinar el objeto o tema de análisis implica abordar los siguientes aspectos: *definir lo que se quiere investigar, revisar la bibliografía*, *construir un marco teórico y definir las unidades de análisis*. Teniendo en cuenta, que las tres primeras cuestiones ya fueron abordadas, acotaremos este punto en lo referente a las unidades de análisis. Según

Aranguren (1994, citado en Andréu 2011) existen tres tipos de unidades de análisis: *unidades de muestreo*, *unidades de registro* y *unidades de contexto*.

Las unidades de muestreo son las porciones del universo que serán analizadas. La selección de la muestra, se puede realizar utilizando distintas estrategias; sin embargo, hay algunas que tienen mejor correspondencia con las técnicas de análisis cuantitativo y otras, con las técnicas de análisis cualitativo. En los diseños cuantitativos es usual el empleo de muestras probabilísticas, al contrario de lo que sucede en los diseños de análisis de contenido cualitativo, donde una de las formas que se utilizan con frecuencia suele ser la intencional. Esta última, es el tipo de muestreo que utilizamos en nuestro trabajo.

En la muestra intencionada se distinguen dos modalidades de seleccionar la muestra: *opinático* y *teórico.* Los muestreos opináticos están determinados por elementos como la voluntariedad, la facilidad o el conocimiento que se tiene de la situación. En el muestreo teórico, el investigador colecciona, codifica y analiza sus datos, decidiendo qué datos coleccionar, y dónde encontrarlos. En el presente estudio hemos hecho un muestreo de tipo teórico seleccionando los siguientes documentos:

a) Principles and Standard for School Mathematics (PSSM) del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000).
b) Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE), (Franklin y cols., 2005).
c) REAL DECRETO MEC 1513/2006, de 7 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Primaria en España.
d) REAL DECRETO MEC 1513/2006, de 7 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Secundaria en España.

El primero de estos documentos corresponde a una propuesta internacional para el desarrollo de la educación matemática; propone un conjunto de principios y estándares que proporcionan un marco conceptual con el cual el profesor puede llevar a cabo su trabajo profesional de manera coherente. Así mismo, en este documento se presenta un conjunto de tareas de interés para el trabajo en el aula.

En el análisis de este documento consideramos las orientaciones propuestas para las primeras cuatro etapas: la etapa *P-K-2*, que comprende los dos primeros cursos de la escuela elemental (se incluyen también en esta etapa Prekindergarten y el

Kindergarten); la *etapa 3-5*, que incluye los niveles tres, cuatro y cinco de la escuela elemental; y la *etapa 6-8*, constituida por los niveles seis, siete y ocho. La incorporación de los niveles siete y ocho, en la última de las etapas, nos permitirá identificar elementos sobre el "conocimiento matemático estadístico avanzado" a fin de procurar que dichos conocimientos puedan estar contenidos en el conjunto de indicadores que buscamos formular.

El segundo documento, proporcionan un marco conceptual para la educación estadística en la etapa Pre-K-12 (Infantil hasta Secundaria), centrado en la resolución de problemas de análisis de datos que promueven distintos niveles de alfabetización estadística. Este marco considera tres niveles (A, B y C) que no se corresponden con niveles curriculares sino a niveles de desarrollo de la afabetización estadística. Así, un estudiante que no haya tenido experiencias previas en estadística, aunque se encuentre en los primeros niveles de educación secundaria necesariamente debería comenzar con el nivel A. En el análisis de esta propuesta hemos tenido en cuenta lo niveles A y B por considearar que en dichos niveles se incluyen los pricipales contenidos que un profesor de eduación primaria debe conocer.

En el tercer y cuarto documento, se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria (MEC, 2006a) y secundaria (MEC 2006b) en España. Estas enseñanzas mínimas, corresponden a aspectos básicos del currículo en relación con los objetivos, las competencias básicas, los contenidos y los criterios de evaluación, y su finalidad, es asegurar una formación común a todos los alumnos y alumnas dentro del sistema educativo español. En el currículo de educación secundaria hemos analizado los dos primeros niveles a fin de identificar aspectos del conocimiento matemático/estadístico avanzado que un profesor de educación primaria debe dominar.

En su conjunto, estas cuatro unidades de muestreo contienen "normas" que orientan el quehacer educativo en el nivel escolar y por tanto, representan una parte importante del conocimiento profesional que un profesor debe manejar. Aceptamos en principio, que estas unidades de muestreo podrían ser modificadas, agregando algún nuevo documento si se considera necesario para enriquecer nuestro trabajo o realizando un análisis menos exhaustivo de alguno de los ya seleccionados si observamos un punto de saturación de la información recogida; es decir, si los datos comienzan a ser repetitivos y dejan de aportar información novedosa.

Las unidades de registro son el segmento específico de contenido que se caracteriza al situarlo en una categoría dada. Estas pueden ser, conceptos, frases, oraciones, párrafos o temas entre otros. En nuestro estudio, las unidades de registro corresponden a oraciones, frases y párrafos que evocan "normas" sobre alguna de las facetas propuestas por el EOS o sobre relaciones entre estas facetas.

Las unidades de contexto, son una porción de la unidad de muestreo que se examina para poder caracterizar la unidad de registro. En una comunicación escrita, es el pasaje donde se encuentra la o las unidades de registro. Las unidades de contexto en las propuestas curriculares que constituyen la nuestra quedan determinada por los siguientes elementos: niveles educativos (en las propuestas curriculares NCTM 2000, MEC 2006 y MEC 2006b), niveles de alfabetización estadística (en el documento GAISE), secciones que orientan sobre aspectos generales (introducción, presentación, principios generales…) y los bloques donde se abordan aspectos específicos sobre contenidos de estadística y probabilidad.

4.1.2. *Sistema de categorías y reglas de codificación*

Según Bardin (1996), la *categorización* es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación a partir de criterios previamente definidos. Dentro del análisis de contenido cualitativo se pueden distinguir, de manera general, dos modelos para el desarrollo de categorías; el modelo de categorías inductivas y el modelo de categorías deductivas. En el primer caso las categorías van surgiendo desde la propia investigación. En el segundo, se formulan a partir de la teoría. En nuestro estudio se aplica el segundo de estos modelos, ya que hemos definido anticipadamente un conjunto de categorías que corresponden a las seis facetas propuestas en el EOS (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interacional y mediacional) y sus respectivos componentes, más algunas interacciones entre facetas.

Las categorías propuestas son de tipo *nominales* en tanto que permiten categorizar la información y en ningún caso buscan establecer un orden, función que cumplen las categorías *ordinales*. Asimismo, estas categorías cumplen con las siguientes características que se propone tener en cuenta en su construcción: uso de un criterio único, exhaustividad, son mutuamente excluyentes, resultan significativas, son claras y son replicables (Ruiz, 1996).

Junto al desarrollo de categorías se debe establecer un *sistema de códigos* para representar la información mediante índices numéricos o alfabéticos. En nuestro caso, empleamos números para identificar las categorías y sus componentes, y letras, para identificar las unidades de análisis. Por ejemplo; la categoría *epistémica* se identifica con el dígito 1; sus componentes con los números 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4; y las unidades de análisis para cada componente son asignadas con una o más letras del alfabeto (a, b, c,…).

4.1.3. *Fiabilidad y validez del sistema de categorización-codificación*

Un procedimiento es *fiable* si rinde los mismos resultados para los mismos fenómenos, independiente de las circunstancias de su aplicación, y la *validez,* se refiere a que un instrumento mida lo que está destinado a medir; es decir, que permita observar una realidad en sentido pleno y no solo una parte de la misma (Kripperdorf, 1990).

Respecto a la fiabilidad, este autor distingue diferentes tipos y procedimientos que deberían ser aplicados en la técnica de análisis de contenido, dependiendo de la manera en que obtienen los datos sobre la fiabilidad. En cuanto a la validez, muestra una tipología referida a las clases de validez importantes para el análisis de contenidos y los requisitos para evaluar las distintas clases de validez. Si bien es cierto que en nuestro trabajo no hemos llegado a establecer procedimientos de fiabilidad y validez teniendo en cuenta dichas exigencias, hemos logrado realizar una evaluación de la clasificación de las unidades de análisis a juicio de expertos, lo cual valida los resultados de la investigación.

El procedimiento seguido en la validación a juicio de expertos, consistió en someter las unidades de análisis clasificadas a una revisión exhaustiva por parte de dos académicos con el grado de doctor, familiarizados con el tema de estudio y con una amplia trayectoria en investigación en didáctica de la matemática. Los resultados entregados por cada evaluador implicaron cambios en la clasificación de un número reducido de unidades de análisis; específicamente, en las componentes interacciónales donde se produjeron algunas discrepancias entre los evaluadores y con respecto a la formulación inicial.

4.1.4. *Establecimiento de inferencias*

Establecer inferencias es "explicar", es, en definitiva, deducir lo que hay en un texto (Andreu, 2011). Las inferencias que se pueden extraer de un texto pueden ser innumerables, en nuestro estudio, dicho proceso de inferencias se hace al momento de formular indicadores que emergen de las unidades de análisis seleccionadas de cada una de los textos que conforman la muestra.

4.2. **Metodología de investigación empleada en el estudio 2**

En este estudio empleamos un tipo particular de *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989; 2011) o *investigación de diseño* (Cobb y cols., 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008) basada en el EOS a través de la cual abordaremos el diseño instruccional en un curso de formación matemática de futuros profesores de Educación Primaria, concretamente en el diseño, implementación y evaluación del tema de introducción a la estadística y probabilidad. La experiencia formativa se realiza en las condiciones habituales ofrecidas por un programa de formación de futuros profesores de Educación Primaria, dentro de una asignatura focalizada en sentar las bases matemáticas para la enseñanza. La formación estadística es, por tanto, una parte de la formación matemática, a la que se destina un tiempo limitado.

La *investigación basada en el diseño* (también denominada *investigación de diseño* o *experimentos de diseño*) es una familia de aproximaciones metodológicas en el estudio del aprendizaje que tiene lugar en contextos naturales de clase. Utiliza el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, tratando que el diseño y la investigación sean interdependientes, sobreentendiéndose que la investigación incluye no solo la fase de diseño, sino también la implementación en contextos de clase y la evaluación de resultados.

El interés reciente en la literatura anglosajona por las investigaciones basadas en el diseño y su reflejo en educación matemática complementa el ya tradicional sobre *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989, 2011), la cual, apoyada en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brouseau, 1986, 1998), viene desarrollando importantes contribuciones desde la década de los 80. En Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta, y Wilhelmi (2013) se estudian las concordancias y complementariedades de estas aproximaciones metodológicas y se propone una visión generalizada de la ingeniería didáctica que incluye a las investigaciones orientadas hacia el diseño instruccional.

La metodología de investigación de diseño o ingeniaría didáctica que utilizamos en este trabajo, que denominaremos ID-EOS, se ha venido desarrollando recientemente en el seno del grupo de Teoría de la Educación Matemática y Didáctica de la Estadística de la

Universidad de Granada. Las primeras discusiones sobre la aplicabilidad de las herramientas del EOS en cada uno de los pasos metodológicos de la investigación (diseño, implementación y evaluación) comenzaron en el período académico 2012-2013 al interior del grupo. Posteriormente, se realizó una presentación de los avances en el XVII Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática realizado en el mes de septiembre de 2013 en Bilbao, España (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2013). Paralelamente se ha venido trabajando en la elaboración de un artículo en el que se muestra el desarrollo actual de este tipo de ingeniería (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, en prensa). Esta tesis doctoral, forma también parte en el desarrollo de esta metodología.

4.2.1. Fases de la ID-EOS

En las investigaciones basadas en el diseño se consideran tres fases (Cobb y Gravemeijer, 2008): 1) planificación del experimento, 2) experimentación y 3) análisis retrospectivo de los datos generados en el experimento. En estos diseños la valoración se sigue frecuentemente de criterios de *validez externa*, de tal manera que no es consustancial a ellos en la fase de planificación ni la determinación de los comportamientos esperados de los estudiantes ni la planificación de intervenciones controladas del docente. En la ingeniería didáctica (Artigue, 2011), en cambio, la validación de las proposiciones y actuaciones que realiza es esencialmente interna, basada en la confrontación entre los análisis *a priori* y *a posterior*; de hecho, no hay una *validación externa*, basada en la comparación de resultados entre grupos experimentales y de control.

En la ID-EOS se distinguen cuatro fases en la investigación[2]:

- *Estudio preliminar* de las dimensiones epistémico – ecológica, cognitiva – afectiva e instruccional.
- *Diseño de la trayectoria didáctica,* selección de los problemas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, con indicación de los comportamientos esperados de los estudiantes y de la planificación de intervenciones controladas del docente.

[2] Las fases de la investigación tienen una relación directa con las de la Ingeniería Didáctica propuestas en el seno de la TSD. El *diseño* se corresponde con el análisis *a priori* y la descripción de las concepciones; la *implementación* con la experimentación; y, por último, la *evaluación o análisis retrospectivo* con el análisis *a posteriori*. Asimismo, se prevé un *estudio preliminar* en las diferentes dimensiones involucradas. El uso de una denominación diferenciada se debe a la orientación, fundamentación y desarrollo de las fases según los presupuestos ontológicos, semióticos, pragmáticos y antropológicos propios del EOS.

- *Implementación* de la trayectoria didáctica; observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.
- *Evaluación o análisis retrospectivo*, que se sigue de un contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación También se reflexiona sobre las normas que condicionan el proceso instruccional y sobre la idoneidad didáctica.

4.2.2. Dimensiones de análisis ID-EOS

En cada una de las fases (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación) se tienen en cuenta las dimensiones epistémico-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional (interaccional y mediacional).

- *Epistémica-ecológica*. Se determinan los *significados institucionales* puestos en juego en cada una de las fases del proceso; tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Asimismo, se observa el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio.
- *Cognitivo-afectiva*. Se describen los *significados personales* de los estudiantes en los distintos momentos del proceso de estudio, en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos matemáticos. Además se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Instruccional*. Se analizan los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuencia, orientada a la fijación y negociación de significados. Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.

En la fase de diseño la noción de idoneidad epistémica de un proceso instruccional pone el acento en la "representatividad" de las situaciones-problema seleccionadas. Esta cualidad se valora en relación con el significado de referencia global del contenido matemático en cuestión, de las prácticas que se estima debe generar y de los objetos que deben ser puestos en juego.

El análisis de la implementación del diseño instruccional se realiza usando las nociones de configuración, subconfiguración didáctica y hecho didáctico significativo. Estas tres nociones se utilizan tanto para dividir la crónica del proceso de estudio implementado en unidades de análisis, como así también para realizar una descripción narrativa de la implementación. En este último caso la noción de HDS se aplica como herramienta para sintetizar e interpretar la trayectoria didáctica implementada.

4.2.3. Contexto, población y muestra

El proceso formativo sobre el contenido de estadística descriptiva y probabilidad se realizó en el contexto de la asignatura del plan de formación de maestros titulada, "Bases matemáticas para la educación primaria", en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Se aplicó a dos grupos de estudiantes, uno con 58 y otro con 75. Dicha materia incluye un tema sobre "Introducción a la estadística y probabilidad" a cuyo desarrollo se dedican tres semanas, a razón de 3 horas de trabajo semanales en sesión de grupo completo y una sesión semanal de 1,5 horas de trabajos prácticos con el grupo clase dividido en tres subgrupos.

4.2.4. Instrumentos

Como instrumentos de recogida de datos se utilizan los siguientes: Guía docente del curso; grabaciones audiovisuales de las sesiones de clase; informes de trabajo en equipos; prueba de evaluación final (contenida en el apartado 6.2 del capítulo 5 de este trabajo), donde se solicita responder a 6 cuestiones relacionadas con una parte de los contenidos desarrollados en el curso (espacio muestral, asignación de probabilidades, comparación de distribuciones de frecuencias y de probabilidades, ley de los grandes números).

Para analizar los informes de trabajo en equipo y la prueba de evaluación final hemos definido tres variables: grado de corrección, tipo de respuesta y tipo de errores, las cuales describimos a continuación. En el anexo E se incluye además una descripción de los valores definidos para cada uno de los ítems de los instrumentos aplicados.

- Variable 1: grado de corrección; apunta a una evaluación global de la competencia lograda teniendo en cuenta aspectos del conocimiento común y avanzado. Se asignan 2 puntos si la respuesta es correcta, 0 incorrecta o no responde, y 1 punto si es parcialmente correcta. Esta última puntuación, la hemos utilizado solo en aquellos casos en que la respuesta admite una valoración parcial.

- Variable 2: tipo de respuesta; está centrada en identificar tipos de respuestas (procedimientos, justificaciones) que se ponen de manifiesto entre las respuestas correctas. En las respuestas que no admiten diferentes justificaciones esta variable no se aplica.
- Variable 3: tipo de errores; se enfocada en la identificación de errores que se manifiestan entre las respuestas erróneas. La aplicación de esta variable da origen a una tipología de errores (para algunos ítems) que surge de manera inductiva del análisis de los resultados.

5. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

El desarrollo de este capítulo nos ha permitido, por una parte, justificar el problema de investigación teniendo en cuenta su relevancia e implicaciones prácticas y por otra, sistematizar las principales herramientas teóricas y metodológicas para llevar a cabo la investigación. En cuanto a lo primero, ha quedado de manifiesto que la necesidad de desarrollar una cultura estadística en los ciudadanos y los cambios curriculares surgidos a partir de dicha necesidad plantean un desafío importante en la formación de los profesores de estadística para que estén "bien preparados" para desarrollar la comprensión y uso de las ideas estadísticas por parte de los escolares; cuestión que requiere ser mayormente estudiada. Con respecto a lo segundo, el desarrollo del capítulo ha permitido sintetizar las principales ideas teóricas que sustentan la investigación y a la vez, desarrollar los elementos metodológicos necesarios para su desarrollo. Los pasos metodológicos propuestos para estudio 1 (selección y clasificación de unidades de análisis, comparación y reducción de unidades de análisis, inferencia de indicadores y confrontación de indicadores con la pauta EOS) pueden ser vistos como una metodología para la mejora progresiva de instrumentos de valoración de la idoneidad didáctica y por lo tanto, nos servirán para la construcción del instrumento deseado. La ID-EOS propuesta para el desarrollo del estudio 2, pone en correspondencia herramientas del EOS con los pasos metodológicos propios de la ingeniería didáctica tradicional (análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori), lo cual nos permitirá hacer análisis detallados del diseño, implementación y evaluación del proceso de estudio que se pretende investigar.

CAPÍTULO 3

CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA Y SU APLICACIÓN A UN PLAN DE ESTUDIOS

1. INTRODUCCIÓN

La revisión de la literatura investigativa sobre el conocimiento de la estadística y su didáctica en los profesores de primaria, da cuenta de una insuficiencia de trabajos que respondan a las actuales exigencias que demanda la formación de dichos profesores. En este capítulo presentamos la construcción de un instrumento para la valoración de la idoneidad didáctica de procesos de formación estadística[1] de profesores de educación primaria teniendo en cuenta las facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, instruccional y mediacional) y componentes de las mismas propuestos en la teoría de la idoneidad didáctica (Godino 2011).

Para la construcción del instrumento se aplica la técnica de análisis de contenido (cualitativa) para extraer "normas" de idoneidad didáctica presentes en documentos curriculares[2] e inferir indicadores a partir de dichas normas. Estos indicadores son confrontados con el sistema de indicadores propuestos en Godino (2011) a fin de identificar concordancias y complementariedades. Así mismo, se realiza una comparación de los indicadores con resultados de investigaciones sobre estadística y su didáctica para mejorar su formulación. En Godino, Rivas y Artega (2012) describimos de manera sucinta esta metodología que es la que empleamos y desarrollamos con mayor amplitud en este trabajo.

Finalmente aplicamos los indicadores construidos para valorar un plan de formación estadística de profesores de educación primaria. Esta aplicación tiene una doble finalidad: (1) valorar el plan de formación a fin de determinar su idoneidad didáctica y

[1] Se considera que la "estadística" incluye las nociones elementales sobre azar y probabilidad.

[2] En la identificación de normas para la faceta epistémica se tienen en cuenta los niveles de educación primaria (conocimiento común del contenido) y los dos primeros niveles de la educación secundaria (conocimiento avanzado del contenido).

(2) poner a prueba los indicadores como un instrumento válido para valorar procesos de formación estadística a nivel universitario.

En cuanto a su estructura, el capítulo está organizado en los siguientes apartados. En el apartado 2, se presenta la *selección y clasificación de unidades de análisis.* En el apartado 3, se muestra el proceso de c*omparación y reducción de unidades de análisis.* El apartado 4, da cuenta del procedimiento de *inferencia de indicadores,* tras el cual se obtiene una primera propuesta de indicadores. En la sección 5, se realiza una c*onfrontación de los indicadores obtenidos con la literatura* lográndose optimizar la propuesta inicial; esta propuesta es presentada posteriormente en la sección 6. En el apartado 7, se muestra la aplicación del instrumento al plan de formación estadística de profesores. Finalmente, en la sección 8, se presenta una síntesis y conclusiones del capítulo.

2. SELECCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE UNIDADES DE ANÁLISIS (FASE 1)

En esta fase se seleccionan y clasifican unidades de análisis (UA) de los textos que componen la muestra, según las facetas y componentes de la idoneidad didáctica, incluyéndose además una dimensión que involucra interacciones entre facetas. Las UA seleccionadas corresponden a normas (en algunos casos son explicaciones y justificaciones que evocan normas) que reglamentan las relaciones del docente con sus estudiantes en relación al saber disciplinar (estadístico o didáctico). A continuación citamos algunos ejemplos de UA seleccionadas en cada dimensión. El anexo A contiene el total de UA obtenidas de los tres documentos que fueron analizados.

A lo largo de esta sección se observará que las UA hacen referencia tanto a contenidos de estadística y probabilidad como a aspectos generales de las matemáticas que resultan también válidos para la estadística.

2.1. **Faceta epistémica**

En esta faceta se incluyen las unidades de análisis que representan significados de referencia en relación al saber estadístico que se explicita en cada uno de los documentos curriculares. Estas UA recogen aspectos del *conocimiento común* y *avanzado* (Godino, 2009) del conocimiento matemático-estadístico que un profesor de educación primaria debe dominar en tanto sintetizan los principales conocimientos, comprensiones y competencias presentes en los currículos de educación primaria y primeros niveles de la educación secundaria.

En el análisis de los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), se han tenido en cuenta las siguientes etapas: (1) *etapa P-K-2,* constituida por los niveles Prekindergarden (4 años), Kindergarden (5 años) y los niveles 1º y 2º de la Elementary School; (2) *etapa 3-5,* que incluye los niveles 3º, 4º y 5º de la Elementary Sochool; y (3) *etapa 6-8,* constituida por los niveles 6º, 7º y 8º grados o Middle School. Los primeros cinco niveles de la Elementary Sochool junto al primer nivel de la Middle School (6º grado), son asociadas al *conocimiento común del contenido* y las UA seleccionadas de los niveles 7º y 8º grado de la Middle School se relacionan con el *conocimiento avanzado.*

En el análisis del currículo español, las UA corresponden a los seis primeros niveles de la Educación Primaria (conocimiento común del contenido) y a los dos primeros niveles de la Educación Secundaria (conocimiento avanzado del contenido).

Finalmente, en el análisis del proyecto GAISE (Franklin y cols., 2005) se han tenido en cuenta los niveles A y B por considerar que en ellos se incluyen las principales competencias de los cursos de educación primaria y primeros niveles de la eduación secundaria.

En la tabla 3.1, se incluyen algunas de las unidades de análisis seleccionadas en esta dimensión.

Tabla 3.1. Ejemplos de unidades de análisis de la faceta epistémica

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
Situaciones-problemas	– "Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (NCTM, 2000, p. 55). – "Los contenidos de aprendizaje (…) se abordan en contextos de resolución de problemas" (MEC, 2006a, p. 43096). – "Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 120). – "Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 260). – "Statistical problem solving is an investigative process that involves four components: Formulate Questions (…) Collect Data (…) Analyze Data (…) Interpret Results" (Franklin y cols., 2005, p. 11). – "Opportunities should be provided for students to generate questions" (Franklin y cols., 2005, p. 23).
Lenguaje	– "representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos" (NCTM, 2000, p. 112). – "Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 140). – "representar los datos utilizando tablas y gráficos, como diagramas de puntos, de barras o lineales" (NCTM, 2000, p. 180). – "Deberían familiarizarse con diversas representaciones de datos; entre otras, las tablas, los diagramas de puntos, los diagramas de barras y los lineales"

	(NCTM, 2000, p. 182). – “Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 210). – “dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia” (MEC, 2006b, p. 688). – “One of the most useful graphical devices for comparing distributions of numerical data is the boxplot.” (Franklin y cols., 2005, p. 46).
Elementos regulativos	– “ser capaz de aplicar procedimientos, conceptos y procesos” (NCTM, 2000, p. 21). – “Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información” (MEC, 2006a, p. 43097). – “Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo.” (MEC, 2006b, p. 755). – “Students at Level A should recognize the mode as a way to describe a “representative” or “typical” value for the distribution.” (Franklin y cols., 2005, p. 26).
Argumentos	– “Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos” (NCTM, 2000, p. 126). – “utilizar los razonamientos inductivo y deductivo para formular argumentos matemáticos” (NCTM, 2000, p. 266).
Relaciones	– “Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente” (NCTM, 2000, p. 278).

2.2. **Faceta ecológica**

En esta faceta se incluyen las unidades de análisis que refieren a la estadística y su relación con elementos socioculturales y profesionales, con contenidos intra e inter disciplinares, con el currículo y con la innovación. A continuación se muestran algunas de las unidades de análisis seleccionadas en cada componente de esta faceta (tabla 3.2).

Tabla 3.2. Ejemplos de unidades de análisis de la faceta ecológica

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
Adaptación al currículo	– “Los profesores necesitan (…) conocimiento profundo y flexible respecto a los objetivos curriculares y las ideas fundamentales en cada nivel de enseñanza” (NCTM, 2000, p. 18). – “Los profesores tienen también que proporcionar de forma rutinaria a sus alumnos problemas ricos, centrados en ideas matemáticas importantes del currículo” (NCTM, 2000, p. 201).
Apertura hacia la innovación didáctica	–
Adaptación socio-cultural y profesional	– “Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria” (MEC, 2006a, p. 43096). – “Statistical literacy is essential in our personal lives as consumers, citizens, and professionals.” (Franklin y cols., p. 3).
Educación en valores	
Conexiones intra e	– “Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus

interdisciplinares	conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles" (NCTM, 2000, p. 68). – "conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento" (MEC, 2006a, p. 43096). – "circle graphs require an understanding of proportional reasoning" (GAISE, 2005; p. 25).

Nota: En las celdas en blanco no hemos encontrado UA para las componentes respectivas. Sin embargo, puede haber elementos de dichas componentes en los indicadores de interacciones entre facetas.

2.3. **Faceta cognitiva**

En esta faceta están contenidas las unidades de análisis que aluden a normas sobre los significados estadísticos (pretendidos/implementados) y su conexión con la zona del desarrollo potencial de los estudiantes, como así también, con el modo en que los significados personales entran en correspondencia con los significados pretendidos/implementados (significados institucionales). En la tabla 3.3 se presentan algunas de las unidades de análisis seleccionadas en cada componente de esta faceta.

Tabla 3.3. Ejemplos de unidades de análisis de la faceta cognitiva

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
Conocimientos previos	– "las ideas nuevas se consideran extensiones de las matemáticas anteriormente aprendidas" (NCTM, 2000, p. 69).
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	– "Todos los alumnos, independiente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas" (NCTM, 2000, p. 12). – "aquellos alumnos con especial interés por la disciplina o excepcional talento para ella, pueden necesitar programas más ricos o más recursos para estimularlos y comprometerlos" (NCTM, 2000, p.14).
Aprendizaje; evaluación sumativa	

Nota: En la celda en blanco no hemos encontrado UA para dicha componente. Sin embargo, puede haber elementos relacionados en los indicadores de interacciones entre facetas.

2.4. **Faceta afectiva**

En esta faceta se encuentran las unidades de análisis que aluden a la implicación de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje durante el proceso formativo. En la tabla 3.4 se muestran ejemplos de unidades de análisis seleccionadas para cada uno de los componentes de esta faceta.

Tabla 3.4. Ejemplos de unidades de análisis de la faceta afectiva

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
Intereses y	– "las tareas deben ser motivadoras y con un nivel de desafío que invite a la

necesidades	especulación y al trabajo intenso” (NCTM, 2000, p. 19). – “Los buenos problemas pueden inspirar la exploración de ideas matemáticas importantes” (NCTM, 2000, p. 186).
Actitudes	– “apreciar el poder y la precisión del lenguaje matemático” (NCTM, 2000, p. 67). – “analizar críticamente las informaciones que se presentan” (MEC, 2006a, p. 43101).
Emociones	– “actuar con confianza ante los números y las cantidades” (MEC, 2006a, pp. 43095-43096). – “valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas” (MEC, 2006a, p. 43097).

2.5. **Faceta interaccional**

En esta faceta se incluyen las unidades de análisis que refieren a normas sobre los modos de interacción (profesor-estudiantes y estudiantes entre sí), desarrollo de la autonomía, y sobre la forma de identificar y resolver conflictos de significado. En la tabla 3.5 se dan a conocer algunas de las unidades de análisis seleccionadas para cada componente de esta faceta.

Tabla 3.5. Ejemplos de unidades de análisis de la faceta interaccional

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
Interacción docente-discente	– “sacar provecho de las oportunidades que se presenten para enfocar las lecciones en direcciones no previstas” (NCTM, 2000, p. 16). – “facilitar la expresión como de propiciar la escucha de las explicaciones de los demás” (MEC, 2006a, p. 43097).
Interacción entre discentes	– “Los alumnos necesitan explicar y justificar lo que piensan, y aprender cómo detectar las falacias y a criticar el pensamiento de otros” (NCTM, 2000; p. 192).
Autonomía	– “Los niños pueden diseñar planes simples de recogida de datos para tratar de responder a las preguntas planteadas” (NCTM, 2000; p. 52). – “utilizar estrategias personales de resolución de problemas” (MEC, 2006a, p. 43097).
Evaluación formativa	– “los alumnos deberían ser evaluados e informados de manera que se señalen las áreas que requieran una inmediata atención adicional” (NCTM, 2000, p. 12). – “la evaluación (…); debería constituir una parte integral de la enseñanza que le informe al profesorado y le sirva de guía para la toma de decisiones” (NCTM, 2000, p. 23).

2.6. **Faceta mediacional**

En esta faceta están contenidas las unidades de análisis que orientan sobre el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En la tabla 3.6 se presentan algunas de las unidades de análisis seleccionadas en esta faceta.

Tabla 3.6. Ejemplos de unidades de análisis de la faceta mediacional

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
Recursos materiales	– “uso de calculadoras y de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de contenidos matemáticos” (MEC, 2006a, p. 43096). – “Level B students may encounter outliers when using statistical software or graphing calculators.” (Franklin y cols., 2005, p. 48).
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	– “Más que el escenario físico con pupitres, paneles y carteles, el ambiente de clase comunica mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y uso de las matemáticas” (NCTM, 2000, p. 19).
Tiempo de enseñanza y aprendizaje (colectiva e individual)	

Nota: En la celda en blanco no hemos encontrado UA para dicha componente. Sin embargo, puede haber elementos relacionados en los indicadores de interacciones entre facetas.

2.7. **Interacciones entre facetas**

En esta dimensión se incluyen las unidades de análisis que apuntan a normas que integran dos o más componentes de diferentes facetas. La tabla 3.7 contiene ejemplos seleccionados para esta dimensión.

Tabla 3.7. Ejemplos de unidades de análisis que implican interacciones entre facetas

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
Epistémica-ecológica	– “Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos” (NCTM, 2000, p. 210). – “utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales para interpretar la información sobre la realidad” (MEC, 2006a, p. 43096).
Epistémica-cognitiva	– “Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticos” (NCTM, 2000, p. 71). – “Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él” (NCTM, 2000, p. 120).
Epistémica-interaccional	– “los profesores deberían modelizar el lenguaje matemático que los alumnos posiblemente no hayan conectado todavía con sus ideas” (NCTM, 2000, p. 128). – “Los profesores deberían guiar a sus alumnos en el desarrollo y la utilización de múltiples representaciones con eficacia” (NCTM, 2000, p. 143).
Epistémica-mediacional	– “Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación” (NCTM, 2000, p. 71).
Cognitiva-interaccional	– “Las concepciones erróneas que surgen en las representaciones de los datos hechas por los alumnos, proporcionan situaciones para enseñanzas y aprendizajes nuevos” (NCTM, 2000, p. 116). – “Los alumnos deberían llegar a ser más expertos en aprender de otros y con otros” (NCTM, 2000, p. 198).

Afectiva-interaccional	–	"Los profesores (…) Deberían plantear problemas que reten matemáticamente a los alumnos, pero también expresarles su creencia en que son capaces de resolverlos" (NCTM, 2000, p. 134).
Afectiva-mediacional	–	"A través de la tecnología puede potenciarse la implicación de los alumnos" (NCTM, 2000, p. 26).
Interaccional-mediacional	–	"la tecnología ayuda en la evaluación permitiendo a los profesores examinar los procesos seguidos en las investigaciones de los alumnos, así como los resultados, y enriqueciendo, por tanto la información disponible para tomar decisiones relativas a la enseñanza" (NCTM, 2000, pp. 27-28).

Una vez que hemos realizado el proceso de selección y clasificación de UA, las hemos sometido a validación de juicio de expertos a fin de asegurar que la clasificación ha sido correcta. El procedimiento seguido consistió en someter las unidades de análisis clasificadas a una revisión exhaustiva por parte de dos académicos con el grado de doctor, familiarizados con el tema de estudio y con una amplia trayectoria en investigación en didáctica de la matemática. Los resultados entregados por cada evaluador implicaron cambios en la clasificación de un número reducido de unidades de análisis; específicamente, en las componentes interaccionales donde se produjeron algunas discrepancias entre los evaluadores y con respecto a la formulación inicial.

3. COMPARACIÓN Y REDUCCIÓN DE UNIDADES DE ANÁLISIS (FASE 2)

En esta fase se realiza el proceso de comparación y reducción de las unidades de análisis obtenidas en la "fase 1" a fin de evitar reiteraciones. Dicho proceso consiste en identificar UA que pudieran estar contenidas en otra unidad (o bien que no proporcionan información nueva y relevante) para dejarlas representadas en una única unidad de análisis final.

Para realizar este proceso se han codificado previamente las facetas, componentes y UA. Las facetas y componentes son identificadas mediante números utilizando un dígito para las facetas (1, 2, 3,…) y dos para los componentes (1.1, 1.2, 1.3,…); para identificar las UA se utilizan letras del alfabeto (a, b, c,..). Esto último, permite comparar las UA incluyendo el comentario "contenida en" seguida de la letra correspondiente en aquellas UA que se consideran contenidas en otra unidad.

A continuación se ejemplifica el proceso de *codificación, comparación* y *reducción* de UA a partir de las unidades citadas en el punto anterior para las componentes situaciones problemas y lenguaje de la faceta epistémica. En la codificación se usan las mismas letras que les corresponden a dichas unidades en el proceso de comparación global (anexo A), y por tanto no se mantiene un orden correlativo de las letras.

Tabla 3.8. Codificación, comparación y reducción de unidades de análisis

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
1.1. Situaciones-problemas	a. "Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (NCTM, 2000, p. 55). g. "Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 120). n. "Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 260). **Contenida en "g"** q. "Los contenidos de aprendizaje (…) se abordan en contextos de resolución de problemas" (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en "a"** v. "Statistical problem solving is an investigative process that involves four components: Formulate Questions (…) Collect Data (…) Analyze Data (…) Interpret Results" (Franklin y cols., 2005, p. 11). w. "Opportunities should be provided for students to generate questions" (Franklin y cols., 2005, p. 23).
1.2. Lenguaje	h. "representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos" (NCTM, 2000, p. 112). n. "Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 140). p. "representar los datos utilizando tablas y gráficos, como diagramas de puntos, de barras o lineales" (NCTM, 2000, p. 180). **Contenida en "r"** r. "Deberían familiarizarse con diversas representaciones de datos; entre otras, las tablas, los diagramas de puntos, los diagramas de barras y los lineales" (NCTM, 2000, p. 182). v. "Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 210). **Contenida en "n"** mm. "dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia" (MEC, 2006b, p. 688). uu. "One of the most useful graphical devices for comparing distributions of numerical data is the boxplot." (Franklin y cols., 2005, p. 46).

En la tabla se han codificado las UA mediante letras y luego se ha realizado el proceso de comparación y reducción. En la componente situaciones problemas se observa que la unidad "n" está contenida en "g" ya que se repite textualmente; se considera también que la unidad "q" está contenida en "a" al no aportar información nueva y relevante respecto a dicha unidad. En la componente lenguaje, se estima que la unidad "p" está contenida en "r" y que "v" está contenida en "n". Tras este proceso se obtienen las siguientes UA (tabla 3.9) a partir de las cuales se procederá a inferir indicadores de idoneidad didáctica. El anexo B, contiene el total de UA resultantes.

Tabla 3.9. Unidades de análisis reducidas

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
1.1. Situaciones-problemas	a. "Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (NCTM, 2000, p. 55). g. "Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas"

	(NCTM, 2000, p. 120). v. “Statistical problem solving is an investigative process that involves four components: Formulate Questions (…) Collect Data (…) Analyze Data (…) Interpret Results” (Franklin y cols., 2005, p. 11). w. “Opportunities should be provided for students to generate questions” (Franklin y cols., 2005, p. 23).
1.2. Lenguaje	h. “representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos” (NCTM, 2000, p. 112). n. “Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 140). r. “Deberían familiarizarse con diversas representaciones de datos; entre otras, las tablas, los diagramas de puntos, los diagramas de barras y los lineales” (NCTM, 2000, p. 182). mm. “dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia” (MEC, 2006b, p. 688). uu. “One of the most useful graphical devices for comparing distributions of numerical data is the boxplot.” (Franklin y cols., 2005, p. 46).

En la componente situaciones problemas las unidades de análisis se han reducido de seis a cuatro y en la componente lenguaje de siete a cinco. En este caso hemos mantenido las mismas letras para cada unidad; sin embargo, en el proceso global de reducción (anexo B) las UA han sido recodificadas respecto al anexo A con el fin de mantener la correlación de las letras y facilitar el proceso de inferencia de indicadores.

4. INFERENCIA DE INDICADORES (FASE 3)

En esta fase se procede a inferir indicadores de idoneidad didáctica a partir de las UA resultantes después del proceso de comparación y reducción, obteniéndose así una primera propuesta de indicadores para valorar procesos de formación estadística incluyendo también aspectos de la matemática en general válidos para este contenido.

En el proceso de inferencia de indicadores hemos tenido en cuenta los siguientes elementos:

- *Dos o más UA pueden dar origen a un único indicador*[3]*;* esta situación se produce cuando dos o más UA contienen “ideas” complementarias y por lo tanto, pueden ser interpretadas a través de un único indicador.
- *Una misma UA puede dar origen a uno o más indicadores;* esta situación se produce cuando la unidad de análisis contiene diversas ideas que difícilmente pueden ser reflejadas en un único indicador.

[3] Esto conlleva un nuevo proceso de reducción de unidades de análisis similar al realizado en la fase dos, ya que, implica comparar y “refundir” más de una unidad de análisis en un único indicador.

En la tabla 3.10 se ejemplifica el proceso de inferencia de indicadores a partir de las UA resultantes en la tabla 3.9. Se debe tener en cuenta que en la formulación de cada indicador se han considerado además otras UA contenidas en el anexo B.

Tabla 3.10. Inferencia de indicadores

UNIDADES DE ANÁLISIS	INDICADOR
a. "Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (NCTM, 2000, p. 55). g. "Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 120). v. "Statistical problem solving is an investigative process that involves four components: Formulate Questions (…) Collect Data (…) Analyze Data (…) Interpret Results" (Franklin y cols., 2005, p. 11). w. "Opportunities should be provided for students to generate questions" (Franklin y cols., 2005, p. 23).	− Se incluyen problemas estadísticos para introducir, desarrollar y aplicar nociones de estadística y probabilidad (involucra resolver y formular problemas). **(UA "a", "v", "w")** − Se promueve el uso de problemas abiertos (de tipo heurístico) que admiten el uso de estrategias variadas de resolución. **(UA "g")**
h. "representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos" (NCTM, 2000, p. 112). n. "Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 140). r. "Deberían familiarizarse con diversas representaciones de datos; entre otras, las tablas, los diagramas de puntos, los diagramas de barras y los lineales" (NCTM, 2000, p. 182). mm. "dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia" (MEC, 2006b, p. 688). uu. "One of the most useful graphical devices for comparing distributions of numerical data is the boxplot." (Franklin y cols., 2005, p. 46).	− Se incluyen diversas representaciones de uso convencional en estadística y probabilidad (representaciones concretas y visuales, tablas, gráficos, estadísticos, íconos, símbolos,…). **(UA "h", "r", "mm", "uu")** − Se proponen procesos de traducción entre distintas representaciones. **(UA "n")** − Se promueve la capacidad para discriminar entre distintas representaciones teniendo en cuenta sus ventajas y limitaciones**. (UA "n")**

Tras este proceso de inferencia hemos obtenido una primera Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica a paritr del Currículo Escolar que interpretaremos como (GVID-CE). Los "indicadores epistémicos" sintetizan los principales objetivos y contenidos presentes en el currículo de educación primaria y en los dos primeros niveles de la educación secundaria, y por lo tanto, pueden ser vistos como criterios de idoneidad para valorar procesos de formación estadística de profesores de educación primaria (incluyen aspectos del conocimiento común y avanzado). Los indicadores de las demás dimensiones (ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional) son idóneos para evaluar procesos de formación estadística a nivel escolar; sin embargo, estos mismos indicadores "adaptados convenientemente" podrían ser también utilizados para valorar procesos de formación estadística de profesores de educación primaria, en tanto hay aspectos comunes de la enseñanza de la estadística en ambos niveles.

En una adaptación deseable de los indicadores señalados, habría que tener en cuenta las diferencias cognitivas y afectivas de los sujetos (estudiantes). También está el hecho de que el fin con el que se aprende la materia a nivel escolar (resolver problemas de diferentes contextos de la vida cotidiana) es diferente en la formación del profesor, quien además (y sobre todo) debe aprender estadística para enseñarla a sus estudiantes.

4.1. **Propuesta de indicadores inferida a partir de currículo escolar**

A continuación presentamos la GVID-CE. Los indicadores han sido redactados en un sentido "global", de modo que puedan ser interpretados tanto para valorar planes como acciones formativas (p. ej. usamos el verbo "incluyen" en lugar de "resuelven", ya que este último sería solo aplicable a un proceso de estudio implementado y no en la etapa de diseño). Para facilitar su lectura y posterior comparación con la Guía de valoración de la idoneidad didáctica propuesta en Godino (2011) hemos identificado con letras (a, b, c,…) cada indicador dentro de las componentes y facetas respectivas.

Las UA de las cuales hemos inferido los indicadores se encuentran contenidas en el anexo B.

4.1.1. *Faceta epistémica*

La resolución de problema se considera el eje central de toda la actividad matemática en los tres documentos analizados. Estas situaciones juegan un rol primordial tanto como objetivo de aprendizaje (formular y resolver problemas) como para la introducción, desarrollo y aplicación de los contenidos en todos los niveles de enseñanza, "Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (NCTM, 2000, p. 55). En cuanto a sus características, se promueve la inclusión de problemas abiertos y variados que favorezcan el desarrollo del razonamiento heurístico y el uso de diversas estrategias en la búsqueda de solución. En el caso de la educación estadística, los problemas adoptan la modalidad de proyectos de análisis de datos mediante los cuales los estudiantes se involucran en la resolución de un caso práctico con el que se pretende dar sentido a los conceptos, procedimientos, propiedades, lenguajes y argumentos estudiados. "Statistical problem solving is an investigative process that involves four components: Formulate Questions (…) Collect Data (…) Analyze Data (…) Interpret Results" (Franklin y cols., 2005, p. 11).

En cuanto al lenguaje, se pretende que los estudiantes sean capaces de utilizar diversas representaciones de uso convencional para registrar, organizar y comunicar ideas matemáticas y al mismo tiempo, tengan la posibilidad de crear sus propias representaciones. “Es importante que los alumnos tengan oportunidades no sólo de aprender las formas convencionales de representación, sino también de construir, perfeccionar y usar sus propias representaciones” (NCTM, 2000, p. 72). Se propone además que los estudiantes desarrollen la habilidad para traducir diferentes representaciones y saber discriminarlas teniendo en cuenta sus ventajas y limitaciones. En educación estadística, se enfatiza además en la lectura e interpretación de tablas y gráficos, puntualizándose en la interpretación correcta de sus elementos.

Con respecto a los elementos regulativos (en el caso particular de la estadística) se plantea que los estudiantes de todos los niveles de acuerdo con las competencias del nivel educativo deberían estar capacitados para: usar procedimientos aleatorios en la selección de muestras; emplear diferentes métodos de recolección de datos; aplicar conceptos, procedimientos y propiedades de la estadística y la probabilidad elemental; describir y comparar conjuntos de datos; establecer conjeturas que relacionen una muestra con su población; analizar experimentos comparativos; explorar tendencias de datos a través del tiempo; usar modelos “simples” para analizar la relación entre dos variables; hacer predicciones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos; y estimar frecuencias conocida la probabilidad.

En cuanto a los argumentos se propone estudiar el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, lo cual sugiere que los estudiantes deben entender que el razonamiento matemático se basa en supuestos y reglas específicos y valorar la importancia del razonamiento sistemático como regla en la argumentación. Se sugiere también la capacidad de desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones, y de utilizar diferentes métodos de razonamiento y demostración.

Finalmente, con relación a aspectos que implican relaciones entre componentes de esta faceta se alude a la necesidad de abordar las “ideas” estadísticas (conceptos, procedimientos, propiedades) de manera integrada. Así mismo, se reconoce el uso del razonamiento estadístico como un proceso para la resolución de problemas “Students who complete Level B should see statistical reasoning as a process for solving problems through data” (Franklin y cols., 2005, p. 37), lo cual implica que en su desarrollo se ponen en funcionamiento los distintos componentes de la faceta epistémica (lenguaje, reglas y argumentos). Otro aspecto que destaca es el papel de variabilidad como un elemento inherente a la resolución de problemas y al razonamiento estadístico, involucrando diferentes aspectos de la faceta epistémica, "Statistical thinking, in large part, must deal with this omnipresence of variability; statistical problem solving and decision making depend on understanding, explaining, and quantifying the variability in the data." (Franklin y cols., 2005, p. 6).

En la tabla 3.11 se muestran los indicadores de idoneidad epistémica que hemos formulado en cada componente.

Tabla 3.11. Indicadores faceta epistémica

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-problemas	a. Se incluyen problemas estadísticos[4] para introducir, desarrollar y aplicar nociones de estadística y probabilidad (involucra resolver y formular problemas). b. Se promueve el uso de problemas abiertos (de tipo heurístico) que admiten el uso de estrategias variadas de resolución.
Lenguajes	a. Se incluyen diversas representaciones de uso convencional en estadística y probabilidad (representaciones concretas y visuales, tablas, gráficos, estadísticos, íconos, símbolos,…) incentivando su producción por parte de los alumnos. b. Se promueve la creación y uso de representaciones no convencionales. c. Se proponen procesos de traducción entre distintas representaciones. d. Se promueve la capacidad para discriminar entre distintas representaciones teniendo en cuenta sus ventajas y limitaciones. a. Se contempla el estudio y uso correcto de los elementos básicos de un gráfico (títulos, etiquetas, ejes, grados,…). e. Se incluyen contenidos sobre lectura e interpretación de tablas y gráficos.
Reglas: definiciones, proposiciones y procedimientos	a. Se incluyen los conceptos, procedimientos (algoritmos, técnicas de construcción de tablas y gráficos,…) y propiedades fundamentales de la estadística y la probabilidad. b. Se promueven diferentes métodos de recolección de datos (censos, encuestas, observación, medición, experimentos aleatorios). c. Se promueve el uso e interpretación apropiada de conceptos, técnicas (promedios, indicadores de dispersión, gráficos, forma de la distribución, valores atípicos,…) y propiedades estadísticas para: analizar, describir y comparar conjuntos de datos; establecer conjeturas que relacionen una muestra con su población; analizar experimentos comparativos; y explorar tendencias de datos a través del tiempo. d. Se incluye el estudio de modelos "simples" (nubes de puntos, líneas de ajuste) para analizar la relación (grado de intensidad) entre dos variables. e. Se propone establecer conjeturas y hacer predicciones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos (regla de Laplace). f. Se propone estimar frecuencias conocida la probabilidad (tablas y gráfico de distribución de probabilidad, ley empírica de los grandes números). g. Se incluyen procedimientos de selección aleatoria para la obtención de

[4] Entendemos aquí, la idea de problema estadístico como una situación que implica un proceso de investigación que comprende las etapas de responder o formular preguntas, recopilar datos, analizar los datos e interpretar los resultados (Franklin et al., 2005).

		muestras representativas.
Argumentos	a.	Se promueve el razonamiento y la demostración como una actividad fundamental de la actividad matemática.
	b.	Se promueve el desarrollo, evaluación y justificación de argumentos.
	c.	Se incluyen diferentes tipos de razonamiento y métodos de demostración.
	d.	Se fomentan maneras de justificar acordes al nivel de los estudiantes.
Relaciones	a.	Se abordan ideas estadísticas (conceptos, procedimientos, propiedades) de manera integrada.
	b.	Se promueven destrezas de razonamiento[5] estadístico a través de la resolución de problemas de análisis de datos.

4.1.2. *Faceta ecológica*

En relación al currículo, se requiere que el profesor tenga un conocimiento profundo de éste tanto a nivel de contenidos como en sus aspectos pedagógicos y didácticos. Al mismo tiempo, se promueve una postura flexible en cuanto a su implementación, con el objetivo de dar respuesta a las condiciones que se presentan en el trabajo de aula. "Los profesores necesitan (…) conocimiento profundo y flexible respecto a los objetivos curriculares y las ideas fundamentales en cada nivel de enseñanza" (NCTM, 2000, p. 18).

En el ámbito de la adaptación socio-profesional y cultural, se hace especial énfasis en la necesidad de conectar las matemáticas con diferentes contextos de la vida diaria; en este aspecto, el currículo de educación primaria español platea la necesidad de "utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana" (MEC, 2006a, p. 43097). Se alude también a la necesidad de conectar los contenidos con diferentes profesiones y campos de la ciencia, manifestándose que: "Es importante que los estudiantes tengan oportunidad de experimentar las Matemáticas en un contexto. Se utilizan en ciencias, ciencias sociales, medicina y en el comercio" (NCTM, 2000, p. 70). Este enfoque, es también concordante con lo señalado en el proyecto GAISE donde se postula que la alfabetización estadística es fundamental en diferentes ámbitos de nuestra vida personal "Statistical literacy is essential in our personal lives as consumers, citizens, and professionals." (Franklin y cols., 2005, p. 3). El análisis de las propuestas, en este ámbito, refleja además la necesidad de que los estudiantes estén preparados para reconocer usos incorrectos de la estadística en su entorno inmediato.

[5] La idea de razonamiento estadístico es utilizada en el sentido propuesto por Wild y Pfannkuch (1999).

Con respecto a las conexiones intra e interdisciplinares se sugiere conectar los contenidos estadísticos con otros contenidos matemáticos que se encuentra relacionados, como por ejemplo el razonamiento proporcional "circle graphs require an understanding of proportional reasoning" (Franklin y cols., 2005, p. 25). En este sentido se propone no solo establecer conexiones entre contenidos de un mismo nivel de enseñanza sino también entre contenidos de diferentes niveles "Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles" (NCTM, 2000, p. 68). Se propone además, establecer conexiones entre la estadística y otras áreas de la educación escolar; la estadística y la probabilidad son vistas como una forma natural de conectar las matemáticas con otras asignaturas.

En la Tabla 3.12, se encuentran contenidos los indicadores formulados para esta faceta. En la componente *apertura hacia la innovación didáctica* y *educación en valores* no se ha formulado indicadores por no haber UA clasificadas en dicha componente (anexo B).

Tabla 3.12. Indicadores faceta ecológica

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	a. Se tienen en cuenta las exigencias del currículo escolar.
Apertura hacia la innovación didáctica	
Adaptación socio-cultural y profesional	a. Se establecen conexiones entre los contenidos estadísticos con diferentes contextos de la vida cotidiana. b. Se establecen conexiones entre la estadística y su uso en diferentes profesiones y campos de la ciencia. c. Se analizan usos incorrectos de la estadística en el mundo circundante.
Educación en valores	
Conexiones intra e interdisciplinares	a. Se establecen conexiones entre los contenidos estadísticos con otros contenidos matemáticos y con otras áreas de la educación escolar. b. Se establecen conexiones entre los contenidos estadísticos de distintos niveles de enseñanza.

4.1.3. *Faceta cognitiva*

Se asume como elemento central que el aprendizaje se construyen sobre la base de los conocimientos previos; al mismo tiempo, se reconoce la necesidad de tener en cuenta y realizar adaptaciones curriculares razonables a las diferencias individuales. En este último caso, se propone que tanto los estudiantes que tienen necesidades especiales como aquellos que manifiesta un talento "excepcional" por la asignatura deben tener oportunidades para desarrollar plenamente sus capacidades.

En el componente aprendizaje, teniendo en cuenta que se consideran los mismos elementos que para la idoneidad epistémica (Godino, 2011), el aprendizaje se centra en la comprensión y competencia de los contenidos presentes en los indicadores de dicha dimensión. Esto nos ha llevado a plantear el indicador formulado sin haber incluido UA específicas en esta componente.

En la tabla 3.13 se presentan los indicadores formulados para esta faceta.

Tabla 3.13. Indicadores faceta cognitiva

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos	a. Se conectan los nuevos aprendizajes con los conocimientos previos.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	a. Se proponen adaptaciones razonables y apropiadas considerando las diferencias individuales.
Aprendizaje; evaluación sumativa	a. Se promueve la comprensión y competencia en los contenidos propuestos en la faceta epistémica (problemas, lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades, y argumentos).

4.1.4. *Faceta afectiva*

En esta dimensión se destaca la necesidad de tener en cuenta el carácter motivacional de los problemas y tareas. Para ello, se sugiere incluir situaciones desafiantes que resulten de interés para los estudiantes motivando la especulación y el trabajo intenso. En el ámbito actitudinal, se enfatiza en promover una actitud positiva hacia la materia, la perseverancia y el trabajo sistemático en la resolución de problemas, una buena disposición al trabajo de equipo y un manejo crítico de la información. Por último, en el ámbito emocional, se promueve la confianza y seguridad en las propias habilidades para resolver problemas y tareas matemáticas.

A continuación (tabla 3.14) se muestran los indicadores formulados en esta faceta.

Tabla 3.14. Indicadores faceta afectiva

COMPONENTES	INDICADORES
Intereses y necesidades	a. Se tiene en cuenta el carácter motivacional de los problemas o tareas (problemas de interés para los alumnos que inviten a la especulación y al trabajo intenso).
Actitudes	a. Se promueve una actitud positiva hacia la materia. b. Se promueven actitudes como: la curiosidad, la perseverancia y el trabajo sistemático en la resolución de problemas. c. Se favorece una actitud positiva hacia el trabajo en equipo. d. Se favorece la lectura y uso crítico de la información.

Emociones	a. Se promueve la confianza y seguridad en sí mismo para resolver problemas y tareas matemáticas.

4.1.5. *Faceta interaccional*

En relación a la primera componente de esta faceta (interacción docente-dicente), se resalta el rol del profesor como acompañante y facilitador del aprendizaje de sus estudiantes; es él el responsable de gestionar y organizar convenientemente la clase brindando ayuda oportuna y adecuada a los estudiantes que lo necesitan. En el trabajo de grupo, debe favorecer un clima de confianza y respeto mutuo fomentando la comunicación y la colaboración. También se plantea que el profesor debe estar preparado para identificar eventuales conflictos y reorientar las lecciones de clase en direcciones no previstas.

Respecto a la interacción entre discentes, se propone vivenciar instancias de comunicación y debate donde los estudiantes tengan la necesidad de comunicar, justificar y cuestionar puntos de vistas. "Los alumnos necesitan explicar y justificar lo que piensan, y aprender cómo detectar las falacias y a criticar el pensamiento de otros" (NCTM, 2000, p. 192).

En cuanto a la autonomía, se enfatiza en que los estudiantes deben ser capaces de enfrentar de manera individual problemas y tareas matemáticas. En el caso particular de la estadística, se espera que sean capaces de diseñar y llevar a cabo sus propias investigaciones lo cual implica: platear preguntas de investigación apropiadas; recoger datos; resumir los datos en tablas y gráficos; calcular estadísticos; e interpretar correctamente las técnicas utilizadas para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Finalmente, la evaluación formativa es concebida como una parte integral del aprendizaje; promoviéndose procesos de evaluación sistemática y continua mediante el uso de diversos tipos y técnicas de evaluación. Otro aspecto que se destaca es la importancia de la coherencia entre la evaluación y las metas de aprendizaje.

En la tabla 3.15 mostramos los indicadores de idoneidad inferidos en esta dimensión.

Tabla 3.15. Indicadores faceta interaccional

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	a. Se incorporan estrategias para reorientar las lecciones de clase en direcciones no previstas. b. Se promueve un clima de confianza y respeto mutuo, fomentando la discusión y colaboración en las instancias de diálogo con toda la clase.

	c.	Se tiene en cuenta la ayuda oportuna y adecuada a los estudiantes que lo necesitan.
Interacción entre discentes	a.	Se favorecen instancias de comunicación y debate que implican explicar, justificar y cuestionar puntos de vista.
Autonomía	a.	Se promueve el trabajo personal de los estudiantes frente a la resolución de problemas y tareas (comprensión del problema, trazar un plan, comprobar soluciones, comunicar resultados).
Evaluación formativa	a.	La evaluación es vista como un proceso al servicio de la enseñanza y el aprendizaje (sirve de feedback a los estudiantes y orienta la toma de decisiones por parte del profesor).
	b.	Se contemplan el uso de diversas técnicas de evaluación (resolución de problemas, tareas prácticas, observaciones, diarios de clase,…).
	c.	Se incluyen actividades de auto-evaluación, co-evaluación y hetero-evaluación.
	d.	La evaluación es coherente con las metas de aprendizaje (se incluyen tareas similares a las situaciones de aprendizaje, incluso las mismas).
	e.	La evaluación se aplica de manera continua y sistemática.

4.1.6. *Faceta mediacional*

En relación a la primera componente de esta dimensión se pone énfasis en la integración didáctica de las TIC; se sugiere el uso de Internet como fuente de información y la incorporación de calculadoras y software específicos para manipular datos (elaborar tablas, construir gráficos, realizar cálculos) y realizar simulaciones. Se propone además la incorporación de material concreto como un recurso importante para el desarrollo de los contenidos.

En la segunda componente se hace referencia al entorno físico del aula, sugiriéndose el uso de información relevante en lugar de publicaciones "vistosas" que no aportan mayormente en el aprendizaje. "Más que el escenario físico con pupitres, paneles y carteles, el ambiente de clase comunica mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y uso de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 19).

Seguidamente (tabla 3.16), presentamos los indicadores inferidos en esta dimensión.

Tabla 3.16. Indicadores faceta mediacional

COMPONENTES	INDICADORES	
Recursos materiales (tangibles, textuales, digitales, …)	a.	Se contempla la integración didáctica de TIC[6] (ordenadores, calculadoras, recursos de Internet, software específico) y material concreto en los proyectos de análisis de datos.
Número de alumnos, horario y condiciones	a.	Se tiene en cuenta una organización apropiada del entorno físico de la clase (uso de mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y

[6] Entendemos que la integración didáctica de las TIC supone tener en vista un objetivo claro de aprendizaje, proponer situaciones apropiadas, contemplar una metodología didáctica e incluir modos de evaluación correspondientes con las metas de aprendizaje.

del aula	uso de los contenidos, distribución apropiada del mobiliario,…).
Tiempo de enseñanza y aprendizaje (colectiva e individual)	

4.1.7. *Interacciones entre facetas*

En este apartado damos a conocer indicadores que han sido inferidos a partir de UA que involucran conexiones entre facetas; específicamente, hemos encontrado la siguientes interacciones: (1) *epistémica-ecológica*, se pone énfasis en la inclusión de problemas matemáticos y extra matemáticos y del empleo de representaciones semióticas para la modelización de fenómenos físico y sociales; (2) *epistémica-cognitiva*, la resolución de problemas es vista como el principal medio para construir aprendizajes matemáticos favoreciéndose también el uso de procesos meta cognitivos; (3) *epistémica-interaccional,* se propone que el profesor debe propiciar modos de justificar al alcance de los estudiantes y modelizar su lenguaje matemático, a la vez se sugiere su ayuda para el manejo eficaz de las representaciones; (4) *epistémica-mediacional,* se sugiere prestar atención a las representaciones asociadas a las TIC; (5) *cognitiva-interaccional,* el profesor debe ser capaz de reconocer y solucionar conflictos y fomentar el aprendizaje de los demás compañeros; (6) *afectiva-interaccional,* se propone que el profesor debe manifestar altas expectativas a sus estudiantes y crear un ambiente de confianza y respeto mutuo; (7) *afectiva-mediacional,* se valoras las TIC como elemento de equidad, motivación y como herramienta que permite atender mejor a estudiantes con necesidades especiales; y (8) *interaccional-mediacional,* se sugiere incorporar las TIC en procesos de evaluación formativa.

Lo que sigue (tabla 3.17), corresponde a los indicadores que hemos formulado en esta categoría.

Tabla 3.17. Indicadores que involucran interacciones entre facetas

COMPONENTES	INDICADORES
Epistémica-ecológica	a. Se propone el planteamiento y resolución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos. b. Se emplean las representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.
Epistémica-cognitiva	a. Se promueve controlar el proceso de resolución de problemas y reflexionar sobre dicho proceso (proceso meta cognitivo). b. Se tienen en cuenta las representaciones escritas como parte esencial del aprendizaje (no son vistas solo como herramientas de comunicación).

Epistémica-interaccional	a. b.	Se promueven modos informales de comunicación, siendo el profesor quien modeliza el lenguaje matemático que los estudiantes no hayan alcanzado. Se contempla la ayuda del profesor para el dominio eficaz de las representaciones (tablas, gráficos…).
Epistémica-mediacional	a.	Se presta atención a las características que presentan las representaciones asociadas a las TIC.
Cognitiva-interaccional	a. b.	Se tiene en cuenta la identificación y resolución apropiada de conflictos. Se fomenta el aprender de otros y con otros.
Afectiva-interaccional	a. b.	Se tiene en cuenta la manifestación de altas expectativas de todos sus estudiantes por parte del profesor. Se contempla la creación de un ambiente de confianza y respeto mutuo durante la clase.
Afectiva-mediacional	a. b. c.	Se incorporan las TIC como herramientas para contribuir a la equidad dentro de la clase. Se emplean las TIC como un elemento motivacional para hacer matemática. Se promueve el uso de las TIC para adaptar la enseñanza a estudiantes con necesidades especiales.
Interaccional-mediacional	a.	Se integran las TIC en procesos de evaluación formativa.

5. CONFRONTACIÓN DE LA GVID-CE CON LA LITERATURA (FASE 4)

En esta fase confrontamos la GVID-CE con la literatura investigativa a fin de buscar complementariedades y enriquecer su formulación inicial. Específicamente, haremos una confrontación con la “GVID-EOS[7]” (Godino, 2011) y una comparación general de los indicadores con resultados de investigaciones sobre formación de profesores de educación primaria para enseñar estadística. Esto último nos permitirá analizar eventuales distinciones[8] entre los aspectos metodológico-didácticos de los procesos de formación de profesores con respecto a los que se realizan en el ámbito escolar, a fin de incorporarlos en las facetas ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional.

5.1. **Confrontación de la GVID-CE con la GVID-EOS**

A continuación se realiza la confrontación de la GVID-CE con la GVID-EOS a fin de obtener una propuesta optimizada de indicadores de idoneidad didáctica para valorar procesos de formación estadística. Dado que la guía EOS sintetiza conocimientos teóricos del campo de la matemática y su didáctica, obtendremos una propuesta ampliada que denominaremos Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Formación Estadística (GVID-PFE). Se entiende que esta guía recoge tanto

[7] Nos referiremos al sistema de indicadores propuesto en Godino (2011) como GVID-EOS para distinguirla y compararla con la GVID-CE.
[8] Esperamos encontrar algunas especificidades en los estudios sobre didáctica de la estadística; específicamente, en las investigaciones relativas a propuestas de formación estadística de profesores.

el conocimiento matemático, estadístico y didáctico del currículo escolar, como así también el conocimiento didáctico-matemático sintetizado en la guía EOS.

En el desarrollo de este apartado usaremos las letras a'), b'), c'),… para identificar los indicadores EOS a fin de facilitar la comparación. En aquellos casos en que se fusionen dos o más indicadores o se incorpore un nuevo indicador a partir de la guía EOS, se explicitará el indicador tal como será formulado y la letra que se le asignará en la GVID-PFE, en caso contrario, el indicador formulado en la GVID-CE será incluido literalmente manteniendo su codificación inicial (letras a), b), c),..).

5.1.1. *Faceta epistémica*

Como indicadores de idoneidad epistémica Godino (2011) propone los incluidos en la tabla 3.18.

Tabla 3.18. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-problemas	a') Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. b') Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	a') Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...). Traducciones y conversiones entre las mismas. b') Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. c') Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	a') Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. b') Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. c') Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	a') Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. b') Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	a') Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. b') Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Situaciones-problemas

Los indicadores a') y b') son recogidos en el indicador a), aunque este último es específico para la estadística. Teniendo en cuenta la finalidad de nuestro estudio mantendremos los indicadores a) y b) tal como han sido formulados en la GVID-CE.

Lenguaje

El indicador a') está incluido en los indicadores a) y c) y el indicador c') se encuentra recogido en f). El indicador b') incorpora un aspecto nuevo: la necesidad de que el lenguaje sea adecuado a los estudiantes a los que se dirige. Este indicador será incorporado en la GVID-PFE siendo denotado con la letra g) bajo la siguiente formulación:

g) El nivel del lenguaje pretendido o empleado es adecuado a los estudiantes a que se dirige.

Reglas

Los indicadores a') y b') están relacionados con el indicador a). Sin embargo, incluyen aspectos que no están reflejados en dicho indicador; resaltan que las definiciones y procedimientos fundamentales deben ser formulados de manera correcta, clara y adaptados al nivel educativo (lo cual facilitará la comprensión). Esto nos lleva reformular el indicador a) en los siguientes términos para ser incorporado en la GVID-PFE.

a) Se incluyen los conceptos, procedimientos (algoritmos, técnicas de construcción de tablas y gráficos,…) y propiedades fundamentales de la estadística y la probabilidad, formulados de manera correcta y adaptados al nivel educativo.

El indicador c') no se encuentra contenido en la GVID-CE y será incluido literalmente denotado con la letra h), como se indica a continuación.

h) Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.

Argumentos

El indicador a') es concordante con el indicador c). A la vez el indicador b') se encuentra desarrollado de manera más explícita en los indicadores a) y b), por lo que no consideramos necesario introducir cambios en esta componente.

Relaciones entre componentes epistémicos

El indicador a') es concordante con el indicador a). Sin embargo, a') está redactado de de mejor forma de acuerdo a la teoría y a la vez a) precisa el caso de la estadística. Reformularemos el indicadora a) en los sieguiente términos.

a) Los objetos matemáticos-estadísticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

El indicador b’), no está contenido en la GVID-CE. Será incorporado textualmente asignado con la letra c) como se indica.

c) Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

5.1.2. *Faceta ecológica*

En la tabla 3.19 se muestran los indicadores propuestos en la guía EOS como indicadores de idoneidad ecológica.

Tabla 3.19. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	a’) Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	a’) Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. b’) Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	a’) Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	a’) Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	a’) Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Adaptación al currículo

Los indicadores a’) y a) resultan similares, aunque este último es de carácter más general. En este caso mantendremos el indicador a) por considerar que incluye los aspectos precisados en a’).

Apertura hacia la innovación didáctica

En la GVID-CE no se han formulado indicadores en esta componente, en cambio en la guía EOS se incluyen dos indicadores. El indicador b’) está recogido en el indicador a) de la componente recursos materiales de la faceta mediacional y por tanto no lo incluiremos para evitar reiteraciones. El indicador a’) proporciona un nuevo criterio que será incluido en la GVID-PFE formulado de la siguiente forma y denotado con la letra a) como se indica.

a) Se promueve la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.

Adaptación socio-profesional y cultural

El indicador a’) está desarrollado de manera más específica en los indicadores a), b) y c). No consideramos necesario incluir ninguna modificación.

Educación en valores

En la GVID-CE no se han formulado indicadores en esta componente. El EOS propone el indicador a’) el cuál será incorporado literalmente en la GVID-PFE denotado con la letra a) como se indica a continuación.

a) Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.

Conexiones intra e interdisciplinares

El indicador a’) es desarrollado de manera más explícita en los indicadores a) y b). No se incorporarán cambios en esta componente.

5.1.3. *Faceta cognitiva*

En esta faceta el EOS considera los indicadores que se muestran en la tabla 3.20.

Tabla 3.20. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos	a’) Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). b’) Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	a’) Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. b’) Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje; evaluación sumativa	a’) Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia). b’) Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. c’) La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. d’) Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Conocimientos previos

El indicador a') es similar al indicador a). Sin embargo, a') aporta un elemento nuevo que refiere a que el profesor debe planificar el estudio de los conocimientos previos que los estudiantes no hayan alcanzado. Consideramos que este es un aspecto importante que complementa el indicador a) y por tanto lo incorporemos en dicho indicador, el cual quedará reformulado de la siguiente forma.

a) Se conectan los nuevos aprendizajes con los conocimientos previos retomando aquellos aprendizajes que los estudiantes no hayan alcanzado.

El indicador b') no está considerado en la GVID-CE por lo que será incluido literalmente en la GVID-PFE denotado con la letra b) como se indica a continuación.

b) Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

El indicador b') está recogido en el indicador a). El indicador a') aporta un nuevo criterio que será incluido en la GVID-PFE manteniendo la misma redacción con la que aparece en guía EOS denotado con la letra b).

b) Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.

Aprendizaje

El indicador b') es concordante con el indicador a) aunque en este último no se incluye la competencia metacognitiva, la cual es recogida en el indicador a) de la interacción epistémica-cognitiva. En este caso mantendremos el indicador a) tal como ha sido formulado.

Los indicadores a'), c') y d') aportan nuevos criterios que serán incluidos literalmente denotados con las letras b), c) y d) respectivamente. A continuación se muestran estos indicadores de acuerdo a la forma en que serán incluidos en la GVID-PFE.

b) Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia).

c) La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.

d) Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

5.1.4. *Faceta afectiva*

Como criterios de idoneidad afectiva el EOS considera los propuestos en la tabla 3.21.

Tabla 3.21. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES	INDICADORES
Intereses y necesidades	a') Las tareas tienen interés para los alumnos. b') Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	a') Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. b') Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	a') Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. b') Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Intereses y necesidades

El indicador a') está presentado de manera más explícita en el indicador a). El indicador b') aporta un elemento nuevo que refiere a valorar la utilidad de las matemáticas en el ámbito social y profesional (no se trata solo de establecer conexiones). Este indicador será incluido en la GVID-PFE denotado con la letra b) de la siguiente forma.

b) Se incentiva la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.

Actitudes

El indicador a') está mayormente desarrollado en los indicadores b) y c). El indicador b') constituye en un nuevo criterio que incorporaremos literalmente designado con la letra e) como se indica a continuación.

e) Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.

Emociones

El indicador a') es similar al indicador a) y no aporta información nueva. El indicador b') no está considerado en la GVID-CE y por tanto será incorporado literalmente denotado con la letra b) como se muestra a continuación.

b) Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

5.1.5. *Faceta interaccional*

Los siguientes (tabla 3.22) corresponden a los indicadores de idoneidad interaccional propuestos en la guía EOS.

Tabla 3.22. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	a') El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)
	b') Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.).
	c') Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento.
	d') Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.
	e') Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre discentes	a') Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.
	b') Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.
	c') Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	a') Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	a') Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Interacción docente-discente

El indicador a') es un criterio que no se encuentra incluido en la GVID-CE. Alude a la necesidad de hacer una introducción adecuada del tema de estudio que se quiere tratar con los estudiantes. Consideramos necesario incluir este indicador de una manera ampliada, teniendo en cuenta también los momentos de sistematización que se deberían realizar al finalizar el estudio de un tema. En concreto, este indicador será incluido en la GVID-PFE denotado con la letra d) bajo la siguiente formulación.

d) Se contemplan momentos de introducción (presentación de objetivos, metodología didáctica, modos de evaluación,…) y sistematización de los contenidos tratados poniendo énfasis en los contenidos claves.

El indicador b’) no se corresponde con ningún indicador de esta componente; sin embargo, se encuentra recogido en el indicador a) de la dimensión cognitiva-interaccional por lo que no será incorporado en GVID-PFE.

Los indicadores c’) y d’) no están contenidos en la GVID-CE por lo que serán incluido en la GVID-PFE asignados con las letras e) y f) bajo respectivamente como se indica a continuación.

e) Se considera llegar a consensos con base al mejor argumento.

f) Se tiene en cuenta el uso de diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.

Finalmente, el indicador e’) se encuentra mayormente desarrollado en el indicador b) y no aporta información nueva.

Interacción entre discentes

Los indicadores a’) y b’) están contenidos en a), aunque b’) aporta un nuevo elemento que refiere a utilizar argumentos matemáticos para explicar, justificar o cuestionar puntos de vista (respuestas). En este caso reformularemos el indicador a) incluyendo este elemento, quedando redactado de la siguiente forma.

a) Se favorecen instancias de comunicación y debate que implican explicar, justificar y cuestionar puntos de vista (respuestas) utilizando argumentos matemáticos.

El indicador c’) no está contenido en la GVID-CE y será incluido literalmente en la GVID-PFE denotado con la letra b) como se indica a continuación.

b) Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.

Autonomía

El indicador a’) se corresponde con a) y por los tanto no haremos modificaciones en esta componente.

Evaluación formativa

El indicador a’) es concordante con el indicador e) lo que no hace necesaria ninguna modificación en los indicadores formulados para esta componente.

5.1.6. *Faceta mediacional*

Como indicadores de idoneidad mediacional el EOS propone los siguientes (tabla 3.23).

Tabla 3.23. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES	INDICADORES
Recursos materiales (tangibles, textuales, digitales, …)	a’) Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. b’) Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	a’) El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. b’) El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). c’) El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo de enseñanza y aprendizaje (colectiva e individual)	a’) El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida b’) Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. c’) Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Recursos materiales

El indicador a’) está contemplado en el indicador a). El indicador b’) es un criterio no considerado en la GVID-CE y por tanto será incorporado en la GVID-PFE textualmente denotado con la letra b), como se indica a continuación.

b) Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.

Número de alumnos, horario y condiciones del aula

Ninguno de los tres indicadores propuestos en la guía EOS, están considerados en la GVID-CE. Estos indicadores serán incluidos en la GVID-PFE formulados de la siguiente manera y denotados con las letras b), c) y d) como se indica a continuación.

b) Se tiene en cuenta el número y distribución de los alumnos para llevar a cabo la enseñanza pretendida de manera apropiada.

c) Se contemplan aspectos relativos al horario de mayor conveniencia para impartir las clases (p. ej., no se imparten todas las sesiones a última hora).

d) Se considera que las condiciones del aula sean adecuadas para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.

Tiempo

En esta componente no se han formulado indicadores en la GVID-CE y por tanto incorporaremos los tres indicadores propuestos en el EOS denotas con las letras a), b) y c) manteniendo su redacción original.

a) El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.

b) Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.

c) Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

5.1.7. *Interacciones entre facetas*

En la guía EOS se contemplan los siguientes componentes e indicadores de idoneidad que involucran interacciones entre facetas (tabla 3.24).

Tabla 3.24. Componentes e indicadores de idoneidad de interacciones entre facetas

COMPONENTES	INDICADORES
Epistémica-ecológica	a') El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	a') El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. b') Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. c') Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos. d') Las tareas que los profesores seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.
Epistémica-cognitiva-mediacional	a') El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva-interaccional	a') Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. b') Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Ecológica-instruccional	a') El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes. b') El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. c') El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos.

En este caso, salvo la primera componente (epistémica-ecológica), las interacciones contenidas en el EOS difieren de las contempladas en la GVID-CE. Esto es así, dado que la formulación de dichas componentes emerge de manera inductiva y no siguen una formulación preestablecida por la teoría.

Teniendo en cuenta lo anterior haremos una comparación global de los indicadores contemplados en esta faceta y no "componente a componente" como lo hemos hecho en las dimensiones anteriores. Los indicadores que no estén contenidos en la GVID-CE serán incluidos con el componente respectivo en la GVID-PFE.

El indicador a') propuesto en la componente epistémica-ecológica es concordante con el indicador a) de esta misma interacción en la GVID-CE.

En la segunda interacción propuesta en el EOS se incluyen cuatro indicadores. El primero, no se corresponde con ningún indicador de la GVID-CE y por tanto será incluido en la GVID-PFE junto a la interacción correspondiente; la componente será incluida al final de las contempladas en la GVID-CE y el indicador será designado con la letra a) como se indica a continuación.

a) El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados.

El indicador b') de esta componente tiene un alto grado de correspondencia con los elementos contenidos en los indicadores b) de la componente actitudes y a) de la componente emociones (faceta afectiva) de la GVID-CE y por tanto no lo incluiremos para evitar reiteraciones. El indicador c') es concordante en gran medida con el indicador a) de la interacción epistémica-cognitiva de la GVID-CE y por lo tanto tampoco será incluido. Finalmente, el indicador d') consideramos que es un criterio nuevo que se debe incorporar. Este indicador será incluido en la componente epistémica-cognitiva-afectiva manteniendo su formulación inicial, designado con la letra b) como se indica a continuación.

b) Las tareas que los profesores seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.

El indicador a') incluido en la tercera interacción propuesta en el EOS es bastante similar al indicador b) de la componente afectiva-mediacional propuesta en la GVID-

CE. No consideramos oportuno incluir este indicador para para mantener la independencia de cada criterio con respecto a los demás.

El indicador a’) propuesto en la cuarta componente es altamente concordante con el indicador a) de la componente interacción entre discentes de la GVID-CE, después de su reformulación. Del mismo modo el indicador b’) de esta componente está contenido en la GVID-CE entre los indicadores a) de la componente adaptaciones a las diferencias individuales (faceta cognitiva) y el indicador a) de la componente intereses y necesidades de la faceta afectiva. No consideramos conveniente incluir estos indicadores para evitar reiteraciones.

Finalmente, los indicadores propuestos en la quinta componente de la guía EOS no están recogidos en la GVID-CE. Incluiremos esta componente y los indicadores respectivos como la última interacción en la GVID-PFE. Los indicadores serán formulados y denotados con las letras a), b) y c) como se indica a continuación.

a) Se tiene en cuenta una actitud comprensiva y dedicada a los estudiantes por parte del profesor.

b) El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza[9].

c) El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos[10].

5.2. Comparación de la GVID-PFE con estudios sobre formación de profesores para enseñar estadística

En este aparatado hacemos una comparación global de la GVID-PFE con resultados de investigaciones sobre formación de profesores para enseñar estadística. El objetivo de este análisis es indagar aspectos que podrían no estar contemplados en dicha guía para incorporarlos en los indicadores formulados y la vez, indagar aspectos metodológico-didácticos específicos para la formación de profesores que orienten posibles adaptaciones de los indicadores ecológicos, cognitivos, efectivos e intruccionales. Para ello, tendremos en cuenta la síntesis de resultados de investigaciones presentadas en el

[9] Este indicador es observable principalmente a un proceso de estudio implementado. Sin embargo, si se trata de un diseño, se observa si se hace alusión a dicha competencia.
[10] Este indicador tiene un carácter especial respecto a los demás y será necesario definir algún tipo de estrategia para su aplicación (p. ej. entrevistar al profesor).

capítulo 1 según las dimensiones epistémica-ecológica; cognitiva-afectiva e instruccional (interaccional y mediacional).

5.2.1. **Dimensión epistémica-ecológica**

Los resultados investigativos dan cuenta que los profesores de educación primaria en ejercicio y en formación manifiestan dificultades para resolver problemas de análisis de datos (Mickelson y Heaton, 2004; Ruiz et al., 2009). Esta situación es abordada en la GVID-PFE a través del indicador a) de la componente situaciones problemas en el que se promueve la inclusión de problemas estadísticos (proyectos de análisis de datos) como el componente central de la actividad matemática estadística.

Otro aspecto reflejado en las investigaciones es que se requiere una mayor comprensión en los conceptos y procedimientos básicos de la estadística como son los promedios (Batanero, et al., 1997; Estrada, et al., 2004; Groth y Bergner, 2006; Jacobbe 2008) y las dispersiones (Borim y Queiroz, 2008; Makar y Confrey, 2005; Silva y Coutinho 2008). Estos contenidos se encuentran incluidos en las propuestas curriculares que fueron analizadas para la construcción de la GVID-CE y por tanto son recogidos en los indicadores de la componente elementos regulativos (reglas) principalmente en los indicadores a) y c).

El razonamiento estadístico es otro tema que presenta dificultades (Canada, 2008; Mickelson y Heaton 2004) según las investigaciones revisadas. Su estudio es recogido explícitamente en el indicador b) de la componente relaciones de esta faceta en la GVID-PFE siendo conectado con la resolución de problemas de análisis de datos.

Otro aspecto que se manifiesta deficitario es el dominio de conocimientos para la construcción e interpretación de gráficos (Arteaga, 2011; Espinel, 2007; Espinel, et al., 2008; Ruiz, et al., 2009). El estudio de estos contenidos es tenido en cuenta en la GVID-PFE en los indicadores propuestos en la componente lenguaje; específicamente el indicador a) alude a la producción de gráficos y el indicador f) a su lectura e interpretación.

Desde el punto de vista ecológico, se observa que tanto los profesores en ejercicio como en formación manifiestan un manejo deficiente de las directrices curriculares y tienen dificultades para establecer relaciones entre la estadística con otras áreas de la matemática, con otras materias y con la vida personal y social de sus estudiantes (Arteaga, 2011). Los indicadores a) de la componentes adaptación al currículo, a) de la componente adaptación sociocultural y profesional, y a) de la componente conexiones intra e interdisciplinares propuestos en la GVID-PFE recogen, en su conjunto, los elementos señalados en estas investigaciones.

De acuerdo a lo anterior consideramos que los resultados de investigaciones en esta dimensión no aportan nuevos elementos que se deberían incorporar en la GVID-PFE. En consecuencia, mantendremos los indicadores de esta faceta de la forma en que han sido formulados.

5.2.2. **Dimensión cognitiva-afectiva**

En el ámbito cognitivo-afectivo se observan debilidades en el dominio de diferentes contenidos estadísticos lo cual estaría afectando los intereses, actitudes y emociones de los profesores hacia la materia. Esto se ve reflejado en el grado de inseguridad que manifiestan algunos profesores respecto al dominio de los contenidos estadísticos y la percepción de la estadística como una disciplina difícil y formal (Chick y Pierce,2008; Estrada y Batanero; 2008). Con respecto a estos resultados hay indicadores en la GVID-PFE que están enfocados en este sentido; específicamente, el indicador a) de la componente aprendizaje (faceta cognitiva), y los indicadores a) de la componente actitudes y a) de la componente emociones de la faceta afectiva.

Otro aspecto que se pone en evidencia en los estudios revisados es el bajo nivel de competencia didáctica sobre aspectos cognitivos que tienen algunos profesores para llevar a cabo la enseñanza; destacando la falta de preparación para identificar y corregir conflictos cognitivos (Cai y Gorowara, 2002; Pinto, 2010; Watson, et al., 2008) y para evaluar logros en el aprendizaje (Arteaga, 2011). En la GVID-FPE la primera situación es recogida explícitamente en el indicador a) de la componente cognitiva-interaccional de la dimensión interacciones entre facetas. El tema de la evaluación está contenido en los indicadores b), c) y d) de la componente aprendizaje y se encuentra también abordado en la componente evaluación formativa de la faceta interaccional.

Lo resultados de las investigaciones en este ámbito tampoco arrojan información que no esté contenida en la GVID-PFE por lo que mantendremos los mismos indicadores formulados.

5.2.3. **Dimensión instruccional**

Los estudios muestran diversas dificultades que se manifiestan en los profesores desde el punto de vista instruccional como son: la falta de capacidad para poner a funcionar conocimientos pretendidos en determinados momentos de la clase (Burgess, 2008); dificultades para planificar lecciones de enseñanza (Cai y Gorowara , 2002); un conocimiento débil para incorporar las TIC en los procesos de enseñanza (Arteaga, 2011; Pinto 2010); y el uso de formas poco innovadoras de instrucción centradas principalmente en la "trasmisión" de información (Pinto, 2010).

La mayoría de los aspectos señalados están recogidos en la GVID-PFE y otros no han sido contemplados. La primera dificultad se recoge en el indicador a) de la componente interacción docente-discente de la faceta interaccional; la integración de las TIC, se contempla en el indicador a) de la componente recursos materiales (faceta mediacional); y el tema de la innovación es tenido en cuenta en el indicador a) de la componente apertura hacia la innovación didáctica de la faceta ecológica. Un elemento nuevo que se recoge de estos resultados es la necesidad de planificar apropiadamente la enseñanza. Este es un aspecto relevante que involucra las diferentes dimensiones de la idoneidad didáctica y que incorporaremos en la GVID-PFE como una nueva componente interacciones entre facetas que denominaremos "interacción entre las seis dimensiones de la idoneidad didáctica", incluyendo el siguiente indicador.

a) Se planifican apropiadamente los contenidos de enseñanza teniendo en cuenta: la selección apropiada de situaciones, su solución esperada y posibles respuestas erróneas (la forma de enfrentarlas); la metodología didáctica; los medios a utilizar; y la forma de evaluar los aprendizajes pretendidos.

En esta dimensión hay también estudios que a partir de la reflexión didáctica y del diseño o evaluación de propuestas de formación estadística de profesores de educación primaria, proporcionan orientaciones sobre cómo llevar a cabo la enseñanza en estos niveles educativos. Esto resulta relevante ya que nos permite un primer acercamiento para poder identificar aspectos distintivos de la enseñanza de la estadística en estos niveles con respecto a la educación estadística en el ámbito escolar. O bien reafirmar (en cierto modo) que los indicadores de la dimensión instruccional propuestos en la GVID-PFE pueden ser utilizados para valorar procesos de formación estadística de profesores de educación primaria.

Entre los trabajos mencionados para desarrollar los contenidos estadísticos se promueven: el uso de proyectos de análisis de datos (Batanero y Díaz, 2005; Godino, et al., 2008); la integración de las TIC (Lee y Hollebrands, 2008); y el uso del enfoque de la matemática realista (Giambalvo y Gattuso, 2008). Además de estos estudios Estepa

(2008), hace un análisis de las dificultades, la disponibilidad de recursos y los principios a considerar en la formación de maestros de primaria sobre procesos estocásticos.

Los elementos mencionados no difieren mayormente de los contemplados en la GVID-PFE. El trabajo con proyectos de análisis de datos es recogido en el indicador a) de la componente situaciones problemas y se supone que determina la metodología de trabajo. Así mismo, la conexión de los problemas con la faceta ecológica recoge los aspectos de la matemática realista (Freudenthal, 1991). La integración de las TIC está contenida en el indicador a) de la componente recursos materiales de la faceta mediacional y el modelo propuesto por Estepa (2008) se encuentra recogido a lo largo de los indicadores propuestos en la GVID-PFE.

En vista a lo anterior, consideramos que las investigaciones revisadas no proporcionan nuevos elementos que complementen los indicadores propuestos.

6. PRESENTACIÓN DE LA GVID-PFE

En este apartado presentamos la GVID-PFE incluyendo la totalidad de los indicadores formulados después del proceso de comparación realizado en el punto anterior. De acuerdo con el proceso seguido para llegar a su formulación definitiva, consideramos que este instrumento es una propuesta válida para valorar (o diseñar) procesos de formación estadística en profesores de educación primaria. No ha sido posible identificar aspectos relevantes que orienten la reformulación de los indicadores de las facetas ecológica, cognitiva, afectiva, e intruccional a fin de diferenciar aspectos metodolóco-didácticos para enseñar estadística en procesos de formación de profesores con relación al nivel escolar.

6.1. **Idoneidad epistémica**

La formación estadística de profesores de educación primaria deberá contemplar el desarrollo de los conocimientos, comprensión y competencias profesionales incluidas en los indicadores presentados en la Tabla 3.25. Estos indicadores recogen aspectos del conocimiento común y avanzado del conocimiento matemático-estadístico que debe dominar un profesor (Godino, 2009).

Tabla 3.25. Indicadores faceta epistémica

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-problemas	a. Se incluyen problemas estadísticos para introducir, desarrollar y aplicar nociones de estadística y probabilidad (involucra resolver y formular problemas).

	b.	Se promueve el uso de problemas abiertos (de tipo heurístico) que admiten el uso de estrategias variadas de resolución.
Lenguajes	b.	Se incluyen diversas representaciones de uso convencional en estadística y probabilidad (representaciones concretas y visuales, tablas, gráficos, estadísticos, íconos, símbolos,…) incentivando su producción por parte de los alumnos.
	c.	Se promueve la creación y uso de representaciones no convencionales.
	d.	Se proponen procesos de traducción entre distintas representaciones.
	e.	Se promueve la capacidad para discriminar entre distintas representaciones teniendo en cuenta sus ventajas y limitaciones.
	f.	Se contempla el estudio y uso correcto de los elementos básicos de un gráfico (títulos, etiquetas, ejes, grados,…).
	g.	Se incluyen contenidos sobre lectura e interpretación de tablas y gráficos.
	h.	El nivel del lenguaje pretendido o empleado es adecuado a los estudiantes a que se dirige.
Reglas: definiciones, proposiciones y procedimientos	a.	Se incluyen los conceptos, procedimientos (algoritmos, técnicas de construcción de tablas y gráficos,…) y propiedades fundamentales de la estadística y la probabilidad, formulados de manera correcta y adaptados al nivel educativo.
	b.	Se promueven diferentes métodos de recolección de datos (censos, encuestas, observación, medición, experimentos aleatorios).
	c.	Se promueve el uso e interpretación apropiada de conceptos, técnicas (promedios, indicadores de dispersión, gráficos, forma de la distribución, valores atípicos,…) y propiedades estadísticas para: analizar, describir y comparar conjuntos de datos; establecer conjeturas que relacionen una muestra con su población; analizar experimentos comparativos; y explorar tendencias de datos a través del tiempo.
	d.	Se incluye el estudio de modelos "simples" (nubes de puntos, líneas de ajuste) para analizar la relación (grado de intensidad) entre dos variables.
	e.	Se propone establecer conjeturas y hacer predicciones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos (regla de Laplace).
	f.	Se propone estimar frecuencias conocida la probabilidad (tablas y gráfico de distribución de probabilidad, ley empírica de los grandes números).
	g.	Se incluyen procedimientos de selección aleatoria para la obtención de muestras representativas.
	h.	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	a.	Se promueve el razonamiento y la demostración como una actividad fundamental de la actividad matemática.
	b.	Se promueve el desarrollo, evaluación y justificación de argumentos.
	c.	Se incluyen diferentes tipos de razonamiento y métodos de demostración.
	d.	Se fomentan maneras de justificar acordes al nivel de los estudiantes.
Relaciones	a.	Los objetos matemáticos-estadísticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.
	b.	Se promueven destrezas de razonamiento estadístico a través de la resolución de problemas de análisis de datos.
	c.	Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

6.2. **Idoneidad ecológica**

En la tabla 3.26 se incluyen los indicadores que suponen un alto nivel de idoneidad ecológica en sus diferentes componentes.

Tabla 3.26. Indicadores faceta ecológica

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	a. Se tienen en cuenta las exigencias del currículo escolar.
Apertura hacia la innovación didáctica	a. Se promueve la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.
Adaptación socio-cultural y profesional	a. Se establecen conexiones entre los contenidos estadísticos con diferentes contextos de la vida cotidiana. b. Se establecen conexiones entre la estadística y su uso en diferentes profesiones y campos de la ciencia. c. Se analizan usos incorrectos de la estadística en el mundo circundante.
Educación en valores	a. Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	a. Se establecen conexiones entre los contenidos estadísticos con otros contenidos matemáticos y con otras áreas de la educación escolar. b. Se establecen conexiones entre los contenidos estadísticos de distintos niveles de enseñanza.

6.3. **Idoneidad cognitiva**

Una alta idoneidad cognitiva supone el cumplimiento de los indicadores propuestos en la tabla 3.27. En el componente aprendizaje, se consideran los mismos conocimientos, comprensiones y competencias incluidas en los indicadores de la faceta epistémica.

Tabla 3.27. Indicadores faceta cognitiva

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos	a. Se conectan los nuevos aprendizajes con los conocimientos previos retomando aquellos aprendizajes que los estudiantes no hayan alcanzado. b. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	a. Se proponen adaptaciones razonables y apropiadas considerando las diferencias individuales. b. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje; evaluación sumativa	a. Se promueve la comprensión y competencia en los contenidos propuestos en la faceta epistémica (problemas, lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades, y argumentos). b. Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia). c. La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. d. Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

6.4. **Idoneidad afectiva**

La idoneidad afectiva de un proceso formativo implica el cumplimiento de los indicadores presentados en la tabla siguiente.

Tabla 3.28. Indicadores faceta afectiva

COMPONENTES	INDICADORES
Intereses y necesidades	a. Se tiene en cuenta el carácter motivacional de los problemas o tareas (problemas de interés para los alumnos que inviten a la especulación y al trabajo intenso). b. Se incentiva la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	a. Se promueve una actitud positiva hacia la materia. b. Se promueven actitudes como: la curiosidad, la perseverancia y el trabajo sistemático en la resolución de problemas. c. Se favorece una actitud positiva hacia el trabajo en equipo. d. Se favorece la lectura y uso crítico de la información. e. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	a. Se promueve la confianza y seguridad en sí mismo para resolver problemas y tareas matemáticas. b. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

6.5. **Idoneidad interaccional**

Una alta idoneidad interaccional se alcanza mediante el logro de los indicadores propuestos en la tabla 3.29.

Tabla 3.29. Indicadores faceta interaccional

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	a. Se incorporan estrategias para reorientar las lecciones de clase en direcciones no previstas. b. Se promueve un clima de confianza y respeto mutuo, fomentando la discusión y colaboración en las instancias de diálogo con toda la clase. c. Se tiene en cuenta la ayuda oportuna y adecuada a los estudiantes que lo necesitan. d. Se contemplan momentos de introducción (presentación de objetivos, metodología didáctica, modos de evaluación,…) y sistematización de los contenidos tratados poniendo énfasis en los contenidos claves. e. Se considera llegar a consensos con base al mejor argumento. f. Se tiene en cuenta el uso de diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.
Interacción entre discentes	a. Se favorecen instancias de comunicación y debate que implican explicar, justificar y cuestionar puntos de vista (respuestas) utilizando argumentos matemáticos. b. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	a. Se promueve el trabajo personal de los estudiantes frente a la resolución de problemas y tareas (comprensión del problema, trazar un plan, comprobar soluciones, comunicar resultados).
Evaluación formativa	a. La evaluación es vista como un proceso al servicio de la enseñanza y el

	aprendizaje (sirve de feedback a los estudiantes y orienta la toma de decisiones por parte del profesor). b. Se contemplan el uso de diversas técnicas de evaluación (resolución de problemas, tareas prácticas, observaciones, diarios de clase,…). c. Se incluyen actividades de auto-evaluación, co-evaluación y hetero-evaluación. d. La evaluación es coherente con las metas de aprendizaje (se incluyen tareas similares a las situaciones de aprendizaje, incluso las mismas). e. La evaluación se aplica de manera continua y sistemática.

6.6. **Idoneidad mediacional**

Una alta idoneidad mediacional implica la presencia de los indicadores presentados en la tabla 3.30.

Tabla 3.30. Indicadores faceta mediacional

COMPONENTES	INDICADORES
Recursos materiales (tangibles, textuales, digitales, …)	a. Se contempla la integración didáctica de TIC (ordenadores, calculadoras, recursos de Internet, software específico) y material concreto en los proyectos de análisis de datos. b. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	a. Se tiene en cuenta una organización apropiada del entorno físico de la clase (uso de mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y uso de los contenidos, distribución apropiada del mobiliario,…). b. Se tiene en cuenta el número y distribución de los alumnos para llevar a cabo la enseñanza pretendida de manera apropiada. c. Se contemplan aspectos relativos al horario de mayor conveniencia para impartir las clases (p. ej., no se imparten todas las sesiones a última hora). d. Se considera que las condiciones del aula sean adecuadas para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo de enseñanza y aprendizaje (colectiva e individual)	a. El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. b. Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. c. Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

6.7. **Interacciones entre facetas**

Como componentes e indicadores de idoneidad de interacciones entre facetas proponemos los incluidos en la tabla 3.31.

Tabla 3.31. Indicadores que involucran interacciones entre facetas

COMPONENTES	INDICADORES
Epistémica-ecológica	a. Se propone el planteamiento y resolución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos. b. Se emplean las representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.
Epistémica-cognitiva	a. Se promueve controlar el proceso de resolución de problemas y reflexionar sobre dicho proceso (proceso meta cognitivo).

	b. Se tienen en cuenta las representaciones escritas como parte esencial del aprendizaje (no son vistas solo como herramientas de comunicación).
Epistémica-interaccional	a. Se promueven modos informales de comunicación, siendo el profesor quien modeliza el lenguaje matemático que los estudiantes no hayan alcanzado. b. Se contempla la ayuda del profesor para el dominio eficaz de las representaciones (tablas, gráficos…).
Epistémica-mediacional	a. Se presta atención a las características que presentan las representaciones asociadas a las TIC.
Cognitiva-interaccional	a. Se tiene en cuenta la identificación y resolución apropiada de conflictos. b. Se fomenta el aprender de otros y con otros.
Afectiva-interaccional	a. Se tiene en cuenta la manifestación de altas expectativas de todos sus estudiantes por parte del profesor. b. Se contempla la creación de un ambiente de confianza y respeto mutuo durante la clase.
Afectiva-mediacional	a. Se incorporan las TIC como herramientas para contribuir a la equidad dentro de la clase. b. Se emplean las TIC como un elemento motivacional para hacer matemática. c. Se promueve el uso de las TIC para adaptar la enseñanza a estudiantes con necesidades especiales.
Interaccional-mediacional	a. Se integran las TIC en procesos de evaluación formativa.
Epistémica-cognitiva-afectiva	a. El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. b. Las tareas que los profesores seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.
Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	a. Se tiene en cuenta una actitud comprensiva y dedicada a los estudiantes por parte del profesor. b. El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. c. El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos.
Interacciones entre las seis dimensiones de la idoneidad didáctica	a. Se planifican apropiadamente los contenidos de enseñanza teniendo en cuenta: la selección apropiada de situaciones, su solución esperada y posibles respuestas erróneas (la forma de enfrentarlas); la metodología didáctica; los medios a utilizar; y la forma de evaluar los aprendizajes pretendidos.

7. APPLICACIÓN DE LA GVID-PFE A UN PLAN DE ESTUDIO SOBRE FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE PROFESORES DE EDUACIÓN PRIMARIA

En este apartado aplicamos la GVID-PFE para valorar un plan de estudio sobre formación estadística de profesores de educación primaria de una Universidad de Chile. El objetivo de esta aplicación tiene una doble finalidad; recoger información respecto a la idoneidad didáctica de la formación que contempla el plan de estudios y por otra, comprobar la factibilidad de aplicar el sistema de los indicadores propuestos como un instrumento para la valoración de acciones formativas (diseñadas o implementadas) en procesos de formación de profesores.

Para la aplicación del instrumento, consideraremos a priori que los indicadores de la faceta ecológica, cognitiva, afectica e instruccional, interpretados razonablemente, son aplicables tanto para valorar procesos de formación estadística a nivel escolar como en procesos de formación de profesores de educación primaria.

El plan de estudio que se pretende valorar (anexo C) está enunciado de manera general y se estructura en las siguientes partes: (1) identificación general del curso y una breve descripción; (2) objetivos generales; (3) desglose de contenidos; (4) metodología didáctica; y (5) evaluación. Se incluye además una sección final con las principales fuentes bibliográficas. Los apartados dos y tres resumen las expectativas de aprendizaje de los estudiantes y por tanto se relacionan con las facetas epistémica y cognitiva. Por su parte, los apartados 4 y 5 orientan (o deberían orientar) el quehacer del formador de profesores respecto a las demás dimensiones de la idoneidad didáctica (ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional).

Para expresar la idoneidad didáctica del plan de formación lo haremos en términos cualitativos según su correspondencia con los indicadores propuestos utilizando los siguientes conceptos:

- *Alta,* supone un cumplimento del 70% de los indicadores o más.
- *Media,* se cumple un porcentaje de indicadores igual o superior al 40% y menor que el 70%.
- *Baja,* el porcentaje de indicadores que se cumple es inferir al 40%.

7.1. **Idoneidad epistémica**

7.1.1. *Situaciones problemas*

En el cuarto y quinto objetivo del plan de formación se hace mención a las situaciones problemas. Específicamente, en estos objetivos se menciona:

O4: Reconocer e interpretar sucesos dependientes, independientes, equiprobabilidad, y certeza en contextos de resolución de problemas.

O5: Resolución de problemas de probabilidad y su relación con modelado matemático de situaciones reales.

En ambos casos las situaciones problemas aluden específicamente al contenido de probabilidad, sin hacer mención a la estadística. No hace ninguna mención al tipo de problemas que se propone, salvo la conexión entre los problemas de equiprobabilidad con el modelamiento de situaciones reales.

En vista a lo anterior, lo que se observa es que los indicadores a) y b) se cumplen de manera parcial. Falta explicitar el uso de problemas de análisis de datos como el eje central de la actividad matemática estadística (incluye probabilidad) y caracterizar el tipo de problemas que se promueve (indicador b)). En relación con lo observado, podemos considerar que la idoneidad del plan de formación en esta componente es media.

7.1.2. *Lenguaje*

En plan de formación contempla los aspectos valorados en el indicador a) de esta componente. Esto se ve reflejado en el objetivo 1 y los contenidos 3 y 4 donde se menciona:

O1: Construir distintos tipos de gráficos.

C3: Tablas de frecuencia simples y tablas de contingencia.

C4: Representación gráfica de datos. Gráficos de línea, de barras, circulares, de tallos y hojas, de bigote, histogramas de frecuencia, polígonos de frecuencias.

La capacidad para discriminar entre el uso de diferentes representaciones (indicador d)) es un aspecto que también está considerado en el plan de formación. En efecto, en el objetivo 1 se propone también "Seleccionar datos y construir el gráfico adecuado para presentar la información recolectada".

Finalmente, la lectura e interpretación de gráficos (indicador f)) es recogida en el objetivo 2 en el cual se propone "Interpretar distintos tipos de gráficos con datos estadísticos".

El plan de formación no da respuesta a los indicadores b), c), e) y g). Faltaría por tanto, incluir aspectos relativos al uso de representaciones no convencionales, los procesos de traducción entre representaciones (transnumeración), el estudio de los elementos de un gráfico (título, etiquetas, ejes) y el nivel de lenguaje pretendido o implementado.

De acuerdo a lo observado se cumplen 4 de 7 indicadores (57.1%), lo que sugiere una idoneidad media del plan de formación en esta componente.

7.1.3. *Reglas*

El plan de formación responde satisfactoriamente al indicador a). En el objetivo 3 se propone "Conocer (…) las mediadas de tendencia central" y en objetivo 4 "Conocer los conceptos básicos de probabilidad". A la vez, en el apartado de contenidos se desarrollan los principales conceptos, procedimientos y propiedades de la estadística y la probabilidad teniendo en cuenta aspectos del conocimiento común y avanzado.

El indicador c), aunque no se encuentra desarrollado de manera explícita, se puede entender que también está considerado en el plan de formación, aunque de manera parcial. En el objetivo 2 se menciona "interpolar resultados y realizar predicciones a partir de estos" y el objetivo 3 se alude a "interpretar las medidas de tendencia central y lo que representan". Sin embargo, no se alude mayormente al trabajo con datos.

Los indicadores e) y f) se contemplan en el desarrollo de los contenidos de probabilidad donde se proponen contenidos como: "Eventos y probabilidades", "Relación entre probabilidad y frecuencia relativa" y "Ley de los grandes números".

Faltaría introducir o explicitar en este plan de formación el uso de diferentes métodos de recolección de datos (indicador b)); la incorporación de modelos para analizar la relación entre variables (indicador d)); métodos aleatorios para la obtención de muestras representativas (indicador g)); y la posibilidad de generar o "negociar" definiciones, proposiciones o procedimientos (indicador h)).

En síntesis tenemos que se cumplen 4 de 8 indicadores propuestos (50%). En consecuencia podemos decir que el plan de formación en esta componente alcanza un nivel de idoneidad media.

7.1.4. *Argumentos*

No se hace ninguna referencia explícita a los indicadores propuestos en esta componente. Habría que tener en cuenta los elementos contenidos en dichos indicadores e incorporarlos al plan de formación.

La idoneidad didáctica en esta componente es baja.

7.1.5. *Relaciones entre componentes*

El indicador a) podría estar recogido implícitamente en la resolución de problemas que se propone en el plan de formación. Sin embargo, requiere mayor explicitud.

Los demás indicadores no están recogidos en el plan de formación, lo cual sugiere incorporar aspectos relativos al razonamiento estadístico (indicador b)) en el sentido propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) y tener en cuenta la idea de articular diversos significados de los objetos matamático-estadísticos que intervienen (indicador c)).

Se cumple 1 de 3 indicadores (33.3%) lo cual indica una idoneidad baja.

7.2. **Idoneidad ecológica**

7.2.1. *Adaptación al currículo*

Los objetivos y contenidos propuestos en el plan de formación son concordantes con los incluidos en el currículo escolar de educación primaria (MEC, 2006a) y primeros niveles de la educación secundaria (MEC, 2006b). En consecuencia, se recogen las exigencias del currículo escolar desde el punto de vista epistémico que es lo que se pretende valor a través de este indicador (indicador a)). No consideramos pertinente tener en cuenta exigencias curriculares de otro índole, ya que no tienen necesariamente que corresponder con la formación estadística a nivel universitario.

La idoneidad didáctica del plan de formación en esta componente es alta.

7.2.2. *Apertura hacia la innovación didáctica*

El indicador a) no está presentante en el plan de formación. Sería importante incluir el tema de la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva como elemento orientador para el profesor formador de profesores.

La idoneidad didáctica en este componente puede ser determinada como baja.

7.2.3. *Adaptación socio-cultural y profesional*

El plan de formación da respuesta a los indicadores a) y b). El objetivo 5, alude a contextos de la vida cotidiana proponiéndose la resolución de problemas de probabilidad y su relación con modelado matemático de situaciones reales (indicador a)). Los objetivos 3 y 6 por su parte, aluden a conexiones entre la estadística y su uso en diferentes profesiones y campos de la ciencia; específicamente, en el objetivo 3 se propone el análisis de resultados SIMCE[11] y artículos de investigaciones y en el objetivo 6, "Aplicar la estadística a tareas propias del ámbito profesional".

[11] La sigla SIMCE se refiere al sistema de evaluación de resultados de aprendizaje del nivel escolar que se aplica en Chile.

El indicador c) no está contemplado y por tanto, contiene elementos que se deberían incorporar en el plan de formación.

Se cumplen 2 de 3 indicadores (66.7%) lo que refleja un nivel de idoneidad medio en esta componente.

7.2.4. *Educación en valores*

El plan de formación no da respuesta al indicador planteado en esta componente (indicador a)). Por consiguiente, la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico son aspectos que deberían ser incorporados.

La idoneidad didáctica en esta componente es baja.

7.2.5. *Conexiones intra e interdisciplinares*

El plan de formación no contempla ninguno de los aspectos valorados en esta componente. Se requiere incluir aspectos relativos a conexiones entre la estadística con otros contenidos matemáticos y con otras áreas de la educación escolar y considerar también las conexiones entre contenidos estadísticos de distintos niveles de enseñanza.

Teniendo en cuenta lo anterior la idoneidad en esta componente es baja.

7.3. **Idoneidad cognitiva**

7.3.1. *Conocimientos previos*

En el plan de formación no se hace referencia a ninguno de los dos indicadores propuestos en esta componente. En consecuencia, habría que incorporar aspectos relativos a los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes y el nivel de dificultad de los contenidos pretendidos.

El nivel de idoneidad es baja esta componente.

7.3.2. *Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales*

El indicador a) no está contemplado en el plan de formación. Se deberían incluir orientaciones acerca de la necesidad de hacer adaptaciones razonables considerando las diferencias individuales.

El indicador b) es recogido como un componente fundamental en la metodología, proponiéndose un sistema de ayudantías para practicar lo aprendido y atender a los estudiantes con dificultades.

Se cumple 1 de 2 indicadores (50%) lo que indica un nivel de idoneidad media..

7.3.3. *Aprendizaje*

El indicador a) está contenido parcialmente en el plan de formación. En efecto, se contempla solo el aprendizaje (conocimiento, comprensión y competencia) de los contenidos señalados en la valoración de la faceta epistémica.

Con respecto al indicador b), aunque de manera general, el plan de formación tiene en cuenta los elementos valorados. En efecto, se propone la realización de pruebas escritas y, la resolución de problemas y tareas donde los estudiantes deben poner a prueba sus conocimientos aprendidos. No se hace referencia a si en dicha evaluación se tienen en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia (indicador c)), por lo que sería necesario incluir alguna orientación en dicho sentido.

Finalmente en cuanto al indicador d) el plan de formación tampoco alude a la necesidad de difundir los resultados de las evaluaciones y utilizarlos convenientemente para la toma de decisiones. Este es un aspecto que debería ser también explicitado.

En suma, se cumplen 2 de 4 indicadoes (50%) lo cual indica un nivel de idoneidad media en esta componente..

7.4. **Idoneidad afectiva**

7.4.1. *Intereses y necesidades*

No se hace referencia al carácter motivacional de los problemas (indicador a)). El indicador b) está recogido implícitamente en los objetivos cinco y seis. En el objetivo cinco se incentiva el uso de situaciones reales y en el seis, aplicaciones al ámbito profesional. No obstante, sería conveniente precisar mejor el tema de la valoración de la estadística en estos ámbitos.

Se cumple 1 de 2 indicadores (50%). La idoniedad del plan esta componente es media.

7.4.2. *Actitudes*

No se hace referencia de manera explícita a ninguno de los indicadores de esta componente. En consecuencia, se requiere incorporar los elementos actitudinales señalados en los indicadores (perseverancia, trabajo sistemático, disponibilidad para el trabajo de equipo, uso crítico de la información, argumentación en situaciones de igualdad) como aspectos orientadores del quehacer del formador en este ámbito.

La idoneidad didáctica del plan formación queda determinada como baja.

7.4.3. *Emociones*

El plan de formación no responde a ninguno de los dos indicadores formulados en esta componente. Se deberían incluir orientaciones relacionadas con promover la confianza y seguridad en sí mismo para resolver problemas y tareas matemáticas, y resaltar las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

La idoneidad del plan de formación en este ámbito es baja.

7.5. **Idoneidad interaccional**

7.5.1. *Interacción docente-discente*

El plan de formación no responde a ninguno de los indicadores propuestos. Solo se enuncia de manera general la realización de clases expositivas, talleres y ayudantías, pero sin describir ninguna de estas tres actividades. Se requiere por tanto, hacer una presentación más detallada teniendo en cuenta los aspectos referidos en los indicadores propuestos para esta componente.

La idoneidad didáctica del plan de formación en esta componente es baja.

7.5.2. *Interacción entre discentes*

No está presente ninguno de los dos indicadores propuestos. La incorporación de talleres que se considera en el plan de formación supone un trabajo de equipo, pero no se explicita. En este caso los elementos contenidos en los indicadores a) y b) podrían orientar una descripción en dicho sentido.

El plan de formación tiene un nivel bajo de idoneidad respecto a esta componente.

7.5.3. *Autonomía*

La valoración en esta componente, es análoga a las anteriores. El indicador a) no está recogido en el plan de formación, siendo un criterio orientador para desarrollar más ampliamente las clases expositivas, talleres y ayudantías que se mencionan.

La idoneidad del plan de formación es considerada igualmente como baja.

7.5.4. *Evaluación formativa*

En esta componente el indicador b) se cumple satisfactoriamente. En efecto el uso de diversas técnicas evaluativas (pruebas escritas, tareas de aplicación, resolución de problemas) es explicitado en el apartado de evaluación. Los demás indicadores no están considerados. Se hace necesario por tanto incluir aspectos relativos a la concepción que se tiene de la evaluación formativa (indicador a)); el tipo de evaluación según el agente que la realiza (indicador c)); la coherencia que debe haber entre la evaluación y las metas de aprendizaje (indicador d)); y la inclusión de procesos de evaluación sistemática (indicador e)).

Se cumple 1 de 5 indicadores (20%). En consecuencia la idoneidad del plan de formación en este ámbito es baja.

7.6. **Idoneidad mediacional**

7.6.1. *Recursos materiales*

El plan de formación no da cuenta de los indicadores propuestos en esta componente. En consecuencia se requiere incluir orientaciones didácticas sobre la incorporación apropiada de materiales y recursos.

La idoneidad del plan en esta componente es baja.

7.6.2. *Número de alumnos, horario y condiciones del aula*

Al igual que en la componente anterior el plan de formación no responde a los indicadores de esta componente. Se hace necesario por tanto, incorporar los aspectos contenidos en dichos indicadores.

El plan de formación presenta un nivel de idoneidad bajo con respecto a esta componente.

7.6.3. *Tiempo de enseñanza y aprendizaje*

El plan de formación cuenta con un tiempo apropiado para la enseñanza (indicador a)). En efecto, el curso tiene una duración de carácter semestral y se realizan a través de tres módulos semanales de 80 minutos cada uno.

No se observa la presencia de los otros dos indicadores. Sería deseable proporcionar alguna indicación relativa al tiempo que se debe dedicar a cada tema según su importancia (indicador b)) y grado de dificultad.

Se cumple 1 de 3 indicadores (33.3%). La idoneidad en esta componente es baja.

7.7. **Idoneidad de interacciones entre facetas**

No se encuentran elementos relacionados con los indicadores propuestos. La idoneidad del plan de formación es baja.

En la tabla 3.32 resumimos el proceso de medida de la idoneidad didáctica parcial y global del plan de formación que hemos desarrollado. Los indicadores parcialmente cumplidos los consideramos como igualmente presentes en el plan de formación valorado.

Tabla 3.32. Porcentaje de indicadores cumplidos en cada componente de la idoneidad

FACETA	Nº DE INDICADORES POSIBLES	Nº DE INDICADORES CUMPLIDOS	PORCENTAJE DE CUMPLIMENTO
Epistémica	24	11	45.8
Ecológica	8	3	37.5
Cognitiva	8	3	37.5
Afectiva	9	1	11.1
Interaccional	14	1	7.1
Mediacional	9	1	11.1
Interacciones entre facetas	21	0	0
TOTAL	72	20	

Nota: El espacio en blanco indica que no corresponde información en dicha celda.

La tabla muestra un procedimiento para asignar de manera objetiva una valoración al grado de idoneidad didáctica de un plan de estudios, que también podría aplicarse a un proceso instruccional planificado o implementado. El número de indicadores en cada faceta es diferente; además se podrían ampliar con otros nuevos, o descomponiendo los propuestos en indicadores más específicos. Por ello hemos definido una medida relativa, el porcentaje de indicadores que se cumplen en cada caso. Aplicando la guía a un plan o a un proceso de instrucción particular es posible identificar la presencia o ausencia de estos indicadores en cada faceta, pudiéndose calcular el porcentaje de indicadores cumplidos. La escala de 0 – 100 dada por el porcentaje la hemos usado para elaborar una medida de idoneidad.

Hemos adoptado el siguiente criterio cualitativo de calificación de la idoneidad: si el porcentaje de indicadores cumplidos es menor de 40 se considera baja; si es mayor que 70, alta; si está entre 40 y 70, media.

En este caso hemos asignado el mismo peso a los distintos indicadores; pero queda abierta la posibilidad de asignar pesos diferentes aplicando criterios complementarios. Por ejemplo, valorar con más peso las idoneidades epistémica y cognitiva. Aunque hay que resaltar que esta medida (cuantitativa o cualitativa) no es lo más relevante, ya que el aporte esencial de la noción de idoneidad didáctica es la identificación de puntos de mejora del plan o proceso instruccional.

8. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

A través de la metodología aplicada en el desarrollo de este capítulo hemos logrado construir un instrumento para valorar la idoneidad didáctica de procesos instruccionales sobre formación estadística que puede ser utilizado en procesos de formación de profesores de educación primaria. La aplicación a profesores de otras etapas educativas requiere adaptar algunos indicadores a los contenidos y objetivos formativos correspondientes a dichas etapas. En la fase 1, hemos sintetizado y clasificado orientaciones del currículo escolar en las diferentes dimensiones de la idoneidad didáctica teniendo en cuenta aspectos del conocimiento común y avanzado del contenido estadístico (Godino, 2009) en la faceta epistémica. En la fase 2, el proceso de comparación y reducción de unidades de análisis ha permitido eliminar unidades de análisis repetidas y reducir considerablemente su número inicial. En la fase 3, se han inferido indicadores de idoneidad didáctica para las seis dimensiones y casi en la totalidad de los componentes, obteniéndose una Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica a partir del Currículo Escolar (GVID-CE) que desde el punto de vista epistémico es adecuada para valorar procesos de formación estadística de profesores de educación primaria (recogen aspectos del conocimiento común y avanzado). Los indicadores de las demás facetas si bien resultan idóneos para valorar procesos instruccionales a nivel escolar, con adaptaciones razonables también podrían ser empleados en procesos de formación de profesores. En la fase 4, el contraste de la GVID-CE con la GVID-EOS (Godino 2011) y con resultados de investigaciones sobre formación de profesores para enseñar estadística nos permitió ampliar la GVID-CE y construir una nueva Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Formación Estadística que denominamos (GVID-PFE).

Para conocer la aplicabilidad de la GVID-PFE en procesos de formación estadística de profesores aplicamos dicha guía en la valoración de un plan de formación estadística de una universidad de Chile, lo que nos permitió además asignar una valoración objetiva a la idoneidad de dicho plan. Como resultado, hemos obtenido que la guía resultara apropiada para valorar el plan de formación señalado, el cual presentó bajos niveles de idoneidad didáctica en todas las dimensiones. Se requerirá de nuevas aplicaciones de la

GVID-PFE en procesos de formación estadística de profesores para asegurar su utilidad y eventualmente introducir adecuaciones. Sin embargo, pensamos que es un instrumento útil que podría ser empleado no solo para valorar procesos de instrucción, sino también como herramienta de diseño.

CAPÍTULO 4

DISEÑO DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN PARA LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

1. INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista investigativo, el diseño de un proceso formativo adquiere una doble dimensión. Por una parte, se trata de "preparar la escena" para la enseñanza y por otra, hacer un análisis pormenorizado de la "obra" que permita caracterizar a priori los principales elementos que entrarán en juego durante su ejecución. El EOS proporciona herramientas conceptuales que permiten, describir, comprender y organizar procesos de estudio matemáticos y por lo tanto, realizar análisis fundados.

En este capítulo abordamos las dos fases del diseño: *estudio preliminar* y *diseño de la trayectoria didáctica.* En la primera fase, la prospección se realiza teniendo en cuenta las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional (interaccional y mediacional). El fin de este estudio es delimitar el contenido del diseño y su alcance, y a la vez caracterizar los patrones de interacción y los medios que serán utilizados.

La segunda fase (fase de diseño) implica la selección y secuenciación de los problemas, el estudio de la solución esperada y el *análisis a priori* de las situaciones propuestas. La resolución de cada problema es interpretada como una *configuración didáctica* y su secuenciación da origen a la *trayectoria didáctica* diseñada. El análisis a priori se realiza aplicando las nociones de *prácticas* y de *objetos y procesos* lo que permite establecer "hipótesis" sobre las principales prácticas, conceptos, lenguajes, procedimientos, propiedades, argumentos y procesos que se ponen en "juego" en cada configuración. Este análisis se completa con la identificación de posibles conflictos de aprendizaje (análisis cognitivo), algunas presunciones de las interacciones previstas y de los medios planificados (análisis instruccional), y, con el análisis de las normas que condicionan el proceso de estudio.

El capítulo está estructurado en las siguientes secciones. En el apartado 2, presentamos una visión general de la unidad temática en la cual se enmarca el diseño. En el apartado 3, incluimos los principales resultados del estudio preliminar, delimitando dichos resultados de acuerdo a las dimensiones de la idoneidad didáctica. En el apartado 4, incluimos el diseño del proceso de instrucción, teniendo en cuenta las tres configuraciones didácticas correspondientes a los proyectos “Alumno típico” (proyecto P1), “Lanzamiento de dos dados” (proyecto P2) y “Eficacia de un entrenamiento deportivo” (proyecto P3). En el apartado 5, se incluye la solución esperada en cada proyecto teniendo en cuenta los principales procedimientos y propiedades estadísticas que se espera que los estudiantes pongan en juego. En el apartado 6, se realiza el análisis priori del diseño teniendo en cuenta aspectos epistémicos, cognitivos, instruccionales y normativos. Finalmente, en el apartado 7, incluimos una síntesis con las principales conclusiones del capítulo.

2. PRESENTACIÓN GENERAL DE LA UNIDAD TEMÁTICA

En la tabla 4.1 se muestran los componentes generales de la unidad (motivación, objetivos generales, competencias,…) en consonancia con el marco curricular que define el perfil profesional del profesor de matemática de educación primaria. Estos componentes proporcionan un marco global y por tanto, son tenidos en cuenta como el “punto de partida” del diseño.

Tabla 4.1. Diseño general de la unidad temática “Estadística y probabilidad”

COMPONENTE	DESCRIPCIÓN
Motivación curricular	La estadística es hoy una parte de la educación general deseable para los ciudadanos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación.
Objetivos generales	Se plantean los siguientes objetivos: – Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo. – Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones. – Mostrar a los estudiantes aplicaciones de la Estadística para resolver problemas reales.
Competencias transversales genéricas	Capacidades de resolución de problemas, comunicación, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo.
Contenidos	La Estadística y sus usos. Población, muestra y variables estadísticas. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión. Fenómenos aleatorios. Concepto de probabilidad y diferentes aproximaciones a la misma. Asignación de

	probabilidad: regla de Laplace. La Estadística como conocimiento cultural.
Metodología	El programa propone las siguientes estrategias "didáctico metodológicas": – *Lecciones magistrales (clases teóricas-expositivas, en gran grupo):* El profesor presentará, orientará y sintetizará los temas, facilitando la comprensión, guiando las reflexiones y moderando posibles debates. Los alumnos tendrán la oportunidad de resolver tareas matemáticas que permitan reforzar los contenidos tratados. – *Actividades prácticas (clases prácticas o grupos de trabajo):* Se refiere a actividades prácticas desarrolladas en el aula de informática, centradas en la incorporación de software educativo y recursos de Internet. En estas prácticas se priorizará la actuación de los alumnos, primero individualmente, y luego en grupos de 4 ó 5 alumnos. El profesor presentará las actividades, atenderá a las dudas, animará y orientará el trabajo de los alumnos y las puestas en común. – *Actividades no presenciales (trabajo autónomo y estudio individual):* La actividad básica es el estudio, por parte del alumno, de los contenidos indicados en el temario, empleando los documentos recomendados, así como la resolución de tareas correspondientes a esos contenidos. – *Tutorías académicas:* Se refiere a reuniones periódicas individuales y/o grupales entre el profesor y el alumnado para guiar, supervisar y orientar las distintas actividades académicas propuestas.
Evaluación	El componente teórico será evaluado mediante la realización de un examen escrito en el que el estudiante deberá resolver una situación-problema que implique la aplicación de las nociones y procedimientos estadísticos - probabilísticos estudiados en las sesiones de clase. La evaluación tendrá también en cuenta la asistencia y participación en las sesiones de clases prácticas, así como la calidad de los informes solicitados en los correspondientes Cuadernos de trabajo en equipo.
Bibliografía y recursos	Batanero y Godino (2003); Godino, Batanero, Cid, Font, Ruiz, y Roa, 2004) colección de ejercicios resueltos; colección de diapositivas; ordenadores personales (hoja de cálculo Excel).

3. ESTUDIO PRELIMINAR

En este apartado se presentan los principales resultados del estudio preliminar, organizados en las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional. Por las características de esta investigación (incluye dos estudios), el estudio preliminar que aquí se presenta se relaciona fuertemente con la sistematización de las investigaciones previas realizadas en el capítulo 1 y por tanto, puede ser ampliado a través de la lectura de dicho capítulo.

3.1. **Análisis epistémico-ecológico**

El estudio o análisis preliminar del contenido cuya enseñanza se pretende se realiza en el EOS guiado por la noción de "significado de referencia": sistema de prácticas operativas y discursivas que se usan como referencia para elaborar el significado pretendido en el proceso de instrucción. Las prácticas matemáticas son entendidas como cualquier actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Por tanto, el punto central en la elaboración del significado de referencia será la caracterización de las situaciones-problema que permitan poner en juego los contenidos cuyo aprendizaje se pretende. Este planteamiento es concordante con la búsqueda de situaciones fundamentales de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986; 1998), o con la elaboración de una “praxeología de referencia” en el marco de la TAD (Chevallard, 1999). De hecho, el estudio de las matemáticas basado en la resolución de problemas, en un sentido no restrictivo de un enfoque teórico, se puede considerar actualmente como un postulado general de la didáctica de las matemáticas.

Para el caso de la educación estadística estos problemas adoptan la modalidad de proyectos de análisis de datos mediante los cuales los estudiantes se involucran en la resolución de un caso práctico con el que se pretende dar sentido a las prácticas operativas y discursivas de la estadística.

> “En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trata de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado” (Batanero y cols., 2011, 15).

En nuestro caso, para realizar la selección de los proyectos de análisis de datos sobre los cuales basar el estudio de la estadística, y tener en cuenta resultados relevantes de investigaciones previas en educación estadística, hemos tenido en cuenta el texto de síntesis de conocimientos didáctico-estadísticos de Batanero (2001) y el modelo de razonamiento estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), el cual sintetiza los componentes fundamentales del trabajo de análisis de datos:

- *Reconocimiento de la necesidad de los datos*. El reconocimiento de las carencias de las experiencias personales y la evidencia anecdótica lleva al deseo de basar las decisiones sobre la recogida deliberada de datos.
- *Transnumeración*. La idea más importante en el aprendizaje de la estadística es la adquisición del proceso dinámico de cambio de las representaciones de los datos numéricos para facilitar la compresión.

- *Variación*. El pensamiento estadístico moderno se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual surge de la omnipresente variación.
- *Uso de un conjunto de modelos*. La principal contribución de la estadística al pensamiento ha sido su propio conjunto de modelos específicos, esto es, marcos para pensar sobre determinados fenómenos que incluyen componentes aleatorios.
- *Conocimiento estadístico relacionado con el contexto*. El material de base del pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos. El pensamiento en sí mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, comprensiones y conjeturas.

Desde el punto de vista "ecológico", el EOS resalta la importancia de conectar la formación estadística con aspectos intra e interdisciplinares. Se trata de tener en cuenta el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio. En este sentido, la literatura es concordante en considerar la importancia de conectar los contenidos estadísticos curriculares con el desarrollo de una cultura estadística en los estudiantes (Batanero, 2002; Franklin et al. 2005; MEC, 2006a; NCTM, 2000; Watson, 2006).

3.2. **Análisis cognitivo-afectivo**

Desde la perspectiva del EOS, el aprendizaje es entendido como la correspondencia entre los significados personales y los significados institucionales (Godino y Batanero, 1994). En el transcurso del aprendizaje suelen producirse disparidades entre los significados atribuidos a una expresión por el sujeto que aprende y lo significados institucionalmente pretendidos, lo que se designa como conflicto semiótico de tipo cognitivo (Godino, et al., 2007).

El estudio de la literatura arroja importantes resultados sobre conflictos que se manifiestan en los profesores de primaria en ejercicio y en formación en el aprendizaje de la estadística. Estos conflictos se relacionan con el aprendizaje del conocimiento común y avanzado (Hill, et al., 2008; Godino, 2009), y requieren ser considerados como un elemento esencial en el estudio de los contenidos de estadística. En Espinel (2007) se dan a conocer dificultades que se manifiestan en los futuros profesores en la construcción de histogramas y polígonos de frecuencias; hay estudiantes que no consideran los intervalos de frecuencia cero, etiquetan mal los ejes y construyen barras separadas en los histogramas. En un trabajo posterior, Espinel, et al., (2008), muestran que tanto los profesores en ejercicio y en formación manifiestan dificultades en la lectura e interpretación correcta de una distribución de datos presentada mediante gráficos. Algunas de estas dificultades son: interpretar que un gráfico con un valor atípico no puede ser simétrico, dificultad para interpretar los valores atípicos, se confunde la media y la mediana, no se distingue entre un gráfico de barras y un histograma, imposibilidad de razonar más allá de la información explícita en los gráficos. En síntesis, la investigación pone de manifiesto que no se tiene en cuenta la distribución en su conjunto, sino más bien, los aspectos específicos del gráfico.

Otras dificultades que se ponen de manifiesto en los profesores de primaria son los expuestos en Jacobbe (2008) sobre la comprensión de la media y la mediana; específicamente, no se tiene claridad sobre su uso según la forma de la distribución, se cometen errores de cálculo en la mediana y en algunos casos se confunden las dos medidas de tendencia central.

Ruiz, et al., (2009), exponen diferentes dificultades que se manifiestan en futuros profesores de educación primaria en la realización de un proyecto de análisis de datos; entre estas dificultades se mencionan: uso de escalas no homogéneas, no se relacionan las variables entre sí produciéndose gráficos separados para cada distribución, interpretación de la moda como la variable que tiene mayor número de datos y no como el valor que más se repite dentro de una variable, se confunde la frecuencia con el valor de la variable, se considera como mediana el centro del rango, no se ordenan los datos para calcular la mediana, no se percibe la variabilidad en una distribución de datos, se comparan valores aislados, y no se usa la media para comparar dos conjuntos de datos, en lugar de ello, se centran en las frecuencias absolutas.

Otro trabajo en el que se abordan dificultades que se manifiestan en los profesores de primaria en formación en la realización de un proyecto abierto de análisis de datos es la tesis doctoral de Arteaga (2011). En esta investigación se muestran conocimientos deficitarios en la lectura y producción de gráficos, y con la capacidad para establecer conclusiones. En la construcción de gráficos, se observaron errores como el uso de escalas demasiado amplias para el rango de variación y valor de la variable, omisión de rótulos, representación de la frecuencia en el eje de abscisa y dificultad en el uso de intervalos; también se muestra que estas dificultades se acentúan al construir los gráficos mediante la hoja de cálculo Excel. En cuanto a la lectura de gráficos, hay estudiantes que confunden elementos del gráfico realizando una lectura deficiente, lo mismo sucede con la obtención de conclusiones donde la mayoría no logra establecer conclusiones completas.

Finalmente, una dificultad que se muestra en Borim y Queiroz (2008) que resulta de interés para nuestro trabajo (relacionada con el conocimiento avanzado del contenido estadístico) es la dificultad que tienen dichos profesores para establecer relaciones entre la media, la mediana y la desviación estándar.

Desde el punto de vista afectivo, las investigaciones revisadas dan cuenta de elementos que afectan la sensibilidad de los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido; la inseguridad respecto al dominio de contenidos estadísticos, la percepción de la estadística como una disciplina formal y difícil de aprender, y, la escasa valoración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como herramientas que pueden enriquecer las oportunidades de aprendizaje, son algunos elementos que se reflejan en estudios de la literatura reciente (Estrada y Batanero, 2008; Chick y Pierce, 2008; Sedlmeier y Wassner, 2008). Estas "actitudes" hacia la estadística requieren ser subsanadas a través de procesos de estudio que conecten los contenidos estadísticos con las necesidades e intereses de los estudiantes, teniendo en cuenta sus conocimientos y falencias, y atendiendo a las diferencias individuales inherentes a cualquier grupo de personas.

3.3. **Análisis instruccional**

La dimensión instruccional incluye el rol del profesor y de los estudiantes con relación a la clase de estadística, y al mismo tiempo, la forma de seleccionar las situaciones y los medios materiales, y de organizar las secuencias de enseñanza. En esta investigación por tratarse de la formación estadística (y no didáctica) de futuros profesores de educación primaria la dimensión instruccional puede ser comparable a la del ámbito escolar, aunque se debe reconocer que hay claras diferencias por el tipo de sujetos (estudiantes) en el que se enfoca el proceso de instrucción. Entre las investigaciones que hemos revisado, la mayoría se enfoca en estudiar "temáticas instruccionales" en el ámbito escolar y no universitario, por lo que extrapolaremos dichos resultados a la formación de profesores de primaria.

Un “problema” en el que coinciden diversos autores (Pinto, 2010; Watson, et al., 2008) es el uso de formas poco innovadoras de instrucción; centradas principalmente, en la trasmisión de información y en la inclusión de tareas de aplicación de conceptos y técnicas estadísticas. En consecuencia, las interacciones profesor-alumno en la clase de estadística, siguen los pasos típicos de una “clase tradicional”: presentación de una definición, se dan a conocer los procedimientos, presentación de algunos ejemplos y desarrollo de ejercicios. Estos autores, también coinciden en señalar una falta de preparación para integrar recursos materiales y tecnológicos como herramientas que permiten favorecer y potenciar el desarrollo de aprendizajes.

Existen algunos estudios enfocados en diseñar y validar “modelos” para la enseñanza de la estadística. Algunos de estos estudios se fundamentan en la “idea de proyecto” (Batanero y Díaz, 2005; Godino et. al, 2008), en el enfoque de la matemática realista (Giambalvo y Gattuso; 2008) y en la integración de las TIC como herramienta que puede facilitar los procesos de enseñanza y potenciar aprendizajes estadísticos (Lee y Hollebrands, 2008).

En concordancia con los estudios anteriores, hay recomendaciones de diversos autores sobre la enseñanza de la estadística basada en el uso de proyectos de análisis de datos como una forma de gestionar convenientemente su aprendizaje (Nolan y Speed, 1999; Batanero y Díaz, 2005; Batanero, et al., 2011; Batanero y Díaz, 2011). Esta idea es también recogida en el proyecto GAISE (Franklin et al. 2005) el cual proporciona un marco conceptual para la enseñanza de la estadística basada en uso de proyectos para los niveles K-12, y en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) donde se promueve esta modalidad de trabajo para algunos niveles de enseñanza.

El trabajo mediante proyectos puede ser entendido como un tipo particular de “problemas matemáticos” que implica realizar el recorrido de todos los pasos del método estadístico: responder o formular preguntas, recopilar datos, analizar los datos e interpretar los resultados. Esta forma de trabajo, conlleva modos de interacción que privilegian en el trabajo individual y grupal, y demandan una actuación planificada del profesor en cada una de sus etapas. Así mismo, el trabajo mediante proyectos propicia la integración de las TIC como herramientas de recogida y análisis de datos, y favorece las características de una matemática realista.

4. DISEÑO DEL PROCESO DE INSTRUCCIÓN

Para desarrollar los contenidos, hemos seleccionado tres proyectos de análisis de datos que permiten contextualizar y "motivar" la emergencia de las nociones y técnicas estadísticas descriptivas elementales (tablas de frecuencias, promedios, dispersiones, comparación de distribuciones de frecuencias) y algunas nociones básicas de probabilidad. Estos tres proyectos (problemas) se constituyen en tres grandes configuraciones didácticas en torno a las cuales se planifica el proceso de enseñanza.

El proceso de estudio planificado contempla, además de la realización de estos tres proyectos los siguientes recursos instruccionales:

- Colección de ejercicios resueltos.
- Texto de estudio. Se trata de la monografía de Batanero y Godino (2003), Estocástica para maestros, donde se desarrollan los contenidos básicos de estadística y probabilidad.
- Tablón virtual de docencia; se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación asincrónica entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

Describimos a continuación los tres proyectos que determinan la trayectoria didáctica planificada.

4.1. **Proyecto "Alumno típico"**

Este proyecto se describe con detalle en Batanero y Díaz (2011, págs. 73-93). En nuestro caso hemos realizado el siguiente planteamiento, considerando las variables y cuestiones que se indican:

Elaborar un perfil de los alumnos de la clase en las siguientes características (variables estadísticas):

Variable 1: Género (hombre, mujer); Variable 2: ¿Haces deporte? (Nada, poco, mucho); Variable 3: Número de hermanos (incluyendo al propio estudiante, o sea, número de hijos en la familia); Variable 4: Peso (Kg.); Variable 5: Dinero que llevas en el bolsillo (cantidad de euros).

1) ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?

2) ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?
3) ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

En la realización de este proyecto se prevé la recogida de datos del curso; no obstante, se dispondrán los siguientes datos como una forma de analizar la respuesta esperada y eventualmente para ser proporcionados a los estudiantes.

Tabla 4.2. Matriz de datos recogidos en una clase de 60 estudiantes:

GÉNERO	DEPORTE	Nº HERMANOS	PESO	DINERO
Mujer	Mucho	2	60	10
Mujer	Poco	4	48	4
Mujer	Nada	1	58	10
Hombre	Poco	3	60	1
Mujer	Poco	4	50	25
Mujer	Poco	3	50	4
Mujer	Poco	2	50	17
Mujer	Poco	1	65	5
Mujer	Poco	2	57	1
Mujer	Poco	5	67	4
Mujer	Nada	3	56	1
Mujer	Poco	2	43	4
Mujer	Poco	1	56	4
Mujer	Poco	3	65	10
Hombre	Poco	2	64	7
Mujer	Poco	3	53	5
Hombre	Poco	3	60	2
Hombre	Mucho	3	72	2
Hombre	Mucho	3	65	10
Hombre	Poco	4	74	1.5
Mujer	Poco	1	52	3
Mujer	Poco	2	65	5
Hombre	Poco	2	75	21
Mujer	Nada	1	68	43
Hombre	Mucho	4	77	1
Hombre	Mucho	2	65	7
Hombre	Poco	3	70	10
Hombre	Poco	5	97	37
Mujer	Mucho	1	60	34
Mujer	Poco	2	65	7
Mujer	Poco	2	70	5
Hombre	Mucho	3	60	10
Hombre	Poco	2	76	30
Hombre	Poco	3	90	20
Mujer	Mucho	4	75	50
Mujer	Nada	2	55	6
Hombre	Poco	3	78	6
Hombre	Nada	2	62	1
Mujer	Poco	2	56	10
Hombre	Mucho	2	65	12
Mujer	Nada	3	65	23
Hombre	Poco	4	67	10
Mujer	Poco	5	54	5

Mujer	Poco	6	76	1
Mujer	Poco	2	54	2
Mujer	Poco	3	55	4
Mujer	Nada	2	52	0
Mujer	Poco	3	65	35
Mujer	Poco	4	52	25
Mujer	Poco	7	51	7
Mujer	Poco	2	52	20
Mujer	Poco	2	50	10
Mujer	Poco	3	53	2
Hombre	Poco	2	55	3
Mujer	Poco	4	50	2
Mujer	Poco	2	58	10
Mujer	Poco	3	60	0
Mujer	Poco	2	57	5
Mujer	Poco	2	53	19
Mujer	Poco	2	54	3

4.2. **Proyecto "Lanzamiento de dos dados"**

El planteamiento del problema es el siguiente:

Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

1) ¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta.
2) ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Razona las respuestas.

Simula el lanzamiento de dos dados. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes.

3) ¿Quién ha ganado más veces A o B?
4) ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas.

Una vez recogidos los datos para el conjunto de las parejas formadas en la clase se plantean las siguientes cuestiones:

5) ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar? ¿Qué puede hacer un profesor en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?

6) Construir un diagrama de barras adosadas en el que se represente la distribución de frecuencias relativas de la tabla 4.3 y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "suma de puntos al lanzar dos dados". ¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?

En las cuestiones 5 y 6 se prevé trabajar con datos recogidos por los estudiantes. Sin embargo, para el análisis de la respuesta esperada se dispone de los siguientes datos supuestamente recogidos de 10 parejas de alumnos. Estos datos, podrían ser también utilizados para responder las cuestiones planteadas dentro del curso.

Tabla 4.3. Frecuencias absolutas y relativas al lanzar dos dados

	SUMA DE PUNTOS	NUMERO VECES	FRECUENCIA RELATIVA
Gana B	2	2	0.02
	3	9	0.09
	4	12	0.12
	5	20	0.2
Gana A	6	7	0.07
	7	12	0.12
	8	14	0.14
	9	9	0.09
Gana B	10	8	0.08
	11	4	0.04
	12	3	0.03

4.3. **Proyecto "Eficacia de un entrenamiento deportivo"**

En este proyecto se plantea la siguiente situación y las cuestiones que se indican:

Un profesor de Educación Física prepara a un grupo de 60 alumnos de 12 años para participar en una competición. Transcurridos 3 meses del entrenamiento (Septiembre a Diciembre) quiere comprobar si el entrenamiento ha sido efectivo. Para ello decide comparar el tiempo en segundos que los alumnos tardan en recorrer 20 metros en Septiembre y en Diciembre, y también quiere conocer si hay diferencias entre los chicos y las chicas.

Trabajando en equipo, elaborar un informe respondiendo razonadamente a las cuestiones siguientes, incluyendo los cálculos y gráficos que se consideren pertinentes:

1) ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?
2) ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?

3) ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?
4) ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?
5) ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como “atípico” en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)?
6) ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

En la siguiente tabla se muestran los tiempos obtenidos por cada estudiante en septiembre y diciembre:

Tabla 4.4. Tiempo en recorrer 20 metros en cada mes por cada estudiante

GÉNERO	TIEMPO EN SEPTIEMBRE	TIEMPO EN DICIEMBRE	GÉNERO	TIEMPO EN SEPTIEMBRE	TIEMPO EN DICIEMBRE
Chica	3.3	5.4	Chica	5.9	2.9
Chica	4.7	3.0	Chica	5.9	4.2
Chica	4.7	3.9	Chica	5.9	5
Chica	4.7	6.0	Chica	6	3.2
Chica	4.8	4.5	Chica	6	3.6
Chica	4.8	4.7	Chica	6.5	4.4
Chica	4.9	4.4	Chica	6.5	4.9
Chica	4.9	4.8	Chica	9.9	4.4
Chica	5	3	Chica	9.9	6.6
Chica	5	4.1	Chico	4	6.9
Chica	5	4.5	Chico	4.5	2.9
Chica	5	5.2	Chico	4.5	3.8
Chica	5.1	3.5	Chico	4.5	4.2
Chica	5.1	5.6	Chico	4.7	3.6
Chica	5.2	3.8	Chico	4.8	3.9
Chica	5.2	4	Chico	4.9	3.8
Chica	5.2	4.3	Chico	5	2.6
Chica	5.2	5.6	Chico	5	3.7
Chica	5.3	4.1	Chico	5	4.2
Chica	5.4	5	Chico	5.2	3.1
Chica	5.5	4.8	Chico	5.2	4.9
Chica	5.5	6.1	Chico	5.2	5.3
Chica	5.6	2.7	Chico	5.4	4.5
Chica	5.6	3.9	Chico	5.5	3.6
Chica	5.7	3.4	Chico	5.6	4.2
Chica	5.7	4	Chico	6	2.4
Chica	5.7	6.4	Chico	6	4.4
Chica	5.8	3	Chico	6	4.9
Chica	5.8	4.6	Chico	6.3	3.9
Chica	5.8	5.6	Chico	6.3	4.9

5. SOLUCIÓN ESPERADA A LOS TRES PROYECTOS DE ANÁLISIS DE DATOS

A continuación se presenta la “solución esperada” en cada proyecto. Estas respuestas han sido elaboradas teniendo en cuenta los principales procedimientos y propiedades estadísticas que se espera que los estudiantes pongan en juego y consideran aspectos del conocimiento común y avanzado del contenido que debería manejar el profesor de educación primaria. Las técnicas de cálculos y de construcción de tablas y gráficos han sido realizadas mediante la hoja de cálculo Excel, considerando que esta herramienta será la mayormente utilizada por los estudiantes; no obstante, consideramos oportuno incluir otros recursos que permitan ampliar las posibilidades de esta herramienta, principalmente para la construcción de gráficos.

5.1. **Proyecto "Alumno típico"**

A continuación se presenta la solución esperada a las tres cuestiones planteadas en cada una de las variables. En la solución se tienen en cuenta los 60 datos contenidos en la matriz de datos presentada en el proyecto P1 (tabla 4.2).

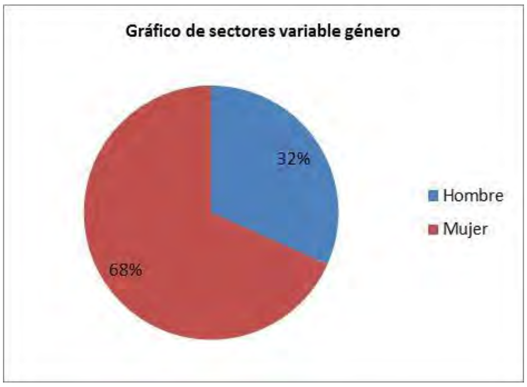
- Solución a las cuestiones: 1) ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase? y 2) ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?

En la variable "género" (variable cualitativa), se requiere resumir los datos en tablas de frecuencias y gráficos. La persona representativa en esta variable es una mujer, que corresponde a la *moda* de dicha variable estadística cualitativa. El 68% de la clase son mujeres mientras que el 32% son hombres. A continuación se muestra la tabla de frecuencias de esta variable:

Tabla 4.5. Tabla de frecuencias variable género

VALOR	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Hombre	19	32
Mujer	41	68
Total	60	100

Lo que sigue corresponde a un gráfico de sectores construido a partir de las frecuencias relativas y un gráfico de barras donde se representan las frecuencias absolutas de la variable género:



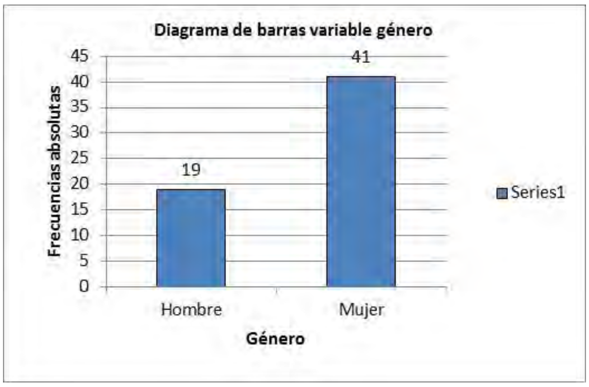


Figura 4.1. Gráfico de sectores y gráfico de barras de la variable género

En la variable "deporte" se deben resumir los datos en tablas de frecuencias y gráficos, y determinar el alumno típico a través de la moda que corresponde al valor "poco". Otra forma de determinar el alumno representativo en esta variable es a través de la *mediana;* la variable deporte es ordinal, si se ordenan los 60 valores de menor a mayor se tiene una serie del tipo: nada, nada,… (7 veces); poco, poco,… (44 veces); mucho, mucho,… (9 veces). El valor que ocupa la posición central de esta ordenación corresponde al valor poco y coincide con la moda. El 73% de la clase hace poco deporte, el 15% mucho y el 12% nada de deporte. Seguidamente se presenta la tabla de frecuencias de esta variable:

Tabla 4.6. Tabla de frecuencias variable deporte

VALOR	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Nada	7	12
Poco	44	73
Mucho	9	15
Total	60	100

A continuación se muestran un gráfico de sectores y un gráfico de barras de la variable deporte:

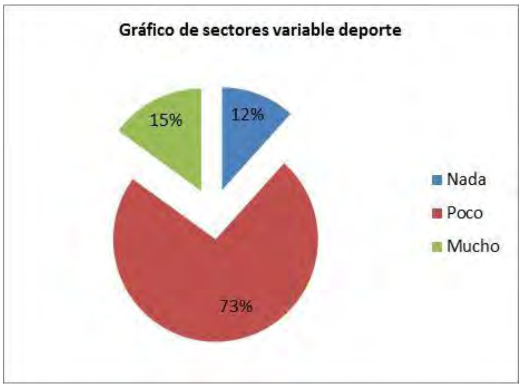


Figura 4.2. Gráfico de sectores y gráfico de barras de la variable deporte

En la variable "número de hermanos" (variable cuantitativa discreta), es necesario calcular estadísticos (promedios y dispersión), y construir gráficos para determinar la forma de distribución de los datos. La distribución en esta variable es bastante asimétrica, la mayoría de los valores están agrupados alrededor de los promedios (media, mediana y moda), pero hay algunos valores alejados (valores atípicos correspondientes a familias con 5, 6 y 7 hijos). ¿Qué valor sería preferible tomar como representativo del conjunto de datos? Como la variable es cuantitativa no es apropiado tomar la moda (esta medida de posición central está necesariamente indicada para variables cualitativas). Puesto que la distribución de frecuencias es asimétrica la mediana representa mejor al conjunto de datos que la media. Vemos que la mediana no tiene por qué coincidir con el valor que toma la variable en un sujeto particular (ningún estudiante tiene 2.5 hermanos).

La desviación típica en esta variable es 1.23 y el recorrido 6. En base al recorrido se puede afirmar que hay una dispersión relativamente fuerte en esta variable considerando el contexto.

A continuación se muestran los principales estadísticos de esta variable:

Tabla 4.7. Estadísticos variable número de hermanos

ESTADÍSTICOS	VALOR
Media	2.75
Mediana	2.5
Moda	2
Máximo	7
Mínimo	1
Recorrido	6
Varianza	1.51
Des. Típica	1.23

Lo que sigue corresponde al gráfico de barras de la variable número de hermanos:

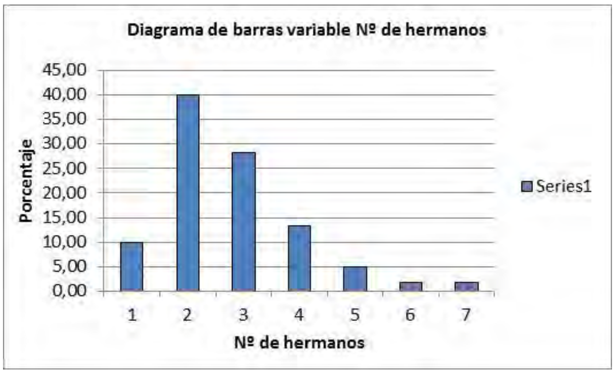


Figura 4.3. Forma de la distribución variable número de hermanos

En la variable "peso", al igual que en la variable anterior se deben calcular promedios y dispersiones, y construir algún tipo de gráfico que permita ver la forma de distribución de los datos. La variable peso es cuantitativa y continua, por lo que el resumen tabular de los datos debe hacerse mediante la agrupación en intervalos de clase. La tabla 4.9 corresponde a la tabla de frecuencias de esta variable y en la figura 4.4 se muestra el histograma de frecuencias relativas con datos agrupados en intervalos de valor 5kgs (mínimo 40, máximo 100 y número de intervalos igual a 12); en cada intervalo están comprendidos los sujetos cuyo peso es mayor o igual que el extremo inferior y menores que el extremo superior, excepto para el último intervalo, donde los valores (pesos) son mayores o iguales que el extremo inferior y menores o iguales que el extremo superior. La distribución de frecuencias tiene un poco de asimetría positiva (los datos tienen cierta tendencia a alejarse del valor central hacia la parte positiva del eje de abscisa). Como valor representante interesa tomar la mediana (60), un poco inferior a la media (61.45), debido a la asimetría. Podemos afirmar que esta clase tiene una dispersión relativamente fuerte en cuanto al peso (recorrido de 54, diferencia entre la persona que pesa menos y la que pesa más). A continuación se muestran los principales estadísticos de esta variable:

Tabla 4.8. Estadísticos variable peso

ESTADÍSTICO	VALOR
Media	61.45
Mediana	60
Moda	65
Máximo	97
Mínimo	43
Recorrido	54
Varianza	107.44
Des. Típica	10.37

Seguidamente mostramos la tabla de frecuencias de la variable peso:

Tabla 4.9. Tabla de frecuencias variable peso

INTERVALOS DE CLASE	MARCAS DE CLASE	FRECUENCIAS ABSOLUTAS	FRECUENCIAS RELATIVAS
[40-45)	42,5	1	1.67
[45-50)	47,5	1	1.67
[50-55)	52,5	16	26.67
[55-60)	57,5	10	16.67
[60-65)	62,5	8	13.33
[65-70)	67,5	12	20.00
[70-75)	72,5	4	6.67
[75-80)	77,5	6	10.00
[80-85)	82,5	-	-
[85-90)	87,5	-	-
[90-95)	92,5	1	1.67
[95-100]	97,5	1	1.67
Total		60	100

Nota: El guión (-) indica que no se ha obtenido valor en la celda.

El siguiente gráfico corresponde al histograma de frecuencias de la variable peso:

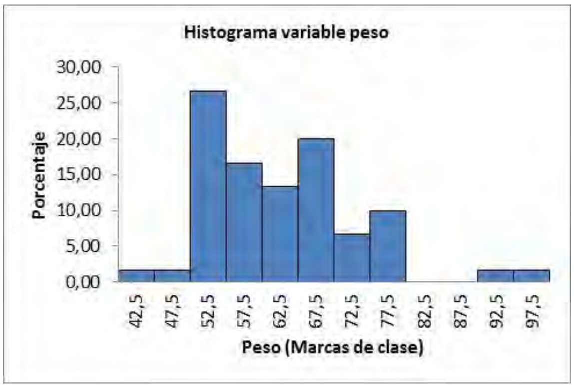


Figura 4.4. Forma de la distribución variable peso

En la variable "dinero", se repite la necesidad de calcular promedios, dispersiones y construir gráficos que permitan analizar la forma que presenta la distribución de los datos. Esta variable es vista como una variable cuantitativa continua y por tanto, aplican los mismos procedimientos de la variable peso para la construcción de la tabla de frecuencias. En la tabla 4.11 se muestra la tabla de frecuencias de esta variable y en la figura 4.5 el histograma de frecuencias relativas con datos agrupados en intervalos de valor 0.5 euros. La forma de la distribución es muy asimétrica; la gran mayoría tenía entre 0 y 10 euros en el bolsillo cuando se hizo esta encuesta, pero había alguno que tenía 50 euros. El valor más representativo será la mediana (6).

La desviación típica es de 11.45 y el recorrido 50. En base a estos datos podemos afirmar que esta clase tiene una dispersión relativamente fuerte en cuanto al dinero que llevan los estudiantes.

Los siguientes datos corresponden a los principales estadísticos de esta variable:

Tabla 4.10. Estadísticos variable dinero

ESTADÍSTICO	VALOR
Media	10.53
Mediana	6
Moda	10
Máximo	50
Mínimo	0
Recorrido	50
Varianza	131.11
Des. Típica	11.45

A continuación se muestra la tabla de frecuencias de la variable dinero:

Tabla 4.11. Tabla de frecuencias variable dinero

INTERVALOS	MARCAS DE CLASE	FRECUENCIAS ABSOLUTAS	FRECUENCIAS RELATIVAS

[0-5)	2,5	23	38.33
[5-10)	7,5	12	20
[10-15)	12,5	11	18.33
[15-20)	17,5	2	3.33
[20-25)	22,5	4	6.67
[25-30)	27,5	2	3.33
[30-35)	32,5	2	3.33
[35-40)	37,5	2	3.33
[40-45)	42,5	1	1.67
[45-50]	47,5	1	1.67
Total		60	100

Seguidamente se muestra un histograma de frecuencias de la variable dinero:

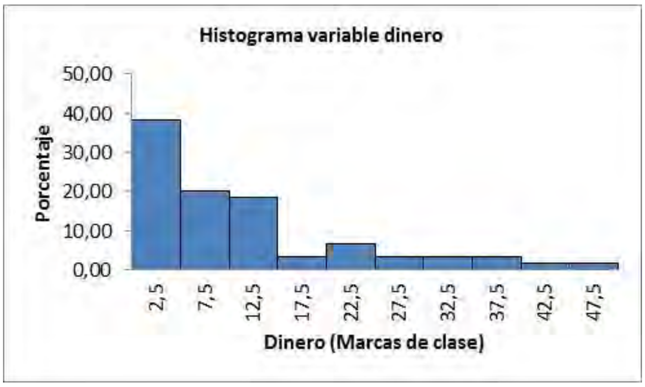


Figura 4.5. Forma de la distribución variable dinero

- Solución a la cuestión 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

Para responder a esta cuestión es necesario dividir el conjunto de datos en dos subconjuntos, correspondientes a los datos de los chicos y de las chicas. Habrá que elaborar resúmenes tabulares, gráficos y calcular los estadísticos descriptivos para cada grupo y compararlos. Con las herramientas de la estadística descriptiva elemental sólo es posible dar una respuesta aproximada y exploratoria. La determinación de la significación estadística de las diferencias observadas en las características de las distribuciones de frecuencias sólo se puede hacer con métodos de estadística inferencial.

En la variable deporte, se pueden resumir estadísticamente los datos en tablas de frecuencias relativas y representarlos gráficamente. La comparación de las frecuencias relativas permite señalar que el 63% de los chicos practica poco deporte (valor de la moda en esta variable estadística), en cambio en las chicas, este valor corresponde al 78%. Las siguientes corresponden a las tablas de frecuencias relativas de chicos y chicas:

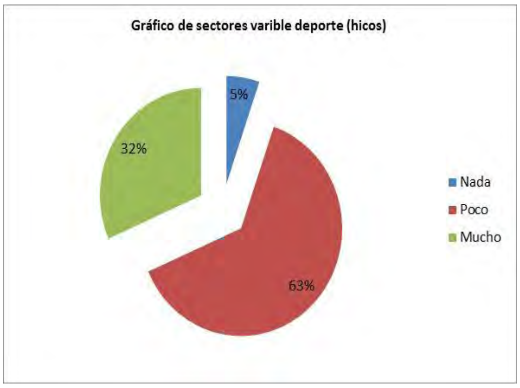
Tabla 4.12. Tabla de frecuencias relativas variable deporte (chicos)

VALOR	FRECUENCIAS ABSOLUTAS	FRECUENCIAS RELATIVAS
Nada	1	5.26
Poco	12	63.16
Mucho	6	31.58
Total	19	100

Tabla 4.13. Tabla de frecuencias relativas variable deporte (chicas)

VALOR	FRECUENCIAS ABSOLUTAS	FRECUENCIAS RELATIVAS
Nada	6	14.63
Poco	32	78.05
Mucho	3	7.32
Total	41	100

A continuación se muestran dos gráficos de sectores a partir de las frecuencias relativas de chicos y chicas:



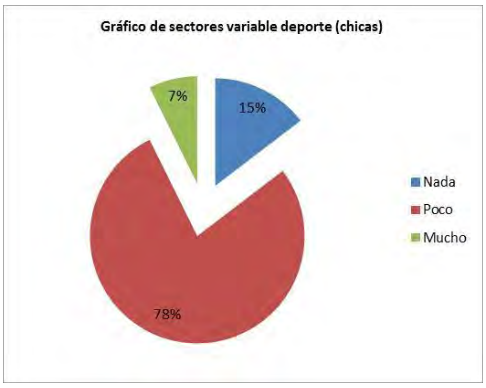


Figura 4.6. Gráficos de sectores variable deporte chicos y chicas

En la variable número de hermanos, la comparación se puede realizar mediante estadísticos y gráficos. El grafico de cajas, el de barras comparadas y de barras "contrapuestas" permiten hacer una comparación adecuada. En esta variable la distribución de las chicas es más dispersa y los promedios son menores en el caso de las chicas que en el de los chicos. Es como si, para esta muestra de estudiantes, las familias de las chicas tuvieran en promedio un menor número de hijos, aunque también mayor dispersión. A continuación se muestran los principales estadísticos para chicos y chicas:

Tabla 4.14. Estadísticos chicos y chicas variable número de hermanos

ESTADÍSTICOS	VALOR CHICOS	VALOR CHICAS
Media	2.89	2.68
Mediana	3	2
Moda	3	2
Máximo	5	7
Mínimo	2	1
Recorrido	3	6

Varianza	0.77	1.87
Des. Típica	0.88	1.37

Lo que sigue corresponde a un gráfico de barras comparadas para chicos y chicas:

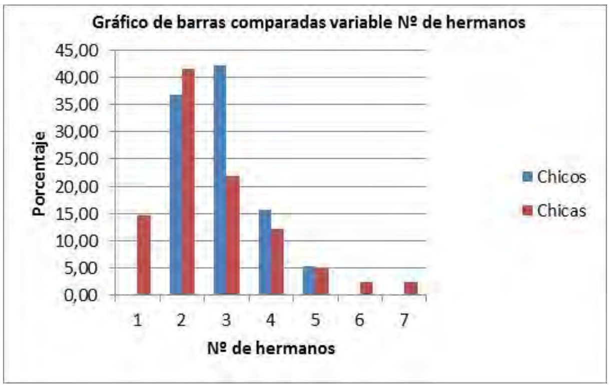


Figura 4.7. Gráficos barras comparadas variable número de hermanos (chicos y chicas)

En la variable peso, al igual que en la variable anterior la comparación se puede hacer a través de estadísticos y gráficos. En este caso, se puede utilizar un histograma "comparativo", un histograma "contrapuesto" o un gráfico de cajas.

Esta variable antropométrica (peso) muestra claras diferencias entre los chicos y las chicas; la media y la mediana son bastante diferentes. Los chicos pesan en promedio más que las chicas. Los histogramas de frecuencias muestran también claramente que la distribución de los chicos está desplazada hacia la derecha (valores de peso mayores) respecto de las chicas. Además también se observa que la muestra de chicos tiene dos valores atípicos (pesos en los intervalos [90-95) y [95-100]. A continuación se muestran los principales estadísticos para chicos y chicas en esta variable:

Tabla 4.15. Estadísticos chicos y chicas variable peso

ESTADÍSTICOS	CHICOS	CHICAS
Media	70.11	57.44
Mediana	67	56
Moda	60	65
Máximo	97	76
Mínimo	55	43
Recorrido	42	33
Varianza	112.88	55.60
Des. Típica	10.62	7.46

Lo que sigue corresponde a un histograma comparativo de frecuencias de chicos y chicas para la variable peso:

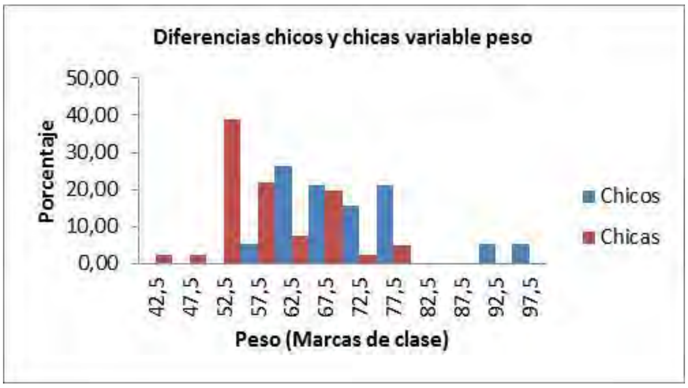


Figura 4.8. Histograma de frecuencias relativas chicos y chicas variable peso

En la variable dinero, los procedimientos para responder la pregunta son análogos a los de la variable anterior ya que se trata también de una variable cuantitativa continua. En este caso, la forma de la distribución sugiere usar la mediana en lugar de la media. Además, no se admite el uso de la media porque arroja un resultado contrario al de aplicar la mediana (las chicas llevan más dinero que los chicos).

La mediana de esta variable es menor en el caso de las chicas (5) que la de los chicos (7); se observa que en el primer intervalo [0-0,5) euros, hay mayor frecuencia de chicas que de chicos. Pero la muestra de las chicas es más dispersa (recorrido, 50; desviación típica, 12.09) que la de los chicos debido a la presencia de dos valores atípicos en las chicas (una chica en el intervalo [40-45) y otra en el intervalo [45-50]. Los siguientes son los estadísticos de esta variable para chico y chicas:

Tabla 4.16. Estadísticos chicos y chicas variable dinero

ESTADÍSTICOS	CHICOS	CHICAS
Media	10.08	10.73
Mediana	7	5
Moda	10	10
Máximo	37	50
Mínimo	1	0
Recorrido	36	50
Varianza	104.45	146.25
Des. Típica	10.22	12.09

A continuación se muestran un histograma comparativo de frecuencias para esta variable:

Figura 4.9. Histograma de frecuencias chicos y chicas variable dinero

5.2. **Proyecto "Lanzamiento de dos dados"**

- Solución a las cuestiones: 1) ¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta y 2) ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Razona las respuestas.

Para responder estas cuestiones se deberán obtener las sumas posibles y el espacio muestral del experimento. Convendrá también construir la tabla y el gráfico de distribución de probabilidad.

El jugador A gana si sale suma igual a 6, 7, 8 y 9. De los 36 casos posibles, estas sumas se obtienen en 20 casos, luego la probabilidad de que gane A es P(A) =20/36 = 0,56. El jugador B gana en los restantes casos, por tanto gana en 16 casos de los 36; P(B) = 16/36 = 0,44. Tiene ventaja el jugador A. Por tanto, de acuerdo con la "Ley empírica de los grandes números", se debe esperar que en largas series de jugadas el jugador A gane más veces que el B.

El espacio muestral del experimento "lanzar dos dados y sumar los puntos obtenidos" viene dado por la siguiente tabla:

Tabla 4.17. Casos posibles del experimento lanzar dos dados y sumar los puntos

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

El espacio muestral del experimento está compuesto por los 11 resultados posibles que se obtienen al lanzar los dos dados; esto es: E= {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

A continuación se muestran la tabla de distribución de probabilidad de la variable aleatoria suma de puntos al lanzar dos dados. La probabilidad de cada valor (suma) se obtiene dividiendo el número de veces favorables a obtener la suma correspondiente entre 36 (número de casos posibles).

Tabla 4.18. Tabla de distribución de probabilidad de la variable suma de puntos

VALOR	PROBABILIDAD
2	0.028
3	0.056
4	0.083
5	0.111
6	0.139
7	0.167
8	0.139
9	0.111
10	0.083
11	0.056
12	0.028

Lo que sigue corresponde al gráfico de distribución de probabilidad de la variable suma de puntos al lanzar dos dados:

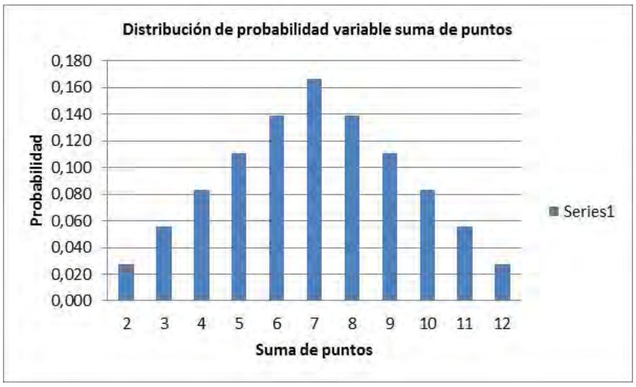


Figura 4.10. Distribución de probabilidad variable suma de puntos

- Solución a las cuestiones: 3) ¿Quién ha ganado más veces A o B? y 4) ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas.

Se debe esperar que en largas series de este tipo de experimentos la frecuencia relativa de que gane A sea del 55,6%, y que B gane el 44,4%.

- Solución a la cuestión 5: ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar? ¿Qué puede hacer un profesor en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos? (La respuesta a esta cuestión tiene en cuenta los datos “supuestos” de la tabla 4.3)

Se espera que las frecuencias relativas de un experimento aleatorio “tiendan” al valor de la probabilidad del suceso correspondiente. Pero esta “tendencia” o “convergencia” es “lenta” y presenta fluctuaciones en series cortas. Una muestra de tamaño 10, incluso 100, es bastante pequeña para que el riesgo de “perder” en este juego no sea alto. Para tratar de “convencer” a los alumnos de que es preferible ser el jugador A, a pesar del resultado negativo que ha obtenido al jugar 100 veces, a parte del razonamiento lógico o deductivo que hemos hecho estudiando las probabilidades de los sucesos “gana A”, “gana B”, se podría utilizar un simulador que permita simular el experimento un número progresivamente más elevado de veces (1000, 5000, 10.000, etc.).

- Solución a la cuestión 6: Construir un diagrama de barras adosadas en el que se represente la distribución de frecuencias relativas de la tabla 4.3 y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria “suma de puntos al lanzar dos dados”. ¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?

En la figura 4.11 se muestra el diagrama de barras adosadas donde se representada la distribución de frecuencias relativas y la distribución de probabilidad. El diagrama de frecuencias relativas, a medida que se aumenta el número de lanzamientos, se aproximará al diagrama de la distribución de probabilidad triangular correspondiente al experimento aleatorio.

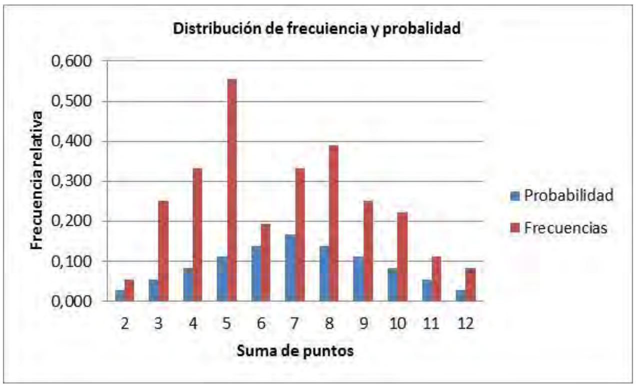


Figura 4.11. Diagrama de barras adosadas distribución de frecuencias y probabilidad

5.3. **Proyecto “Eficacia de un entrenamiento deportivo”**

- Solución a la cuestión 1: ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?

La resolución de este ítem implica comparar dos distribuciones (tiempos en septiembre y diciembre) con muestras de igual tamaño. Para responder convenientemente, en primer lugar, se debe hacer una reducción de los datos calculando estadísticos de posición central y dispersión (media, mediana y desviación típica); luego, se debe determinar también, la forma de la distribución de los datos y la presencia de valores atípicos para saber cuál de los dos valores de tendencia central (media, mediana) resulta el más adecuado para hacer la comparación. En este caso, ambas distribuciones presentan una forma bastante simétrica, pero en septiembre hay dos valores atípicos importantes en el intervalo [9-10], por lo que de no quitarse estos valores la mediana resulta más apropiada para hacer la comparación. La mediana en septiembre equivale a 5.20 y luego baja a 4.20 en diciembre (baja un 19.23%) de lo cual se deduce que el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase.

Si se comparan las medias también se obtiene una respuesta correcta. La media en septiembre corresponde a 5.46 y en diciembre a 4.31 reflejando una mejoría de 1.14 segundos, lo que equivale al 20.93%. Sin embargo, la aplicación recomendable de la media en esta cuestión supone excluir previamente los valores atípicos.

Las desviaciones típicas de septiembre (1.03) y diciembre son muy parecidas (1.01). Una dispersión importante en diciembre podría haber significado que los estudiantes más rápidos hayan mejorado, pero lo más lentos hayan empeorado.

Seguidamente se presentan los principales estadísticos de septiembre y diciembre considerando la muestra de 60 alumnos:

Tabla 4.19. Estadísticos de los tiempos en septiembre y diciembre

ESTADÍSTICO	VALOR SEPTIEMBRE	VALOR DICIEMBRE
Media	5.46	4.31
Mediana	5.20	4.20
Desviación típica	1.03	1.01

A continuación se muestra un histograma de frecuencias de las distribuciones en septiembre y diciembre:

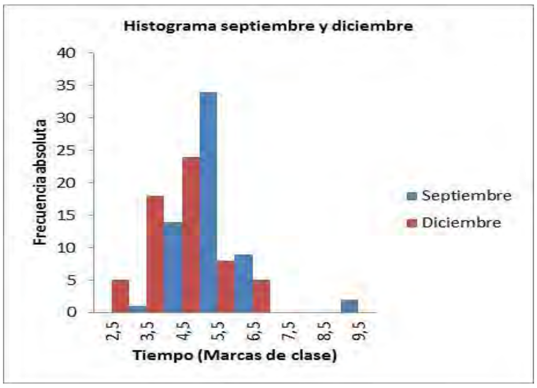


Figura 4.12. Histograma de frecuencias septiembre y diciembre

- Solución a la cuestión 2: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?

Se trata de hacer una comparación de dos muestras de distinto tamaño (chicos y chicas). En este caso, el cálculo de estadísticos (media, mediana, desviación típica) de las dos distribuciones y la interpretación de la forma de la distribución y valores atípicos permiten hacer comparaciones para dar respuesta a la pregunta planteada. También es posible utilizar representaciones gráficas para representar los datos y establecer posibles diferencias. La forma de la distribución de los tiempos es bastante simétrica y similar para chicos y chicas; sin embargo, los dos valores atípicos en el intervalo [9-10] nos llevan a establecer que es mejor comparar las medianas que las medias si no se quitan dichos valores. Al comparar estos valores estadísticos se obtiene que el grupo de los chicos es 0.20 centésimas de segundos mejor que las chicas.

La comparación de las medias conduce también a una respuesta correcta; se obtiene que los chicos superan en 0.36 centésimas de segundos (6.5%) a las chicas. No obstante, el uso óptimo de la media supone excluir primeramente los valores atípicos.

Al contrastar las deviaciones típicas, se obtiene 0.64 en el caso de los chicos y 1.17 en las chicas sin quitar los dos valores atípicos; si se eliminan dichos valores (dos chicas que tardan 9.9 segundos), la desviación típica cambia a 0.59 en el caso de las chicas.

Si se opta por una comparación de tipo gráfica, un “histograma de barras contrapuestas” o un gráfico de cajas resultan adecuados para este tipo de comparaciones.

Los siguientes son los principales estadísticos de los tiempos en septiembre para chicos y chicas:

Tabla 4.20. Estadísticos de los tiempos en septiembre chicos y chicas

ESTADÍSTICO	VALOR SEPTIEMBRE CHICOS	VALOR SEPTIEMBRE CHICAS
Media	5.22	5.58
Mediana	5.20	5.40
Desviación típica	0.64	1.17

Lo que sigue corresponde a un histograma de frecuencias relativas de los tiempos de los chicos y chicas en septiembre:

Figura 4.13. Histograma de frecuencias chicos y chicas septiembre

- Solución a la cuestión 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?

En este caso la comparación es análoga a la anterior y por tanto se pueden utilizar los mismos procedimientos de cálculo y/o usar las mimas técnicas de representación gráfica de los datos.

La forma de la distribución es también bastante simétrica y similar entre chicos y chicas. Hay algunos valores atípicos leves tanto en el caso de los chicos como en el de las chicas.

Una comparación entorno a la mediana da como resultado que los chicos son mejores que las chicas en 0.50 centésimas de segundos. Si la comparación se hace a través de las medias se obtiene que los chicos superan a las chicas en 0.36 segundos (8.05%) sin quitar los valores atípicos; si esta comparación se realiza dejando fuera los valores atípicos los chicos resultan ser mejores que las chicas en 0.44 de segundos.

Al comparar las desviaciones típicas se obtiene el mismo valor en ambos grupos (1) sin quitar los valores atípicos.

A continuación se muestran los principales estadísticos de los tiempos en diciembre para chicos y chicas:

Tabla 4.21. Estadísticos de los tiempos en diciembre chicos y chicas

ESTADÍSTICO	VALOR SEPTIEMBRE CHICOS	VALOR SEPTIEMBRE CHICAS
Media	4.08	4.44
Mediana	3.90	4.40
Desviación típica	1	1

El siguiente gráfico corresponde a un histograma de frecuencias relativas de los tiempos de los chicos y chicas en diciembre:

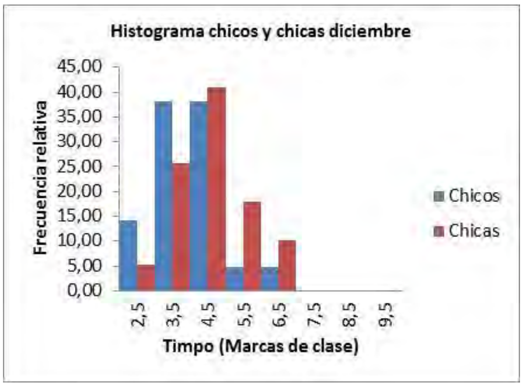


Figura 4.14. Histograma de frecuencias chicos y chicas diciembre

- Solución a la cuestión 4: ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?

Para responder este ítem se deben comparar por separados (chicos y chicas) las dos distribuciones (tiempos en septiembre y diciembre) y determinar cuánto ha mejorado cada grupo en relación a su tiempo inicial (tiempo en septiembre). Esta comparación se puede hacer comparando los porcentajes que representan las diferencias de las medianas o las medias según sea la forma de la distribución de los datos y la presencia de valores atípicos. También resulta importante comparar las desviaciones típicas para determinar si no hay diferencias importantes en la dispersión de los datos, que pudieran estar afectando la comparación a través de los promedios.

Otra forma de comparar la mejora de cada grupo es mediante gráficos; siendo especialmente apropiado el gráfico de cajas.

Las formas de las distribuciones no resultan todas simétricas y hay presencia de valores atípicos importantes en el grupo de las chicas, por lo que resulta aconsejable emplear la mediana en lugar de la media. Si se comparan los porcentajes que representan las diferencias de las medianas de los tiempos obtenidos en septiembre y diciembre por chico y chicas, se tiene que los chicos han mejorado en un 25% en cambio las chicas lo han hecho en un 18.52%. Han mejorado más los chicos.

Si la comparación se realiza en torno a la madia (sin quitar los valores atípicos), se obtiene que los chicos han mejorado en un 21.81% y las chicas en 20.40%; sigue siendo mejor el rendimiento de los chicos.

A continuación se muestran los principales estadísticos de septiembre y diciembre para chicos (tabla 4.22) y chicas (tabla 4.23):

Tabla 4.22. Estadísticos de los tiempos en septiembre y diciembre chicos

ESTADÍSTICO	VALOR SEPTIEMBRE	VALOR DICIEMBRE	DIFERENCIA	DIFERENCIA %
Media	5.22	4.08	1.14	21.81
Mediana	5.20	3.90	1.30	25
Des. Típica	0.64	1.00	0.36	56.52

Tabla 4.23. Estadísticos de los tiempos en septiembre y diciembre chicas

ESTADÍSTICO	VALOR SEPTIEMBRE	VALOR DICIEMBRE	DIFERENCIA	DIFERENCIA %
Media	5.58	4.44	1.14	20.49
Mediana	5.40	4.40	1	18.52
Des. Típica	1.17	1	0.17	14.60

Lo que sigue corresponden a dos histogramas que muestran las distribuciones de frecuencias de chicos y chicas en septiembre y diciembre:

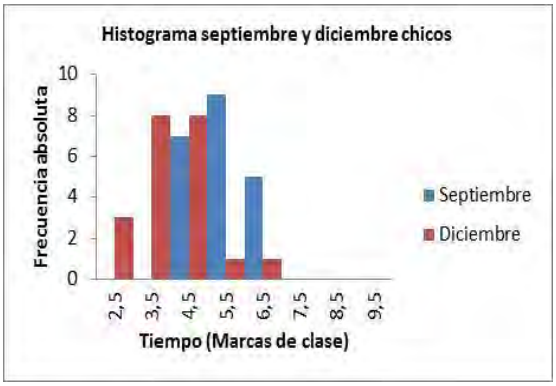


Figura 4.15. Histograma de frecuencias chicos y chicas en septiembre y diciembre

- Solución a la cuestión 5: ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como “atípico” en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)?

Par calcular los valores atípicos se puede utilizar la fórmula proporcionada en el proyecto (se considera como atípico un valor cuando está fuera del intervalo: media ± dos veces la desviación típica). En septiembre hay tres valores atípicos: 3.3; 9.9 y 9.9.

Lo mismo sucede en diciembre, donde se observan los siguientes valores atípicos: 6.4; 6.6 y 6.9.

- Solución a la cuestión 6: ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

Los valores atípicos podrían afectar una interpretación adecuada de los datos y por tanto, resulta conveniente analizarlos de manera separada.

6. ANÁLISIS A PRIORI DEL DISEÑO

En el análisis a priori proponemos desde el EOS realizar un análisis de las principales prácticas, objetos y procesos y eventuales "conflictos" que se pueden prever en el proceso de estudio planificado (análisis epistémico). Así mismo, se debe realizar una descripción de las interacciones previstas y de los medios utilizados (análisis instruccional). Este análisis se completa con algunos "supuestos" sobre las normas que condicionarán el proceso de estudio.

6.1. **Análisis epistémico**

Seguidamente hacemos un análisis de las principales prácticas matemáticas/estadísticas que se deben implementar para resolver los proyectos y describimos los elementos más relevantes de las *configuraciones de objetos y procesos* que se ponen en juego en la solución esperada a cada cuestión. El reconocimiento de tales objetos y procesos para las distintas situaciones-problemas usadas en un proceso de estudio es necesario para gestionar las interacciones en el aula, y decidir posibles institucionalizaciones de los conocimientos puestos en juego. Así mismo, la confrontación de este análisis con las investigaciones previas y la propia experiencia docente permite prever potenciales conflictos de significado que deberán ser tenidos en cuenta.

6.1.1. Proyecto "Alumno típico"

En este proyecto se trata de recoger datos de los alumnos de la clase sobre las características, género, intensidad con la que practican deporte, número de hermanos, peso y cantidad de dinero que tienen en el bolsillo. Para cada una de estas características se pide determinar: los valores correspondiente al "alumno típico" o representativo de la clase, cómo de representativo es dicho estudiante y si hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características. Incluimos a continuación un análisis de las prácticas matemáticas/estadísticas que se deben implementar para responder a las cuestiones y la configuración de objetos y procesos que se ponen en juego, distinguiendo aquellos que se pueden suponer conocidos de los que constituyen nuevos objetivos de aprendizaje. Así mismo, haremos algunas hipótesis sobre conflictos potenciales en el desarrollo del proyecto, basadas en resultados de investigaciones previas y la experiencia de impartir estos contenidos en cursos anteriores.

Tipo de problema y prácticas estadísticas:

El enunciado del problema tiene un carácter abierto ya que plantea una cuestión que puede ser interpretada de diversas maneras, sin sugerir la aplicación directa de una técnica estadística, sobre todo en la segunda cuestión sobre la representatividad del alumno típico. Se pretende motivar el proceso de reducción de los datos estadísticos, identificando la variable, sus valores y frecuencias para construir la correspondiente distribución de frecuencias. Posteriormente se requiere describir tal distribución mediante estadísticos de posición central, dispersión y forma para elegir un valor ideal que "represente" al conjunto de datos.

La determinación de las diferencias estadísticas entre las dos submuestras (chicos y chicas) motiva la comparación de distribuciones de frecuencias, y por tanto la indagación de la significatividad de las diferencias entre los promedios y dispersiones. Permite motivar, así mismo, la comparación gráfica (mediante diagramas adosados) de los pares de distribuciones. Por tratarse de dos distribuciones correspondientes a muestras de distinta cardinalidad, se justifica el uso de las frecuencias relativas como técnica para comparar las dos distribuciones lo que favorece el uso del razonamiento proporcional.

El enunciado de esta situación-problema se puede generalizar de diversas maneras, como se muestra en Batanero y Díaz (2011, pp. 73-95). En nuestro caso se espera que los estudiantes realicen las prácticas estadísticas siguientes:

- Construir las distribuciones de frecuencias de las cinco variables, identificando las variables, sus respectivos valores, recontar las frecuencias absolutas de cada valor, y representar estos resultados en una disposición tabular adecuadamente rotulada.
- Calcular promedios (moda, mediada y media, discriminando su uso según el tipo de variable y la forma de la distribución).

- Calcular dispersiones (máximo, mínimo, recorrido, cuartiles, recorrido intercuartílico, desviación típica, discriminado su uso según el tipo de variable y la forma de la distribución); valorar la representatividad de los promedios según el tamaño relativo de las dispersiones.
- Comparar numéricamente (promedios y dispersiones) y gráficamente (diagramas adosados) las distribuciones de frecuencias de las dos submuestras (chicos y chicas)
- Valorar la significativad de las diferencias entre los estadísticos resumen de las distribuciones de frecuencias en las submuestras.

Se espera que un porcentaje elevado de estudiantes hayan estudiado previamente la mayor parte de los contenidos pretendidos, aunque posiblemente los hayan olvidado en gran medida; en algunos casos, este estudio será el primer contacto con la estadística descriptiva. Por tanto, la distinción entre los objetos y procesos que se pueden considerar como previos o emergentes puede variar según los estudiantes. Se prevé que la reducción tabular, numérica y gráfica de los datos estadísticos haya sido estudiada previamente por la mayoría de los estudiantes, por lo que las cuestiones 1) y 2) tendrían la consideración de aplicación de conocimientos previos. Como objetos y procesos emergentes (primer encuentro) que se proponen como conocimiento avanzado del contenido para los maestros en formación destacamos:

- Discriminación del uso de los promedios moda, media, mediana según el tipo de variable estadística y la forma de la distribución de frecuencias.
- Carácter ideal de los promedios (no tienen que corresponder a un dato) y su uso como representante de la colección de datos (muestra o población).
- Grado de representatividad de los promedios dependiendo de la mayor o menor dispersión de los datos.
- Comparación de distribuciones de frecuencias; significatividad de las diferencias de promedios y dispersiones.

La realización de estas prácticas matemáticas/estadísticas conlleva la intervención de una compleja configuración de objetos y procesos matemáticos cuyos elementos esenciales indicamos a continuación.

Elementos lingüísticos:

El estudiante debe atribuir significado, como condición previa, a las siguientes expresiones lingüísticas:

- "Características de un estudiante típico o representativo de la clase"
- "¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?"
- " Diferencias entre chicos y chicas"

Muy posiblemente el profesor deberá compartir con la clase el significado institucional esperado de dichas expresiones.

Se puede suponer que los estudiantes están familiarizados, por sus estudios previos en secundaria, con la mayor parte de los términos y expresiones lingüísticas propias de la estadística descriptiva (frecuencia absoluta, frecuencia relativa, tabla de frecuencias, moda, media, mediana, máximo, mínimo, recorrido, diagrama de barras, histograma).

De acuerdo con los resultados de algunas investigaciones (Arteaga, 2011; Díaz, Batanero y Wilhelmi, 2008; Espinel, 2007), se prevén dificultades en la rotulación de tablas de frecuencias y gráficos. Así mismo, la representación de los valores y sus frecuencias en los ejes correspondientes de un gráfico es un contenido que puede resultar conflictivo (Arteaga, 2011).

Los estudiantes no familiarizados con el uso de la hoja de cálculo tendrán dificultades importantes con la manera de representar los datos (colección de datos dispuestos en columnas), las variables estadísticas, el lenguaje funcional específico de la hoja (conjunto de datos, regla de cálculo, resultado).

Elementos conceptuales:

Los siguientes conceptos primitivos de la estadística descriptiva son a menudo escasamente estudiados y reconocidos por los estudiantes, pero son esenciales para comprender el sistema de prácticas operativas y discursivas de la estadística:

- Concepto de dato estadístico (rasgo o información contextualizada, individuo estadístico); colección de datos (muestra, población).
- Variabilidad (variación del rasgo entre los individuos) y comprensión de la diferencia entre variación y error.
- Variable estadística (símbolo que toma los diferentes valores del rasgo observado en la colección de datos.

La resolución de las tareas pedidas requiere poner en juego conceptos con los que los estudiantes pueden estar familiarizados:

- Frecuencia absoluta y relativa; distribución de frecuencias, promedios (moda, mediana, media); dispersión (máximo, mínimo, recorrido; varianza, desviación típica)
- Diagramas de barras, diagrama de sectores, tabla de frecuencias.

Pueden estar menos familiarizados, y por tanto, ser ocasión de objetos emergentes de las prácticas que se requiere realizar los siguientes conceptos:

- Histograma de frecuencias (intervalos y marcas de clase, criterios para su elección).
- Diagramas e histogramas adosados, interpretación y uso.
- Simetría y asimetría de una distribución de frecuencias, sesgo positivo y negativo; su relación con la elección del promedio que se debe usar para representar los datos.
- Percentiles, rango de percentiles, recorrido intercuartílico; gráfico de cajas.
- Significación de diferencias de medias y dispersiones.
- Valor atípico

Propiedades:

Las siguientes son algunas propiedades que se usan en la resolución de las tareas, aunque de manera implícita:

- Los promedios representan a una colección de datos porque indican la tendencia o posición central de las distribuciones de frecuencias correspondientes a dichos datos.
- La moda es el único promedio que se puede usar si la variable estadística es un atributo cualitativo; puede no ser un valor único.
- La mediana es más representativa que la media si la distribución es asimétrica; ambos estadísticos coinciden si la distribución es simétrica.
- Si la dispersión respecto de un promedio es alta (o baja) el promedio es menos (o más representativo) de la colección de datos.

Procedimientos:

La elaboración de tablas de frecuencias, el cálculo de la moda, media, máximo, mínimo, recorrido, construcción de diagramas de barra y circulares son procedimientos que, o bien, recuerdan los estudiantes o son fáciles de dominar. El cálculo de la mediana, la elaboración de tablas de frecuencias agrupadas en intervalos y la construcción e interpretación del gráfico de cajas e histogramas requieren una atención especial. Igual ocurre con el cálculo de percentiles, el recorrido intercuartílico y la desviación típica.

Algunos conflictos recogidos en la literatura que se pueden manifestar en la construcción de gráficos son la no consideración de intervalos de frecuencia cero, la construcción de barras separadas en los histogramas (Espinel 2007) y el uso de escalas no homogéneas (Ruiz, et al., 2009).

En el cálculo de estadísticos Jacobbe (2008) reporta errores de cálculo de la mediana y Ruiz, et al., (2009), señalan que hay estudiantes que interpretan la mediana como el centro del rango.

Argumentos:

Se espera que los estudiantes justifiquen las respuestas a las cuestiones planteadas elaborando argumentos deductivos del siguiente tipo,

"Teniendo en cuenta las definiciones y propiedades de los promedios y dispersiones el sujeto típico es, una chica que hace poco deporte, que tiene 2.5 hermanos, pesa 60 kgs, y lleva en el bolsillo 6 € (son los valores de las medianas ya que las distribuciones son asimétricas). La elección de una chica para la variable género es muy representativa ya que el 68 % son chicas, mientras que los demás valores son menos representativos. En el caso de la variable número de hermanos el recorrido es 6, para el peso, 54 y para el dinero 50.

Las investigaciones revisadas dan cuenta de dificultades que podrían afectar el desarrollo de argumentos frente a las cuestiones planteadas. En Espinel, et al., (2008) se reconoce la imposibilidad que tienen profesores en ejercicio y en formación de razonar más allá de la información explícita en los gráficos y en Arteaga (2011) se plantea que la mayoría de los estudiantes no logran establecer conclusiones completas frente a cuestiones planteadas en proyectos de análisis de datos. El uso correcto de la media o la media o la mediana según la forma de la distribución es también un contenido que puede afectar el desarrollo de los argumentos esperados. En Jacobbe, 2008 se plantea este contenido presenta dificultades importantes.

Procesos:

En general, todas las entidades conceptuales que intervienen tienen una naturaleza no ostensiva, esto es ideal, y su constitución como tales tiene lugar como resultado de secuencias de prácticas operativas y discursivas que debe promover el profesor. El concepto de variación (cambio del rasgo observado entre los individuos estadísticos) y de variable estadística (rasgo de los individuos estadísticos que puede tomar diferentes valores en una colección de datos) deberá ser reforzado con ocasión del estudio de las variables género, deporte, número de hermanos, peso y dinero.

Un proceso de idealización que requerirá atención especial será el que da lugar al concepto de sujeto típico o representativo, que no tiene que corresponder con un valor de la variable. Así, la mediana del número de hermanos es de 2.5 que obviamente no corresponde a ningún valor posible de la variable. Igual atención requerirá el concepto de "grado de representatividad" de un promedio dependiente de la cuantía de la dispersión correspondiente.

Los procedimientos y propiedades aplicados para dar respuesta a las cuestiones planteadas en la situación particular dada tienen un carácter general, lo cual deberá ser enfatizado por el profesor. El cálculo de la mediana, percentiles, histogramas debe concluir con el enunciado de reglas generales aplicables a otras situaciones de análisis de datos.

El proyecto de análisis de datos planteado se puede ampliar incluyendo cuestiones que requieran el estudio de la asociación en tablas de contingencia y variables bidimensionales. Por ejemplo, cuestionando si hay relación entre el género y la práctica de deporte, entre el peso y la altura de las personas. (Véase, Batanero y Díaz, 2011, donde se describen consignas que ponen en juego conceptos y técnicas de estadística inferencial basadas en el proyecto P1).

Las limitaciones de tiempo disponible para el desarrollo del tema implica no incluir tales ampliaciones en la implementación de este proyecto, aunque son, sin embargo, pertinentes para un profesor de educación primaria.

6.1.2. Proyecto "Lanzamiento de dos dados"

Este proyecto consiste en decidir la preferencia de ser uno u otro jugador al lanzar dos dados, teniendo en cuenta determinadas condiciones que refieren a la probabilidad de que gane uno u otro jugador. En la solución esperada se han presentado los principales "significados" puestos en juego en la solución este problema.

Tipo de problema y prácticas estocásticas:

Se propone el estudio de un ejemplar de un tipo de situaciones en las que hay que decidir sobre el carácter equitativo de unas reglas de juego de azar, para lo cual es necesario movilizar las intuiciones, los conceptos y técnicas probabilísticas elementales. La reflexión teórica sobre las probabilidades de los sucesos implicados se debe contrastar con los resultados empíricos obtenidos al realizar el experimento de lanzar dos dados y observar la suma de puntos obtenida. Ello requiere movilizar la aproximación frecuencial de la probabilidad (ley de los grandes números) y aplicar técnicas elementales de análisis de datos.

Elementos lingüísticos:

Las reglas del juego están expresadas en un lenguaje familiar para los estudiantes, de modo que la expresión clave de la situación, ¿Qué prefieres ser jugador A o B? se puede suponer que es significativa para ellos. Puede ser necesario prestar atención al proceso de atribuir significado a las expresiones:

- ¿Es equitativo este juego?
- ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego?
- ¿Quién tiene más probabilidades de ganar?

Sin duda la expresión, "Simula el lanzamiento de dos dados", necesitará ser discutida y especificada por el profesor, así como el dispositivo de registro de los resultados.

Se supone que el maestro en formación está familiarizado con los términos y expresiones probabilísticas elementales (experimento aleatorio, suceso, probabilidad, frecuencias, tablas de frecuencias, tabla de doble entrada, diagrama de barras). Si este no fuera el caso, la situación tiene que ser utilizada por el formador para recordar o explicar el uso de tales elementos lingüísticos.

En la cuestión 4) ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más?, que se debe entender en el sentido de si ganará otra vez el jugador A (o el B, según el caso), puede surgir un conflicto si al jugar 10 veces gana A, puesto que lo se pretende es hacer ver que el tamaño de muestra 10 es demasiado pequeño. Si efectivamente gana A en las 10 jugadas esto puede reforzar la creencia en la "ley de las pequeñas muestras". Se debe esperar que en largas series de este tipo de experimentos la frecuencia relativa de que gane A sea del 55.55%, y que B gane el 44.44%.

Elementos conceptuales:

Se puede suponer que los estudiantes están familiarizados con los conceptos de experimento aleatorio, suceso y probabilidad (como grado de creencia en que un suceso ocurra, y como proporción de casos favorables entre casos posibles). Variable estadística y distribución de frecuencias han sido introducidas en el proyecto anterior.

Conceptos nuevos que se deben introducir con ocasión del estudio de este proyecto son los de, espacio muestral, variable aleatoria, distribución de probabilidad (triangular), juego equitativo. Algunos conflictos conceptuales que podrían tener lugar son confundir la frecuencia con la probabilidad o con el valor de la variable y no distinguir entre variable dependiente e independiente.

Propiedades:

Se considera necesario fijar la atención en las siguientes propiedades implicadas en la situación probabilística que se estudia:

- Simetría del dado, equiprobabilidad (no hay razón para preferir un caso sobre otro).
- Regla de Laplace (regla de cálculo de probabilidades de sucesos basada en la equiprobabilidad de los sucesos elementales).
- En la situación dada, P(A) = 20/36; P(B) = 16/36. Se comprueba que el juego no es equitativo.
- Ley de los grandes números (Permite estimar las frecuencias conociendo la probabilidad).
- La convergencia de frecuencia relativa a la probabilidad es lenta y presenta fluctuaciones (Permite explicar diferencias entre frecuencias relativas y probabilidades en series cortas).

Algunos conflictos previstos relacionados con propiedades de los fenómenos aleatorios son, el sesgo de equiprobabilidad y la creencia en la ley de los pequeños números, descrito por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) como el sesgo de la heurística de representatividad.

Procedimientos:

Se puede suponer que los estudiantes están familiarizados con los procedimientos estadísticos previamente estudiados (tabulación de frecuencias, elaboración de diagramas de barras). El procedimiento de formación sistemática de todas las sumas posibles al lanzar dos dados, el cálculo de las probabilidades de los sucesos simples y compuestos involucrados y la comparación de frecuencias y probabilidades en un mismo gráfico cartesiano, para estudiar las diferencias, deben ser considerados como emergentes en esta situación.

En la elaboración de las gráficas será necesario atender a conflictos tales como confundir la variable dependiente e independiente, confundir frecuencia y valor de la variable.

Argumentos:

La aceptación de la equiprobabilidad será ocasión para discutir con los estudiantes el papel de las normas y convenciones sociales en la actividad matemática (en este caso, modelización estocástica de la situación); no hay ninguna razón para suponer que las caras de los dados no tengan simetría.

La asignación de probabilidades y la afirmación de que el juego no es equitativo pone en juego razonamiento deductivo, mientras que la convergencia de las frecuencias relativas a las probabilidades y las fluctuaciones inherentes a dicha convergencia se deben aceptar mediante comprobaciones empíricas e intuitivas realizadas mediantes las simulaciones probabilísticas.

Procesos:

La secuencia de prácticas operativas y discursivas realizadas en el estudio de este proyecto supone la implementación de procesos de generalización (paso de la realización del experimento un número de veces progresivamente mayor) y de idealización: la probabilidad y la ley de los grandes números como entidades no ostensivas, ideales. No obstante, las distribuciones de frecuencias para 10, 100, 1000,…, lanzamientos, y sus representaciones gráficas, son particularizaciones y materializaciones dialécticamente relacionadas con las entidades probabilísticas correspondientes. Será necesario fijar la atención del estudiante en estos procesos para que comprendan la naturaleza de los objetos matemáticos implicados.

6.1.3. Proyecto "Eficacia de un entrenamiento deportivo"

En este proyecto se pide analizar dos pares de variables cuantitativas, tiempo en correr una distancia antes y después de un entrenamiento deportivo. ¿Ha sido efectivo el entrenamiento para el conjunto de la clase? ¿Hay diferencias entre chicos y chicas? ¿Quién ha mejorado más los chicos o las chicas?

En Godino, Font y Wilhelmi (2008) se realiza un análisis muy completo de las configuraciones de objetos y procesos implicadas en la realización de este proyecto. Incluimos a continuación un resumen de dicho análisis indicando los elementos previos y emergentes más relevantes.

Tipo de problema y prácticas estadísticas:

La cuestión inicial propuesta lleva a plantear tres problemas de comparación de pares de distribuciones de frecuencias de variables estadísticas continuas, a fin de encontrar diferencias y semejanzas entre las mismas y tomar decisiones sobre el grado de efecto de un tratamiento: tiempo en recorrer 20 metros en Septiembre y Diciembre, en la muestra completa, el subgrupo de chicas y de chicos, respectivamente. Se trata de un problema extramatemático —¿Ha sido efectivo el tratamiento?— que se modeliza mediante un problema intramatemático —¿Cómo comparar dos distribuciones de frecuencias?—. La solución del problema requiere la descripción de cada una de las distribuciones, lo que conlleva el estudio de las distribuciones (el *cálculo* de los promedios, dispersiones, formas y valores atípicos). La representación gráfica simultánea de las distribuciones sobre un mismo sistema de coordenadas permite visualizar la forma de las distribuciones e *identificar* la presencia de valores atípicos, así como *justificar* el grado de efectividad del tratamiento. Este sistema de prácticas operativas y discursivas se focaliza para responder a las preguntas de indagación; es decir, no basta con realizar los cálculos/gráficos matemáticos, sino que hay que seleccionar cuáles serán útiles para responder las cuestiones y finalmente *interpretar* los resultados. Por tanto, se pasa por las diversas fases del proceso de modelización, no sólo por el trabajo con el modelo matemático.

Elementos lingüísticos:

Se pueden considerar como conocidas por haber sido previamente estudiadas las expresiones de lenguaje ordinario (efectividad del entrenamiento; conjunto de la clase); lenguaje funcional (uso de las funciones estadísticas de la hoja de cálculo, promedio, desviación típica); términos y representaciones estadísticas (media, gráficos de barras,…). Representaciones con un cierto grado de novedad serán, gráficos adosados (cajas, barras adosadas); diagramas de dispersión; valores atípicos expresados como puntos alejados de los promedios.

En la solución del problema tienen lugar diversos procesos de producción, transformación e interpretación de signos (semiosis): ordenación de las series de datos, conversión de tablas de valores a gráficos y comunicación en leguaje natural del significado que emerge de los datos.

Habrá que tener en cuenta los conflictos descritos en el proyecto P1.

Entidades conceptuales:

Se espera que los estudiantes no tengan mayores dificultades con los conceptos estudiados en el proyecto P1, como son: dato estadístico, variable estadística, valor, frecuencia absoluta y relativa, distribución; promedios (media, mediana, moda, intervalo modal); dispersión (desviación típica, recorrido, recorrido intercuartílico). Algunas entidades conceptuales que podrían resultar desconocidas u olvidadas y que por tanto, deben ser consideradas como objetos emergentes son los conceptos de distribución de frecuencias, diferencias en distribuciones de frecuencias, valor atípico y simetría/asimetría en una distribución.

Propiedades:

En este proyecto se ponen en juego diversas propiedades, algunas de las cuales se consideran conocidas por los estudiantes:

- La media aritmética es una medida entorno a la cual se distribuye el conjunto de los datos.
- La desviación típica es una medida de la mayor o menor dispersión de un conjunto de datos respecto de la media.
- La comparación de dos distribuciones de frecuencias debe hacerse teniendo en cuenta tanto el promedio como la dispersión.

Se consideran propiedades emergentes:

- El entrenamiento deportivo ha sido efectivo en el conjunto de la clase.
- La clase ha disminuido (aumentado o mantenido), su homogeneidad en la variable "tiempo en recorrer 20 m".

Procedimientos:

La mayoría de los estudiantes estarán familiarizados con los procedimientos aplicados en el proyecto P1, por lo se espera que preparar los datos en la hoja de cálculo y calcular estadísticos (media, mediana y desviación típica) no reviertan mayor dificultad. Si se opta por usar la media y desviación típica como resúmenes estadísticos de las distribuciones es necesario aplicar las funciones estadísticas correspondientes de la hoja de cálculo a cada una de las tablas de valores, cuestión que ya habrá sido comprendida en el proyecto P1.

El procedimiento general para comparar dos distribuciones puede ser considerado emergente; esto requiere comprender los siguientes pasos como parte de dicho procedimiento: calcular promedios y medidas de dispersión, construir gráficas adosadas, identificar valores atípicos (y tratarlos de manera independiente) y comparar las diferencias entre ambas distribuciones.

Los conflictos mencionados en el proyecto P1, son también aplicables en este proyecto.

Argumentos:

La decisión sobre la efectividad del tratamiento se justifica deductivamente a partir de las definiciones de los objetos conceptuales (definiciones) de distribución de frecuencia y los correspondientes estadísticos resumen (representatividad de los promedios; medida de la variabilidad mediante las medidas de dispersión).

También se puede usar argumentación empírica-visual: la distribución de tiempos en diciembre se "ve" desplazada hacia la izquierda en los gráficos.

En la literatura investigativa se ponen en evidencia diferentes conflictivos que pueden afectar el desarrollo correcto de argumentos frente a las cuestiones planteadas. Espinel, et al., (2008), aluden a la dificultad para para interpretar los valores atípicos y reconocer que un gráfico con un valor atípico puede ser simétrico; Jacobbe (2008), da cuenta de dificultades para aplicar la media o la mediana según la forma de la distribución; Ruiz, et al., (2009) aluden a la comparación de valores aislados y; Borim y Queiroz (2008), ponen en evidencia dificultades para establecer relaciones entre la media, la mediana y la desviación estándar.

Procesos matemáticos básicos:

En la realización del proyecto tienen lugar diversos procesos a los cuales habrá que prestar atención. La *materialización* del objeto no ostensivo "distribución de frecuencias" puede ser evocado mediante diagramas de cajas y polígonos de frecuencias; la "forma de la distribución" se visualiza en los diagramas.

Algunos procesos de *generalización* que deben ser comprendidos son: 1) cada valor de la variable corresponde a un sujeto particular (es un dato), pero el razonamiento estadístico se aplica a la muestra, al conjunto de datos y 2) los estadísticos de centralización y dispersión representan el conjunto de datos. El dato aislado interesa sólo cuando se estudian los sujetos atípicos (para lo que se requiere el patrón de comparación de la clase). El juicio sobre la efectividad del tratamiento no se aplica a los sujetos aislados, sino a la clase o grupo (muestra o población).

Dentro de los procesos de *descomposición-reificación* se debe tener en cuenta el problema global se debe descomponer en problemas elementales. Cada distribución es un sistema que debe ser descrito mediante las medidas de centralización, dispersión y forma. En cada uno de estos subproblemas las nociones de media y desviación típica intervienen como objetos unitarios y son proporcionados por un procedimiento en cierto modo reificado en la hoja de cálculo. Por otra parte, tras el proceso de estudio correspondiente los nuevos conceptos y propiedades emergentes, que inicialmente deben ser tratados como sistémicos, deberán ser reificados (vistos como objetos unitarios) por los estudiantes a fin de ser aplicados a la solución de nuevos problemas.

Por último, es importante que se la *significación* apropiada a las expresiones y conceptos que intervienen en el estudio. La expresión "en el conjunto de datos" quiere decir que no interesa saber si un alumno concreto ha mejorado o no, sino la clase globalmente; de hecho, el análisis de los datos tendrá que discriminar valores atípicos y diferenciar entre efectividad personal y grupal. Así mismo, cada concepto que interviene en el proceso de resolución debe ser referido por las correspondientes expresiones lingüísticas.

6.2. **Análisis instruccional. Interacciones previstas, evaluación y medios planificados**

La enseñanza de la estadística por el "método de proyectos", como aquí se propone, permite implementar *trayectorias didácticas* en las que predominan las configuraciones de tipo personal y de trabajo cooperativo, esto es, con un nivel mayor de autonomía en el aprendizaje matemático. No obstante, cada configuración didáctica (ligada al desarrollo de una configuración epistémica específica) debe contemplar los momentos de regulación (procesos de definición, enunciación, fijación de procedimientos y justificaciones) en los que el docente fije los significados institucionales que serán compartidos por la clase.

En nuestro caso, se trata de atribuir significado a la "comparación de distribuciones de frecuencias" teniendo en cuenta no solo los promedios, sino también las dispersiones y características de forma de las mismas (simetrías, valores atípicos,…). El debate de la "significatividad" de las diferencias puede "abrir las puertas" a la inferencia estadística.

La elección de los dispositivos de ayuda al cálculo estadístico y la representación gráfica es determinante para el desarrollo de la trayectoria didáctica por sus interacciones con las trayectorias epistémica, docente, discente, así como con las trayectorias cognitivas de los estudiantes. El uso de la hoja de cálculo Excel es una de las opciones posibles, dada su potencial utilidad para temas diversos, su disponibilidad en todos los ordenadores y ser sugerida por los currículos oficiales.

En el transcurso de la trayectoria didáctica se contemplan procesos de evaluación formativa y sumativa. Como procesos de evaluación formativa se contemplan los estados de avances de cada proyecto y los informes finales de los proyecto 1 y 2. Así mismo, se realizará un seguimiento constante a través de la observación directa para obtener información "in situ" acerca del estado del aprendizaje y facilitar su retroalimentación. Como proceso de evaluación sumativa se tendrán en cuenta el informe final del proyecto P3 y la aplicación de una prueba donde se plantea la siguiente situación y las cuestiones que se indican.

Como sabes el dodecaedro tiene 12 caras. Hemos numerado las caras de un dodecaedro de la siguiente manera: una cara con el número 1, dos caras con el número 2, tres caras con el número 3, cuatro caras con el número 4, una cara con el número 5, y una cara con el 6 (Se supone que este cuerpo es perfectamente simétrico y que todas las caras pesan igual).

1) Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio, “Lanzar el dado dodecaédrico descrito y observar el número mostrado por la cara situada más arriba”.
2) Calcula la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles y escribe dichas probabilidades.

Hemos simulado el lanzamiento de ese dado 30 veces y hemos obtenido los siguientes resultados: 3, 1, 5, 3, 6, 1, 2, 2, 5, 4, 6, 4, 4, 6, 3, 6, 5, 5, 3, 6, 6, 1, 4, 3, 5, 3, 6, 5, 4, 6.

3) Construye una tabla de frecuencias relativas de esta serie de datos estadísticos.
4) Representa esta distribución de frecuencias mediante un diagrama de barras.
5) Representa sobre la misma gráfica anterior (barras adosadas) la distribución de probabilidad calculada en el apartado dos.
6) Si en lugar de lanzar 30 veces el “dado” lo hiciéramos 10000 veces, ¿Qué esperas observar respecto de los diagramas de barras representados?

6.3. **Normas que condicionan el diseño**

La dimensión normativa, es entendida en el EOS como una visón unificada de la idea de contrato didáctico (Brousseau, 1998) y de posturas basadas en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969) como es el caso de los trabajos de Cobb y cls. (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cbb, 1996) donde se introducen las nociones de patrones de interacción y de normas sociales, y sociomatemáticas.

En el EOS se identifican diferentes tipos de normas: según su origen, tipo y grado de coerción (social y disciplinar), momento y, dimensión o faceta (Godino, Font, Wilhelmi y Castro; 2009). La identificación de las normas según facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional) permite un análisis sistémico de las normas que condicionan un proceso de estudio.

En el caso de nuestro diseño, los proyectos de análisis de datos que hemos seleccionado dan respuesta a exigencias del currículo escolar de Educación Primaria y Secundaria (MEC, 2006a; MEC 2006b). En dichos currículos se incluye un bloque específico sobre estadística y probabilidad en todos los niveles de enseñanza; en Educación Primaria, corresponde al bloque 4 “Tratamiento de la información, azar y probabilidad” y en la Educación Secundaria al bloque 6 “Estadística y probabilidad”.

En el segundo ciclo de Educación Primaria (8-10 años) se propone la recogida y análisis de datos de encuestas, experimentos y observaciones y el uso de un conjunto de técnicas (incluyendo tablas de doble entrada). En el último ciclo (10 a 12 años), se platea la recogida y registro de datos utilizando distintos tipos de gráficos para representar la información. En ambos niveles, se mencionan contenidos introductorios sobre aleatoriedad y la probabilidad.

En el primer curso de Educación Secundaria se mencionan las frecuencias absolutas y relativas, diagramas de barras, gráfico de líneas y de sectores, y la formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. En el segundo curso, se incluyen las frecuencias acumuladas; significado y cálculo de la media, mediana y moda; uso de estas medidas de tendencia central para realizar comparaciones y; uso de las propiedades de la media para resolver problemas. Los contenidos de estos cursos se consideran aspectos del conocimiento avanzado del contenido estadístico que debe manjar el profesor de Educación Primaria.

El uso de los recursos tecnológicos es requerido en esta “normativa”; en particular, se sugiere la hoja de cálculo Excel en el estudio de la estadística.

Las exigencias de los currículos escolares se constituyen en una norma epistémica-ecológica que demanda del “formador de maestros” establecer las conexiones necesarias entre los contenidos estadísticos del diseño y los del currículo escolar.

Las investigaciones en didáctica de la matemática (Nolan y Speed, 1999; Batanero y Díaz, 2005; Batanero, et al., 2011; Batanero y Díaz, 2011) sugieren el trabajo mediante proyectos para el desarrollo de los contenidos estadísticos. Esta postura, es compartida en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y en el proyecto GAISE (Franklin et al. 2005) donde se propone un marco conceptual para la enseñanza de la estadística basada en trabajo con proyectos de análisis de datos.

Estas orientaciones son una norma externa al aula que condiciona y orienta el trabajo del formador de maestros. Se trata de una norma ecológica-cognitiva que puede entrar en conflicto con la práctica habitual en el estudio de las matemáticas, según la cual se presentan primero los conceptos y procedimientos, ilustrados con ejemplos sencillos, para después se aplicarlos a otras situaciones más realistas. También es usual no tener en cuenta las distintas fases de los procesos de modelización matemática.

Una orientación socio-constructivista del aprendizaje, que valora positivamente la autonomía y el trabajo cooperativo es una fuente de normas para el docente: "Planifica e implementa las actividades de modo que los alumnos tengan una "estrategia de base" para abordar las tareas, bien individualmente o trabajando en equipo de tal modo que "construyan" los conocimientos de manera autónoma". Pero en la evolución de las trayectorias cognitivas de los estudiantes pueden aparecer bloqueos y conflictos que obligarán al profesor a modificar esas reglas iniciales socio-constructivistas, implementando configuraciones de tipo magistral. Esta circunstancia aumenta considerablemente la responsabilidad del profesor, al menos al principio de implementar este sistema, aunque con la práctica los tipos de conflictos de los estudiantes serán familiares al profesor, que dispondrá pues de indicadores para el control y mejora del funcionamiento del sistema didáctico.

En el proyecto P1, el uso del valor de la mediana para determinar el alumno típico requiere ser aclarado. La mediana es 2.75 y no corresponde a ningún valor de la variable (nadie tiene 2.75 hermanos). Una situación similar sucede si se usa la media (2.5), aunque es preferible el uso de la mediana (distribución asimétrica). En las variables peso, si se utilizan los datos de la tabla 4.2, es necesario aceptar que aunque todos los valores se encuentran representados en números enteros, estos corresponden a variables cuantitativas continuas y por tanto, se pueden intercalar un valor entre otros dos.

Estas situaciones corresponden a normas epistémicas que se deben aceptar por "convención" para admitir la validez de las respuestas al determinar el alumno representativo.

En el proyecto P2, al simular el lanzamiento de los dados los estudiantes deben seguir las reglas de juego; se utilizan dos dados por pareja, cada jugador debe lanzar los dos dados simultáneamente, se deben anotar los resultados de las sumas obtenidas y, se propone jugar 10 veces. Esta es una norma epistémica inherente al problema propuesto y seguramente será comprendida tenida en cuenta por la mayoría de los estudiantes en la realización del experimento. Sin embargo, ante eventuales dificultades el profesor deberá intervenir oportunamente para recordar las reglas.

En el proyecto P3, se pone de manifiesto una norma meta-epistémica. La respuesta a la pregunta, "¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase"?, requiere aplicar las normas epistémicas de la estadística. Cuando esta cuestión se aborda en niveles más avanzados (últimos cursos de educación secundaria obligatoria) rige otra norma: "las diferencias entre distribuciones se comprueban mediante técnicas descriptivas y son referidas a las muestras usadas, no a las poblaciones de donde provienen". Esta "debilidad" subjetiva en cuanto a la importancia relativa de las diferencias estadísticas también afecta a las técnicas inferenciales donde es necesario adoptar un nivel de significación en los contrastes de hipótesis que depende de factores contextuales, en cierto modo, subjetivos.

Una norma meta-instruccional a tener en cuenta en los tres proyectos es: La norma instruccional, "El análisis de datos debe realizarse usando recursos tecnológicos de cálculo y representación gráfica", debe ser complementada con esta otra: "El uso de recursos tecnológicos debe evitar el fenómeno de deslizamiento metadidáctico (Brousseau, 1998) (en este caso, sería aprender la tecnología, en lugar de desarrollar competencia estadística)".

7. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En las dos fases metodológicas del diseño el EOS proporciona herramientas originales que amplían las posibilidades de análisis de otros marcos teóricos. En la fase de estudio preliminar las dimensiones y componentes de la idoneidad didáctica orientan un análisis sistémico de la literatura, y la vez permiten delimitar e interpretar dichos resultados para la posterior etapa de diseño. En la dimensión epistémica, la noción de significado de referencia da una orientación específica a la epistemología del contenido cuyo aprendizaje se pretende. Ello es así por la manera pragmatista - antropológica en que se interpreta el significado institucional de los objetos matemáticos.

En la fase de diseño, una vez seleccionada una muestra representativa de situaciones-problemas, este marco teórico nos propone prever de manera sistemática la trama de objetos y procesos que la resolución de tales situaciones pone en juego, a fin de identificar posibles conflictos de aprendizaje y los elementos a tener en cuenta en los procesos de institucionalización y evaluación. El análisis de las normas ayuda a identificar elementos que condicionan el proceso de estudio, y por tanto permite anticipar actuaciones del profesor y los alumnos a fin de gestionar convenientemente la enseñanza y el aprendizaje.

Como conclusión, consideramos que las nociones teóricas puestas en juego resultan eficaces para comprender y organizar procesos de enseñanza y aprendizaje de estadística en procesos de formación de profesores y que podrían ser extrapoladas a otros niveles y áreas de la matemática. Así mismo, consideramos que cada una de las acciones emprendidas en la realización de este diseño, resultan necesarias para una programación idónea de un proceso de instrucción. La identificación de los componentes del programa al cual se adscribe un diseño, actúan como un "marco regulador" que debe ser tenido en cuenta por toda investigación que se realiza en un ambiente naturalista. El estudio preliminar, permite identificar y comprender exigencias externas de resultados de investigaciones, marcos conceptuales y propuestas curriculares que sirven de base para la selección de "tareas", la metodología didáctica; los recursos materiales y los procedimientos evaluativos que se incluirán en el diseño. El análisis de la "solución esperada", resulta imprescindible para anticipar posibles estrategias que seguirán los estudiantes y para la posterior identificación (en el análisis a priori del diseño) de los objetos y procesos que se ponen en juego en la realización de cada problema. El análisis a priori del diseño, permite el reconocimiento de objetos y procesos, anticipando posibles conflictos y los modos interacción para gestionar el trabajo en el aula. Finalmente, el análisis de las normas aporta información necesaria para "reglar" las actuaciones del profesor y los estudiantes en relación con el saber a enseñar.

CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO DE ESTUDIO IMPLEMENTADO

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo describimos y analizamos la *implementación* del proceso de estudio y, realizamos el *análisis retrospectivo* del diseño.

Para describir y analizar la implementación, aplicamos las nociones de *configuración, subconfiguración* y *trayectoria didáctica*, las cuales permiten realizar análisis detallados del progresivo despliegue de los significados institucionales implementados, de los aprendizajes y de su dependencia de los formatos de interacción que efectivamente tienen lugar, así como del uso de los recursos y del tiempo asignado. En este tipo de análisis el foco de atención es la descripción del contenido efectivamente tratado, de los patrones de interacción docente-discentes, el reconocimiento de conflictos (cognitivos, interaccionales y mediacionales) que tienen lugar y sobre cómo son abordados por el docente y los propios estudiantes. Ello dará cuenta de la gestión de los conocimientos efectivamente "puestos en juego" y de la progresión de los aprendizajes. El fin último de esta descripción, es la clasificación e interpretación de "hechos didácticos significativos" (HDS) que interesa analizar de acuerdo a los objetivos de la investigación.

El análisis anterior requiere haber trascrito previamente la crónica de las clases, identificando HDS que representen con fidelidad la trayectoria didáctica generada. En el anexo D, de este trabajo, presentamos un conjunto de unidades de análisis que constituyen HDS a partir de las cuales se realiza esta descripción.

Respecto al análisis retrospectivo, comenzamos con el *análisis a posteriori* de cada proyecto. Se trata de un contraste de las "suposiciones" planteadas en el *análisis a priori* con las contingencias observadas durante la implementación, teniendo en cuenta para ello las nociones de *prácticas, objetos y procesos*. Este análisis, recoge también los principales conflictos que han tenido lugar. El análisis retrospectivo se completa con algunas reflexiones sobre la *dimensión normativa,* y con una valoración global de la *idoneidad didáctica* del proceso de estudio implementado. Esto último, se realiza teniendo en cuenta de manera general los criterios propuestos en la GVID-PFE y tiene como finalidad la identificación de “puntos de mejora” para la implementación de nuevos ciclos del proceso de ingeniería.

Este capítulo está estructurado de la siguiente forma. En el apartado 2, se incluye una descripción narrativa de la trayectoria didáctica basada en el conjunto de HDS contenidos en el anexo D, los cuales son interpretados según las dimensiones de la idoneidad didáctica; el apartado 3, contiene la evaluación de los aprendizajes logrados según los informes de los proyectos y de la prueba evaluativa final; en el apartado 4, se incluye el análisis retrospectivo; en el apartado 5, se realiza la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio en general (diseño e implementación) puntualizando posibles mejoras para la implementación de nuevos ciclos; finalmente, en el apartado 6, se incluye una síntesis con las principales conclusiones del capítulo.

2. DESCRIPCIÓN DE LA TRAYECTORIA DIDÁCTICA IMPLEMENTADA

La trayectoria didáctica del proceso de estudio implementado la describimos distinguiendo las tres configuraciones didácticas referidas al estudio de cada uno de los proyectos: “Alumno típico” (proyecto P1), “Lanzamiento de dos dados” (proyecto P2) y “Eficacia de un entrenamiento deportivo” (proyecto P3). Como se ha explicado en el diseño (capítulo 5) estas configuraciones didácticas fueron complementadas en los momentos de institucionalización por una colección de diapositivas, y en los momentos de autoestudio por el texto Batanero y Godino (2003). Los estudiantes también disponían de una colección de ejercicios resueltos y espacios temporales programados de tutorías, bien individuales o grupales, las cuales fueron escasamente utilizadas.

En la descripción de cada proyecto se tiene en cuenta:

- El contenido efectivamente tratado (configuración epistémica implementada).
- Los medios usados y la forma de interactuar el docente con los estudiantes (configuración instruccional).
- Conflictos de aprendizaje y modo de ser abordados.

Tras la descripción de cada proyecto se sistematizan los principales HDS observados, los que son finalmente sintetizados para dar una visión de conjunto del efecto de las subtrayectorias epistémica e instruccional sobre la progresión del aprendizaje.

En la descripción se utilizan indistintamente las palabras “conflicto” y “dificultad[1]” para aludir tanto a disparidades entre los significados atribuidos a una expresión (conflicto semiótico), como para referir al “dominio deficiente” de una técnica o propiedad matemática (o estadística).

En Godino, Batanero y Font (2009) se caracteriza la idea de conflicto semiótico como:

> “cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales” (p. 15).

2.1. **Configuración didáctica generada mediante el proyecto “Alumno típico”**

Este proyecto fue implementado en dos sesiones de clase de “teoría” (en gran grupo) y una sesión de práctica (seminario de prácticas). En las sesiones de gran grupo el profesor presentó los temas facilitando la comprensión de los contenidos teóricos, guiando las reflexiones y moderando instancias de debates. Se dieron también oportunidades para que los estudiantes resolvieran tareas matemáticas como una forma de introducir y ejemplificar los contenidos tratados.

En la sesión de práctica, el grupo completo de estudiantes se dividió en tres subgrupos que trabajaron las mismas actividades en horarios diferentes. En su ejecución, se

[1] En la RAE se define la palabra *dificultad* como un inconveniente o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender bien algo y pronto.

incorporó la hoja de cálculo Excel como herramienta para potenciar el aprendizaje de los contenidos tratados.

La práctica descrita corresponde a las observaciones recogidas en solo una de las tres sesiones; no obstante, da cuenta de la trayectoria didáctica que se desprende de una tarea común a los diferentes grupos.

2.1.1 Sesión de clase 1 (dos horas)

Una vez expuestos los objetivos del tema el profesor presenta el proyecto de recogida y análisis de datos que va a usar para contextualizar las principales nociones y técnicas estadísticas. En su intervención junto con clarificar aspectos propios del proyecto y de la metodología de trabajo recuerda algunos conceptos y técnicas estadísticas básicos como son: variable, variable estadística, dato, encuesta, análisis de datos, variable cualitativa, variable cualitativa ordinal, variable cuantitativa y, variable cuantitativa discreta y continua. Transcurridos nueve minutos de clase el profesor interroga a los estudiantes acerca de otras variables que pudieran ser consideradas en el marco de este proyecto. Las respuestas de los alumnos ponen de manifiesto que no tienen mayores dificultades para identificar nuevas variables ante lo cual, el profesor valida sus intervenciones. Algunas de las variables propuestas por los estudiantes se encuentran recogidas en el HDS 1.2 (anexo D).

La clase continúa con la entrega de indicaciones para la aplicación de la encuesta dentro del curso. El profesor da a los estudiantes una hoja de recogida de datos y les pide que completen la información solicitada en cada variable: “género”, “deporte”, “número de hermanos”, “peso”, y “dinero”. Los estudiantes deben realizar la actividad escribiendo en una misma fila los datos para cada variable. Un vez que el primer estudiante haya completado la hoja con sus propios datos, la deberá pasar al segundo; éste al tercero y así sucesivamente. Los estudiantes trabajan en la aplicación de la encuesta durante algunos minutos, hasta que el profesor pide no continuar con el desarrollo de la actividad. El docente explica que el trabajo, como se está realizando, presenta dos inconvenientes: el tiempo insuficiente para realizar la actividad durante la clase y la necesidad de fotocopiar los datos. En razón a esto, se proporciona la encuesta con 60 valores de cada variable recogidos en el curso anterior. Con los datos provistos se pide a los estudiantes que, organizados en parejas, continúen el trabajo centrándose en responder las preguntas: “¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?”, y “¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?” A partir de este momento (minuto 16) y por un espacio de aproximadamente 15 minutos los estudiantes trabajan intentando dar respuesta a las cuestiones planteadas. Durante el desarrollo de la actividad el profesor fue guiando el trabajo de los grupos a través de preguntas, entregando orientaciones, y resolviendo dudas específicas. Esto último, se convirtió en el principal foco de atención para el profesor ya que, se manifestaron diversos conflictos cognitivos en el aprendizaje de los contenidos matemático-estadísticos involucrados en la resolución de la tarea. Algunos de estos conflictos fueron:

- Dificultad para comprender el significado de “alumno típico”. Un ejemplo en el que se produce esta dificultad se muestra en el HDS 1.5 (anexo D) donde los estudiantes preguntan al profesor cómo elegir al estudiante representativo. El profesor resuelve este conflicto explicando la forma de obtener el alumno típico en las variables, género y deporte (uso de la moda).
- ¿Uso de la media (2.75) o la moda (2) para identificar el alumno típico en la variable número de hermanos? En algunos casos el profesor devuelve el problema a los estudiantes sin profundizar en dicha diferencia.
- Aplicación de la media en lugar de la mediana para establecer el alumno típico en la variable número de hermanos (distribución asimétrica). Frente a algunos grupos, el profesor no hace referencia “in situ” al uso de la mediana o la media según la forma de la distribución, aceptando el uso de la media.
- Dificultad para determinar el sujeto típico en la variable número de hermanos a través de la media. Algunos equipos en lugar de aplicar directamente su valor (2.75) intentan hacer una aproximación a un valor exacto de la variable (dos o tres). Hay casos en que el profesor no focaliza en la dificultad de los alumnos, sino que desvía su atención hacia el uso de la moda, cuyo valor es dos.
- Uso de una estrategia de “conteo” para determinar el alumno típico en lugar de resumir estadísticamente los datos. El profesor incentiva el uso de tablas de frecuencias.
- Dificultad en la comprensión del significado de “representatividad de un alumno típico”. No se establecen significados claros de este contenido frente a algunos grupos.

- Dificultad con el uso de intervalos en la construcción de tablas de frecuencias para variables continuas. En el HDS 1.10 se muestra un ejemplo en el que se recoge este conflicto (figura D.1, anexo D).

Concluida la fase de trabajo grupal el profesor se dirige a toda la clase y enfatiza en el uso de tablas de frecuencias para resumir y comunicar datos, puntualizando en la respuesta esperada para a la “cuestión 1” en la variable género.

Posteriormente, se realiza una puesta en común de las respuestas obtenidas en el trabajo de grupo en la cuestión 1. Para ello, se pide a algunos estudiantes exponer sus resultados y se discuten las soluciones con los demás integrantes del curso. En la intervención del primer grupo, se manifiesta un conflicto con el uso de títulos y etiquetas de tablas de frecuencias; concretamente, no se incluye el título de las tablas ni la etiqueta en la columna de valores y se ha escrito equivocadamente el nombre de las variables como título de la columna de las frecuencias. Esta situación que ha sido reconocida por diversos autores (Arteaga, 2011; Díaz et al., 2008; Espinel, 2007) se encuentra recogida en el HDS 1.12 (figura D.2, anexo D). Para resolver este conflicto, el profesor puntualiza los errores cometidos e interroga a los demás estudiantes acerca de cómo mejorar las tablas. Un estudiante señala correctamente el título que debe llevar la columna de frecuencias pero, respecto al título de las tablas y de la columna de valores no se señalan respuestas correctas, ante lo cual, es el profesor quien realiza las correcciones. Seguidamente, el profesor pregunta a la representante del grupo “¿Cuál es la persona más representativa en la variable género?” La estudiante responde correctamente justificando mediante la moda, ante lo cual, el profesor valida su respuesta. Luego, continúa explicando la forma de determinar el alumno típico en las variables, deporte y número de hermanos. En ambos casos enfatiza en la construcción de tablas de frecuencias y la determinación del alumno típico mediante el uso de la moda, sin hacer referencia a la mediana como el valor más apropiado para determinar el alumno típico en la variable número de hermanos. Se continúa con la presentación y análisis de la respuesta del segundo grupo para la variable peso. La representante del grupo señala que han calculado la media para determinar el alumno típico, pero no especifica cómo han interpretado dicho valor para responder la pregunta (la media es 61.45 y no corresponde exactamente a ningún valor de la variable). El profesor interviene para advertir en el uso de la media como una forma de determinar el alumno típico en este tipo de variables (variable cuantitativa) y luego, se centra en establecer la diferencia entre el significado de la media como regla de cálculo y como el valor representativo de una colección de datos. Al cabo de esta explicación, un estudiante pregunta si es posible utilizar la media en la variable, número de hermanos. El profesor responde afirmativamente señalando que se trata de una variable cuantitativa; clarifica además, que en este caso el valor obtenido (2.75) no corresponde a ningún valor de la variable, pero que igualmente puede ser utilizado.

En la interacción anterior, el profesor no hace referencia al uso de la media en lugar de la mediana en ninguna de las dos variables (peso y número de hermanos) donde ambas distribuciones resultan asimétricas. Tampoco profundiza en la interpretación de la media para determinar el alumno típico, cuando esta no corresponde a un valor de la variable.

Concluido el episodio anterior, el profesor interroga a los estudiantes acerca de si se puede aplicar la media para determinar el alumno típico en la variable deporte. Las respuestas de los estudiantes dejan entrever que no todos comprenden que dicho valor no es aplicable a este tipo de variables (variable ordinal). Para resolver este conflicto, el profesor plantea la siguiente pregunta "¿Se pueden sumar los valores poco, mucho, nada?" Un estudiante responde que, en lugar de los valores, se podrían escribir los números uno, dos y tres. El profesor aclara que como la variable es ordinal no se puede operar con dichos códigos y plantea una nueva pregunta ¿Se puede utilizar la media para la variable género? En este caso un estudiante responde señalando correctamente que no se puede aplicar.

A partir de lo anterior, el profesor explica el uso de los promedios según el tipo de variables, puntualizando que la moda es el promedio indicado para variables cualitativas y que la media solo puede ser utilizada en variables cuantitativas. Especifica también, que la mediana puede ser aplicada en variables cuantitativas y ordinales.

La clase continúa con el análisis de la respuesta esperada a la cuestión 1 para la variable peso; concretamente, se discute la construcción de la tabla de frecuencias de esta variable. El análisis comienza con una pregunta por parte del profesor enfocada a indagar la forma en que los grupos han construido la tabla de frecuencias; la respuesta de uno de los grupos, pone en evidencia un conflicto con el uso de intervalos, ya que, manifiestan no haber terminado de escribir todos los valores porque "son muchos". Frente a este conflicto, el profesor explica que es necesario hacer un agrupamiento de los datos en intervalos de clase y pide a un nuevo grupo explicar lo realizado. La tabla de frecuencias mostrada por este grupo ha sido construida considerando intervalos de 10 en 10 y se han determinado correctamente las frecuencias en cada intervalo; sin embargo, no se usa la notación convencional para determinar el tipo de intervalos como se observa en el HDS 1.20 (figura D.3, anexo D). Esta situación, es discutida y aclarada a partir de una pregunta planteada por un estudiante que no sabe dónde ubicar el peso 50 kg, si en el primero o segundo intervalo.

Después de la puesta en común descrita anteriormente, se continúa con el trabajo de los grupos. Esta vez, se manifiestan dos nuevos conflictos; el primero, es la persistencia en el uso de la fórmula en lugar de la calculadora para obtener la media de datos agrupados y el segundo, la dificultad para interpretar y responder la pregunta, "¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?". Los estudiantes no comprenden que es necesario dividir los datos en "chicos y chicas", y compararlos a través de estadísticos y/o representaciones gráficas. Frente al primer conflicto, el profesor clarifica la diferencia entre obtener la media a través de la fórmula y la calculadora en datos agrupados, justificando la incorporación de la calculadora como un medio de cálculo más exacto. En su intervención, alude además, al sentido de resumir los datos de variables continuas en tablas de frecuencias como un procedimiento previo para la construcción de gráficos. Frente al segundo conflicto, el profesor explica la necesidad de dividir la muestra en dos submuestras (chicos y chicas) y sugiere el uso de los promedios (media, mediana o moda) como técnicas estadísticas que se podrían utilizar para responder la cuestión.

La clase continúa con la presentación de la solución esperada a la cuestión 1 para las tres primeras variables (género, deporte y número de hermanos) y la sistematización de algunos contenidos. La explicación comienza con la presentación de las tablas de frecuencias (absolutas y relativas) de las variables género y deporte (tablas D.1 y D.2, anexo D), a partir de lo cual se explica la forma de determinar el alumno típico en estas dos variables (uso de la moda). Luego, se muestra un gráfico de barras de frecuencias absolutas (figura D.5, anexo D) y un gráfico circular con las frecuencias relativas para toda la clase (figura D.6, anexo D) de la variable deporte. En relación al primer gráfico se explican algunos de sus elementos (representación correcta de valores y frecuencias) y respecto al segundo, se alude a su utilidad para representar este tipo de datos.

Se sigue con la presentación de la tabla de frecuencias, el gráfico de barras y los principales estadísticos para la variable número de hermanos (tabla D.3, figura D.7 y tabla D.4; anexo D). Con respecto a la tabla de frecuencias y el gráfico de barras se alude a su lectura e interpretación mencionándose la moda como el valor que podría ser utilizado para determinar el alumno representativo, cuando en realidad se debería aplicar la media (la moda está especialmente indicada para variables cualitativas). En cuanto a los estadísticos, se realizan algunas explicaciones sobre el procedimiento de cálculo de alguno de ellos (media y recorrido) y se enfatiza en la interpretación y utilidad del recorrido como una medida que permite apreciar la mayor o menor dispersión de los datos. En sus explicaciones, el profesor no alude a la forma de la distribución que se observa en el gráfico de barras de la variable número de hermanos (distribución asimétrica), la cual sugiere el uso de la mediana en lugar de la media. Tampoco hace referencia a la posibilidad de utilizar indistintamente la moda o la mediana en la variable deporte (variable ordinal).

Después de esta intervención, el profesor plantea verbalmente una tarea en la que se debe aplicar el rango como indicador de dispersión. La tarea consiste en determinar quiénes son más dispersos, los chicos o las chicas en la variable número de hermanos. Al inicio de esta actividad se manifiestan dificultades para calcular e interpretar el recorrido y algunos estudiantes no tienen claridad que dicho valor solo es aplicable a variables cuantitativas. Frente a estos conflictos el profesor refuerza el procedimiento de cálculo del recorrido, precisando que este valor solo es aplicable a variables cuantitativas. Esta actividad se extiende durante aproximadamente 10 minutos sin que se manifiesten nuevas dificultades y concluye con la presentación de la solución esperada por parte del profesor.

2.1.2. Sesión de clase 2 (una hora)

La clase comienza con una fase introductoria en la que se menciona la actividad a realizar (continuidad del proyecto, Alumno típico), se enfatiza la importancia del trabajo mediante proyectos como una forma de contextualizar y justificar el uso de los contenidos estadísticos, y se alude a la importancia de definir adecuadamente las variables y preguntas al momento de diseñar un proyecto. Una vez planteados estos elementos introductorios, se dan a conocer las técnicas estadísticas que se deben emplear para resolver la cuestión "¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?" La información entregada alude a la necesidad de hacer tablas de frecuencias, construir gráficos para ver la forma de distribución de los datos y calcular promedios para poder comparar. Respecto a los promedios (media, mediana y moda), se clarifica además su uso según el tipo de variables. Seguidamente, el profesor recuerda la definición, el procedimiento de cálculo y las principales características de la media, la mediana y la moda; en el caso de la media, se explica además su fórmula. Respecto a esto último, primero explica el significado de cada símbolo y luego, descompone la fórmula original para facilitar su comprensión, Este proceso de descomposición se encuentra reflejado en el HDS 2.1 (figura D.8, anexo D).

La clase continúa con el planteamiento de la siguiente tarea: "Hallar la media y mediana para las variables peso, y dinero del grupo de los hombres" (se sugiere el uso de la calculadora para determinar la media aritmética). Para resolver la tarea los estudiantes trabajan en equipos de dos o tres integrantes; el profesor apoya el trabajo de los grupos monitoreando sus avances, entregando información o dando "pequeñas pistas" sobre la solución esperada en algunos casos. En el desarrollo de la actividad se manifiestan conflictos relacionados con el procedimiento de cálculo de la mediana y media. En el cálculo de la mediana, hay estudiantes que tienen dificultades con el manejo de los valores con frecuencia mayor a uno y hay un grupo, que en lugar de aplicar correctamente el procedimiento de cálculo, determinan el rango y lo divide entre dos. En el primer caso, el profesor clarifica que los valores con frecuencia mayor a uno deben escribirse tantas veces como aparezcan y en el segundo, recuerda el significado y el procedimiento de cálculo que fue presentado al inicio de la clase. Con respecto a la media, la dificultad observada es la persistencia en aplicar el procedimiento de cálculo con las marcas de clase y las respectivas frecuencias, lo cual da un valor aproximado. Para resolver este conflicto el profesor justifica el uso de la calculadora, aclarando que en las variables continuas como peso y dinero, si se aplica el procedimiento con las marcas de clase como representantes de los valores de los intervalos, se pierde información.

Después de aproximadamente 15 minutos de trabajo grupal, se discuten con todo el curso los resultados obtenidos por uno de los grupos en la variable peso. El profesor pide a una estudiante del grupo que dé a conocer las respuestas y luego, se contrastan con las obtenidas por los demás estudiantes. Los valores presentados, tanto en la media como en la mediana, son correctos y aceptados por la mayoría de los alumnos. Seguidamente, el profesor plantea la pregunta "¿Cuál de estos valores será el valor más representativo?" Solo una estudiante responde equívocamente que debería ser la media, quedando en evidencia que no se ha comprendido de manera suficiente el uso de la media o la mediana según la forma de distribución de los datos. Ante este conflicto, el profesor explica que la respuesta depende de la forma de la distribución y que en el caso de la variable peso, resulta más apropiada la mediana ya que la forma de la distribución es bastante asimétrica.

Posteriormente, el profesor retoma la sistematización de contenidos puntualizando, en las técnicas estadísticas requeridas para responder las cuestiones 1 y 2 en las variables peso y dinero. Al comienzo de la exposición se alude a las características de la dispersión y se analizan el uso del recorrido y la desviación típica como indicadores para medirla. Respecto al recorrido, se refuerza su significado como la diferencia entre el mayor y el menor valor de una variable estadística, y se alude a sus desventajas frente a la desviación típica al intervenir solo dos valores en su cálculo (el mínimo y el máximo). En cuanto a la desviación típica, se da a conocer su fórmula y se explica detalladamente su significado y el procedimiento de cálculo. A partir de esto, se propone calcular el recorrido de las variables, número de hermanos, peso y dinero; y la desviación típica, de las variables peso y dinero. Sin embargo, esta tarea no se realiza por razones de tiempo.

Se continúa con una explicación general sobre representaciones gráficas de distribuciones de frecuencias; específicamente, se hace referencia al diagrama de barras para representar variables discretas y al histograma, como el gráfico adecuado para representar variables continuas. Con respecto al histograma, se explica también el uso de intervalos para representar las variables continuas. Luego se analizan dos gráficos relacionados con la variable peso: un histograma de frecuencias para toda la muestra y un histograma de frecuencias relativas contrapuestas comparando chicos y chicas. En cuanto al primer gráfico (figura D.9, anexo D), se señalan elementos de su construcción (intervalos y frecuencias) y se explica la forma de la distribución de los datos; precisándose, que se trata de una distribución asimétrica y que por tanto, la mediana es más representativa que la media. A partir de esta explicación, surge la siguiente pregunta de un estudiante "¿La mediana es más representativa cuando hay un valor atípico?" La respuesta del profesor se centra en justificar su uso en distribuciones asimétricas, sin hacer referencia a que es también preferible cuando hay valores atípicos o "alejados" de la posición central. Durante su explicación, el profesor no precisa las características del alumno típico en esta variable (variable peso) ni alude al carácter ideal de la mediana, la cual no necesariamente debe coincidir con un valor exacto de la variable, como ha sucedido en este caso[2]. Con relación al histograma de frecuencias relativas contrapuestas (figura D.10, anexo D), se explican algunos de sus elementos (representación de las muestras y frecuencias) y se analiza su lectura e interpretación; puntualizándose que la distribución de las chicas está más hacia la izquierda que la de los chicos lo que refleja que, en promedio, los chicos pesan más que las chicas. También se menciona que los chicos están más dispersos.

La exposición sigue con la presentación y análisis de diversos gráficos relativos a la variable dinero. El primer gráfico, es un histograma de frecuencias para toda la muestra (figura D.11, anexo D). Respecto a esta gráfica, se explica la forma de la distribución de los datos (distribución asimétrica) y se enfatiza en el uso de la mediana como valor estadístico representativo; sin embargo, al igual que en el análisis de la variable peso, no se especifican las características de un alumno típico ni se alude al carácter ideal de la mediana[3]. El segundo gráfico que se presenta, corresponde a un histograma de barras contrapuestas donde se compara la distribución de frecuencias de chicos y chicas (figura D.12, anexo D). Respecto a este gráfico no se profundiza en su lectura e interpretación, aludiéndose a que es análoga a la realizada para la variable peso. En el tercer gráfico, se muestra un histograma de frecuencias acumuladas para toda la muestra (figura D.13, anexo D). El profesor explica cómo se representan las frecuencias acumuladas en este gráfico y luego, plantea la pregunta "¿Qué porcentaje de estudiantes llevaban 40 o menos euros en el bolsillo?" Un estudiante responde que es el 95%, ante lo cual, el profesor valida su respuesta. El cuarto gráfico, es un polígono de frecuencias relativas para toda la muestra (figura D.14, anexo D). Sobre este gráfico, se explican elementos de su construcción sin hacer referencias a su lectura e interpretación. El último gráfico, corresponde a un polígono de frecuencias acumuladas para toda la muestra (figura D.15, anexo D). En este caso, el profesor explica la lectura e interpretación del gráfico a partir de la pregunta "¿Cuánto dinero lleva en el bolsillo el 25% de los alumnos con menos dinero?" introduciendo también el concepto de percentil del 25%. Luego, hace referencia a los percentiles del 50% y del 75%, complementando su explicación con un ejemplo sobre la aplicación de estos contenidos en el ámbito de la salud.

Se continúa con el análisis de dos gráficos de caja de la variable peso. En el primero, se resumen los datos de toda la muestra y en el segundo, se comparan las distribuciones de

[2] La mediana de la variable "peso" es 60 y corresponde exactamente a un valor de la variable.
[3] La mediana de la variable "dinero" es 6 y al igual que en la variable "peso" coincide exactamente con un valor de la variable.

frecuencias del peso de los chicos y las chicas. Con respecto al primer gráfico (figura D.16, anexo D), se explican los estadísticos que se representan (media, mediana, cuartiles, recorrido intercuartílico, máximo y mínimo, recorrido, valores atípicos) y se discute su lectura e interpretación. En cuanto a la lectura, se enfatiza en la forma de la distribución (distribución asimétrica) y en la presencia de valores atípicos. Durante el análisis de este gráfico, el profesor pide a los estudiantes que identifiquen los valores mínimo y máximo de la distribución. La respuesta de un alumno, deja de manifiesto una dificultad en la identificación del valor máximo, el cual es confundido con el valor que se ubica en el bigote derecho de la caja. Frente a este conflicto, el profesor corrige el error dando a conocer el valor máximo y su ubicación dentro del gráfico. En cuanto al segundo gráfico (figura D.17, anexo D), se realiza una explicación general sobre la comparación del peso de hombres y mujeres; puntualmente, se menciona que los hombres pesan más ya que la distribución de su peso está más a la derecha.

La exposición continúa con la presentación de dos gráficos de caja para la variable dinero. Al igual que en el caso anterior, en el primer gráfico se muestra la distribución de los datos para toda la muestra (figura D.18, anexo D) y en el segundo, una comparación de las distribuciones de frecuencias de los chicos y chicas (figura D.19, anexo D). En este caso, solo se realizan explicaciones en torno al primer gráfico, aludiendo a la forma de la distribución de los datos (distribución asimétrica) y a la presencia de valores atípicos.

Algunos contenidos fundamentales para responder las cuestiones 1 y 2 que no fueron profundizados de manera suficiente durante la sistematización de contenidos descrita fueron:

- Grado de representatividad de los promedios dependiendo de la mayor o menor dispersión de los datos.
- Carácter ideal de los promedios (los que no tienen necesariamente que corresponder a un dato de la variable) y su uso como representante de una colección de datos.
- Preferencia del uso de la mediana o la media en lugar de la moda para determinar el alumno típico en variables cuantitativas.

Después del análisis de los gráficos anteriores se realiza la presentación de un video, disponible en Internet, en el que se muestra un gráfico de dispersión de la relación entre el ingreso por persona y la esperanza de vida para los principales países del mundo;

mostrando además, su tamaño y evolución a lo largo de 200 años. A partir de este video, el profesor interroga a los estudiantes acerca de la lectura e interpretación del gráfico e institucionaliza los contenidos relativos al gráfico de dispersión.

La clase concluye con algunas indicaciones sobre instancias de estudio complementario y de profundización; específicamente, se alude al texto de referencia del curso y a ejercicios complementarios disponibles en el tablón virtual de docencia.

2.1.3. Sesión de clase 3 (una hora y media de seminario de prácticas)

El objetivo de esta práctica es resolver el proyecto P1 mediante la hoja de cálculo Excel. Se espera que los estudiantes utilicen esta herramienta para realizar cálculos estadísticos, elaborar tablas de frecuencias y construir representaciones gráficas. La práctica comienza con la conformación de grupos de trabajo de tres o cuatro estudiantes en base a un criterio de heterogeneidad en el dominio de habilidades en uso del programa. Se continúa con la descarga del fichero del proyecto y con la entrega de indicaciones sobre la práctica a realizar. Luego, se explica "paso a paso" la forma de copiar la información de la matriz de datos desde el archivo de Word a la hoja de cálculo Excel. En este momento, se recuerda también que para responder la pregunta "¿Cuáles son las características de un alumno típico o representativo de la clase?", se deben calcular los promedios y la dispersión de los datos. Seguidamente, se dan algunas explicaciones sobre el manejo de la hoja de cálculo; concretamente, se clarifican conceptos básicos del programa (celda, fila, columna, rango de datos), se explica el uso de la herramienta *función* para realizar cálculos y se da a conocer el modo de copiar una fórmula.

La práctica continúa con el trabajo de grupo. En esta fase, el profesor guía las actuaciones de los estudiantes evaluando y retroalimentando permanentemente sus aprendizajes y aclarando las dudas que se les presentan. Un ejemplo de las intervenciones evaluativas realizadas por el profesor se encuentran contenidas en el HDS 3.6. Durante el desarrollo de la actividad se manifiestan dificultades relacionadas con el aprendizaje de contenidos matemáticos-estadísticos, con el uso de los recursos tecnológicos y, en algunos casos, con la forma de resolver dichos conflictos. A continuación, se describen algunos de estos conflictos y la forma en que fueron abordados por el profesor.

- Hay estudiantes que establecen mal el rango al utilizar la herramienta función de la hoja de cálculo; concretamente, lo que se observa es que no comprenden el significado del uso de "dos puntos" para establecer el rango ni tampoco la técnica de "arrastrar el cursor" para seleccionar los datos. Para resolver este conflicto, en la mayoría de los casos, el profesor explica la forma correcta de usar la herramienta y pide a los estudiantes que apliquen nuevamente la fórmula.
- Imposibilidad de interpretar los promedios (media y mediana) para responder la cuestión "¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?"; en el HDS 3.4 se recoge el caso de un grupo que ha calculado correctamente la media y la mediana para las cinco variables pero, al responder la pregunta, consultan al profesor si deben contar para elegir al alumno representativo; es decir, en lugar de interpretar los estadísticos obtenidos intentan utilizar la moda. En su respuesta, el profesor induce al uso de los promedios y da a conocer la solución para las variables peso y dinero; especificando, que en el caso de la variable peso, se trata de un estudiante que pesa 61 Kg. y en la variable dinero, de alguien que lleva 10 euros en el bolsillo. En su explicación, el profesor no alude al criterio de aproximación del promedio obtenido (el promedio del peso es 61.45 y del dinero 10.53) al valor efectivamente representado en los datos y tampoco hace referencia a que en ambas variables resulta más apropiada la mediana que la media de acuerdo a la forma de la distribución de los datos (distribuciones asimétricas).
- Dificultad para logra establecer el grado de representatividad de los promedios con respecto al mayor o menor grado de dispersión de los datos. Frente a la cuestión "¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?" un número importante de estudiantes después de calcular correctamente los promedios (media y mediana) y la desviación típica para cada variable, preguntan al profesor lo que deben hacer con dichos valores. En sus intervenciones, hay casos en que el profesor no aclara las dudas de los estudiantes sino que intenta que propongan por si mismos alguna solución (un ejemplo se observa en el HDS 3.11, anexo D).
- El uso de la fórmula para calcular la desviación típica y la media de datos agrupados, en lugar de obtener estos valores automáticamente mediante la herramienta función, es otra dificultad manifestada. Para resolver este conflicto,

el profesor aclara que no es necesario utilizar la fórmula e incentiva el uso de la herramienta para realizar los cálculos.

- Dificultad con el cálculo de las frecuencias relativas. En uno de los grupos, dividen los datos de cada celda donde se encuentran las frecuencias por sí misma, en lugar de dividir cada frecuencia por el total (figura D.20, anexo D); en otro, no logran expresar las frecuencias relativas en porcentaje (figura D.21, anexo D) y en un tercer grupo, se obtienen valores erróneos en las frecuencias relativas habiéndose aplicado dos formas distintas de obtenerla (figura D.22, anexo D). En el primer caso, el profesor hace visible el error a los estudiantes y les explica directamente la fórmula; en los otros dos, no se tiene registro de la forma en que fueron solucionados.

Después de la fase de trabajo de grupo, el profesor se dirige a toda la clase para explicar la forma de construir la tabla de frecuencias relativas de la variable deporte. En el momento que el profesor construye la tabla de frecuencias, interroga a los estudiantes acerca de la forma de calcular las frecuencias relativas, quedando en evidencia que dicho contenido no ha sido aún lo suficientemente comprendido. Frente a esta situación, el profesor explica detalladamente la forma de calcular la frecuencia relativa, expresarla en porcentaje y determinar el número de posiciones decimales que se desea utilizar.

Dada la explicación anterior, el profesor propone como tarea construir una tabla de frecuencias para el grupo de los chicos y otra para el grupo de las chicas de la variable deporte y un gráfico de barras en cada caso. A partir de este momento, se genera una nueva instancia de trabajo grupal asistida por el profesor. Durante el desarrollo de la actividad se manifiestan los siguientes conflictos relacionados con la construcción de gráficos: (1) selección inapropiada del rango (figura D.23, anexo D); (2) representación conjunta de las frecuencias absolutas y relativas; y (3) no se incluyen títulos ni etiquetas en los gráficos realizados. Para resolver estos conflictos, el profesor muestra los procedimientos apropiados en los dos primeros casos y en cuanto a los títulos y etiquetas de los gráficos, no hace referencia.

En la última parte de esta sesión se producen dos conflictos de interés; el primero, relacionado con la pregunta "¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?" y el otro, con la cuestión "¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?" El primer conflicto refiera a intentar establecer las diferencias comparando las frecuencias de cada valor, en lugar de usar la media o la mediana; el profesor aclara que se trata de hacer un juicio global empleando los valores calculados. En la segunda cuestión se repite la dificultad para interpretar los promedios y la desviación típica para determinar la representatividad del alumno típico. En este caso el profesor explica que la respuesta se debe dar interpretando la desviación típica; sin embargo, no aclara a partir de qué valor de la desviación típica un promedio es más o menos representativo.

La práctica concluye con una intervención del profesor en la que recuerda la fecha de entrega de los informes del proyecto.

2.1.4. Síntesis de hechos didácticos significativos del proyecto 1

A continuación presentamos una síntesis de los principales HDS observados en la implementación del proyecto P1. Estos hechos didácticos se encuentran clasificados de acuerdo a las facetas epistémica, cognitiva, interaccional y mediacional. En la faceta cognitiva la síntesis se centra en la identificación de conflictos; los aprendizajes, son analizados posteriormente en el apartado de evaluación de los aprendizajes logrados (apartado 3.3).

Tabla 5.1. Síntesis de hechos didácticos significativos del proyecto P1

FACETAS	HECHOS DIDÁCTICOS SIGNIFICATIVOS
Faceta epistémica (Objetos y procesos)	− El estudio estadístico se desarrolla centrado en el *proyecto de análisis de datos* Alumno típico; los estudiantes mencionan otros posibles proyectos que involucran otras variables estadísticas, pero no son abordados. − Las *representaciones de uso convencional* en estadística (tablas, gráficos, fórmulas y símbolos) son recordadas por el profesor y utilizadas por los estudiantes durante el desarrollo del proyecto. En la práctica (sesión 3) los estudiantes tienen también oportunidad de explorar las posibilidades que brindan las tecnologías (hoja de cálculo Excel) para construir tablas y gráficos. − Se realizan *procesos de traducción* entre distintas representaciones: representación de las características de los individuos como medidas (datos), representación de los datos en tablas y gráficos, y comunicación del significado que surge de los datos con lenguaje natural. − Los *conceptos y definiciones básicas* de la estadística son recordados por el profesor (población, muestra, encuesta, variable, variable discreta, variable continua, variable cualitativa ordinal, promedios: media, mediana, moda; mínimo, máximo, recorrido, dispersión, varianza, deviación típica, valor atípico, distribución de frecuencias, tabla de frecuencias, gráfico de barras, histograma, polígono de frecuencias, gráfico de dispersión, gráfico de cajas, …). − Los *procedimientos fundamentales* del tema de estudio (cálculo de promedios y dispersiones, construcción de tablas de frecuencias y gráficos) son empleados por los estudiantes para dar respuesta a las cuestiones planteadas; aunque, son pocas las posibilidades para la construcción de gráficos. − Las principales *propiedades* del tema de estudio son explicadas por el profesor a través de intervenciones puntuales y magistrales, p. e, el uso de la media o la mediana según la forma de la distribución y aplicación de los promedios según el tipo de variables. − El profesor menciona el proceso de *recogida de datos* mediante una encuesta; se

	procede a la recogida de datos en la clase. Pero finalmente, aduciendo falta de tiempo, se analizan 60 datos que corresponden a estudiantes de cursos anteriores. – Se realiza una actividad puntual (al concluir la sesión 2) en la que se presenta un gráfico de dispersión que muestra la *relación entre variables* (ingreso por persona y esperanza de vida). La actividad de los estudiantes se centra en identificar e interpretar las variables involucradas. – En la resolución del proyecto los estudiantes *establecen conclusiones* basadas en resúmenes estadísticos de los datos (promedios y desviación típica); sin embargo, son más escasas las oportunidades de realizar conclusiones a partir de representaciones gráficas. – Se promueve el *desarrollo de argumentos basados en datos* pidiendo a los estudiantes que justifiquen sus respuestas y también a través de las justificaciones dadas por el profesor. – La *lectura e interpretación* de información estadística presentada en diferentes representaciones (tablas y gráficos) es explicada por el profesor en sus intervenciones magistrales. Los estudiantes realizan también este proceso, pero sólo a través de una tarea puntual donde se pide interpretar un gráfico de dispersión.
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos cognitivos)	Se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos: – Significado de alumno típico. El profesor ejemplifica esta noción mediante el uso de la moda para las variables género y deporte. – ¿Uso de la media (2.75) o la moda (2) para determinar el alumno típico en la variable número de hermanos? El profesor no aclara la diferencia y valida el uso de cualquiera de los dos valores, aunque manifiesta que podría ser preferible un valor en lugar de otro. – Aplicación de la media en lugar de la mediana para determinar el alumno típico en las variables número de hermanos, peso y dinero (distribuciones de forma asimétrica). El profesor no aclara este contenido frente a algunos grupos; sin embargo, lo explica posteriormente en sus intervenciones magistrales. – Uso de una estrategia de conteo en lugar de una técnica estadística para determinar el alumno típico en la variable deporte. El profesor sugiere resumir los datos en una tabla de frecuencias. – Significado de representatividad de un alumno típico, no resuelto. – Grado de representatividad de los promedios de acuerdo a la mayor o menor dispersión de los datos (desviación típica). El profesor no profundiza en este contenido. – Aproximación de la media (2.75) en la variable número de hermanos ¿Qué valor tomar 2 ó 3? Conflicto cognitivo en la interpretación de la media mal resuelto por el profesor. Desvía la atención hacia la moda. – Etiquetado de tablas de frecuencias; no se incluye título en la columna de valores/atributos y en la columna de frecuencias se coloca como título el nombre de la variable. El profesor, con aportaciones de algunos estudiantes, plantea la forma correcta de etiquetar las tablas. – Elaboración de tablas de frecuencias para variables continuas; dificultad con el uso y notación de intervalos. El profesor aclara estos contenidos con intervenciones de estudiantes más “aventajados”. – Tratamiento de variables cualitativas; un estudiante propone el uso de códigos numéricos para representar valores cualitativos y hacer cálculos. El profesor, aclara que se debe trabajar con los valores tal como están representados. – Persistencia en el uso de la fórmula para calcular la media de datos agrupados en intervalos, aun cuando se dispone de medios de cálculos más exactos. El profesor justifica e incentiva el uso de la calculadora y la hoja de cálculo. – Cálculo de la mediana; hay estudiantes que tienen dificultades con el manejo de los valores de frecuencia mayor a uno. El profesor realiza aclaraciones puntuales y refuerza el cálculo la mediana en sus intervenciones magistrales. – Interpretación del valor máximo de una variable como el valor que se ubica en el bigote derecho del gráfico de caja (no se tienen en cuenta los valores atípicos). El profesor aclara la forma correcta de interpretar los valores representados en este

	tipo de gráficos.
Faceta interaccional (Procesos didácticos)	La metodología didáctica privilegia las actividades de trabajo de grupo y las intervenciones magistrales; no obstante, se producen algunas instancias de trabajo individual, pero en casos aislados. − En las fases de trabajo en equipo se ponen de manifiesto diversas dificultades; hay casos en los que el profesor sugiere directamente la solución, rebajando la demanda cognitiva inicial del proyecto. − En las actividades de grupo (o individuales) el profesor realiza de manera permanente intervenciones evaluativas “espontáneas”, a través de preguntas, como una forma de gestionar los aprendizajes. − En los procesos de institucionalización, distribuidos a lo largo del tiempo presencial, el profesor sistematiza los principales contenidos del tema; sin embargo, no explica o no establece significados claros para los siguientes conceptos y técnicas estadísticas: ✓ Significatividad de las diferencias entre los estadísticos ✓ Carácter ideal de los promedios ✓ Uso de la media o la moda en variables cuantitativas
Faceta mediacional (Recursos; tiempo)	− El uso de la hoja de cálculo ha resultado conflictivo para, ✓ Determinar el rango de datos al momento de hacer los cálculos ✓ Calcular las frecuencias relativas ✓ Construir gráficos (representación de valores y frecuencias en el eje de abscisa, representación conjunta de frecuencias absolutas y relativas, ausencia de etiquetas en los gráficos) − El tiempo ha resultado insuficiente para abordar algunos temas. Los estudiantes no lograron completar el proceso de regida de datos del curso por lo que se optó trabajar con datos de un curso anterior; tampoco se logró realizar una tarea de ejercitación planificada sobre cálculo del recorrido.

2.2. **Configuración didáctica generada mediante el proyecto “Lanzamiento de dos dados”**

Este proyecto fue implementado en dos sesiones, siendo el profesor quien presentó los temas facilitando la comprensión de los contenidos teóricos, guiando las reflexiones y moderando instancias de debates.

2.2.1. Sesión de clase 4 (una hora)

La clase comienza con la presentación del proyecto P2, con el cual se pretende motivar y justificar el estudio de las nociones básicas de probabilidad orientadas a la toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre. Seguidamente, se propone resolver la “actividad 1” y responder las cuestiones planteadas. Para resolver la actividad, la simulación del lanzamiento de dos dados se realiza físicamente mediante el uso de trozos de papel de igual tamaño numerados de uno a seis; estos, son tomados aleatoriamente por los estudiantes y luego anotan la suma de los valores obtenidos.

Durante el desarrollo de la actividad, el profesor interviene con frecuencia para evaluar y retroalimentar el trabajo de los grupos. Durante sus intervenciones, se ponen en evidencia algunas dificultades que manifiestan los estudiantes para responder y justificar la pregunta "¿Qué prefieres ser jugador A o B?" En el HDS 4.4 se recoge la respuesta de un grupo que responde erróneamente que es mejor ser B, justificando que A tiene cuatro posibilidades de ganar, en cambio B, tiene todas las demás. En este caso los estudiantes han justificado a partir de los resultados en que gana cada jugador de acuerdo a las reglas del juego (en cuatro casos gana A y en siete B) y no de las sumas posibles para cada resultado. En esta situación se manifiesta el *sesgo de la equiprobabilidad,* que consiste en considerar que todos los posibles resultados del experimento son equiprobables (Lecoutre y Cordier, 1990; Lecoutre, 1992). También se observan dificultades para representar y determinar las sumas posibles y para obtener el espacio muestral del experimento. Para resolver este conflicto, el profesor cuestiona la respuesta proponiendo una revisión más acabada del problema e incentivando al grupo a tratar de explicar lo realizado.

Otro conflicto de interés que se manifiesta al responder esta pregunta, es la preferencia de ser uno u otro jugador en base a los resultados obtenidos al simular el lanzamiento de los dados 10 veces. Esta confianza indebida en pequeñas muestras, en la que se hace una extensión equívoca de la ley empírica de los grandes números, ha sido descrita por Kahneman, et al., (1982) como el *sesgo de la heurística de representatividad*.

Transcurridos aproximadamente 25 minutos de clase, el profesor propone compartir y analizar algunas de las respuestas planteadas, comenzando por la cuestión "¿Qué prefieres ser jugador A o B?" Para ello, pide a una estudiante que pase a la pizarra y explique lo realizado por su grupo. La estudiante, realiza algunas anotaciones (figura D.24, anexo D) y señala que prefiere ser el jugador A. Ante esta respuesta el profesor interroga abiertamente al curso, manifestándose opiniones divididas. Frente a estas discrepancias el profesor pide a un estudiante que afirma que es mejor ser B, que fundamente su elección. El estudiante plantea que "de los 11 resultados posibles, el jugador A puede obtener 6, 7, 8 ó 9; entonces, tiene cuatro posibilidades. En cambio B tiene todas las demás posibilidades, que son siete". La respuesta de este alumno, pone en evidencia un conflicto manifestado anteriormente, que consiste en justificar la preferencia de ser el jugador B a partir de los resultados en que gana cada jugador según las condiciones del juego (en cuatro casos gana A y en siete B), y no de las sumas posibles para cada resultado (se repite el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Cordier, 1990; Lecoutre, 1992)). El profesor pide a la estudiante que se encuentra frente a la pizarra que argumente su elección. La estudiante, justifica a partir de las anotaciones realizadas (figura D.24, anexo D) que el jugador A tiene 11 posibilidades en cambio B, solo tiene 10. En esta respuesta, se manifiesta una dificultad para representar las sumas posibles (uso de tabla de doble entrada o diagrama de árbol) y para obtener el espacio muestral del experimento. Así mismo, se manifiesta un conflicto que consiste en considerar dos sumas que aparecen en distinto orden como un único suceso; por ejemplo, 5+1 y 1+5 se contabiliza una vez. El profesor no aborda estos conflictos, centra su atención en la respuesta esperada planteando la pregunta "¿Cuántos casos posibles hay?" Un estudiante responde, "son 36 sumas posibles, en 20 casos gana A y en 16 B", ante lo cual el profesor valida la respuesta.

La clase continúa con la presentación de la solución esperada a la cuestión 1. Durante su exposición el profesor muestra una tabla de doble entrada con "las sumas" que se pueden obtener al lanzar dos dados (tabla D.6, anexo D), a partir de la cual explica los casos posibles y el espacio muestral del experimento, y da a conocer la respuesta. Tras esta explicación, hay un estudiante que manifiesta no comprender la forma en que se ha llegado a la solución. El profesor retoma la explicación y ejemplifica con diferentes sumas de puntos, que no todas tienen igual probabilidad de salir; luego, puntualiza en que si bien al jugador B se le asocia un mayor número de resultados, esas sumas, se obtienen menos veces.

Se continúa con el análisis de la cuestión "¿Es equitativo este juego?" Frente a esta pregunta, un estudiante responde que el juego no es equitativo ya que el jugador A tiene más probabilidades de ganar. A partir de esta respuesta, el profesor explica que la probabilidad de A (20 de 36) o de B (16 de 36) es el cálculo obtenido aplicando la *regla de Laplace*.

Seguidamente, se pasa al análisis de las cuestiones: "¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?" Frente a la primera pregunta, se observa que en la mayoría de los grupos ha ganado el jugador A. Ante la segunda cuestión un estudiante responde, "el resultado no se volvería a repetir ya que se trata de probabilidad y no hay una regla que permita determinar los resultados". El profesor intenta ampliar esta respuesta planteando la siguiente pregunta, "imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces, ¿qué pasará?" El estudiante responde que, en ese caso, ganará el jugador A. El profesor reafirma su respuesta y explica que, a largo plazo, lo que se espera es que gane A, enfatizando en la importancia del tamaño de la muestra para que se las frecuencias relativas se aproximen a la probabilidad.

Posteriormente, el profesor plantea algunas preguntas tendientes a evaluar la comprensión lograda respecto al cálculo de probabilidad. Para ello, interroga a los estudiantes acerca de cuál es la probabilidad de obtener diferentes sumas en el experimento realizado, planteando preguntas como: "¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea dos? ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea seis? ¿Y de que sea 11?" Las respuestas de los estudiantes ponen en evidencia que no tienen mayores dificultades para determinar la probabilidad y expresarla en lenguaje proporcional.

La clase continúa con la sistematización de algunos conceptos, técnicas y uso de representaciones relativos a probabilidad; concretamente, se institucionalizan los siguientes contenidos: distribución de probabilidad, variable aleatoria, valor de una variable aleatoria, valor de la probabilidad (valor que oscila entre cero y uno), procedimiento de cálculo de la probabilidad, representación de la probabilidad en notación fraccionaria, decimal y porcentaje (pasaje entre estos registros) y, tabla y gráfico de distribución de probabilidad. La institucionalización de estos contenidos se realiza a partir de la presentación de la *tabla* y el *gráfico de distribución de probabilidad* de la variable aleatoria suma de puntos al lanzar dos dados (tabla D.6 y figura D.25, anexo D).

Seguidamente, el profesor muestra una *tabla de distribución de frecuencias* obtenida al haber realizado el experimento 100 veces (tabla D.7, anexo D). Respecto a esta tabla, aclara que corresponden a los datos recogidos al realizar efectivamente el experimento y que serán utilizados en lugar de los obtenidos en clase para optimizar el tiempo. Luego, explica las diferencias entre la tabla de distribución de frecuencias y de probabilidad, aludiendo al tipo de variables que se representan y a la diferencia que se observa entre la probabilidad y la frecuencia de cada valor (en el experimento, contrariamente a lo esperado, ha resultado ganador el jugador B).

Después de las explicaciones anteriores, el profesor propone continuar con el desarrollo de la "actividad 2" y responder las cuestiones cinco y seis. A partir de este momento los estudiantes trabajan en grupos, habiendo algunos que lo hacen de manera individual. Durante el desarrollo de la actividad se manifiestan diversos conflictos. En la cuestión 5, al justificar por qué no ha ganado el jugador A en el experimento de lanzar 100 veces el dado como era de esperar, hay estudiantes que insisten en que siempre ganará el jugador B, aun cuando, en la propia pregunta se alude a que se espera que gane el jugador A. La respuesta de estos estudiantes, deja en evidencia el sesgo de la heurística de representatividad (Kahneman et al., 1982); en efecto, no dan respuesta a la pregunta teniendo en cuenta la propiedad de la ley empírica de los grandes números, sino que lo hacen en base a los resultados obtenidos (frecuencias) al realizar el experimento 100 veces. Otro conflicto que se manifiesta al resolver esta cuestión, se da en un estudiante que justifica equívocamente que ha ganado B porque ha lanzado más veces. En este caso, se ha interpretado erróneamente la tabla de frecuencias de realizar el experimento 100 veces; concretamente, no se reconoce el número de lanzamientos, el valor de la variable ni las frecuencias.

Los conflictos anteriores, han tenido lugar durante la interacción entre alumnos sin la presencia del profesor; no obstante, en ambos casos, un estudiante "más aventajado" ha resuelto el conflicto aludiendo a la solución esperada.

En la cuestión 6, hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas para comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias). Se manifiestan también dificultades para construir las barras adosadas; específicamente, hay equipos que dibujan todas las barras "pegadas entre sí" y otros, las dibujan todas separadas (figura D.26, anexo D). Además de estos conflictos, se observa que la mayoría de los estudiantes no incluye el título ni las etiquetas en los ejes del gráfico. Los conflictos anteriores son resueltos convenientemente por el profesor, salvo el uso inapropiado del título y etiquetas a lo cual no hace mención. Después de esta este momento, el profesor recoge las soluciones de cada grupo a fin de analizarlas y compartir los resultados en la próxima clase. Con esta actividad se da por finalizada la cuarta sesión.

2.2.2. Sesión de clase 5 (dos horas)

En la primera parte de la clase, se comparten y discuten las soluciones propuestas en el desarrollo del proyecto P2. Se comienza retomando la respuesta a la primera cuestión de la actividad 1 "¿Qué prefieres ser jugador A o B?", el profesor interroga a un estudiante quien responde que prefiere ser el jugador A y que el juego no es equitativo, ya que A tiene más probabilidades de ganar. A partir de esta respuesta, el profesor retoma la justificación realizada en la clase anterior sobre la preferencia de ser el jugado A. Para complementar su explicación comparte los resultados obtenidos por un grupo donde al simular el lanzamiento de los dados ha ganado A; puntualizando, que en 10 lanzamientos podría ganar uno u otro jugador ya que se requiere de largas series para que se cumpla la probabilidad. En este momento el profesor establece una conexión entre el proyecto y el currículo escolar, señalando que este mismo proyecto o una versión convenientemente adaptada, podría ser aplicada para tratar contenidos de los últimos cursos de educación primaria. Luego, continúa compartiendo las soluciones propuestas en los informes entregados en la clase anterior, enfocándose en las siguientes cuestiones de la actividad 1: "¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?" El profesor selecciona y lee el trabajo de un grupo donde ha ganado el jugador A y que han respondido correctamente las preguntas. A continuación, lee también las respuestas de este grupo a las siguientes cuestiones de la actividad 2: "¿Quién ha ganado más veces, los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido?" El grupo, ha respondido correctamente que han ganado los jugadores B y que los datos recogidos corresponden a probabilidades, por lo que no tiene por qué ganar siempre A.

Posteriormente, se analizan algunos gráficos construidos en la actividad 2, seleccionándose dos informes donde los diagramas representan correctamente la comparación entre la variable aleatoria y la distribución de frecuencias. A partir de estos informes se explica la diferencia entre la forma de la distribución de probabilidad y la de frecuencias (la distribución de frecuencias es menos regular). Se clarifican también, las diferencias entre un histograma y un gráfico de barras adosadas.

Se continua con el análisis de la respuesta de un nuevo grupo a la cuestión "¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?" En este caso, la respuesta también es correcta; los estudiantes señalan que "las gráficas estarían más igualadas". A partir de esta respuesta, el profesor recuerda la propiedad de convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad (ley de los grandes números), conectando este contenido con aspectos de la vida cotidiana; específicamente, se alude al uso de este contenido por parte de las compañías seguros al momento de establecer las primas.

La clase continúa con una exposición del profesor acerca del uso de programas informáticos para justificar la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad. Este recurso, se propone como una alternativa a la aplicación del razonamiento lógico deductivo, que podría ser utilizado al trabajar con niños de primaria. El profesor muestra un Applet que permite simular el experimento del lanzamiento de dos dados y lo realiza 100 y 10000 veces (figura D.27, anexo D). A partir de estos resultados, explica el comportamiento de la suma en ambos gráficos, haciendo notar la proximidad entre la forma de la distribución de las frecuencias relativas y la distribución de probabilidad en la segunda simulación. Luego, muestra el resultado de una simulación del lanzamiento de una moneda realizada con el software STATMEDIA (figura D.28, anexo D), explicando el comportamiento de las frecuencias relativas de acuerdo al número de experimentos. Posteriormente, presenta una síntesis de los conocimientos estudiados en la resolución del proyecto. Esta síntesis contiene los principales conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos probabilísticos puestos en juego (tabla D.8, anexo D). Concluida esta presentación, se informan las instancias de estudio complementario que contemplan: un estudio personal de la lección de probabilidad del texto de referencia para el curso (Godino y cols., 2004), realización de ejercicios disponibles en el tablón virtual de docencia y asistencia a sesiones de tutoría individual o grupal.

La clase continúa con el planteamiento y resolución del siguiente ejercicio:

> **Ejercicio 1:** Al lanzar tres monedas, María gana un euro si se obtiene 0 ó 1 caras. Juan gana un euro si se obtienen 2 ó 1 caras. Juan dice que el juego es justo porque solo hay 4 posibilidades y cada uno de ellos tiene ventajas con dos. María no está de acuerdo. *(a) ¿Quién tiene razón? (b) ¿Cuál sería la cantidad de dinero que tiene que pagar Juan a María en el caso que este gane, para que el juego sea equitativo?*

Un conflicto que se manifiesta en la resolución de este ejercicio, es que solo se identifican cuatro de los ocho resultados posibles del experimento. En el HDS 5.11, se muestran los resultados de un grupo donde se presenta esta situación; en este caso, los estudiantes han considerado los dos resultados que aparecen en distinto orden (cara, cara, cruz con cruz, cara, cara y cruz, cruz, cara con cara, cruz, cruz) como un único suceso. Frente a este conflicto, el profesor discute la solución con los estudiantes explicando que se puede considerar que son tres monedas que se lanzan secuencialmente (moneda 1, moneda 2 y moneda 3) y que se deben tener en cuenta todas las formas en que podrían estar dispuestas las tres monedas, con lo que se obtienen ocho resultados posibles.

Otro conflicto que se manifiesta es la dificultad para determinar la equidad en el juego. Esta dificultad, se ve reflejada en el HDS 5.12 donde un estudiante pregunta "¿Cómo se hace para que el juego sea equitativo?" El profesor responde "el que más probabilidades tiene de ganar debería pagar más". A partir de esta información, es el propio estudiante quien logra determinar la cantidad de dinero que tiene que pagar Juan a María para que el juego sea equitativo. Un estudiante del grupo, no está de acuerdo con la solución, ante lo cual, el profesor puntualiza que lo que gana María por su probabilidad debe ser igual a lo que gana Juan por su probabilidad. Después de aproximadamente 15 minutos de trabajo grupal, se comparten con el curso los resultados de un equipo que han realizado correctamente el ejercicio. Para ello, una estudiante del grupo (Elena) escribe el procedimiento en la pizarra (figura D.29, anexo D) y explica lo realizado. Después de esta explicación, un estudiante manifiesta no haber comprendido como se ha hecho para establecer que el juego sea equitativo. Elena, repite la explicación y para tratar de convencer a su compañero establece la siguiente igualdad $1.5 * \frac{4}{8} = 1 * \frac{6}{8}$. El estudiante concuerda con la respuesta, pero señala que en realidad lo que no comprende es cómo se ha hecho para calcular que Juan debe pagar 1.5 euros. Esto, motiva la intervención de un nuevo estudiante, quien explica que el procedimiento para hallar el valor 1.5 puede ser la regla de tres (figura D.30, anexo D).

Seguidamente, el profesor interviene señalando que otra forma de resolver la situación es a través del planteamiento de una ecuación con dos incógnitas, donde lo que hay que igualar es la esperanza matemática para ganar el juego; puntualiza también, que *la esperanza matemática en el juego es igual al producto de lo que se apuesta por la probabilidad de ganar*. En base a esta definición, justifica que lo que apuesta María por su probabilidad debe ser igual a lo que apuesta Juan por su probabilidad, planteando la ecuación (figura D.32, anexo D) y explicando la forma de resolverla.

La clase sigue con el planteamiento de un nuevo ejercicio:

> **Ejercicio 2:** El 85% de los votantes de una ciudad acude a las elecciones. En una familia donde hay tres personas con edad de votar, ¿cuál es la probabilidad de que las tres hayan votado?

En la resolución de este ejercicio, se presentan las siguientes dificultades: hay estudiantes que no logran establecer ningún tipo de procedimiento para resolver la situación y otros que plantean mal el algoritmo. En el primer caso, el profesor incentiva el uso del diagrama de árbol como una manera de resolver el ejercicio y en el segundo, corrige los errores y explica la fórmula para encontrar la solución.

Uno de los errores en el procedimiento de cálculo, que llama la atención, es el cometido por una estudiante que en lugar de obtener el producto de las tres probabilidades

(0.85*0.85*0.85) multiplica 0.85*3. Después de aproximadamente 15 minutos de trabajo grupal, al igual que en el ejercicio anterior, el profesor pide a una estudiante que pase a la pizarra a explicar la solución. La estudiante, representa correctamente la situación en un diagrama de árbol (figura D.33), pero es el profesor quien a partir de dicho diagrama explica la solución esperada.

2.2.3. Síntesis de hechos didácticos significativos del proyecto 2

Lo que sigue, corresponde a una síntesis de los principales HDS observados en la implementación del proyecto P2. Los criterios de clasificación de los HDS son los mismos que en el proyecto P1. De igual modo, en la faceta cognitiva la síntesis se centra en la identificación de conflictos; los aprendizajes, son analizados en el apartado en el que se describen los aprendizajes logrados (apartado 3.3).

Tabla 5.2. Síntesis de hechos didácticos significativos del proyecto P2

FACETAS	HECHOS DIDÁCTICOS SIGNIFICATIVOS
Faceta epistémica (Objetos y procesos)	− El estudio de las nociones elementales de probabilidad se realiza a partir del *proyecto* "Lanzamiento de dos dados"; se incluyen además otras dos tareas (lanzamiento de tres monedas y probabilidad de votar) enfocadas en ejercitar los conocimientos estudiados. − Las *representaciones de uso convencional* en probabilidad (espacio muestral, tabla y gráfico de distribución de probabilidad, casos favorables y casos posibles) son recordadas por el profesor a partir de la presentación de la solución esperada y de la síntesis de los contenidos estudiados. Durante la sesión 5 el profesor muestra algunos programas informáticos que permiten justificar gráficamente la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad; simulando, el experimento del lanzamiento de dos dados y el lanzamiento de una moneda. − Se proponen *procesos de traducción* entre distintas representaciones: representación de las sumas obtenidas de lanzar dos dados en tablas de conteo, representación de los casos posibles en tablas de distribución de probabilidad y de las sumas obtenidas en tablas de frecuencias, representación de la distribución de probabilidad y distribución de frecuencias en gráficos, y, comunicación de conjeturas y conclusiones en lenguaje natural. − Los *conceptos y definiciones básicas* de probabilidad (experimento aleatorio, casos posibles, espacio muestral, casos favorables, regla de Laplace, tabla de distribución de probabilidad, gráfico de distribución de probabilidad, proporción, variable estadística, porcentaje, tabla de distribución de frecuencias, gráfico de barras adosadas, diagrama de árbol) son recordados por el profesor en intervenciones puntuales y durante la presentación de la solución esperada. − Los *procedimientos fundamentales* del tema de estudio son mayoritariamente aplicados por los estudiantes para dar respuesta a la cuestiones planteadas (realización del experimento, registro de los resultados, elaboración de tablas de frecuencias, construcción de gráficos de barras adosadas y cálculo de probabilidad). La tabla y el gráfico de distribución de probabilidad del experimento de lanzar dos dados es presentada por el profesor. − Las principales *propiedades* del tema de estudio (regla de Laplace, ley empírica de los grandes números, convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad) son dados por el profesor a través de institucionalizaciones puntuales y de la síntesis de contenidos presentada en la clase 5. El profesor ejemplifica la propiedad de la ley empírica de los grandes números con las estimaciones que hacen las compañías de seguro para establecer las primas.

	– Los estudiantes *recogen datos* a través de la simulación del *experimento aleatorio* lanzar dos dados, aunque finalmente no son utilizados en el análisis de los datos recogidos en el conjunto de la clase (actividad 2). – Los estudiantes tienen la oportunidad de *comparar* gráficamente la *distribución de probabilidad* del experimento “Lanzamiento de dos dados” con la *distribución de frecuencia* al haber realizado el experimento 100 veces. Para ello realizan gráficos manualmente (sesión 4) y también mediante la hoja de cálculo (sesión5). – Frente a la siguiente pregunta hecha por el profesor “imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces, ¿qué pasará?”, los estudiantes se ven enfrentados a *realizar predicciones en base a la probabilidad* de que gane el jugador A o B; aunque, es el profesor quien justifica aplicando la propiedad de la “ley empírica de los grandes números”. – Durante el desarrollo del proyecto el profesor favorece permanentemente la capacidad de *argumentar*, pidiendo a los estudiantes que justifiquen de manera razonada sus respuestas.
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizaje; conflictos)	En el desarrollo del proyecto P2, se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos: – Frente a la cuestión “¿Qué prefieres ser jugador A o B?” Razona tu respuesta, ✓ Todos los resultados del experimento son equiprobables (sesgo de la equiprobabilidad) ✓ Dificultad para determinar las sumas posibles y obtener el espacio muestral del experimento. Estos contenidos son explicados por el profesor durante los procesos de institucionalización. ✓ Justificación en base al número de valores de la variable aleatoria “suma de puntos al lanzar dos dados” asociados a cada jugador, en lugar de considerar las sumas posibles para cada valor. Hay cuatro valores (resultados) donde gana A (6, 7, 8 y 9) y siete donde gana B (2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12). El profesor cuestiona esta respuesta y propone que se realice otro tipo de justificación. ✓ Se concluye en base a los resultados obtenidos al simular el lanzamiento de los dados 10 veces (sesgo de la heurística de representatividad). ✓ Dificultad para representar las sumas posibles al lanzar dos dados (uso de tabla de doble entrada y diagrama de árbol). El profesor explica estos modos de representación en sus intervenciones magistrales. ✓ Dos sumas que aparecen en distinto orden se consideran como un único suceso; por ejemplo, 5+1 y 1+5 se contabiliza solo una vez. El profesor no aborda este conflicto durante la clase, en su lugar, alude a la solución esperada para que los estudiantes corrijan su respuesta. – Al responder las cuestiones: “¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?” ✓ Hay estudiantes que responden que siempre ganará B, justificando en base a los resultados obtenidos al realizar el experimento 100 veces (sesgo de la heurística de representatividad). ✓ Un estudiante señala que “ha ganado más veces el que ha tirado más veces” justificando mediante los valores de la variable asociados a cada jugador (en cuatro casos gana al jugador A y siete a B). En esta respuesta se evidencia una dificultad de comprensión con el concepto de distribución de frecuencias (no se reconoce el número de lanzamientos ni se distingue entre el valor de la variable y las frecuencias) y se manifiesta el sesgo de la equiprobabilidad. – En la construcción del diagrama de barras adosadas, ✓ Hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas al comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias). ✓ Error en el uso de la escala. Se escriben las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas en el eje de ordenada. ✓ Se construyen todas las barras juntas a modo de histograma. ✓ Se construyen todas las barras separadas.

	✓ No se incluye título ni etiquetas en el gráfico. En el desarrollo de la tarea “Lanzamiento de tres monedas”, se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos: − Al determinar los casos posibles, se identifican cuatro casos en lugar de ocho. Hay estudiantes que no comprenden que el lanzamiento de cada moneda debe ser visto de manera independiente, considerado los dos resultados que aparecen en distinto orden (cara, cara, cruz con cruz, cara, cara y cruz, cruz, cara con cara, cruz, cruz) como un único suceso. El profesor propone considerar que son tres monedas que se lanzan secuencialmente (moneda 1, moneda 2 y moneda 3) y que se deben tener en cuenta todas las formas en que podrían estar dispuestas las tres monedas. − Dificultad para determinar la equidad en el juego; hay estudiantes que no logran plantear un procedimiento para resolver la situación. Una estudiante propone utilizar la regla de tres y el profesor explica cómo resolver la situación a través del planteamiento de una ecuación con dos incógnitas. En el desarrollo de la tarea “Probabilidad de votar” se ha manifestado como relevante el siguiente conflicto: − Dificultad para calcular la probabilidad de este suceso compuesto. Hay estudiantes que en lugar de calcular el producto de las tres probabilidades multiplican la probabilidad de votar (0,85) por tres. El profesor explica el procedimiento correcto. − Representación del problema mediante un diagrama de árbol. Este contenido es abordado por el profesor en la presentación de la solución esperada.
Faceta interaccional (Procesos didácticos)	La metodología didáctica es similar a la descrita en el proyecto P1; se privilegian las actividades de grupo y las intervenciones magistrales con algunas instancias de trabajo individual que se generan de manera espontánea. − En las actividades de grupo, el profesor apoya permanentemente el trabajo de los estudiantes aclarando dudas y evaluando sus aprendizajes (evaluaciones espontaneas). Frente a algunas dificultades, hay veces en que insinúa la solución rebajando la dificultad inicial del proyecto. − Al finalizar la sesión 4, se recogen los informes del proyecto con los avances de los grupos como parte de un proceso de evaluación formativa. En la siguiente clase (sesión 5), el profesor realiza la retroalimentación de dichos informes, pero alude solo a los informes cuyas soluciones son correctas sin analizar los errores. − En los procesos de institucionalización, el profesor sistematiza convenientemente los contenidos centrales del tema.
Faceta mediacional (Recursos; tiempo)	− La simulación física de los dados mediante el uso de trozos de papel ha resultado bastante eficaz, aun cuando, en el principio se presentaron algunas dificultades. − El tiempo ha resultado insuficiente para abordar algunas actividades; específicamente, en la actividad 2 no se utilizaron los datos del experimento realizado por los grupos por falta de tiempo y en su lugar, se emplearon datos entregados por el profesor.

2.3. **Configuración didáctica generada mediante el proyecto “Eficacia de un entrenamiento deportivo”**

Este proyecto de análisis de datos fue implementado en una sesión de seminario de práctica donde se incorporó el uso de la hoja de cálculo Excel. Como ya hemos señalado, en estos seminarios, el grupo completo de estudiantes se divide en tres subgrupos que abordan las mismas actividades en sesiones diferentes. La descripción que se presenta, corresponde a la práctica realizada en uno de los grupos y da cuenta de los principales HDS observados.

2.3.1. Sesión de clase 6 (una hora y media)

La sesión comienza con una fase introductoria donde se presenta el proyecto y se entregan indicaciones sobre las actividades y cuestiones planteadas. Se continúa con la preparación de los datos en la plantilla Excel, incluyendo en una hoja el conjunto de datos (50 valores), en otra hoja los datos de las chicas y en la hoja tres, los datos de los chicos.

Posteriormente, se discute cómo resolver la cuestión 1 "¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?" Un estudiante interviene señalando que hay que ver si los tiempos en diciembre han mejorado. El profesor cuestiona la respuesta mostrando que en diciembre hay estudiantes que han mejorado, pero también hay otros que han empeorado. Esto motiva la intervención de otro estudiante, quien responde equívocamente que se podría comparar el mejor tiempo obtenido en septiembre y diciembre. Frente este conflicto, en el que no se reconoce que la cuestión debe ser resuelta comparando estadísticos (mediana y desviación típica) o construyendo gráficos, el profesor enfatiza en que se trata de determinar si el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase y no para un estudiante específico. Interviene entonces, un último estudiante quien señala que hay que comparar los resultados. El profesor, retoma esta respuesta explicando que efectivamente se trata de comparar los resultados globalmente, para lo cual se requiere resumir las distribuciones de frecuencias (tiempos en septiembre y diciembre) a través del cálculo de promedios y la dispersión de los datos. En su intervención, el profesor incluye además una explicación detallada del modo de interpretar la dispersión y los valores atípicos; aludiendo, que de haber una dispersión mayor en diciembre que en septiembre podría significar que los alumnos más rápidos hayan mejorado, pero los más lentos habrán empeorado. Respecto a los valores atípicos señala la conveniencia de analizarlos por separado. Como se observa, en esta fase inicial el profesor anticipa algunos contenidos estadísticos centrales que es necesario aplicar: comparar dos distribuciones de frecuencias, para lo cual no basta comparar los promedios, sino también las dispersiones; la comparación de los tiempos de sujetos individuales no es pertinente (procedimiento sugerido por algún estudiante) porque hay que tener en cuenta el conjunto de todos los datos. También se sugiere el tratamiento de los sujetos atípicos.

Después de estas explicaciones comienza el trabajo de los grupos apoyados por el profesor, quien evalúa y retroalimenta permanentemente los aprendizajes. Algunos conflictos que se manifiestan durante el desarrollo de la actividad son: la persistencia en el uso de la fórmula para datos agrupados en intervalos para calcular la media en lugar de utilizar la herramienta función, dificultades en el manejo de la hoja de cálculo, dificultad para interpretar los valores estadísticos (media, desviación típica y valor atípico) y, conflicto con los significados de los conceptos de valor atípico y desviación típica. Frente al primer conflicto, el profesor justifica e incentiva el uso de la herramienta función como un medio de cálculo más exacto para obtener la media en variables cuantitativas continuas, ya que al usar la fórmula se pierde información al obtener las frecuencias de los intervalos y no la de cada valor. Dentro de los conflictos relacionados con el uso de la hoja de cálculo, una dificultad que se manifiesta de manera reiterada es la selección inapropiada del rango al realizar el cálculo de estadísticos mediante la herramienta función (en el HDS 6.5, se muestra un ejemplo en el que se manifiesta este conflicto); para resolverlo, el profesor guía a los estudiantes a través de preguntas a fin de que logren establecer correctamente el rango de los datos y luego, valida las acciones emprendidas. En otros casos, frente a este mismo conflicto, el profesor explica paso a paso la solución. En cuanto a los conflictos para interpretar la media, la desviación típica y los valores atípicos, lo que se observa es que hay estudiantes que no comprenden cómo interpretar estos valores para responder las cuestiones planteadas. Es el caso de un grupo que manifiesta que han realizado los cálculos y preguntan si continúan la construcción de gráficos. El profesor, les aclara que no se trata solo de realizar cálculos y les propone interpretar los resultados para responder la cuestión 1. Un estudiante del grupo, afirma que el tiempo en diciembre ha mejorado comparando correctamente los promedios; sin embargo, no logra interpretar la dispersión y confunde la desviación típica con el rango. Para resolver este conflicto, el profesor clarifica la distinción entre desviación típica y rango y explica detalladamente por qué el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase aludiendo tanto a la media como a la dispersión de los datos. Una situación similar, se manifiesta en otro grupo donde los estudiantes después de calcular la media y la desviación típica, recurren al profesor para poder seguir avanzando. En este caso, el profesor pide la opinión al grupo acerca de la efectividad del entrenamiento, ante lo cual, un estudiante reconoce que ha resultado efectivo. El profesor, valida la respuesta justificando a través de la media. Respecto al concepto de valor atípico, en el HDS 6.9 se recoge la interacción del profesor con un grupo de estudiantes que no comprenden el significado de valor atípico. En este caso, inicialmente, el profesor desvía la atención hacia la resolución de las primeras preguntas enfatizando en la necesidad de interpretar la desviación típica. Pero luego, retoma la inquietud del estudiante y le explica que los valores atípicos se refieren a aquellos estudiantes que corría muy lento o eran demasiado rápidos con respecto a los demás; ejemplificando, con una chica que tardó 9.9 segundos en recorrer los 20 metros en septiembre. Recuerda también, la fórmula convenida para determinar un valor atípico (M ± 2 x DT) (media más/menos dos veces la desviación típica). Otra situación que pone en evidencia dificultades de comprensión con los conceptos de valor atípico y desviación típica se observa en el HDS 6.10. En este caso, un estudiante pregunta si la desviación típica debe ser aplicada para responder la pregunta cinco, cuando en realidad la cuestión apunta a identificar si hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como atípico en su capacidad de correr. Para resolver este conflicto, el profesor aclara que la desviación típica no es aplicable a la pregunta cinco y explica la forma en que debe ser interpretada para determinar la efectividad del entrenamiento deportivo (cuestión 1). Inmediatamente después, el estudiante pregunta acerca de lo que se debe hacer en la pregunta cinco, ante lo cual, el profesor explica que se debe determinar si hay sujetos atípicos y ejemplifica con dos valores qué puede ser considerados como tal; una estudiante que en septiembre estaba en un tiempo de 9.9 segundos (muy lenta) y otra que su tiempo es 3.3 segundos (muy rápida). El profesor, explica además la fórmula propuesta para determinar los valores atípicos.

Después de aproximadamente 25 minutos de trabajo grupal, el profesor se dirige a toda la clase para indagar si saben ordenar los datos de manera ascendente y descendente en la hoja de cálculo. Un número importante de estudiantes señalan no conocer el manejo de dicha función, ante lo cual, el profesor procede a explicarla; señalando también, su aplicabilidad en la identificación de valores atípicos.

La intervención del profesor continúa con una introducción al uso de histogramas para comparar gráficamente las distribuciones del tiempo en septiembre y diciembre de los chicos y chicas. Profundiza en la construcción de tablas de frecuencias explicando el uso de intervalos, las marcas de clase y el cálculo de las frecuencias. Durante la explicación, el profesor presenta las cuatro tablas de frecuencias (tiempos en septiembre y diciembre de chicos y chicas) parcialmente construidas, faltando por completar solo las frecuencias relativas. Al respecto, comenta que ha entregado así las tablas para optimizar el tiempo a fin de realizar la construcción de gráficos. Luego, pide a los estudiantes calcular las frecuencias relativas en cada tabla y explorar las posibilidades de representar gráficamente las distribuciones de frecuencias. En este momento, aclara además que para comparar las dos muestras (chicos y chicas) se debe hacer a través de las frecuencias relativas por ser grupos con distinta cardinalidad.

Durante el desarrollo de esta actividad se observan dificultades con el manejo la herramienta *formato de celda* para determinar un número específico de posiciones decimales y con el etiquetado de tablas de frecuencias. Además, se manifiestan conflictos relacionados con el cálculo de frecuencias relativas y la construcción de gráficos. En el cálculo de las frecuencias relativas, hay grupos que dividen el número total de observaciones entre cada frecuencia, en lugar de dividir cada frecuencia entre el número total de observaciones; y en la construcción de gráficos, hay estudiantes que no tienen claridad respecto al tipo de gráfico que se debe realizar y otros, representan en un mismo eje los valores y las marcas de clase (figura D.34, anexo D).

Frente a los conflictos anteriores, en la mayoría de los casos, el profesor entregó la información requerida para que los estudiantes corrigieran sus errores y concluyeran su trabajo; sin embargo, no logró sistematizar estos contenidos (tablas de frecuencia y gráfico) frente a todo el curso por falta de tiempo. Al finalizar la clase se recuerda enviar los resultados del proyecto durante la semana.

2.3.2. Síntesis de hechos didácticos significativos del proyecto 3

A continuación presentamos una síntesis de los principales HDS observados en la implementación del proyecto P3. Los criterios de clasificación de los HDS, son los mismos que los utilizados en los dos proyectos anteriores.

Tabla 5.3. Síntesis de hechos didácticos significativos del proyecto P3

FACETAS	HECHOS DIDÁCTICOS SIGNIFICATIVOS
Faceta epistémica (Objetos y procesos)	− El estudio de los contenidos estadísticos (algunos de los cuales fueron tratados durante el proyecto 1) se realiza a partir de la resolución del *proyecto* eficacia de un entrenamiento deportivo. − Las *representaciones de uso convencional* en estadística (tablas, gráficos, fórmulas y símbolos) fueron recordadas durante el proyecto 1. En este proyecto, se incorpora el uso de las tecnologías (hoja de cálculo Excel) para construir tablas de frecuencias y gráficos. − Se realizan *procesos de traducción* entre distintas representaciones: representación de los tiempos recorridos en septiembre y diciembre en tablas de frecuencias, representación de las distribuciones de frecuencias mediante gráficos y comunicación en leguaje natural del significado que emerge de los datos

	(eficacia del entrenamiento). − Se retoman *conceptos y definiciones básicas* de la estadística recordados durante el proyecto 1 (media, desviación típica, valora atípico,…). En algunos casos, estos conceptos deben ser reforzados por el profesor. − Los *procedimientos fundamentales* del tema de estudio (cálculo de promedios y dispersiones, elaboración de tablas de frecuencias, construcción de gráficos y determinación de valores atípicos) son empleados por los estudiantes para dar respuesta a las cuestiones planteadas, aunque la construcción de gráficos solo es abordada de manera inicial. − Las principales *propiedades* del tema de estudio son explicadas por el profesor y aplicadas por los estudiantes en la resolución del proyecto. − La *comparación de distribuciones de frecuencias* correspondientes a muestras de igual tamaño (tiempos en septiembre y diciembre para toda la clase) y de distinta cardinalidad (tiempo de chicos y chicas en correr 20 metros inicialmente en septiembre) es explicada por el profesor. − En la resolución del proyecto los estudiantes *establecen conclusiones* basadas en resúmenes estadísticos de los datos (media y desviación típica); sin embargo, por razones de tiempo, no llegan a fundamentar dichas conclusiones en el uso de representaciones gráficas.
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos)	Se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos: − Al responder la cuestión "¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?" ✓ Comparación sin realizar una "reducción estadística" de los datos (ver si los tiempos en diciembre han mejorado). El profesor aclara que no se pueden comparar "uno a uno" los valores. ✓ Comparando de valores específicos; un estudiante señala que se podría comparar el mejor tiempo obtenido en septiembre y diciembre. El profesor, aclara que la respuesta no es correcta e insinúa que se debe hacer una comparación estadística de los datos. ✓ Persistencia en el uso de la fórmula para calcular la media de datos agrupados, en lugar de obtenerla automáticamente mediante la hoja de cálculo. El profesor justifica e incentiva el uso de esta herramienta. ✓ La mayoría de los estudiantes tienen dificultades para interpretar los valores estadísticos (media y desviación típica); no logrando concluir la efectividad del entrenamiento mediante estos valores. − Frente a la pregunta "¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?" ✓ Se observan dificultades con el etiquetado de las columnas de las tablas de frecuencias. El profesor plantea la forma correcta de etiquetar las tablas. ✓ Dificultad con el procedimiento de cálculo de las frecuencias relativas. El profesor explica paso a paso la forma de realizar los cálculos. ✓ La construcción de gráficos ha resultado particularmente difícil; hay estudiantes que no tienen claridad respecto al tipo de gráfico que se puede construir y otros, representan en un mismo eje los valores y las marcas de clase. El profesor sugiere el procedimiento correcto. − En la cuestión "¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como atípico en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)?" ✓ Hay estudiantes que no tienen claro el significado de valor atípico, frente a lo cual el profesor aclara su significado. ✓ Dificultades en el procedimiento de cálculo e interpretación del valor atípico. Ambos contenidos son explicados por el profesor.
Faceta interaccional (Procesos didácticos)	La metodología didáctica privilegia las actividades de grupo apoyadas por el profesor. Hay algunas intervenciones magistrales para introducir el tema y sistematizar contenidos específicos. − Frente a las dificultades manifestadas por los estudiantes, en la mayoría de los casos, el profesor entrega la respuesta o les guía de manera dirigida en la solución, rebajando la demanda cognitiva inicial del proyecto.

	– Durante el análisis de las soluciones esperadas y los procesos de sistematización (institucionalización) el profesor alude a los principales contenidos del tema; sin embargo, no profundiza en los siguientes contenidos: ✓ Justificación del uso de la media en lugar de la mediana al responder la cuestión 1. Si bien la media es el estadístico apropiado (ambas distribuciones son bastante simétricas), se aplica sin analizar la forma de la distribución. ✓ Comparación gráfica de distribuciones de frecuencias. No se realizan representaciones gráficas de los tiempos de septiembre y diciembre (para todo el grupo) y, solo se inicia la exploración de gráficos para comparar chicos y chicas.
Faceta mediacional (Recursos; tiempo)	– En el manejo de la hoja de cálculo se manifiestan conflictos relacionados con: ✓ El cálculo de las frecuencias relativas ✓ La construcción de gráficos – El tiempo ha resultado insuficiente para tratar algunos contenidos; específicamente, los relacionados con la construcción de gráficos. El profesor entrega las tablas de frecuencias parcialmente construidas, y solo se realiza una actividad exploratoria de construcción de gráficos.

2.4. **Síntesis de la trayectoria didáctica implementada**

Presentamos un resumen de la secuencia de las tres configuraciones didácticas implementadas, centradas en el estudio de cada proyecto. Como hemos indicado, esta síntesis pretende dar una visión de conjunto del efecto de las subtrayectorias epistémica e instruccional sobre la progresión del aprendizaje durante todo el proceso de estudio.

Tabla 5.4. Hechos didácticos significativos de la trayectoria didáctica implementada mediante los tres proyectos

FACETAS	HECHOS DIDÁCTICOS SIGNIFICATIVOS
Faceta epistémica (Objetos y procesos)	– Los *problemas estadísticos* (proyectos) son el eje central de la actividad matemática-estadística. Los estudiantes tiene oportunidad de formular problemas propios durante la primera clase, pero nos son abordados. Solo se realizan dos tareas de ejercitación a lo largo de la trayectoria didáctica relativas a probabilidad. – Las *representaciones de uso convencional* (tablas, gráficos, símbolos,…) en estadística y probabilidad son recordadas por el profesor y utilizadas por los estudiantes durante el desarrollo de los proyectos. Los estudiantes tienen también la oportunidad de explorar las potencialidades gráficas que brindan las tecnologías; concretamente, la utilidad de la hoja de cálculo Excel para la construcción de tablas y gráficos y, el uso de programas informáticos para representar la simulación de experimentos aleatorios. – Se realizan *procesos de traducción entre distintas representaciones semióticas*: ✓ En el proyecto 1: representación de las características de los individuos como medidas (datos), representación de los datos en tablas y gráficos, y comunicación del significado que surge de los datos con lenguaje natural. ✓ En el proyecto 2: representación las sumas obtenidas de lanzar dos dados en tablas de conteo, representación de los casos posibles en tablas de distribución de probabilidad y de las sumas obtenidas en tablas de frecuencias, representación de la distribución de probabilidad y distribución de frecuencias en gráficos y, comunicación de conjeturas y conclusiones en lenguaje natural. ✓ En el proyecto 3: representación de los tiempos recorridos en septiembre y diciembre en tablas de frecuencias, representación de las distribuciones de frecuencias mediante gráficos y comunicación en leguaje natural del

	significado que emerge de los datos. – Los *conceptos y definiciones básicas* de la estadística y la probabilidad son recordados por el profesor a través de intervenciones magistrales y puntuales. – Los *procedimientos fundamentales* de la estadística y la probabilidad elemental son empleados por los estudiantes para dar respuesta a las cuestiones planteadas, pero se enfoca principalmente en el cálculo de estadísticos con escasas posibilidades para la construcción de gráficos. – Las principales *propiedades* del tema de estudio son explicadas por el profesor a través de intervenciones puntuales y magistrales y, aplicadas por los estudiantes durante la resolución de los proyectos. – Los estudiantes *recogen datos de encuestas y experimento*s (proyecto 1 y 2); sin embargo, estos datos no son utilizados en las etapas posteriores de los proyectos. – Se realizan procesos de *comparación basados en datos* (comparación de distribuciones de frecuencias correspondientes a muestra de igual y distinto tamaño) y de *comparación entre distribución de probabilidad y de frecuencias*. – Se realizan *procesos de inferencia* (predicciones) *en base a la probabilidad*; los estudiantes deben aplicar la “ley empírica de los grandes números” para estimar las frecuencias a partir de la probabilidad de que gane uno u otro jugador (proyecto 2) – Se incluye la *comparación entre dos variables*, pero solo a través de una actividad puntual que no exige analizar el grado de intensidad de la relación entre las variables. – Los estudiantes *establecen conclusiones* basadas en resúmenes estadísticos de los datos (promedios y desviación típica); sin embargo, son muy pocas las oportunidades de realizar conclusiones a partir de representaciones gráficas. – Se favorece el *desarrollo de argumentos basados en datos;* en la mayoría de las actividades se pide a los estudiantes justificar sus respuestas de manera fundada. – La *lectura e interpretación* de información estadística presentada en diferentes representaciones (tablas y gráficos) es explicada por el profesor en sus intervenciones magistrales, siendo muy escasas las oportunidades que tienen los estudiantes para realizar esta actividad.
Faceta cognitiva-afectiva (Aprendizajes; conflictos)	Se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos sobre contenidos estadísticos: *Proyecto Alumno típico:* – Significado de alumno típico. – ¿Uso de la media o la moda para determinar el alumno típico en variables cuantitativas discretas? – Aplicación de la media en lugar de la mediana para determinar el alumno típico en distribuciones asimétricas. – Uso de una estrategia de conteo en lugar de una técnica estadística para determinar el alumno típico. – Significado de representatividad de un alumno típico. – Grado de representatividad de los promedios de acuerdo a la mayor o menor dispersión de los datos (desviación típica). – Aproximación de la media para determinar el alumno típico en la variable, número de hermanos. La media es 2.75, ¿qué valor tomar 2 ó 3? – Etiquetado de tablas de frecuencias. – Elaboración de tablas de frecuencias para variables continuas. – Tratamiento de variables cualitativas; un estudiante propone el uso de códigos numéricos para representar valores cualitativos y hacer cálculos. – Persistencia en uso de la fórmula para calcular la media de datos agrupados en intervalos aun cuando se dispone de medios de cálculos más exactos (calculadora, hoja de cálculo). – Procedimiento de cálculo de la mediana. Hay estudiantes que tienen dificultades con el manejo de los valores de frecuencia mayor a uno. – Interpretación del valor máximo de la variable peso, como el valor que se ubican en el bigote derecho del gráfico de caja. No se tienen en cuenta los valores

atípicos.

Proyecto Eficacia de un entrenamiento deportivo:

- Al responder la cuestión "¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?"
  - ✓ Comparación sin hacer una reducción estadística de los datos (ver si los tiempos en diciembre han mejorado).
  - ✓ Comparación de valores específicos; un estudiante señala que se podría comparar el mejor tiempo obtenido en septiembre y diciembre.
  - ✓ Persistencia en el uso de la fórmula en lugar de utilizar la herramienta función de la hoja de cálculo para calcular la media de datos agrupados.
  - ✓ Dificultad para determinar la efectividad del entrenamiento mediante la media y la desviación típica (no se logran interpretar estos valores).
- Frente a la pregunta "¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?"
  - ✓ Dificultad con el etiquetado de las columnas de las tablas de frecuencias.
  - ✓ Dificultad en el procedimiento de cálculo de las frecuencias relativas.
  - ✓ Hay estudiantes que no tienen claridad respecto al tipo de gráfico que se debe construir y otros, representan en un mismo eje los valores y las marcas de clase.
- En la cuestión "¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como "atípico" en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)?"
  - ✓ Significado de valor atípico.
  - ✓ Dificultades en el procedimiento de cálculo e interpretación del valor atípico.

Se han manifestado como relevantes los siguientes conflictos sobre contenidos probabilísticos:

Proyecto Lanzamiento de dos dados:

- Frente a la pregunta "¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona tu respuesta",
  - ✓ Todos los resultados del experimento son equiprobables (sesgo de la equiprobabilidad).
  - ✓ Dificultad para determinar las sumas posibles y obtener el espacio muestral del experimento.
  - ✓ Justificación en base al número de valores de la variable aleatoria "suma de puntos al lanzar dos dados" asociados a cada jugador, en lugar de considerar las sumas posibles para cada valor. Hay cuatro valores (resultados) donde gana A (6, 7, 8 y 9) y siete donde gana B (2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12).
  - ✓ Se concluye en base a los resultados obtenidos al simular el lanzamiento de los dados 10 veces (sesgo de la heurística de representatividad).
  - ✓ Dificultad para representar las sumas posibles al lanzar dos dados (uso de tabla de doble entrada y diagrama de árbol).
  - ✓ Dos sumas que aparecen en distinto orden se consideran como un único suceso; por ejemplo, 5+1 y 1+5 se contabiliza solo una vez.
- Al responder la pregunta "¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?"
  - ✓ Hay estudiantes que responden que siempre ganará B, justificando en base a los resultados obtenidos al realizar el experimento 100 veces (sesgo de la heurística de representatividad).
  - ✓ Dificultad de comprensión con el concepto de distribución de frecuencias (no se reconoce el número de lanzamientos ni se distingue entre el valor de la variable y las frecuencias).
- En la construcción del diagrama de barras adosadas (actividad seis),
  - ✓ Uso de frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas al comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias).
  - ✓ Error en el uso de la escala; se escriben las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas en el eje de ordenada.

	✓ Se construyen todas las barras juntas a modo de histograma. ✓ Se construyen todas las barras separadas. ✓ No se incluye título del gráfico ni etiquetas en los ejes. *Tarea Lanzamiento de dos monedas:* − Al determinar los casos posibles, se identifican cuatro casos en lugar de ocho. Hay estudiantes que no comprenden que el lanzamiento de cada moneda debe ser visto de manera independiente, considerado los dos resultados que aparecen en distinto orden como un único suceso. − Dificultad para determinar la equidad en el juego; hay estudiantes que no comprenden que lo que gana María por su probabilidad debe ser igual a lo que gana Juan por su probabilidad y por lo tanto, no logran plantear un procedimiento para resolver la situación. *Tarea Probabilidad de votar*: − Dificultad para calcular la probabilidad de un suceso compuesto; hay estudiantes que en lugar de calcular el producto de las tres probabilidades multiplican la probabilidad de votar (0,85) por tres. − Representación del problema mediante un diagrama de árbol.
Faceta interaccional (Procesos didácticos)	La metodología didáctica privilegia las actividades de trabajo de grupo y las intervenciones magistrales. Se generan algunas instancias de trabajo individual, pero se producen de manera espontánea sin estar planificadas. − En las fases de trabajo en equipo se ponen de manifiesto diversos conflictos. Hay casos donde el profesor sugiere la solución, rebajando la demanda cognitiva inicial del proyecto, lo que en la teoría de situaciones didácticas es interpretado como efecto “topaze” (Brousseau, 1986) − En las “intervenciones magistrales introductorias” el profesor anticipa algunos contenidos necesarios para responder las cuestiones planteadas. − En los momentos de institucionalización, distribuidos a lo largo del tiempo presencial, el profesor no sistematiza ni establece significados claros para algunos conceptos, técnicas y propiedades estadísticas. − Se realizan diversas intervenciones evaluativas “espontáneas” que permitieron reconocer la progresión del aprendizaje; en ocasiones, el profesor se apoya en las respuestas correctas de algún estudiante, sin considerar los conflictos de aprendizaje de otros. − Al finalizar la sesión 4, se recogen los informes del proyecto con los avances de los grupos como parte de un proceso de evaluación formativa. En la siguiente clase (sesión 5), el profesor realiza la retroalimentación de dichos informes, pero alude solo a los informes cuyas soluciones son correctas sin analizar los errores.
Faceta mediacional (Recursos; tiempo)	− Se manifiestan conflictos con el tiempo requerido para la ejecución de los proyectos. En el proyecto P1 se opta por trabajar con datos recogidos de un curso anterior, en lugar de usar los datos recogidos en la clase; en el proyecto P2 sucede algo similar decidiéndose trabajar con datos supuestos y en el proyecto P3 la mayoría de los grupos solo logró trabajar en el desarrollo de la cuestión 1 durante la clase, para lo cual se entregaron las tablas de frecuencias parcialmente construidas a fin de privilegiar la construcción de gráficos. − El profesor explica la técnica para construir tablas de frecuencias mediante la hoja de cálculo. − Se manifiestan diversos conflictos con el manejo de la hoja de cálculo: uso de la herramienta función, uso de fórmulas, elaboración de tablas de frecuencias y construcción de gráficos.

Indicamos a continuación algunos contenidos que no fueron tratados en la trayectoria didáctica, o lo fueron de manera insuficiente:

- Formulación de problemas por los propios estudiantes. Solo durante la primera sesión los estudiantes tuvieron la oportunidad de generar algunos problemas a través del planteamiento de variables.
- Durante las sesiones de clase solo se resolvieron dos tareas de ejercitación adicionales al desarrollo de los proyectos (lanzamiento de tres monedas y probabilidad de votar) siendo responsabilidad de los estudiantes resolver este tipo de tareas en instancias de trabajo personal. No hubo mecanismos de seguimiento que permitan asegurar su realización.
- Discriminación de las representaciones más apropiadas para representar o comunicar información.
- Interpretación de la intensidad de la relación entre dos variables estadísticas, aunque fuera de manera gráfica e intuitiva.
- Inferencia estadística elemental e intuitiva (representatividad de una muestra, estimación de parámetros).

3. EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES LOGRADOS

En esta sección presentamos los resultados de la evaluación de los informes realizados por los estudiantes en dos proyectos (proyectos P1 y P3) y de la aplicación de una tarea evaluativa final, algunos resultados preliminares sobre la aplicación de estos instrumentos se encuentran recogidos en Godino, Arteaga, Estepa, y Rivas (2013) y en Rivas, Godino, Arteaga y Estepa (2013). Los resultados del proyecto P1, corresponden a 16 informes que fueron realizados por los estudiantes del curso académico 2011-2012; los del proyecto P3, a 37 informes recogidos en los dos cursos académicos en que fue aplicada la acción formativa (2011-2012 y 2012-2013) y; los resultados de la tarea evaluativa final, a los obtenidos de 127 sujetos que respondieron la tarea en los dos cursos académicos.

Para analizar los datos se han tenido en cuenta las variables, “grado de corrección”, “tipo de respuesta” y “tipo de errores” descritos en la metodología. Como se menciona en dicho apartado, la variable grado de corrección, apunta a una evaluación global de la competencia lograda teniendo en cuenta aspectos del conocimiento común y avanzado del contenido. Se asignan 2 puntos si la respuesta es correcta, 0 incorrecta o no responde y, 1 punto si es parcialmente correcta. Esta última puntuación, la hemos utilizado solo en aquellos casos en que la respuesta admite una valoración parcial.

3.1. **Resultados de los informes realizados por los estudiantes en el proyecto "Alumno típico"**

Seguidamente, damos a conocer los resultados obtenidos en las tres cuestiones planteadas en el proyecto P1. En cada Ítem, se tienen en cuenta las cinco variables estadísticas consideradas en el proyecto (género, deporte, número de hermanos, peso y dinero que lleva en el bolsillo). Como ya hemos señalado, los resultados de los informes corresponden a 16 grupos de estudiantes que realizaron el proyecto en el curso académico 2011-2012.

En la figura 5.1 mostramos un gráfico de cajas de la variable grado de corrección con la puntuación obtenida por los estudiantes de este curso.

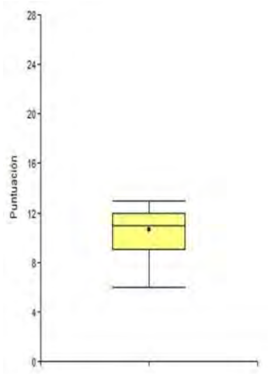


Figura 5.1. Gráfico de cajas de la puntuación obtenida en la variable grado de corrección, proyecto Alumno típico

La puntuación máxima posible en esta evaluación es de 28 puntos. La media ha sido de 10.63; mediana, 11; cuartil inferior, 9.5; cuartil superior, 12; desviación típica de 1.82; mínimo 6 y máximo de 13. En base a estos datos podemos afirmar que la tarea ha resultado difícil para los estudiantes. A continuación analizamos los resultados de cada uno de los ítems.

Ítem 1: ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?

En la tabla 5.5 presentamos los resultados de las respuestas dadas a este ítem para cada variable estadística, distinguiendo las respuestas correctas, parcialmente correctas y erróneas (y en blanco).

Tabla 5.5. Frecuencias y porcentajes de respuestas ítem 1 (n= 16)

VARIABLE:	Correctas		Parcialmente correctas		Erróneas y no responde	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%

1. Género	2	12.5	9	56.3	5	31.3
2. Deporte	8	50.0	8	50.0	-	-
3. Número de hermanos	-	-	13	81.3	3	18.8
4. Peso	-	-	14	87.5	2	12.5
5. Dinero que lleva en el bolsillo	-	-	14	87.5	2	12.5

Nota: El uso del guión (-) indica que no se ha obtenido valor en la celda.

En la variable género, dos de los 16 equipos responden de manera correcta, nueve de forma parcialmente correcta y cinco no responden la pregunta (no hay respuestas erróneas). Los dos equipos que respondieron de forma correcta aplicaron la moda resumiendo los datos en una tabla de frecuencias; ocho de los nueve equipos que respondieron de forma parcialmente correcta, reconocieron el estudiante típico sin aportar una justificación estadística (construcción de tabla de frecuencia o gráficos) y uno, construyó correctamente una tabla de frecuencias sin responder la pregunta. Ningún equipo resumió los datos mediante gráficos y no se manifestaron errores en esta variable.

En la variable deporte, ocho equipos responden de manera correcta y ocho de forma parcialmente correcta. Entre los equipos que respondieron de manera correcta, siete aplicaron la moda construyendo una tabla de frecuencia y un gráfico de barras (un equipo incorporó además un gráfico circular) y uno, construyó solo la tabla de frecuencias. Los ocho equipos que respondieron de forma parcialmente correcta, resumieron los datos en tablas de frecuencias y gráficos de barras sin dar respuesta a la pregunta. Un error recurrente, manifestado en la construcción de gráficos, ha sido la falta de títulos y etiquetas en los ejes de los gráficos de barras. Ninguno de los 15 equipos que construyó este tipo de gráficos incluyó dicha información.

En la variable número de hermanos, 13 equipos responden de forma parcialmente correcta y tres de manera errónea (no hay respuestas en blanco). De los 13 equipos que respondieron de manera parcialmente correcta, 10 calcularon la media interpretando equívocamente este valor, dos aplicaron el valor exacto de la media (2.75) y, uno calculó la media sin dar respuesta a la pregunta. El uso de la media en lugar de la mediana, muestra que si bien los estudiantes tienen un manejo adecuado del *conocimiento común del contenido*, no logran poner en funcionamiento aspectos del *conocimiento avanzado*. La puesta en práctica del conocimiento avanzado del contenido en este ítem, supone tener en cuenta la forma asimétrica de la distribución y en consecuencia, utilizar la mediana y no la media para responder la pregunta. Entre las respuestas parcialmente correctas se manifestaron dos errores; uno ha sido la aproximación de la media (2.75) a dos o tres (siete equipos cometieron este error) y el otro, la determinación del alumno representativo a partir del alumno típico de la variable género (ser mujer). En este último caso, dos equipos calcularon la media del número de hermanos de las mujeres (2.68) y respondieron la pregunta a partir de este valor. Otro error que se manifestó en los tres equipos que respondieron equívocamente, fue el uso de la moda (2), valor especialmente indicado para variables cualitativas.

En la variable peso, 14 equipos responden de forma parcialmente correcta y dos de manera errónea (no hay respuestas en blanco). Entre los equipos que respondieron de manera parcialmente correcta, nueve calcularon la media interpretando equívocamente este valor, tres aplicaron el valor exacto de la media (61.45) y, dos calcularon la media sin dar respuesta a la pregunta. Al igual que en la variable número de hermanos, ningún equipo utilizó la mediana, lo cual sugiere un escaso dominio del conocimiento avanzado (forma de la distribución y análisis de sujetos atípicos). Los errores manifestados, entre las respuestas parcialmente correctas, fueron la aproximación de la media (61.45) a 61 ó 62 (cuatro equipos cometieron este error) y la determinación del alumno típico a partir del alumno representativo de la variable género, donde cuatro equipos calcularon la media de las mujeres (57.44) y respondieron la pregunta a partir de dicho valor. Además de estos errores, entre las respuestas erróneas, los dos equipos que respondieron equívocamente determinan el alumno típico a partir del rango de mayor frecuencia absoluta (cálculo equívoco de la moda).

En la variable dinero, se repiten los resultados de la variable anterior en cuanto a las respuestas correctas, parcialmente correctas y erróneas (y en blanco). Entre las respuestas parcialmente correctas (14 de 16), se obtuvieron los siguientes tipos de respuestas: ocho equipos calcularon la media interpretando equívocamente este valor, cinco aplicaron el valor exacto de la media (10.53) y un equipo calculó la media sin dar respuesta a la pregunta. Al igual que en las dos variables anteriores ningún equipo utilizó la mediana (distribución asimétrica) lo que confirma el escaso manejo de este contenido. Los errores manifestados entre las respuestas parcialmente correctas, en esta variable, son similares a los de la variable anterior; en concreto, cuatro equipos aproximaron el valor de la media (10.53) a 10 u 11 y tres determinaron el alumno típico a partir del alumno representativo de la variable género, aplicando la media de las mujeres (10.73) para responder la pregunta. Entre las respuestas erróneas, los dos equipos que respondieron equívocamente la pregunta han determinado el alumno típico a partir del rango de mayor frecuencia absoluta.

Ítem 2: ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?

La tabla 5.6 contiene los resultados de las respuestas dadas a este ítem para cada variable estadística, distinguiendo las respuestas correctas, parcialmente correctas y erróneas (y en blanco).

Tabla 5.6. Frecuencias y porcentajes de respuestas ítem 2 (n= 16)

VARIABLE:	Correctas		Parcialmente correctas		Erróneas y no responde	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
1. Género	2	12.5			14	87.5
2. Deporte	2	12.5			14	87.5
3. Número de hermanos	-	-	14	87.5	2	12.5
4. Peso	-	-	14	87.5	2	12.5
5. Dinero que lleva en el bolsillo	-	-	14	87.5	2	12.5

Nota: Las celdas en blanco indican que no se aplica el grado de corrección correspondiente para determinadas variables (variables uno y dos) y el uso del guión (-) indica que no se ha obtenido valor en la celda.

En la variable género, dos equipos responden de manera correcta y 14 no responden la pregunta (no hay respuestas erróneas). Los dos equipos que respondieron de manera correcta, argumentaron la representatividad del alumno típico aludiendo al 68% que representan las mujeres. No se manifestaron errores frente a esta variable al responder la cuestión 2.

En la variable deporte, se repite la situación anterior en cuanto al número de respuestas correctas (dos) parcialmente correctas (cero) y que no responden la pregunta (14). Tampoco hubo respuestas erróneas. Los dos equipos que respondieron de manera correcta, argumentaron la representatividad del alumno típico aludiendo al 73% que representan los estudiantes que hacen poco deporte. En esta variable, tampoco se manifestaron errores en las respuestas recogidas.

En la variable número de hermanos, 14 equipos responden de forma parcialmente correcta, uno de manera errónea y el otro no responde la pregunta. De los equipos que respondieron de manera parcialmente correcta, dos calcularon la desviación típica sin utilizar estos valores al responder la pregunta (aplicaron la media) y 12, calcularon la desviación típica sin responder. Lo que se observa, es que la mayoría de los equipos (87.5%) domina convenientemente el procedimiento de cálculo de la desviación típica; sin embargo, no logran interpretar este valor para determinar el grado de representatividad de los promedios. En esta variable se manifestaron dos errores relevantes; el primero, ha sido argumentar la representatividad del estudiante típico mediante el uso de la media (dos equipos) y el segundo, justificar en base al porcentaje de estudiantes que representa la moda. Este último conflicto, se manifestó en el equipo que respondió erróneamente la pregunta.

En la variable peso, se tienen los mismos resultados de la variable anterior en cuanto al número de respuestas correctas (cero), parcialmente correctas (14), erróneas (una) y no responden (una). De igual modo, se ha repetido el mismo tipo de justificaciones y sus frecuencias: dos equipos calcularon la desviación típica sin tener en cuenta estos valores al responder la pregunta y 12, calcularon la desviación típica sin responder. Esto, reafirma la dificultad de los estudiantes para interpretar la desviación típica vinculada a los promedios. Con relación a los errores manifestados en esta variable, los dos equipos que calcularon la desviación típica respondiendo equívocamente la pregunta, han aludido a la media para explicar la representatividad del alumno típico; el equipo que respondió de manera errónea, justificó en base a la frecuencia relativa del rango de mayor frecuencia absoluta.

En la variable dinero, se repiten una vez más los resultados de las dos variables anteriores en cuanto al número de respuestas correctas (cero), parcialmente correctas (14), erróneas (una) y no responden (una). Los tipos de justificaciones entre las respuestas parcialmente correctas también fueron los mismos y con igual frecuencia. En cuanto a los errores, se manifestaron los señalados en la variable anterior (variable peso), siendo los mismos equipos los que cometieron dichos errores.

Ítem 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

En la tabla 5.7 se muestran los resultados de las respuestas dadas a este ítem para las últimas cuatro variables estadísticas (la variable género no admite respuesta), distinguiendo las respuestas correctas, parcialmente correctas y erróneas (y en blanco).

Tabla 5.7. Frecuencias y porcentajes de respuestas ítem 3 (n= 16)

VARIABLE:	Correctas		Parcialmente correctas		Erróneas y no responde	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
1. Deporte	1	6.25	12	75	3	18.8
2. Número de hermanos	-	-	14	87.5	2	12.5
3. Peso	-	-	14	87.5	2	12.5
4. Dinero que lleva en el bolsillo	-	-	-	-	16	100

Nota: El uso del guión (-) indica que no se ha obtenido valor en la celda.

En la variable deporte, hay una respuesta correcta, 12 parcialmente correctas y tres entre erróneas y no responde (estas tres respuestas corresponden a equipos que no responden la pregunta). El equipo que respondió correctamente, utilizó las frecuencias relativas, construyendo una tabla de frecuencias y un gráfico de barras adosadas. Entre los equipos que respondieron de forma parcialmente correcta, cinco construyeron tablas de frecuencias relativas y gráficos interpretando equívocamente estos resúmenes estadísticos al responder la pregunta y siete, construyeron tablas de frecuencias relativas y gráficos sin dar respuesta a la pregunta (uno de estos equipos construyó solo la tabla de frecuencias). Con relación a los errores que se manifestaron en esta variable, siete equipos compararon las dos submuestras (chicos y chicas) mediante un gráfico de frecuencias absolutas, cuatro no reconocieron diferencias entre chicos y chicas aludiendo a que ambos equipos tienen la misma moda (poco deporte) y uno, comparó valores distintos de la moda (nada, mucho).

En la variable número de hermanos, hay 14 respuestas parciamente correctas y dos equipos que no responden (no hay respuestas erróneas). Los tipos de respuestas dadas en esta variable fueron: comparación de medias y desviaciones típicas (dos equipos), comparación de medias sin tener en cuenta indicadores de dispersión (tres equipos), cálculo de la media y la desviación típica sin dar respuesta a la pregunta (cinco equipos) y, cálculo de la media y la desviación típica interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta (cuatro equipos). Llama la atención que ningún equipo utilizó algún tipo de gráfico para establecer diferencias entre chicos y chicas. El único error que se manifestó en esta variable, fue la aproximación del valor de la media de los chicos (2.89) y de las chicas (2.68) a tres, con lo cual se obtiene, que no hay diferencias entre chicos y chicas.

En la variable peso, 14 equipos responden de forma parcialmente correcta y dos no responden. Los tipos de respuestas que se dieron en esta variable fueron: comparación de medias e indicadores de dispersión (dos equipos), comparación de medias sin tener en cuenta indicadores de dispersión (nueve equipos) y cálculo de la media y desviación típica sin dar respuesta a la pregunta (tres equipos). Al igual que en la variable anterior, no hubo ningún equipo que realizara una comparación estadística mediante gráficos. Con respecto a los errores, no se han manifestado errores en las producciones de los estudiantes en esta variable.

En la variable dinero el 100% están entre respuestas erróneas (y en blanco); 14 equipos responden de manera errónea y dos no contestan la pregunta. El alto porcentaje de respuestas erróneas (87.5%) se debe a que los 14 equipos respondieron la pregunta comparando medias; procedimiento que, a diferencia de lo que sucede en las dos últimas variables, conduce a un error, ya que ambas distribuciones son claramente asimétricas, y al comparar las medias de los chicos (10.08) y las chicas (10.73) se obtiene un resultado contrario al de comparar las medianas (la mediana de los chicos es siete y la de las chicas, cinco).

3.2. Resultados de los informes realizados por los estudiantes en el proyecto "Eficacia de un entrenamiento deportivo"

A continuación analizamos los informes realizados por 37 equipos que respondieron el proyecto P3 de acuerdo a los criterios que han sido definidos (grado de corrección, tipo de justificación y tipo de errores). Estos informes corresponden a 17 equipos del curso académico 2011-2012 y 20 equipos del curso 2012-2013.

Para analizar si ambas muestras se pueden considerar como obtenidas de una misma población hemos tenido en cuenta la variable cuantitativa, grado de corrección de las respuestas en cada una de las seis cuestiones planteadas. Realizado un contraste de diferencia de medias de la puntuación total en ambos grupos no se obtienen diferencias significativas, por lo que es pertinente considerarlos como una única muestra. La figura 5.2 contiene un gráfico de cajas que muestra los principales estadísticos de la distribución de frecuencias.

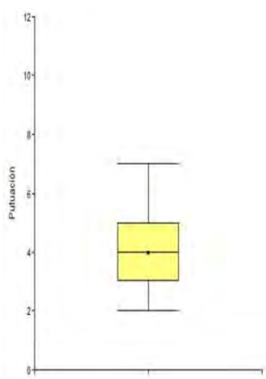


Figura 5.2. Gráfico de cajas de la distribución de la puntuación obtenida en la variable grado de corrección, proyecto Eficacia de un entrenamiento deportivo

La media ha sido de 3.97, muy próxima a la mediana que es 4 (cuartil inferior, 3; cuartil superior, 5) sobre un total posible de 12 puntos, desviación típica de 1.28, mínimo 2 y máximo de 7. Al igual que en el proyecto 1, podemos afirmar que la tarea solicitada ha resultado difícil para los estudiantes. En la tabla 6.8 mostramos los resultados obtenidos en los seis ítems (corresponden a las seis cuestiones planteadas en el proyecto) y luego, analizamos dichos resultados por cada ítem.

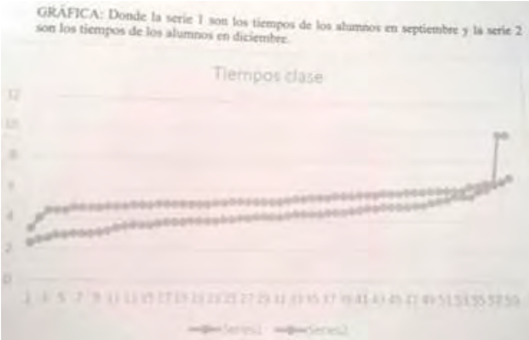
Tabla 5.8. Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas y, erróneas y no responde (n= 37)

ÍTEM:	Correctas		Parcialmente correctas		Erróneas y no responde	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
1. ¿Ha sido efectivo el entrenamiento?	-	-	33	89.2	4	10.8
2. Diferencias chicos/chicas en septiembre	2	5.4	29	78.4	6	16.2
3. Diferencias chicos/chicas en diciembre	-	-	31	83.8	6	16.2
4. ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?	-	-	4	10.8	33	89.2
5. ¿Hay alumnos atípicos?	10	27.0			27	73.0
6. ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos?	13	35.1			24	64.9

Nota: Las celdas en blanco indican que no se aplica el grado de corrección correspondiente para determinados ítems (ítem cinco y seis) y el uso del guión (-) indica que no se ha obtenido valor en la celda.

Ítem 1: ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?

En este ítem 33 equipos responden de forma parcialmente correcta y cuatro de manera errónea (no hay respuestas en blanco). El procedimiento predominante en los equipos que respondieron de manera parcialmente correcta ha sido la comparación de medias sin justificar su uso en lugar de la mediana, 25 de los 33 equipos realizaron este procedimiento; cinco equipos justificaron la respuesta sin hacer una reducción estadística de los datos; dos equipos calcularon estadísticos (medias y dispersiones) sin dar respuesta a la pregunta y; un equipo calculó correctamente las medias y dispersiones interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta. Llama la atención que 28 equipos calcularon, además de la media, la desviación típica, pero sin interpretar estos valores al responder la pregunta; este aspecto del conocimiento avanzado del contenido se presenta por tanto, como un contenido difícil de manejar para los estudiantes que concuerda con lo señalado en Peters (2009) quien plantea que muchos profesores tienen dificultades para razonar sobre la desviación típica en conjunción con la media. Entre las respuestas anteriores, no encontramos ninguna justificación basada en la representación gráfica de las distribuciones de frecuencias. Con relación a los errores, cinco equipos construyeron gráficos sin hacer una reducción estadística de los datos en tablas de frecuencias (figura 5.3); siete realizaron una estrategia de conteo directamente sobre la matriz de datos y; uno comparó las sumas de las frecuencias de las dos distribuciones, en lugar de las medias.



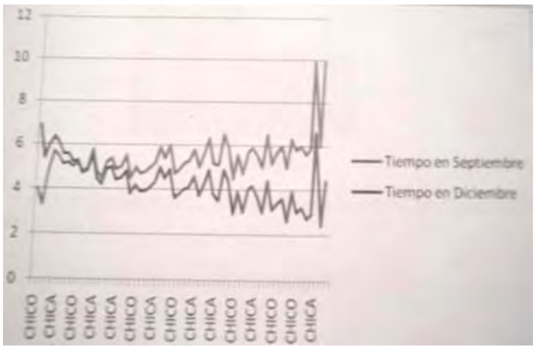


Figura 5.3. Comparación gráfica tiempos septiembre y diciembre sin reducir estadísticamente los datos

Cabe destacar que entre quienes realizaron algún tipo de gráfico (diez equipos en total) ninguno usó correctamente títulos ni etiquetas en los ejes.

Ítem 2: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?

Destacan dos respuestas correctas en este ítem, 29 son parcialmente correctas y hay seis respuestas erróneas (no hay respuestas en blanco). De los dos equipos que respondieron de manera correcta, uno comparó las medias de los chicos y chicas quitando los valores atípicos de las chicas (9.9 segundos) y el otro, comparó las medianas si justificar su uso. Entre los equipos que respondieron de forma parcialmente correcta, 27 aplicaron la media sin justificar su uso en lugar de la mediana y dos, calcularon estadísticos (medias y desviaciones típicas) sin dar respuesta a la pregunta. En este ítem, 26 equipos calcularon las desviaciones típicas sin aludir a estos valores al responder la pregunta. No hay ningún equipo que haya comparado las distribuciones de frecuencias mediante gráficos.

Frente a esta pregunta se manifiestan errores similares a los señalados en el ítem anterior; dos equipos construyeron gráficos sin hacer una reducción estadística de los datos en tablas de frecuencias y dos usaron una estrategia de conteo observando la matriz de datos. Uno de los dos equipos que construyeron gráficos, realizó un diagrama para chicos y otro para chicas (figura 5.4).

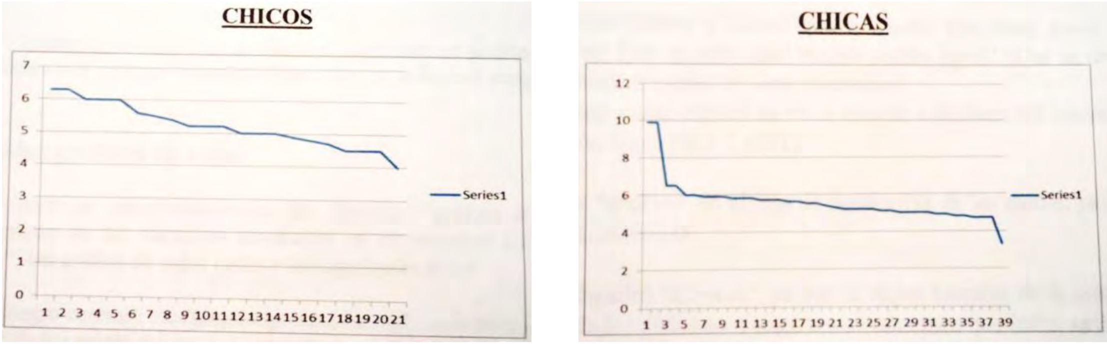


Figura 5.4. Comparación gráfica tiempos chicos y chicas en septiembre sin reducir estadísticamente los datos y separando las dos submuestras

En este ítem hubo nueve equipos que construyeron algún tipo de gráfico, y al igual que en la variable anterior, ninguno incluyó correctamente título y etiquetas en los ejes.

Ítem 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?

En este ítem, 31 equipos responden de forma parcialmente correcta y seis de manera errónea (no hay respuestas en blanco). Al igual que en el ítem anterior la comparación de las dos distribuciones se hace teniendo en cuenta preferentemente la media sin justificar su uso en lugar de la mediana, 28 de los 31 equipo realizan este procedimiento. De los otros tres equipos, uno calculó estadísticos (medias y desviaciones típicas) sin dar respuesta a la pregunta; otro calculó estadísticos interpretando equívocamente estos valores y; el tercero, reconoció que es mejor el tiempo de los chicos sin justificar la respuesta. En ningún caso se compararon las dos distribuciones de frecuencias mediante gráficos.

En este ítem, se repiten los errores señalados en la cuestión anterior respecto a la construcción de gráficos. En la figura 5.5 se muestran el gráfico realizado por un equipo que no hizo una reducción estadística de los datos.

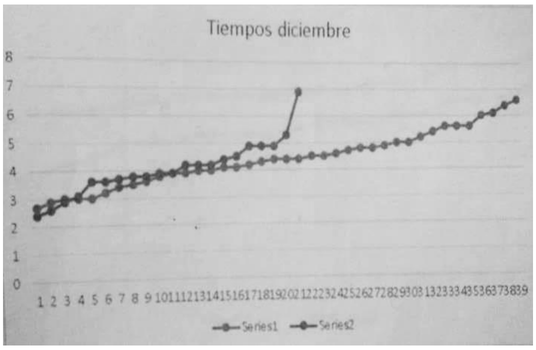


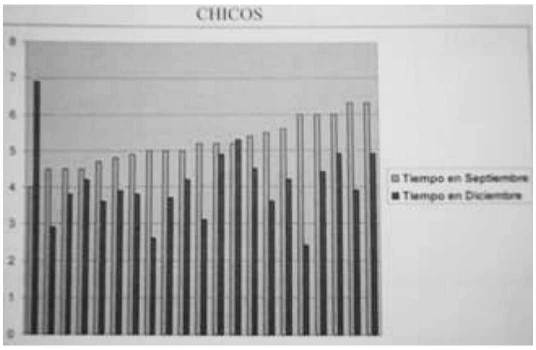
Figura 5.5. Comparación gráfica tiempos chicos y chicas en diciembre sin reducir estadísticamente los datos

En este ítem, siete equipos realizaron algún tipo de gráfico sin incluir correctamente títulos y etiquetas.

Ítem 4: ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?

Cuatro equipos responden de manera parcialmente correcta, 29 de forma errónea y cuatro no responden la pregunta. Los cuatro equipos que dieron una respuesta parcialmente correcta, reconocieron que habían mejorado más los chicos sin justificar su respuesta. El error de mayor frecuencia, fue comparar las diferencias de las medias de septiembre y diciembre obtenidas por los chicos y chicas, en lugar de los porcentajes de mejora que representan dichas medias en sus respectivos grupos (en 18 equipos se ha manifestado este error). La media de los chicos en septiembre es de 5.22 y en diciembre 4.08, la de las chicas 5.58 y 4.44 respectivamente; al calcular las diferencias de las medias (septiembre y diciembre) en ambos grupos se obtiene el valor 1.14, con lo que se concluye equívocamente que los chicos y las chicas han mejorado lo mismo.

Otros errores manifestados fueron la comparación directa de las medias (comparación de medias de chicos y chicas en septiembre y luego en diciembre), la construcción de gráficos sin hacer una reducción estadística de los datos (figura 5.6) y; el uso de una estrategia de conteo en la matriz de datos.



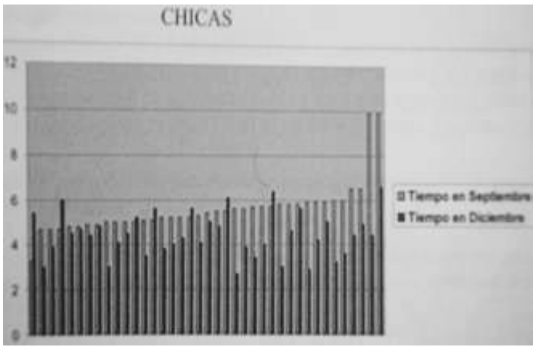


Figura 5.6. Comparación gráfica de la mejora de los tiempos de chicos y chicas sin reducir estadísticamente los datos

Siete equipos construyeron algún tipo de gráfico sin incluir el título ni etiquetar los ejes.

Ítem 5: ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como "atípico" en su capacidad de correr?

De los 37 equipos 10 dan una respuesta correcta, 22 responden de manera errónea y cinco no responden la pregunta. Los 10 equipos que respondieron correctamente, lo hicieron empleando el criterio dado por el profesor (M ± 2 x DT). No un hubo ningún equipo que representara gráficamente los valores atípicos. Un error recurrente fue que en 21 casos los estudiantes consideraron como atípicos los valores mínimo o máximo de las distribuciones correspondientes.

Ítem 6: ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

En este ítem 13 equipos responden de manera correcta mientras que 24 no responden la pregunta. No hay respuestas erróneas.

3.3. **Resultados de la prueba sumativa**

Describimos en esta sección los resultados de la aplicación de la prueba sumativa final a los dos grupos de estudiantes a los cuales hemos aplicado el proceso formativo. El primer curso (2010-2011) está compuesto por 58 estudiantes y el segundo (2011-2012) por 69, con lo cual se tiene un total de 127 sujetos que respondieron la prueba.

Para analizar si ambas muestras se pueden considerar como obtenidas de una misma población, hemos tenido en cuenta la variable cuantitativa grado de corrección. Con este criterio la puntuación máxima obtenible es de 12. En la figura 5.7 mostramos los gráficos de cajas de la variable puntuación total en ambos grupos.

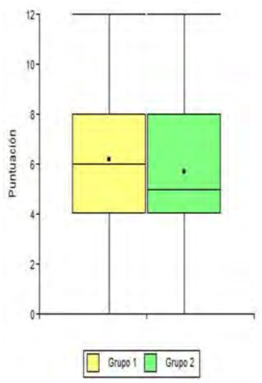


Figura 5.7. Gráficos de cajas de la distribución de la puntuación obtenida en la variable grado de corrección, evaluación final

Los valores mínimos (cero), máximos (12), primer cuartil (4) y tercer cuartil (8) son los mismos en ambos grupos. La media del grupo 1 es de 6.19, ligeramente superior a la del grupo 2 (5.71) y las desviaciones típicas, corresponden a 2.78 en los dos grupos. En base a estos valores podemos afirmar que la tarea ha presentado un nivel de dificultad similar en los dos cursos en los que ha sido aplicada. Realizado un contraste de diferencias de medias no resulta significativo al nivel del 5% por lo que podemos analizar ambos grupos como formando una única muestra de 127 sujetos.

En la tabla 5.9 presentamos los tipos de respuestas dadas a los seis ítems distinguiendo las respuestas correctas, parcialmente correctas y erróneas (y en blanco) y seguidamente, realizamos un análisis de las respuestas obtenidas frente a cada ítem.

Tabla 5.9. Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas y, erróneas y no responde (n= 127)

ÍTEM:	Correctas		Parcialmente correctas		Erróneas y no responde	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
1. Espacio muestral	47	37.0			80	63.0
2. Asignación de probabilidades	100	78.7			27	21.3
3. Construcción tabla de frecuencias relativas	90	70.9	27	21.3	10	7.9
4. Representación diagrama de barras de frecuencias relativas	43	33.9	23	18.1	61	48.0
5. Representación diagrama de barras distribución probabilidad	20	15.7	12	9.4	95	74.8
6. Reconocimiento de la ley de los grandes números	29	22.8	33	26.0	65	51.2

Nota: Las celdas en blanco indican que no se aplica el grado de corrección correspondiente para determinados ítems (ítem uno y dos).

Ítem 1: Escribir el espacio muestral del experimento aleatorio, "Lanzar el dado dodecaedro descrito y observar el número mostrado por la cara situada más arriba"

El 37% de los estudiantes responde correctamente este ítem reconociendo el espacio muestral del experimento, mientras que el 63% está entre las respuestas erróneas y no responden. De un total de 80 respuestas entre erróneas (85%) y que no responden (15%) en este ítem hemos encontrado 53 (lo que representa el 66,3% del total de respuestas erróneas en este ítem y el 41,7% del total de los estudiantes) en las cuales el error consiste en señalar que el espacio muestral del experimento está formado por el conjunto $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6\}$; los estudiantes no reconocen que, en las condiciones de numeración de las caras del dado, no es posible distinguir las caras numeradas con el mismo número, por lo que los sucesos elementales posibles son obtener uno de los números del 1 al 6. Zimmermann (2002) también encontró dificultades de los estudiantes de los primeros cursos universitarios en el reconocimiento de espacios muestrales válidos.

Ítem 2: Calcular la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles y escribir dichas probabilidades.

En este ítem el 78.7% de los estudiantes responde correctamente, el 14.2% responde de manera errónea y el 7.1% no responde. Para responder la pregunta los estudiantes utilizaron notación fraccionaria, decimal y porcentaje, empleando uno o más de estos registros para escribir las probabilidades; específicamente, 59 estudiantes emplearon más de un tipo de notación y 41 respondieron mediante una única "representación" (34 en notación fraccionaria y siete en notación decimal). No se manifiestan errores frecuentes en esta pegunta.

Ítem 3: Construir una tabla de frecuencias relativas con los datos obtenidos de simular el lanzamiento de los dados 30 veces.

El 70.9% de los estudiantes responde correctamente esta pregunta, el 21.3% lo hace de forma parcialmente correcta y el 7.9% está entre las respuestas erróneas y no responde (el 3.2% son respuestas erróneas y el 4.7% no responde). De los estudiantes que respondieron de manera correcta, 64 (71.1 % de las respuestas correctas) expresaron las frecuencias relativas en notación decimal; dos en notación fraccionaria (2.2% de las respuestas correctas) y 24 (26.7% de las respuestas correctas) en porcentaje. El uso de notación fraccionaria supone una dificultad al momento de representar las frecuencias relativas y la distribución de probabilidad en un gráfico de barras adosadas (ítem 5).

Las respuestas parcialmente correctas, corresponden a estudiantes que determinaron correctamente los valores y las frecuencias absolutas sin calcular las frecuencias relativas (66.7% de las respuestas parcialmente correctas) o calculándolas equívocamente (33.3% de las respuestas parcialmente correctas). Al igual que en el ítem anterior, no destacan errores frecuentes en esta pregunta.

Ítem 4: Representar la distribución de frecuencias relativas mediante un diagrama de barras.

Este ítem lo responden correctamente el 33.9% de los estudiantes, el 18.1% responde de forma parcialmente correcta y hay un 48% entre respuestas erróneas y no responde (46.4% responde de forma errónea y un 1.6% no responde). Las respuestas correctas corresponden a estudiantes que construyeron apropiadamente el gráfico de barras a partir de las frecuencias relativas, y las parcialmente correctas, a alumnos que habiendo considerado adecuadamente los valores y las frecuencias relativas, dibujaron mal las barras. Con relación a los errores, entre quienes han respondido de manera errónea, 53 estudiantes (lo que representa el 86.8% de las respuestas erróneas y el 41.7% del total de las respuestas) construyeron el gráfico de barras a partir de las frecuencias absolutas; tres (4.9% de las respuestas erróneas) no incluyeron datos en la ordenada y tres construyeron otro tipo de gráficos. Un segundo error que se ha manifestado, tanto en respuestas erróneas como parcialmente correctas, es la construcción de todas las barras juntas “como si fuera un histograma” (figura 5.8); 14 estudiantes (11% del total de las respuestas) cometieron este error.

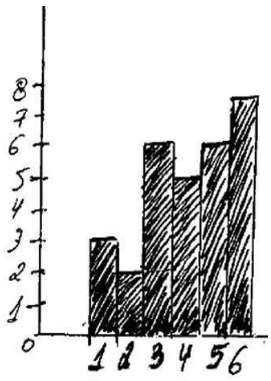


Figura 5.8. Gráfico de barras de frecuencias relativas con error de espacio entre barras

Otro error que tuvo lugar, entre las respuestas parcialmente correctas, ha sido la construcción errónea de la altura de las barras, cometido por nueve estudiantes (7.1% del total de las respuestas). Finalmente, una dificultad importante en este ítem, ha consistido en la incorrecta asignación de títulos al gráfico y las etiquetas de los ejes. Prácticamente la totalidad de los estudiantes (96,9%) han manifestado esta dificultad.

Ítem 5: Representa sobre la misma gráfica anterior (barras adosadas) la distribución de probabilidad calculada en el apartado b.

El 15.7% de los estudiantes ha respondido correctamente este ítem, un 9.4% responde de forma parcialmente correcta y el 74.8% está entre las respuestas erróneas (30.7%) y no responde (44.1%). Las respuestas correctas corresponden a estudiantes que construyeron barras adosadas representando correctamente la distribución de probabilidad y las parcialmente correctas, a alumnos que habiendo construido las barras de acuerdo a la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles no dibujaron barras adosadas.

Un error manifestado, fue la representación de la distribución de probabilidad considerando frecuencias absolutas; 24 estudiantes (25.3% de las respuestas erróneas y no responde) cometieron este error. Otro error, fue construir la gráfica sin dejar espacio entre las barras que representan la distribución de probabilidad y las frecuencias relativas (figura 5.9). Este error ha tenido lugar en 12 estudiantes, lo que corresponde al 12.6% de las respuestas erróneas y no responde.

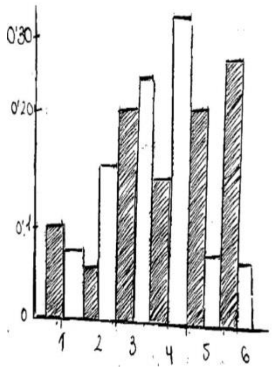


Figura 5.9. Gráfico de frecuencias relativas y de distribución de probabilidad con error de espacios entre barras

Un tercer error manifestado fue la construcción errónea de la altura de las barras, 11 estudiantes (11.6% de las respuestas erróneas y no responde) cometieron este error. Finalmente, un error que tuvo igual frecuencia que el anterior (11) fue la construcción del gráfico de distribución de probabilidad "superpuesto" al de frecuencias relativas (figura 5.10); este error se manifiesta, en la mayoría de los casos, en estudiantes que habían dibujado todas las barras juntas al representar las frecuencias relativas.

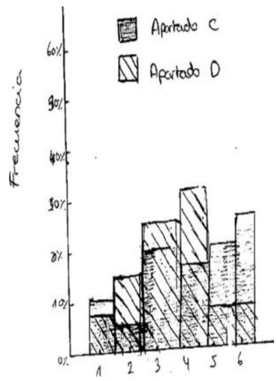


Figura 5.10. Gráfico de frecuencias relativas y de distribución de probabilidad con barras superpuestas

Ítem 6: ¿Qué esperas observar respecto a los diagramas de barras representados?

Esta cuestión ha sido respondida correctamente por el 22.8% de los estudiantes, un 26% responde de forma parcialmente correcta y el 51.2% responde de forma errónea (33.1%) y no responde (18.1%). Las respuestas correctas corresponden a estudiantes que reconocen que ambos gráficos "deberían estar más igualados" y las parcialmente correctas, a alumnos que reconocen lo que se espera observar en cada uno de los resultados elementales posibles, sin establecer una comparación entre el gráfico de frecuencias relativas y el de probabilidad.

Este ítem evalúa un conocimiento avanzado del contenido de la estocástica, convergencia en probabilidad de las frecuencias relativas a la probabilidad del suceso correspondiente. Este contenido es de interés para el maestro, ya que le permite clarificar las relaciones entre las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad (regla de Laplace). Prácticamente la mitad de los estudiantes han manifestado un nivel de comprensión aceptable de este contenido.

Entre las respuestas erróneas, se manifiestan dos errores en este ítem; el primero, consiste en señalar que ambos gráficos mantendrían la forma (6 estudiantes) y el segundo, en responder que los dos gráficos serían exactamente iguales (2 estudiantes).

4. ANÁLISIS RETROSPECTIVO

El análisis retrospectivo contempla una comparación del análisis a priori realizado sobre las prácticas, objetos y procesos implicados en los proyectos con los hechos didácticos observados en la implementación, una reflexión sobre las normas que condicionan el proceso instruccional, el análisis de los resultados de aprendizaje (evaluaciones) y una valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio en su globalidad.

4.1. **Comparación del diseño con los hechos didácticos observados**

Hacemos a continuación una comparación centrada en la faceta epistémica del diseño con los HDS observados durante la implementación. Esta comparación se centra en el análisis de las tres configuraciones didácticas que caracterizan el diseño (proyectos P1, P2 y P3) y se realiza teniendo en cuenta las mismas herramientas teóricas empleadas en el análisis a priori (nociones de práctica objetos y procesos).

4.1.1. Contraste del diseño con la contingencia en el proyecto "Alumno típico"

Tipo de problema y prácticas estadísticas:

El estudio de los contenidos estadísticos se realizó en torno a las cuestiones del proyecto P1. Los estudiantes tuvieron oportunidad de formular problemas propios a través del enunciado de variables, pero finalmente no fueron abordados.

Las prácticas estadísticas operativas y discursivas realizadas en la resolución del problema fueron concordantes con las contempladas en el diseño. En la cuestión 1, los estudiantes reducen los datos en tablas de frecuencias y calculan promedios (media, mediana y moda) utilizando principalmente la moda para identificar el alumno típico, aunque hay también alumnos que emplean la media. El uso de los promedios de acuerdo al tipo de variables, y de la media o la mediana según la forma de la distribución fueron explicados por el profesor. Para determinar la representatividad del alumno típico se utiliza el tamaño de las frecuencias relativas en las variables género y deporte; en las otras tres variables, no se llega a analizar la representatividad de los promedios según el tamaño relativo de las dispersiones. En la "cuestión 2", los estudiantes calcularon promedios y dispersiones y construyeron diagramas adosados de las dos submuestras (chicos y chicas). El profesor complementó las prácticas realizadas con el uso de gráficos de cajas y diagramas de barras contrapuestas (gráficos de barras e histogramas) como otra forma de comparación estadística de las dos distribuciones. Además de las prácticas anteriores, el profesor explicó el histograma y el polígono acumulativo de frecuencias de la variable dinero, relacionándolo con el cálculo de percentiles.

Elementos lingüísticos:

En concordancia con lo señalado en el diseño, la mayoría de los estudiantes no atribuye significado inmediato a las siguientes expresiones lingüísticas:

- "Características de un estudiante típico o representativo de la clase".
- "¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?"
- "Diferencias entre chicos y chicas".

Esta situación, fue abordada por el profesor a través de explicaciones magistrales (explicaciones para toda la clase) y puntuales (dirigidas a estudiantes o grupos específicos) que permitieron dar el significado esperado a dichas expresiones.

Las dificultades previstas en la rotulación de las tablas de frecuencias y gráficos se produjeron de manera reiterada y requirieron una atención especial por parte del docente. Lo mismo sucedió con el lenguaje de símbolos y fórmulas asociados a conceptos y procedimientos estadísticos relativos a promedios y dispersiones.

Una situación similar a la anterior, sucedió con el lenguaje asociado al uso de la hoja de cálculo y su funcionamiento. La mayoría de los estudiantes no manejaba el lenguaje técnico de la herramienta y se manifestaron dificultades en la manera de representar e interpretar los datos.

Elementos conceptuales:

Los conceptos estadísticos elementales son introducidos por el profesor al inicio de la primera clase constituyéndose en elementos esenciales para comprender y realizar las prácticas operativas y discursivas de la estadística estudiada. Hubo conceptos con los que se esperaba que los estudiantes estuvieran familiarizados que resultaron conflictivos; específicamente, los conceptos de frecuencia relativa, mediana, dispersión, y desviación típica debieron ser explícitamente tratados porque no eran recordados o estaban insuficientemente comprendidos. El significado de la media, mediana y moda, como valores representativos de un conjunto de datos, resultaron conflictivos. El profesor debió abordar dichos conceptos a través de explicaciones magistrales y reforzarlos en las actividades de trabajo en equipo.

Un “conflicto conceptual”, no previsto en el análisis a priori, fue la dificultad para comprender el concepto de límite inferior y superior de un intervalo. La mayoría de los estudiantes no tenía claro cuáles son los valores extremos.

Propiedades:

Las propiedades descritas en el diseño no fueron utilizadas implícitamente sino que fueron explicadas por el profesor como una forma de orientar el trabajo de los estudiantes. La propiedad “si la dispersión respecto de un promedio es alta (o baja) el promedio es menos (o más representativo) de la colección de datos” presentó una dificultad particular para los estudiantes al momento de determinar la representatividad del alumno típico.

Procedimientos:

Entre los procedimientos considerados conocidos por los estudiantes en el diseño, el cálculo de las frecuencias relativas y la construcción de diagramas mediante la hoja de cálculo resultaron particularmente conflictivos. Los demás procedimientos, tal como ha sido señalado en el diseño, son contenidos no recordados por los estudiantes y por lo tanto tuvieron carácter de contenidos emergentes.

Algunos “conflictos procedimentales” que tuvieron lugar durante la implementación fueron:

- Asignación de códigos numéricos a variables ordinales para calcular la media.
- Tratamiento de los valores con frecuencia mayor a uno en el cálculo de la mediana.
- Persistencia en el uso de algoritmo de cálculo para la media de datos agrupados en intervalos, aun cuando se dispone de medios de cálculo más precisos (calculadora y hoja de cálculo).

- Errores en el algoritmo de cálculo de las frecuencias relativas.
- Dificultad para construir gráficos mediante la hoja de cálculo (representación de los valores y las frecuencias en un mismo eje)
- Errores reiterados en uso de la herramienta función de la hoja de cálculo.
- El valor máximo se ubica en el bigote derecho en el gráfico de caja.

Argumentos:

En la cuestión 1, para justificar las características de un estudiante típico o representativo de la clase, los argumentos empleados por los estudiantes para las dos primeras variables (género y deporte) son concordantes con lo señalados en el diseño. En el resto de las variables (número de hermanos, peso y dinero), en lugar de utilizarse la mediana como se plantea en el diseño, se utilizó principalmente la media sin tener en cuenta la forma de la distribución de los datos. Hubo también estudiantes que utilizaron la moda. Para justificar la representatividad del alumno típico en las variables, género y deporte, se alude principalmente al "tamaño" de las frecuencias, planteándose que en ambos casos, se trata de valores altamente representativos. En las demás variables, no hay ningún grupo que durante la implementación haya establecido explícitamente el "grado" de representatividad del alumno típico.

En la cuestión 2, para establecer las diferencias entre chicos y chicas la mayoría de los grupos realizan los cálculos esperados en el diseño (media, mediana, moda, rango, desviación típica); sin embargo, la realización de dichos cálculos es motivada por el profesor y no siempre son bien utilizados por los estudiantes para justificar sus respuestas.

La comparación y el desarrollo de argumentos basados en representaciones gráficas son abordados por el profesor, quien explica las diferencias entre chicos y chicas para las variables, peso y dinero, a través de gráficos de caja. También los estudiantes tienen la posibilidad de explorar el uso de representaciones gráficas en la hoja de cálculo pero, no llegan a realizar conclusiones durante la clase.

Procesos:

Los dos procesos de idealización considerados particularmente "complejos" en el diseño (el sujeto típico no siempre corresponde al valor de la variable y el grado de representatividad depende de la cuantía de la dispersión) no fueron abordados durante las sesiones presenciales con la atención esperada. Los procedimientos y propiedades aplicados para dar respuesta a las cuestiones planteadas, fueron generalizados de acuerdo a lo planteado en el diseño. El profesor enfatizó en estos dos procesos vistos como "reglas" generales aplicables a otras situaciones.

4.1.2. Contraste del diseño con la contingencia en el proyecto "Lanzamiento de dos dados"

Tipo de problema y prácticas estocásticas:

El estudio de los contenidos de probabilidad se realizó en base a las cuestiones del proyecto P2. Se incluyeron dos tareas no previstas en la etapa de diseño que permitieron reforzar algunos contenidos abordados durante el proyecto.

Las prácticas operativas y discursivas realizadas permitieron movilizar las intuiciones, conceptos y técnicas probabilísticas elementales, tal como ha sido previsto en la etapa de diseño. Frente a la cuestión "¿Qué prefieres ser jugador A o B?", en primera instancia los estudiantes utilizan sus intuiciones sobre el azar; pero luego, orientados por el profesor, representan las sumas posibles en tablas de doble entrada y obtienen el espacio maestral del experimento. Al responder la cuestión "¿Es equitativo este juego?", los estudiantes justifican señalando que en 20 de 36 casos gana A y en 16 de 36 gana B, a partir de lo cual el profesor institucionaliza la regla de Laplace. Se dan también oportunidades para que los estudiantes expresen en notación fraccionaria la probabilidad de diferentes sucesos (probabilidad de que la suma sea dos, seis,…).

Al prever si se repetirá el resultado obtenido al simular el lanzamiento de los dados 10 veces en un experimento que contemple 100 lanzamientos (cuestión 4), se introduce la propiedad de la ley empírica de los grandes números. Esta propiedad, es profundizada en la primera parte de la actividad 2 al justificar porque no ha ganado el jugador A (como era de esperar) en un experimento realizado 100 veces y justificada mediante la siguiente pregunta planteada por el profesor "imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces, ¿qué pasará?"

Al responder la "cuestión 6", los estudiantes emplearon las técnicas elementales previstas (tablas de frecuencias y gráficos de distribución de frecuencias y de probabilidad) y aplicaron la propiedad "la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad es lenta y presenta fluctuaciones" para explicar las diferencias entre las frecuencias relativas y la probabilidad. En esta misma cuestión se reforzó también la propiedad de la ley empírica de los grandes números con la pregunta "¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?”

Elementos lingüísticos:

Tal como ha sido previsto en el diseño, la expresión central del problema “¿Qué prefieres ser jugador A o B?” resultó significativa para los estudiantes y no generó conflictos. Así mismo, las demás expresiones: “¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? ¿Quién tiene más probabilidades de ganar?”, tampoco resultaron conflictivas. La mayoría de los estudiantes les atribuyó el significado esperado sin la necesidad de que fueran aclaradas por el profesor.

La expresión, “Simula el lanzamiento de dos dados”, tal como ha sido previsto necesitó ser discutida y especificada por el profesor en diferentes momentos de la clase, conjuntamente con el dispositivo de registro de los resultados.

El supuesto de que el maestro en formación está familiarizado con los términos y expresiones probabilísticas elementales no se cumplió en su totalidad, expresiones como: suceso, tabla de doble entrada, espacio muestral, tabla y gráfico de distribución de probabilidad, casos favorables y casos posibles, no eran recordados por la mayoría y en consecuencia debieron ser explicados por el profesor.

La “hipótesis” de que el sesgo de la heurística de la representatividad se podría manifestar al responder la cuestión “¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más?” se ha verificado en diferentes grupos. Este conflicto, también tuvo lugar al responder la cuestión “¿Qué prefieres ser jugador A o B?”; algunos estudiantes justificaron a partir de los resultados obtenidos al simular el lanzamiento de los dados 10 veces. Otro conflicto, previsto en el diseño, que se manifestó con bastante regularidad fue la dificultad para representar la distribución de probabilidad y las frecuencias relativas a través de un gráfico de barras adosadas. En el desarrollo del proyecto se favoreció el uso de diferentes representaciones y procesos de traducción entre las mismas.

Elementos conceptuales:

Al contrario de lo esperado en el diseño, hubo conceptos elementales de probabilidad que no eran recordados por los estudiantes, p. e, suceso. Estos conceptos debieron ser aclarados por el profesor en sus intervenciones magistrales y reforzados en las actividades de trabajo en equipo. Un conflicto conceptual previsto en el diseño, que tuvo lugar durante la implementación, fue la confusión de la frecuencia con el valor de la variable.

Propiedades:

El profesor ha prestado atención a las propiedades fundamentales indicadas en el diseño. La propiedad “simetría del dado, equiprobabilidad” ha sido introducida al presentar la situación inicial y reforzada durante la simulación del lanzamiento de los dados. Las demás propiedades, fueron explicadas por el profesor y aplicadas por los estudiantes para responder las cuestiones planteadas. De los conflictos mencionados en el diseño tuvieron lugar el sesgo de la equiprobabilidad y la “ley de los pequeños números” descrito por Kahneman et al. (1982) como el sesgo de la heurística de representatividad.

Procedimientos:

Los procedimientos estudiados en el proyecto anterior (tabulación de frecuencias, elaboración de diagramas de barras) no presentaron mayores dificultades; sin embargo, algunas técnicas elementales como la construcción de tablas de doble entrada y el uso de diagrama de árbol no eran recordados. Los procedimientos considerados emergentes en el diseño tuvieron el carácter esperado y por tanto, fueron abordados como tal.

En cuanto a los conflictos, se han manifestado los señalados en el diseño. Así mismo, algunos conflictos no previstos que han tenido lugar fueron:

- Dos sumas que aparecen en distinto orden se consideran como un único suceso (5+1 y 1+5 se contabiliza solo una vez).
- Hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas al comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias).
- En la construcción del diagrama de barras adosadas se construyen todas las barras juntas a modo de histograma y en otros casos, se construyen todas las barras separadas.

Además de los conflictos anteriores, en la realización de las tareas “Lanzamiento de tres monedas” y “Probabilidad de votar” tuvieron lugar los siguientes conflictos:

- En la primera tarea, se identifican cuatro casos en lugar de ocho; hay estudiantes que no comprenden que el lanzamiento de cada moneda debe ser visto de manera independiente.
- En la segunda tarea, hay estudiantes que en lugar de calcular el producto de las tres probabilidades multiplican la probabilidad de votar (0.85) por tres.

Argumentos

La simetría de los dados no requirió ser mayormente discutida, los estudiantes suponen dicha condición desde el momento en que se les presenta la "situación problema". Frente a la cuestión "¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta", hay estudiantes que utilizan sus intuiciones y otros, que después de simular el lanzamiento de los dados 10 veces, argumentan en base a los resultados obtenidos. Estos argumentos son corregidos por el profesor.

En la cuestión "¿Es equitativo este juego?", los estudiantes aplican el razonamiento deductivo apoyados en la regla de Laplace, tal como ha sido planteado en el diseño. Pero en la mayoría de los casos, guiado por el profesor.

Frente a las preguntas "¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas", hay estudiantes que afirman sus razonamientos en los resultados obtenidos al realizar el experimento 10 veces (sesgo de la heurística de la representatividad) y otros justifican mediante la ley empírica de los grandes números apoyados por el profesor. Este último argumento, también es utilizado para explicar por qué no ha ganado más veces el jugador A como era de esperar después de haber realizado el experimento 100 veces.

Ante la pregunta "¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10.000 veces?", se argumenta en base a la propiedad "la convergencia a las frecuencias relativas a la probabilidad es lenta y presenta fluctuaciones". Estos argumentos son guiados por el profesor y reforzados a través de comprobaciones empíricas con el el simulador STATMEDIA.

Procesos:

Durante las prácticas operativas y discursivas realizadas en el estudio de este proyecto, han tenido lugar los procesos de generalización, idealización y particularización señalados en el diseño.

4.1.3. Contraste del diseño con la contingencia en el proyecto "Eficacia de un entrenamiento deportivo"

Tipo de problema y prácticas estadísticas:

Los contenidos estadísticos fueron estudiados a partir de las cuestiones planteadas en el proyecto P3, sin que se incluyeran nuevas tareas (o problemas). Las prácticas estadísticas operativas y discursivas puestas en juego estuvieron centradas en el cálculo e interpretación de estadísticos y en menor grado en el uso de representaciones gráficas.

Para responder las cuatro primeras cuestiones, los estudiantes utilizan la media para hacer las comparaciones y calculan la desviación típica como indicador de dispersión. No se fija la atención en la forma de las distribuciones y en la cuestión 4, tampoco se analiza que la comparación se debe realizar teniendo en cuenta el "porcentaje de mejora" que representa la media.

La representación gráfica simultánea de las distribuciones sobre un mismo sistema de coordenadas y las prácticas asociadas (determinación de la forma de las distribuciones, identificación de valores atípicos y justificación a partir del gráfico) no lograron ser trabajadas por falta de tiempo. Solo se inició la exploración de gráficos para comparar los chicos y chicas.

Para determinar los sujetos atípicos (cuestión 5) se aplicó el criterio propuesto (M ± 2 x DT), siendo el profesor quien explica lo que se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico.

Elementos lingüísticos:

En concordancia con lo previsto en el diseño, las expresiones de lenguaje común, los términos y representaciones estadísticas estudiadas en el proyecto P1 y, el lenguaje técnico asociado a la hoja de cálculo no presentaron mayores dificultades para los estudiantes; no obstante, los conceptos de dispersión y desviación típica resultaron algo conflictivos.

De las representaciones previstas como "conflictivas", el gráfico de barras adosadas resultó particularmente difícil; específicamente, la representación de los valores y las marcas de clases, la construcción de las barras y, el uso correcto de títulos y etiquetas. Algunos procesos de traducción entre sistemas de representación; en particular, la ordenación de las series de datos y la representación de los datos en tablas de frecuencias fueron realizados por el profesor. Los estudiantes realizaron un proceso exploratorio de conversión de datos de tablas de frecuencia a gráficos.

En la cuestión "¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como "atípico" en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)?", se presenta una dificultad no prevista con el significado de "valor atípico" que fue oportunamente aclarado por el profesor.

Elementos conceptuales:

La mayoría de los estudiantes atribuyó el significado esperado a los conceptos previamente estudiados y por tanto, no requirieron de una atención especial por parte del profesor. De los conceptos considerados emergentes, hay algunos que no fueron abordados; por ejemplo, simetría/asimetría en una distribución. Algunos conceptos que resultaron especialmente conflictivos fueron: valor atípico, dispersión y desviación típica. Estos conceptos, fueron oportunamente aclarados por el profesor.

Propiedades:

Las propiedades consideradas conocidas, fueron trabajadas de manera implícita en la resolución del problema y no requirieron de una atención especial por parte del profesor; no obstante, en algunos casos el profesor debió explicar la propiedad "la comparación de dos distribuciones de frecuencias debe hacerse teniendo en cuenta tanto el promedio como la dispersión", como una forma de orientar el trabajo de los estudiantes. De las propiedades consideradas emergentes, el profesor centró su atención en las siguientes: "el entrenamiento deportivo ha sido efectivo en el conjunto de la clase" y "la clase ha disminuido su homogeneidad en la variable tiempo en recorrer 20 m". Estas propiedades son introducidas a partir de la cuestión "¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?" y en particular para orientar a los estudiantes que comparan las distribuciones sin hacer una reducción estadística de los datos.

Procedimientos:

En concordancia con lo afirmado en el diseño, la mayoría de los estudiantes ha demostrado un manejo adecuado de los procedimientos que se consideran conocidos por su aplicación en el proyecto P1. De igual forma, se cumple la hipótesis de que tanto la media como la desviación típica son los valores más utilizados como resúmenes estadísticos de las dos distribuciones. De los procedimientos considerados emergentes, la tabla de frecuencias fue proporcionada por el profesor (sin incluir las frecuencias relativas) y se realizó un trabajo exploratorio sobre la construcción de gráficos de barras adosadas. No se realizaron comparaciones basadas en representaciones gráficas ni se profundizó en el análisis de la forma de las distribuciones.

Algunas dificultades que tuvieron lugar fueron:

- Errores en el algoritmo de cálculo de las frecuencias relativas.
- Dificultad para construir gráficos mediante la hoja de cálculo.
- Errores en el uso de la herramienta función de la hoja de cálculo.
- Persistencia en el uso de la fórmula en lugar de utilizar la herramienta función de la hoja de cálculo para calcular la media de datos agrupados.

Argumentos:

Al responder las cuatro primeras cuestiones las justificaciones se realizan a partir de la media y la desviación típica, sin justificar el uso de la media (forma de la distribución, presencia de valores atípicos); aunque, el profesor aclara que los valores atípicos deben ser analizados de manera independiente y, las distribuciones presentan una forma simétrica, lo cual valida el uso de la media.

No se realiza ninguna justificación basada en el uso de representaciones gráficas.

Procesos:

Se han realizado los procesos de generalización, particularización, descomposición, reificación, representación y significación señalados en el diseño. Los procesos de materialización e idealización, supuestos a partir del trabajo con representaciones gráficas, fueron escasamente abordados; si bien, se realizó un trabajo exploratorio de elaboración de gráficos que permitió evocar el objeto no ostensivo "distribución de frecuencias", este no fue evocado a partir de otras representaciones (gráficos de caja, polígono de frecuencias). Así mismo, la visualización de la forma de las distribuciones en los diagramas, tampoco logró ser estudiada.

De los conflictos previstos en el diseño, se ha podido constar que hay estudiantes que no discriminan cuando se debe usar la media o la mediana según la forma de la distribución de los datos y en su lugar, aplican arbitrariamente la media.

4.2. **Análisis de la dimensión normativa**

Durante la implementación se han tenido en cuenta la mayoría de los aspectos normativos referidos en el diseño. El profesor ha establecido conexiones explícitas entre los proyectos y el currículo escolar, señalando por ejemplo que una versión convenientemente adaptada del proyecto P2 podría ser aplicada para tratar contenidos de los últimos cursos de educación primaria. Esta norma epistémica-ecológica cobra relevancia como un elemento externo (exigencia del currículo escolar) que es tenido en cuenta por el formador durante el proceso de instrucción.

La implementación de los tres proyectos de análisis de datos, responden convenientemente a las exigencias de las investigaciones en didáctica de la matemática (Nolan y Speed, 1999; Batanero y Díaz, 2005; Batanero, et al., 2011; Batanero y Díaz, 2011) y a propuestas curriculares (NCTM, 2000) y marcos conceptuales (Franklin et al. 2005) del ámbito internacional. En su implementación, el profesor ha favorecido el trabajo autónomo y cooperativo privilegiando un aprendizaje de tipo constructivista. Sin embargo, durante el desarrollo de las trayectorias cognitivas de los estudiantes se han manifestado diversos conflictos que han obligado a "romper" esta norma ecológica impuesta por un enfoque socio-constructivista del aprendizaje, para dar paso a institucionalizaciones puntuales e intervenciones de tipo magistral. Estas modificaciones, se han visto reforzadas por la insistencia de los estudiantes en centrase en realización de cálculos, sin lograr por si mismos dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Durante la ejecución del proyecto P1, la norma epistémica "se acepta que la mediana o la media no necesariamente tienen que corresponder a un valor exacto de la variable" no fue aclarada en un principio. En este caso, tras el intento de algunos estudiantes por aproximar la mediana de la variable número de hermanos (2.75) a dos o tres, el profesor explicita la norma a través de institucionalizaciones "puntuales" y de tipo magistral.

En el proyecto P2, al simular el lanzamiento de los dados mediante trozos de papel, hubo estudiantes que no siguieron las reglas del experimento, juntando los 12 trozos de papel en lugar de agrupar seis y seis. Frente a este conflicto, el profesor aclaró convenientemente las condiciones del juego.

En el proyecto P3, al responder la pregunta "¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?" se han aceptado como legítimas las normas epistémicas de la estadística. Como hemos señalado en el diseño, cuando esta cuestión se aborda en niveles más avanzados rige otra norma: "las diferencias entre distribuciones se comprueban mediante técnicas descriptivas y son referidas a las muestras usadas, no a las poblaciones de donde provienen".

En cuanto a la importancia relativa de las diferencias estadísticas es aceptado un nivel de significación de acuerdo a los factores contextuales.

La norma instruccional, “El análisis de datos debe realizarse usando recursos tecnológicos de cálculo y representación gráfica”, ha sido presentada explícitamente. El complemento de esta norma “El uso de recursos tecnológicos debe evitar el fenómeno de deslizamiento metadidáctico” (Brousseau, 1998), también fue tenido en cuenta, pero implícitamente por parte del profesor.

5. IDONEIDAD DEL PROCESO DE ESTUDIO. IDENTIFICACIÓN DE POSIBLES MEJORAS

En este apartado realizamos la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, teniendo en cuenta tanto la fase de diseño como de implementación. Los elementos de referencia para valorar la idoneidad epistémica del proceso implementado deben ser los correspondientes al significado institucional pretendido por el docente. En cambio, para la idoneidad epistémica de la planificación habrá que indagar los elementos del significado del análisis elemental de datos en textos e investigaciones publicadas relativas a su estudio en niveles educativos similares. Los elementos de referencia para las restantes dimensiones o facetas (cognitivo-afectiva, interaccional – mediacional y ecológica) deberán indagarse en los textos y publicaciones de investigaciones didácticas sobre dichos aspectos. Trabajos de síntesis como los de Batanero (2001) pueden ser de gran ayuda en la reconstrucción de los significados de referencia a usar en una investigación particular. En nuestro caso hemos sintetizado a través de la GVID-PFE, incluida en el capítulo 3 de esta trabajo, un conjunto de conocimientos de estadística y su didáctica presentes en el currículo español (MEC 2006a; MEC 2006b) y en documentos de amplia difusión y consenso internacional como son los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y el proyecto GAISE (Franklin, 2005). Este “instrumento”, recoge por tanto los principales significados institucionales de referencia y es utilizado para valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio en su etapa de diseño.

5.1. **Faceta epistémica y ecológica**

La idoneidad epistémica del proceso de estudio se puede considerar como alta, tanto en la fase de diseño como de implementación. La realización de los proyectos seleccionados, complementados con los documentos para el autoestudio (texto y colección de ejercicios), ponen en juego los conocimientos sobre estocástica elemental necesarios para su enseñanza en educación primaria. Metafóricamente podemos decir que se trata de una "dieta nutritiva y equilibrada", pero es necesario un cierto esfuerzo para digerirla.

El proyecto P1 (alumno típico), si bien tiene un carácter "artificial" de escaso interés práctico, presenta la ventaja de que los datos se pueden recoger en la propia clase y permite incluir variables de diverso tipo, poniendo en juego los principales conceptos, técnicas y propiedades estadísticas, tanto descriptivas como inferenciales que el profesor de educación primaria debe dominar. Una variante de la situación introductoria podría ser plantear a los estudiantes una cuestión más abierta que permitiera plantear la búsqueda de variables de interés para los alumnos de primaria y el enunciado de consignas que motiven el proceso de recogida y análisis de datos (generación de problemas). Este cambio podría inducir una mejora en el componente afectivo del proceso de estudio (utilidad de la estadística en la vida cotidiana y profesional).

El proyecto "Lanzamiento de dos dados" tiene un carácter fuertemente intramatemático; sin embargo, permite abordar aplicaciones de la estadística en contextos del medio social y cultural. Un aspecto que no se cuestiona en este proyecto, que debería ser considerado, es el uso de los juegos competitivos basados en los juegos de azar (educación en valores).

El proyecto "Eficacia de un entrenamiento deportivo", permite contextualizar y poner en juego "contenidos" de estadística descriptiva abordables en los primeros niveles de educación secundaria obligatoria (conocimiento avanzado). También se puede orientar hacia la estadística inferencial propia de niveles superiores, test de hipótesis, intervalos de confianza, análisis de varianza. La inclusión de variables adicionales, como peso y altura de los sujetos permite ampliar el estudio hacia los temas de correlación y regresión, tanto desde un punto de vista descriptivo como inferencial. Se han puesto en juego diversos modos de representación de los datos, sus traducciones y tratamientos (tablas, gráficos, lenguaje ordinario) que apoyan la argumentación estadística de las conclusiones sobre el efecto de las variables (tratamiento y sexo). Emergen nuevos conocimientos estadísticos referidos a la comparación de distribuciones de frecuencias, apoyados en los conceptos, propiedades y procedimientos previos (medidas de posición central, dispersión y forma).

5.2. **Faceta cognitiva y afectiva**

La idoneidad cognitiva a priori se puede considerar también alta; se trata de estudiantes universitarios que se han inscrito en un programa de formación de maestros, quienes han estudiado previamente los contenidos de estadística y probabilidad en las etapas de educación primaria y secundaria. Es razonable suponer que los objetivos de aprendizaje se pueden alcanzar con los medios disponibles. Sin embargo, durante el proceso de estudio implementado, y principalmente en los informes elaborados sobre los proyectos y la prueba sumativa final, se han revelado dificultades que indican que la idoneidad cognitiva a posteriori del proceso de estudio ha sido baja. ¿Qué explicaciones se pueden dar para estos resultados? ¿Cómo mejorar el aprendizaje?

Se tiene constancia de que algunos estudiantes no asistieron a las sesiones de clase presenciales, y muy pocos hicieron uso de las tutorías individuales. Esto puede indicar una falta de compromiso personal con el proceso de estudio. Posiblemente un porcentaje de estudiantes relativamente elevado se han inscrito en la carrera de magisterio por motivos ajenos a la profesión de maestro. Incluso encontramos estudiantes que en ocasiones manifiestan una cierta fobia a las matemáticas.

En cuanto a las adaptaciones curriculares se puede contemplar el enunciado de alguna consigna más abierta para los estudiantes con mayor capacidad. Por ejemplo, en el proyecto "deporte" se puede pedir la inclusión de variables adicionales, como peso y altura de los sujetos, lo cual permite ampliar el estudio hacia los temas de correlación y regresión, tanto desde un punto de vista descriptivo como inferencial.

El instrumento de evaluación sumativa final se puede mejorar incluyendo cuestiones relacionadas con la comprensión de los distintos contenidos estudiados, en particular, los promedios y dispersiones.

5.3. **Faceta interaccional y mediacional**

El formato de interacción principal que se ha implementado en las clases presenciales se puede describir como "discurso contextualizado-cooperativo". Hay un predominio de las explicaciones del profesor de conceptos y procedimientos, apoyadas con el uso de diapositivas. Las explicaciones del profesor son precedidas por el trabajo de los estudiantes con una situación-problema (proyectos y ejercicios) abordada cooperativamente por los estudiantes, algunos de los cuales presentan sus soluciones al grupo clase. No se pretende que los estudiantes "construyan/reinventen" los conocimientos pretendidos, sino crear un contexto que permita al profesor dar sentido a tales conocimientos. Con la realización del proyecto “Eficacia de un entrenamiento deportivo”, en un formato de interacción con predominio de trabajo personal y cooperativo se pretende que los estudiantes “apliquen” los conocimientos previamente introducidos en las sesiones de gran grupo.

El grado de autonomía de los estudiantes para la realización del proyecto deporte fue alto ya que una vez presentado el problema tenían libertad para enfocar la solución, la cual se iniciaba en una clase presencial, pero debía ser completada durante la semana de manera autónoma. En los proyectos “alumno típico” y “lanzamiento de dos dados”, el profesor tomó una actitud más directiva, aunque había momentos, más bien breves, en los que los estudiantes debían buscar sus propias soluciones, presentarlas en clase y discutirlas. Sería deseable, si se dispusiera de mayor número de créditos para el desarrollo del temario, aumentar las fases de trabajo autónomo, así como los momentos de comunicación y validación colectiva de las soluciones, en los distintos proyectos y actividades complementarias.

En la primera experimentación del diseño instruccional realizada en el curso 2011-12 los estudiantes entregaron sus informes del proyecto deporte sin que éstos fueran presentados y discutidos en clase. Fueron usados por el profesor como evaluación final de una parte de los contenidos del curso. En el curso 2012-13 algunos de estos informes fueron presentados y discutidos en clase permitiendo crear una situación de comunicación y validación de sus respuestas. Este cambio mejoró la idoneidad interaccional del proceso.

El número excesivo de alumnos por clase (58 en la primera experimentación, 69 en la segunda) hace difícil el seguimiento individualizado del progreso del aprendizaje de cada estudiante. Se realizó más bien un seguimiento de cada equipo (3-4 estudiantes), evaluando el funcionamiento de los equipos y sobre todo el informe colectivo del trabajo práctico (proyecto deporte). La observación del trabajo de los estudiantes fue realizada solo de manera circunstancial y anecdótica en los momentos concedidos para la exploración inicial de las diversas cuestiones. Sería deseable “perfeccionar” los procesos de evaluación formativa, analizando el tipo de situaciones, los instrumentos, los recursos y los procedimientos que deberían ser utilizados; interesa también, que se fijen los momentos del proceso de estudio en que conviene sea aplicado dicho proceso (preferentemente clase a clase).

El uso de la hoja de cálculo es una herramienta imprescindible para el análisis de datos; así mismo, el uso del simulador del lanzamiento de dos dados permite justificar de manera intuitiva y visual la ley de los grandes números. Ambos recursos, especialmente la hoja de cálculo requiere, no obstante, una planificación más detallada y más tiempo para lograr convertirla en un instrumento de trabajo en manos del estudiante. También el simulador fue usado por el profesor como un dispositivo de presentación, y no como una herramienta de exploración por los propios estudiantes. Como punto de mejora, consideramos altamente recomendable la incorporación de algún software que ampliara las posibilidades de construcción de diferentes tipos de gráficos por parte de los estudiantes.

El alto índice de dificultad de la prueba final indica que para un porcentaje elevado de estudiantes el tiempo dedicado al estudio de la materia ha sido escaso. Este es un factor condicionante difícil de mejorar dado que el plan de estudio fija un número de créditos para la asignatura y para los distintos bloques temáticos. Además, los estudiantes tienen que distribuir su tiempo entre varias materias que se imparten simultáneamente, cada una de las cuales con sus propias demandas en cuanto al tiempo requerido.

6. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Con el desarrollo de este capítulo hemos podido constatar que el marco teórico "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) aporta herramientas válidas para el análisis de procesos de estudios implementados. Así, en la fase de implementación las nociones de configuración, subconfiguración, trayectoria didáctica y de hecho didáctico significativo nos han permitido, por una parte, delimitar y condensar la crónica del proceso de estudio y por otra, realizar una descripción y análisis detallado de los contenidos puestos en juego, los patrones de interacción y los conflictos que han tenido lugar.

En la fase de evaluación o análisis retrospectivo, las nociones de prácticas y objetos y procesos nos han permitido caracterizar a posteriori los tipos de problemas, los sistemas de prácticas y las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados. La dimensión normativa, nos ha ayudado a comprender los factores ecológicos que han condicionado el proceso de estudio.

Finalmente, la noción de idoneidad didáctica nos ha permitido realizar una reflexión sistemática sobre los las distintas facetas del proceso de estudio e identificar posibles mejoras. Su aplicación, requiere realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas, tanto en la etapa de diseños como de implementación.

Con relación a los aprendizajes, los informes de los proyectos y los resultados de la prueba evaluativa final mostraron que los aspectos del conocimiento común del contenido fueron logrados por la mayoría de los estudiantes; sin embargo, aspectos más avanzados del razonamiento estadístico presentaron un alto nivel de dificultad. En el proyecto P1 (Alumno típico), la mayoría de los estudiantes calculó correctamente promedios (media, mediana y moda) y dispersiones (desviación típica), aplicando principalmente la moda y la media para determinar las características de un alumno típico y la media para establecer las diferencias entre chicos y chicas. Aspectos más avanzados del contenido, como el uso de la media o la mediana según la forma de la distribución, interpretación de la desviación típica para determinar el grado de representatividad de los promedios y la comparación estadística mediante gráficos fueron escasamente utilizados. Los informes de los equipos sobre el proyecto P3 (Eficacia de un entrenamiento deportivo), mostraron que el cálculo de la media y desviación típica de las distribuciones mediante el uso de la hoja de cálculo fue logrado por los estudiantes, aplicándose fundamentalmente la media para responder las cuestiones planteadas. Al igual que en el proyecto P1, aspectos más avanzados del razonamiento estadístico, como es la comparación de las dispersiones, el análisis de la formas de las distribuciones, la identificación de valores atípicos y su interpretación, así como la realización de histogramas de frecuencias adosadas ha supuesto tareas con alto grado de dificultad para la mayoría de los estudiantes que han participado en esta acción formativa. Los resultados de la prueba final, han revelado que la asignación de probabilidades y la construcción de tablas de frecuencias relativas son un contenido dominado por la mayoría; en cambio, la representación de la distribución de probabilidad y las frecuencias relativas a través de un gráfico de barras adosadas, son un aspecto del conocimiento avanzado del contenido matemático que se ha mostrado deficitario. Una situación similar sucede con el reconocimiento de los espacios muestrales válidos.

En las respuestas recogidas, el análisis de los errores ha puesto en evidencia un conjunto de conflictos cuya naturaleza y forma de abordarlos deben ser consideradas en nuevas aplicaciones.

Como conclusión de este capítulo, resaltamos la utilidad de las herramientas desarrolladas en EOS para organizar y comprender procesos de estudio implementados. Así mismo, destacamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías estudiadas, y de propiciar momentos exploratorios de la actividad matemática. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) (Font, et al., 2013), cuyo estudio, requiere de procesos didácticos de validación, institucionalización y ejercitación. Esto supone un importante desafío para el profesor en el logro de una enseñanza idónea de los contenidos estadísticos, más aún, cuando hay factores sobre los cuales el docente no tiene control, como es el tiempo asignado al estudio.

CAPÍTULO 6

SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

1. INTRODUCCIÓN

En esta investigación hemos presentado dos estudios relativos a la formación estadística de profesores de educación primaria: (1) la construcción de un instrumento de evaluación de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción estadística y (2) el diseño, análisis y valoración de un proceso de enseñanza-aprendizaje sobre estadística con futuros profesores de educación primaria a fin de elaborar una versión de la metodología de investigación de la ingeniería didáctica basada en la aplicación sistemática de las herramientas teóricas del EOS.

En el estudio 1, hemos aplicado la técnica de análisis de contenido para extraer normas de idoneidad presentes en propuestas curriculares e inferir indicadores a partir de dichas normas. Los indicadores inferidos han sido confrontados con la Guía de idoneidad didáctica propuesta en Godino (2011) y con resultados de investigaciones sobre formación de profesores para enseñar estadística, a fin de optimizar su formulación inicial. Su aplicación a un plan de formación estadística de profesores de educación primaria nos ha permitido conocer su aplicabilidad en este ámbito y a la vez, valorar la idoneidad didáctica de dicho plan.

En el estudio 2, hemos aplicado una modalidad de *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989; 2011) o *investigación de diseño* (Cobb, et al., 2003; Kelly, et al., 2008) propuesta por Godino y cols. (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013; Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2013), lo cual nos ha permitido, por una parte, desarrollar el componente de ingeniería didáctica de EOS y por otra, aportar conocimientos específicos sobre la formación en estadística de los futuros maestros. En el estudio 1 se han teniendo en cuenta las facetas *epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional* de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, et al., 2007; Godino, 2011). En el estudio 2, aplicamos además las nociones de *práctica* *matemática, configuración de objetos y procesos matemáticos*, *configuración y trayectoria didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica*.

En este capítulo presentamos una síntesis y las principales conclusiones de los dos estudios realizados. En la sección 2, presentamos la síntesis y conclusiones en relación a los objetivos e hipótesis de la investigación desarrollados en cada estudio; en la sección 3, damos cuenta de las principales aportaciones y limitaciones; en la sección 4, presentamos algunas líneas de investigación que podrían dar continuidad a este trabajo; finalmente, en la sección 5, incluimos las publicaciones y participación en eventos científicos derivados de esta tesis doctoral.

2. CONCLUSIONES

Con respecto al objetivo general de la investigación - *caracterizar y valorar la idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria y proponer criterios de mejora* - nos hemos planteado cuatro objetivos específicos (OE), que retomamos a continuación e indicando las principales conclusiones obtenidas en cada uno de ellos. Así mismo, retomamos también las hipótesis de investigación en el caso de los OE 2, 3 y 4.

- *OE 1: Analizar las investigaciones teóricas y empíricas del campo de la educación estadística a fin de identificar conocimientos estadísticos y didácticos que se deben poner en juego en un proceso de formación estadística de profesores de primaria para que dicho proceso tenga altos niveles de idoneidad.*

Para dar respuesta a este objetivo, en el capítulo 1 hemos realizado una revisión de la literatura investigativa sobre formación estadística de los profesores de matemáticas, lo cual nos ha permitido obtener algunos resultados preliminares respecto al objetivo general de nuestra investigación. En primer lugar, hemos sistematizado algunos modelos sobre formación profesional del profesor de matemática (Ball, 2000; Ball et al., 2001; Godino, 2009; Hill et al., 2008; Shulman, 1986, 1987) como así también algunos específicos sobre formación estadística (Batanero et al., 2004; Burgess, 2006; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Godino, et al., 1999; Watson, 2001). En general, lo que se observa, es que estos últimos son más recientes y menos desarrollados. Por otra parte, tras el estudio de la literatura sobre formación de profesores de educación primaria para enseñar estadística, hemos obtenido una clasificación inicial de las investigaciones realizadas (investigaciones sobre el conocimiento del contenido de estadística; estudios sobre didáctica de la estadística; estudios sobre actitudes y creencias) lográndose una primera aproximación a las especificidades que presenta dicha formación. Por último, se ha logrado establecer una correspondencia entre los resultados de las investigaciones y las facetas propuestas en el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor desde la perspectiva propuesta en Godino (2009), sintetizando los principales desafíos que presenta la formación de profesores de educación primaria para enseñar estadística. Lo que se observa, es que hay desafíos importantes en todos los ámbitos de la formación profesional (epistémico, ecológico, cognitivo, afectivo, interaccional y mediacional) para dar respuesta a las actuales exigencias del currículo escolar (MEC, 2006a; MEC, 2006b; MECD, 2014).

- *OE 2: Identificar las principales normas sobre educación matemática y estadística que subyacen en las actuales propuestas curriculares para la educación primaria e inferir indicadores de idoneidad didáctica a partir de dichas normas.*
- *OE 3: Construir un sistema de indicadores de idoneidad didáctica para evaluar planes y acciones formativas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística en procesos de formación inicial de profesores de educación primaria.*

Estos dos objetivos específicos se relacionan con la siguiente hipótesis (H1) de investigación:

- H1. El análisis sistemático del contenido de documentos curriculares, y de resultados de la investigación en educación estadística, aportará indicadores de idoneidad didáctica de planes y procesos instruccionales sobre contenidos matemáticos y estadísticos, que al confrontarlos con la pauta propuesta en el marco del EOS (Godino 2011) y con resultados de investigaciones sobre formación de profesores para enseñar estadística permitirá obtener un instrumento específico para la valoración de la idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria. En particular, se espera encontrar nuevos indicadores de idoneidad para la dimensión epistémica y algunos que permitirán complementar los indicadores de las otras dimensiones.

Con respecto a estos objetivos específicos (OE1 y OE2) e hipótesis de investigación (H1) nos hemos planteado el estudio 1, cuyos resultados se encuentran contenidos en el capítulo 3 de la investigación. La síntesis y conclusiones de este estudio son las siguientes:

Con respecto al OE1, a través del desarrollo de la *fase 1* del proceso metodológico (selección y clasificación de unidades de análisis) hemos logrado sintetizar y clasificar según las dimensiones de la idoneidad didáctica, los principales principios y orientaciones (normas) presentes en el currículo escolar español (MEC, 2006a; MEC, 2006b) y en propuestas curriculares de consenso internacional (NCTM, 2000; Franklin y cols., 2005) teniendo en cuanta para la faceta epistémica aspectos del *conocimiento común* y *avanzado del contenido* según la interpretación hecha en (Godino, 2009). En la *fase 2*, el proceso de comparación y reducción de unidades de análisis nos ha permitido reducir información repetida y en la *fase 3,* se ha logrado inferir indicadores para las seis dimensiones de la idoneidad didáctica más una dimensión de interacciones entre facetas. Estos indicadores, han sido interpretados como una Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica a partir del Currículo Escolar (GVID-CE), la cual desde el punto de vista epistémico es adecuada para valorar procesos de formación estadística de profesores de educación primaria (recoge aspectos del conocimiento común y avanzado).

En cuanto al OE2, en la *fase 4* del proceso metodológico, el contraste de la GVID-CE con la GVID-EOS (Godino, 2011) y con resultados de investigaciones sobre formación de profesores para enseñar estadística nos ha permitido optimizar la GVID-CE obteniéndose un nuevo instrumento que denominamos Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Formación Estadística (GVID-PFE). Finalmente, hemos aplicado este instrumento a un plan de formación estadística de profesores de educación primaria, lo cual nos ha permitido conocer su aplicabilidad en este ámbito y asignar una valoración objetiva de idoneidad a dicho plan. Como resultado hemos obtenido que la GVID-PFE resultó ser un instrumento apropiado para valorar el plan de formación señalado, el cual presentó bajos niveles de idoneidad en la mayoría de los ámbitos, salvo en la dimensión epistémica donde se obtuvo un nivel medio de idoneidad.

- *OE 4: Describir y analizar el diseño e implementación de acciones formativas específicas sobre estadística en un curso de formación inicial de profesores de educación primaria con el fin de elaborar una metodología de ingeniería* *didáctica basada en la aplicación de las herramientas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.*

El objetivo anterior está relacionado con las hipótesis 2 y 3 de la investigación, las cuales reproducimos a continuación.

- H2. El diseño, implementación y evaluación de un proceso formativo sobre estadística con futuros profesores de educación primaria permitirá sistematizar el uso de las principales herramientas del EOS y determinar su aplicabilidad en las diferentes fases de la ingeniería didáctica.
- H3. El análisis y valoración del diseño e implementación de una experiencia formativa en educación estadística permitirán identificar criterios de mejora de su idoneidad en las diferentes facetas. De manera más específica, se espera encontrar:
  - ✓ Faceta epistémica: Se pondrán en juego la mayoría de los objetos matemáticos primarios (problemas, conceptos, lenguajes, proposiciones, procedimientos argumentos) de la estocástica elemental. Sin embargo, habrá contenidos relevantes no contemplados que pueden ser abordados a través de las situaciones propuestas.
  - ✓ Faceta ecológica: Escasa conexión entre los contenidos estadísticos con otras disciplinas de la formación profesional y entre los contenidos estadísticos de distintos niveles de enseñanza del ámbito escolar.
  - ✓ Faceta cognitiva: Deficiente comprensión de conceptos y procesos estadísticos básicos y dificultades para aplicar adecuadamente el uso del razonamiento estadístico.
  - ✓ Faceta afectiva: Falta de compromiso personal de algunos estudiantes para asumir la responsabilidad de su estudio, lo cual demandará una atención especial por parte del profesor formador.
  - ✓ Faceta interaccional: Escasa interacción docente-discente a nivel individualizado; no se identifican conflictos cognitivos en la interacción intra-equipos y; prevalencia de procesos instruccionales expositivos.
  - ✓ Faceta mediacional: La incorporación de la hoja de cálculo y software de simulación supondrá una dificultad especial para algunos estudiantes no familiarizados con dichas herramientas. Así mismo, el alto número de

alumnos hará difícil un seguimiento individualizado del progreso de los aprendizajes.

Con relación al OE4 e hipótesis 2 y 3 de la investigación hemos realizado el estudio 2, cuyos resultados se encuentran presentados en los capítulos 4 y 5 de este trabajo. La síntesis y conclusiones con respecto a este objetivo son planteadas en el doble propósito que abarca el objetivo: (a) *elaborar una metodología de ingeniería didáctica basada en el EOS* y (b) *describir y analizar el diseño e implementación de acciones formativas específicas sobre estadística en un curso de formación inicial de profesores de educación primaria.*

a) Con respecto a este propósito (que se relaciona con la H2) hemos logrado sistematizar herramientas del EOS que son aplicables en las diferentes fases de la ingeniería didáctica. Lo que se observa es que este marco teórico proporciona herramientas originales que amplían las posibilidades de análisis de otros marcos teóricos usados actualmente.

   En la fase de *estudio preliminar,* las dimensiones y componentes de la idoneidad didáctica han orientado el análisis sistémico de la literatura, y a la vez nos han permitido delimitar e interpretar dichos resultados para la posterior etapa de diseño. En la dimensión epistémica, la noción de significado de referencia nos ha dado una orientación específica sobre la epistemología del contenido cuyo aprendizaje hemos pretendido.

   En la fase de *diseño de la trayectoria didáctica,* un vez que se hemos seleccionado un muestra representativa de problemas y su secuenciación, hemos realizado *el análisis a priori*. Para ello, hemos previsto de manera sistemática las principales prácticas y la trama de objetos y procesos matemáticos que la resolución de las situaciones pone en juego, identificando posibles conflictos de aprendizaje y los elementos a tener en cuenta en los procesos de institucionalización y evaluación. El análisis de las normas nos ha ayudado a identificar elementos que condicionan el proceso de estudio, y por tanto permitieron anticipar actuaciones del profesor y los alumnos a fin de gestionar convenientemente la enseñanza y el aprendizaje.

   En la fase de *implementación,* las nociones de configuración, subconfiguración, trayectoria didáctica y de hecho didáctico significativo permitieron, por una parte, delimitar y sintetizar la crónica del proceso de estudio y por otra, realizar una descripción y análisis detallado de los contenidos puestos en juego, los patrones de interacción entre personas y recursos, los conflictos que han tenido lugar y los aprendizajes logrados.

En la fase de *evaluación o análisis retrospectivo,* las nociones de prácticas y objetos y procesos permitieron caracterizar a posteriori los tipos de problemas, los sistemas de prácticas y las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados. La dimensión normativa, ayudó a comprender los factores ecológicos que han condicionado el proceso de estudio.

Finalmente, la noción de *idoneidad didáctica* nos ha permitido realizar una reflexión sistemática sobre las distintas facetas del proceso de estudio e identificar posibles mejoras. Su aplicación, ha requerido realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas, tanto en la etapa de diseños como de implementación.

b) En cuanto al segundo aspecto que engloba el OE4 (relacionado con la H3), hemos constatado lo siguiente:
   - *Dimensión epistémica*. Las situaciones problemas resultaron apropiadas en tanto han permitido contextualizar la mayoría de los conceptos, procedimientos, propiedades, lenguajes y argumentos de la estadística elemental abarcando aspectos del conocimiento común y avanzado (Godino 2009).
   - *Dimensión ecológica. S*e ha tenido en cuenta el tema de la innovación, lográndose también establecer algunas conexiones entre los contenidos estadísticos con el currículo escolar y con el medio social y cultural de los estudiantes. Las conexiones interdisciplinares, la formación en valores y la formación profesional no fueron abordadas.
   - *Dimensión cognitiva* Hubo contenidos elementales que no eran recordados por los estudiantes los que fueron retomados por el profesor durante la implementación (p. ej., el cálculo de la mediana). Los informes de los proyectos y los resultados de la prueba sumativa final dan cuenta que los contenidos relacionados con el conocimiento común y el dominio de conceptos y procedimientos (promedios, dispersiones, construcción de tablas de frecuencias, asignación de probabilidades,…)

fueron logrados por la mayoría. Sin embargo, aspectos más avanzados del razonamiento estadístico (interpretación de promedios y dispersiones, uso de la media o mediana según la forma de la distribución, comparación estadística mediante gráficos, interpretación de valores atípicos) y la representación de la distribución de probabilidad y las frecuencias relativas a través de un gráfico de barras adosadas presentaron un alto nivel de dificultad. Finalmente, el análisis de los errores refleja algunos conflictos que deberán ser considerados en futuras aplicaciones.

Dimensión afectiva. Los problemas propuestos resultaron motivadores para los estudiantes y durante la implementación hubo una preocupación constante del profesor formador por desarrollar una actitud positiva hacia la materia y el trabajo que se debía realizar. Hubo estudiantes que no asistieron a las clases presenciales, y muy pocos hicieron uso de las tutorías individuales, lo cual podría reflejar una falta de compromiso personal.

Dimensión interaccional. Hubo prevalencia de procesos instruccionales expositivos a través de un discurso contextualizado precedido por el trabajo en equipo en bases a los problemas planteados. Las instancias de trabajo autónomo durante las clases fueron escasas y surgieron de manera espontánea, aunque en la ejecución de uno de los proyectos (P3) los estudiantes debieron completar las soluciones individualmente después de clase. En las actividades de equipo se presentaron diversos conflictos que requirieron "institucionalizaciones" puntuales por parte del profesor. Respecto a los procesos de evaluación formativa, estuvieron centrados en el análisis de las respuestas a las cuestiones planteadas y en los informes finales de cada proyecto; sin una participación activa de los estudiantes en dichos procesos (autoevaluación, coevaluación).

Dimensión mediacional. La integración de la hoja de cálculo y de un software de simulación resultó apropiada para apoyar los contenidos propuestos, aunque la hoja de cálculo fue difícil de manejar para la mayoría. El número de estudiantes por curso era demasiado alto para apoyar individualmente el aprendizaje de los alumnos y el número de créditos resulta insuficiente para el desarrollo de los temas y para favorecer instancias de trabajo individual y grupal.

3. APORTACIONES Y LIMITACIONES

3.1. **Estudio 1**

Una de las aportaciones de este estudio es entender que a través de la metodología propuesta es posible elaborar diferentes guías de idoneidad didáctica según su propósito. Estas guías pueden ser vistas como una síntesis de conocimientos didáctico-matemático disponibles en diferentes fuentes (documentos curriculares, resultados de investigaciones, propuestas instruccionales,…) y por lo tanto, pueden ser utilizadas como un "artefacto" de diseño, implementación o evaluación de experiencias docentes en un centro educativo o bien como instrumentos de reflexión sistemática sobre las diversas facetas y componentes que intervienen en la formación de profesores.

En el caso particular de la GVID-PFE está pensada para evaluar (o diseñar) procesos de formación estadística de profesores; puede servir como "lista de control" para comprender y gestionar mejor los procesos de enseñanza y aprendizaje en este nivel.

Somos conscientes de las limitaciones de la GVID-PFE, la cual requerirá de nuevas aplicaciones en procesos de formación estadística de profesores para asegurar su aplicabilidad. Este mismo proceso podría servir para la mejora progresiva del instrumento, por la factibilidad de encontrar limitaciones e incorporar adecuaciones fundadas.

Entre las limitaciones del primer estudio realizado en nuestra investigación resaltamos el haber aplicado la GVID-PFE de la idoneidad didáctica construida a un solo plan de estudios de una universidad chilena. Su aplicación a una muestra de planes de formación en estadística y su didáctica de las universidades españolas hubiera incrementado la relevancia práctica de nuestra investigación.

3.2. **Estudio 2**

Las principales aportaciones del estudio son, por una parte, haber ampliado las posibilidades de realización de ingenierías didácticas o investigaciones de diseño propuesta en otros marcos teóricos y por otra, la aportación de conocimientos específicos sobre la formación en estadística de los futuros maestros (problemática actual de investigación (Batanero et al., 2011)) y sobre aspectos metodológico didácticos para la formación estadística de profesores.

La realización de un primer ciclo de la Ingeniería Didáctica basada en EOS (ID-EOS) en un proceso de formación estadística de profesores de educación primaria es extrapolable a otros contenidos de enseñanza y niveles educativos, lo cual abre nuevas posibilidades a las investigaciones de diseño instruccional que podrán ser utilizadas en futuras investigaciones.

Los conocimientos aportados sobre la formación estadística de los profesores en formación y sobre aspectos metodológico didácticos han sido diversos. Su consideración, permitirá diseñar e implementar procesos más idóneos en todos los ámbitos (epistémico, ecológico, cognitivo, afectivo e instruccional).

Una limitación de esta investigación está en haber analizado un único ciclo del proceso metodológico de la ingeniería didáctica objeto de estudio en un contexto educativo específico, caracterizado por unas fuertes limitaciones en cuanto al tiempo disponible. Dado que se trata de la formación de futuros maestros de educación primaria hubiera sido deseable focalizar nuestra investigación, no solo en la formación estadística, sino también en aspectos relativos a didáctica de la estadística, la cual tiene lugar en el plan de estudios de la Universidad de Granada en otras asignaturas impartidas en cursos posteriores.

4. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

El diseño de "instrumentos de valoración de la idoneidad didáctica" (estudio 1) es un tema que ha venido siendo abordado de manera muy reciente (Godino, 2011; Godino, Arteaga, y Rivas, 2014; Godino, Rivas y Arteaga, 2012; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013; Rivas, Godino, y Arteaga, 2012) y por tanto, es una línea de investigación abierta que abre posibilidades a la realización de nuevos estudios en un doble sentido: por una parte, se requiere la mejora progresiva de los instrumentos ya existentes y por otra, elaborar guías para la valoración de la idoneidad didáctica para diferentes áreas de la matemática, niveles educativos. La metodología que hemos aplicado en este estudio puede resultar útil para la realización de dichos estudios. La búsqueda sistemática de criterios de idoneidad didáctica que hemos iniciado en este trabajo mediante el análisis de contenido de las orientaciones curriculares e investigaciones didácticas se puede complementar aplicando una nueva fase mediante el juicio de expertos.

La ingeniería didáctica que hemos desarrollado y los resultados obtenidos en dicha ingeniería son parte del primer ciclo de dicha metodología de investigación. En este tipo de estudios es característica la aplicación de varios ciclos de investigaciones tendientes a la mejora progresiva del diseño e implementación realizados. En este sentido, una línea de investigación futura e inmediata es la aplicación de nuevos ciclos de ingeniería didáctica fundamentada en el análisis retrospectivo realizado.

Esta investigación ha contribuido a la puesta a punto de la perspectiva ampliada de la ingeniería didáctica propuesta en Godino et al. (2013) basada en la aplicación sistemática de las herramientas teóricas del EOS. Se ofrece un ejemplo ilustrativo de dicha metodología al caso de la formación estadística de maestros de educación primaria que puede servir de orientación para su aplicación a otros temas matemáticos y cualquier nivel educativo.

5. PUBLICACIONES Y PARTICIPACIÓN EN EVENTOS CIENTÍFICOS

5.1. **Publicaciones de artículos en revistas**

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* (aceptado).

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga. P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT: revista eletrônica de educação matemática, 8* (1), 46-74.

Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa, 7* (2), 331-354.

5.2. **Comunicaciones en eventos científicos**

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2014). Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria. En Domingo, J., Olmedo, E. M. y Amber, D. (Eds.), *Investigación en Ciencias de la Educación. I Jornadas Doctorales en Ciencias de la Educación*. Granada, España: Universidad de Granada.

Godino, J. D., Arteaga, P. y Rivas, H. (2014). Suitability criteria of teachers' education programs in statistic education. Invited paper (accepted). 9th International Conference on Teaching Statistics. Flagstaff, Arizona, USA.

Godino, J. D., Arteaga, P., Estepa, A. y Rivas, H. (2013). Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos. En Contreras, J., Cañadas, G., Gea, M. y Arteaga, P. (Eds.), *Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria,* Vol. 2 (pp. 173-180). Granada, España: Universidad de Granada.

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio. En Berciano, A., Gutiérrez, G., Estepa, A. y Climent, N. (Eds.), *Actas del XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 467-474). Bilbao, España: Universidad del País Vasco.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., Wilhelmi, M. R. (2013, Septiembre). *Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Comunicación presentada en el Grupo de Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Bilbao, España.

Rivas, H., Godino, J. D. y Arteaga, P. (2013, Septiembre). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria.* Comunicación presentada en el Grupo de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Bilbao, España.

Rivas, H., Godino, J. D. y Arteaga, P. (2012, Septiembre). *Indicadores de idoneidad didáctica en procesos de formación estadística de profesores.* Comunicación presentada en el grupo de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Baeza, España.

5.3. Otras publicaciones

Rivas, H. (2011). *Valoración de la idoneidad didáctica de procesos de formación estadística para profesores de educación primaria.* Trabajo de fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

REFERENCIAS

Alsina, A. y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (1), 7-32.

Andrade, L. (2014). *Currículos de matemática no ensino médio: Um olhar sob a perspectiva do enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática.* Tesis doctoral. Universidade Luterana do Brasil.

Andréu, J. (2011). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada.* Recuperado el 21 de marzo de 2011, de http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9* (3), 281-308.

Artigue M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Ball, D. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for stuying teaching and learning. En, A. E. Kelly y R. A. Lesh, (Eds.), *Hadbook of Research Design Mathematics and Science Education* (pp. 365-402). London: Lawrence Erlbaum.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Batanero C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm

Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística.* Conferencia inaugural presentada en la Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Disponible en, www.ugr.es/~batanero/

Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Disponible en, http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics.Challenges for teaching and teacher education*. New York: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2005, octubre). *El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística.* Ponencia presentada en el Primer Congreso de Estadística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal, Portugal.

Batanero C. y Díaz C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Disponible ble en,

http://www.ugr.es/local/batanero/publicaciones%20index.htm

Batanero C. y Godino J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12.* Disponible en, http://www.amstat.org/publications/jse/

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism:* Perspective and method. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Borim, C. y Queiroz C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Burgess, T. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching statistics. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador, Brazil: International Statistical Institute.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* Englewood Cliffs, NJ.:Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Brousseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cai, J. y Gorowara, C. (2002). Teachers' conceptions and constructions of pedagogical representations in teaching arithmetic average. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics,* Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Canada, D. L. (2008). Conceptions of distribution held by middle school students and preservice teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal, 3* (1), 5-28. Disponible en, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32* (1), 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Chick, H. y Pierce R. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

De Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 59-77.

Díaz C., Batanero C., Wilhelmi M. R. (2008). Errores frecuentes en el análisis de datos en Educación y Psicología. *Publicaciones, 38,* 9-23.

Eichler, A. (2008). German teachers' classroom practice and students' learning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática, 11,* 99-119.

Espinel, C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Estepa, A. (2008). The training of primary school teachers in stochastics and in stochastic education in europe. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Estrada, A. (2002). *Actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. En M. Camaño, P. Flores y P.

Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 121-140). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C., Fortuny, J. M. y Diaz, M. C. (2005). A structural study of future teachers' attitudes towards statistics. In M. Bosch (Ed*.), Proceedings of CERME IV. European Research in Mathematics Education.* [CD-ROM].Sant Feliu de Guissols: ERME.

Estrada, A. y Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27* (2), 2-7.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M, & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Disponible en, www.amstat.org/Education/gaise/

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70* (1), 1-25.

Gal, I., Ginsburg, L. y Garfield, J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Voorburg: IOS Press.

Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Giambalvo, O. y Gattuso, L. (2008). Teachers training in a realistic context. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia presentada en la *XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del onocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_14abril14.pdf

Godino, J. D., Arteaga, P., Estepa, A. y Rivas, H. (2013). Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos (Ed.), *Actas de las 1ª Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria,* Vol. 2 (pp. 173-180). Granada, España: Universidad de Granada.

Godino, J. D., Arteaga, P. y Rivas, H. (2014). Suitability criteria of teachers' education programs in statistic education. Invited paper (accepted). 9th International Conference on Teaching Statistics. Flagstaff, Arizona, USA.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). *Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica.* Conferencia presentada en el VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Puerto Montt. Chile.

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F. y Roa, R. (2004). *Matemáticas para maestros.* Granada:Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A. Lacasta, E. y Wilhelmi, M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8,* Turquía. Disponible en,

http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Godino.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en,

http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga. P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 8* (1), 46-74.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, Vol. 38: 25-49.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27* (1), *59-76.*

Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa, 7* (2), 331-354.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., Wilhelmi, M. R. (2013, Septiembre). *Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Comunicación presentada en el Grupo de Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Bilbao, España.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* (aceptado).

Groth, R. E. y Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8,* 37-63.

Hernández, C. R., Fernández, C., Baptista, P. (1991/1997). *Metodología de la investigación.* (2ª Reimpresión). Colombia: Panamericana Formas e Impresos S.A.

Hernández, C. R., Fernández, C., Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* (4ª ed.). Mexico: McGRAW – HILL

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.,New York, NY: Routledge.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Barcelona: Paidós Comunicación.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 557-568.

Lecoutre, M. P. y Cordier, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP, 372,* 9-22.

Lee, H. S. y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Llinares, S. y Sánchez, G. M. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En C. S. Llinares y G. M. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 67-116). Sevilla: ALFAR.

Llinares, S., Sánchez, V. y García, B. M. (1994). Conocimiento del contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación de las fracciones. *Revista de Educación, 304,* 199-225.

Makar, K. y Confrey, J. (2005). "Variation-talk": Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal, 4* (1), 27-54. Disponible en, www.stat.auckland.ac.nz/serj

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed.), *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan y N.C.T.M.

MEC (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.*

MEC (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

MECD (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Mickelson, W. y Heaton, R. (2004). Primary teachers' statistical reasoning about data. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 327-352). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Nasser, F. (1999). Prediction of college students achievement in introductory statistics course. Comunicación presentada en el *52nd ISI - International Statistical Institute - Session.* Helsinki.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education, 12* (1). Disponible en, www.amstat.org/publications/jse/

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Nolan D. y Speed T. P. (1999). Teaching statistics theory through applications. *American Statistician,* 53, 370-375.

Onwuegbuzie, A. J. (1998). Teachers` attitudes toward statistics. *Psychological Reports, 83,* 1008-1010.

Peters, S. A. (2009). Developing an understanding of variation: AP statistics teachers' perceptions and recollections of critical moments. PhD. The Pennsylvania State University.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Rivas, H., Godino, J. D. y Arteaga, P. (2012, Septiembre). *Indicadores de idoneidad didáctica en procesos de formación estadística de profesores.* Comunicación presentada en el grupo de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Baeza, España.

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio (Ed.) *Actas del XVII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 467-474). Bilbao, España: Universidad del País Vasco.

Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009) Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística* (pp. 57-74). Melilla. Facultad de Humanidades y Educación.

Ruiz Olabuénaga, J.I. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa.* Deusto: Universidad de Deusto.

Shulman (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Sedlmeier, P. y Wassner, C. (2008). German mathematics teachers' views on statistics education. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Silva, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Trouche L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9,* 281-307.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4,* 305-337.

Watson, J. M. (2005). Assessing teachers' knowledge for teaching quantitative literacy. *Proceedings of the ICMI Third East Asian Conference on Mathematics Education* [CD]. Shanghai, China.

Watson, J.M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, J., Callingham, R. y Donne, J. (2008). Establishing pck for teaching statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.).

Watson, F., Kromrey, J., Ferron, J., Lang, T. y Hogarty, K. (2003). An assessment blueprint for Encstat: A statistics anxiety intervention program. Comunicación presentada al *AERA Annual Meeting,* San Diego.

Wild C. y Pfannkuch M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 223-265.

Wilhelmi, M. R., Font, V. y Godino, J. D. (2005). Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: Reflexiones sobre la Teoría de Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico. *Colloque International «Didactiques: quelles references epistemologiques».* Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education. IUFM d'Aquitaine (Bordeaux, France). Versión en español disponible en,

http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases_empiricas_5junio06.pdf

Wilson, S. M., Shulman, L. S. y Richert, A. E. (1987). 150 different ways of knowing: representations of knowledge in teaching. En J. Calderhead (Ed.), *Exploring teacher thinking* (pp. 104-124). London: Cassell.

Wisenbaker, J., Nasser, F., y Scott, J.S. (1999). A cross-cultural comparison of path models relating attitudes about and achievement in Introductory Statistics Courses. Comunicación presentada en el *52nd ISI - International Statistical Institute - Session.* Helsinki.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Rehears in Mathematics Education, 27,* 458-477.

Zimmermann, G. (2002). *Students' reasoning about probability simulations during instruction.* PhD. Illinois State University. USA.

ANEXOS

ANEXO A

UNIDADES DE ANÁLISIS Y SU CLASIFICACIÓN SEGÚN FACETAS Y COMPONENTES DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

El presente anexo contiene unidades de análisis (UA), seleccionadas de los tres documentos que conforman la muestra, clasificadas según las facetas y componentes de la idoneidad didáctica (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional). Las UA corresponden a directrices y elementos conceptuales sobre la enseñanza de la estadística y la probabilidad, incluyendo también tópicos de la matemática en general que resultan válidos para la estadística.

El anexo, muestra además el proceso de comparación y reducción de UA. Para ello, se han codificado las unidades mediante letras (a, b, c,…) y se ha agregado un comentario (incluida en) en aquellas que se encuentran contenidas en otra unidad o que no aportan información nueva y relevante.

En cuanto a su estructura, el anexo está organizado en siete secciones. En las seis primeras se clasifican las UA correspondientes a las facetas de la idoneidad didáctica y la última, se incluyen UA de interacciones entre facetas.

1. FACETA EPISTÉMICA

Tabla A.1. Unidades de análisis categoría 1: Faceta epistémica

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
1.1. Situaciones-problemas	a. “Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo” (NCTM, 2000, p. 55).
	b. “Los alumnos deberían tener frecuentes oportunidades de formular problemas complejos, de enfrentarse a ellos y de resolverlos” (NCTM, 2000, p. 55).
	c. “La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas” (NCTM, 2000, p.55).
	d. “La resolución de problemas es una característica notable de la actividad matemática y un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático” (NCTM, 2000, p. 120).
	e. “La resolución de problemas da oportunidades para usar y ampliar el conocimiento de los conceptos de todos los Estándares de contenidos” (NCTM, 2000, p. 120).
	f. “Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de

	problemas” (NCTM, 2000, p. 120). g. “Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 120). h. “Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 186). **Contenida en “g”** i. “Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas” (NCTM, 2000, p. 186). **Contenida en “f”** j. “La resolución de problemas no es un tema aparte, sino un proceso que debería impregnar el estudio de las matemáticas y proporcionar un contexto en el que se aprendan los conceptos y destrezas” (NCTM, 2000, p. 186). **Contenida en “c”** k. “Los buenos problemas pueden inspirar la exploración de ideas matemáticas importantes” (NCTM, 2000, p. 186). **Contenida en “m”** l. “Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas” (NCTM, 2000, p. 260). **Contenida en “f”** m. “La resolución de problemas es fundamental para la investigación y la aplicación de las matemáticas” (NCTM, 2000, p. 260). n. “Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 260). **Contenida en “g”** o. “La esencia de la resolución de problemas es saber qué hacer al enfrentarse con problemas no familiares” (NCTM, 2000, p. 264). p. “enfrentarse a situaciones abiertas, sin solución única y cerrada” (MEC, 2006a, p. 43095). q. “Los contenidos de aprendizaje (…) se abordan en contextos de resolución de problemas” (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en “a”** r. “Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática” (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en “c”** s. “Los procesos de resolución de problemas (…) deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático” (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en “a”** t. “la resolución de problemas (…) es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general” (MEC, 2006b, p. 750). **Contenida en “a”** u. Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida.” (MEC, 2006b, p. 752). v. “Statistical problem solving is an investigative process that involves four components: Formulate Questions (…) Collect Data (…) Analyze Data (…) Interpret Results” (Franklin y cols., 2005, p. 11). w. “Opportunities should be provided for students to generate questions” (Franklin y cols., 2005, p. 23).
1.2. Lenguajes	a. “conocer las diferentes representaciones de un concepto” (NCTM, 2000, p. 18). b. “adquirir destreza en la representación de sus datos, utilizando con frecuencia diagramas de barra, tablas o diagramas de puntos” (NCTM, 2000, p. 52). **Contenida en “r”** c. “Deberían aprender lo que significan los diferentes números, símbolos y puntos” (NCTM, 2000, p. 52). d. “Los alumnos de los niveles 6-8 deberían empezar a comparar la eficacia de diversas clases de representaciones” (NCTM, 2000, p. 53). e. “Es importante que los alumnos tengan oportunidades no sólo de aprender las formas convencionales de representación, sino también de construir, perfeccionar y usar sus propias representaciones” (NCTM, 2000, p. 72). f. “A medida que aumenta el número de tipos de representación, es importante que los alumnos reflexionen sobre su uso para conocer la potencia y las limitaciones de cada uno según los propósitos” (NCTM, 2000, p. 74). **Contenida en “d”** g. “para mostrar datos estadísticos, necesitan tener oportunidades para considerar las clases de datos y preguntas para las que un diagrama de sectores podría ser más apropiado que un diagrama poligonal lineal, o un diagrama de caja más que un histograma” (NCTM, 2000, p. 74).

h. “representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos” (NCTM, 2000, p. 112).
i. “Deberían realizar recuentos, registrándolos mediante palotes, tablas, diagramas de barras y diagramas de puntos” (NCTM, 2000, p. 113). **Contenida entre “h” y “r”**
j. “Los títulos y etiquetas utilizados en sus representaciones deberían identificar de forma clara qué datos se representan” (NCTM, 2000, p. 113).
k. “deberían ser capaces de organizar y mostrar sus datos a través de representaciones gráficas y resúmenes numéricos” (NCTM, 2000, p. 113).
l. “Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión” (NCTM, 2000, p. 132).
m. “Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas” (NCTM, 2000, p. 140).
n. “Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 140).
o. “El comprender y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos se enriquece cuando los alumnos pueden traducir diferentes representaciones de una misma idea” (NCTM, 2000, p. 143).
p. “representar los datos utilizando tablas y gráficos, como diagramas de puntos, de barras o lineales” (NCTM, 2000, p. 180). **Contenida en “r”**
q. “comparar representaciones diferentes del mismo conjunto de datos, y evaluar cómo cada una muestra aspectos importantes de los datos” (NCTM, 2000, p. 180).
r. “Deberían familiarizarse con diversas representaciones de datos; entre otras, las tablas, los diagramas de puntos, los diagramas de barras y los lineales” (NCTM, 2000, p. 182).
s. “Comparar distintas representaciones ayuda a aprender a evaluar cómo éstas muestran aspectos importantes de los datos” (NCTM, 2000, p. 183). **Contenida en “q”**
t. “Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión” (NCTM, 2000, p. 198). **Contenida en “l”**
u. “Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas” (NCTM, 2000, p. 210). **Contenida en “m”**
v. “Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 210). **Contenida en “n”**
w. “Deberían también tener muchas oportunidades de considerar las ventajas y limitaciones de los diversos tipos de representación que utilicen” (NCTM, 2000, p. 212).
x. “comprender la correspondencia entre conjuntos de datos y sus representaciones gráficas, especialmente con los histogramas, los gráficos tallos-hojas, los gráficos de caja y las nubes de puntos” (NCTM, 2000, p. 252).
y. “seleccionar, crear y utilizar representaciones gráficas apropiadas de datos, incluyendo histogramas, gráficos de caja y nubes de puntos” (NCTM, 2000, p. 252).
z. “utilizar frecuencias absolutas y relativas, diagramas de barras e histogramas para representar los datos que hayan reunido, y a decidir qué tipo de representación es la apropiada según el propósito” (NCTM, 2000, p. 254).
aa. “Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión” (NCTM, 2000, p. 272). **Contenida en “l”**
bb. “reconocer, comparar y usar una serie de formas de representación” (NCTM, 2000, p. 284).
cc. “Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas” (NCTM, 2000, p. 284). **Contenida en “m”**
dd. “Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 284). **Contenida en “n”**
ee. “usar un conjunto amplio de representaciones visuales” (NCTM, 2000, p. 289).
ff. “utilización de representaciones gráficas para interpretar la información” (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida entre “a”, “h” y “r”**
gg. “utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales” (MEC, 2006a, p. 43096).

	hh. “utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad” (MEC, 2006a, p. 43098). ii. “Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos” (MEC, 2006a, p. 43099). jj. “Introducción al lenguaje del azar” (MEC, 2006a, p. 43099). kk. “Lectura e interpretación de tablas de doble entrada” (MEC, 2006a, p. 43099). ll. “Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos” (MEC, 2006a, p. 43101). **Contenida entre “a”, “h” y “r”** mm. “dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia” (MEC, 2006b, p. 688). nn. “Los contenidos de este bloque se mueven entre las distintas formas de representar una situación: verbal, numérica, geométrica o a través de una expresión literal y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje.” (MEC, 2006b, p. 751). **Contenida entre “mm” y “o”** oo. “Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.” (MEC, 2006b, p. 753). pp. “Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.” (MEC, 2006b, p. 755). **Contenida en “oo”** qq. “Another appropriate graphical representation for numerical data on one variable (in addition to the stem and leaf plot) at Level A is a dotplot. Both the dotplot and stem and leaf plot can be used to easily compare two or more similar sets of numerical data.” (Franklin y cols., 2005, p. 28). rr. “A scatterplot can be used to graphically represent data when values of two numerical variables are obtained from the same individual or object.” (Franklin y cols., 2005, p. 31). ss. “With the use of a scatterplot, Level A students can visually look for trends and patterns.” (Franklin y cols., 2005, p. 32). tt. “The two-way frequency table (or contingency table) below provides a way to investigate possible connections between two categorical variables.” (Franklin y cols., 2005, p. 41). uu. “One of the most useful graphical devices for comparing distributions of numerical data is the boxplot.” (Franklin y cols., 2005, p. 46).
1.3. Reglas: definiciones, proposiciones y procedimientos	a. “ser capaz de aplicar procedimientos, conceptos y procesos” (NCTM, 2000, p. 21). b. “Deberían aprender a recoger datos, organizar los propios y los ajenos, y representarlos en gráficos y diagramas que resulten útiles para responder a las preguntas” (NCTM, 2000, p. 51). c. “Empezando en la etapa 3-5 y continuado en los niveles medios, se debería pasar de analizar y describir un conjunto de datos a comparar dos o más conjuntos” (NCTM, 2000, p. 53). d. “Los estudiantes deberían llegar a comprender los elementos básicos del análisis estadístico: seleccionar una muestra adecuada, recoger datos de esta muestra, describir la muestra y hacer inferencias razonables que relacionen la muestra y la población” (NCTM, 2000, p. 53). e. “Al principio, los niños trabajan más frecuentemente con datos censales; por ejemplo, con una encuesta sobre la clase de helados favorita de cada niño de la clase” (NCTM, 2000, p. 53). f. “En los niveles elementales, podrían decir que un grupo tiene más o menos que otro de un determinado atributo. En los medios, deberían cuantificar estas diferencias comparando estadísticas específicas” (NCTM, 2000, p. 53). **Contenida en “h”** g. “Según se va pasando de los niveles medios a la escuela secundaria, los estudiantes irán necesitando nuevas herramientas para identificar semejanzas y diferencias entre los conjuntos de datos; entre ellas, histogramas, gráficos de tronco, gráficos de caja y nubes de puntos. También necesitarán investigar asociaciones y tendencias en datos bivariantes, incluyendo nubes de puntos y líneas de ajuste en los niveles 6-8” (NCTM, 2000, p. 53). h. “A medida que los mayores empiezan a ver un conjunto de datos como un todo, necesitan herramientas para describirlo. Las medidas de centralización (media,

mediana y moda) y de dispersión (rango, desviación típica), y los atributos sobre la forma de la distribución de datos llegan a ser útiles a los estudiantes como descriptores" (NCTM, 2000, p. 53).

i. "usar la terminología apropiada y ser capaces de calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, como el número de veces que se espera que salgan dos caras cuando se lanzan dos monedas al aire 100 veces" (NCTM, 2000, p. 54).
j. "construir un cierto conocimiento de la probabilidad y el azar haciendo experimentos con objetos concretos, tales como sacar fichas coloreadas de una bolsa" (NCTM, 2000, p. 54).
k. "considerar ideas de probabilidad mediante experimentos (usando monedas, dados o peonzas)" (NCTM, 2000, p. 54).
l. "Comprender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad" (NCTM, 2000, p. 112).
m. "Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos" (NCTM, 2000, p. 112).
n. "Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos" (NCTM, 2000, p. 112). **Contenida en "m"**
o. "ordenar y clasificar objetos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquéllos" (NCTM, 2000, p. 112).
p. "Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos" (NCTM, 2000, p. 112). **Contenida en "w"**
q. "Deberían discutir cuándo se pueden aplicar o no las conclusiones obtenidas de los datos de una población, a otra población." (NCTM, 2000, p. 113).
r. "distinguir el significado de los diferentes números: aquéllos que representan valores ("en mi familia hay cuatro personas"), de los que indican cuántas veces (frecuencia) se presenta un valor en un conjunto de datos ("nueve niños tienen familias de cuatro personas")" (NCTM, 2000, p. 113).
s. "clasificar y ordenar utilizando, simultáneamente, más de un atributo" (NCTM, 2000, p. 114). **Contenida en "o"**
t. "Formular e investigar conjeturas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 126).
u. "Comprender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad" (NCTM, 2000, p. 180). **Contenida en "l"**
v. "recoger datos por medio de observaciones, encuestas y experimentos" (NCTM, 2000, p. 180).
w. "Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos" (NCTM, 2000, p. 180).
x. "describir la forma y las características importantes de un conjunto de datos, y comparar conjuntos que tengan relación, poniendo el énfasis en cómo se distribuyen los datos" (NCTM, 2000, p. 180).
y. "utilizar medidas de centralización, principalmente la mediana, y comprender lo qué cada una indica y no indica respecto al conjunto de datos" (NCTM, 2000, p. 180). **Contenida en "h"**
z. "comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1" (NCTM, 2000, p. 180).
aa. "describir sucesos como probables o no probables, y discutir su grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable" (NCTM, 2000, p. 180).
bb. "predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos, y someter a prueba tales predicciones" (NCTM, 2000, p. 180). **Contenida en "eee"**
cc. "Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos" (NCTM, 2000, p. 180).
dd. "proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos" (NCTM, 2000, p. 180).
ee. "Una gran parte del trabajo con datos en la etapa 3-5 debería consistir en la comparación de conjuntos de datos que tengan relación" (NCTM, 2000, p. 183). **Contenida en "c"**
ff. "Apreciar las semejanzas y diferencias existentes en dos conjuntos de datos, requiere que los alumnos lleguen a ser más precisos al describirlos. Así, se va desarrollando la idea de valor "típico" o promedio. Y, a partir de la

comprensión informal de "el que más" y el "mediano", los alumnos pueden llegar a las nociones de moda, mediana, e, informal mente, de media" (NCTM, 2000, pp. 183-184).

gg. "explorar la probabilidad mediante experimentos que produzcan pocos resultados; por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que una ruleta de colores se pare sobre un color determinado?" (NCTM, 2000, p. 185). **Contenida en "eee"**

hh. "Formular conjeturas y evaluarlas basándose en los datos" (NCTM, 2000, p. 192).

ii. "Formular e investigar conjeturas matemática" (NCTM, 2000, p. 192). **Contenida en "t"**

jj. "Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos" (NCTM, 2000, p. 252). **Contenida en "cc"**

kk. "hallar, utilizar e interpretar medidas de centralización y de dispersión, incluyendo la media y el rango intercuartílico" (NCTM, 2000, p. 252).

ll. "Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos" (NCTM, 2000, p. 252).

mm. "formular conjeturas sobre las posibles relaciones entre dos características de una muestra, a partir de nubes de puntos de los datos y líneas de ajuste aproximadas" (NCTM, 2000, p. 252).

nn. "responder preguntas más complejas, como las que conciernen a relaciones entre poblaciones o muestras, o a relaciones entre dos variables dentro de una población o muestra. A tal fin, deberían añadirse nuevas representaciones al repertorio de los estudiantes. Los gráficos de la caja les permiten comparar dos o más muestras (…) Las nubes de puntos permiten relacionar pares de características dentro de una muestra" (NCTM, 2000, p. 252).

oo. "comparar la utilidad de la media y de la mediana como medidas de centralización para diferentes conjuntos de datos" (NCTM, 2000, p. 255).

pp. "Es también necesario que los alumnos piensen sobre las medidas de centralización en relación con la dispersión de una distribución" (NCTM, 2000, p. 255).

qq. "utilizar las nubes de puntos para considerar la relación entre dos características en poblaciones diferentes" (NCTM, 2000, p. 257).

rr. "los alumnos deberían trabajar con muchas nubes de puntos que tengan una forma casi lineal, pero deberían explorar también representaciones no lineales" (NCTM, 2000, p. 257).

ss. "dominar los algoritmos de cálculo escrito" (MEC, 2006a, p. 43095).

tt. "Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro" (MEC, 2006a, p. 43098).

uu. "Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información" (MEC, 2006a, p. 43097). **Contenida en "vv"**

vv. "Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos" (MEC, 2006a, p. 43098).

ww. "técnicas elementales de encuesta, observación y medición" (p. 43099). **Contenida en "aaa"**

xx. "Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos" (MEC, 2006a, p. 43099). **Contenida en "nnn"**

yy. "Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto" (MEC, 2006a, p. 43099).

zz. "La media aritmética, la moda y el rango" (MEC, 2006a, p. 43101).

aaa. "Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición" (MEC, 2006a, p. 43101).

bbb. "Obtención y utilización de información para la realización de gráficos" (MEC, 2006a, p. 43101).

ccc. "Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado" (MEC, 2006a, p. 43101).

ddd. "Estimación del grado de probabilidad de un suceso" (MEC, 2006a, p. 43101).

eee. "Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación." (MEC, 2006b, p.

753).

fff. Diferentes formas de recogida de información. (MEC, 2006b, p. 753).

ggg. “Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.” MEC, 2006b, (p. 753).

hhh. “Diferentes formas de recogida de información.” (MEC, 2006b, p. 755). **Contenida en “vv”**

iii. “Organización de los datos en tablas.” (MEC, 2006b, p. 755). **Contenida en “ggg”**

jjj. “Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas.” (MEC, 2006b, p. 755).

kkk. “Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo.” (MEC, 2006b, p. 755).

lll. “Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas.” (MEC, 2006b, p. 755).

mmm. “Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones.” (MEC, 2006b, p.755).

nnn. “students should develop basic ideas of probability” (Franklin y cols., 2005, p. 23). **Contenida en “K”**

ooo. “Students at Level A should recognize the mode as a way to describe a “representative” or “typical” value for the distribution.” (Franklin y cols., 2005, p. 26). **Contenida en “h”**

ppp. “comparing two distinct groups with respect to some characteristic of those groups.” (Franklin y cols., 2005, p. 27). **Contenida en “c”**

qqq. “From the stem and leaf plot, students can get a sense of shape” (Franklin y cols., 2005, p. 27).

rrr. “Another type of design for collecting data appropriate at Level A is a simple experiment, which consists of taking measurements on a particular condition or group.” (Franklin y cols., 2005, p. 28).

sss. “Students should understand that the median describes the center of a numerical data set in terms of how many data points are above and below it.” (Franklin y cols., 2005, p. 29).

ttt. “Students should understand the mean as a fair share measure of center at Level A.” (Franklin y cols., 2005, p. 30).

uuu. “The mean and median are measures of location for describing the center of a numerical data set.” (Franklin y cols., 2005, p. 30). **Contenida entre “sss” y “ttt”**

vvv. “Determining the maximum and minimum values of a numerical data set assists children in describing the position of the smallest and largest value in a data set.” (Franklin y cols., 2005, p. 30).

www. “Level A students need to develop basic ideas of probability” (Franklin y cols., 2005, p. 33). **Contenida en “K”**

xxx. “At Level A, students should understand that probability is a measure of the chance that something will happen. It is a measure of certainty or uncertainty.” (Franklin y cols., 2005, p. 33).

yyy. “Students learn to informally assign numbers to the likelihood that something will occur.” (Franklin y cols., 2005, p. 33). **Contenida en “aa”**

zzz. “Through experimentation (or simulation), students should develop an explicit understanding of the notion that the more times you repeat a random phenomenon, the closer the results will be to the expected mathematical model.” (Franklin y cols., 2005, p. 34).

aaaa. “Level A, probability experiments should focus on obtaining empirical data to develop relative frequency interpretations that children can easily translate to models with known and understandable “mathematical” probabilities.” (Franklin y cols., 2005, p. 34).

bbbb. “At Level B, students investigate problems with more emphasis placed on possible associations among two or more variables” (Franklin y cols., 2005, P. 37).

cccc. “students should develop a basic understanding of the role probability plays in random selection-and in random assignment when conducting an experiment.” (Franklin y cols., 2005, P. 37). **Incluida en “eeee”**

	dddd. "summarizing and interpreting data in terms of percents or fractions." (Franklin y cols., 2005, p. 39). eeee. "In statistics, randomness and probability are incorporated into the sample selection procedure in order to provide a method that is "fair" and to improve the chances of selecting a representative sample." (Franklin y cols., 2005, p. 40). ffff. "Although Level B students may not actually employ a random selection procedure when collecting data, issues related to obtaining representative samples should be discussed at this level" (Franklin y cols., 2005, p. 40). **Contenida en "eeee"** gggg. "Another idea developed at Level A that can be expanded at Level B is the mean as a numerical summary of center for a collection of numerical data. At Level A, the mean is interpreted as the "fair share" value for data." (Franklin y cols., 2005, p. 41). hhhh. "At Level B, students should be introduced to the idea of comparing data values to a central value, such as the mean or median, and quantifying how different the data are from this central value." (Franklin y cols., 2005, p. 44). **Contenida en "h"** iiii. "Another measure of spread that should be introduced at Level B is the interquartile range" (Franklin y cols., 2005, p. 47). jjjj. "Measuring the strength of association between two variables is an important statistical concept that should be introduced at Level B." (Franklin y cols., 2005, p. 49). **Contenida en "mm"** kkkk. "At Level B, students should experience the consequences of nonrandom selection and develop a basic understanding of the principles involved in random selection procedures." (Franklin y cols., 2005, p. 52). llll. "Another important statistical method that should be introduced at Level B is comparative experimental studies." (Franklin y cols., 2005, p. 54). mmmm. "Another important statistical tool that should be introduced at Level B is a time series plot. Problems that explore trends in data over time are quite common." (Franklin y cols., 2005, p. 55).
1.4. Argumentos	a. "El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad" (NCTM, 2000, p. 59). b. "El razonamiento sistemático es una de las características que definen a las matemáticas. Se encuentra en todos los contenidos y, con distintos grados de rigor, en todos los niveles" (NCTM, 2000, p. 60). **Contenida en "a"** c. "Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 126). d. "Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos" (NCTM, 2000, p. 126). e. "fomentar maneras de justificar que estén al alcance de los alumnos" (NCTM, 2000, p. 130). f. "Los profesores deberían animar a sus alumnos a conjeturar y a justificar su pensamiento empíricamente o con argumentos razonables" (p. 130). **Contenida en "e"** g. "Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos" (NCTM, 2000, p. 192). **Contenida en "d"** h. "Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración" (NCTM, 2000, p. 192). i. "Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 192). **Contenida en "c"** j. "Parte del razonamiento matemático consiste en examinar y tratar de comprender por qué algo que parece ser cierto, no lo es, y en empezar a usar contraejemplos en este contexto" (NCTM, 2000, p. 195). k. "Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos" (NCTM, 2000, p. 266). **Contenida en "d"** l. "utilizar los razonamientos inductivo y deductivo para formular argumentos matemáticos" (NCTM, 2000, p. 266). m. "Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 266). **Contenida en "c"**

	n. "Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración" (NCTM, 2000, p. 266). **Contenida en "h"**
1.5. Relaciones	a. "La noción de que los conceptos matemáticos están conectados debería impregnar las experiencias matemáticas escolares en todos los niveles" (NCTM, 2000, p. 68). b. "Las ideas matemáticas clave en los niveles medios están íntimamente conectadas entre sí" (NCTM, 2000, p. 68). **Contenida en "a"** c. "Si los estudiantes adquieren una visión de las matemáticas como un todo conectado e integrado, disminuirá la tendencia a considerar por separado conceptos y destrezas. Si las estructuras conceptuales se enlazan con los procedimientos, no las percibirán como un conjunto arbitrario de reglas. Esta integración debería ser central en las matemáticas escolares" (NCTM, 2000, p. 69). d. "Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente" (NCTM, 2000, p. 136). e. "Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 136). f. "Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente" (NCTM, 2000, p. 204). **Contenida en "d"** g. "Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 204). **Contenida en "e"** h. "Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 278). **Contenida en "e"** i. "Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente" (NCTM, 2000, p. 278). **Contenida en "d"** j. "A major objective of statistics education is to help students develop statistical thinking." (Franklin y cols., 2005, p. 6). k. "Statistical thinking, in large part, must deal with this omnipresence of variability; statistical problem solving and decision making depend on understanding, explaining, and quantifying the variability in the data." (Franklin y cols., 2005, p. 6). l. "There are many sources of variability in data (…) Measurement Variability (…) Natural Variability (…) Induced Variability (…) Sampling Variability" (Franklin y cols., 2005, p. 7). m. "Data collection designs must acknowledge variability in data, and frequently are intended to reduce variability." (Franklin y cols., 2005, p. 11). n. "The main purpose of statistical analysis is to give an accounting of the variability in the data." (Franklin y cols., 2005, p. 12). **Contenida en "o"** o. "Statistical interpretations are made in the presence of variability and must allow for it." (Franklin y cols., 2005, p. 12). p. "At Level A, we want students to recognize that there will be individual-to-individual variability." (Franklin y cols., 2005, p. 24). q. "Students should explore possible reasons data look the way they do and differentiate between variation and error." (Franklin y cols., 2005, p. 33). r. "The notions of error and variability should be used to explain the outliers, clusters, and gaps students observe in the graphical representations of the data." (Franklin y cols., 2005, p. 33). s. "An understanding of error versus natural variability will help students interpret whether an outlier is a legitimate data value that is unusual or whether the outlier is due to a recording error." (Franklin y cols., 2005, p. 33). t. "At Level A, it is imperative that students begin to understand the concept of variability." (Franklin y cols., 2005, p. 33). u. "Students who complete Level B should see statistical reasoning as a process for solving problems through data" (Franklin y cols., 2005, p. 37). v. "Students at Level B should begin to recognize that there is not only variability from one individual to another within a group, but also in results from one group to another." (Franklin y cols., 2005, p. 39). w. "every highschool graduate deserves to have a solid foundation in statistical

	reasoning" (Franklin y cols., 2005, p. 56). **Contenida entre "j" y "u"**

2. FACETA ECOLÓGICA

Tabla A.2. Unidades de análisis categoría 2: Faceta ecológica

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
2.1. Adaptación al currículo	a. "Los profesores necesitan (…) conocimiento profundo y flexible respecto a los objetivos curriculares y las ideas fundamentales en cada nivel de enseñanza" (NCTM, 2000, p. 18). b. "Los profesores tienen también que proporcionar de forma rutinaria a sus alumnos problemas ricos, centrados en ideas matemáticas importantes del currículo" (NCTM, 2000, p. 201).
2.2. Apertura hacia la innovación didáctica	
2.3. Adaptación socio-cultural y profesional	a. "entender y ser capaz de usar matemáticas en la vida diaria y en el trabajo" (NCTM, 2000, p. 4). b. "seguir una vía educativa que les prepare para trabajar durante toda su vida como matemáticos, estadísticos, ingenieros o científicos" (NCTM, 2000, p. 5). c. "tener habilidad para usar los conocimientos con flexibilidad, y aplicar con propiedad lo aprendido en un contexto, a otro contexto" (NCTM, 2000, p. 21). d. "Los contextos de los problemas pueden variar desde las experiencias familiares o escolares del alumnado a las aplicaciones científicas o del mundo laboral" (NCTM, 2000, p. 55). e. "los estudiantes deberían usar matemáticas con seguridad para explicar aplicaciones complejas en el mundo exterior" (NCTM, 2000, p. 70). f. "Es importante que los estudiantes tengan oportunidad de experimentar las Matemáticas en un contexto. Se utilizan en ciencias, ciencias sociales, medicina y en el comercio" (NCTM, 2000, p. 70). **Contenida en "c"** g. "El Análisis de datos y la estadística son útiles para ayudar a los alumnos a clarificar cuestiones relativas a sus vidas" (NCTM, 2000, p. 70). h. "los alumnos deberían proponer preguntas que se refieran a ellos y a su entorno, a temas de su escuela o comunidad" (NCTM, 2000, p. 181). **Contenida en "m"** i. "Los contextos del mundo real proporcionan oportunidades a los alumnos para conectar con su entorno lo que están aprendiendo" (NCTM, 2000, p. 204). **Contenida en "m"** j. "Las experiencias diarias pueden ser también fuentes de datos" (NCTM, 2000, p. 205). k. "Las experiencias de la vida diaria pueden sugerir muchos problemas interesantes" (NCTM, 2000, p. 260). **Contenida en "m"** l. "contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria" (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en "m"** m. "Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria" (MEC, 2006a, p. 43096). n. "Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana" (MEC, 2006a, p. 43097). o. "aplicación a situaciones familiares" (MEC, 2006a, p. 43101). **Contenida en "m"** p. "Presencia del azar en la vida cotidiana" (MEC, 2006a, p. 43101). q. "Statistical literacy is required for daily personal choices." (Franklin y cols., 2005, p. 2). r. "Statistics plays a prominent role in this scientific progress." (Franklin y cols., p. 2). s. "Statistical literacy is essential in our personal lives as consumers, citizens, and

		professionals." (Franklin y cols., p. 3).
	t.	"students recognize ways in which statistics is used or misused in their world." (Franklin y cols., p. 37).
2.4. Educación en valores		
2.5. Conexiones intra e interdisciplinares	a.	"enlazar diferentes aéreas de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 16).
	b.	"Trabajar con el Análisis de datos y con la Probabilidad ofrece a los estudiantes una forma natural de conectar las matemáticas con otras asignaturas" (NCTM, 2000, p. 51).
	c.	"Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles" (NCTM, 2000, p. 68).
	d.	"los profesores tienen que conocer (…) las matemáticas que han estudiado en los cursos anteriores y las que estudiarán en los siguientes" (NCTM, 2000, p. 68).
	e.	"Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio" (NCTM, 2000, p. 68). **Contenida entre "d" y "e"**
	f.	"las experiencias interdisciplinares sirven para revisar ideas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 283).
	g.	"conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento" (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en "a"**
	h.	"circle graphs require an understanding of proportional reasoning" (GAISE, 2005; p. 25).
	i.	"Students at Level B will study linear relationships in other areas of their mathematics curriculum." (p. 51). **Contenida en "a"**

Nota: En las celdas en blanco no hemos encontrado UA para las componentes respectivas. Sin embargo, puede haber elementos de dichas componentes en los indicadores de interacciones entre facetas.

3. FACETA COGNITIVA

Tabla A.3. Unidades de análisis categoría 3: Faceta cognitiva

COMPONENTES		UNIDADES DE ANÁLISIS
3.1. Conocimientos previos	a.	"las ideas nuevas se consideran extensiones de las matemáticas anteriormente aprendidas" (NCTM, 2000, p. 69).
3.2. Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	a.	"los que posean necesidades especiales, deben tener las oportunidades y el apoyo adecuado para alcanzar un sustancial entendimiento de matemáticas importantes" (NCTM, 2000, p. 5). **Contenida en "b"**
	b.	"Todos los alumnos, independiente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas" (NCTM, 2000, p. 12).
	c.	"La igualdad, no significa que todos deban recibir idéntica instrucción; por el contario, exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas" (NCTM, 2000, p. 12). **Contenida entre "d" y "e"**
	d.	"Los estudiantes con algún tipo de discapacidad pueden necesitar más tiempo para completar sus tareas" (NCTM, 2000, p. 14).
	e.	"aquellos alumnos con especial interés por la disciplina o excepcional talento para ella, pueden necesitar programas más ricos o más recursos para estimularlos y comprometerlos" (NCTM, 2000, p.14).
	f.	"los profesores tienen que conocer las necesidades de sus alumnos" (NCTM, 2000, p. 68). **Contenida en "b"**
3.3. Aprendizaje; evaluación		

sumativa	

Nota: En la celda en blanco no hemos encontrado UA para dicha componente. Sin embargo, puede haber elementos relacionados en los indicadores de interacciones entre facetas.

4. FACETA AFECTIVA

Tabla A.4. Unidades de análisis categoría 4: Faceta afectiva

COMPONENTES:	UNIDADES DE ANÁLISIS
4.1. Intereses y necesidades	a. "las tareas deben ser motivadoras y con un nivel de desafío que invite a la especulación y al trabajo intenso" (NCTM, 2000, p. 19). b. "Los buenos problemas pueden inspirar la exploración de ideas matemáticas importantes" (NCTM, 2000, p. 186). c. "los problemas que se propongan en los niveles medios pueden y deberían responder a preguntas de los alumnos y atraer sus intereses" (NCTM, 2000, p. 262).
4.2. Actitudes	a. "apreciar el poder y la precisión del lenguaje matemático" (NCTM, 2000, p. 67). b. "la sistematización, la mirada crítica" (MEC, 2006a, p. 43097). c. "aceptar otros puntos de vista distintos al propio" (MEC, 2006a, p. 43097). **Contenida en "e"** d. "la perseverancia y el esfuerzo para abordar situaciones de creciente complejidad" (MEC, 2006a, p. 43097). **Contenida en "i"** e. "Respeto por el trabajo de los demás" (MEC, 2006a, p. 43098). f. "Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo" (MEC, 2006a, p. 43098). g. "curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica" (MEC, 2006a, p. 43099) h. "analizar críticamente las informaciones que se presentan" (MEC, 2006a, p. 43101). i. "Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas" (MEC, 2006a, p. 43101).
4.3. Emociones	a. "actuar con confianza ante los números y las cantidades" (MEC, 2006a, pp. 43095-43096). **Contenida en "b"** b. "valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas" (MEC, 2006a, p. 43097). c. "Confianza en las propias posibilidades" (MEC, 2006a, p. 43099). **Contenida en "b"**

5. FACETA INTERACCIONAL

Tabla A.5. Unidades de análisis categoría 5: Faceta interaccional

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
5.1. Interacción docente-discente	a. "sacar provecho de las oportunidades que se presenten para enfocar las lecciones en direcciones no previstas" (NCTM, 2000, p. 16). b. "¿Se fomentan la discusión y la colaboración? ¿Se pide al alumnado que justifique sus opiniones?" (NCTM, 2000, p. 19). c. "Los estudiantes necesitan oportunidades para poner a prueba sus ideas, sobre la base de un conocimiento compartido con la comunidad matemática de la clase, para ver si pueden ser entendidas y si ellos son suficientemente convincentes" (NCTM, 2000, p. 65). d. "Para apoyar con eficacia el discurso en el aula, los profesores tienen que

		propiciar un ambiente en el que los alumnos se sientan libres para expresar sus ideas" (NCTM, 2000, p. 65). **Contenida en "k"**
	e.	"Permitir que los estudiantes se enfrenten con sus ideas y desarrollen sus propios medios informales de expresarlas, puede ser un camino efectivo para fomentar la participación y el dominio" (NCTM, 2000, p. 67). **Contenida en "g"**
	f.	"Los profesores deben favorecer la inclinación natural de los alumnos a hacer preguntas" (NCTM, 2000, p.113).
	g.	"los profesores tienen que ser diligentes en proporcionarles experiencias que permitan formas diversas de comunicación, como un componente natural de la clase de matemáticas" (NCTM, 2000, p. 134).
	h.	"Es responsabilidad del profesor saber cuándo los alumnos necesitan ayuda, y cuándo pueden seguir trabajando productivamente sin ella" (NCTM, 2000, p. 190).
	i.	"Los profesores y los alumnos deberían ser receptivos a las preguntas, reacciones y elaboraciones de los demás" (NCTM, 2000, p. 192). **Contenida en "m"**
	j.	"Los profesores necesitan ayudar a los estudiantes a aprender a hacer preguntas cuando no están de acuerdo o no entienden el razonamiento de un compañero" (NCTM, 2000, p. 202).
	k.	"los profesores necesitan establecer una atmósfera de confianza y respeto mutuos" (NCTM, 2000, p. 275).
	l.	"Los profesores deberían resistirse a los intentos de los alumnos de que "piensen por ellos" (NCTM, 2000, p. 277). **Contenida en "h"**
	m.	"facilitar la expresión como de propiciar la escucha de las explicaciones de los demás" (MEC, 2006a, p. 43097).
5.2. Interacción entre discentes	a.	"Durante la etapa 3-5, los estudiantes deberían irse responsabilizando gradualmente de participar en las discusiones de toda la clase y de responder directamente a otro" (NCTM, 2000, p. 65). **Contenida en "e"**
	b.	"La comunicación de ideas matemáticas es una manera de que los alumnos articulen, aclaren, organicen y consoliden su pensamiento" (NCTM, 2000, p. 132).
	c.	"Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas" (NCTM, 2000, p. 132).
	d.	"Los alumnos necesitan explicar y justificar lo que piensan, y aprender cómo detectar las falacias y a criticar el pensamiento de otros" (NCTM, 2000, p. 192).
	e.	"En las discusiones de clase, los estudiantes deberían convertirse en la audiencia para los comentarios de otros. Esto implica hablar a otros para convencer o cuestionar a los compañeros" (NCTM, 2000, p. 198).
	f.	"Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas" (NCTM, 2000, p. 198). **Contenida en "c"**
	g.	"Deben darse oportunidades para que los alumnos comprueben la claridad de sus trabajos con sus compañeros" (NCTM, 2000, p. 203). **Contenida en "d"**
5.3. Autonomía	a.	"Los niños pueden diseñar planes simples de recogida de datos para tratar de responder a las preguntas planteadas" (NCTM, 2000, p. 52).
	b.	"leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados" (MEC, 2006a, p. 43096).
	c.	"comprensión en detalle de la situación planteada para trazar un plan y buscar estrategias y, en definitiva, para tomar decisiones" (MEC, 2006a, p. 43097). **Contenida en "b"**
	d.	"utilizar estrategias personales de resolución de problemas" (MEC, 2006a, p. 43097).
5.4. Evaluación formativa	a.	"los alumnos deberían ser evaluados e informados de manera que se señalen las áreas que requieran una inmediata atención adicional" (NCTM, 2000, p. 12).
	b.	"Mediante una variedad de estrategias, deberían comprobar la capacidad e inclinación de los alumnos para analizar situaciones, elaborar y resolver

problemas y dar sentido a los conceptos y procedimientos matemáticos” (NCTM, 2000, p. 20).

c. “Los alumnos aprenden más y mejor cuando pueden controlar su aprendizaje definiendo sus objetivos y haciendo el seguimiento de su progreso” (NCTM, 2000, p. 21). **Contenida en “i”**
d. “cuando los estudiantes proponen ideas y conjeturas matemáticas, aprenden a evaluar su propio pensamiento y el de los demás” (NCTM, 2000, p. 22). **Contenida entre “p” y “q”**
e. “Deberían incluirse actividades que sean coherentes con las realizadas en clase y, a veces, como las mismas” (NCTM, 2000, p. 23).
f. “la evaluación (…); debería constituir una parte integral de la enseñanza que le informe al profesorado y le sirva de guía para la toma de decisiones” (NCTM, 2000, p. 23).
g. “la evaluación (…). No solo debería hacerse a los alumnos, sino también para los alumnos, para guiar y mejorar su aprendizaje” (NCTM, 2000, p.23).
h. “considerar la evaluación como una parte integral de la práctica de la clase, se asocia con la mejora del aprendizaje” (NCTM, 2000, p. 23).
i. “La retroalimentación (feedback) a partir de tareas de evaluación puede ayudar también a los alumnos a fijar objetivos, asumir la responsabilidad del propio aprendizaje y llegar a ser aprendices más independientes” (NCTM, 2000, p. 23).
j. “Cuando los profesores emplean técnicas de evaluación como las observaciones, las conversaciones y las entrevistas, o los diarios interactivos, los alumnos probablemente aprendan al expresar las ideas y al contestar las preguntas que les formulan” (NCTM, 2000, p. 23).
k. “es imperativo que los profesores recaben pruebas de diversas maneras -a través del trabajo y las conversaciones de los alumnos, por ejemplo” (NCTM, 2000, p. 123-124). **Contenida en “b”**
l. “La evaluación debería reflejar las matemáticas que todos los estudiantes necesitan conocer” (NCTM, 2000, p. 24).
m. “Los profesores necesitan tener una idea clara de lo que se debe enseñar y aprender, y la evaluación debería estar en consonancia con dicha idea” (NCTM, 2000, p. 24). **Contenida en “l”**
n. “los profesores deberían estar continuamente recabando información sobre el progreso de sus alumnos” (NCTM, 2000, p.24).
o. “Para asegurar la profundidad y la calidad del aprendizaje de todos los estudiantes, la evaluación y la enseñanza deben estar integradas” (NCTM, 2000, p. 24). **Contenida en “f”**
p. “los profesores pueden cultivar tanto la disposición como la capacidad del alumnado para implicarse en la autoevaluación de sus trabajos y reflexionar sobre las ideas propuestas por otros” (NCTM, 2000, p. 24).
q. “la autoevaluación y la evaluación entre iguales tiene un impacto positivo en el aprendizaje” (NCTM, 2000, p. 24).
r. “las evaluaciones deberían dar ocasión a múltiples enfoques, para obtener así una imagen más acabada y permitir que cada uno muestre sus mejores potencialidades” (NCTM, 2000, p. 25).
s. “Los profesores pueden utilizar muchas técnicas de evaluación, incluyendo cuestiones abiertas, tareas donde hay que elaborar la respuesta, donde hay que seleccionar una respuesta entre varias, tareas prácticas, observaciones, conversaciones, diarios de clase y cuadernos de trabajo” (NCTM, 2000, p. 25).
t. “los profesores necesitan superar la consideración superficial de tarea correcta e incorrecta” (NCTM, 2000, p. 25).
u. “Los profesores tienen que tratar de comprender lo que los alumnos intentan comunicar, y utilizar esta información para progresar en el aprendizaje individual y de la clase como conjunto” (NCTM, 2000, p. 135).
v. “Los profesores (...) Deberían escuchar a los alumnos para evaluar las conexiones que hacen, y usar esta información para programar actividades que enriquezcan los conocimientos y destrezas matemáticos y establezcan conexiones nuevas y diferentes” (NCTM, 2000, p. 139). **Contenida en “u”**
w. “Los profesores pueden hacerse mejor idea de lo que piensan sus alumnos y de su dominio de los conceptos matemáticos, examinando e interpretando sus

	representaciones y haciendo preguntas acerca de ellas" (NCTM, 2000, p. 140). x. "Los profesores necesitan también controlar el aprendizaje de sus alumnos para dirigir adecuadamente el discurso de la clase" (NCTM, 2000, p. 275). y. "La comunicación es fundamental para enseñar y aprender matemáticas y para evaluar los conocimientos de los alumnos" (NCTM, 2000, p. 275). **Contenida en "z"** z. "Los profesores pueden usar las discusiones en clase para la progresiva evaluación de su enseñanza y del aprendizaje de sus alumnos" (NCTM, 2000, p. 276). aa. "Formular y resolver sencillos problemas" (MEC, 2006a, p. 43098). bb. "Explicar oralmente el proceso seguido para resolver un problema" (MEC, 2006a, p. 43098). **Contenida en "ee"** cc. "anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución" (MEC, 2006a, p. 43101). dd. "Valorar las diferentes estrategias y perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas, tanto en la formulación como en la resolución de un problema" (MEC, 2006a, p. 43101). ee. "Expresar de forma ordenada y clara, oralmente y por escrito, el proceso seguido en la resolución de problemas" (MEC, 2006a, p. 43101).

6. FACETA MEDIACIONAL

Tabla A.6. Unidades de análisis categoría 6: Faceta mediacional

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
6.1. Recursos materiales (tangibles, textuales, digitales, …)	a. "Seleccionar y usar materiales curriculares apropiados, técnicas de enseñanza oportunas" (NCTM, 2000, p. 18). b. "La tecnología enriquece la gama y calidad de las investigaciones" (NCTM, 2000, p. 26). c. "La tecnología no debería utilizarse como sustituto de los conocimientos e intuiciones básicas, si no que puede y debería usarse para potenciarlos" (NCTM, 2000, p. 26). d. "los ordenadores (…). Pueden apoyar las investigaciones de los estudiantes en cada área temática" (NCTM, 2000, p. 26). **Contenida en "b"** e. "Las calculadoras y los ordenadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas" (NCTM, 2000, p. 26). f. "La tecnología puede ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas" (NCTM, 2000, p. 26). **Contenida en "g"** g. "la tecnología debería usarse amplia y responsablemente, con el objetivo de enriquecer el aprendizaje" (NCTM, 2000, p. 26). h. "Se ayuda al aprendizaje mediante la retroalimentación que la tecnología suministra" (NCTM, 2000, p. 27). **Contenida en "g"** i. "Los profesores deberían utilizar la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos" (NCTM, 2000, p. 27). **Contenida en "g"** j. "realizar simulaciones para que los alumnos experimenten con situaciones de problema difíciles de crear si la ayuda tecnológica" (NCTM, 2000, p. 27). k. "El uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende del profesor. La tecnología no es panacea" (NCTM, 2000, p. 27). l. "usar datos y recursos de Internet y de la World Wide Web para que los alumnos diseñen trabajos" (NCTM, 2000, p. 27). m. "Disponiendo de tecnología, (…). Los alumnos de la escuela elemental pueden organizar y analizar grandes conjuntos de datos" (NCTM, 2000, p. 28). n. "Los alumnos de todos los niveles deberían aprender a investigar sus conjeturas por medio de materiales concretos, calculadoras y otras herramientas" (NCTM, 2000, p. 60). o. "En la aulas donde los alumnos tienen a su alcance materiales como fichas, calculadoras y ordenadores, y en las que se les anima a utilizar una amplia serie

	de estrategias, se desarrollan formas de pensamiento generadoras de múltiples niveles de comprensión" (NCTM, 2000, p. 124). p. "proporcionar materiales físicos a las aulas" (NCTM, 2000, p. 129). **Contenida en "o"** q. "Los alumnos deberían también aprender a buscar datos relevantes en otras fuentes, como la Web o las publicaciones impresas" (NCTM, 2000, p. 253). r. "La tecnología puede aligerar mucho el pesado trabajo que obligaba antes a plantear frecuentemente sólo problemas con "números fáciles de manejar"" (NCTM, 2000, p. 262). s. "utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales" (MEC, 2006a, p. 43101). **Contenida en "e"** t. "uso de calculadoras y de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de contenidos matemáticos" (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en "e"** u. "Level A students should master the computation (by hand or using appropriate technology) of the mean" (Franklin y cols., 2005, p. 30). v. "Level B students may encounter outliers when using statistical software or graphing calculators." (Franklin y cols., 2005, p. 48).
6.2. Número de alumnos, horario y condiciones del aula	a. "Más que el escenario físico con pupitres, paneles y carteles, el ambiente de clase comunica mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y uso de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 19).
6.3. Tiempo de enseñanza y aprendizaje (colectiva e individual)	

Nota: En la celda en blanco no hemos encontrado UA para dicha componente. Sin embargo, puede haber elementos relacionados en los indicadores de interacciones entre facetas.

7. INTERACCIONES ENTRE FACETAS

Tabla A.7. Unidades de análisis categoría 7: Interacciones entre facetas

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
7.1. Epistémica-ecológica	a. "Las experiencias matemáticas en todos los niveles deberían incluir oportunidades de aprender, trabajando en problemas que surjan de contextos no matemáticos" (NCTM, 2000, p. 69). **Contenida en "c"** b. "incluir dibujos más complejos, tablas, gráficas y palabras para modelizar problemas y situaciones" (NCTM, 2000, p. 73). c. "Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos" (NCTM, 2000, p. 120). d. "Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos" (NCTM, 2000, p. 136). **Contenida en "c"** e. "Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos" (NCTM, 2000, p. 186). **Contenida en "c"** f. "Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos" (NCTM, 2000, p. 204). g. "Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos" (NCTM, 2000, p. 210). h. "Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos" (NCTM, 2000, p. 260). **Contenida en "c"** i. "Es conveniente que los profesores pidan regularmente a sus alumnos que formulen problemas interesantes basados en una amplia variedad de situaciones matemáticas y extramatemáticas" (NCTM, 2000, p. 262). j. "aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos" (NCTM, 2000, p. 278). **Contenida en "f"**

	k.	“Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos” (NCTM, 2000, p. 284). **Contenida en “g”**
	l.	“es importante que los alumnos de estos niveles medios tengan oportunidades para usar su repertorio de representaciones matemáticas para resolver, a su nivel, problemas motivadores y significativos que impliquen modelizar fenómenos físicos, sociales o matemáticos” (NCTM, 2000, p. 288). **Contenida en “g”**
	m.	“Los contenidos (…) adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento” (MEC, 2006a, p. 43096).
	n.	“la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad” (MEC, 2006a, p. 43096). **Contenida en “o”**
	o.	“utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales para interpretar la información sobre la realidad” (MEC, 2006a, p. 43096).
	p.	“Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma” (MEC, 2006a, p. 43097).
7.2. Epistémica-cognitiva	a.	“Los alumnos deberían tener frecuentes oportunidades de formular problemas complejos, de enfrentarse a ellos y de resolverlos (…), luego, habría que estimularles a reflexionar sobre su pensamiento” (NCTM, 2000, p. 55).
	b.	“El trabajo con problemas (…) es ayudar a los niños a pensar sistemáticamente sobre las posibilidades que ofrece, y a organizar y registrar su pensamiento” (NCTM, 2000, p. 56).
	c.	“Los estudiantes deberían comprender que las representaciones escritas de ideas matemáticas son una parte esencial del aprendizaje y el uso de la matemáticas” (NCTM, 2000, p. 71).
	d.	“Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticos” (NCTM, 2000, p. 71).
	e.	“Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él” (NCTM, 2000, p. 120).
	f.	“Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él” (NCTM, 2000, p. 186). **Contenida en “e”**
	g.	“Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él” (NCTM, 2000, p. 260). **Contenida en “e”**
	h.	“los estudiantes deberían reflexionar sobre su forma de resolver problemas, y considerar cómo podría modificarse, ampliarse, hacerse más eficiente o clarificarse” (NCTM, 2000, p. 265).
7.3. Epistémica-interaccional	a.	“Respecto a algunos propósitos, será apropiado que los estudiantes describan su pensamiento informalmente, utilizando el lenguaje ordinario y dibujos pero, a través de los niveles medios y la enseñanza secundaria, deberían también aprender a comunicar de manera más formal” (NCTM, 2000, p. 66).
	b.	“es importante evitar una prisa prematura por imponer el lenguaje matemático formal” (NCTM, 2000, p. 67).
	c.	“los profesores deberían modelizar el lenguaje matemático que los alumnos posiblemente no hayan conectado todavía con sus ideas” (NCTM, 2000, p. 128).
	d.	“Los profesores deberían ayudar a los alumnos a aprender cómo hablar sobre matemáticas, explicar sus respuestas y describir sus estrategias” (NCTM, 2000, p. 132). **Contenida en “c”**
	e.	“Es responsabilidad del profesor ver cuáles son los momentos apropiados para hacer conexiones entre los símbolos inventados y la notación estándar” (NCTM, 2000, p. 135).
	f.	“Los profesores deberían analizar las representaciones de los alumnos y escuchar atentamente sus discusiones” (NCTM, 2000, p. 140). **Contenida en “k”**
	g.	“Los profesores deberían guiar a sus alumnos en el desarrollo y la utilización de múltiples representaciones con eficacia” (NCTM, 2000, p. 143).

	h. “Cuando los alumnos construyen gráficas de datos numéricos ordenados es necesario ayudarles a comprender lo que representan los valores sobre los ejes horizontal y vertical” (NCTM, 2000, p. 182). i. “Los profesores tienen que ayudar a los estudiantes a adquirir el lenguaje matemático para la descripción de objetos y relaciones” (NCTM, 2000, p. 202). j. “Los profesores pueden elegir estratégicamente las representaciones de los alumnos que crean sea más provechoso discutir con toda la clase” (NCTM, 2000, p. 212). k. “Cuando los alumnos trabajan con distintas representaciones, los profesores necesitan observar cuidadosamente cómo las entienden y utilizan” (NCTM, 2000, p. 213). l. “Debería esperarse que los alumnos explicaran sus ideas y soluciones en palabras. Después, deben recibir ayuda para aprender a usar convenientemente los símbolos matemáticos convencionales” (NCTM, 2000, p. 262). **Contenida en “c”** m. “Los profesores desempeñan un papel significativo al ayudar a los alumnos a dar significado a formas relevantes de representación” (NCTM, 2000, p. 288). **Contenida en “g”**
7.4. Epistémica-mediacional	a. “La tecnología permite también centrar la atención - cuando los alumnos discuten entre ellos o con su profesor - sobre los objetos que aparecen en la pantalla” (NCTM, 2000, p. 27). b. “Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación” (NCTM, 2000, p. 71). c. “Los alumnos deberían utilizar también programas de ordenador que les ayuden a representar sus datos; entre ellos, programas gráficos y hojas de cálculo” (NCTM, 2000, p. 182).
7.5. Cognitiva-interaccional	a. “conocer (…) que ideas ofrecen dificultad frecuentemente a los alumnos y las formas en que pueden ayudar a superar sus concepciones erróneas más comunes” (NCTM, 2000, p. 18). b. “cuando escenifican una situación, dibujan, utilizan objetos, dan justificaciones o explicaciones verbalmente, utilizan diagramas, escriben y usan símbolos matemáticos. Los conceptos erróneos pueden identificarse y tratarse” (NCTM, 2000, p. 65). c. “Las concepciones erróneas que surgen en las representaciones de los datos hechas por los alumnos, proporcionan situaciones para enseñanzas y aprendizajes nuevos” (NCTM, 2000, p. 116). d. “Los alumnos deberían llegar a ser más expertos en aprender de otros y con otros” (NCTM, 2000, p. 198).
7.6. Afectiva-interaccional	a. “creyendo que los alumnos pueden resolver problemas, escuchando atentamente sus explicaciones y estructurando un ambiente que valore su trabajo, los profesores fomentan la resolución de problemas” (NCTM, 2000, p. 123). b. “Los profesores (…) Deberían plantear problemas que reten matemáticamente a los alumnos, pero también expresarles su creencia en que son capaces de resolverlos” (NCTM, 2000, p. 134). c. “Los profesores deberían crear un sentimiento de comunidad en las clases de estos niveles medios, para que los alumnos se sientan libres de expresar sus ideas sincera y abiertamente, sin temor al ridículo” (NCTM, 2000, p. 272).
7.7. Afectiva-mediacional	a. “La tecnología puede ayudar a alcanzar la igualdad y debe ser asequible para todos los estudiantes” (NCTM, 2000, pp. 12-13). b. “las herramientas y entornos tecnológicos pueden proporcionar oportunidades a todos los alumnos para explorar ideas y problemas matemáticos complejos” (NCTM, 2000, p. 14). c. “La tecnología puede contribuir a alcanzar la igualdad en la clase” (NCTM, 2000, p.14). **Contenida en “a”** d. “la tecnología puede ser eficaz para atraer a los estudiantes que se desentienden de las matemática cuando el enfoque no es tecnológico” (NCTM, 2000, p. 14). **Contenida en “g”**

	e.	“A través de la tecnología puede potenciarse la implicación de los alumnos” (NCTM, 2000, p. 26).
	f.	“La tecnología ofrece posibilidades de adaptación de la enseñanza a las necesidades especiales de los alumnos” (NCTM, 2000, p. 27).
	g.	“Los alumnos sienten curiosidad por las calculadoras y los ordenadores, y se les puede estimular con las matemáticas que esta tecnología les facilita” (NCTM, 2000, p. 124).
7.8. Interaccional-mediacional	a.	“la tecnología ayuda en la evaluación permitiendo a los profesores examinar los procesos seguidos en las investigaciones de los alumnos, así como los resultados, y enriqueciendo, por tanto la información disponible para tomar decisiones relativas a la enseñanza” (NCTM, 2000, pp. 27-28).

ANEXO B

UNIDADES DE ANÁLISIS Y SU CLASIFICACIÓN SEGÚN FACETAS Y COMPONENTES DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA REDUCIDAS

El presente anexo contiene las unidades de análisis (UA) resultantes después del proceso de comparación y reducción presentado en el anexo A. Estas UA mantienen la clasificación explicada en el anexo precedente y sintetizan las principales normas a partir de las cuales se han inferido lo indicadores de idoneidad didácticas contenidos en la GVID-CE. En cuanto a su estructura este anexo contiene las mismas secciones del Anexo A, las cuales están constituidas por las seis facetas de la idoneidad didáctica más una sección que recoge UA de interacciones entre facetas.

1. FACETA EPISTÉMICA

Tabla A.1. Unidades de análisis categoría 1: Faceta epistémica

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
1.1. Situaciones-problemas	a. "Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo" (NCTM, 2000, p. 55). b. "Los alumnos deberían tener frecuentes oportunidades de formular problemas complejos, de enfrentarse a ellos y de resolverlos" (NCTM, 2000, p. 55). c. "La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas" (NCTM, 2000, p.55). d. "La resolución de problemas es una característica notable de la actividad matemática y un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático" (NCTM, 2000, p. 120). e. "La resolución de problemas da oportunidades para usar y ampliar el conocimiento de los conceptos de todos los Estándares de contenidos" (NCTM, 2000, p. 120). f. "Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas" (NCTM, 2000, p. 120). g. "Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 120). h. "La resolución de problemas es fundamental para la investigación y la aplicación de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 260). i. "La esencia de la resolución de problemas es saber qué hacer al enfrentarse con problemas no familiares" (NCTM, 2000, p. 264). j. "enfrentarse a situaciones abiertas, sin solución única y cerrada" (MEC, 2006a, p. 43095). k. Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida." (MEC, 2006b,

		p. 752).
	l.	"Statistical problem solving is an investigative process that involves four components: Formulate Questions (…) Collect Data (…) Analyze Data (…) Interpret Results" (Franklin y cols., 2005, p. 11).
	m.	"Opportunities should be provided for students to generate questions" (Franklin y cols., 2005, p. 23).
1.2. Lenguajes	a.	"conocer las diferentes representaciones de un concepto" (NCTM, 2000, p. 18).
	b.	"Deberían aprender lo que significan los diferentes números, símbolos y puntos" (NCTM, 2000, p. 52).
	c.	"Los alumnos de los niveles 6-8 deberían empezar a comparar la eficacia de diversas clases de representaciones" (NCTM, 2000, p. 53).
	d.	"Es importante que los alumnos tengan oportunidades no sólo de aprender las formas convencionales de representación, sino también de construir, perfeccionar y usar sus propias representaciones" (NCTM, 2000, p. 72).
	e.	"para mostrar datos estadísticos, necesitan tener oportunidades para considerar las clases de datos y preguntas para las que un diagrama de sectores podría ser más apropiado que un diagrama poligonal lineal, o un diagrama de caja más que un histograma" (NCTM, 2000, p. 74).
	f.	"representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos" (NCTM, 2000, p. 112).
	g.	"Los títulos y etiquetas utilizados en sus representaciones deberían identificar de forma clara qué datos se representan" (NCTM, 2000, p. 113).
	h.	"deberían ser capaces de organizar y mostrar sus datos a través de representaciones gráficas y resúmenes numéricos" (NCTM, 2000, p. 113).
	i.	"Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión" (NCTM, 2000, p. 132).
	j.	"Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 140).
	k.	"Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas" (NCTM, 2000, p. 140).
	l.	"El comprender y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos se enriquece cuando los alumnos pueden traducir diferentes representaciones de una misma idea" (NCTM, 2000, p. 143).
	m.	"comparar representaciones diferentes del mismo conjunto de datos, y evaluar cómo cada una muestra aspectos importantes de los datos" (NCTM, 2000, p. 180).
	n.	"Deberían familiarizarse con diversas representaciones de datos; entre otras, las tablas, los diagramas de puntos, los diagramas de barras y los lineales" (NCTM, 2000, p. 182).
	o.	"Deberían también tener muchas oportunidades de considerar las ventajas y limitaciones de los diversos tipos de representación que utilicen" (NCTM, 2000, p. 212).
	p.	"comprender la correspondencia entre conjuntos de datos y sus representaciones gráficas, especialmente con los histogramas, los gráficos tallos-hojas, los gráficos de caja y las nubes de puntos" (NCTM, 2000, p. 252).
	q.	"seleccionar, crear y utilizar representaciones gráficas apropiadas de datos, incluyendo histogramas, gráficos de caja y nubes de puntos" (NCTM, 2000, p. 252).
	r.	"utilizar frecuencias absolutas y relativas, diagramas de barras e histogramas para representar los datos que hayan reunido, y a decidir qué tipo de representación es la apropiada según el propósito" (NCTM, 2000, p. 254).
	s.	"reconocer, comparar y usar una serie de formas de representación" (NCTM, 2000, p. 284).
	t.	"usar un conjunto amplio de representaciones visuales" (NCTM, 2000, p. 289).
	u.	"utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales" (MEC, 2006a, p. 43096).
	v.	"utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad" (MEC, 2006a, p. 43098).
	w.	"Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos" (MEC, 2006a, p. 43099).

	x.	“Introducción al lenguaje del azar” (MEC, 2006a, p. 43099).
	y.	“Lectura e interpretación de tablas de doble entrada” (MEC, 2006a, p. 43099).
	z.	“dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia” (MEC, 2006b, p. 688).
	aa.	“Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.” (MEC, 2006b, p. 753).
	bb.	“Another appropriate graphical representation for numerical data on one variable (in addition to the stem and leaf plot) at Level A is a dotplot. Both the dotplot and stem and leaf plot can be used to easily compare two or more similar sets of numerical data.” (Franklin y cols., 2005, p. 28).
	cc.	“A scatterplot can be used to graphically represent data when values of two numerical variables are obtained from the same individual or object.” (Franklin y cols., 2005, p. 31).
	dd.	“With the use of a scatterplot, Level A students can visually look for trends and patterns.” (Franklin y cols., 2005, p. 32).
	ee.	“The two-way frequency table (or contingency table) below provides a way to investigate possible connections between two categorical variables.” (Franklin y cols., 2005, p. 41).
	ff.	“One of the most useful graphical devices for comparing distributions of numerical data is the boxplot.” (Franklin y cols., 2005, p. 46).
1.3. Reglas: definiciones, proposiciones y procedimientos	a.	“ser capaz de aplicar procedimientos, conceptos y procesos” (NCTM, 2000, p. 21).
	b.	“Deberían aprender a recoger datos, organizar los propios y los ajenos, y representarlos en gráficos y diagramas que resulten útiles para responder a las preguntas” (NCTM, 2000, p. 51).
	c.	“Empezando en la etapa 3-5 y continuado en los niveles medios, se debería pasar de analizar y describir un conjunto de datos a comparar dos o más conjuntos” (NCTM, 2000, p. 53).
	d.	“Los estudiantes deberían llegar a comprender los elementos básicos del análisis estadístico: seleccionar una muestra adecuada, recoger datos de esta muestra, describir la muestra y hacer inferencias razonables que relacionen la muestra y la población” (NCTM, 2000, p. 53).
	e.	“Al principio, los niños trabajan más frecuentemente con datos censales; por ejemplo, con una encuesta sobre la clase de helados favorita de cada niño de la clase” (NCTM, 2000, p. 53).
	f.	“Según se va pasando de los niveles medios a la escuela secundaria, los estudiantes irán necesitando nuevas herramientas para identificar semejanzas y diferencias entre los conjuntos de datos; entre ellas, histogramas, gráficos de tronco, gráficos de caja y nubes de puntos. También necesitarán investigar asociaciones y tendencias en datos bivariantes, incluyendo nubes de puntos y líneas de ajuste en los niveles 6-8” (NCTM, 2000, p. 53).
	g.	“A medida que los mayores empiezan a ver un conjunto de datos como un todo, necesitan herramientas para describirlo. Las medidas de centralización (media, mediana y moda) y de dispersión (rango, desviación típica), y los atributos sobre la forma de la distribución de datos llegan a ser útiles a los estudiantes como descriptores” (NCTM, 2000, p. 53).
	h.	“usar la terminología apropiada y ser capaces de calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, como el número de veces que se espera que salgan dos caras cuando se lanzan dos monedas al aire 100 veces” (NCTM, 2000, p. 54).
	i.	“construir un cierto conocimiento de la probabilidad y el azar haciendo experimentos con objetos concretos, tales como sacar fichas coloreadas de una bolsa” (NCTM, 2000, p. 54).
	j.	“considerar ideas de probabilidad mediante experimentos (usando monedas, dados o peonzas)” (NCTM, 2000, p. 54).
	k.	“Comprender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad” (NCTM, 2000, p. 112).
	l.	“Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos” (NCTM, 2000, p. 112).

m. “ordenar y clasificar objetos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquéllos” (NCTM, 2000, p. 112).
n. “Deberían discutir cuándo se pueden aplicar o no las conclusiones obtenidas de los datos de una población, a otra población.” (NCTM, 2000, p. 113).
o. “distinguir el significado de los diferentes números: aquéllos que representan valores (“en mi familia hay cuatro personas”), de los que indican cuántas veces (frecuencia) se presenta un valor en un conjunto de datos (“nueve niños tienen familias de cuatro personas”)” (NCTM, 2000, p. 113).
p. “Formular e investigar conjeturas matemáticas” (NCTM, 2000, p. 126).
q. “recoger datos por medio de observaciones, encuestas y experimentos” (NCTM, 2000, p. 180).
r. “Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos” (NCTM, 2000, p. 180).
s. “describir la forma y las características importantes de un conjunto de datos, y comparar conjuntos que tengan relación, poniendo el énfasis en cómo se distribuyen los datos” (NCTM, 2000, p. 180).
t. “comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1” (NCTM, 2000, p. 180).
u. “describir sucesos como probables o no probables, y discutir su grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable” (NCTM, 2000, p. 180).
v. “Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos” (NCTM, 2000, p. 180).
w. “proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos” (NCTM, 2000, p. 180).
x. “Apreciar las semejanzas y diferencias existentes en dos conjuntos de datos, requiere que los alumnos lleguen a ser más precisos al describirlos. Así, se va desarrollando la idea de valor “típico” o promedio. Y, a partir de la comprensión informal de “el que más” y el “mediano”, los alumnos pueden llegar a las nociones de moda, mediana, e, informal mente, de media” (NCTM, 2000, pp. 183-184).
y. “Formular conjeturas y evaluarlas basándose en los datos” (NCTM, 2000, p. 192).
z. “hallar, utilizar e interpretar medidas de centralización y de dispersión, incluyendo la media y el rango intercuartílico” (NCTM, 2000, p. 252).
aa. “Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos” (NCTM, 2000, p. 252).
bb. “formular conjeturas sobre las posibles relaciones entre dos características de una muestra, a partir de nubes de puntos de los datos y líneas de ajuste aproximadas” (NCTM, 2000, p. 252).
cc. “responder preguntas más complejas, como las que conciernen a relaciones entre poblaciones o muestras, o a relaciones entre dos variables dentro de una población o muestra. A tal fin, deberían añadirse nuevas representaciones al repertorio de los estudiantes. Los gráficos de la caja les permiten comparar dos o más muestras (…) Las nubes de puntos permiten relacionar pares de características dentro de una muestra” (NCTM, 2000, p. 252).
dd. “comparar la utilidad de la media y de la mediana como medidas de centralización para diferentes conjuntos de datos” (NCTM, 2000, p. 255).
ee. “Es también necesario que los alumnos piensen sobre las medidas de centralización en relación con la dispersión de una distribución” (NCTM, 2000, p. 255).
ff. “utilizar las nubes de puntos para considerar la relación entre dos características en poblaciones diferentes” (NCTM, 2000, p. 257).
gg. “los alumnos deberían trabajar con muchas nubes de puntos que tengan una forma casi lineal, pero deberían explorar también representaciones no lineales” (NCTM, 2000, p. 257).
hh. “dominar los algoritmos de cálculo escrito” (MEC, 2006a, p. 43095).
ii. “Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro” (MEC, 2006a, p. 43098).
jj. “Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos”

(MEC, 2006a, p. 43098).

kk. "Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto" (MEC, 2006a, p. 43099).

ll. "La media aritmética, la moda y el rango" (MEC, 2006a, p. 43101).

mm. "Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición" (MEC, 2006a, p. 43101).

nn. "Obtención y utilización de información para la realización de gráficos" (MEC, 2006a, p. 43101).

oo. "Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado" (MEC, 2006a, p. 43101).

pp. "Estimación del grado de probabilidad de un suceso" (MEC, 2006a, p. 43101).

qq. "Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación." (MEC, 2006b, p. 753).

rr. Diferentes formas de recogida de información. (MEC, 2006b, p. 753).

ss. "Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia." MEC, 2006b, (p. 753).

tt. "Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas." (MEC, 2006b, p. 755).

uu. "Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo." (MEC, 2006b, p. 755).

vv. "Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas." (MEC, 2006b, p. 755).

ww. "Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones." (MEC, 2006b, p.755).

xx. "From the stem and leaf plot, students can get a sense of shape" (Franklin y cols., 2005, p. 27).

yy. "Another type of design for collecting data appropriate at Level A is a simple experiment, which consists of taking measurements on a particular condition or group." (Franklin y cols., 2005, p. 28).

zz. "Students should understand that the median describes the center of a numerical data set in terms of how many data points are above and below it." (Franklin y cols., 2005, p. 29).

aaa. "Students should understand the mean as a fair share measure of center at Level A." (Franklin y cols., 2005, p. 30).

bbb. "Determining the maximum and minimum values of a numerical data set assists children in describing the position of the smallest and largest value in a data set." (Franklin y cols., 2005, p. 30).

ccc. "At Level A, students should understand that probability is a measure of the chance that something will happen. It is a measure of certainty or uncertainty." (Franklin y cols., 2005, p. 33).

ddd. "Through experimentation (or simulation), students should develop an explicit understanding of the notion that the more times you repeat a random phenomenon, the closer the results will be to the expected mathematical model." (Franklin y cols., 2005, p. 34).

eee. "Level A, probability experiments should focus on obtaining empirical data to develop relative frequency interpretations that children can easily translate to models with known and understandable "mathematical" probabilities." (Franklin y cols., 2005, p. 34).

fff. "At Level B, students investigate problems with more emphasis placed on possible associations among two or more variables" (Franklin y cols., 2005, P. 37).

ggg. "summarizing and interpreting data in terms of percents or fractions." (Franklin y cols., 2005, p. 39).

hhh. "In statistics, randomness and probability are incorporated into the sample selection procedure in order to provide a method that is "fair" and to improve the chances of selecting a representative sample." (Franklin y cols., 2005, p. 40).

	iii. "Another idea developed at Level A that can be expanded at Level B is the mean as a numerical summary of center for a collection of numerical data. At Level A, the mean is interpreted as the "fair share" value for data." (Franklin y cols., 2005, p. 41). jjj. "Another measure of spread that should be introduced at Level B is the interquartile range" (Franklin y cols., 2005, p. 47). kkk. "At Level B, students should experience the consequences of nonrandom selection and develop a basic understanding of the principles involved in random selection procedures." (Franklin y cols., 2005, p. 52). lll. "Another important statistical method that should be introduced at Level B is comparative experimental studies." (Franklin y cols., 2005, p. 54). mmm. "Another important statistical tool that should be introduced at Level B is a time series plot. Problems that explore trends in data over time are quite common." (Franklin y cols., 2005, p. 55).
1.4. Argumentos	a. "El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad" (NCTM, 2000, p. 59). b. "Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 126). c. "Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos" (NCTM, 2000, p. 126). d. "fomentar maneras de justificar que estén al alcance de los alumnos" (NCTM, 2000, p. 130). e. "Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración" (NCTM, 2000, p. 192). f. "Parte del razonamiento matemático consiste en examinar y tratar de comprender por qué algo que parece ser cierto, no lo es, y en empezar a usar contraejemplos en este contexto" (NCTM, 2000, p. 195). g. "utilizar los razonamientos inductivo y deductivo para formular argumentos matemáticos" (NCTM, 2000, p. 266).
1.5. Relaciones	a. "La noción de que los conceptos matemáticos están conectados debería impregnar las experiencias matemáticas escolares en todos los niveles" (NCTM, 2000, p. 68). b. "Si los estudiantes adquieren una visión de las matemáticas como un todo conectado e integrado, disminuirá la tendencia a considerar por separado conceptos y destrezas. Si las estructuras conceptuales se enlazan con los procedimientos, no las percibirán como un conjunto arbitrario de reglas. Esta integración debería ser central en las matemáticas escolares" (NCTM, 2000, p. 69). c. "Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente" (NCTM, 2000, p. 136). d. "Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 136). e. "A major objective of statistics education is to help students develop statistical thinking." (Franklin y cols., 2005, p. 6). f. "Statistical thinking, in large part, must deal with this omnipresence of variability; statistical problem solving and decision making depend on understanding, explaining, and quantifying the variability in the data." (Franklin y cols., 2005, p. 6). g. "There are many sources of variability in data (…) Measurement Variability (…) Natural Variability (…) Induced Variability (…) Sampling Variability" (Franklin y cols., 2005, p. 7). h. "Data collection designs must acknowledge variability in data, and frequently are intended to reduce variability." (Franklin y cols., 2005, p. 11). i. "Statistical interpretations are made in the presence of variability and must allow for it." (Franklin y cols., 2005, p. 12). j. "At Level A, we want students to recognize that there will be individual-to-individual variability." (Franklin y cols., 2005, p. 24). k. "Students should explore possible reasons data look the way they do and differentiate between variation and error." (Franklin y cols., 2005, p. 33). l. "The notions of error and variability should be used to explain the outliers,

	clusters, and gaps students observe in the graphical representations of the data." (Franklin y cols., 2005, p. 33). m. "An understanding of error versus natural variability will help students interpret whether an outlier is a legitimate data value that is unusual or whether the outlier is due to a recording error." (Franklin y cols., 2005, p. 33). n. "At Level A, it is imperative that students begin to understand the concept of variability." (Franklin y cols., 2005, p. 33). o. "Students who complete Level B should see statistical reasoning as a process for solving problems through data" (Franklin y cols., 2005, p. 37). p. "Students at Level B should begin to recognize that there is not only variability from one individual to another within a group, but also in results from one group to another." (Franklin y cols., 2005, p. 39).

2. FACETA ECOLÓGICA

Tabla A.2. Unidades de análisis categoría 2: Faceta ecológica

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
2.1. Adaptación al currículo	a. "Los profesores necesitan (…) conocimiento profundo y flexible respecto a los objetivos curriculares y las ideas fundamentales en cada nivel de enseñanza" (NCTM, 2000, p. 18). b. "Los profesores tienen también que proporcionar de forma rutinaria a sus alumnos problemas ricos, centrados en ideas matemáticas importantes del currículo" (NCTM, 2000, p. 201).
2.2. Apertura hacia la innovación didáctica	
2.3. Adaptación socio-cultural y profesional	a. "entender y ser capaz de usar matemáticas en la vida diaria y en el trabajo" (NCTM, 2000, p. 4). b. "seguir una vía educativa que les prepare para trabajar durante toda su vida como matemáticos, estadísticos, ingenieros o científicos" (NCTM, 2000, p. 5). c. "tener habilidad para usar los conocimientos con flexibilidad, y aplicar con propiedad lo aprendido en un contexto, a otro contexto" (NCTM, 2000, p. 21). d. "Los contextos de los problemas pueden variar desde las experiencias familiares o escolares del alumnado a las aplicaciones científicas o del mundo laboral" (NCTM, 2000, p. 55). e. "los estudiantes deberían usar matemáticas con seguridad para explicar aplicaciones complejas en el mundo exterior" (NCTM, 2000, p. 70). f. "El Análisis de datos y la estadística son útiles para ayudar a los alumnos a clarificar cuestiones relativas a sus vidas" (NCTM, 2000, p. 70). g. "Las experiencias diarias pueden ser también fuentes de datos" (NCTM, 2000, p. 205). h. "Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria" (MEC, 2006a, p. 43096). i. "Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana" (MEC, 2006a, p. 43097). j. "Presencia del azar en la vida cotidiana" (MEC, 2006a, p. 43101). k. "Statistical literacy is required for daily personal choices." (Franklin y cols., 2005, p. 2). l. "Statistics plays a prominent role in this scientific progress." (Franklin y cols., p. 2). m. "Statistical literacy is essential in our personal lives as consumers, citizens, and professionals." (Franklin y cols., p. 3). n. "students recognize ways in which statistics is used or misused in their world." (Franklin y cols., p. 37).

2.4. Educación en valores		
2.5. Conexiones intra e interdisciplinares	a.	"enlazar diferentes aéreas de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 16).
	b.	"Trabajar con el Análisis de datos y con la Probabilidad ofrece a los estudiantes una forma natural de conectar las matemáticas con otras asignaturas" (NCTM, 2000, p. 51).
	c.	"Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles" (NCTM, 2000, p. 68).
	d.	"los profesores tienen que conocer (…) las matemáticas que han estudiado en los cursos anteriores y las que estudiarán en los siguientes" (NCTM, 2000, p. 68).
	e.	"las experiencias interdisciplinares sirven para revisar ideas matemáticas" (NCTM, 2000, p. 283).
	f.	"circle graphs require an understanding of proportional reasoning" (GAISE, 2005; p. 25).

Nota: En las celdas en blanco no hemos encontrado UA para las componentes respectivas. Sin embargo, puede haber elementos de dichas componentes en los indicadores de interacciones entre facetas.

3. FACETA COGNITIVA

Tabla A.3. Unidades de análisis categoría 3: Faceta cognitiva

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS	
3.1. Conocimientos previos	a.	"las ideas nuevas se consideran extensiones de las matemáticas anteriormente aprendidas" (NCTM, 2000, p. 69).
3.2. Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	a.	"Todos los alumnos, independiente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas" (NCTM, 2000, p. 12).
	b.	"Los estudiantes con algún tipo de discapacidad pueden necesitar más tiempo para completar sus tareas" (NCTM, 2000, p. 14).
	c.	"aquellos alumnos con especial interés por la disciplina o excepcional talento para ella, pueden necesitar programas más ricos o más recursos para estimularlos y comprometerlos" (NCTM, 2000, p.14).
3.3. Aprendizaje; evaluación sumativa		

Nota: En la celda en blanco no hemos encontrado UA para dicha componente. Sin embargo, puede haber elementos relacionados en los indicadores de interacciones entre facetas.

4. FACETA AFECTIVA

Tabla A.4. Unidades de análisis categoría 4: Faceta afectiva

COMPONENTES:	UNIDADES DE ANÁLISIS	
4.1. Intereses y necesidades	a.	"las tareas deben ser motivadoras y con un nivel de desafío que invite a la especulación y al trabajo intenso" (NCTM, 2000, p. 19).
	b.	"Los buenos problemas pueden inspirar la exploración de ideas matemáticas importantes" (NCTM, 2000, p. 186).
	c.	"los problemas que se propongan en los niveles medios pueden y deberían responder a preguntas de los alumnos y atraer sus intereses" (NCTM, 2000, p. 262).

4.2. Actitudes	a.	“apreciar el poder y la precisión del lenguaje matemático” (NCTM, 2000, p. 67).
	b.	“la sistematización, la mirada crítica” (MEC, 2006a, p. 43097).
	c.	“Respeto por el trabajo de los demás” (MEC, 2006a, p. 43098).
	d.	“Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo” (MEC, 2006a, p. 43098).
	e.	“curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica” (MEC, 2006a, p. 43099)
	f.	“analizar críticamente las informaciones que se presentan” (MEC, 2006a, p. 43101).
	g.	“Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas” (MEC, 2006a, p. 43101).
4.3. Emociones	a.	“valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas” (MEC, 2006a, p. 43097).

5. FACETA INTERACCIONAL

Tabla A.5. Unidades de análisis categoría 5: Faceta interaccional

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS	
5.1. Interacción docente-discente	a.	“sacar provecho de las oportunidades que se presenten para enfocar las lecciones en direcciones no previstas” (NCTM, 2000, p. 16).
	b.	“¿Se fomentan la discusión y la colaboración? ¿Se pide al alumnado que justifique sus opiniones?” (NCTM, 2000, p. 19).
	c.	“Los estudiantes necesitan oportunidades para poner a prueba sus ideas, sobre la base de un conocimiento compartido con la comunidad matemática de la clase, para ver si pueden ser entendidas y si ellos son suficientemente convincentes” (NCTM, 2000, p. 65).
	d.	“Los profesores deben favorecer la inclinación natural de los alumnos a hacer preguntas” (NCTM, 2000, p.113).
	e.	“los profesores tienen que ser diligentes en proporcionarles experiencias que permitan formas diversas de comunicación, como un componente natural de la clase de matemáticas” (NCTM, 2000, p. 134).
	f.	“Es responsabilidad del profesor saber cuándo los alumnos necesitan ayuda, y cuándo pueden seguir trabajando productivamente sin ella” (NCTM, 2000, p. 190).
	g.	“Los profesores necesitan ayudar a los estudiantes a aprender a hacer preguntas cuando no están de acuerdo o no entienden el razonamiento de un compañero” (NCTM, 2000, p. 202).
	h.	“los profesores necesitan establecer una atmósfera de confianza y respeto mutuos” (NCTM, 2000, p. 275).
	i.	“facilitar la expresión como de propiciar la escucha de las explicaciones de los demás” (MEC, 2006a, p. 43097).
5.2. Interacción entre discentes	a.	“La comunicación de ideas matemáticas es una manera de que los alumnos articulen, aclaren, organicen y consoliden su pensamiento” (NCTM, 2000, p. 132).
	b.	“Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas” (NCTM, 2000, p. 132).
	c.	“Los alumnos necesitan explicar y justificar lo que piensan, y aprender cómo detectar las falacias y a criticar el pensamiento de otros” (NCTM, 2000, p. 192).
	d.	“En las discusiones de clase, los estudiantes deberían convertirse en la audiencia para los comentarios de otros. Esto implica hablar a otros para convencer o cuestionar a los compañeros” (NCTM, 2000, p. 198).
5.3. Autonomía	a.	“Los niños pueden diseñar planes simples de recogida de datos para tratar de responder a las preguntas planteadas” (NCTM, 2000, p. 52).

	b. "leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados" (MEC, 2006a, p. 43096). c. "utilizar estrategias personales de resolución de problemas" (MEC, 2006a, p. 43097).
5.4. Evaluación formativa	a. "los alumnos deberían ser evaluados e informados de manera que se señalen las áreas que requieran una inmediata atención adicional" (NCTM, 2000, p. 12). b. "Mediante una variedad de estrategias, deberían comprobar la capacidad e inclinación de los alumnos para analizar situaciones, elaborar y resolver problemas y dar sentido a los conceptos y procedimientos matemáticos" (NCTM, 2000, p. 20). c. "Deberían incluirse actividades que sean coherentes con las realizadas en clase y, a veces, como las mismas" (NCTM, 2000, p. 23). d. "la evaluación (…); debería constituir una parte integral de la enseñanza que le informe al profesorado y le sirva de guía para la toma de decisiones" (NCTM, 2000, p. 23). e. "la evaluación (…). No solo debería hacerse a los alumnos, sino también para los alumnos, para guiar y mejorar su aprendizaje" (NCTM, 2000, p.23). f. "considerar la evaluación como una parte integral de la práctica de la clase, se asocia con la mejora del aprendizaje" (NCTM, 2000, p. 23). g. "La retroalimentación (feedback) a partir de tareas de evaluación puede ayudar también a los alumnos a fijar objetivos, asumir la responsabilidad del propio aprendizaje y llegar a ser aprendices más independientes" (NCTM, 2000, p. 23). h. "Cuando los profesores emplean técnicas de evaluación como las observaciones, las conversaciones y las entrevistas, o los diarios interactivos, los alumnos probablemente aprendan al expresar las ideas y al contestar las preguntas que les formulan" (NCTM, 2000, p. 23). i. "La evaluación debería reflejar las matemáticas que todos los estudiantes necesitan conocer" (NCTM, 2000, p. 24). j. "los profesores deberían estar continuamente recabando información sobre el progreso de sus alumnos" (NCTM, 2000, p.24). k. "los profesores pueden cultivar tanto la disposición como la capacidad del alumnado para implicarse en la autoevaluación de sus trabajos y reflexionar sobre las ideas propuestas por otros" (NCTM, 2000, p. 24). l. "la autoevaluación y la evaluación entre iguales tiene un impacto positivo en el aprendizaje" (NCTM, 2000, p. 24). m. "las evaluaciones deberían dar ocasión a múltiples enfoques, para obtener así una imagen más acabada y permitir que cada uno muestre sus mejores potencialidades" (NCTM, 2000, p. 25). n. "Los profesores pueden utilizar muchas técnicas de evaluación, incluyendo cuestiones abiertas, tareas donde hay que elaborar la respuesta, donde hay que seleccionar una respuesta entre varias, tareas prácticas, observaciones, conversaciones, diarios de clase y cuadernos de trabajo" (NCTM, 2000, p. 25). o. "los profesores necesitan superar la consideración superficial de tarea correcta e incorrecta" (NCTM, 2000, p. 25). p. "Los profesores tienen que tratar de comprender lo que los alumnos intentan comunicar, y utilizar esta información para progresar en el aprendizaje individual y de la clase como conjunto" (NCTM, 2000, p. 135). q. "Los profesores pueden hacerse mejor idea de lo que piensan sus alumnos y de su dominio de los conceptos matemáticos, examinando e interpretando sus representaciones y haciendo preguntas acerca de ellas" (NCTM, 2000, p. 140). r. "Los profesores necesitan también controlar el aprendizaje de sus alumnos para dirigir adecuadamente el discurso de la clase" (NCTM, 2000, p. 275). s. "Los profesores pueden usar las discusiones en clase para la progresiva evaluación de su enseñanza y del aprendizaje de sus alumnos" (NCTM, 2000, p. 276). t. "Formular y resolver sencillos problemas" (MEC, 2006a, p. 43098). u. "anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución" (MEC, 2006a, p. 43101).

	v. “Valorar las diferentes estrategias y perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas, tanto en la formulación como en la resolución de un problema” (MEC, 2006a, p. 43101). w. “Expresar de forma ordenada y clara, oralmente y por escrito, el proceso seguido en la resolución de problemas” (MEC, 2006a, p. 43101).

6. FACETA MEDIACIONAL

Tabla A.6. Unidades de análisis categoría 6: Faceta mediacional

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
6.1. Recursos materiales (tangibles, textuales, digitales, …)	a. “Seleccionar y usar materiales curriculares apropiados, técnicas de enseñanza oportunas” (NCTM, 2000, p. 18). b. “La tecnología enriquece la gama y calidad de las investigaciones” (NCTM, 2000, p. 26). c. “La tecnología no debería utilizarse como sustituto de los conocimientos e intuiciones básicas, si no que puede y debería usarse para potenciarlos” (NCTM, 2000, p. 26). d. “Las calculadoras y los ordenadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas” (NCTM, 2000, p. 26). e. “la tecnología debería usarse amplia y responsablemente, con el objetivo de enriquecer el aprendizaje” (NCTM, 2000, p. 26). f. “realizar simulaciones para que los alumnos experimenten con situaciones de problema difíciles de crear si la ayuda tecnológica” (NCTM, 2000, p. 27). g. “El uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende del profesor. La tecnología no es panacea” (NCTM, 2000, p. 27). h. “usar datos y recursos de Internet y de la World Wide Web para que los alumnos diseñen trabajos” (NCTM, 2000, p. 27). i. “Disponiendo de tecnología, (…). Los alumnos de la escuela elemental pueden organizar y analizar grandes conjuntos de datos” (NCTM, 2000, p. 28). j. “Los alumnos de todos los niveles deberían aprender a investigar sus conjeturas por medio de materiales concretos, calculadoras y otras herramientas” (NCTM, 2000, p. 60). k. “En la aulas donde los alumnos tienen a su alcance materiales como fichas, calculadoras y ordenadores, y en las que se les anima a utilizar una amplia serie de estrategias, se desarrollan formas de pensamiento generadoras de múltiples niveles de comprensión” (NCTM, 2000, p. 124). l. “Los alumnos deberían también aprender a buscar datos relevantes en otras fuentes, como la Web o las publicaciones impresas” (NCTM, 2000, p. 253). m. “La tecnología puede aligerar mucho el pesado trabajo que obligaba antes a plantear frecuentemente sólo problemas con “números fáciles de manejar”” (NCTM, 2000, p. 262). n. “Level A students should master the computation (by hand or using appropriate technology) of the mean” (Franklin y cols., 2005, p. 30). o. “Level B students may encounter outliers when using statistical software or graphing calculators.” (Franklin y cols., 2005, p. 48).
6.2. Número de alumnos, horario y condiciones del aula	a. “Más que el escenario físico con pupitres, paneles y carteles, el ambiente de clase comunica mensajes sutiles sobre lo que es válido en el aprendizaje y uso de las matemáticas” (NCTM, 2000, p. 19).
6.3. Tiempo de enseñanza y aprendizaje	

Nota: En la celda en blanco no hemos encontrado UA para dicha componente. Sin embargo, puede haber elementos relacionados en los indicadores de interacciones entre facetas.

7. INTERACCIONES ENTRE FACETAS

Tabla A.7. Unidades de análisis categoría 7: Interacciones entre facetas

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
7.1. Epistémica-ecológica	a. "incluir dibujos más complejos, tablas, gráficas y palabras para modelizar problemas y situaciones" (NCTM, 2000, p. 73). b. "Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos" (NCTM, 2000, p. 120). c. "Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos" (NCTM, 2000, p. 204). d. "Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos" (NCTM, 2000, p. 210). e. "Es conveniente que los profesores pidan regularmente a sus alumnos que formulen problemas interesantes basados en una amplia variedad de situaciones matemáticas y extramatemáticas" (NCTM, 2000, p. 262). f. "Los contenidos (…) adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento" (MEC, 2006a, p. 43096). g. "utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales para interpretar la información sobre la realidad" (MEC, 2006a, p. 43096). h. "Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma" (MEC, 2006a, p. 43097).
7.2. Epistémica-cognitiva	a. "Los alumnos deberían tener frecuentes oportunidades de formular problemas complejos, de enfrentarse a ellos y de resolverlos (…), luego, habría que estimularles a reflexionar sobre su pensamiento" (NCTM, 2000, p. 55). b. "El trabajo con problemas (…) es ayudar a los niños a pensar sistemáticamente sobre las posibilidades que ofrece, y a organizar y registrar su pensamiento" (NCTM, 2000, p. 56). c. "Los estudiantes deberían comprender que las representaciones escritas de ideas matemáticas son una parte esencial del aprendizaje y el uso de la matemáticas" (NCTM, 2000, p. 71). d. "Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticos" (NCTM, 2000, p. 71). e. "Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él" (NCTM, 2000, p. 120). f. "los estudiantes deberían reflexionar sobre su forma de resolver problemas, y considerar cómo podría modificarse, ampliarse, hacerse más eficiente o clarificarse" (NCTM, 2000, p. 265).
7.3. Epistémica-interaccional	a. "Respecto a algunos propósitos, será apropiado que los estudiantes describan su pensamiento informalmente, utilizando el lenguaje ordinario y dibujos pero, a través de los niveles medios y la enseñanza secundaria, deberían también aprender a comunicar de manera más formal" (NCTM, 2000, p. 66). b. "es importante evitar una prisa prematura por imponer el lenguaje matemático formal" (NCTM, 2000, p. 67). c. "los profesores deberían modelizar el lenguaje matemático que los alumnos posiblemente no hayan conectado todavía con sus ideas" (NCTM, 2000, p. 128). d. "Es responsabilidad del profesor ver cuáles son los momentos apropiados para hacer conexiones entre los símbolos inventados y la notación estándar" (NCTM, 2000, p. 135). e. "Los profesores deberían guiar a sus alumnos en el desarrollo y la utilización de múltiples representaciones con eficacia" (NCTM, 2000, p. 143). f. "Cuando los alumnos construyen gráficas de datos numéricos ordenados es necesario ayudarles a comprender lo que representan los valores sobre los ejes horizontal y vertical" (NCTM, 2000, p. 182).

	g.	“Los profesores tienen que ayudar a los estudiantes a adquirir el lenguaje matemático para la descripción de objetos y relaciones” (NCTM, 2000, p. 202).
	h.	“Los profesores pueden elegir estratégicamente las representaciones de los alumnos que crean sea más provechoso discutir con toda la clase” (NCTM, 2000, p. 212).
	i.	“Cuando los alumnos trabajan con distintas representaciones, los profesores necesitan observar cuidadosamente cómo las entienden y utilizan” (NCTM, 2000, p. 213).
7.4. Epistémica-mediacional	a.	“La tecnología permite también centrar la atención - cuando los alumnos discuten entre ellos o con su profesor - sobre los objetos que aparecen en la pantalla” (NCTM, 2000, p. 27).
	b.	“Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación” (NCTM, 2000, p. 71).
	c.	“Los alumnos deberían utilizar también programas de ordenador que les ayuden a representar sus datos; entre ellos, programas gráficos y hojas de cálculo” (NCTM, 2000, p. 182).
7.5. Cognitiva-interaccional	a.	“conocer (…) que ideas ofrecen dificultad frecuentemente a los alumnos y las formas en que pueden ayudar a superar sus concepciones erróneas más comunes” (NCTM, 2000, p. 18).
	b.	“cuando escenifican una situación, dibujan, utilizan objetos, dan justificaciones o explicaciones verbalmente, utilizan diagramas, escriben y usan símbolos matemáticos. Los conceptos erróneos pueden identificarse y tratarse” (NCTM, 2000, p. 65).
	c.	“Las concepciones erróneas que surgen en las representaciones de los datos hechas por los alumnos, proporcionan situaciones para enseñanzas y aprendizajes nuevos” (NCTM, 2000, p. 116).
	d.	“Los alumnos deberían llegar a ser más expertos en aprender de otros y con otros” (NCTM, 2000, p. 198).
7.6. Afectiva-interaccional	a.	“creyendo que los alumnos pueden resolver problemas, escuchando atentamente sus explicaciones y estructurando un ambiente que valore su trabajo, los profesores fomentan la resolución de problemas” (NCTM, 2000, p. 123).
	b.	“Los profesores (…) Deberían plantear problemas que reten matemáticamente a los alumnos, pero también expresarles su creencia en que son capaces de resolverlos” (NCTM, 2000, p. 134).
	c.	“Los profesores deberían crear un sentimiento de comunidad en las clases de estos niveles medios, para que los alumnos se sientan libres de expresar sus ideas sincera y abiertamente, sin temor al ridículo” (NCTM, 2000, p. 272).
7.7. Afectiva-mediacional	a.	“La tecnología puede ayudar a alcanzar la igualdad y debe ser asequible para todos los estudiantes” (NCTM, 2000, pp. 12-13).
	b.	“las herramientas y entornos tecnológicos pueden proporcionar oportunidades a todos los alumnos para explorar ideas y problemas matemáticos complejos” (NCTM, 2000, p. 14).
	c.	“A través de la tecnología puede potenciarse la implicación de los alumnos” (NCTM, 2000, p. 26).
	d.	“La tecnología ofrece posibilidades de adaptación de la enseñanza a las necesidades especiales de los alumnos” (NCTM, 2000, p. 27).
	e.	“Los alumnos sienten curiosidad por las calculadoras y los ordenadores, y se les puede estimular con las matemáticas que esta tecnología les facilita” (NCTM, 2000, p. 124).
7.8. Interaccional-mediacional	a.	“la tecnología ayuda en la evaluación permitiendo a los profesores examinar los procesos seguidos en las investigaciones de los alumnos, así como los resultados, y enriqueciendo, por tanto la información disponible para tomar decisiones relativas a la enseñanza” (NCTM, 2000, pp. 27-28).

ANEXO C

SÍNTESIS DEL PLAN DE FORMACIÓN ESTADÍSITICA DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

En este anexo se incluye una síntesis de un plan de estudio para la formación estadística de profesores de educación primaria de una universidad de Chile. Este programa es parte de un plan de estudios que ha comenzado a implementarse el año 2012 y está operacionalizado a través de un curso del plan de formación general[1], situado en el tercer semestre de la carrera. El curso tiene una duración de carácter semestral y se realizan a través de tres módulos semanales de 80 minutos uno.

En cuanto a su estructura el plan de estudio está enunciado de manera general incluyéndose los siguientes elementos: identificación del curso, descripción, objetivos, contenidos, metodología didáctica, evaluación y las principales fuentes bibliográficas.

A continuación presentamos una síntesis del plan de estudio mencionado.

Tabla C.1. Síntesis del Plan de estudio

COMPONENTE	DESCRIPCIÓN
Descripción	Este curso presenta conocimientos básicos de Estadística y Probabilidad. Entrega al estudiante una base sólida acerca de los conceptos que deberá enseñar en el eje disciplinar y curricular datos y azar y además las herramientas estadísticas necesarias para su desempeño profesional.
Objetivos	1. Construir distintos tipos de gráficos. Seleccionar datos y construir el gráfico adecuado para presentar la información recolectada. 2. Interpretar distintos tipos de gráficos con datos estadísticos, interpolar resultados y realizar predicciones a partir de éstos. 3. Conocer e interpretar las medidas de tendencia central y lo que representan en situaciones educativas tales como: análisis resultados SIMCE, artículos de investigación educativa, entre otros. 4. Conocer los conceptos básicos de probabilidad. Reconocer e interpretar sucesos dependientes, independientes, equiprobabilidad, y certeza en contextos de resolución de problemas. 5. Resolución de problemas de probabilidad y su relación con modelado

[1] En Chile la Educación General Básica contempla ocho cursos. El plan de formación general es de carácter obligatorio y está enfocado a la adquisición de conocimientos y competencias para el ejercicio de la docencia en los seis primeros cursos; el resto de la formación se da a través de cursos optativos que completan la formación general; y cursos de especialización que permiten ampliar y profundizar los contenidos en alguna disciplina específica para ejercer la docencia en los dos últimos cursos (7º y 8º).

	matemático de situaciones reales. 6. Aplicar la estadística a tareas propias del ámbito profesional.
Contenidos	*En relación a Estadística* 1. Conceptos básicos de estadística: Población, muestra, frecuencia. 2. Tipos de variables: cualitativas ordinales y nominales; cuantitativas discretas y continuas. 3. Tablas de frecuencia simples y tablas de contingencia. 4. Representación gráfica de datos. Gráficos de línea, de barras, circulares, de tallos y hojas, de bigote, histogramas de frecuencia, polígonos de frecuencias. 5. Medidas de Tendencia Central y medidas de dispersión: Media, mediana, moda, desviación estándar, rango y varianza. 6. Estadígrafos de Posición: Cuartiles, Quintiles, Deciles y Centiles. *En relación a Probabilidades* 7. Conceptos básicos: Variable aleatoria, azar, suceso, sucesos independientes, sucesos equiprobables, certeza. 8. Regla de la suma y el producto: Aditividad y regla multiplicativa. 9. Nociones de conteo. 10. Eventos y probabilidades: Definición de probabilidad y formalización usando teoría de conjuntos. 11. Relación entre probabilidad y frecuencia relativa. 12. Ley de los grandes números.
Metodología	- Clases expositivas para presentar las diferentes temáticas del curso - Talleres para poner en práctica los aspectos conceptuales y algorítmicos vistos en las clases expositivas. - Ayudantías que permitan practicar lo aprendido y atender a los estudiantes con dificultades.
Evaluación	- Cuatro pruebas escritas que faciliten la aplicación de los contenidos a la resolución de problemas. - Controles y tareas que permitan la aplicación de lo aprendido.

ANEXO D

TRANSCRIPCIÓN DEL PROCESO DE ESTUDIO IMPLEMENTADO

El presente anexo contiene unidades de análisis transcritas textualmente de las grabaciones de video y audio realizadas durante la implementación (experimentación). Estas unidades de análisis corresponden a segmentos de texto e imágenes que han sido seleccionadas con el criterio de representar "hechos didácticos significativos" (HDS) y se encuentran asociadas a los modos de interacción en que han tenido lugar. De esta forma, los patrones interactivos se constituyen en el principal criterio que hemos utilizado para delimitar los segmentos de la crónica del proceso de instrucción. Los patrones interactivos que hemos tenido en cuenta son los que habitualmente se dan en todo proceso educativo; los cuales, mencionamos y caracterizamos a continuación:

a) *Trabajo autónomo:* se refiere a las acciones personales realizadas por los estudiantes frente a una situación problema o tarea matemática.

b) *Interacción dialógica:* son instancias de comunicación entre dos o más estudiantes donde se dan a conocer, argumentan o discuten (incluso institucionalizan), hallazgos o soluciones relativas a situaciones problemas o cualquier tarea matemática. Las interacciones dialógicas se manifiestan principalmente en actividades de carácter cooperativo y colaborativo.

c) *Interacción regulativa:* son acciones destinadas a "guiar" los aprendizajes, institucionalizar determinados contenidos o "normar" algún aspecto del proceso de estudio. Estas acciones son ejecutadas por el profesor que es quien mejor comprende la complejidad de la clase; sin embargo, podrían ser también realizadas por estudiantes más aventajados. Distinguiremos entre dos tipos de interacciones regulativas: 1) "Interacción regulativa magistral", cuando el profesor realiza una actividad de regulación para toda la clase y 2) "Interacción regulativa puntual", cuando el profesor (o un "estudiante experto") realiza una actividad de regulación dirigida a un estudiante o grupo específico.

d) *Interacción evaluativa:* son acciones, que se realizan durante el proceso de estudio, destinadas a obtener información acerca del estado de aprendizaje y del proceso de estudio en general, para facilitar su retroalimentación. Estas actividades pueden ser de carácter sistemático (evaluación formativa) o "espontáneas". Las interacciones evaluativas espontaneas pueden ser entendidas como un caso particular de evaluación formativa y refieren a intervenciones del profesor - generalmente a través de preguntas - que tienen la intención de valorar el estado del aprendizaje en uno o más estudiantes.

En la práctica, las interacciones evaluativas se pueden realizar como un proceso independiente de las tres categorías anteriores, pero en la mayoría de los casos (principalmente las interacciones evaluativas espontaneas) tienen lugar dentro de algunos de los tres primeros modos de interacción; es por ello, que esta categoría aparece con frecuencia asociada a alguna de las anteriores, quedando delimitada como: autónoma/evaluativa, dialógica/evaluativa o regulativa/evaluativa.

Además de los criterios anteriores, en algunos casos, delimitamos dos o más unidades de análisis de una misma categoría por corresponder a *sub-configuraciones diferentes*, *manifestarse un determinado conflicto* o bien porque se alude a una *dimensión didáctica* en particular (por ejemplo, cuando se establece una conexión con elementos socio-culturales). Esta separación, ha resultado necesaria en aquellos casos en que un mismo patrón interactivo encierra una complejidad importante de HDS.

Dentro del texto se utiliza la letra mayúscula *E* acompañada de un subíndice numérico para identificar a los estudiantes (en algunos casos se usa el nombre de pila) y la letra *P* para hacer referencia al profesor.

El anexo, está estructurado de manera general en los siguientes apartados: 1) *Proyecto Alumno típico* (P1), implementado a través de dos clases teóricas y de una sesión de práctica; 2) *Proyecto Lanzamiento de dos dados* (P2), implementado a través de dos clases teóricas y; 3) *Proyecto Eficacia de un entrenamiento deportivo* (P3), implementado a través de una sesión de práctica.

1. PROYECTO ALUMNO TÍPICO

A continuación se presentan las unidades de análisis extraídas de las dos clases teóricas y de la sesión práctica a través de las cuales se implementó el P1. Como ya hemos señalado, las unidades de análisis (una o más unidades) representan HDS que se encuentran asociados a los modos de interacción en que tuvieron lugar.

Sesión de clase 1 (dos horas)

HDS 1.1. *Interacción regulativa magistral. Presentación del problema; reactivación de conocimientos previos*

P: […] En este tema vamos a desarrollar los siguientes objetivos:

- *Objetivo 1:* comprender y apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.
- *Objetivo2:* comprender y valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.
- *Objetivo3:* mostrar aplicaciones de la Estadística para resolver problemas reales.

La estadística es un tema importante desde diferentes puntos de vista. Es difícil comprender hoy en día el desarrollo de muchos aspectos de la sociedad sin hacer uso de estadísticas; el gobierno, la gestión de cualquier empresa, necesita recoger datos e interpretarlos para tomar decisiones. Esta es una materia que se estudia casi en todas las especialidades de la universidad. Desde el punto de vista de la formación de los niños, si ustedes revisan el currículo verán que aparece el tema de estadística desde primaria.

En esta clase, vamos a tratar de motivar y justificar el estudio de la estadística en base a un proyecto de análisis de datos denominado, Alumno típico […].

[…] Vamos a tratar de elaborar un perfil de los alumnos fijándonos en una serie de características. Las características van a ser, por ejemplo, si se hace más o menos deporte; eso sería una variable que vamos a tener en cuenta […].

[…] Estas son variables de tipo estadístico, porque cuando se observan individuos particulares los valores cambian […].

[…] El problema que planteamos es si tuviéramos que elegir un alumno representativo, en estas variables de la clase, ¿cómo lo elegiríamos?, ¿qué alumno elegiríamos? Para tomar una decisión hay que recoger los datos y analizarlos. Recogida de datos supone aplicar una encuesta […].

[…] Durante el proyecto, primero vamos a hacer una fase de recogida de datos, vamos a aplicar una encuesta. Luego, trabajando en equipo, van a analizar qué habría que hacer para elegir al alumno típico […].

[…] Hemos tomado estas variables. La primera es la "variable género" que es una variable con dos valores: hombre, mujer; una variable dicotómica. La siguiente es la "variable deporte", una variable cualitativa ordinal, hay un orden; en este caso con tres valores: nada, poco, mucho. La siguiente es una variable cuantitativa; la "variable número de hermanos", una variable cuantitativa discreta, discreta porque son valores aislados, involucra números enteros. La que sigue, "variable peso", es una variable cuantitativa que se mide con números reales. La última, la "variable dinero", es una variable un tanto especial, ¿cuántos euros tienes en el bolsillo?, puede ser considerada una variable cuantitativa discreta, pero también podríamos medirlo con céntimos […].

HDS 1.2. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Formulación de problemas por los estudiantes*

P: […] En el contexto de este proyecto, ¿en qué otras variables podemos pensar?

E_1: Color preferido.

E_2: Lleva o no lleva gafas.

E_3: La estatura de cada estudiante.

E_4: Llevan o no vaqueros.

E_5: Color de los ojos.

P: Bien vemos que es posible elegir distintas variables […].

HDS 1.3. *Interacción regulativa magistral. Recogida de datos del curso*

P: […] En la primera fase del proyecto vamos a recoger los datos. Yo les voy a dar una hoja y ustedes la hacen pasar anotando los valores en cada variable; cada estudiante debe poner sus datos en una fila, por ejemplo, el primer alumno pone el género (hombre o mujer), deporte (nada, poco, mucho), número de hermanos, el peso y el dinero. Entonces los dejo para que vayan completando […].

HDS 1.4. *Interacción regulativa magistral. Conflicto mediacional temporal y afectivo a raíz del tiempo requerido para preparar los propios datos; el profesor proporciona datos previamente recogidos*

P: […] Trabajar de esta manera tiene algunos inconvenientes; uno de ellos es el tiempo y el otro es que una vez que se recojan los datos hay que juntarlos y hacer fotocopias para cada estudiante. Por ello, les voy a dar los datos recogidos de un grupo de 60 estudiantes del curso pasado, estos no son los datos de ustedes pero dan el mismo efecto para el problema que queremos resolver […].

[…] Por aparejas les voy a dar una hoja con 60 valores de estas variables con los cuales van a trabajar en las preguntas. La primera pregunta es "¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?" En cada una de las variables […].

[…] Son dos preguntas: "¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?", y "¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?" […].

HDS 1.5. *Interacción regulativa puntual. Conflicto con el significado de alumno típico; el profesor ejemplifica el alumno representativo para las variables género y deporte (uso de la moda)*

E_6: […] Para elegir un alumno típico, ¿qué elegiríamos?

P: Tienes que comprobar cuántas mujeres y hombres hay, y luego; si hay más mujeres, sería más representativo tomar una mujer.

E_6: Y luego, ¿se hace esto en todas?

P: Para las otras variables, por ejemplo el deporte, hay que ver cuántas personas hacen nada, poco y mucho deporte. Luego ver cuál de estos valores es más representativo […].

HDS 1.6. *Interacción regulativa puntual. Conflicto con el promedio (media o moda) más apropiado para determinar el alumno típico en la variable número de hermanos; uso de la media en lugar de la mediana (distribución asimétrica)*

E_7: […] En la variable número de hermanos el alumno típico, ¿es el que se repite más? o hallando la media se sabe cuál es el alumno típico.

P: Podrías fijarte en el valor que más se repite o en el que esté más próximo a la media. Son dos posibilidades.

E_7: Pero en este caso, ¿qué es lo que se pide?

P: Podría ser cualquiera de las dos.

E_7: ¿Las dos son válidas?

P: Las dos podrían ser válidas, aunque una podría ser más preferible que la otra o puede que ambas sean igualmente útiles […].

HDS 1.7. *Interacción regulativa puntual. Uso de la media en lugar de la mediana (distribución asimétrica); aproximación de la media de la variable número de hermanos (2.75) ¿Qué valor tomar dos ó tres?, el profesor desvía la atención hacia la moda*

E_8: […] Ya no me acuerdo como se hacía. Sumo el número de hermanos totales y lo divido por el número de alumnos que hay.

P: Podría ser.

E_8: Si salen 165 hermanos, entre 60, es 2.75.

P: Eso podría ser una solución; decir, un alumno que tenga dos hermanos es más representativo que uno que tenga uno.

E_8: O quizás el que tenga tres.

P: El que tenga tres porque está más próximo, tienes razón. Otra alternativa diferente es el valor que más se repite, ¿recuerdas que nombre recibe este valor?

E_8: Moda. Ahora voy recordando.

E_9: ¿Se halla de alguna manera la moda? O simplemente contando.

E_8: Hay una fórmula, pero no recuerdo.

P: No, una fórmula, no.

E_8: Tengo que contar.

P: Tienes que contar cuántas veces va el uno, cuántas veces va el dos y así.

E_8: Hay que hacer un cuadro.

P: Hay que hacer una tabla. Eso es […].

HDS 1.8. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para resumir estadísticamente los datos; el profesor incentiva el uso de tablas de frecuencias*

E_9: […] Las mujeres hacen muy poco deporte.

P: ¿Cómo habéis trabajado los datos?

E_9: Tomamos el grupo de las mujeres y nos fijamos que dice cada una: poco, mucho o nada y apuntamos las que más hay.

P: ¿Solo las mujeres? ¿Y los hombres no?

E_9: Es que estamos sacando los cálculos de las mujeres.

P: La preguntas es, en la clase, para la variable deporte el alumno o alumna típica es.

E_{10}: Contamos todos, los 60, de poco deporte, mucho o nada.

P: Eso es, y los datos, ¿cómo se registran?

E_{10}: Contando y anotamos si hay más mujeres u hombres.

P: Bien, pero si tienen que comunicar esa información y convencer a la audiencia de que efectivamente han contado bien, tienen que reflejarlo en forma escrita de alguna manera.

E_{10}: Con los datos.

P: ¿Pero cómo?, ¿podrían hacer algo para recoger esa información y resumirla?

E_{10}: En una tabla.

P: Haciendo una tabla de frecuencias […].

HDS 1.9. *Interacción regulativa puntual. Conflicto con el significado y representatividad de un alumno típico; se ejemplifica el alumno típico para la variable género (uso de la moda)*

E_{12}: […] En la segunda pregunta, ¿cómo de representativo es?, ¿a qué se refiere? Al número de alumnos que hay, que cumplen las características.

P: Bueno.

E_{12}: Es que en la primera pregunta tampoco estamos seguras si es así. Dentro las mujeres y hombres, ¿si hay más mujeres u hombres?

P: Sí, eso es, cada variable independientemente.

E_{12}: Independientemente, el número de personas que cumplan estas características.

P: Sí […].

HDS 1.10. *Trabajo autónomo. Conflicto con la construcción de tablas de frecuencias para variables continuas (no se consideran intervalos en la columna de valores)*

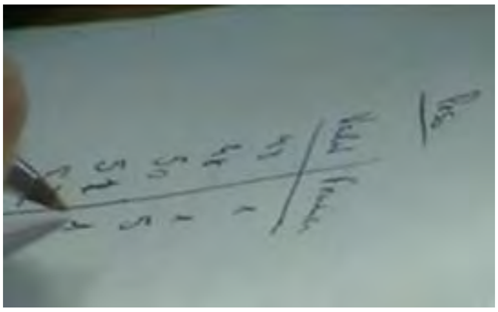


Figura D.1. Conflicto en la definición de intervalos en variable peso

HDS 1.11. *Interacción regulativa magistral. Justificación del uso de tablas de frecuencias para responder la cuestión 1 en la variable género*

P: […] Primero, para la variable género, hay grupos que ha señalado como respuesta: es una mujer, justificando que han contado. Pero si se desea informar a otra persona y convencerle de que eso está bien, hay que reflejarlo por escrito.

Hay 60 valores, en algún momento hay que hacer un resumen de los datos, un resumen estadístico de los datos. Para esta primera pregunta, ¿cuál es la persona representativa en cuanto a la variable género?, lo normal es que se haga una tabla de frecuencias […].

HDS 1.12. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Respuesta a la cuestión 1 para las variables género, deporte y número de hermanos; conflicto con el título y etiquetado de tablas de frecuencias*

P: […] Veamos lo que ha hecho vuestra compañera en el pizarrón (figura D2).

E_{13}: Dividí entre hombres y mujeres y ordené los datos en una tabla señalando cuántos son hombres y cuántos son mujeres […].

Figura D.2. Conflicto con el etiquetado de tablas de frecuencias

HDS 1.13. *Interacción regulativa magistral. Tabla de frecuencias (construcción y uso correcto de títulos y etiquetas)*

P: […] Es decir, aquí surge una técnica y un objeto estadístico muy importante que es la tabla de frecuencias. Tabla de frecuencias es lo que hay que poner a funcionar para dar respuesta a la pregunta. ¿Qué es una tabla de frecuencias? Es un cuadro en el que se ponen los valores de las variables, en este caso una variable cualitativa que tiene dos valores; hombre y mujer.

La tabla hay que mejorarla. Género, es el nombre de la variable, habría que ponerlo fuera y, ¿qué habría que colocar en lugar de la palabra género?

E$_{13}$: Frecuencia.

P: Frecuencia, frecuencia absoluta, que refiere a cuántas veces aparece un valor.

E$_{13}$: ¿Y dónde ponemos género?

P: Las tablas de frecuencias tienen un nombre, un título, que en este caso sería: distribución de frecuencias de la variable género. ¿Qué hay que poner encima de las palabras mujer y hombre? (nadie interviene) La palabra valor; valor que toma la variable estadística, género. Tenemos una tabla de frecuencias absolutas de la variable género. Los valores que toma la variable son: hombre y mujer.

Para dar respuesta a esta pregunta, del alumno más representativo, hemos visto la necesidad de hacer una tabla de frecuencias, que es una técnica para reducir datos estadísticos […].

HDS 1.14. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Respuesta a la cuestión 1 variable género; institucionalización de la moda*

P: […] A la pregunta, ¿cuál es la persona más representativa en cuánto a género?, ¿qué has respondido?

E$_{13}$: La mujer.

P: La mujer, ¿por qué?

E$_{13}$: Porque que hay más.

P: ¿Cómo se llama en el lenguaje de la estadística ese valor representativo?

E_{13}: Moda.

P: Moda. La moda es el valor de la variable que más se repite […].

HDS 1.15. *Interacción regulativa magistral. Uso de tablas de frecuencias para determinar el alumno típico en las variables deporte y número de hermanos*

P: […] Lo mismo sucede con la variable deporte; tenemos que hacer una tabla de frecuencias que resuma los datos. El título de esta tabla puede ser: tabla de frecuencias absolutas de la variable "práctica de deporte". Valor: nada, poco, mucho.

En el caso de la variable número de hermanos, es lo mismo, como la variable es discreta la moda es el estadístico pertinente […].

HDS 1.16. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Respuesta a la cuestión 1, variable peso; uso de la media en lugar de la mediana (distribución asimétrica)*

P: […] El equipo de Ana, Teresa y Carmen nos van explicar lo que han hecho para la variable peso.

Ana: Hemos sumado todos los valores del "peso" para ver cuál es la media.

P: Es decir, se han dado cuenta que la pregunta se relaciona con la media aritmética. ¿Qué es la media aritmética?

Carmen: Es la suma de todos los valores y luego hay que dividirla entre el número de valores […].

SDS 1.17. *Interacción regulativa magistral. Uso de la media como valor representativo de un conjunto de datos (se ejemplifica con la variable número de hermanos)*

P: […] Lo que recuerdan entonces, de la media, es que es una regla de cálculo. Y, ¿por qué hay que calcular la media en este problema? Una característica de este número es ser representativo, la media aritmética tiene varios significados, varios usos; uno de ellos, es como valor representativo de una colección de datos. Es una medida de posición central o de tendencia central de los datos con lo cual, se puede tomar como un valor representativo. También tiene otros usos como el de valor esperado, pero en este caso nos sirve el significado de valor central. La pregunta, tal como está hecha, no lleva a tener que hacer ninguna tabla de frecuencias, ya que si se reconoce el uso de la media es suficiente.

E_{14}: ¿Se puede hacer lo mismo con la variable número de hermanos?

P: Si, también. Pues es una variable cuantitativa discreta, se puede sumar y dividir. La cuestión está en que el promedio da 2.7 y no hay 2.7 hermanos, este no es un valor de los datos, pero también se puede utilizar […].

HDS 1.18. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Uso de la media según el tipo de variable; dificultad con el tratamiento de valores cualitativos (uso de códigos numéricos)*

P: […] ¿Se puede usar la media aritmética en el caso del deporte?

E_{15}: Sí.

E_{16}: No.

E_{17}: Sí.

P: ¿Se pueden sumar los valores poco, mucho, nada?

E_{18}: Se colocan los números uno, dos y tres.

P: Pero los valores, en sí mismo, no se pueden sumar. ¿Se puede utilizar la media en el caso de la variable género?

E_{19}: No […].

HDS 1.19. *Interacción regulativa magistral. Uso de promedios según el tipo de variables*

P: […] No se puede sumar ser hombre y ser mujer y dividir por dos. Vemos como las técnicas estadísticas se deben utilizar de acuerdo a la variable. Si la variable es cualitativa, como la variable género, podemos utilizar la moda. Solo en las variables cuantitativas para los cuales se pueden realizar operaciones aritméticas, se puede utilizar la media aritmética. Más adelante veremos que, para variables ordinales, como ocurre con el deporte hay otra medida de posición central que puede ser aplicada. ¿Alguien recuerda otra medida de posición central que también se podría utilizar en estos casos?

E_{20}: La mediana.

P: Hay otra medida que es la mediana. La mediana de un conjunto de datos es pertinente también para variables ordinales. Se trata de ordenar los números de menor a mayor y tomar el valor central de esa serie ordenada […].

HDS 1.20. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Tabla de frecuencias de variables continuas (variable peso); conflicto con el uso de intervalos (agrupamiento de los datos, determinación de los valores extremos y uso de la notación convencional)*

P: […] En el caso de la variable peso; al hacer tablas de frecuencias para los 60 valores, cuántas veces se repite el peso 50, 51, 52, etc., sale una tabla con muchos valores distintos ya que las frecuencias son muy bajas, ¿alguien lo ha hecho?

E_{21}: Si, nosotros.

P: ¿Cuántos valores distintos aparecen?

E_{21}: No los tenemos todos, son muchos.

P: Para este tipo de situaciones es necesario hacer un agrupamiento de los datos en intervalos de clase. Aquí, vuestro compañero, va a explicar lo que han hecho en su grupo.

E_{22}: Nosotros en lugar de colocar los valores sueltos, los hemos agrupados en intervalos de 10 en 10 (figura D3).

P: Esto sería una tabla de frecuencias de datos agrupados. Se ha tomado el criterio de agrupar los datos de 10 en 10 y luego se señala cuántas personas hay que su peso es de 40 a 50, en este caso, dos; entre 50 y 60, 26; etc.

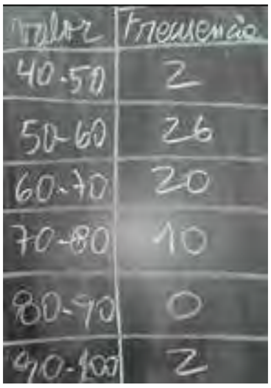


Figura D.3. Conflicto con la notación de intervalos

E$_{23}$: ¿Y dónde se coloca el alumno que pesa 50 Kg?

E$_{24}$: Para evitar ese problema creo que hay un modo de representación. En lugar de poner un corchete, el corchete cuenta el 50, se coloca un paréntesis, el paréntesis cuenta a partir de 50 […].

Figura D.4. Corrección en la notación de intervalos

HDS 1.21. *Interacción regulativa puntual. Uso de la fórmula para calcular la media en lugar de la calculadora en variables continuas; justificación del uso de la calculadora y del sentido de agrupar los datos*

E$_{25}$: […] Para calcular la media, ¿qué hacemos?, ¿agrupamos los datos o no los agrupamos?

P: Agrupar los datos tiene otra finalidad diferente, no es para hallar la media aritmética. Un vez que se han agrupado los datos hay unos valores centrales, las marcas de clase. Uno podría hacer un cálculo aproximado de la media multiplicando las marcas de clase por sus frecuencias, sumando y dividiendo por 60; pero este valor va a ser aproximado, porque se está asignando la frecuencia de cada intervalo a las marcas de clase, con lo cual se está perdiendo información. Si se tienen medios de cálculo no es necesario hacer este tipo de aproximaciones. Ahora, ¿para qué queremos este agrupamiento? Es un resumen estadístico de la distribución y es un primer paso para construir gráficos que nos den una idea de la forma de cómo se distribuyen los datos. También, por ejemplo, para dar una respuesta a la segunda pregunta, ¿qué porcentaje de alumnos hay con un peso mayor o menor que un cierto alumno? […].

HDS 1.22. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para responder la cuestión 2; se sugiere el uso de promedios*

E_{26}: Para la pregunta "¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?", ¿qué tendríamos que hacer?

P: Separar la muestra total de los 60 alumnos, por un lado las chicas y por otro lado los chicos y repetir los cálculos, con lo cual, se puede dar respuesta a la pregunta de si hay o no diferencias comparando los grupos en base a la moda, la mediana o la media aritmética. El uso de estos resúmenes estadísticos moda, mediana y media aritmética se pueden poner en funcionamiento si se quiere comparar dos muestras. Como en este caso […].

HDS 1.23. *Interacción regulativa magistral. Sistematización de contenidos; análisis de la solución esperada a la cuestión 1 en las variables, género, deporte y número de hermanos*

P: […] Vamos a sistematizar los conocimientos. ¿Qué hemos hecho hasta ahora? Hemos visto que para la pregunta referida al género hemos tenido que resumir los datos en una tabla de frecuencias absolutas (tablas, D.1 y D.2). Aparece entonces que, en la variable género, el 32% son hombres y el 68% son mujeres, por lo que es más representativa la mujer. En el caso de la variable deporte; tenemos que el 12% practica nada de deporte, el 73% poco y el 15% practica mucho deporte, el valor poco es, en este caso, el valor más representativo […].

[…] Vamos a hablar ahora de representaciones gráficas que nos va a ayudar a ver globalmente como se distribuyen los datos. Aquí tenéis un ejemplo de una representación gráfica que es un diagrama de barras de la variable deporte (figura D.5). Aquí está la frecuencia absoluta (se refiere al eje de ordenada) y estos son los valores, nada, poco y mucho (muestra el eje de abscisa) […].

[…] Otro tipo de representación gráfica usual para representar este tipo de datos son los diagramas de sectores (figura D.6). Tenemos un disco completo, las frecuencias relativas se representan en términos de áreas de sectores, en este caso tenemos que el 73% practican poco deporte […].

[…] Para la variable número de hermanos, aquí tenemos una tabla de frecuencias (tabla, D.3), hemos añadido las frecuencias absolutas, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas. En este caso vemos que la frecuencia relativa de alumnos que tienen un solo hermanos es de 10%, la frecuencia relativa de los estudiantes que tiene dos hermanas es de 40%, valor que corresponde a la moda de esta variable y que puede ser utilizado para determinar el alumno típico […].

[…] Aquí tenéis un ejemplo de un diagrama de barras para la variable número de hermanos, expresado en porcentaje (figura D.7). Se ve el porcentaje de alumnos que tienen un hermano, dos hermanos que es la moda, tres, etc. […].

[…] Aquí tenéis un resumen de cálculos estadísticos para la variable número de hermanos (tabla, D.4). La media aritmética se obtiene sumando todos los datos y dividiendo por el número total de observaciones. Hay varios estadísticos, hemos calculado la moda para el número de hermanos, que es dos. El valor máximo y el valor mínimo son otros dos estadísticos que hemos calculado, el máximo es siete y el mínimo uno. El recorrido es la diferencia entre el máximo y el mínimo, en este caso es seis. Luego vemos otros estadísticos que son la varianza y la desviación típica.

El recorrido es una medida de la mayor o menor dispersión de los datos; por ejemplo, en esta variable número de hermanos, ¿quién es más disperso?, ¿los chicos o las chicas? Imaginen que en el grupo de las chicas todas tengan cuatro hermanos, entonces el grupo de las chicas no tendría dispersión […].

Tabla D.1. Tabla de frecuencias variable género

VALOR	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA (%)
Hombre	19	32
Mujer	41	68
Total	60	100

Tabla D.2. Tabla de frecuencias variable deporte

VALOR	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA (%)
Nada	7	12
Poco	44	73
Mucho	9	15
Total	60	100

Figura D.5. Gráfico de barras variable deporte

Figura D.6. Gráfico de sectores variable deporte

Tabla D.3. Tabla de frecuencias acumuladas variable número de hermanos

VALOR	F. ABSOLUTA	F. RELATIVA	F. ACUMULADA
1	6	10.00	10.00
2	24	40.00	50.00
3	17	28.33	78.33
4	8	13.33	91.67
5	3	5.00	96.67
6	1	1.67	98.33
7	1	1.67	100.00
Total	60	100.00	

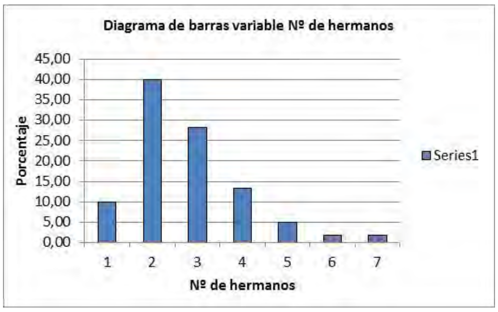


Figura Nº D.7. Diagrama de barras variable número de hermanos

Tabla D.4. Estadísticos variable número de hermanos

ESTADÍSTICOS	VALOR
Media	2.75
Mediana	2.50
Moda	2
Máximo	7
Mínimo	1
Recorrido	6
Varianza	1.51
Des. Típica	1.23

HDS 1.24. *Interacción regulativa magistral. Asignación de tarea*

P: […] Les voy a dejar uno minutos para que traten de dar una respuesta a la pregunta "¿Quiénes son más dispersos, los chicos o las chicas en la variable número de hermanos?" […].

HDS 1.25. *Interacción regulativa puntual. Conflicto con el cálculo del recorrido, con su uso según el tipo de variables y con su interpretación como indicador de dispersión*

E_{26}: […] ¿El recorrido se haya de alguna manera? ¿Hay algún tipo de fórmula cuando los datos son mayores?

P: No, se trata de separar los chicos por un lado y las chicas por el otro; luego buscar el máximo y el mínimo en cada grupo y determinar el recorrido […].

E_{27}: […] Me puede repetir la pregunta es que no…

P: ¿Quiénes son más dispersos el grupo de los chicos o el grupo de las chicas?

E_{27}: Entonces hay que separarlos. Es más disperso el que tiene valores máximo y mínimo más separados.

P: Donde el recorrido sea mayor […].

E_{28}: ¿Es solo para la variable número de hermanos?

P: Sí, tiene que ser una variable cuantitativa.

E_{29}: […] No entiendo esto de medir la dispersión.

P: La dispersión se puede medir de varias maneras, una de ellas es a través del recorrido. Tienes que calcular el recorrido para el grupo de los chicos por un lado y para el grupo de las chicas pare el otro; para ello debes identificar primero cuál es el máximo y el mínimo de cada grupo […].

HDS 1.26. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la tarea; dispersión chicos y las chicas*

P: […] ¿Se entiende la pregunta?

E_{30}: Sí […].

P: […] ¿Quiénes son más dispersos los chicos o las chicas?

E_{31}: Las mujeres. Recorrido seis y recorrido tres.

P: Bien, ¿cómo lo hicieron?

E_{32}: En las mujeres el máximo es siete y el mínimo es uno; el recorrido es seis. En los chicos el máximo es cinco y el mínimo es dos; el recorrido es tres […].

HDS 1.27. *Interacción regulativa magistral. Explicación de la solución esperada a la tarea "¿Quiénes son más dispersos, los chicos o las chicas en la variable número de hermanos?"*

P: […] Vamos a terminar la clase de hoy. Para la pregunta ¿cuál es el recorrido de los chicos y de las chicas? Se puede hacer directamente, viendo que el máximo de las chicas es siete y el mínimo es uno; por lo tanto, el recorrido es seis. Para el caso de los chicos, el máximo es cinco y el mínimo es dos, por lo tanto, el recorrido es tres. De manera que es más disperso el grupo de las chicas que el grupo de chicos […].

Sesión de clase 2 (una hora)

HDS 2.1. *Interacción regulativa magistral. Justificación del proyecto, enunciación de las técnicas estadísticas para responder la cuestión 2 e institucionalización de los promedios*

P: […] Vamos a continuar con el desarrollo del proyecto de análisis de datos sobre las características de un alumno típico. Lo que se pretende con este proyecto es motivar y justificar el uso de determinados estadísticos; los promedios, las dispersiones, los gráficos, ¿para qué sirven? Un problema desde el punto de vista educativo es que la presentación de estos contenidos se hace entregando fórmulas de cálculo, que luego son aplicadas a colecciones de datos. Este es un enfoque algorítmico donde los estudiantes no reconocen la utilidad de dichos cálculos. Cuando se empieza con un proyecto con datos reales, como en el caso de este proyecto, se justifica el uso de las técnicas […].

[…] En el caso del proyecto Alumno típico, hemos recogido datos relativos a cinco variables. Alguien podría preguntarse, ¿para qué queremos saber las características de un alumno típico? Esta pregunta está mejor justificada cuando se necesita comparar; por ejemplo, en el caso de las chicas y las chicas nos podemos preguntar, ¿quién tiene más dinero?, ¿los chicos o las chicas? Este es unte tema de interés, ver si los varones habitualmente llevan más dineros o es al revés […].

[…] ¿Quién tiene más dinero?, ¿las chicas o los chicos? Se trata de comparar dos distribuciones de frecuencias. Para esto se deben utilizar técnicas de reducción, hay que hacer tablas de frecuencias y gráficos para ver la forma de cómo se distribuyen los datos y contrastarlo con resúmenes numéricos. Así podemos ver hacia qué valores se concentran los datos. Entonces aparecen distintos números como son; la media aritmética, que es un valor que da una idea de hacia dónde tienden los datos; lo mismo que la moda y la mediana. De esa manera si se resumen los 19 valores de los chicos en un solo número representativo y se hace lo mismo con los 41 valores de las chicas, ya se puede comparar. ¿Por qué se requiere utilizar estos tres estadísticos: media, mediana y moda? Porque los datos que se manejan son diversos; tenemos por una parte las variables, género (chica y chica) y deporte (nada, poco, mucho) donde no podemos hacer operaciones; en cambio, en las variables número de hermanos, peso y dinero podemos hacer cálculos.

La moda, es una medida de posición central que se puede aplicar a datos cualitativos. La media y la mediana se puede usar para resumir los datos y hacer comparaciones en el caso de variables cuantitativas […].

[…] La comparación de dos distribuciones de frecuencias correspondientes, por ejemplo, a muestras distintas de una misma variable, puede hacerse de una manera directa por medio de una tabla, o visualmente con ayuda de gráficos estadísticos. También puede hacerse eligiendo un valor representativo de cada muestra. La media, la moda y la mediana son soluciones matemáticas idóneas para este problema según distintas circunstancias; reciben el nombre de estadísticos o características de posición o tendencia central […].

[…] Vamos a recordar la media aritmética. La media es la principal medida de tendencia central. Es el número que se obtiene sumando todos los valores de la variable estadística (x_i) y dividiendo por el número de valores (N). Si un valor aparece varias veces debe ponderarse por su frecuencia (f_i). Simbólicamente, $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i f_i}{N}$; $\bar{x}$ barra es la media aritmética, la letra griega $\sum$ (sigma) es la abreviatura de sumatoria de los valores de la variable x_i. Voy a poner en la pizarra la fórmula de una manera un poco más sencilla (figura D.8). Entonces, la media es $x_1 + x_2 + x_n$ dividido por el número total de individuos, pero, ¿qué ocurre si se repite un valor? Si hay valores que se repiten no hay que sumarlos todos, se toma el valor y se multiplica por su frecuencia. Eso es lo que se dice en la expresión anterior […].

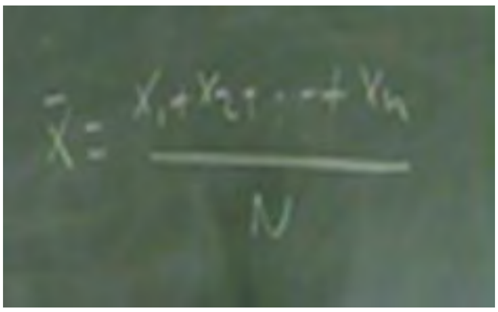


Figura D.8. Fórmula media aritmética simplificada

[…] Veamos ahora la moda. La moda es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia. En una distribución puede haber más de una moda. Si existe una sola moda se llama unimodal, si existen dos bimodal, si hay más de dos se llama multimodal. La moda es una medida de tendencia central poco eficaz, ya que si las frecuencias se concentran fuertemente en algunos valores - al tomar uno de ellos como representante - los restantes pueden no quedar bien representados, pues no se tienen en cuenta todos los datos; sin embargo, es la única característica de valor central que podemos tomar para las variables cualitativas. Además su cálculo es sencillo […].

[…] Nos centraremos ahora en la mediana. Si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al número tal que existen tantos valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él; por ejemplo, si en una familia los niños tienen tres, cinco y ocho años, la edad del niño mediano es cinco años. La mediana es igual a cinco. Si nace un nuevo bebé (cero años) ahora tenemos dos niños medianos, uno de tres años y otro de cinco. En este caso hay una indeterminación y para resolverla tomamos como mediana el valor cuatro (media entre tres y cinco).

La mediana presenta ciertas ventajas como medida de tendencia central frente a la media en algunas distribuciones, ya que no se ve afectada por los valores extremos de las observaciones; Por ello su uso es particularmente indicado en las distribuciones asimétricas. También se puede aplicar con variables estadísticas ordinales, mientras que la media no se puede aplicar en estos casos […].

HDS 2.2 *Interacción regulativa magistral. Asignación de tarea*

P: […] Realizaremos el siguiente ejercicio: Hallar la media y mediana para las variables peso, y dinero del grupo de los hombres. Dejaremos un tiempo para que trabajen en pareja, pueden usar la calculadora para determinar la media […].

HDS 2.3. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la tarea*

P: […] ¿Entienden lo que hay deben hacer?

E_1: Sí.

P: Bien, sigan avanzando […].

P: […] ¿Cómo van? ¿Entienden?

E_2: Estamos intentando calcular la media.

P: Para calcular la media pueden usar la calculadora.

E_2: No tenemos.

P: Entonces podéis comenzar con mediana, después piden calculadora […].

HDS 2.4. *Interacción regulativa puntual. Conflicto con el tratamiento de los valores con frecuencia mayor a uno en el cálculo de la mediana*

E_3: […] ¿Cómo se encuentra la mediana de la variable peso?

P: La definición que hemos dado, habría que recordarla.

E_3: No lo recuerdo.

E_4: Es el valor central.

P: El valor central pero de los datos ordenados. Lo que tenéis que hacer es ordenar los datos.

E_3: ¿De menor a mayor?

P: De menor a mayor […].

E_5: […] ¿La mediana tiene algún símbolo?

P: Sí. Me

E_5: Para calcular la mediana hay que ordenar de menor a mayor. Luego, si son 19, ¿qué debo hacer?

P: Debes contar nueve por un lado y nueve por el otro. El que queda en el centro es la mediana.

E_5: Entonces no hace falta escribirlos todos, ya tengo nueve. La mediana es el que ocupa este lugar.

P: Sí. Comprueba que no te has equivocado […].

E_6: […] ¿Hay que anotar los números repetidos?

P: Sí, hay que escribirlos todos.

E_7: ¿En la mediana se van repitiendo todos los números?

P: Claro. Todos los valores se ordenan de menor a mayor y luego, se determina el valor central.

E_6: En la mediana, ¿se tienen en cuenta las frecuencias?

P: Se tienen en cuenta las frecuencias en el sentido de que si hay un dato repetido, hay que repetir el valor […].

HDS 2.5. *Interacción regulativa puntual. Uso de la fórmula en lugar de la calculadora para obtener la media de datos agrupados*

E_8: […] ¿Consideramos intervalos?

P: No, ¿por qué crees que habría que considerar intervalos?

E_8: Para calcular la media aritmética.

P: No es necesario.

E_8: Lo hicimos con intervalos.

E_9: Entonces, ¿se cogen cada uno de los valores separados? Es una lista un poco larga.

P: Para obtener la media aritmética, de un conjunto de datos, se suman todos los valores y se dividen por el número total. Si se agrupan en intervalos y se aplica la técnica para calcular el promedio, las frecuencias representan un valor central del intervalo, con lo cual, se pierde información. Recuerden que pueden usar la calculadora como herramienta de cálculo […].

HDS 2.6. *Interacción regulativa puntual. Conflicto con el procedimiento de cálculo de la mediana (se divide el rango entre dos)*

E_{10}: […] He ordenado lo del peso y hay 42 números.

P: Pero eso será para las chicas, pero aun así son 41.

E_{10}: No. Son los chicos.

P: Los chicos son 19. No puede haber más de 19 valores.

E_{10}: 55 es el peso mínimo que hay, y el máximo es 97. De 55 a 97 hay 42 valores.

E_{11}: Entre ellos, la mitad.

P: No. No es la mitad de ese rango. Fíjate en tu compañera, ella ha ordenado bien […].

HDS 2.7. *Interacción regulativa puntual. Conflicto con el tratamiento de los valores con frecuencia mayor a uno en el cálculo de la mediana*

E_{12}: […] ¿Se ordena de menor a mayor?

P: Sí.

E_{12}: Si se repite, ¿qué?

P: Si se repite se escribe de nuevo.

E_{13}: No es mejor en vez de colocarlo dos veces multiplicar por la frecuencia.

P: ¿Qué estáis calculando?, ¿la media o la mediana?

E_{13}: La media.

P: En ese caso puedes hacerlo aplicando la fórmula, pero eso te lleva a pasar por la tabla de frecuencias. Si usan la calculadora no es necesario […].

HDS 2.8. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Media y mediana de la variable peso; explicación del tratamiento de los valores con frecuencia mayor a uno al calcular la mediana*

P: […] ¿Qué resultado les ha dado en la variable peso?

Elena: La mediana 67.

P: ¿Estáis de acuerdo los demás con este resultado?

E_n: Sí, (varios estudiantes responden).

P: Explica cómo lo has hecho.

Elena: Lo hemos ordenado de menor a mayor y el valor que está en medio es el 67.

E_5: No es necesario ordenarlos todos. Si tú sabes el número de valores que hay, sabes también el que está en el medio, los ordenas hasta ahí y obtienes el resultado.

P: Hay que tener en cuenta cuántos hay en total. Son 19, nueve por arriba y nueve por abajo, el valor que está en el medio es la mediana. Me han preguntado mucho; si se repite un valor, ¿hay que ponerlo? Claro que sí, hay que considerar todos los valores.

Elena: La media del peso es 70 con 10.

P: 70 con 10, ¿está bien?, los demás ¿lo han calculado?

E_n: Sí, está bien (varios estudiantes responden) […].

HDS 2.9. *Interacción regulativa magistral. Justificación del uso de la calculadora para obtener la media en variables continuas; ¿uso de la media o la mediana según la forma de la distribución?, el profesor ejemplifica con la variable peso; uso del promedio y la dispersión en la cuestión 2*

P: […] Para obtener la media hay algunos que han intentado aplicar la fórmula que he puesto en la diapositiva; si se quiere aplicar la fórmula primero se deben hallar las frecuencias, pero no es necesario si se tienen medios como la calculadora. ¿Hay diferencias entre la mediana y la media en la variable peso?

E_{14}: Sí.

P: Es bastante, ¿cuál será el valor más representativo?

Elena: El 70. La media aritmética.

P: Ya veremos cuando veamos la forma de la distribución. La decisión depende de la forma de la distribución. La distribución de frecuencia de la variable "peso" para toda la muestra, es bastante asimétrica; en el sentido de que las chicas, en general, pesan menos, en estos casos va a representar mejor los datos, la mediana que la media. Si se quiere comparar dos distribuciones de frecuencias no es suficiente comparar los promedios, hay que analizar también la dispersión […].

HDS 2.10. *Interacción regulativa magistral. Sistematización de contenidos (dispersión, recorrido, desviación típica…); solución esperada a las cuestiones 1 y 2 en las variables peso y dinero; explicación del uso la mediana en lugar de la media (distribuciones asimétricas)*

P: […] Vamos a continuar con la presentación, hablaremos de las características de la dispersión: son estadísticos que nos proporcionan una medida del mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central. Todas ellas son valores mayores o iguales a cero, indicando un valor cero la ausencia de dispersión. Una de tales medidas puede ser la diferencia entre el valor mayor y el menor de la distribución de frecuencias, que recibe el nombre de recorrido o rango. En su cálculo sólo intervienen dos valores (el máximo y el mínimo) por lo que, es escasamente representativa de la dispersión del conjunto de datos. Imagínese que hay un estudiante que pesa 150 Kg. la dispersión cambia fuertemente solo con este sujeto […].

[…] La medida de dispersión más utilizada es la desviación típica, que es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la diferencia entre cada valor y la media dividida dicha suma por el número de valores; Su cuadrado recibe el nombre de varianza y viene dada, por tanto, por la siguiente expresión:

$s^2 = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ *S:* Desviación típica; S^2*:* Varianza".

Vamos a explicar un poco esta fórmula. X_i representa los valores de la variable, $\overline{X}$ la media aritmética. Entonces, lo que se indica es que a cada valor se le resta la media, como esta diferencia puede ser positiva o negativa se eleva al cuadrado para que sea siempre positiva. Luego, se suman todos estos valores y se dividen por el número de observaciones […].

[…] En esta diapositiva he propuesto el siguiente ejercicio que por razones de tiempo no lo resolveremos: Para la muestra de datos correspondiente a la variable género = "hombre" hallar los siguientes estadísticos; 1) Recorrido de las variables, número de hermanos, peso y dinero; y 2) Desviación típica de peso y dinero […].

[…] Vamos a ver ahora el tema de representaciones gráficas de distribuciones de frecuencias. En la clase anterior estuvimos viendo el diagrama de barras. Cuando las variables son discretas como la variable número de hermanos, se hace un diagrama de barras; pero, cuando las variables son continuas, como el peso y el dinero, se hace un histograma. Para construir un histograma se definen intervalos de clase y se determinan los sujetos que hay en cada intervalo, expresándolos en frecuencias absolutas o en frecuencias relativas. A efectos de poder comparar las muestras de los chicos y las chicas, como el tamaño es distinto hay que trabajar con porcentajes, frecuencias relativas […].

[…] En el caso del histograma de la variable peso (figura D.9), se han definido intervalos de cinco en cinco; 40 a 45, 45 a 50, 50 a 55, etc. Y en la frecuencia están los porcentajes. Una cuestión importante en esta gráfica es la forma de la distribución. Se ve que esa forma es un poco asimétrica, tiene asimetría positiva. La cola del gráfico está más hacia la derecha, hay unos sujetos atípicos. Esa forma asimétrica de la distribución es la responsable de que la mediana tenga un valor menor y que la media sea mayor. Si la distribución es perfectamente simétrica la media y la mediana coinciden. Cuando la forma de la distribución es asimétrica, la mediana, es más representativa. En este caso, si el peso más alto fuera 200 Kg. esto va aumentar la media, en cambio, la mediana no cambia. Entonces la mediana, en estos casos es más estable y por lo tanto más representativa

E_{15}: Entonces, ¿la mediana es más representativa cuando hay un valor atípico?

P: Cuando la forma de la distribución es asimétrica […].

[…] Fijaos en este gráfico para comparar muestras (figura D.10). Es un histograma de frecuencias relativas contrapuestas, una muestra está por encima y la otra por debajo del eje. Las frecuencias están en porcentajes; por arriba para hombres y por debajo para las mujeres. ¿Qué vemos aquí? Se ve que la distribución de las chicas está más hacia la izquierda y la de los chicos más hacia la derecha, lo que da una idea de que, en promedio, van a pesar más los chicos. También se observa que hay una mayor dispersión de los chicos. Los chicos están más separados respecto de la media […].

[…] Fijaos en la forma de la distribución del dinero (figura D.11). Se ve que la mayoría de las personas tenían menos de 10 euros, pero hay algunos que tenía hasta 50 euros. Lo que da una forma muy asimétrica. En este caso conviene usar la mediana como valor estadístico para hacer comparaciones y como valor representativo de los datos […].

[…] Aquí tenemos un histograma de barras contrapuestas para la variable dinero (figura D.12). Su lectura es análoga al que revisamos para la variable peso […].

[…] Aquí hay otro diagrama interesante, que es el histograma acumulativo de frecuencias; el histograma acumulativo de frecuencias para toda la muestra de la variable dinero (figura D.13). La idea es que en cada intervalo se va sumando la frecuencia. Veamos, ¿qué porcentaje de estudiantes llevaban 40 o menos euros en el bolsillo?

E_{16}: El 95%.

P: Aproximadamente el 95% de los chicos tienen 40 o menos euros. Para responder este tipo de preguntas sirven los histogramas acumulativos […].

[…] Este es un polígono de frecuencias (figura D.14). Se trata de unir mediante una línea los puntos medios de cada intervalo de clase. Entonces, este es el polígono de frecuencias de la variable dinero […].

[…] Esta gráfica es un polígono acumulativo de frecuencias (figura D.15). Podemos preguntarnos, ¿cuánto dinero lleva en el bolsillo el 25% de alumnos con menos dinero? Nos fijamos en los porcentajes (señala el eje de la ordenada) y ubicamos donde está el 25%, luego trazamos una recta paralela a la abscisa hasta intersectar con la línea y trazamos otra recta paralela a la ordenada. Llegamos a 2.5.

Eso se llama percentil del 25%. Un percentil es un valor de la variable tal que el 25%, 50%, 75% de los sujetos tienen un valor menor que este. Por ejemplo; en el peso de los niños o de los bebés en pediatría se plantea, ¿este niño está bien o no de peso? Entonces lo comparan con los pesos de los niños de esa edad y pueden decir este niño está en el medio de su población es decir está en el percentil del 50%. Si el peso es tal que las tres cuartas partes es menor que él tiene un peso más o menos alto.

El 25% se llama primer cuartil y el 75% se llama tercer cuartil. La diferencia entre el primer cuartil y el tercer cuartil es también una medida de dispersión. Se llama recorrido intercuartílico […].

[…] Este es otro gráfico muy interesante, se llama gráfico de caja y bigotes (figura D.16), este gráfico resume la distribución de una manera bastante eficaz. Vamos a ver, para el caso de la variable peso, lo que se representa es, ¿cuál es el mínimo y el máximo en esta distribución?

E_{16}: El mínimo 43.

P: Bien, 43.

E_{17}: El máximo 70 y algo.

P: Es el punto más separado, a la derecha, 97. La línea central de la caja es la mediana. La media es lo que está representado con el punto. La primera línea de la caja representa el primer cuartil y la última al tercer cuartil. De manera que la caja contiene el 50% de los datos. Se han trazado uno bigotes, las líneas extremas, se trazan a base de poner 1.5 la distancia del recorrido intercuartílico.

La idea de este gráfico es indicar los principales datos de la distribución: máximo, mínimo, mediana, media, recorrido intercuartílico y también la forma de la distribución. Se ve que esta distribución es un poco asimétrica hacia la derecha y hay también valores atípicos; los valores que están fuera. Estos valores requieren de un tratamiento propio. Si se quiere comparar dos distribuciones hay que quitar los valores atípicos […].

[…] En las siguientes diapositivas se explica lo que he dicho y también se explican la definición de los percentiles:

- En el gráfico de cajas se representan los siguientes estadísticos: media (punto rojo); mediana (segmento vertical central); cuartiles, inferior y superior (lados laterales de la caja); recorrido intercuartílico (distancia entre cuartiles); máximo y mínimo (puntos extremos); recorrido (distancia entre el máximo y el mínimo); valores atípicos (puntos marcados fuera de los segmentos trazados al exterior de la caja). Al ancho de la caja no se le asigna ningún significado.
- Percentil del 25%: Valor *p* de la variable estadística tal que el 25% de la muestra tiene un valor menor o igual que *p*. También se llama primer cuartil.
- Percentil del 75%: Valor *p* de la variable estadística tal que el 75% de la muestra tiene un valor menor o igual que *p*. También se llama tercer cuartil.
- La mediana es el percentil del 50%. […].

[…] El gráfico de cajas se puede utilizar también para comparar dos distribuciones (figura D.17), en estos dos gráficos se compara el peso para hombres y mujeres. Se puede ver como los hombres pesan más, toda la distribución, la caja, está más a la derecha […].

[…] Aquí tenemos el gráfico de caja de la variable dinero (figura D.18), se ve como de asimétrica es la distribución y se ve también la presencia de varios valores atípicos […].

[…] Aquí tenemos el gráfico del dinero separando chicos y chicas (figura D.19) […].

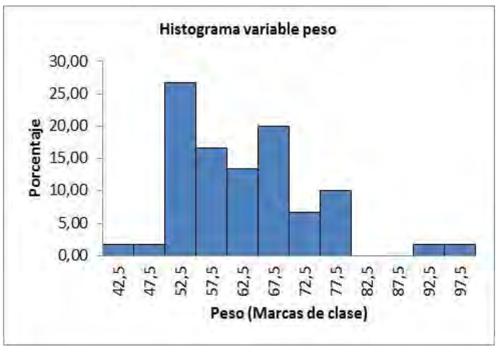


Figura Nº D.9. Histograma variable peso

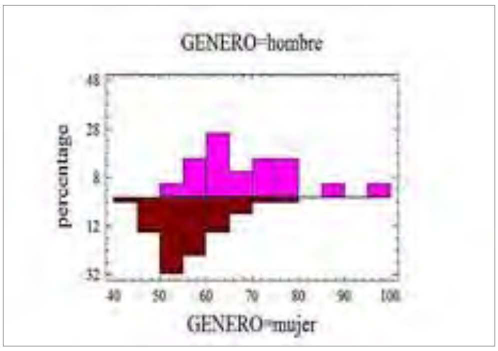


Figura D.10. Histograma de barras contrapuestas variable peso

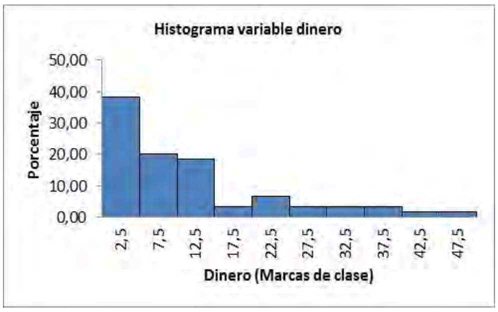


Figura Nº D.11. Histograma variable dinero

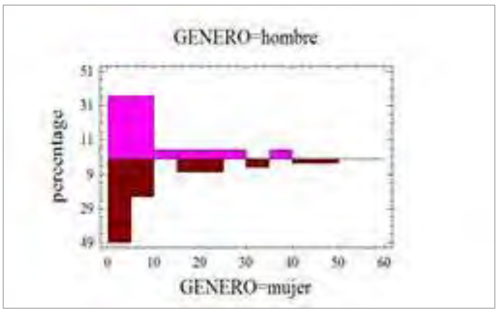


Figura Nº D.12. Histograma de barras contrapuestas variable dinero

Figura Nº D.13. Histograma acumulativo de frecuencias variable dinero

Figura Nº D.14. Polígono de frecuencias variable dinero

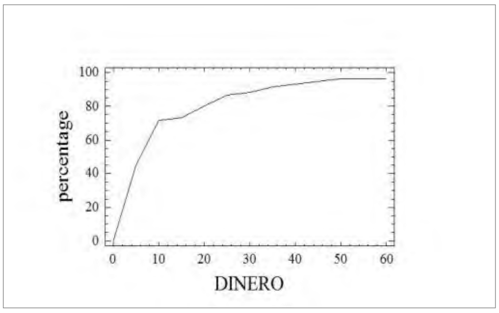


Figura D.15. Polígono acumulativo de frecuencias variable dinero

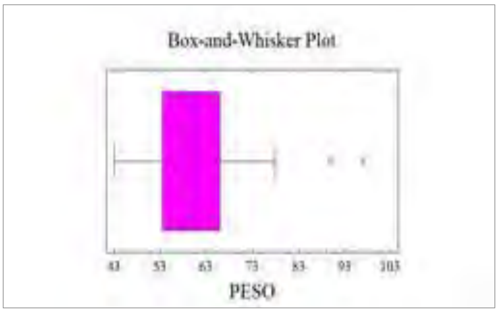


Figura Nº D.16. Gráfico de cajas variable peso

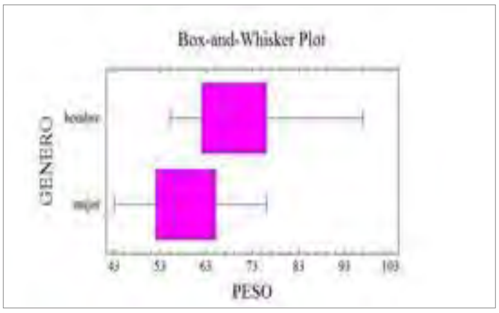


Figura Nº D.17. Gráfico de caja peso hombres y mujeres

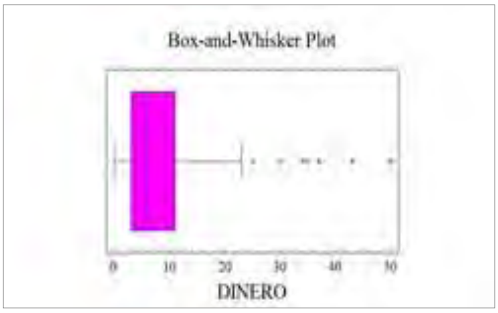


Figura Nº D.18. Gráfico de caja variable dinero

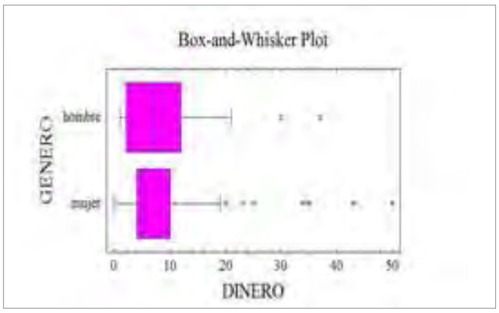


Figura Nº D.19. Gráfico de cajas dinero hombres y mujeres

HDS 2.11. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Gráfico de dispersión*

P: […] Ahora voy a mostrarles un video de Internet con otro tipo de gráfico (El video muestra un gráfico de dispersión en el que se representa la relación entre el ingreso por persona y la esperanza de vida para los principales países del mundo, mostrando además su tamaño y evolución a lo largo de 200 años). ¿De qué trata el video?

E_{18}: Se muestra la evolución de la economía y de las personas según su edad. Se ha ido comprobando como a lo largo del tiempo hay países que seguían siempre en su misma situación económica mientras otras han ido creciendo mucho, y cuanto mayor eran las personas más dinero tenían.

E_{19}: Se muestra el desarrollo económico de diferentes países divididos en grupos por nivel social y como han ido evolucionando a largo del tiempo.

P: ¿Qué variables se relacionan?

E_{20}: Dinero y esperanza de vida […].

HDS 2.12. *Interacción regulativa magistral. Institucionalización lectura e interpretación del gráfico de dispersión*

P: […] En el eje X están los ingresos por persona y en el eje Y se ha puesto la esperanza de vida del país correspondiente. Entonces esta es una variable estadística doble. Para este tipo de variables se hace un gráfico de dispersión o nube de puntos. Un diagrama de dispersión para relacionar dos variables.

En este gráfico se muestra además el tamaño relativo de cada país. China por ejemplo, aparece con una imagen más grande que el resto de los países. Se está mostrando la evolución en un periodo de 200 años. En realidad no es un único gráfico sino que es una colección de gráficos que se van superponiendo […].

HDS 2.13. *Interacción regulativa magistral. Asignación de tareas complementarias*

P: […] Tienen que trabajar este tema en la lección de estadística del texto de referencia para el curso (Godino y cols, 2004). He puesto también, en el tablón de docencia, ejercicios complementarios de esta parte […].

Sesión de clase 3 (una hora y media de seminario de prácticas)

HDS 3.1. *Interacción regulativa magistral. Conformación de equipos de trabajo*

P: […] Vamos a organizar los grupos por pareja.

E_1: ¿Tienen que ser los mismos grupos de los seminarios?

P: No, no tiene que ser los mismos grupos de seminarios.

P: ¿Tú sabes algo de la hoja Excel?

E_2: No.

P: Y tú, ¿sabes manejar la hoja Excel?

E_3: Sí.

P: Ven para acá y trabajas con tu compañero […].

P: […] ¿Tú has manejado la hoja Excel?

E_4: No.

P: Acá hay dos ordenadores, uno por alumno. Colócate con ellos […].

P: […] Aquí hay demasiadas personas, ¿todos saben manejar la hoja Excel?

E_4: Yo, no.

P: Rafael, ¿tú sabes manejar la hoja Excel?

Rafael: Sí.

P: Trabaja con Rafael (Se dirige a E_4) […].

HDS 3.2. *Interacción regulativa magistral. Explicación de la tarea; introducción a la hoja Excel*

P: […] Veamos lo que vamos a hacer hoy. Primero deben descargar el texto de la práctica que es sobre el alumno típico que hemos estado trabajando estos dos últimos días. Deben bajar también la tabla de datos que ya conocéis. Lo que vamos a hacer es tratar de responder las preguntas pero haciendo los cálculos, para responder estas preguntas se deben hacer los cálculos. En clase hemos podido calcular solo algunos estadísticos. Para hacer cálculos estadísticos hay diferentes programas, nosotros trabajaremos con la hoja Excel ya que es un programa que viene instalado en la mayoría de los ordenadores puesto que viene asociado a Microsoft Office […].

[…] Tenemos que poner la matriz de datos en la hoja Excel, ¿cómo lo hacemos? Seleccionamos toda la matriz de datos del fichero, hacemos *clic* con el botón derecho, seleccionamos *copiar;* luego, nos vamos a la hoja Excel, hacemos *clic* en una celda y colocamos *pegar*. Podemos usar también, *Control* + *C* para copiar y *Control* + *V* para pegar […].

[…] Lo que vais a hacer a continuación es tratar de responder las preguntas; por ejemplo, para la pregunta ¿cuáles son las características de un alumno típico o representativo de la clase? En este caso hay que calcular los promedios y la dispersión de los datos […].

[…] Voy a recordar cómo se hacen cálculos con la hoja Excel; vamos calcular primero la suma de una columna, que es el total de la variable correspondiente. Voy a poner en esta celda la suma, debajo voy a poner la media y después la desviación típica. Para calcular la suma, se escribe el signo es igual; luego se va a *inserta función* y se selecciona *suma*; en este caso, el programa automáticamente me ha puesto el rango de celdas C2: C6. ¿Es correcto? Sí, porque fijaros en la celda C1 está el título de la columna.

E_5: ¿Los títulos hay que dejarlos? Yo los he eliminado.

P: Sí, es conveniente dejar el nombre de las variables.

Vamos a hacer lo mismo con la media aritmética, escribimos *igual* vamos a *insertar función* y seleccionamos *promedio* y *aceptar* […].

[…] Este programa tiene también otra característica muy buena que es la posibilidad de repetir los cálculos; por ejemplo, si queremos calcular la suma de las siguientes columnas no tenemos para que volver a repetir los cálculos, sino que se marca la celda donde está la fórmula y se arrastra desde la esquina y como podéis ver se repiten los cálculos, automáticamente se obtienen las sumas de las otras columnas […].

[…] Ahora les voy a pedir que ustedes hagan los mismos cálculos; los hombres por un lado y las mujeres por el otro, ¿cómo hacemos eso? Se copian en una nueva hoja los datos y se suprimen las filas correspondientes, en una las mujeres y en otra los hombres. Esta es una fase de trabajo técnico, una vez que tengan hecho los cálculos para toda la muestra y, para los hombres y las mujeres, vuelvan al texto de la práctica para responder las preguntas. Deben responder en el mismo archivo, incluyendo los cálculos y los gráficos que haremos más adelante, pero lo importante es la interpretación […].

HDS 3.3. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para establecer el rango; el profesor sugiere la respuesta*

E_6: […] La desviación típica, ¿es hasta la celda C61? No pone eso.

P: Tienes que cambiar. Tienes que poner desde la celda C2: C61.

E_6: ¿Dos puntos?

P: Si, así estableces el rango […].

HDS 3.4. *Evaluación formativa. Comprensión de la tarea; conflicto para interpretar los promedios (y determinar el alumno típico)*

P: […] Haber, ¿cómo vais?

E_7: Los cálculos ya los tenemos. Para saber cuál es el alumno más representativo, ¿tenemos que contar?

P: No, puedes interpretar la media. En el caso del peso puedes decir que es un alumno que pesa 61 Kg.; 61.45 es la media. En cuanto al dinero, es un alumno que lleva 10 euros. Ahora repite lo mismo con los chicos y las chicas porque la idea de la representatividad de esos números depende de la dispersión, ahora mismo no tienes un criterio de si estos números son más o menos dispersos. Tiene sentido preguntarse si el grupo de los chicos o el grupo de las chicas es más o menos disperso comparando las desviaciones típicas de las dos submuestras […].

HDS 3.5. *Interacción regulativa puntual. Uso de la fórmula para calcular la deviación típica en lugar de la herramienta función*

E_8: […] ¿Para calcular la desviación típica debo obtener la varianza y calcular la raíz cuadrada?

P: No, hay una función. Explora […].

HDS 3.6. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la tarea*

P: […] Como vais vosotras, ¿se entiende?

E_9: Sí […].

P: […] ¿Cómo vais?

E_{10}: Estamos realizando los cálculos para las mujeres.

P: Bien […].

HDS 3.7. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para establecer el rango; el profesor sugiere la respuesta*

E_{11}: […] ¿Aquí se pone el signo igual?

P: Sí

E_{11}: ¿Y después?

P: Después vas a *función* y estableces el rango.

E_{11}: El rango es C2 a C61. Es que me dio resultado cuatro.

P: Coloca C2: C61 (El estudiante ha escrito C2; C61).

E_{11}: A no, ahora me da bien.

P: Se establece el rango colocando dos puntos.

E_{12}: Habíamos colocado punto y coma […].

HDS 3.8. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para interpretar conjuntamente la desviación típica y los promedios*

E_{13}: […] Después de obtener la desviación típica, ¿qué hacemos?

P: Ya habéis calculado los estadísticos. Bien, ahora se deben repetir los cálculos, pero separando las mujeres por un lado y los hombres por otro. Entonces, abran una nueva hoja, copien la matriz de datos y eliminen las filas de los hombres. Hagan lo mismo en una nueva hoja quitando las mujeres […].

HDS 3.9. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para establecer el rango; el profesor sugiere la respuesta*

E_{14}: […] Hemos calculado la desviación típica, nos ha salido eso.

P: Es que hay un error, lo habéis hecho mal. Suprime la fórmula, vamos repetirla. Escribe es igual, anda a *función*, tienes que establecer el rango desde la C4: C44.

E_{14}: Ya, había establecido mal el rango […].

HDS 3.10. *Interacción regulativa puntual. Uso de la fórmula para calcular la media en lugar de la herramienta función; conflicto para interpretar los promedios, dispersiones y propiedades estadísticas para dar respuesta a las cuestiones 1 y 2*

E_{15}: […] Esto, ¿cómo es?

P: ¿En qué parte van?, ¿están trabajando con todos los datos?, ¿qué cálculos han realizado?

E_{15}: Estamos calculando la media.

P: ¿Cómo lo van calcular?

E_{15}: La media es la suma de los valores dividida entre el total de las personas.

P: Puedes hacerlo así, pero hay una función. Si lo haces de esa forma debes escribir; =165/60. La herramienta función calcula de manera automática la media, la desviación típica y otros valores, aplíquenla para realizar los cálculos.

E_{15}: Después de esto, ¿qué más hay que hacer?

P: Deben hacer lo mismo con el grupo de las mujeres y con el grupo de los hombres, generando una nueva hoja […].

HDS 3.11. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para interpretar los promedios, dispersiones y propiedades estadísticas para dar respuesta a las cuestiones 1 y 2*

E_{16}: […] Ya hemos hecho los cálculos y ahora, ¿qué hacemos?

P: Una vez que ya habéis hecho los cálculos deben pasar a la hoja de Word y responder las preguntas. La estadística no es solo hacer cálculos y gráficos hay que interpretar los resultados […].

HDS 3.12. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la tarea; conflicto con el cálculo de las frecuencias relativas y con el manejo de la hoja Excel (determinación de posiciones decimales)*

P: […] ¿Cómo van aquí? Hay un problema con la fórmula (Figura D.20). Haber pincha en esta celda y escribe = G8/60 y presiona la tecla, *Enter*. Luego, repite la fórmula hacia abajo.

E_{17}: Bien, pero ahora, ¿cómo hago con los decimales?

P: Hace *clic* con el botón derecho en la celda, *formato de celdas,* selecciona *número* y señala el número de decimales. Como tiene que ser en porcentaje, vuele a la fórmula que escribiste en H9 y multiplica por 100 […].

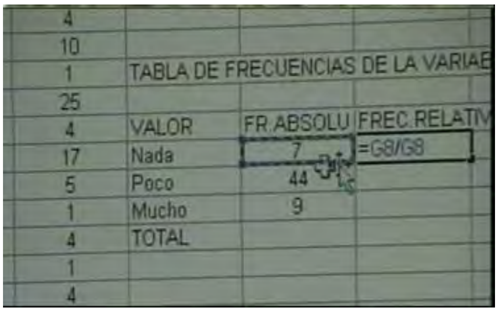


Figura D.20. Dificultad para calcular la frecuencia relativa mediante Excel

HDS 3.13. *Interacción regulativa dialógica (trabajan dos estudiantes). Conflicto para expresar las frecuencias relativas en porcentaje*

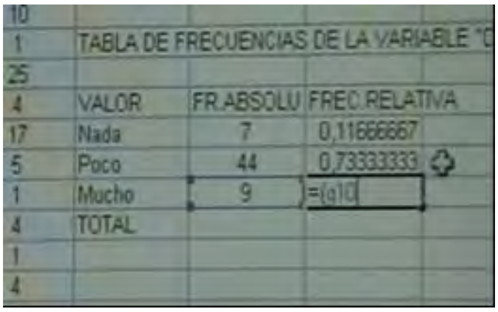


Figura D.21. Dificultad para representar la frecuencia relativa en porcentaje

HDS 3.14. *Interacción regulativa dialógica (trabajan dos estudiantes). Conflicto con el cálculo de las frecuencias relativas*

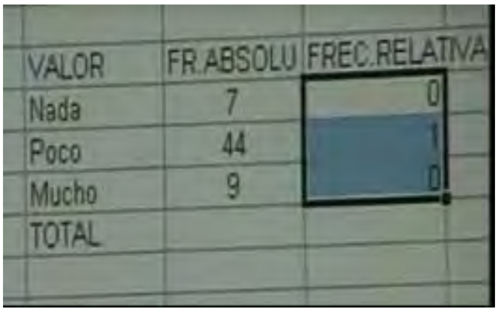


Figura D.22. Dificultad para calcular la frecuencia relativa

HDS 3.15. *Interacción regulativa magistral. Tabla de frecuencias relativas de la variable deporte*

P: […] Atended un momento, vamos a hacer la tabla de frecuencia de la variable deporte. En la primera columna pondremos la palabra *valor* y los valores *nada*, *poco* y *mucho*; en la siguiente columna, la palabra *frecuencias absolutas* y en la tercera; la palabra *frecuencias relativas*. Las frecuencias absolutas las escribiremos directamente, pero también se puede hacer con la *opción contar* de la herramienta *función*. ¿Cuántos hacen nada, poco y mucho deporte?

E_{18}: Nada, 7; poco, 44; mucho, 9.

P: ¿Cómo hacemos para calcular las frecuencias relativas? (los estudiantes no responden). Pablo, ¿cómo calculamos la frecuencia relativa?

Pablo: La frecuencia relativa, hay que… no, no lo sé.

P: La frecuencia relativa es igual a la frecuencia absoluta dividido por el total; es decir, =7/60. Obtenemos 0.11666667… Vamos a expresarlo en porcentaje, ya que está expresado en proporción. Para ello, tenemos que multiplicar por 100, escribiendo la fórmula = 0.11666667 * 100 con lo que se obtiene 11.666667… que corresponde al porcentaje de estudiantes que no hacen nada de deporte. ¿Cómo hacemos para disminuir el número de cifras decimales que aparecen después de la coma? (los estudiantes no responden). Se pincha sobre la celda en la que está el número, se hace *clic* con el botón derecho, seleccionamos *formato de celda*, seleccionamos la opción *número* y se determina el número de posiciones decimales […].

HDS 3.16. *Interacción regulativa magistral. Asignación de tarea*

P: […] Ahora hagan una tabla de frecuencias para los chicos y chicas y, exploren la herramienta gráfico para construir un diagrama de barras […].

HDS 3.17. *Interacción regulativa puntual. Conflicto en la construcción de gráficos (selección inapropiada del rango, no se incluyen títulos ni etiquetas)*

E_{19}: ¿Cómo hacemos para que nos aparezca nada, poco y mucho? No nos aparece (figura D.23).

P: A ver, repite de nuevo el procedimiento.

E_{19}: Selecciono (selecciona la columna donde están las tres frecuencias) y voy a *insertar gráfico*.

P: Te resulta el mismo gráfico, suprímelo. Selecciona las dos columnas, donde están los valores y donde están las frecuencias. Se deben seleccionar las dos columnas y luego insertar el gráfico […].

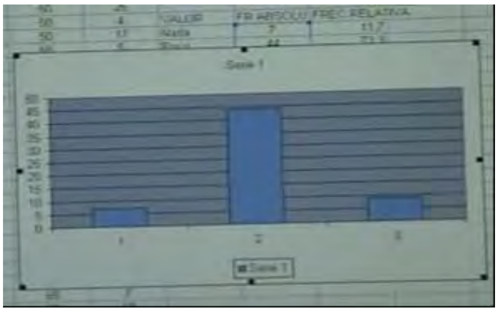


Figura D.23. Gráfico de barras variable deporte: selección inapropiada del rango, omisión de título y etiquetas

HDS 3.18. *Interacción regulativa puntual. Conflicto en la construcción de gráficos (se representan las frecuencias absolutas y relativas juntas); conflicto para comparar dos muestras de distinta cardinalidad (chicos y chicas)*

E_{20}: […] Nos ha salido un gráfico de dos colores. ¿Se debe graficar la frecuencia absoluta y relativa o las mujeres y los hombres?

P: Habéis mezclado datos.

E_{20}: Hemos cogido solo estos datos de aquí (han tomado las dos columnas frecuencias absolutas y relativas).

P: Deben eliminar una columna para elaborar un gráfico de frecuencias absolutas o uno de frecuencias relativas. No tomar las tres columnas.

E_{20}: Solo las dos primeras […].

HDS 3.19. *Interacción regulativa puntual. Conflicto para interpretar los promedios, dispersiones y propiedades estadísticas para dar respuesta a las cuestiones 1 y 2*

E_{21}: […] En cuanto a las diferencias, ¿hay que poner todas las diferencias? Es decir; ¿cuántos hombres y mujeres hay?

P: No, es un juicio global del grupo, para hacer ese juicio se puede interpretar la media.

E_{21}: ¿Y lo del valor representativo?

P: Se hace interpretando la desviación típica. Vamos a comparar los hombres con las mujeres. ¿La media de las mujeres es más representativa que la media de los hombres en cada uno de sus grupos? Esto se establece en función de la desviación típica, si la desviación típica es mayor es menos representativa

E_{21}: ¿Es mayor que la media?

P: No. Comparando las desviación típica de un grupo con otro.

E_{21}: ¿Por qué si es mayor la desviación, la media, es menos representativa?

P: Porque los datos están más dispersos.

E_{21}: Entonces, por ejemplo, aquí en las mujeres es 1.3 y en los hombres 0.8. ¿En las mujeres es más representativa o menos?

E_{21}: Menos, porque están más dispersos los datos.

P: La media de las mujeres es menos representativa que la media de los hombres porque la desviación muestra que los datos de los hombres están más concentrados que los de las mujeres. La media de los hombres es más representativa porque hay menos dispersión […].

HDS 3.20. *Interacción regulativa magistral. Indicaciones entrega del informe del proyecto alumno típico (evaluación formativa)*

P: […] Vamos a dar por terminada esta práctica. Recodaos que deben enviar el informe durante la semana […].

2. PROYECTO LANZAMIENTO DE DOS DADOS

Este proyecto fue implementado en dos sesiones de clase de tipo magistral. Las clases se caracterizan por ser el profesor quien presenta los temas facilitando la comprensión de los contenidos teóricos, guiando las reflexiones y moderando instancias de debates.

Los siguientes son los HDS seleccionados en cada sesión:

Sesión de clase 4 (una hora)

HDS 4.1. *Interacción regulativa magistral. Presentación y justificación del P2*

P: […] Vamos a tratar hoy de motivar y justificar las nociones de probabilidad, también a través de un proyecto. Primero voy a plantear el proyecto; en la siguiente fase, ustedes van tratar de dar respuesta a una tarea y luego, vamos a utilizar ese problema, esa situación de tipo realista para reflexionar sobre los conceptos probabilísticos básicos como: probabilidad, espacio muestral, distribución de probidad, orientado a dar respuesta a la toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre […].

[…] Pasamos a plantear la situación que es un problema basado en la experiencia de lanzar dos dados. Esta es la situación […] (se presenta el P2).

HDS 4.2. *Interacción regulativa magistral. Asignación de tarea (actividad 1) y entrega de indicaciones sobre su realización*

P: […] A continuación van jugar por pareja, uno va ser el jugador A y otro el jugador B. Las preguntas de la primera actividad son: "¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?" […].

[…] Vamos a simular dos dados. ¿Cómo lo hacemos? Tomad un folio y divídanlo en dos partes iguales, luego en cuatro y finalmente en ocho. Ahora recorten por los pliegues para obtener ocho papeles iguales. Escriban, en cada trozo de papel, un número de uno a seis para simular el primer dado; luego, repitan lo mismo para simular el segundo dado. Doblen los trozos de papel para que puedan tomar un número al azar […].

[…] Les daré una ficha por pareja donde vais a ir anotando los resultados y las reflexiones que hagáis. Comenzaos entonces a trabajar […].

SCD 4.3. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la tarea*

P: […] ¿Cómo vais?

E_1: Estamos simulando el lanzamiento

P: Seguid avanzando […].

P: […] Sabéis como se juega con los dados.

E_2: Sí, revolvemos y tomamos.

P: Pero cuidado son dos dados, seis por un lado y seis por el otro.

E_3: Vale.

P: Ustedes han mezclado todos los números pero, para que el experimento sea más realista, tienen que simular dos dados; seis números por un lado y seis por el otro […].

P: […] ¿Entendéis?

E_4: Sí.

P: Conviene que dobléis los papeles para que no veáis los números […].

HDS 4.4. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Dificultad con el espacio muestral del experimento (se justifica a partir de los resultados en que gana cada jugador y no de las sumas posibles para cada resultado)*

P: […] ¿Qué habéis puesto?

E_5: Es mejor ser B*,* porque lleva más probabilidades de ganar.

P: ¿Por qué?

E_5: Porque A tiene cuatro números y B tiene hasta 12.

P: Fíjense bien en el problema y traten de explicar lo realizado […].

HDS 4.5. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Dificultad con la ley empírica de los grandes números (se justifica en base a los resultados obtenidos de realizar el experimento 10 veces)*

P: […] ¿Qué prefieres ser jugador A o B?

E_6: Yo prefiero ser A.

P: ¿Por qué?

E_6: No lo sé explicar.

P: Hay que responder a las cuestiones y justificar las respuestas […].

P: […] ¿Cuándo gana uno y cuando gana otro? En total, ¿cuántas veces gana A y cuantas B*?,* ¿ya lo habéis calculado?

E_7: Sí, *A* gana en 21 ocasiones y B en 17.

P: Hay algún error porque la suma tiene que ser 36. Revísenlo […].

P: […] Aquí ya habéis puesto, ¿qué prefieren ser?

E_8: El jugador B.

P: Fíjense que la cuestión es la suma.

E_9: Si ya lo hemos puesto. En todos estos casos gana B y en estos gana A (en la mayoría de las simulaciones de los lanzamientos les salido que ha ganado B) […].

P: […] ¿Cómo vais aquí?

E_{10}: Casi siempre gana B.

P: ¿Tú crees que siempre va ganar B?

E_{10}: No siempre, pero casi siempre.

P: Bueno, ya veremos […].

P: […] ¿Cómo vais aquí?

E_{11}: Preferimos ser jugador A.

P: ¿Por qué?

E_{11}: Porque nos ha salido A […].

HDS 4.6. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Respuesta cuestión 1; Dificultad con el espacio muestral del experimento (representación errónea del espacio muestral, justificación a partir de los resultados en que gana cada jugador y no de las sumas posibles para cada resultado, dos sumas en distinto orden son considerados como un único suceso p. e, 5+1 y 1+5)*

P: […] Vamos a compartir y discutir las respuestas planteadas a la primera cuestión. Teresa, nos va explicar cómo han resuelto la tarea en su grupo (figura D.24). Teresa, ¿qué prefieres ser jugador A o jugador B?

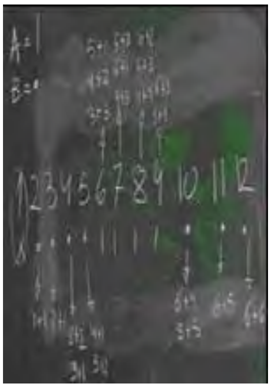


Figura D.24. Respuesta propuesta por una estudiante a la cuestión 1

Teresa: Prefiero ser el jugador A.

P: ¿Están de acuerdo los demás? ¿Qué prefieren ser jugador A o B?

E_{12}: No, es mejor ser B.

E_{13}: Yo opino que A (hay opiniones divididas).

P: ¿Por qué opinas que es mejor ser B? (se dirige a E_{12}).

E_{12}: Porque de 11 resultados posibles (se refiere al espacio muestral del experimento), el jugador A puede obtener 6, 7, 8 ó 9; entonces, tiene cuatro posibilidades. En cambio B tiene todas las demás posibilidades, que son siete.

P: ¿Y tú porque prefieres ser A? (se dirige a Teresa)

Teresa: Porque el jugador A tiene 11 posibilidades, que son las que he anotado arriba. En cambio B tiene 10, que son las que aparecen abajo (figura D.24).

P: ¿Cuántos casos posibles hay?

E_{14}: En total hay 36.

P: ¿En cuántos casos gana A y en cuántos B?

E_{14}: En 20 casos gana A y en 16 B […].

HDS 4.7. *Interacción regulativa magistral. Solución esperada cuestión 1*

P: […] Vamos a sistematizar este contenido. Aquí tenemos la suma de puntos (casos posibles) de lanzar los dos dados (tabla, D. 5). Tenemos los dos dados, dado uno y dado dos; si se lanzan los dados y se suman los puntos salen 36 casos posibles de sumar. Las sumas son estas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4,… El *espacio muestral* del experimento aleatorio de lanzar dos dados y sumarlos que es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Son las 11 posibilidades distintas de sumas […].

[…] En este experimento tenemos que ver de los 36 casos posibles, ¿en cuántos casos gana A y en cuántos gana B? Hay 20 casos en que gana A y 16 donde gana B. Hay más casos en los cuales gana A […].

Tabla D.5. Casos posibles del experimento lanzar dos dados y sumar los puntos

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

HDS 4.8. *Interacción regulativa puntual. Dificultad en la comprensión de que es mejor ser el jugador A; se ejemplifica con la probabilidad de obtener diferentes sumas*

E_{15}: […] No entiendo como lo ha hecho.

P: Estas son las sumas posibles, lo que ocurre es que no todos los números tienen la mismas probabilidad de salir; por ejemplo, el 6 puede salir con suma 3+3, 2+4, 5+1. ¿Cuántas veces sale la suma 6?

E_{15}: Cinco veces.

P: Es decir, no todos estas sumas tienen igual probabilidad, unas tienen más probabilidad que otras. Fíjate el 7 sale seis veces, en cambio, el 12 sale solo una vez. El jugador B tiene más casos favorables pero esa suma sale menos veces […].

HDS 4.9. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la cuestión ¿Es equitativo este juego?*

P: […] Veamos la segunda cuestión "¿Es equitativo este juego?"

E_{16}: No, el jugador A tiene más posibilidades de ganar.

P: ¿Cuál es la probabilidad de que gane A?

E_{16}: 20 partido en 36.

P: Ese cálculo es la probabilidad aplicando la regla de Laplace […].

HDS 4.10. *Interacción regulativa magistral. Institucionalización de la ley de los grandes números*

P: […] Veamos ahora que ha pasado con la simulación que hemos realizado. ¿Quién ha ganado más veces A o B?

E_{17}: Nos ha salido que gana A.

E_{18}: Nuestro resultado es que gana A.

E_{19}: A nosotros nos ha salido lo mismo. Gana A.

E_{20}: Gana A.

E_{21}: De acuerdo con nuestros resultados gana B.

P: Vamos a la pregunta siguiente "¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?"

E_{22}: No se volvería a repetir porque se trata de probabilidad y no hay una regla que permita determinar los resultados.

P: Bien, sin embargo, una de las cosas que ha sucedido en el experimento es que casi siempre ha ganado A. Tú dices que no se sabe exactamente lo que va pasar en 100 lanzamientos, porque es un experimento aleatorio y podría pasar que gane B. Bien. Imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces ¿qué pasará?

E_{22}: Ganará el jugador A.

P: Es decir, a largo plazo se espera que gane A, aunque en algún experimento pudiera suceder lo contrario.

E_{23}: Lo que sucede es que en 100 veces es muy poco, hay que hacer el experimento más veces.

P: Entonces, una cuestión importante es el tamaño de la muestra para que se cumplan las predicciones […].

HDS 4.11. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Cálculo de probabilidades; ejemplificación del concepto de variable aleatoria y de tabla de distribución de probabilidad*

P: […] Hemos visto que la probabilidad de que gane A es de 20 sobre 36. Esto es el 55% de probabilidad.

Ahora bien, podemos plantearnos cuál es la probabilidad de que salga cada uno de los resultados, por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea dos?

E_{24}: Una sobre 36.

¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 11?

E_{25}: 2 de 36.

P: ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 6?

E_{26}: 5 de 36.

P: Bien, entonces tenemos una variable aleatoria, la variable "suma de puntos". Podemos hacer una lista con los valores posibles de la variable: dos, tres, cuatro,… hasta 12 y al lado colocar la probabilidad correspondiente a cada valor, obteniendo así una *tabla de distribución de probabilidad* […].

HDS 4.12. *Interacción regulativa magistral. Sistematización de contenidos*

P: […] Aquí tenemos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria suma de puntos al lanzar dos dados (se muestra la tabla D.6 y la figura D.25). El valor de la variable puede ser 2, 3, 4,… hasta 12, como hemos visto antes. Tenemos la probabilidad expresada en proporción. La probabilidad como máximo puede valer "uno". En la tabla, la probabilidad está expresada en notación proporcional; si se multiplican dichos valores por 100 se obtiene la probabilidad expresada en porcentaje. Por ejemplo: 0.028 equivale al 2.8% lo que quiere decir que la probabilidad de que la suma sea dos es 2.8%; 0.167 equivale a 16.7% lo que significa que la probabilidad de que la suma sea siete es de 16.7%. Este objeto matemático es la distribución de probabilidad de la variable suma de puntos. También se muestra la gráfica de esta variable aleatoria […].

Tabla D.6. Tabla de distribución de probabilidad de la variable suma de puntos

VALOR	PROBABILIDAD
2	0.028
3	0.056
4	0.083
5	0.111
6	0.139
7	0.167
8	0.139
9	0.111
10	0.083
11	0.056
12	0.028

Figura D.25. Distribución de probabilidad variable suma de puntos

HDS 4.13. *Interacción regulativa magistral. Conflicto mediacional temporal (se entregan datos regidos en otro curso); institucionalización de contenidos (variable estadística y distribución de frecuencias)*

P: […] Aquí tenemos una tabla de distribución de frecuencias al hacer el experimento 100 veces (tabla, D.7). A un profesor o profesora le ha dado este resultado. Esto es lo que tendríamos que hacer con los resultados de cada uno de ustedes, juntarlos todos y obtener una tabla de frecuencias relativas del experimento realizado. Lo que pasa es que como no tenemos tiempo suficiente analizaremos lo que ha hecho este profesor o profesora. Fijaos en la diferencia que hay entre esta tabla y la anterior. Esta es una tabla de frecuencias, la suma dos ha salido dos veces, la suma seis ha salido siete veces. Esta tabla se origina a partir de una *variable estadística*. Es importante tener clara la diferencia entre distribución de frecuencias de una variable estadística, que es lo que efectivamente sale al realizar el experimento, mientras que lo anterior era la distribución de probabilidad de una variable aleatoria […].

[…] En este experimento, si bien es cierto, probabilísticamente tendría que haber ganado A, ha sucedido lo contrario […].

Tabla D.7. Frecuencias absolutas y relativas al lanzar dos dados

	SUMA DE PUNTOS	NUMERO VECES	FRECUENCIA RELATIVA
Gana B	2	2	0.02
	3	9	0.09
	4	12	0.12
	5	20	0.2
Gana A	6	7	0.07
	7	12	0.12
	8	14	0.14
	9	9	0.09
Gana B	10	8	0.08
	11	4	0.04
	12	3	0.03

HDS 4.14. *Interacción regulativa magistral. Asignación de tarea*

P: […] Ahora vamos a trabajar en la segunda actividad. Resuelvan y den respuesta a las preguntas cinco y seis. En el caso de la pregunta seis se pide que hagan un gráfico de barras adosadas comparando la distribución de frecuencias del experimento analizado y la distribución de probabilidad […].

[…] Dejo en la pantalla la tabla y de distribución de probabilidad del experimento *lanzar dos dados* ya que la necesitará para la actividad seis. En la hoja impresa tenéis la distribución de frecuencias relativas. Cuando grafiquéis tenéis que hacerlo en términos de proporción (cero a uno) o en porcentaje […].

HDS 4.15. *Interacción dialógica. Conflicto con la ley de grandes números; un estudiante más aventajado resuelve el conflicto*

E_{27}: […] En la pregunta "¿Qué ha ocurrido?", ¿es lo mismo que antes?

E_{28}: No.

E_{27}: ¿Por qué no? Igual ha salido que ha ganado B. Siempre ganará B.

E_{28}: Pero los experimentos son muy pocos […].

E_{29}: […] Dice; "Supongamos que en la siguiente tabla se han recogido los datos de 10 parejas de alumnos de la clase. ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B?"

E_{30}: Han ganado los B.

E_{29}: Luego dice "¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?"

E_{30}: Porque los experimentos son muy pocos […].

HDS 4.16. *Interacción dialógica. Conflicto para interpretar los resultados obtenidos por cada grupo al realizar el experimento 100 veces; un estudiante más aventajado resuelve el conflicto*

E_{31}: […] "¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?"

E_{32}: Es fácil. Aquí hay cuatro tiradas y aquí hay siete (se refiere a los resultados obtenidos por los jugadores A y B en el experimento simulado 100 veces). Ha ganado más veces el que ha tirado más veces.

E_{33}: ¿Por qué el que ha tirado más veces?

E_{32}: Porque mira aquí hay uno, dos, tres, cuatro veces y este tira siete veces.

E_{33}: Ese es el resultado que sale al sumar los dados […].

HDS 4.17. *Interacción regulativa puntual. Uso de frecuencias absolutas en lugar de frecuencias relativas al comparar la distribución de probabilidad y de frecuencias; el profesor explica la técnica correcta*

E_{34}: […] ¿Qué hacemos en la seis?, ¿escribimos las frecuencias en el eje vertical?

P: Deben hacer un diagrama de barras adosadas comparando las distribuciones. En el eje de la abscisa deben colocar las sumas y en la ordenada las frecuencias expresadas en proporción. La escala es desde el 0 al valor máximo.

E_{34}: ¿De 0 a 20?

P: De 0 a 0.25, o poco más. Vean las frecuencias relativas en las dos distribuciones […].

HDS 4.18. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto para construir el diagrama de barras adosadas; el profesor explica el procedimiento correcto*

P: […] Aquí hay un problema con el gráfico. Esto es un histograma, solo deben colocar dos barras juntas para comparar.

E_{35}: ¿Separamos las barras?

P: Sí, pero deben dibujar dos barras juntas para comparar cada frecuencia del experimento analizado con su respectiva probabilidad […].

HDS 4.19. *Trabajo autónomo. Conflicto para construir el gráfico de barras adosadas (se dibujan todas las barras separadas)*

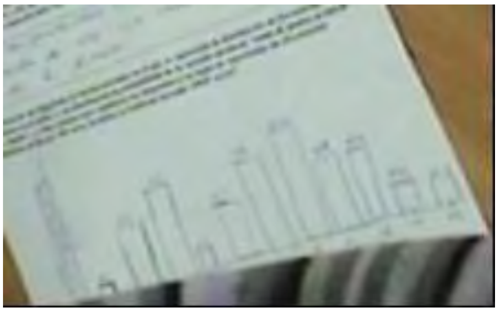


Figura D.26. Construcción errónea de las barras en el gráfico de barras adosadas

HDS 4.20. *Interacción evaluativa. Entrega de informes del proyecto (evaluación formativa)*

P: […] Poned los nombres a las hojas donde habéis registrado las soluciones y me las entregan. La próxima clase vamos a compartir los resultados propuestos por cada grupo […].

Sesión de clase 5 (dos horas)

HDS 5.1. *Interacción regulativa magistral. Objetivo de la clase*

P: […] Vamos a comenzar el trabajo de hoy. Continuaremos discutiendo la solución del proyecto compartiendo las soluciones que habéis dado […].

HDS 5.2. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Respuesta a la cuestión 1*

P: […] Ignacio, en la primera pregunta "¿Qué prefieres ser jugador A o B?", ¿qué habéis respondido?

Ignacio: Gana A y hemos puesto que el juego no es equitativo, ya que A tiene más probabilidades de ganar […].

HDS 5.3. *Interacción regulativa magistral. Solución esperada a la cuestión 1 (uso de tabla de doble entrada)*

P: Bien, ya hemos visto cómo podemos saber porque tiene más probabilidades de ganar el jugador A. Se hace una tabla de doble entrada con los *dados uno y dos*. Al lanzar los dados la suma de puntos puede ser 2, 3, 4,… hasta 12. Lo que ocurre es que para obtener la suma 6, 7, 8, ó 9 hay más casos a favor. Eso hace que las probabilidades de que gane A o B sean diferentes y en este caso, favorezcan al jugador A.

Ignacio: Si hacemos un diagrama de árbol, podemos ver también todos los casos.

P: Un diagrama en árbol permite formar los 36 casos posibles. Tenemos un punto, seis ramas para un dado. Para cada valor del dado hacemos otras seis ramas y sería los 36 casos posibles.

Después habéis hecho la simulación del experimento. Aquí tengo vuestros resultados, en este caso, sale que A ganó seis veces y B cuatro veces. El resultado salió de acuerdo a lo esperado, pero hemos visto también un ejemplo en el que esta situación no se dio […].

HDS 5.4: *Interacción regulativa magistral. Conexión del proyecto con el currículo escolar*

P: […] Este experimento lo puede hacer un maestro o maestra con estudiantes de primaria. ¿Pensáis que este proyecto podría ser comprensible por los niños de sexto curso?

E_1: Sí.

E_2: Es muy difícil.

P: Yo creo que sí, lanzar una dado, sumar los puntos, explorar un poco la situación,... Fijaros que el tema de casos posibles por casos favorables son reglas que aparecen en los textos de primaria. De modo que este proyecto o una versión más simple, como lanzar un solo dado, pueden ser razonables para trabajar con niños […].

HDS 5.5: *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Retroalimentación soluciones propuestas (se fija la atención en las soluciones correctas si aludir a errores); sistematización de contenidos*

P: […] Tengo aquí los trabajos realizados por ustedes durante la clase anterior. Veamos lo que ha respondido este grupo frente a la primera actividad: "¿Quién ha ganado más veces A o B?" Ha ganado A (respuesta del grupo). "¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?" Sí, porque A tiene la probabilidad de salir victorioso más veces. Aunque no tiene por qué ser así, ya que solo se trata de una probabilidad (respuesta del grupo). Bien. Se trata de una probabilidad, quiere decir que es un fenómeno aleatorio que puede tener fluctuaciones. Para la segunda actividad: "¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido?" Los datos recogidos son solamente probabilidades, lo cual quiere decir que no tiene por qué ganar siempre A (respuesta del grupo) […].

[…] En la última pregunta se pide construir un diagrama de barras adosadas. Este grupo lo ha hecho bastante bien, ¿por qué les pedía que hicierais un diagrama de barras adosadas y no un histograma? Porque la variable es discreta. Los histogramas son pertinentes para variables continuas y en ese caso las barras están pegadas unas junto a otras. En las variables discretas, como ocurre en esta caso, la suma puede ser dos, tres, etc. es pertinente un diagrama de barras y las barras van separadas. Solo se puede poner una barra junta a otra para comparar dos muestras o distribuciones […].

[…] Otro grupo que ha respondido bien es el de Sara, Elena y Sandra. Este grupo ha hecho el gráfico con dos colores; de color verde, está la distribución de frecuencias y de color rosado, la distribución de probabilidad. Se ve como la distribución de probabilidad es muy regular y la distribución de frecuencias no lo es tanto en el resultado de los 100 lanzamientos […].

[…] El grupo de Ignacio frente a la pregunta "¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10.000 veces?" Ha respondido: estarían más igualadas las dos gráficas. Aquí estamos en presencia de una propiedad muy importante del cálculo de probabilidades, que es *la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad. Es la ley de los grandes números* […].

HDS 5.6. *Interacción regulativa magistral. Conexión entre los contenidos estocásticos (ley de los grandes números) con aspectos socioculturales*

P: […] La ley de los grandes números es el fundamento de las compañías de seguros. Las compañías de seguro ¿cómo ponen las primas? Pues a base de recoger estadísticas de accidentes o de otros temas con lo cual tienen distribuciones de frecuencias, pero también tienen unos cálculos probabilísticos, de tal manera que prevén el comportamiento a largo plazo de los fenómenos que están manejando y ajustan la primas para no perder dinero, confiando en que las frecuencias relativas convergerán a las probabilidades […].

HDS 5.7. *Interacción regulativa magistral. Justificación empírica de la ley de los grandes números (incorporación de tecnologías); conexión del proyecto con el currículo escolar*

P: […] Para que una maestra o maestro pueda tratar de "convencer" a los alumnos de que es preferible ser el jugador A, a pesar del resultado negativo que ha obtenido al jugar 100 veces, a parte del razonamiento lógico o deductivo que hemos hecho estudiando las probabilidades de los sucesos "gana A", "gana B", podría utilizar un simulador que permita simular el experimento un número progresivamente más elevado de veces. En la dirección: http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=159 se encuentra un Apple con el que se puede simular el lanzamiento de dos dados. Hemos simulado aquí el lanzamiento de los dados 100 y 10.000 veces (figura D.27). Así se ve el comportamiento de la suma, en último caso la forma que tiene la frecuencia relativa es prácticamente igual que la distribución de probabilidad […].

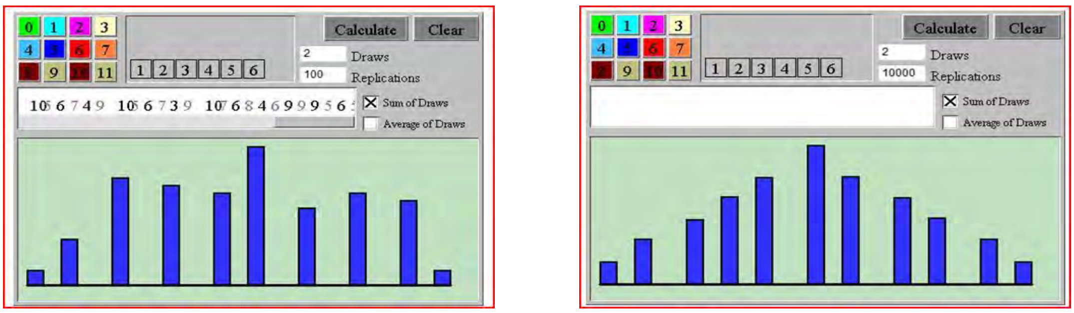


Figura D.27. Lanzamiento de dos dados 100 y 10.000 veces con simulador

[…] La figura siguiente (figura D.28) muestra la simulación del lanzamiento de una moneda con el simulador STATMEDIA. Se puede observar cómo para un número de experimentos menor que 100 la frecuencia relativa de obtener cara es menor que 0.5, y que a partir de ese valor, aproximadamente, pasa a ser mayor que 0.5 y puede haber una larga *racha* en que permanezca por encima de 0.5 […].

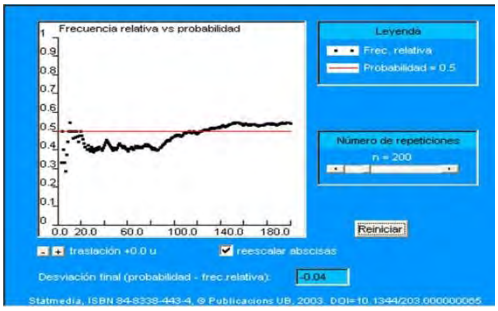


Figura D.28. Ley empírica de los grandes números (lanzamiento de una moneda)

HDS 5.8. *Interacción regulativa magistral. Sistematización de contenidos*

P: […] Vamos a reflexionar sobre, ¿qué conocimientos se han puesto en juego en la resolución del problema? Un experimento como este en realidad involucra todos los conocimientos probabilísticos elementales: (a) Representaciones, términos, expresiones; (b) Conceptos; (c) Procedimientos; (d) Propiedades y; (e) Tipos de justificaciones (argumentos) de propiedades y procedimientos como se observa en las siguientes diapositivas:

Tabla D.8. Conocimientos puestos en juego en el experimento

Concepto	Significado:
Experimento aleatorio Sucesos	Lanzamiento de dos dados y observar la suma de puntos
Espacio muestral	{2, 3, 4, 5, 6, 7,8 ,9 ,10, 11, 12}
Variable aleatoria	Símbolo que toma cualquiera de los valores del espacio muestral
Probabilidad	Mayor o menor posibilidad de que ocurre un suceso en un experimento

Concepto	Significado:
Distribución de probabilidad	Sistema formado por los valores de la v.a. y sus probabilidades
Juego equitativo	Situación competitiva en la que los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar
Variable estadística	Variable (símbolo) que toma los valores de la suma de puntos en la muestra de 100 experimentos
Distribución de frecuencias	Sistema formado por los valores de la v.e. y sus frecuencias

Procedimiento:	Significado:
Formación sistemática de las sumas posibles	Construcción del espacio muestral, tabla de doble entrada
Tabulación de frecuencias y probabilidades	Construcción de las distribuciones de frecuencias / probabilidades, expresadas numéricamente
Elaboración de diagramas de barras	Facilita la interpretación y comparación de las distribuciones de frecuencias y de probabilidades
Comparación de frecuencias y probabilidades en un gráfico cartesiano	Facilita reconocer las diferencias entre frecuencias y probabilidades

Propiedad	Significado:
Equiprobabilidad; simetría del dado	Condición necesaria para asignar probabilidades
Regla de Laplace: P = Favorables/Posibles	Cálculo de probabilidades de sucesos
P(A) = 20/36; P(B)= 16/36	Al compararlas se ve que el juego no es equitativo
Ley empírica de los grandes números	Permite estimar las frecuencias conociendo la probabilidad
La convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad es lenta y presenta fluctuaciones	Permite explicar diferencias entre frecuencias relativas y probabilidades

Argumento:	Significado:
1) Convención social (no hay razones para suponer que las caras no tengan simetría)	Justifica la equiprobabilidad
2) Deducción a partir de 1)	Justifica la regla de Laplace
3) Deducción a partir de 2)	Justifica el cálculo de las probabilidades de ganar A y B
4) y 5) Comprobación empírica con simulaciones	Justifica que A no haya ganado en la serie de 100 lanzamientos

HDS 5.9. *Interacción regulativa magistral. Indicaciones de estudio complementario*

P: […] El proceso de estudio de las nociones probabilísticas elementales iniciado en esta sesión presencial deberá complementarse con el estudio personal de la lección "Probabilidad" del texto de referencia para el curso (Godino y cols, 2004) y la realización de ejercicios complementarios, disponibles en el Tablón de Docencia. Este estudio personal será asistido por las sesiones de tutoría individualizada o grupal […].

HDS 5.10. *Interacción regulativa magistral. Asignación de tarea "lanzamiento de tres monedas"*

P: […] Vamos a hacer ahora el siguiente ejercicio: Al lanzar tres monedas, María gana 1 euro si se obtiene 0 o 1 caras. Juan gana un euro si se obtienen 2 ó 1 caras. Juan dice que el juego es justo porque solo hay 4 posibilidades y cada uno de ellos tiene ventajas con dos. María no está de acuerdo**.** (a) ¿Quién tiene razón? (b) ¿Cuál sería la cantidad de dinero que tiene que pagar Juan a María en el caso que este gane, para que el juego sea equitativo? […].

HDS 5.11. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con los posibles resultados de lanzar tres monedas (los resultados que aparecen en distinto orden se consideran como un único suceso); el profesor aclara el procedimiento correcto*

E$_3$: […] ¿Es lo mismo por ejemplo que salga *cara, cara, cruz* que *cruz, cara, cara*?

P: Lo que deben tener en cuenta es que se lanza una moneda, luego la segunda y después la tercera. Al lanzar la primera moneda pueden obtener cara o cruz, lo mismo pasa los demás lanzamientos. No serían cuatro casos posibles, son ocho posibilidades.

E$_3$: Es que es lo mismo: *cara, cara, cruz* que *cruz, cara, cara*.

E$_4$: ¿El orden influye?

P: Si, el orden influye, determina un nuevo caso.

E$_3$: Entonces, ¿no es lo mismo que sea *cara, cara, cruz* que *cruz, cara, cara*? Porque siguen siendo dos caras, que al final es lo que cuenta para responder la pregunta.

P: Sí, pero puede salir más veces uno que otro resultado […].

E$_5$: […] ¿Da igual que sea *cara, cara, cruz* que *cara, cruz, cara*?

P: Eso también influye, puesto que son tres monedas diferentes y por consiguiente lo que hay que ver es como se han dispuesto las tres monedas. Que salga cara en una moneda es distinto a que salga cara en la otra […].

HDS 5.12. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto para determinar la equidad en el juego; el profesor sugiere la respuesta*

E$_6$: […] ¿Cómo se hace para que el juego sea equitativo?

P: Para que sea equitativo, el que tiene más probabilidades debería pagar más.

E$_6$: Entonces el que gana en cuatro casos que pague un euro y el que gana seis un euro con cincuenta céntimos.

P: Bien. Si la probabilidad de María es 4/8 lo multiplico por 1.5. Entonces eso tiene que ser igual a la probabilidad que tiene Juan que son 6/8 por 1.

E$_7$: No es al revés.

P: Lo que gana María por su probabilidad debe ser lo mismo que lo que gana Juan por su probabilidad […].

HDS 5.13. *Interacción regulativa magistral/evaluativa. Respuesta a la tarea Lanzamiento de tres monedas*

P: […] Vamos a atender a lo que ha hecho Elena en la pizarra (figura D.29)

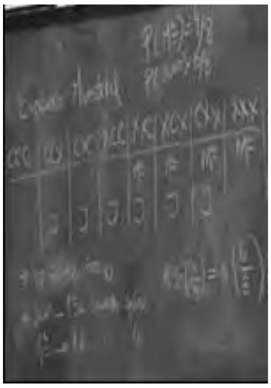


Figura D.29. Respuesta de Elena a la tarea lanzamiento de tres monedas

Elena: Hay 8 posibilidades que son las señaladas: CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX y XXX. Las posibilidades de que gane Juan son las señaladas con la letra *J* y corresponden a 6 posibilidades; las posibilidades de que gane María son las señaladas con la letra *M* y corresponden a 4 posibilidades. Por lo tanto, la probabilidad de que gane Juan es 6 sobre 8 y la probabilidad de que gane María es de 4 sobre 8. Entonces, el juego no es equitativo, porque Juan tiene más posibilidades de ganar que María. Para que el juego sea equitativo, Juan tendría que pagar más; 1.5 euros cada vez que pierda y María un euro […]

HDS 5.14. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto para determinar la equidad en el juego; una estudiante señala cuánto debe pagar cada jugador y otra, sugiere el uso la regla de tres*

E$_8$: ¿Podrías explicar de nuevo como haces para que sea equitativo?

Elena: Como vemos que el juego no es equitativo, porque Juan tiene más posibilidades de ganar que María; para hacer que el juego sea justo tendría Juan que pagar 1.5 euros y María un euro. Si se multiplica 1.5 * 4/8 y 1 * 6/8 se obtiene 6=6 (figura D.30).

Figura D.30. Justificación de Elena respecto a la equidad en el juego

E$_8$: Pero ¿cómo has hecho para calcular que Juan debe pagar 1.5 euros?

E$_9$: Tenemos que 4 es a 1 euro. Luego 6 es a *x*. Al resolver nos da 1.5 (figura D.31).

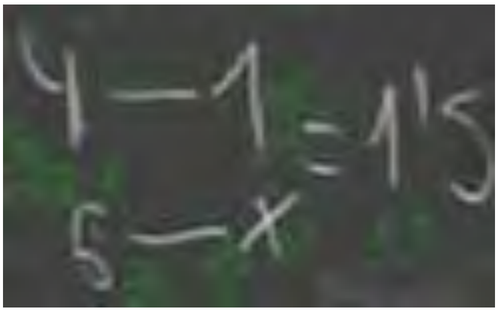


Figura D.31. Justificación de E$_9$ respecto a la equidad en el juego

HDS 5.15. *Interacción regulativa dialógica. Explicación de un procedimiento mediante ecuaciones para resolver la tarea por parte del profesor*

P: […] Aquí se ha hecho una regla de tres. Otra cuestión es pensar que Juan ponga dos euros ¿cuánto tendría que poner María? en realidad es una ecuación. Lo que hay que igualar es que la esperanza matemática para ganar el juego sea la misma. La esperanza matemática en el juego es igual al producto de lo que se apuesta por la probabilidad de ganar; por lo tanto, lo que apuesta María por su probabilidad debe ser igual a lo que apuesta Juan por su probabilidad. Lo que tenemos aquí es una ecuación con dos incógnitas; para resolver, asignamos un valor a uno y se despeja el otro. Puede ser uno o más euros a María y se calcula el valor para Juan […] (figura D.32).

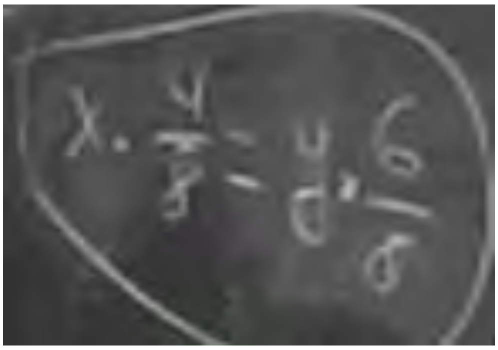


Figura D.32. Justificación del profesor a la equidad en el juego

HDS 5.16. *Interacción regulativa magistral. Asignación de tarea "Probabilidad de votar"*

P: […] Vamos a realizar algún ejercicio más. Tomen nota de este ejercicio: El 85% de los votantes de una ciudad acude a las elecciones. En una familia donde hay tres personas con edad de votar, ¿cuál es la probabilidad de que las tres hayan votado? […].

HDS 5.17. *Interacción regulativa dialógica. Dificultad para resolver la tarea; el profesor sugiere representar el problema mediante un diagrama de árbol*

E_{10}: […] ¿Qué cálculos hacemos?

P: Un forma de resolver es plantear un diagrama en árbol para ver las posibilidades.

E_{10}: ¿Cuándo se debe usar un diagrama en árbol?

P: Siempre que hay un problema por etapas, ayuda representarlo mediante un diagrama en árbol […].

HDS 5.18. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con el uso del algoritmo para calcular la probabilidad; el profesor explica la fórmula correcta*

E_{11}: ¿Esta es la fórmula?

P: ¿Cuál?

E_{11}: La probabilidad de que el primero vote por su probabilidad de votar, sabiendo que ha votado; más la probabilidad de que vote el segundo sabiendo que ha votado por la probabilidad de que vote.

P: No, es más sencillo. Lo que se pregunta es la probabilidad de que los tres voten. El suceso VVV es el producto de las tres probabilidades. Que vote el primero, es tanto; que vote el segundo, es tanto; como es siempre la misma es: 0.85 * 0.85 * 0.85 […].

HDS 5.19. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la tarea; conflicto con la representación en diagrama de árbol y con el algoritmo para calcular la probabilidad (en el último caso el profesor explica la fórmula correcta)*

P: […] ¿Cómo van?

E_{12}: Me ha dado este resultado.

P: Es un resultado un poco extraño. Representen la situación en un diagrama de un árbol, las tres posibilidades […].

P: […] ¿Carmen lo has hecho ya?

Carmen: Sí, se multiplica el 85% tres veces. Se supone que los tres tienen la misma probabilidad de votar.

P: Es el producto de las tres. Bien […].

P: […] ¿Cómo lo habéis resuelto?

E_{13}: Bueno como es 0.85. Multiplico los tres.

P: ¿No habéis hecho el diagrama?

E_{13}: No, pero ¿se debe hacer?

P: Es bueno que lo hagan.

P: […] ¿Habéis resuelto el ejercicio?

E_{14}: Sí, es 2.5

P: 2.5, ¿por qué?

E_{15}: 0.85 x 3

P: Es el producto de las probabilidades que tiene cada uno […].

HDS 5.20. *Interacción regulativa magistral. Solución esperada a la tarea Probabilidad de votar por parte del profesor*

P: […] Vamos a revisar el ejercicio. Mary Carmen ha hecho este diagrama (figura D.33).

Figura D.33. Solución de Mary Carmen a la tarea probabilidad de votar

La situación es, se saca una persona al azar, puede votar o no votar. ¿Cuál es la probabilidad de que vote? Se registra como dato, el 85%. Usualmente la probabilidad se expresa con un número entre cero y uno, como una proporción. En la práctica se puede decir que es de un 85%, aunque en realidad es más correcto darle un número entre cero y uno. La notación de porcentaje está más relacionada con las frecuencias relativas. Entonces 0.85 será la probabilidad de que esa persona sacada al azar vote y 0.15 que no vote; no votar, es el suceso contrario a votar y como el espacio seguro es uno, no votar es 0.15.

Se toma una segunda persona al azar y puede ocurrir que vote o no vote y lo mismo sucederá con la tercera; puede votar o no votar. Entonces el suceso es un suceso compuesto, en el que se pide sacar tres personas al azar. En este caso la solución es el producto de las tres probabilidades. Es una regla del producto de probabilidades […].

HDS 5.21. *Interacción regulativa magistral. Finalización de la clase; solicitud de recursos para la próxima sesión (ordenador)*

P: […] Dejamos hasta aquí la clase por hoy. La próxima clase debéis traer los portátiles ya que vamos a trabajar con Excel […].

3. PROYECTO EFICACIA DE UN ENTRENAMIENTO DEPORTIVO

Este proyecto fue implementado en una sesión práctica donde se incorporó el uso del programa Excel. Al igual que en la "práctica uno", el grupo completo se dividió en tres subgrupos, quienes trabajaron en equipos de tres o cuatro estudiantes en la realización de las actividades propuestas. A continuación se presentan las unidades de análisis que han sido seleccionadas.

Sesión de clase 6 (una hora y media de seminario de prácticas)

HDS 6.1. *Interacción regulativa magistral. Presentación del proyecto; entrega de indicaciones generales*

P: […] Vamos a iniciar la práctica de hoy descargando el fichero de datos. Trabajaremos en las preguntas utilizando la hoja Excel. Seguramente no tendremos tiempo para terminar la práctica en esta sesión por lo cual durante la semana, trabajando en equipo, deben completar el trabajo iniciado […].

[…] Este es el fichero de la práctica, ¿que se pide aquí?, la idea es utilizar la estadística descriptiva básica, promedios y desviaciones típicas, para tomar una decisión sobre unos datos. Este es el experimento […] (se presenta el P3).

[…] Para poder hacer los cálculos es necesario preparar los datos en la hoja Excel, ya sabéis de la práctica anterior como se hace […] (se comienza a trabajar en las cuestiones planteadas).

HDS 6.2. *Interacción regulativa puntual/evaluativa. Comprensión de la cuestión 1; conflicto para determinar la efectividad del entrenamiento (comparación de valores aislados)*

P: […] La pregunta; "¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?", ¿cómo la podemos interpretar?

E_1: Hay que ver si los tiempos son mejores en diciembre.

P: Ver si los tiempos han cambiado. Pero claro si miramos los datos veremos que algunos chicos han cambiado y otros no, incluso alguna ha empeorado; por ejemplo, hay un estudiante que ha pasado de 3.3 a 5.4 pero hay también alguien que de 5 ha bajado a 4.5. Entonces, ¿cómo se toma una decisión?

E_2: Ver el mejor tiempo.

P: Hay que tener en cuenta que la pregunta dice si ha sido efectivo el entrenamiento y no si ha sido efectivo para una chica o chico específico. Para ver si globalmente ha sido efectivo, ¿qué hay que hacer?

E_3: Comparar los resultados […].

HDS 6.3. *Interacción regulativa magistral. Se sugiere el uso de promedios y dispersiones para determinar la efectividad del entrenamiento por parte del profesor; se explica el significado de la dispersión y el tratamiento de los valores atípicos*

P: […] Comparar los resultados globalmente, con lo cual hay que resumir la distribución de frecuencias. Hay que resumir los datos estadísticos, sin perder de vista que una distribución de frecuencias está caracterizada por un dato que es el promedio y otro que es la dispersión. ¿Qué significa la dispersión? es posible que en septiembre los chicos fuesen todos muy homogéneos, que están alrededor del promedio; pero que en diciembre los datos sean más dispersos, lo cual podría significar que el tratamiento ha sido efectivo para el grupo, pero a la vez, originar que los estudiantes que eran lentos sean más lentos o que los que eran rápidos sean más rápidos. De modo que para comparar dos distribuciones se requiere comparar promedios y dispersiones y de ese modo emitir un juicio sobre qué ha mejorado y qué ha empeorado.

Después viene un análisis de los sujetos atípicos. Un sujeto atípico es aquel que se separa bastante de su grupo, por ejemplo vemos una chica que tiene 9.9. Estos sujetos atípicos en un estudio estadísticos hay que considerarlos aparte, incluso es bueno quitarlos porque está afectando al grupo […].

HDS 6.4. *Interacción regulativa dialógica. Uso de la fórmula para calcular la media en lugar de la herramienta función*

E_4: […] ¿Calculamos la suma y obtenemos la media?

P: Tú tienes que tomar la decisión, ¿ha sido efectivo el entrenamiento? Para eso, ¿qué hacemos? Se trata de comparar dos distribuciones; tiempo en septiembre y en diciembre. Como son dos distribuciones tenemos que comparar promedios; la media aritmética del tiempo en septiembre y luego en diciembre y, podemos concluir si hay o no diferencias […].

HDS 6.5. *Interacción regulativa dialógica. Dificultad para establecer el rango; el profesor explica el procedimiento correcto*

E_5: […] ¿Tenemos que obtener la media de septiembre por un lado y la media de diciembre por el otro? A la hora de sacar la fórmula para la media no nos resulta bien.

P: Deben considerar la columna de septiembre y tomar las filas que corresponden.

E_5: En eso tenemos problemas.

P: El primer dato, ¿dónde está?

E_5: En la celda *A1.*

P: Y el último dato, ¿en qué celda está?

E_6: En *A39.*

P: Deben colocar *A1:A39* que es el rango al que hay que aplicar los cálculos […].

HDS 6.6. *Interacción regulativa dialógica. Uso de la fórmula para calcular la media en lugar de la herramienta función; el profesor explica el procedimiento correcto*

E_7: […] Para dividir, ¿cuál es la fórmula?

P: Para dividir se puede usar la barra, pero si lo que quieren hacer es calcular la media aritmética lo pueden hacer con la herramienta *función.*

E_7: Claro, lo que queremos es calcular la media.

P: Vayan a *insertar, función, promedio* y comprueben que el rango corresponde a los datos que quieren seleccionar. Como están intentando comparar las distribuciones de hombres y mujeres, interesa comparar también las dispersiones; una medida de dispersión es la desviación típica, este valor se puede calcular con la herramienta *función* […].

HDS 6.7. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto para interpretar conjuntamente medias y dispersiones (desviaciones típicas); el profesor explica la forma de interpretar ambos estadísticos*

E_8: […] Ya hemos hecho la desviación típica y la media, ¿hacemos las gráficas?

P: El problema no trata de solo hacer cálculos, sino de interpretar cálculos para resolver el problema. En los datos de chicos y chicas, todos juntos, ¿qué ha pasado?

E_8: Ha bajado.

P: ¿Ha empeorado o ha mejorado?

E_8: Ha mejorado.

P: También tienen que interpretar la dispersión.

E_8: Eso no lo entiendo.

P: 1.02 y 1.00 son las desviaciones típicas.

E_8: ¿Qué es la desviación típica?

P: La desviación típica es un indicador de la dispersión.

E_8: ¿Es la diferencia entre el máximo y el mínimo?

P: No, la diferencia entre el máximo y el mínimo es el rango o recorrido que es también una medida de dispersión.

E_8: Ah, no es eso.

P: La desviación típica, como ya ha sido explicado en las clases de teoría, es otra medida de dispersión más estable que el recorrido. En este caso se ha calculado y es 1.02 y 1.00, es prácticamente lo mismo.

E_8: ¿Y los decimales?

P: Se puede redondear, son demasiados decimales, pueden usar dos o tres decimales. Entonces hay una diferencia importante porque han ganado poco más de un segundo, según el promedio. En cambio en la desviación típica prácticamente no hay diferencia. Después del entrenamiento podría haber pasado que los alumnos estuvieran más dispersos; es decir, que hubiera alumnos que corren muy de prisa o que se hayan hecho más lentos. Si vemos que la diferencia entre el que más corre y el que menos corre es pequeña hay poca dispersión y el entrenamiento podría haber originado que se reduce o que aumenta la dispersión […].

HDS 6.8. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto para interpretar conjuntamente medias y dispersiones (desviaciones típicas); el profesor se centra en las medias sin aludir a la desviación típica*

E_9: […] Hemos calculado la media y la desviación típica

P: ¿Ha sido efectivo el entrenamiento? ¿Qué creen?

E_9: Que sí.

P: Claro, la media que era 5.4 ha pasado a 4.3.

E_9: ¿Y eso se explica?

P: Claro, pueden decir como la media ha disminuido tantos segundos podemos afirmar que el entrenamiento a resultado efectivo. Pueden calcular la diferencia con la hoja Excel.

E_9: Eso lo hacemos con la calculadora.

P: Con la hoja Excel lo pueden hacer.

E_{10}: ¿Se puede calcular en fila en lugar de en columnas?

P: Si, también. Se posesionan en una celda y escriben ahí la fórmula […].

HDS 6.9. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con el significado y procedimiento de cálculo de valor atípico; se clarifican ambos contenidos, además de la forma de interpretar la desviación típica*

E_{11}: […] Cuando se refiere a atípico, se refiere a las personas que…

P: ¿Ya habéis resuelto las otras preguntas?

E_{11}: Hemos hecho las restas de las medias y hemos visto que las chicas han mejorado más que los chicos.

P: ¿Y habéis interpretado las dispersiones? Veo que habéis calculado las desviaciones típicas. ¿Han sido capaces de interpretarlas? Por ejemplo, para el caso del grupo completo la desviación típica ha salido

1.03 y 1.00. Prácticamente no ha cambiado, quiere decir que el entrenamiento no ha tenido un efecto sobre la dispersión de los datos. Bien, me estaban preguntando por el alumno atípico.

E_{11}: ¿Se refiere a las personas que corren poco?, o a las personas que corrían y han defendido su marca.

P: Los valores atípicos se ven dentro de una distribución. Por ejemplo, ¿en septiembre había estudiantes atípicos?, ¿en diciembre había estudiantes atípicos? Bien por que corrían mucho o porque corrían poco. Esa es la situación. Luego veremos si el entrenamiento ha tenido un efecto en que los alumnos atípicos ha mejorado; por ejemplo, veíamos a una chica que tenía 9.9 pasó a 4.5; es decir, el entrenamiento ha sido muy efectivo para mejorar el rendimiento de este alumno atípico.

E_{11}: ¿A partir de cuanto se considera atípico?

P: Vamos a considerar como atípico un valor cuando está fuera del intervalo: media ± dos veces la desviación típica (M ± 2 x DT) […].

HDS 6.10. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con la interpretación de la desviación típica y con el significado de valor atípico; el profesor aclara ambos contenidos*

E_{12}: […] ¿La desviación típica para que pregunta es?, ¿para la pregunta cinco?

P: No, puede ser aplicada para la primera pregunta. Para saber si ha sido efectivo el entrenamiento hay que comparar dos distribuciones; y la comparación de distribuciones se debe hacer considerando los promedios y también la desviación típica, que es un indicador de la dispersión. De tal manera que el entrenamiento puede no haber mejorado en promedio; pero sin embargo, puede haber mejorado la dispersión, es decir, son todos los chicos más homogéneos.

E_{12}: Entonces aparte de la media tenemos que tener en cuenta la desviación típica.

P: Sí, tienen que calcular la desviación típica y saber interpretarla.

E_{12}: ¿Y en la pregunta cinco?

P: Esta pregunta se refiere a ver si hay algún alumno atípico. Por ejemplo; hay una estudiante que estaba en un tiempo de 9.9. Ella es una estudiante atípica. También hay una estudiante que corre muy rápido, su tiempo es 3.3, también es un sujeto atípico. Para saber cuándo un estudiante es un sujeto atípico se debe usar el criterio expuesto en la pregunta cinco. Se necesita tener un intervalo; si el alumno está dentro del intervalo se va a considerar normal y si está fuera, lo consideraremos atípico. Entonces es necesario calcular los extremos, extremo uno y extremo dos. El extremo uno es la media más dos veces la desviación típica y el extremo dos es la media menos dos veces la desviación típica […].

HDS 6.11. *Interacción magistral/evaluativa. Dificultad con el ordenamiento de datos en Excel; el profesor explica este contenido y justifica su aplicabilidad para identificar valores atípicos*

P: […] ¿Sabéis ordenar los datos en orden ascendente o descendente?

E_n: No. Varios alumnos responden.

P: Si se quiere tener los datos ordenados de menor a mayor se marcan las dos columnas; género y tiempo y se selecciona *datos* y luego *orden ascendente.*

E_{13}: ¿No se pueda marcar una sola columna?

P: Si se marca una sola columna tendremos problemas. Voy marcar una sola columna y veremos lo que pasa. Como puedes ver arroja un mensaje de error […].

P: […] ¿Para qué es necesario esto? Para identificar fácilmente los sujetos atípicos, si se tienen ya los intervalos calculados mediante la fórmula M ± 2 x DT […].

HDS 6.12. *Interacción regulativa magistral. Tablas de frecuencias tiempos chicos y chicas en septiembre y diciembre (elementos de su construcción); asignación de tarea (cálculo de frecuencias relativas y construcción de gráficos); comparación de distribuciones de distinta cardinalidad; conflicto mediacional-temporal (entrega de tablas de frecuencias parcialmente construidas)*

P: […] Atended un momento. Vamos a hablar del uso de histogramas para hacer una comparación gráfica de dos distribuciones; los tiempos de los chicos y las chicas. Como son 60 valores de una variable continua, que es el tiempo, tenemos que agrupar los datos en intervalos de clase. Yo voy a dar las tablas de frecuencias con los datos ya agrupados; es fácil de hacer, se define un criterio para determinar los intervalos y se ve cuantos sujetos tienen un tiempo en cada intervalo. Yo voy a dar las tablas ya hechas para que tengan tiempo de explorar posibles gráficos que ayuden a comparar las distribuciones. Para la variable "tiempo en septiembre", yo he definido aquí unos intervalos y he puesto las marcas de clase, ya sabéis que cuando se hacen intervalos se dice: alumnos que corren entre dos y tres, no hay ninguno; entre tres y cuatro, hay uno. Pero fijaos que lo que se pone aquí son las marcas de clase (señala la columna de las marcas de clase) que es el punto medio de cada intervalo. Entonces, yo doy aquí los intervalos que he definido y aquí he puesto las frecuencias de chicos y las frecuencias de chicas hay 21 chicos y 39 chicas. Estas son frecuencias absolutas, pero para comparar estas dos distribuciones no podemos trabajar con las frecuencias absolutas, porque las cardinalidades son distintas. Tenemos que pasar las frecuencias absolutas a frecuencias relativas. Entonces, en las columnas de la derecha, vais a calcular las frecuencias relativas, expresadas en porcentajes, para los chicos y las chicas en septiembre y en diciembre […].

P: […] Después de calcular las frecuencias relativas debéis explorar también que gráficos podrían utilizar, de la hoja Excel, que faciliten la comparación global de esas distribuciones […].

HDS 6.13. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con el uso de la herramienta Excel (determinación de posiciones decimales); el profesor explica la forma de definir el número de posiciones decimales*

E_{14}: […] Me sale cero decimales.

P: Tienes seleccionada la celda sin decimales. Marca la celda, haz *clic* con el botón derecho anda a *formato de celda* y determina el número de posiciones decimales […].

HDS 6.14. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con el etiquetado de tablas de frecuencias; el profesor sugiere la respuesta*

E$_{15}$: […] ¿Cuál es título de las columnas donde va la frecuencia relativa?

P: Podéis colocar porcentaje, chicos y porcentaje, chicas […].

HDS 6.15. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con el cálculo de las frecuencias relativas; el profesor explica la fórmula*

E$_{16}$: […] ¿Que hay que escribir aquí?

P: Hay que escribir la fórmula: igual a la frecuencia de esta celda dividida en 21 y eso multiplicarlo por 100 […].

E$_{17}$: […] No me sale.

P: La frecuencia relativa es el valor de cada celda dividido por el total de la columna, en este caso 21.

E$_{17}$: 21 dividido entre cero.

P: No, al revés. Cero dividido entre 21 y multiplicado por 100 […].

HDS 6.16. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con la construcción de gráficos; el profesor orienta el trabajo de los alumnos*

E$_{18}$: […] Después de obtener las frecuencias relativas, ¿qué hago?

P: Trata de hacer algún grafico comparativo de las frecuencias relativas, chicos y chicas, en septiembre. Eso te va permitir observar si hay diferencia en septiembre entre chicos y chicas.

E$_{18}$: El gráfico de columna o el de líneas.

P: Puede ser el gráfico de columnas agrupadas. En el eje de la abscisa deben aparecer las marcas de clase y en la ordenada los porcentajes […].

HDS 6.17. *Interacción regulativa dialógica. Conflicto con la construcción de gráficos (se grafican las marcas de clase y las frecuencias en el eje de abscisa); se incentiva un trabajo exploratorio*

E$_{19}$: […] Me han salido graficadas las marcas de clase (figura D.34).

P: Marca solo las columnas de frecuencias relativas.

E$_{19}$: Ahora está bien.

P: Bueno, ahora las barras están bien; el eje de ordenada está bien. Tienes que mejorar el eje de abscisa, explora para ver si logras que te aparezcan ahí las marcas de clase […].

TIEMPO EN SEPTIEMBRE:				
MARCA	Chicos FRECUEN.	Chicas FRECUENC.	fr% Chicos	fr%Chicas
2,5	0	0	0	0
3,5	1	1	4,8	2,6
4,5	9	11	42,9	28,2
5,5	9	23	42,9	59,0
6,5	2	2	9,5	5,1
7,5	0	0	0,0	0,0
8,5	0	0	0,0	0,0
9,5	0	2	0,0	5,1
TOTAL	21	39	100	100

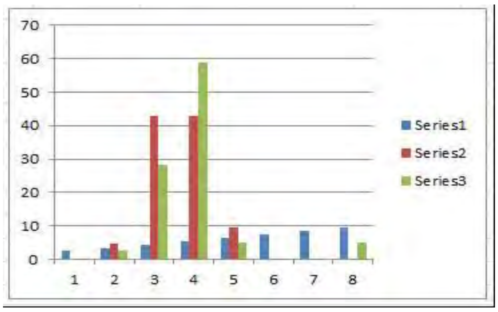


Figura D.34. Error en la construcción del gráfico

HDS 6.18: *Interacción regulativa magistral. Indicaciones para la entrega del informe del proyecto (evaluación formativa)*

P: […] Entonces hemos quedado en que ustedes van a seguir trabajando la siguiente fase en quipo y me envían el archivo […].

ANEXO E

VARIABLES Y VALORES DEFINIDOS PARA EL ANÁLISIS DE LOS PROYECTOS Y DE LA PRUEBA EVALUATIVA FINAL

El presente anexo contiene las variables, valores y descriptores definidos para evaluar los ítems de los dos proyectos que fueron empleados como instrumentos de recogida datos y de la prueba evaluativa final. Para analizar la información hemos definido tres variables. (1) "grado de corrección" (2) "tipo de respuesta" y (3) "tipo de errores" como se ha descrito en la metodología (capítulo 2). El anexo está estructurado en tres secciones: en el apartado 1 se incluyen, para cada variable, los valores y descriptores del proyecto "Alumno típico"; en el apartado 2, los correspondientes al proyecto "Eficacia de un instrumento deportivo"; y en la sección 3, los de la prueba sumativa final.

1. PROYECTO ALUMNO TÍPICO

1.1. **Ítem 1: ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase?**

1.1.1. *Variable "género"*

- Grado de corrección

Tabla E.1. Valores y descriptores grado de corrección ítem 1 (variable género)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico mediante la moda (mujer). Resume los datos en tabla de frecuencia y gráficos. ✓ Reconoce el estudiante típico mediante la moda. Resume los datos en tabla de frecuencias sin emplear gráficos.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico sin justificar la respuesta. ✓ Resume los datos en tablas de frecuencias y gráficos o solo en tablas de frecuencias sin dar respuesta a la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce el estudiante típico ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.2. Valores y tipo de respuesta ítem 1 (variable género)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la moda resumiendo los datos en tabla de frecuencias y gráfico (s).
	2	Uso de la moda resumiendo los datos en tabla de frecuencias.
	3	Identificación del alumno típico sin justificar la respuesta.
	4	Reducción de los datos en tabla de frecuencias y/o gráficos sin responder la pregunta.

1.1.2. *Variable "deporte"*

- Grado de corrección

Tabla E.3. Valores y descriptores grado de corrección ítem 1 (variable deporte)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico mediante la moda (poco deporte). Resume los datos en tabla de frecuencia y gráficos. ✓ Reconoce el estudiante típico mediante la moda. Resume los datos en tabla de frecuencias sin emplear gráficos. ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la mediana (poco deporte).
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico sin justificar la respuesta. ✓ Resume los datos en tablas de frecuencias y gráficos o solo en tablas de frecuencias sin dar respuesta a la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce el estudiante típico ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.4. Valores y tipo de respuesta ítem 1 (variable deporte)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la moda resumiendo los datos en tabla de frecuencias y gráfico (s).
	2	Uso de la moda resumiendo los datos en tabla de frecuencias.
	3	Uso de la mediana.
	4	Identificación del alumno típico sin justificar la respuesta.
	5	Reducción de los datos en tabla de frecuencias y/o gráficos sin responder la pregunta.

1.1.3. *Variable "número de hermanos"*

- Grado de corrección

Tabla E.5. Valores y descriptores grado de corrección ítem 1 (variable número de hermanos)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la mediana (2.5). Argumenta

	el uso de mediana en lugar de la media. ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la mediana. No alude a la forma de la distribución ni a los valores atípicos.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la media (2.75). ✓ Calcula la mediana y/o la media, no interpretando o interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce el estudiante típico ni calcula estadísticos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.6. Valores y tipo de respuesta ítem 1 (variable número de hermanos)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la mediana teniendo en cuenta la forma de la distribución y/o la presencia de valores atípicos.
	2	Uso de la mediana sin argumentar su uso en lugar de la media.
	3	Uso del valor exacto de la media.
	4	Cálculo de la mediana y/o la media sin dar respuesta a la pregunta.
	5	Cálculo de la mediana y/o la media interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.7. Valores y tipo de errores ítem 1 (variable número de hermanos)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Uso de la moda (2); valor indicado para variables cualitativas.
2	Aproximación de la media (2.75) a dos o tres.
3	Uso de la media de las chicas (2.68).

1.1.4. *Variable "peso"*

Variable 1: Grado de corrección

Tabla E.8. Valores y descriptores grado de corrección ítem 1 (variable peso)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la mediana (60 Kg.). Argumenta el uso de mediana en lugar de la media. ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la mediana. No alude a la forma de la distribución ni a los valores atípicos.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la media (61.45 Kg.). ✓ Calcula la mediana y/o la media, no interpretando o interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce el estudiante típico ni calcula estadísticos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.9. Valores y tipo de respuesta ítem 1 (variable peso)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la mediana teniendo en cuenta la forma de la distribución y/o la presencia de valores atípicos.
	2	Uso de la mediana sin argumentar su uso en lugar de la media.
	3	Uso del valor exacto de la media.
	4	Cálculo de la mediana y/o la media sin dar respuesta a la pregunta.
	5	Cálculo de la mediana y/o la media interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.10. Valores y tipo de errores ítem 1 (variable peso)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Uso del rango de mayor frecuencia absoluta (cálculo equívoco de la moda).
2	Aproxima de la media (61.45) a 61 ó 62.
3	Uso de la media de la chicas (57.44).

1.1.5. *Variable "dinero"*

- Grado de corrección

Tabla E.11. Valores y descriptores grado de corrección ítem 1 (variable dinero)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la mediana (seis euros). Argumenta el uso de mediana en lugar de la media. ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la mediana. No alude a la forma de la distribución ni a los valores atípicos.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce el estudiante típico a través de la media (10.53 euros). ✓ Calcula la mediana y/o la media, no interpretando o interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce el estudiante típico ni calcula estadísticos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.12. Valores y tipo de respuesta ítem 1 (variable dinero)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la mediana teniendo en cuenta la forma de la distribución y/o la presencia de valores atípicos.
	2	Uso de la mediana sin argumentar su uso en lugar de la media.
	3	Uso del valor exacto de la media.
	4	Cálculo de la mediana y/o la media sin dar respuesta a la

		pregunta.
	5	Cálculo de la mediana y/o la media interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.13. Valores y tipo de errores ítem 1 (variable dinero)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Uso del rango de mayor frecuencia absoluta (cálculo equívoco de la moda).
2	Aproximación del valor de la media a 10 u 11.
3	Uso de la media de la chicas (10.73).

1.2. **Ítem 2: ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?**

1.2.1. *Variable "género"*

- Grado de corrección

Tabla E.14. Valores y descriptores grado de corrección ítem 2 (variable género)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Argumenta la representatividad del alumno típico en base al porcentaje del 68% que representan las mujeres.
Incorrecto (0 punto)	No argumenta la representatividad del alumno típico a través de la frecuencia relativa o no responde.

1.2.2. *Variable "deporte"*

- Grado de corrección

Tabla E.15. Valores y descriptores grado de corrección ítem 2 (variable deporte)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Argumenta la representatividad del alumno típico en base al porcentaje del 73% que representan los estudiantes que hacen poco deporte.
Incorrecto (0 punto)	No argumenta la representatividad del alumno típico a través de la frecuencia relativa o no responde.

1.2.3. *Variable "número de hermanos"*

- Grado de corrección

Tabla E.16. Valores y descriptores grado de corrección ítem 2 (variable número de hermanos)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Justica la representatividad del alumno típico mediante la desviación típica (1.23). ✓ Justifica la representatividad del alumno típico mediante el recorrido (6).
Parcialmente correcto (1 punto)	Calcula indicadores de dispersión (desviación típica y/o recorrido) no interpretando o interpretando equívocamente estos valores al responder la

	pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce la representatividad del alumno típico ni calcula estadísticos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.17. Valores y tipo de respuesta ítem 2 (variable número de hermanos)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la desviación típica.
	2	Uso del recorrido.
	3	Cálculo de la desviación típica y/o el recorrido sin dar respuesta a la pregunta.
	4	Cálculo de la desviación típica y/o el recorrido interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.18. Valores y tipo de errores ítem 2 (variable número de hermanos)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Uso del porcentaje que representa la moda (la moda ha sido indicada para variables cualitativas).
2	Uso de la media (sin aludir a la desviación típica).

1.2.4. *Variable "peso"*

- Grado de corrección

Tabla E.19. Valores y descriptores grado de corrección ítem 2 (variable peso)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Justica la representatividad del alumno típico mediante la desviación típica (10.37). ✓ Justifica la representatividad del alumno típico mediante el recorrido (54).
Parcialmente correcto (1 punto)	Calcula indicadores de dispersión (desviación típica y/o recorrido) no interpretando o interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce la representatividad del alumno típico ni calcula estadísticos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.20. Valores y tipo de respuesta ítem 2 (variable peso)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la desviación típica.
	2	Uso del recorrido.

	3	Cálculo de la desviación típica y/o el recorrido sin dar respuesta a la pregunta.
	4	Cálculo de la desviación típica y/o el recorrido interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.21. Valores y tipo de errores ítem 2 (variable peso)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Uso de la "frecuencia relativa del rango de mayor frecuencia absoluta".
2	Uso de la media (sin aludir a la desviación típica).

1.2.5. *Variable "dinero"*

- Grado de corrección

Tabla E.22. Valores y descriptores grado de corrección ítem 2 (variable dinero)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Justica la representatividad del alumno típico mediante la desviación típica (11.45). ✓ Justifica la representatividad del alumno típico mediante el recorrido (50).
Parcialmente correcto (1 punto)	Calcula indicadores de dispersión no interpretando o interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce la representatividad del alumno típico ni calcula estadísticos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.23. Valores y tipo de respuesta ítem 2 (variable dinero)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de la desviación típica.
	2	Uso del recorrido.
	3	Cálculo de la desviación típica y/o el recorrido sin dar respuesta a la pregunta.
	4	Cálculo de la desviación típica y/o el recorrido interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.24. Valores y tipo de errores ítem 2 (variable dinero)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Uso de la frecuencia relativa del rango de mayor frecuencia absoluta.
2	Uso de la media (sin aludir a la desviación típica).

1.3. Ítem 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

1.3.1. *Variable "deporte"*

- Grado de corrección

Tabla E.25. Valores y descriptores grado de corrección ítem 3 (variable deporte)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce las diferencias entre chicos y chicas a través de las frecuencias relativas (el 63% de los chicos practica poco deporte y el 78% de las chicas). Resume los datos en tablas de frecuencias y gráficos (gráfico circular o de barras). ✓ Reconoce las diferencias entre chicos y chicas a través de las frecuencias relativas (el 63% de los chicos practica poco deporte y el 78% de las chicas). Resume los datos en tablas de frecuencias.
Parcialmente correcta (1 punto)	Resume los datos en tablas de frecuencias relativas o en tablas de frecuencias relativas y gráficos, no interpretando o interpretando equívocamente estos resúmenes estadísticos al responder la pregunta.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No establece apropiadamente las diferencias entre chicos y chicas, ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.26. Valores y tipo de respuesta ítem 3 (variable deporte)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de frecuencias relativas construyendo tablas de frecuencias y gráfico de barras adosadas.
	2	Uso de frecuencias relativas resumiendo los datos en tablas de frecuencias.
	3	Reducción estadística de los datos en tablas de frecuencias relativas o en tablas de frecuencias relativas y gráficos, sin dar respuesta a la pregunta.
	4	Reducción estadística de los datos en tablas de frecuencias relativas o en tablas de frecuencias relativas y gráficos, interpretando equívocamente estos resúmenes estadísticos al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.27. Valores y tipo de errores ítem 3 (variable deporte)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Comparación mediante gráfico de barras de frecuencias absolutas.
2	Comparación de las modas (ambos grupos practican poco deporte).
3	Comparación en torno a los valores nada, mucho.
4	Se manifiestan los errores uno y dos.
5	Se manifiestan los errores uno y tres.

1.3.2. *Variable "número de hermanos"*

- Grado de corrección

Tabla E.28. Valores y descriptores grado de corrección ítem 3 (variable número de hermanos)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos mediante el cálculo de estadísticos (mediana, indicadores de dispersión y valores atípicos) y el uso de gráficos (grafico de cajas, gráfico de barras comparadas). ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos mediante el cálculo de estadísticos (mediana, indicadores de dispersión y valores atípicos). No incluye ningún tipo de gráfico. ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos mediante gráficos (grafico de cajas, gráfico de barras comparadas). No incluye cálculos estadísticos. ✓ Reconoce que las chicas tienen en promedio un menor número de hermanos (as) que los chicos en base a la mediana, considerando o no indicadores de dispersión.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguiente respuestas: ✓ Reconoce que las chicas tienen en promedio un menor número de hermanos (as) que los chicos a través de la media, teniendo o no en cuenta indicadores de dispersión. ✓ Calcula estadísticos (promedios y/o dispersiones) sin interpretar o interpretando equívocamente estos valores.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No establece apropiadamente las diferencias entre chicos y chicas ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde

- Tipo de respuesta

Tabla E.29. Valores y tipo de respuesta ítem 3 (variable número de hermanos)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de estadísticos (promedios y dispersiones) y gráficos.
	2	Uso de gráficos sin calcular estadísticos.
	3	Uso de la mediana e indicadores de dispersión.
	4	Uso de la mediana sin tener en cuenta indicadores de dispersión.
	5	Uso de la media e indicadores de dispersión.
	6	Uso de la media sin tener en cuenta indicadores de dispersión.
	7	Cálculo de estadísticos (promedios y/o dispersiones) sin dar respuesta a la pregunta.
	8	Cálculo de estadísticos (promedios y/o dispersiones), interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.30. Valores y tipo de errores ítem 3 (variable número de hermanos)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Aproximación de la media de los chicos (2.89) y de las chicas (2.68) a tres (no hay diferencias entre chicas y chicos).

1.3.3. *Variable "peso"*

- Grado de corrección

Tabla E.31. Valores y descriptores grado de corrección ítem 3 (variable peso)

Valor (código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos en base al cálculo de estadísticos (mediana, indicadores de dispersión y valores atípicos) y el uso de gráficos (grafico de cajas, gráfico de barras comparadas). ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos en base al cálculo de estadísticos (mediana, indicadores de dispersión y valores atípicos). No incluye ningún tipo de gráfico. ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos mediante gráficos (grafico de cajas, gráfico de barras comparadas). No incluye cálculos estadísticos. ✓ Reconoce que las chicas pesan en promedio menos que los chicos en base a la mediana, considerando o no indicadores de dispersión.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que las chicas pesan en promedio menos que los chicos en base a la media, teniendo o no en cuenta indicadores de dispersión. ✓ Calcula estadísticos (promedios y/o dispersiones) sin interpretar o interpretando equívocamente estos valores.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No establece apropiadamente las diferencias entre chicos y chicas ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde

- Tipo de respuesta

Tabla E.32. Valores y tipo de respuesta ítem 3 (variable peso)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de estadísticos (promedios y dispersiones) y gráficos.
	2	Uso de gráficos sin calcular estadísticos.
	3	Uso de la mediana e indicadores de dispersión.
	4	Uso de la mediana sin tener en cuenta indicadores de dispersión.
	5	Uso de la media e indicadores de dispersión.
	6	Uso de la media sin tener en cuenta indicadores de dispersión.
	7	Cálculo de estadísticos (promedios y/o dispersiones) sin dar respuesta a la pregunta.
	8	Cálculo de estadísticos (promedios y/o dispersiones), interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

1.3.4. *Variable "dinero"*

- Grado de corrección

Tabla E.33. Valores y descriptores grado de corrección ítem 3 (variable dinero)

Valor (código)	Descriptor del valor

Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos en base al cálculo de estadísticos (mediana, indicadores de dispersión y valores atípicos) y el uso de gráficos (grafico de cajas, gráfico de barras comparadas). ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos en base al cálculo de estadísticos (mediana, indicadores de dispersión y valores atípicos). No incluye ningún tipo de gráfico. ✓ Establece diferencias entre chicas y chicos mediante gráficos (grafico de cajas, gráfico de barras comparadas). No incluye cálculos estadísticos. ✓ Reconoce que las chicas tienen en promedio menos dinero que los chicos en base a la mediana, considerando o no indicadores de dispersión.
Parcialmente correcto (1 punto)	Calcula estadísticos (medianas y/o dispersiones) sin interpretar o interpretando equívocamente estos valores.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No establece apropiadamente las diferencias entre chicos y chicas ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde

- Tipo de respuesta

Tabla E.34. Valores y tipo de respuesta ítem 3 (variable dinero)

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correctas y parcialmente correctas	1	Uso de estadísticos y gráficos.
	2	Uso de gráficos sin calcular estadísticos.
	3	Uso de la mediana e indicadores de dispersión.
	4	Uso de la mediana sin tener en cuenta indicadores de dispersión.
	5	Cálculo de estadísticos (mediana y/o dispersiones) sin dar respuesta a la pregunta.
	6	Cálculo de estadísticos (mediana y/o dispersiones), interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.35. Valores y tipo de errores ítem 3 (variable dinero)

Valor (Código)	Tipo de error
1	Comparación de medias (ambas distribuciones son bastante asimétricas; se obtiene que las chicas llevan más dinero que los chicos).

2. PROYECTO EFICACIA DE UN ENTRENAMIENTO DEPORTIVO

2.1. **Ítem 1: ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?**

- Variable 1: Grado de corrección

Tabla E.36. Valores y descriptores grado de corrección ítem 1

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto

	de la clase comparando estadísticos (medias o medianas y dispersiones) y utilizando gráficos. Justifica el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase comparando estadísticos (medianas o medias y dispersiones). Argumenta el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase mediante gráficos (gráfico de cajas, gráfico de barras comparadas). ✓ Reconoce que el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase comparando medianas y dispersiones (o solo medianas), sin justificar el uso de la mediana.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase comparando medias y dispersiones (o solo medias), sin justificar el uso de la media. ✓ Reconoce que el entrenamiento ha resultado efectivo para el conjunto de la clase sin justificar o utilizando argumentos insuficientes. ✓ Calcula estadísticos y/o construye gráficos sin interpretar o interpretando equívocamente estos resúmenes estadísticos.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce la efectividad del entrenamiento ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.37. Valores y tipo de respuesta ítem 1

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Comparación de estadísticos (medias o medianas y dispersiones) y uso de gráficos, argumentando el uso de la media o la mediana.
	2	Comparación de medianas (o medianas y dispersiones), argumentando su uso.
	3	Comparación de medias (o medias y dispersiones) argumentando su uso.
	4	Comparación mediante gráficos sin incluir cálculos estadísticos.
	5	Comparación de medianas (o medianas y dispersiones) sin justificar su uso.
	6	Comparación de medias (o medias y dispersiones) sin justificar su uso.
	7	Reconoce la efectividad del entrenamiento sin justificar la respuesta.
	8	Reconoce la efectividad del entrenamiento aportando argumentos deficientes.
	9	Cálculo de estadísticos (promedios y desviaciones típicas) sin dar respuesta a la pregunta.
	10	Cálculo de estadísticos interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.38. Valores y tipo de errores ítem 1

Valor (Código)	Tipo de error
1	Construcción de gráfico sin hacer una reducción estadística de los datos

	(representa en el eje de abscisa cada individuo al comparar las dos distribuciones).
2	Comparación de cada valor por separado en la matriz de datos.
3	Comparación de las sumas de las frecuencias en lugar de los promedios.
4	Se manifiestan los errores uno y dos.
5	Se manifiestan los errores uno y tres.

2.2. Ítem 2: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?

Variable 1: Grado de corrección

Tabla E.39. Valores y descriptores grado de corrección ítem 2

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos comparando estadísticos (medias o medianas y dispersiones) y utilizando gráficos. Justifica el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos comparando estadísticos (medianas o medias y dispersiones). Argumenta el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos mediante gráficos (gráfico de cajas, gráfico de barras comparadas). ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos comparando medianas y dispersiones (o solo medianas) sin justificar el uso de la mediana.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos comparando medias y dispersiones (o solo medias) sin justificar el uso de la media. ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos sin justificar o utilizando argumentos insuficientes. ✓ Calcula estadísticos y/o construye gráficos, sin interpretar o interpretando equívocamente estos resúmenes estadísticos.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce apropiadamente las diferencias entre chicos y chicas ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.40. Valores y tipo de respuesta ítem 2

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Comparación de estadísticos (medias o medianas y dispersiones) y uso de gráficos, argumentando el uso de la media o la mediana.
	2	Compara de medianas (o medianas y dispersiones) argumentando su uso.
	3	Comparación de medias (o medias y dispersiones), argumentando su uso.
	4	Comparación mediante gráficos sin incluir cálculos estadísticos.
	5	Comparación de medianas (o medianas y dispersiones) sin justificar su uso.
	6	Comparación de medias (o medias y dispersiones) sin justificar su uso.

	7	Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos sin justificar la respuesta.
	8	Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos aportando argumentos insuficientes.
	9	Cálculo de estadísticos (promedios y desviaciones típicas) sin dar respuesta a la pregunta.
	10	Cálculo de estadísticos interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.41. Valores y tipo de errores ítem 2

Valor (Código)	Tipo de error
1	Construcción de gráfico sin hacer una reducción estadística de los datos.
2	Comparación de cada valor por separado en la matriz de datos.

2.3. Ítem 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?

Variable 1: Grado de corrección

Tabla E.42. Valores y descriptores grado de corrección ítem 3

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos comparando estadísticos (medias o medianas y dispersiones) y utilizando gráficos. Justifica el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos comparando estadísticos (medianas o medias y dispersiones). Argumenta el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos mediante gráficos (gráfico de cajas, gráfico de barras comparadas). ✓ Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos comparando medianas y dispersiones (o solo medianas) sin justificar el uso de la mediana.
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que es mejor el grupo de los chicos comparando medias y dispersiones (o solo medias) sin justificar el uso de la media. ✓ Reconoce que es mejor el grupo de los chicos sin justificar o utilizando argumentos insuficientes. ✓ Calcula estadísticos y/o construye gráficos sin interpretar o interpretando equívocamente estos resúmenes estadísticos.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce apropiadamente las diferencias entre chicos y chicas ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados. ✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.43. Valores y tipo de respuesta ítem 3

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Comparación de estadísticos (medias o medianas y dispersiones) y uso gráficos, argumentando el uso de la

	media o la mediana.
2	Comparación de medianas (o medianas y dispersiones) argumentando su uso.
3	Comparación de medias (o medias y dispersiones) argumentando su uso.
4	Comparación mediante gráficos sin incluir cálculos estadísticos.
5	Comparación de medianas (o medianas y dispersiones) sin justificar su uso.
6	Comparación de medias (o medias y dispersiones) sin justificar su uso.
7	Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos sin justificar la respuesta.
8	Reconoce que es mejor el tiempo de los chicos aportando argumentos deficientes.
9	Cálculo de estadísticos (promedios y desviaciones típicas) sin dar respuesta a la pregunta.
10	Cálculo de estadísticos interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.44. Valores y tipo de errores ítem 3

Valor (Código)	Tipo de error
1	Construcción de gráfico sin hacer una reducción estadística de los datos.

2.4. **Ítem 4: ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?**

- Grado de corrección

Tabla E.45. Valores y descriptores grado de corrección ítem 4

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que los chicos han mejorado más que las chicas comparando los porcentajes que representan las diferencias de las medianas o las medias (antes y después del entrenamiento), alude a la dispersión y realiza comparaciones mediante gráficos. Justifica el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que los chicos han mejorado más que las chicas comparando los porcentajes que representan las diferencias de las medianas o las medias y confrontando dispersiones. Justifica el uso de la media o la mediana. ✓ Reconoce que los chicos han mejorado más que las chicas mediante gráficos (gráfico de cajas, diagrama acumulativo).
Parcialmente correcto (1 punto)	Se consideran parcialmente correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que los chicos han mejorado más que las chicas comparando las diferencias de las medianas y las dispersiones (o solo las diferencias entre las medianas), justificando o no el uso de la mediana. ✓ Reconoce que los chicos han mejorado más que las chicas sin justificar o utilizando argumentos insuficientes. ✓ Realiza cálculos apropiados y/o construye gráficos sin interpretar o interpretando equívocamente estos resúmenes estadísticos.
Incorrecto (0 punto)	Se consideran incorrectas las siguientes respuestas: ✓ No reconoce que los chicos han mejorado más ni calcula estadísticos y/o construye gráficos apropiados.

✓ No responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.46. Valores y tipo de respuesta ítem 4

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Comparación de los porcentajes que representan las diferencias de las medianas (antes y después del entrenamiento) aludiendo a la dispersión y justificando el uso de la mediana. Se incluyen también comparaciones mediante gráficos.
	2	Comparación de los porcentajes que representan las diferencias de las medias (antes y después del entrenamiento) aludiendo a la dispersión y justificando el uso de la media. Se incluyen también comparaciones mediante gráficos.
	3	Comparación de los porcentajes que representan las diferencias de las medianas aludiendo a las dispersiones y Justificando el uso de la mediana.
	4	Comparación de los porcentajes que representan las diferencias de las media aludiendo a las dispersiones y Justificando el uso de la media.
	5	Comparación mediante gráficos sin incluir cálculos estadísticos.
	6	Comparación de las diferencias de las medianas y las dispersiones (o solo las diferencias entre las medianas), justificando o no el uso de la mediana.
	7	Reconoce que han mejorado más los chicos que las chicas sin justificar la respuesta.
	8	Reconoce que han mejorado más los chicos que las chicas aportando argumentos insuficientes.
	9	Realización de cálculos y/o gráficos apropiados sin dar respuesta a la pregunta.
	10	Realización de cálculos y/o gráficos apropiados interpretando equívocamente estos valores al responder la pregunta.

- Tipo de errores

Tabla E.47. Valores y tipo de errores ítem 4

Valor (Código)	Tipo de error
1	Construcción de gráfico sin hacer una reducción estadística de los datos.
2	Comparación de cada valor por separado en la matriz de datos.
3	Comparación de medias.
4	Comparación de las diferencias de las medias.
5	Se manifiestan lo errores uno y cuatro.

2.5. Ítem 5: ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como "atípico" en su capacidad de correr?

- Grado de corrección

Tabla E.48. Valores y descriptores grado de corrección ítem 5

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Reconoce que hay tres sujetos atípicos en septiembre (tiempos 3.3, 9.9 y 9.9) y tres en diciembre (tiempos 6.4, 6.6 y 6.9) mediante la fórmula proporcionada; representa los valores atípicos mediante algún tipo de gráfico (gráfico de caja, gráfico de dispersión). ✓ Reconoce que hay tres sujetos atípicos en septiembre y tres en diciembre mediante la fórmula proporcionada. ✓ Reconoce la presencia de sujetos atípicos mediante algún tipo de gráfico (gráfico de caja, gráfico de dispersión).
Incorrecto (0 punto)	No reconoce sujetos atípicos o no responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.49. Valores y tipo de respuesta ítem 5

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta	1	Uso de la fórmula y representación de los valores atípicos mediante gráficos.
	2	Uso de la fórmula.
	3	Representación de los valores atípicos mediante gráficos sin emplear la fórmula.

- Tipo de errores

Tabla E.50. Valores y tipo de errores ítem 5

Valor (Código)	Tipo de error
1	Interpretación de valor atípico como la mínima o la máxima.

2.6. **Ítem 6: ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?**

- Grado de corrección

Tabla E.51. Valores y descriptores grado de corrección ítem 6

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Reconoce que los valores atípicos podrían afectar una interpretación adecuada de los datos y por tanto, resulta conveniente analizarlos de manera separada.
Incorrecto (0 punto)	No reconoce la necesidad de analizar los valores atípicos de forma aislada o no responde.

3. PRUEBA EVALUATIVA FINAL

3.1. **Ítem 1: Espacio muestral**

- Grado de corrección

Tabla E.52. Valores y descriptores grado de corrección ítem 1

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Reconoce el especio muestral del experimento. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Incorrecto (0 punto)	No reconoce el espacio muestral del experimento o no responde.

- Tipo de errores

Tabla E.53. Valores y tipo de errores ítem 1

Valor (Código)	Tipo de error
1	El espacio muestral está compuesto por todos los números asignados a las caras del dado (1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,6).
2	El espacio muestral está compuesto por los números desde 1 a 12.

3.2. **Ítem 2: Asignación de probabilidades**

- Grado de corrección

Tabla E.54. Valores y descriptores grado de corrección ítem 2

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Se consideran correctas las siguientes respuestas: ✓ Representa la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles usando notación fraccionaria, decimal y porcentaje. ✓ Representa la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles usando una o dos de las notaciones anteriores.
Incorrecto (0 punto)	Representa de manera errónea la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles o no responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.55. Valores y tipo de respuesta ítem 2

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Uso de notación fraccionaria, decimal y porcentaje.
	2	Uso de notación fraccionaria y decimal
	3	Uso de notación fraccionaria y porcentaje.
	4	Uso de notación decimal y porcentaje.
	5	Uso de notación fraccionaria sin incluir otro tipo de notación.
	6	Uso de notación decimal sin incluir otro tipo de notación.
	7	Uso de porcentaje sin incluir otro tipo de notación.

3.3. **Ítem 3: Construcción tabla de frecuencias relativas**

- Grado de corrección

Tabla E.56. Valores y descriptores grado de corrección ítem 3

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Establece correctamente los valores y las frecuencias absolutas y relativas.
Parcialmente correcto (1 punto)	Determina correctamente los valores y las frecuencias absolutas sin obtener las frecuencias relativas o realizando cálculos equívocos.
Incorrecto (0 punto)	No incluye las frecuencias absolutas ni relativas o no responde.

- Tipo de respuesta

Tabla E.57. Valores y tipo de respuesta ítem 3

Respuesta	Valor (código)	Tipo de respuesta
Correcta y parcialmente correcta	1	Asignación de frecuencia relativa usando notación decimal.
	2	Asignación de frecuencia relativa usando notación fraccionaria.
	3	Asignación de frecuencias relativas mediante porcentaje.
	4	Asignación correcta de valores calculando las frecuencias absolutas, sin obtener las frecuencias relativas.
	5	Asignación correcta de valores calculando las frecuencias absolutas, obteniendo erróneamente las frecuencias relativas.

3.4. Ítem 4: Representación diagrama de barras de frecuencias relativas

- Grado de corrección

Tabla E.58. Valores y descriptores grado de corrección ítem 4

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Construye correctamente el gráfico de barras a partir de las frecuencias relativas.
Parcialmente correcto (1 punto)	Incluye los valores en la abscisa y las frecuencias relativas en la ordenada, dibujando mal las barras.
Incorrecto (0 punto)	No construye el gráfico de barras a partir de las frecuencias relativas, construye otro tipo de diagramas o no responde.

- Tipo de errores

Tabla E.59. Valores y tipo de errores ítem 4

Valor (Código)	Tipo de error
1	Construcción del gráfico a partir de las frecuencias absolutas.
2	Construcción de todas las barras juntas (a modo de histograma).
3	Construcción errónea de la altura de las barras.
4	Omisión de datos en el eje de ordenada.

3.5. Ítem 5: Representación diagrama de barras distribución probabilidad sobre el mismo gráfico del ítem 4 (barras adosadas)

- Grado de corrección

Tabla E.60. Valores y descriptores grado de corrección ítem 5

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Construye barras adosadas representando correctamente la distribución de probabilidad.
Parcialmente correcto (1 punto)	Construye las barras de acuerdo a la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles, sin dibujar barras adosadas.
Incorrecto (0 punto)	Las barras dibujadas no corresponden con la probabilidad de obtener cada uno de los resultados elementales posibles (dibuja mal su altura) o no responde.

- Tipo de errores

Tabla E.61. Valores y tipo de errores ítem 5

Valor (Código)	Tipo de error
1	Representación de la distribución de probabilidad sobre un gráfico de frecuencias absolutas.
2	Construcción de la gráfica sin dejar espacio entre las barras que representan la distribución de probabilidad y las frecuencias relativas.
3	Construcción errónea de la altura de las barras.
4	Construcción de barras superpuestas.
5	Se manifiestan los errores 1 y 2.
6	Se manifiestan los errores 1 y 4.
7	Se manifiestan los errores 1, 2 y 4.
8	Se manifiestan los errores 2 y 3.

3.6. **Ítem 6: Reconocimiento de la ley de los grandes números**

- Grado de corrección

Tabla E.62. Valores y descriptores grado de corrección ítem 6

Valor (Código)	Descriptor del valor
Correcto (2 puntos)	Reconoce que los gráficos deberían estar "más igualados".
Parcialmente correcto (1 punto)	Reconoce lo que se espera observar en cada uno de los resultados elementales posibles, sin establecer una comparación entre el gráfico de frecuencias relativas y el de probabilidad.
Incorrecto (0 punto)	No reconoce la ley de los grandes números o no responde.

- Tipo de errores

Tabla E.63. Valores y tipo de errores ítem 6

Valor (Código)	Tipo de error
1	Ambos gráficos mantendrían la forma.
2	Los dos gráficos serían exactamente iguales.