

Investigación en Didáctica de la Matemática



Homenaje a Encarnación Castro

Luis Rico
María C. Cañadas
José Gutiérrez
Marta Molina
Isidoro Segovia
(Eds.)

Colección «Didáctica de la Matemática»
Diseño de portada: José L. Lupiáñez
Edición promovida por el grupo de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico»
Los capítulos de este libro han superado una revisión por pares.

Comité Científico

L. Rico
M. C. Cañadas
J. Gutiérrez
M. Molina
I. Segovia

Este libro debe ser citado como:
Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.) (2013).
Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro.
Granada, España: Editorial Comares.

© Los autores

Editorial Comares, S.L.
Gran Capitán, 10 – Bajo
18002 Granada
Telf.: 958 465 382 • Fax: 958 272 736
E-mail: libreriacomares@comares.com
<http://www.editorialcomares.com>
<http://www.comares.com>

ISBN: 978-84-9045-095-6 • Depósito legal: Gr. 1.788/2013

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

RELACIÓN DE AUTORES

Abraham Arcavi <i>Weizmann Institute of Science (Israel)</i>	Carlos de Castro Hernández <i>Universidad Complutense de Madrid (España)</i>
Lorenzo J. Blanco Nieto <i>Universidad de Extremadura (España)</i>	Aurora del Río Cabezas <i>Universidad de Granada (España)</i>
Rafael Bracho López <i>Universidad de Córdoba (España)</i>	Ángel Díez Lozano <i>Universidad de Granada (España)</i>
María C. Cañadas Santiago <i>Universidad de Granada (España)</i>	Paola Donoso Riquelme <i>Universidad de Granada (España)</i>
José Carrillo Yáñez <i>Universidad de Huelva (España)</i>	Francisco Fernández García <i>Universidad de Granada (España)</i>
Marcelo Casis Raposo <i>Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)</i>	Alejandro Fernández Lajusticia <i>Universidad de Valencia (España)</i>
Enrique Castro Martínez <i>Universidad de Granada (España)</i>	Antonio Fernández Cano <i>Universidad de Granada (España)</i>
Elena Castro Rodríguez <i>Universidad de Granada (España)</i>	José A. Fernández Plaza <i>Universidad de Granada (España)</i>
Francisco Javier Claros Mellado <i>Universidad Carlos III de Madrid (España)</i>	Pablo Flores Martínez <i>Universidad de Granada (España)</i>
Antonio Codina Sánchez <i>Universidad de Almería (España)</i>	Jesús Gallardo Romero <i>Universidad de Málaga (España)</i>
Luis C. Contreras González <i>Universidad de Huelva (España)</i>	Francisco Gil Cuadra <i>Universidad de Almería (España)</i>
Moisés Coriat Benarroch <i>Universidad de Granada (España)</i>	Bernardo Gómez Alfonso <i>Universidad de Valencia (España)</i>

- Pedro Gómez Guzmán
Universidad de los Andes (Colombia)
- Evaristo González González
Colegio Público Sierra Nevada, Granada (España)
- M.^a José González López
Universidad de Cantabria (España)
- José Luis González Marí
Universidad de Málaga (España)
- José Gutiérrez Pérez
Universidad de Granada (España)
- Josefa Hernández Domínguez
Universidad de La Laguna (España)
- Ángel A. López
Universidad de Carabobo (Venezuela) y Universidad de Granada (España)
- Carmen López Esteban
Universidad de Salamanca (España)
- José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada (España)
- Antonio Marín del Moral
Universidad de Granada (España)
- Alexander Maz Machado
Universidad de Córdoba (España)
- Marta Molina González
Universidad de Granada (España)
- María Francisca Moreno Carretero
Universidad de Almería (España)
- Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada (España)
- Tomás Ortega del Rincón
Universidad de Valladolid (España)
- Antonio Luis Ortiz Villarejo
Universidad de Málaga (España)
- M.^a Mercedes Palarea Medina
Universidad de La Laguna (España)
- Luis Puig Espinosa
Universidad de Valencia (España)
- Luis Radford
Universidad Laurentienne (Canadá)
- Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada (España)
- Nuria Rico Castro
Universidad de Granada (España)
- Luis Rico Romero
Universidad de Granada (España)
- Susana Rodríguez Domingo
Universidad de Granada (España)
- Isabel Romero Albaladejo
Universidad de Almería (España)
- Juan F. Ruíz Hidalgo
Universidad de Granada (España)
- Francisco Ruíz López
Universidad de Granada (España)
- María Teresa Sánchez Compañía
Centro de Magisterio María Inmaculada, Antequera (España)
- Victoria Sánchez García
Universidad de Sevilla (España)
- Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada (España)
- Modesto Sierra Vázquez
Universidad de Salamanca (España)
- Martín M. Socas Robanya
Universidad de La Laguna (España)
- Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba (España)
- Antonio Tortosa López
Centro de Educación Secundaria y Formación Profesional «S. Ramón y Cajal», Granada (España)
- Gabriela Valverde Soto
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)
- Danellys Vega Castro
Universidad de Granada (España)

ÍNDICE

PRÓLOGO	XIII
CONFERENCIAS PLENARIAS	
1. EN TORNO A TRES PROBLEMAS DE LA GENERALIZACIÓN. <i>Luis Radford</i>	3
2. REFLEXIONES SOBRE EL ÁLGEBRA ESCOLAR Y SU ENSEÑANZA. <i>Abraham Arcavi</i>	13
3. SE HACE CAMINO AL ANDAR. <i>Tomás Ortega</i>	23
BLOQUE 1	
ESTRUCTURAS NUMÉRICAS Y GENERALIZACIÓN	
1. RENDIMIENTO ARITMÉTICO DE LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA. <i>Luis Rico y Ángel Díez</i>	35
2. LA ESTIMACIÓN Y EL SENTIDO DE LA MEDIDA. <i>Isidoro Segovia y Carlos de Castro</i>	43
3. FORMAS TEXTUALES EN LA DIVISIÓN. <i>Bernardo Gómez</i>	51
4. UTILIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA POR MAESTROS EN FORMACIÓN EN TAREAS DE DIVISIBILIDAD. <i>Ángel López y María C. Cañadas</i>	59
5. LIMITACIONES EN LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN AL INICIO DE LOS ESTUDIOS DEL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA. <i>José Luis González, Antonio Luis Ortiz y Jesús Gallardo</i>	67
6. FENOMENOLOGÍA Y REPRESENTACIONES EN LA ARITHMETICA PRACTICA DE JUAN DE YCIAR. <i>Alexander Maz-Machado, Carmen López y Modesto Sierra</i>	77
7. LA RELACIÓN PARTE-TODO. <i>Elena Castro-Rodríguez y Enrique Castro</i>	85
BLOQUE 2	
DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA	
1. DIFICULTADES Y USO DE RECURSOS ALGEBRAICOS DE ESTUDIANTES PARA MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA. <i>Martín M. Socas, M.ª Mercedes Palarea y Josefa Hernández</i>	95
2. LA REPRESENTACIÓN DE CANTIDADES MEDIANTE SEGMENTOS LINEALES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ÁLGEBRA ELEMENTAL. <i>Francisco Fernández y José Luis Lupiáñez</i>	103
3. DE LO VERBAL A LO SIMBÓLICO: UN PASO CLAVE EN EL USO DEL ÁLGEBRA COMO HERRAMIENTA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA. <i>Susana Rodríguez-Domingo y Marta Molina</i>	111

4. ACERCA DE LAS NOCIONES SENTIDO ESTRUCTURAL Y PENSAMIENTO RELACIONAL. <i>Gabriela Valverde y Danellys Vega-Castro</i>	119
5. ANÁLISIS DE TAREAS DE CÁLCULO DE LÍMITES FINITOS EN UN PUNTO EN LAS QUE INTERVIENEN IDENTIDADES NOTABLES. <i>Juan F. Ruíz-Hidalgo y José A. Fernández-Plaza</i>	127
6. REQUISITOS MATEMÁTICOS NECESARIOS PARA EL MANEJO DE DOS DEFINICIONES ALGEBRAICAS DE LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN Y DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. <i>María Teresa Sánchez, Francisco Javier Claros y Moisés Coriat</i>	135
7. LA ARITMÉTICA ALGEBRÁTICA DE MARC AUREL, PRIMER ÁLGEBRA IMPRESA ESCRITA EN ESPAÑOL. PRELIMINARES PARA SU ESTUDIO. <i>Luis Puig y Alejandro Fernández</i>	143
8. INVENCIÓN DE PATRONES PARA LOS DÍGITOS DEL CÓDIGO BRAILLE. <i>Aurora del Río y Rafael Ramírez-Uclés</i>	151
9. INTRODUCCIÓN A LA ESTRUCTURA DE GRUPO MEDIANTE UN ENFOQUE GEOMÉTRICO Y ARTÍSTICO. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES PARA MAESTRO. <i>Francisco Ruíz</i>	159

BLOQUE 3

FORMACIÓN DE PROFESORES E INVESTIGACIÓN

1. INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE ALTA VISIBILIDAD E IMPACTO EN LA BASE SOCIAL SCIENCES CITATION INDEX. <i>Manuel Torralbo, Rafael Bracho y Antonio Fernández-Cano</i>	169
2. CAMINOS DE APRENDIZAJE Y FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. <i>Pedro Gómez, M.ª José González e Isabel Romero</i>	177
3. ANÁLISIS DEL PROPÓSITO DE LAS TAREAS CONTEXTUALIZADAS EN EL MARCO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES. <i>Antonio Moreno y Antonio Marín</i>	185
4. UN MODELO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. <i>José Carrillo, Pablo Flores y Luis C. Contreras</i>	193
5. DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD DE ALMERÍA: INNOVACIÓN DOCENTE EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO. <i>Antonio Codina, Francisco Gil y M.ª Francisca Moreno</i>	201
6. ETAPAS DE ELABORACIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA INDAGAR SOBRE LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS. <i>Paola M.ª Donoso, Nuria Rico y Marcelo Casis</i>	211
7. LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS MAESTROS EN ESPAÑA EN LOS ÚLTIMOS 40 AÑOS. <i>Lorenzo J. Blanco</i>	219
8. FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: CAMPO CIENTÍFICO, TRAYECTORIA INVESTIGADORA Y ESPACIO PERSONAL COMPARTIDO. <i>Victoria Sánchez</i>	227
9. UNA MIRADA RETROSPECTIVA AL POTENCIAL INNOVADOR DESARROLLADO POR EL GRUPO EGB Y EL SEMINARIO CIEM EN EL CAMPO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (1983-1995). <i>José Gutiérrez, Evaristo González y Antonio Tortosa</i>	235

**DE LO VERBAL A LO SIMBÓLICO:
UN PASO CLAVE EN EL USO DEL ÁLGEBRA
COMO HERRAMIENTA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

**From verbal to symbolic:
A key step in the use of algebra as a tool for problem solving
and mathematical modelling**

Susana Rodríguez-Domingo y Marta Molina
Universidad de Granada

RESUMEN

En este capítulo se analizan los resultados de investigaciones que informan sobre el proceso de traducción del sistema de representación verbal al simbólico. Recurrimos a la literatura para conocer qué se sabe sobre cómo los estudiantes abordan este proceso, las dificultades y errores que presentan, y sus posibles causas. De este modo contribuimos a las investigaciones interesadas en esta temática particular, y avanzamos en la comprensión de los complejos procesos de aprendizaje del simbolismo algebraico. La información aquí recogida también resulta de utilidad para informar la enseñanza del álgebra escolar.

Palabras clave: Lenguaje algebraico; Lenguaje verbal; Resolución de problemas; Simbolismo algebraico; Sistemas de representación.

ABSTRACT

In this chapter we analyze the results of previous studies about the process of translation from the verbal to the symbolic representation system. By looking at the literature we identify what is known about how students deal with this process, the difficulties and errors they present and their possible causes. In this way we contribute to research on this topic and advance on understanding the complex process of learning algebraic symbolism. The information here presented is also of use to inform school algebra teaching.

Keywords: Algebraic language; Algebraic symbolism; Problem solving; Representation systems; Verbal language.

RODRÍGUEZ-DOMINGO, S. y MOLINA, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 111-118). Granada, España: Editorial Comares.

INTRODUCCIÓN

Hasta hace poco más de dos décadas, en la investigación relativa a la enseñanza y aprendizaje del álgebra había una asunción implícita de que el pensamiento algebraico y, por tanto, el álgebra, sólo podía tener lugar ante la presencia del lenguaje simbólico (Sutherland, Rojano, Bell y Lins, 2001). Actualmente, se adopta una concepción más amplia del álgebra, incluyendo actividades que no necesariamente requieren del uso de simbolismo algebraico tales como el estudio de relaciones funcionales, la generalización y el estudio de patrones (Molina, 2009); no obstante esta componente del álgebra escolar sigue teniendo una presencia notoria en el currículo. Se destaca la utilidad del simbolismo algebraico para la comunicación y representación de conceptos matemáticos; siendo identificados ambos procesos como componentes de la competencia matemática a alcanzar por los escolares en la educación secundaria (NCTM, 2000). En este sentido el NCTM y los documentos curriculares vigentes en España (Boletín Oficial del Estado, 2006) señalan el papel del simbolismo algebraico como parte del lenguaje matemático que los estudiantes deben ser capaces de utilizar para expresar ideas matemáticas de forma precisa, comunicar su pensamiento matemático, analizar y evaluar el pensamiento matemático y estrategias, resolver problemas, y modelizar e interpretar fenómenos de las matemáticas y otras ciencias. Así mismo, se destaca como expectativa de aprendizaje de esta etapa, utilizar y moverse con fluidez entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos.

Estas expectativas de aprendizaje relativas al dominio del simbolismo algebraico, junto a las críticas que a nivel internacional señalan la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes en su formación obligatoria (Kieran, 2007), entre otras razones, han motivado nuestro interés por el análisis del proceso de traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólico. En este capítulo, atendemos únicamente a uno de los sentidos de dicho proceso de traducción y recurrimos a la literatura para conocer qué se sabe sobre cómo los estudiantes abordan este proceso, las dificultades y errores que presentan, y sus posibles causas. De este modo se contribuye a las investigaciones interesadas en esta temática, en particular algunas de las investigaciones que venimos realizando en la Universidad de Granada.

TRADUCCIÓN ENTRE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Un sistema de representación es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto (Castro y Castro, 1997). La traducción entre sistemas de representación consiste entonces en reproducir el mismo «contenido» en otro sistema (Freudenthal, 1983); en transformar los conceptos y atributos representados en un sistema a los correspondientes conceptos y atributos en otro sistema, obteniendo una representación diferente a la de partida pero congruente en significado.

En este trabajo nos centramos en los sistemas de representación simbólico y verbal, los cuales se consideran frecuentemente para representar diferentes conceptos matemáticos. El primero de ellos se caracteriza por la expresión escrita de numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra, mientras que el sistema de representación verbal está determinado por el uso del lenguaje cotidiano incluyendo, en ocasiones, terminología específica del lenguaje matemático académico (Cañadas, 2007). De este modo, un ejemplo de enunciado algebraico en representación verbal es «un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos», siendo $x+(x+1)=y-2$ su correspondiente representación simbólica.

LOS PROCESOS DE TRADUCCIÓN: UNA MIRADA DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA

Los estudios que atienden a los procesos de traducción en contextos algebraicos consideran en su mayoría los sistemas de representación tabular, gráfico y simbólico (Kieran, 2007). Dichos estudios evidencian que los estudiantes tienen dificultades para mantener la congruencia semántica que caracteriza estos procesos, aunque muestren comprensión de las representaciones inicial y final. Son escasas las investigaciones que centran su atención en la traducción entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico. La mayoría de ellas se localizan en el contexto de la resolución de problemas dado que una de las acciones a realizar al abordar un problema algebraico es pasar del enunciado verbal a su modelización con símbolos. En este contexto los estudiantes muestran resistencia a hacer uso del simbolismo algebraico, prefiriendo utilizar razonamientos de tipo aritmético (Kieran, 2007).

La traducción del sistema de representación verbal al simbólico es un proceso en el que los estudiantes de educación secundaria presentan numerosas dificultades (Cerdán, 2010; MacGregor y Stacey 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Wagner y Parker, 1993; Weinberg, 2007). Esto ha motivado el interés de algunos investigadores interesados en la didáctica del álgebra. La mayoría de los estudios realizados atienden a los errores más habituales puestos de manifiesto por los estudiantes, por medio de los cuales se intenta inferir el modo en que abordan esta tarea. En este apartado sintetizamos resultados de estas investigaciones, complementándolos con otros más recientes que indagan en factores que condicionan la dificultad de las traducciones entre representaciones.

Procesos de traducción por estudiantes de secundaria

Para realizar de forma exitosa traducciones, los estudiantes requieren comprender tanto las variables y las relaciones de dependencia mutua entre ellas descritas en el enunciado verbal, como las características sintácticas de la representación simbólica (Kaput, Sims-Knight y Clement, 1985), alternando entre formas sintácticas y semánticas de analizar las representaciones implicadas (Kaput, 1989). MacGregor y Stacey (1993) llaman la atención sobre la necesidad de que los estudiantes sean conscientes de que

algunas relaciones fáciles de expresar mediante una representación verbal precisan de cierta reorganización antes de ser traducidas al simbolismo algebraico. En esta misma línea, Socas (1997) advierte de la mayor precisión del simbolismo algebraico frente al lenguaje verbal y de la posibilidad de lecturas secuenciales y no secuenciales de expresiones simbólicas.

A partir del análisis de resultados de estudios previos sobre procesos de traducción de enunciados algebraicos verbales a su expresión simbólica, MacGregor y Stacey (1993) identifican dos formas en que los estudiantes abordan esta tarea: (a) *traducción sintáctica*, es decir, procediendo de izquierda a derecha y traduciendo palabra por palabra o buscando palabras clave, sin atender al significado del enunciado verbal, o (b) *traducción semántica*, es decir, mediante una comparación estática, tratando de expresar el significado de la expresión a partir de la construcción de un modelo cognitivo de las relaciones matemáticas descritas en el enunciado dado.

Estudios recientes de Cerdán (2008, 2010) aportan detalles sobre las características de las traducciones de enunciados verbales realizadas por estudiantes de bachillerato. Se observa que (a) proponen diversidad de traducciones, (b) el número de cantidades contenidas en el enunciado verbal no coincide con el número de símbolos diferentes utilizados, (c) tienden a utilizar más letras del mínimo necesario, una de las cuales corresponde a la incógnita del enunciado, y (d) muestran preferencias comunes en la elección de las cantidades a ser representadas con una letra.

Errores en los procesos de traducción

Las investigaciones que han indagado en la traducción del sistema de representación verbal al simbólico por estudiantes de secundaria y bachillerato (Cerdán, 2008, 2010; MacGregor y Stacey, 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Weinberg, 2007), han reportado un alto porcentaje de fracaso en el desarrollo de esta tarea (variable entre 30% y 60% según el estudio). Uno de los errores más referidos es el denominado *error de inversión*, que consiste en representar la relación opuesta a la indicada. Dicho error conduce, por ejemplo, a traducir como $6S=P$ el enunciado verbal «hay 6 veces tantos estudiantes como profesores», utilizando la variable S para referir a los estudiantes y P para los profesores. Este error presenta una gran persistencia, siendo más frecuente cuando las variables implicadas tienen coeficientes diferentes a uno y cuando las letras utilizadas corresponden a las iniciales de las cantidades referidas en el enunciado verbal (Weinberg, 2007). También se ha identificado en enunciados con estructura aditiva (MacGregor y Stacey, 1993).

Cerdán (2008, 2010), Ruano, Socas y Palarea (2008) y Rodríguez-Domingo (2011) identifican otros errores partiendo de enunciados algebraicos representados verbalmente que en el caso de Cerdán y Ruano et al. están contextualizados y en el de Rodríguez-Domingo no. Los errores detectados por estos autores son similares, variando su

frecuencia de presentación según el tipo de problema o la presencia o no de contexto. Se identifican errores de carácter aritmético como la confusión de operaciones o el uso inadecuado de paréntesis, errores en la completitud del enunciado construido (incompletos vs desmedidos), y errores derivados de las características propias del lenguaje algebraico entre los que destacan errores en el uso de las letras (ej., utilizan un símbolo para designar a más de una cantidad, designan con más de un símbolo a la misma cantidad), errores de particularización o generalización de alguno de los términos, y errores en la construcción de las expresiones debidos a la complejidad estructural de las mismas. Entre los errores más frecuentes destacan la confusión de las operaciones potenciación y producto, una interpretación incorrecta de la estructura del enunciado y la particularización de alguno de los términos del enunciado.

ORIGEN DE LOS ERRORES Y CONDICIONANTES DE LA DIFICULTAD DE LAS TRADUCCIONES

Los estudios referidos en los dos apartados anteriores permiten identificar posibles causas de los errores señalados: (a) se utiliza un procedimiento puramente sintáctico al abordar la traducción; (b) el estudiante elabora un modelo cognitivo basado en relaciones de comparación entre las variables en vez de un modelo basado en relaciones de igualdad; (c) el signo igual es considerado como indicador de una correspondencia o asociación; (d) los numerales son interpretados como adjetivos; (e) el estudiante no comprende el enunciado verbal debido a la compleja sintaxis del lenguaje verbal; y (f) el estudiante posee una limitada comprensión del concepto de variable y de las características sintácticas de los enunciados simbólicos.

Además de estos factores, los trabajos de Bossé, Adu-Gyamfi y Cheetham (2011) centrados en la identificación de elementos que dificultan los procesos de traducción según los tipos de sistemas de representación implicados, destacan la influencia de dos factores personales: la inclusión de traducciones intermedias y la experiencia previa del alumno en el tipo de traducciones en cuestión. En este sentido, cabe señalar que según estos autores la traducción del sistema de representación verbal al simbólico recibe una atención intermedia por los docentes, pues dedican la mayor atención a las traducciones de lo simbólico a lo gráfico y tabular, así como entre los sistemas gráfico y tabular. La presencia de información no explícita y de información irrelevante o confusa en los enunciados son otros condicionantes de la dificultad de las traducciones (Bossé et al., 2011), siendo mayor cuando la presencia de estos condicionantes es alta en la representación origen de la traducción y baja en la representación destino. Por tanto, las características de los sistemas de representación implicados en los procesos de traducción que estamos considerando (ver Tabla 1), justifican una dificultad alta.

Tabla 1. *Presencia de información en los sistemas de representación verbal y simbólico*

Características	Sistema de representación	
	Verbal (origen)	Simbólico (destino)
Presencia de información no explícita u omitida	Alta	Alta
Presencia de información irrelevante o confusa	Alta	Baja

La dificultad de este tipo de traducciones también puede estar influenciada por la presencia y tipo de contexto implicado en la representación verbal dada. Hasta el momento no existen evidencias claras sobre la naturaleza de esta influencia, pues si bien algunos trabajos la descartan (Wollman, 1983), la familiaridad del contexto es un factor reconocido en los procesos de resolución de problemas (Ambrose y Molina, en prensa) e incluso recomendado para dotar de significación concreta al lenguaje matemático (Gómez-Granell, 1989).

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA DOCENCIA

La traducción del sistema de representación verbal al simbólico por estudiantes de secundaria es una línea de investigación en la que las autoras de este capítulo venimos trabajando junto a las doctoras Encarnación Castro y María C. Cañadas, buscando comprender cómo los estudiantes abordan este proceso y desarrollan sus habilidades en relación al mismo. Los resultados de estudios previos sintetizados en este capítulo nos permiten avanzar en esta línea de investigación, y aportan implicaciones para la docencia. Hemos identificado dos formas prioritarias en las que los estudiantes abordan este proceso y limitaciones en las mismas que conducen potencialmente a errores. En particular, destacamos la importancia de conjugar (y promover desde la enseñanza) el desarrollo de un modelo cognitivo (matemático) con el análisis sintáctico de las representaciones al ejecutar una traducción. La existencia de contexto podrá ayudar a sustentar la construcción de dicho modelo cognitivo en un modelo previo de la situación descrita, de forma análoga a cómo los buenos resolutores abordan la resolución de problemas aritméticos (Hegarty, Mayer y Monk, 1995). En el caso de enunciados descontextualizados queda por indagar si la falta de contexto supone una limitación, induciendo con mayor frecuencia a traducciones sintácticas o condicionando la riqueza del modelo cognitivo construible por el estudiante o, en cambio, el conocimiento previo sobre relaciones cuantitativas del estudiante suple eficazmente el rol del contexto. En ambos casos, con o sin contexto, las dificultades detectadas en el proceso de traducción son altas, estando motivadas no sólo por el modo de abordar la traducción sino también por la comprensión del significado de las operaciones, de las características sintácticas de las expresiones aritméticas y algebraicas, y la comprensión de las variables. Las características de los sistemas de representación implicados justifican esta alta dificultad y, junto con los errores identificados, informan el diseño de propuestas de enseñanza que ayuden a incidir en dichas dificultades y contribuyan a que los errores más frecuentes

se produzcan en menor medida. El análisis de los errores más comunes podrá también servir para que el propio alumnado reflexione sobre sus ideas erróneas.

REFERENCIAS

- AMBROSE, R. y MOLINA, M. (en prensa). Spanish/English bilingual students' comprehension of story problem texts. *International Journal of Science and Mathematics Education*.
- BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. (Vol. BOE Nº 5, pp. 677-773). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.
- BOSSÉ, M. J., ADU-GYAMFI, K. y CHEETHAM, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(3), 113-133.
- CAÑADAS, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- CASTRO, E. y CASTRO, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- CERDÁN, F. (2008). Las igualdades producidas en el proceso de traducción algebraico: estudio de las igualdades correctas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: SEIEM.
- CERDÁN, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99-110.
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel.
- GÓMEZ-GRANEL, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *CL & E: Comunicación, lenguaje y educación*, 3-4, 5-16.
- KAPUT, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.
- KAPUT, J., SIMS-KNIGHT, J. y CLEMENT, J. (1985). Behavioral objections: A response to Wollman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 56-63.
- KIERAN, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- HEGARTY, M., MAYER, R. E., y MONK, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18-32.
- MACGREGOR, M. y STACEY, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 217-232.
- MOLINA, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- RODRÍGUEZ-DOMINGO, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada, España.
- RUANO, R. M., SOCAS, M. M. y PALAREA, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- SOCAS, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.
- SUTHERLAND, R., ROJANO, T., BELL, A. y LINS, R. (Eds.) (2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- WAGNER, S. y PARKER, S. (1993). Advancing algebra. En P. S. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (pp. 119-139). New York, NY: Macmillan.
- WEINBERG, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. En T. Lamberg, T. y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the PME-NA*. State-line, NV: University of Nevada.
- WOLLMAN, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 169-181.