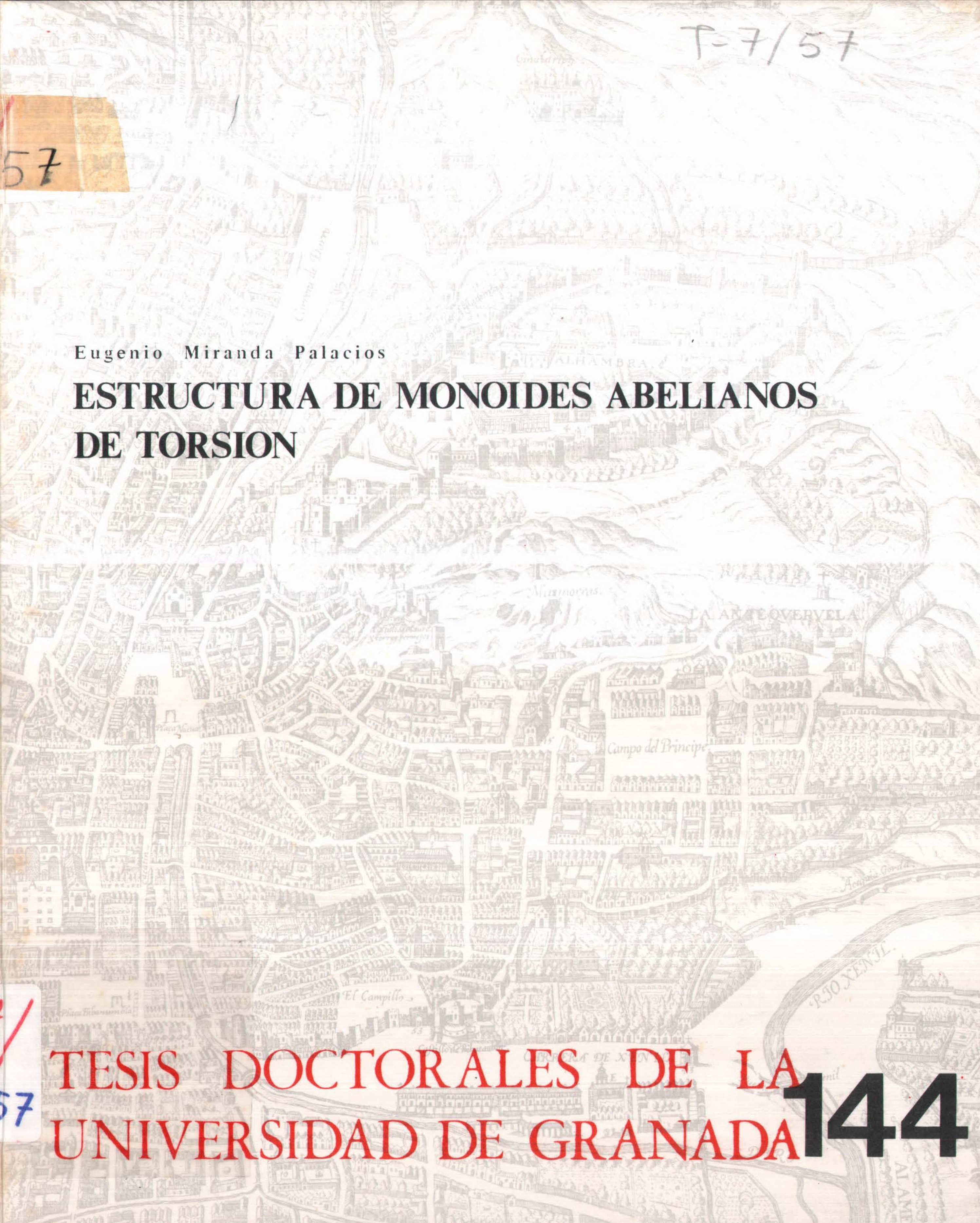


Eugenio Miranda Palacios

# ESTRUCTURA DE MONOIDES ABELIANOS DE TORSION

TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA **144**

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

# ESTRUCTURA DE MONOIDES ABELIANOS DE TORSION

EUGENIO MIRANDA PALACIOS



UNIVERSIDAD DE GRANADA
1976

*Tesis doctoral, dirigida por el Profesor Doctor D. Luis Esteban Carrasco, catedrático de Geometría y Topología de la Universidad de Granada. Fue leída el día 17 de Septiembre de 1976 ante el tribunal formado por los profesores Abellanas Cebollero, Esteban Carrasco, Vicente Córdoba, Bobillo Guerrero y Pérez Monasor. Obtuvo la calificación de Sobresaliente "cum laude".*

Impreso por el Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada. Un.Gr. 40.76.48. Depósito legal de Gr. 385. 1976. *Printed in Spain.*

Imprenta de la Universidad de Granada. Hospital Real. Cuesta del Hospicio s/n.

# I N D I C E

Pagina


Introduccion ........................... 1

Capitulo I

La Categoria de monoides abelianos.... 10

Capitulo II

Construcciones de monoides abelianos.. 23

Capitulo III

Monoides ciclicos. Componentes........ 31

Capitulo IV

Descomposiciones...................... 43

Capitulo V

Aplicaciones a morfismos.............. 51

# I N T R O D U C C I O N

El objeto de la presente memoria es obtener una descomposicion en p-componentes de un monoide abeliano finito.

El interes primario del tema proviene de ser una generalizacion del Teorema de descomposicion primaria para grupos abelianos. La cuestion seria si esta descomposicion es generalizable a monoides abelianos.

Dickson, (7) ha generalizado la descomposicion primaria de grupos abelianos a categorias abelianas que verifican el axioma AB 5 de (11) y que cumplen ademas ciertas condiciones especiales. Desgraciadamente la categoria de monoides abelianos no es abeliana, aunque si es semiaditiva (17), semiabeliana y cosemiabeliana, (10), como se demuestra en el Capitulo I de esta memoria. Por ello algunos de los resultados validos en categorias abelianas son aplicables a ella. Por ejemplo, todo par de monoides abelianos posee un biproducto. Pero en general no es posible descomponer un monoide abeliano en biproducto de submonoides suyos, aunque tal descomposicion ha sido efectuada imponiendo condiciones adicionales a los monoides sobre los que se trabaja, poe ejemplo en (1) y (18).

Buscando otro enfoque, he rechazado el requerimiento de que la descomposicion sea en suma directa, para prescindir de la imposicion de condiciones restrictivas sobre los monoides a tratar. En este sentido la eleccion de una descomposicion en suma amalgamada viene avalada por la Proposicion 51 de la presente memoria:

*Sea M un monoide abeliano periodico, A su submonoide singular y B, C submonoides de M tales que*

*a)* $B+C=M$ *b) La interseccion de B y C es A.*

*Entonces existe un isomorfismo* $g\colon\ B\coprod_A C\longrightarrow M$

y su generalizacion (Proposicion 60):

*Sea M un monoide periodico, A su submonoide singular y* $B_1, \ldots, B_m$ *submonoides de M verificando:*

*a)* $M=B_1+\ \ldots\ +B_m$ *b) la interseccion de* $(B_1+\ldots+B_i)$ *y de* $B_{i+1}$ *es A para todo* $i=0, \ldots, m-1$.

*Entonces existe un isomorfismo* $g\colon\ \coprod_A B_i\longrightarrow M$.

Estos resultados nos llevan a considerar que el instrumento ideal para conseguir la descomposicion buscada no es la suma directa, sino la suma amalgamada sobre el submonoide singular, generalizacion que en el caso particular de los grupos abelianos se reduce a suma directa, ya que el unico elemento singular es entonces el cero.

Es curioso que este ultimo hecho es una caracterizacion de los grupos, es decir:

*Todo monoide abeliano de torsion cuyo submonoide singular se reduzca al cero es un grupo.*

La demostracion es consecuencia de la Proposicion 37: Sea $a \varepsilon M$ periodico y $m=per(a)$. Entonces $ma \varepsilon M$ es singular luego $ma=0$ y $a$ posee un opuesto $b=(m-1)a$.

Dualmente a la suma amalgamada, se ha tratado tambien la descomposicion en producto fibrado. El resultado principal de esta investigacion es el siguiente:

*Sea M un monoide abeliano de exponente finito. Existe entonces un monomorfismo $j$: $C \longrightarrow M$ donde C es una suma amalgamada de los p-componentes de M con amalgama el submonoide singular, y todo elemento periodico de M pertenece a la imagen de $j$. Dualmente existe un epimorfismo $h$: $M \longrightarrow T$ donde T es un producto fibrado de p-monoides, inyectivo sobre los elementos periodicos de M.*

En resumen la situacion seria:

$$C \xrightarrow{j} M \xrightarrow{h} T$$

donde el compuesto $h \cdot j$ induce un isomorfismo del submonoide periodico de C sobre el submonoide periodico de T, es decir que la restriccion de $j$ y $h$ a los submonoides periodicos correspondientes son isomorfismos.

La descomposicion asi obtenida es bastante buena, ya que solo deja de ser fiel sobre los elementos no periodicos o iniciales de M, algunos de los cuales pueden no pertenecer a la imagen de j, y sobre los que h no tiene por que ser inyectiva. Este pequeño inconveniente se ve compensado por la gran generalidad de los monoides a los que se aplica esta descomposicion (la existencia de j esta garantizada para todo monoide de torsion, y la de h para todo monoide de exponente finito.)

El resultado principal nos permite descomponer el monoide de morfismos Hom(A,B) donde A y B son monoides abelianos en suma amalgamada y producto fibrado, segun el tipo de descomposicion utilizado para A y B.

Como se ve en el Capitulo V, existe una biyeccion entre los morfismos $\phi:\coprod_{A_1} A_p \longrightarrow \coprod_{B_1} B_q$, y las matrices $(\phi_{pq})$, donde $\phi_{pq}:A_p \longrightarrow B_q$, con una cierta relacion de equivalencia entre estas matrices, lo cual nos permite estudiar $\phi$ a partir de la matriz asociada. Por otra parte, cada morfismo $\phi:A\longrightarrow B$ induce un morfismo entre las descomposiciones, de forma que si dos morfismos $\phi,\phi'$ inducen el mismo morfismo morfismo entre las descomposiciones, entonces $\phi$ y $\phi'$ solo pueden diferir sobre los elementos iniciales de A.

En el transcurso de la investigacion que llegó a esta descomposicion se han obtenido otros resultados menores pero interesantes. Quiero citar aqui el siguiente:

*Sea M un monoide ciclico de periodo $t=mq$. Si M tiene un elemento $b\neq 0$ con periodo q, entonces $b=mb'$ para algun $b'$ de M.*

Este enunciado es una generalizacion del resultado sobre grupos ciclicos que nos dice: El generador b de un subgrupo de orden q de un grupo ciclico de orden $t=mq$ es un multiplo ma de un generador a del grupo. Aunque en el caso del monoide $b'$ no tiene que ser generador, podemos elegirlo de forma que su periodo valga qm.

La descomposicion encontrada de un monoide abeliano de exponente finito plantea una serie de cuestiones abiertas que actualmente se encuentran en periodo de investigacion. Por un lado, ¿que condiciones minimas debe cumplir M para que j o h sean isomorfismos? Es suficiente que M sea periodico en ambos casos, pero no es necesario aparte de ser una condicion demasiado restrictiva.

Por otra parte, la descomposicion en p-componentes es solo un primer paso para obtener una descomposicion de un monoide abeliano en suma amalgamada o producto fibrado de monoides ciclicos. Limitandonos de momento a los monoides de exponente finito los siguientes pasos que completarian tal descomposicion serian:

I).- Estructura de los p-monoides. El objetivo en este caso seria obtener una descomposicion de p-monoides como suma directa o producto fibrado de monoides ciclicos, o alternativamente describir la estructura de los p-monoides de forma analoga a como se describiera la estructura de monoides singulares.

II).- Estructura de monoides singulares, que son la amalgama de las descomposiciones anteriores. Esta estructura se puede estudiar siguiendo los metodos empleados en el estudio de monoides en los que todo elemento es idempotente, de los que son una generalizacion.

Obtenidas estas estructuras, combinando la descomposicion del primer paso citado con la obtenida en la presente memoria, tendriamos el importante resultado:

*Todo monoide abeliano de exponente finito se descompone como suma amalgamada (o producto fibrado) de monoides ciclicos con amalgama singular, siendo esta representacion un isomorfismo sobre el submonoide periodico.*

Otro camino para obtener una descomposicion de los monoides abelianos de exponente finito seria "eliminar" el submonoide singular. Es decir, obtener un epimorfismo $f:M\longrightarrow A$, donde A sea tal que $A_1=0$, y $Ker(f)=M_1$. Entonces A es un grupo, y podemos obtener una descomposicion con amalgama singular de M a partir de una descomposicion en suma directa de A.

Quiero agradecer las valiosas indicaciones y el animo prestados para la realizacion de esta tesis a Don Pedro Abellanas Cebollero. Fianalmente deseo expresar mi agradecimiento a mi director Don Luis Esteban Carrasco por la paciencia, interes, comprension y ayudas recibidas durante la realizacion de esta tesis.

Granada, Julio de 1.976

EUGENIO MIRANDA PALACIOS

# B I B L I O G R A F I A


(1) Abellanas.- Estructura de semigrupos commutativos.

Revista Matematica Hispano Americana, XXV (1965)

(2) Bourbaki.- Algebre, Cap III.- Algebre Lineaire.

(3) Clifford-Preston.- The algebraic Theory of Semigroups.

(4) Cohn.- Universal Algebra

(5) Charles.- The construction of finite Commutative Semigroups.

Doctor's Dissertation, Kansas State University.

(6) Dickson.- Direct Decomposition of Radicals.

Proceedings of the Conference on Categorical Algebra,

La Jolla 1.965.

(7) Ehresmann.- Categories et Structures.

(8) Freyd.- Abelian Categories.

(9) Gratzer.- Universal Algebra

(10)Gray.- A Radical Approach to Algebra.

(11)Grothendieck.- Sur quelques points d'Algebre homologique

Tohoku Mathematical Journal, 1.967.

(12) Lang.- Algebra

(13) Ljapin.- Semigroups.

(14) MacLane.- Categorical Algebra

Bulletin American Mathematical Society, 1.965

(15) MacLane.- Categories for the Working Mathematician.

(16) MacLane-Birkhoff.- Algebra.

(17) Mitchell.- Theory of Categories.

(18) Poyatos.- Descomposiciones irreducibles en suma directa interna de ciertas estructuras algebraicas. Revista Matematica Hispano Americana 1.967.

(19) Poyatos.- Semigrupos monogenos.
Revista Matematica Hispano Americana, 1.965

(20) Poyatos.- Sobre descomposiciones irreducibles de semigrupos commutativos
Revista Matematica Hispano Americana, 1.967.

# C A P I T U L O I

## La Categoria de Monoides Abelianos

DEFINICION 1.- Un Monoide es un par $(M,+)$ formado por un conjunto M y una ley de composicion $+:M\times M \longrightarrow M$ que verifica:

M1) $a+(b+c)=(a+b)+c$ para todo a,b,c de M

M2) Existe 0 de M tal que para todo a de M, $a+0=0+a=a$

Si ademas verifica:

M3) $a+b=b+a$ para todo a,b de M

se dice que el monoide es abeliano.

Normalmente designaremos al monoide $(M,+)$ por la misma letra M que al conjunto sobre el que se define. Un monoide se llama finito si el conjunto M es finito e infinito si el conjunto M es infinito.

DEFINICION 2.- Dado un monoide M y un elemento a de M definimos por recurrencia el producto por numeros naturales:

$$0a=0 \;;\; (m+1)a=ma$$

PROPOSICION 1.- Si M es abeliano, el producto de la Definicion 2 tiene las propiedades:

I.- $(m+n)a=ma+na$ III.- $(mn)a=m(na)$

II.- $m(a+b)=ma+mb$ IV.- $1a=a$

DEFINICION 3.- Dado un monoide M se llama submonoide a todo subconjunto N de M que verifique:

SM1) Si $a,b\varepsilon N$ entonces $a+b\varepsilon N$

SM2) El elemento 0 pertenece a N.

DEFINICION 4.- Dado un subconjunto S de M llamamos submonoide engendrado por S a la interseccion de todos los submonoides que contienen a S. Es un submonoide por la Proposicion 8. Se demuestra que este submonoide que llamaremos $\langle S\rangle$ esta formado por todos los elementos de M que pueden expresarse como suma finita de elementos de S. Si $M=\langle S\rangle$ decimos que M esta engendrado por S, y que S es un conjunto de generadores de M. Si ademas $S=\{a_1 \ldots a_n\}$ es finito, diremos que M es finitamente generado, y escribiremos $M=\langle a_1 \ldots a_n\rangle$. Si $M=\langle a\rangle$ diremos que M es ciclico de generador a.

DEFINICION 5.- Dados dos monoides M y N y una aplicacion $f:M\rightarrow N$ diremos que f es un homomorfismo de monoides si verifica:

H1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$ para todo a,b de M

H2) $f(0)=0$

A M le llamamos dominio de f y a N codominio de f.

PROPOSICION 2.- Para todo morfismo de monoides $f:M\rightarrow N$ y todo a de M se verifica $f(ma)=mf(a)$ para todo natural m.

Se demuestra por induccion utilizando la Definicion 2.

DEFINICION 6.- Dado un homomorfismo de monoides $f:M\to N$ llamamos nucleo de f al conjunto Ker $f=\{a\varepsilon M|f(a)=0\}$, e imagen de f al conjunto Im $f=\{b\varepsilon N|\ f(a)=b \text{ con } a\varepsilon M\}$

DEFINICION 7.- El homomorfismo $f:M\to N$ recibe, segun sea la aplicacion f, los siguientes nombres:

Epimorfismo si f es suprayectiva

Monomorfismo si f es inyectiva

Isomorfismo si f es biyectiva

Endomorfismo si M=N

Automorfismo si M=N y f es biyectiva.

A partir de estas definiciones se demuestran diversas propiedades elementales como las Proposiciones 1 y 2 ya enunciadas y las siguientes que enunciamos sin demostracion con proposito de referencia:

PROPOSICION 3.- El elemento 0 de M2) es unico. Le llamamos elemento neutro o cero.

PROPOSICION 4.- Si f es un epimorfismo la condicion H2) de la definicion 5 es consecuencia de la H1).

PROPOSICION 5.-Ker f es un submonoide de M; Im f es un submonoide de N.

Para $a_1 \dots a_n \varepsilon M$ definimos por recurrencia:

$$a_1+\dots+a_n=(a_1+\dots+a_{n-1})+a_n$$

PROPOSICION 6.-(Teorema general de asociatividad). Sea

$a_1 \ldots a_n$ una sucesion finita de elementos de M. Sean $k_1 \ldots k_m$ numeros naturales tales que $1=k_1 \leqq \ldots \leqq k_m=n$. Sean $b_1=a_1+\ldots a_{k_2-1}$ $b_2=a_{k_2}+\ldots+a_{k_3-1}$; ....; $b_m=a_{k_{m-1}}+\ldots+a_{k_m}$. Entonces $a_1+\ldots+a_n=$ $=b_1+\ldots+b_m$.

PROPOSICION 7.- (Teorema general de commutatividad).Sea M un monoide abeliano y $a_1 \ldots a_n$ una sucesion finita de elementos de M. Sea $\sigma$ una permutacion del conjunto $\{1,\ldots,n\}$. Entonces $a_1+\ldots+a_n=a_{\sigma(1)}+\ldots+a_{\sigma(n)}$.

PROPOSICION 8.- La interseccion de una familia cualquiera de submonoides de M es un submonoide de M.

PROPOSICION 9.- Cualquier homomorfismo de monoides f puede representarse como un compuesto $f=g\cdot h$ donde h es un epimorfismo y g un monomorfismo.

PROPOSICION 10.- El compuesto de dos homomorfismos de monoides es un homomorfismo de monoides. La aplicacion identidad $1_M:M\to M$ es un homomorfismo de monoides.

La anterior proposicion 10 permite definir la categoria *Monab* cuyos objetos son todos los monoides abelianos y cuyos morfismos son los homomorfismos de monoides.

DEFINICION 8.- Sean $f,g:M\longrightarrow N$ dos homomorfismos. Definimos su suma como la aplicacion $f+g:M\longrightarrow N$ dada por $(f+g)a=fa+ga$

PROPOSICION 11.- a) Sean $f,g:M\longrightarrow N$ dos homomorfismos de monoides abelianos. Entonces f+g es un homomorfismo de mono ides abelianos.

b) Sean M,N dos monoides abelianos cualesquiera. El conjunto hom(M,N) de todos los homomorfismos de momnoides de dominio M y codominio N con la suma de la Definicion 8 es un monoide abeliano que representamos por Hom(M,N).

DEFINICION 9.- Sea M un monoide abeliano. Llamamos congruencia sobre M a toda relacion de equivalencia $\simeq$ definida sobre M compatible con la operacion binaria de M. Es decir $\simeq$ verifica: $a_1 \simeq a_2$ y $b_1 \simeq b_2$ implican $a_1+b_1 \simeq a_2+b_2$ Consideremos el conjunto cociente $M/\simeq$ y sea $\rho : M \longrightarrow M/\simeq$ la aplicacion canonica. Definimos una suma en $M/\simeq$ asi:

$$\rho(a)+\rho(b)=\rho(a+b)$$

PROPOSICION 12.- $M/\simeq$ con la ley suma anteriormente definida es un monoide abeliano

Demostracion: a) $\rho(a_1)=\rho(a_2)$ si y solo si $a_1 \simeq a_2$; $\rho(b_1)=\rho(b_2)$ si y solo si $b_1 \simeq b_2$. Por la Definicion 9, $a_1+b_1 \simeq$ $\simeq a_2+b_2$, pero esto implica $\rho(a_1+b_1)=\rho(a_2+b_2)$, luego la ley esta bien definida.

b) $\{\rho(a)+\rho(b)\}+\rho(c)=\rho(a+b)+\rho(c)=\rho\{(a+b)+c\}=\rho\{a+(b+c)\}=$ $=\rho(a)+\rho(b+c)=\rho(a)+\{\rho(b)+\rho(c)\}$

$\rho(a)+\rho(0)=\rho(a+0)=\rho(a)=\rho(0+a)=\rho(0)+\rho(a)$

$\rho(a)+\rho(b)=\rho(a+b)=\rho(b+a)=\rho(b)+\rho(a)$.

PROPOSICION 13.- Sea M un Monoide abeliano, $\simeq$ una congruencia sobre M. Entonces $\rho$: $M \longrightarrow \frac{M}{\simeq}$ es un epimorfismo de monoides abelianos.

PROPOSICION 14.- Sea M un monoide abeliano, $\simeq$ una congruencia sobre M y $\rho: M \longrightarrow \frac{M}{\simeq}$ el epimorfismo canonico. Sea $f: M \longrightarrow N$ un homomorfismo de monoides abelianos verificando la condicion: $a \simeq b$ implica $f(a)=f(b)$. Entonces existe un unico homomorfismo $g: \frac{M}{\simeq} \longrightarrow N$ tal que $f=g \cdot \rho$. Si f es un epimorfismo, g es un epimorfismo. Si $f(a)=f(b)$ implica $a \simeq b$, entonces g es un monomorfismo.

Demostracion: Existencia: Definimos una aplicacion $g: \frac{M}{\simeq} \rightarrow N$ asi: $g\{\rho(a)\}=f(a)$. Esta bien definida ya que si $\rho(a)=\rho(b)$, entonces $a \simeq b$ lo que implica $f(a)=f(b)$. Es un homomorfismo de monoides: $g\{\rho(a)+\rho(b)\}=g\{\rho(a+b)\}=f(a+b)=f(a)+f(b)=g\{\rho(a)\}+$ $+g\{\rho(b)\}$ ; $g\{\rho(0)\}=f(0)=0$, y por la forma de definirla, $g \cdot \rho=f$.

Unicidad: Sea $h: \frac{M}{\simeq} \longrightarrow N$ tal que $h \cdot \rho=f=g \cdot \rho$. Como $\rho$ es sobre $h=g$. El resto es trivial.

DEFINICION 10.- Al monoide $\frac{M}{\simeq}$ le llamamos monoide cociente de M sobre $\simeq$ y a $\rho$ epimorfismo canonico.

La Proposicion 14 puede reformularse diciendo que $\rho$ es un elemento universal para el funtor de la categoria de monoides abelianos en la de conjuntos definido como subfuntor del funtor de representacion covariante por la ley objeto F que asocia a cada monoide abeliano A el conjunto de morfismos $F(A)=\{f \mid f:M\to A$ tal que $a\simeq b$ implica $f(a)=f(b)\}$.

Sea M un monoide abeliano y N un submonoide suyo. Definimos una relacion en M asi: $a\simeq b$ si y solo si existen $m,n\varepsilon N$ tales que $a+m=b+n$.

PROPOSICION 15.- La relacion que acabamos de definir es una congruencia sobre M.

Demostracion: Es immediato que es reflexiva y simetrica. En cuanto a la transitividad: $a\simeq b$ si y solo si $a+m=b+n$; $b\simeq c$ si y solo si $b+p=c+q$. Luego $a+m+p=b+n+p=c+n+q$ lo que implica $a\simeq c$. Es compatible con la ley: $a_1\simeq b_1$ equivale a $a_1+m_1=b_1+n_1$, y $a_2\simeq b_2$ equivale a $a_2+m_2=b_2+n_2$. Luego $a_1+a_2+m_1+m_2=b_1+b_2+n_1+n_2$, o sea $a_1+a_2\simeq b_1+b_2$.

DEFINICION 11.- Al monoide $\frac{M}{\simeq}$ siendo $\simeq$ la congruencia que acabamos de definir le llamamos monoide cociente de M sobre N y lo representamos por M/N.

PROPOSICION 16.- Sea $f:M\longrightarrow A$ un homomorfismo de monoides abelianos y N un submonoide de M tal que $f(a)=0$ para todo a de N. Existe entonces un unico homomorfismo de monoides $g:M/N\longrightarrow A$ tal que $g\cdot\rho=f$, siendo $\rho:M\longrightarrow M/N$ el epimorfismo canonico.

Demostracion: Si $a\simeq b$, existen $m,n\varepsilon N$ tales que $a+m=b+n$. Entonces $f(a+m)=f(b+n)=f(a)+f(m)=f(a)=f(b)+f(n)=f(b)$, y f verifica la hipotesis de la Proposicion 14. Dicha Proposicion nos da el homomorfismo g buscado.

La Proposicion 16 nos dice que $\rho: M \longrightarrow M/N$ es un elemento universal para el funtor de la categoria de monoides abelianos en conjuntos definido como subfuntor del funtor de representacion covariante por la ley objeto que a cada monoide abeliano A la asocia el conjunto de morfismos

$$F(A)=\{f \mid f:M\to A,\ f(N)=0\}.$$

PROPOSICION 17.- La composicion de homomorfismos de monoides abelianos es distributiva respecto a la suma.

Demostracion: Sean $g:A\to M$; $f_1,f_2:M\to N$; $h:N\to B$ homomorfismos de monoides abelianos.Entonces para todo a de A, $(f_1+f_2)\cdot g(a)= (f_1+f_2)\{g(a)\}=f_1\{g(a)\}+f_2\{g(a)\}=f_1\cdot g(a)+f_2\cdot g(a)$ luego $(f_1+f_2)\cdot g= f_1\cdot g+f_2\cdot g$. Igual se demuestra que $h\cdot(f_1+f_2)= =h\cdot f_1+h\cdot f_2$.

PROPOSICION 18.- El monoide trivial (que consta del solo elemento cero) es un objeto nulo en la categoria de monoides abelianos.

DEFINICION 12.- Sea $f_\lambda:A\to B$, $\lambda\varepsilon\Lambda$ una familia de homomorfismos de monoides abelianos. Llamamos nucleo diferencia de los $f_\lambda$ al conjunto $\{a\varepsilon A \mid f_\lambda(a)=f_\mu(a)$ para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda\}=I(f_\lambda)$. A la aplicacion de insercion $i:I(f_\lambda)\longrightarrow A$ le llamamos morfismo nucleo diferencia. Tambien suelen llamarse respectivamente igualador de las $f_\lambda$ y morfismo igualador.

PROPOSICION 19.- $I(f_\lambda)$ es un submonoide de A

Demostracion: Sean $a,b \varepsilon I(f_\lambda)$. Entonces $f_\lambda(a+b)=f_\lambda(a)+$ $+f_\lambda(b)=f_\mu(a)+ f_\mu(b)=f_\mu(a+b)$, luego $a+b\varepsilon I(f_\lambda)$. Por otra parte $f_\lambda(0)=0=f_\mu(0)$ para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda$.

PROPOSICION 20.- Sea $f_\lambda:A\longrightarrow B,\lambda\varepsilon\Lambda$ una familia de homomorfismos de monoides abelianos. Sea X un monoide abeliano y $g:X\longrightarrow A$ un homomorfismo tal que $f_\lambda\cdot g=f_\mu\cdot g$ para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda$. Existe entonces un unico morfismo $h:X\longrightarrow I(f_\lambda)$ tal que $i\cdot h=g$.

Demostracion: Para todo $x\varepsilon X$ tenemos que $f_\lambda g(x)=f_\mu g(x)$. Luego $g(x)\varepsilon I(f_\lambda)$. Definimos entonces $h(x)=g(x)$. La unicidad se deduce de que i es inyectiva.

Como ademas $f_\lambda\cdot i=f_\mu\cdot i$ para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda$esto nos dice que el homomorfismo $i:I(f_\lambda)\longrightarrow A$ es universal para el funtor contravariante de la categoria de monoides abelianos en la categoria de conjuntos definido como subfuntor del funtor de representacion contravariante correspondiente al objeto A por la ley objeto $G(X)=\{g|g:X\longrightarrow A$ tal que $f_\lambda\cdot g= f_\mu\cdot g\}$.

En particular del teorema de unicidad para elementos universales se deduce que el igualador esta univocamente determinado salvo isomorfismo por la propiedad de la Proposicion 20.

DEFINICION 13.- El nucleo de un homomorfismo $f:A\longrightarrow B$ es el nucleo diferencia de la familia $\{f,0\}$ donde $0:A\longrightarrow B$ es el morfismo trivial.

DEFINICION 14.- Sea $f_\lambda : A \longrightarrow B, \lambda \varepsilon \Lambda$ una familia de homomorfismos de monoides abelianos. Definimos una relacion en B asi: $b_1 R b_2$ si y solo si existe un $a \varepsilon A$, un $b \varepsilon B$ y $\lambda, \mu \varepsilon \Lambda$ tales que $b_1 = b + f_\lambda(a)$ y $b_2 = b + f_\mu(a)$. Llamamos $\approx$ a la minima congruencia que contenga a R. Al monoide cociente $\frac{B}{\approx} = C(f_\lambda)$ le llamamos conucleo diferencia o coigualador de los $f_\lambda$. Al epimorfismo canonico $\rho : M \longrightarrow \frac{M}{\approx}$ le llamamos morfismo coigualador o conucleo diferencia de los $f_\lambda$.

PROPOSICION 21.- Sea $f_\lambda : A \longrightarrow B$ una familia de homomorfismos de monoides abelianos, y sea $g : B \longrightarrow X$ un homomorfismo de monoides abelianos tal que $g \cdot f_\lambda = g \cdot f_\mu$ para todo $\lambda, \mu \varepsilon \Lambda$. Existe entonces un unico morfismo $h : C(f_\lambda) \longrightarrow X$ tal que $g = h \cdot \rho$.

Demostracion: Para $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$ y $\lambda, \mu \varepsilon \Lambda$ tenemos: $g(b_1) = g(b) + g \cdot f_\lambda(a) = g(b) + g \cdot f_\mu(a) = g(b_2)$ luego $b_1 R b_2$ implica que $g(b_1) = g(b_2)$. Por la Proposicion 14 existe el h unico buscado.

Esta Proposicion nos dice que el epimorfismo canonico $\rho : B \longrightarrow C(f_\lambda)$ es un elemento universal para el subfuntor del funtor de representacion covariante correspondiente a B, definidi por la funcion objeto: $F(X) = \{g \mid g : B \longrightarrow X \text{ tal que } gf_\lambda = gf_\mu\}$

Por el teorema de unicidad para elementos universales, $C(f_\lambda)$ esta determinado salvo isomorfismo por la propiedad enunciada en la Proposicion 21.

Sea $\{A_\lambda\}$ $\lambda\varepsilon\Lambda$ una familia arbitraria de monoides abelianos. Podemos definir dos funtores F,G:*Monab*$\rightsquigarrow$*S*,siendo F covariante y G contravariante de la siguiente forma:Para todo monoide abeliano X, $F(X)=\prod_{\lambda\varepsilon\Lambda}\hom(A_\lambda,X)$ y $G(X)=\coprod_{\lambda\varepsilon\Lambda}\hom(X,A_\lambda)$ y si $f:X\longrightarrow Y$ es un homomorfismo, definimos $F(f):F(X)\longrightarrow F(Y)$ por $F(f)(\phi_\lambda)=(f\cdot\phi_\lambda)$, y $G(f):G(Y)\longrightarrow G(X)$ por $G(f)(\phi_\lambda)=(\phi_\lambda\cdot f)$.

En las Proposiciones 22 y 23 demostraremos que estos dos funtores son representables.

DEFINICION 15.- Al objeto universal del funtor G le llamamos producto de la familia $\{A_\lambda\}$ y se representa por $\prod_{\lambda\varepsilon\Lambda}A_\lambda$.Al objeto universal del funtor F le llamamos coproducto de la familia $\{A_\lambda\}$ y se representa por $\coprod_{\lambda\varepsilon\Lambda}A_\lambda$.

Traducido a diagrama, el producto de la familia $\{A_\lambda\}$, tambien llamado producto directo, es un monoide abeliano $P=\prod_{\lambda\varepsilon\Lambda}A$ junto con una familia de homomorfismos de monoides abelianos $p_\lambda:P\longrightarrow A_\lambda$ verificando que para cualquier otro monoide abeliano X y cualquier familia de homomorfismos $f_\lambda:X\longrightarrow A$ existe un homomorfismo unico $f:X\longrightarrow P$ tal que $p_\lambda\cdot f=f_\lambda$.

Dualmente, el coproducto (llamado tambien suma directa) de la familia $\{A_\lambda\}$ seria un monoide abeliano $C=\coprod_{\lambda\varepsilon\Lambda}A_\lambda$ junto con una familia de homomorfismos $i_\lambda:A_\lambda\longrightarrow C$ tal que para cualquier monoide abeliano X y cualquier familia de homomorfismos $f_\lambda:A_\lambda \longrightarrow X$, existe un homomorfismo unico $f:C\longrightarrow X$ tal que $f\cdot i_\lambda = f_\lambda$.

PROPOSICION 22.- Para cualquier familia $\{A_\lambda\}, \lambda\varepsilon\Lambda$ ,de monoides abelianos existe el producto $P=\prod\limits_{\lambda\varepsilon\Lambda} A_\lambda$.

Demostracion: Definamos el conjunto P como el producto cartesiano de los conjuntos $A_\lambda$.En P definimos la suma por componentes: $(a_\lambda)+(b_\lambda)=(a_\lambda+b_\lambda)$.

Esimmediato comprobar que con esta ley P es un monoide abeliano. Definimos la familia de aplicaciones $p_\lambda$ asi: $p_\lambda\{(a_\lambda)\}=a_\lambda$. Tambien es immediato verificar que son epimorfismos. Sea ahora $f_\lambda:X\longrightarrow A_\lambda$ una familia de homomorfismos. Definimos una aplicacion $f:X\longrightarrow P$ asi: $f(x)=(f_\lambda(x))$. Entonces tenemos $f(0)=(f_\lambda(0))=(0_\lambda)$; $f(x+y)=(f_\lambda(x+y))=(f_\lambda(x)+f_\lambda(y))=(f_\lambda(x))+(f_\lambda(y))=f(x)+f(y)$, luego f es un homomorfismo. Ademas $p_\lambda\cdot f(x)=p_\lambda\{f(x)\}=p_\lambda\{(f\ (x))\}=f_\lambda(x)$ luego $p_\lambda\cdot f=f_\lambda$.

Veamos que este f es unico. Supongamos que hubiese otro g tal que $p_\lambda\cdot g=f_\lambda$. Consideramos las aplicaciones $i_\lambda:A_\lambda\longrightarrow P$ definidas asi: $i_\lambda(a)=(a_\mu)$ donde $a_\mu=a$ para $\lambda=\mu$ y $a_\mu=0$ para $\lambda\neq\mu$ Es immediato comprobar que los $i_\lambda$ son homomorfismos y que $p_\lambda\cdot i_\lambda=$ identidad sobre $A_\lambda$. Por otra parte, para $(a_\mu)\varepsilon P$, $i_\lambda\cdot p_\lambda(a_\mu)=(b_\mu)$ donde $b_\lambda=a_\lambda$ y $b_\mu=0$ para $\mu\neq\lambda$. Entonces, para todo $a\varepsilon X$ y todo $\lambda\varepsilon\Lambda$tenemos: $i_\lambda\cdot p_\lambda\cdot g(a)=i_\lambda\cdot p_\lambda\cdot f(a)$, de donde $f_\lambda(a)=g_\lambda(a)$ para todo $\lambda\varepsilon\Lambda$luego $g(a)=f(a)$,luego $g=f$.

PROPOSICION 23.- Para cualquier familia $\{A_\lambda\}$, $\lambda\varepsilon\Lambda$ de monoides abelianos existe el coproducto $C=\coprod_{\lambda\varepsilon\Lambda} A_\lambda$.

Demostracion: C va a ser el submonoide de P formado por los elementos $(a_\lambda)$ tales que $a_\lambda=0$ para casi todo $\lambda$ (es decir, para todos excepto un numero finito). Las $i_\lambda$ son las antes definidas, y si $(a_\lambda)\varepsilon C$, se toma $f\{(a_\lambda)\}=\sum f_\lambda(a_\lambda)$. Esta suma es finita ya que se extiende solo a aquellas coordenadas que son distintas de cero. Es immediato que $f_\lambda=f\cdot i_\lambda$. La unicidad de f se demuestra analogamente a la Proposicion 22.

COROLARIO.- Si $\Lambda$ es un conjunto finito, entonces C=P.

DEFINICION 16.- En el caso en que $\Lambda$ sea finito, al monoide que es a la vez producto y coproducto le llamamos biproducto de los $A_\lambda$.

En este caso se verifican las relaciones: $p_\lambda\cdot i_\lambda=1_{A_\lambda}$; si $\lambda\neq\mu$ entonces $p_\lambda\cdot i_\mu=0$ y $\sum i_\lambda\cdot p_\lambda=1_P$.

# CAPITULO II

## Construcciones de Monoides Abelianos

Sea S un conjunto cualquiera. Construimos un funtor $F:\mathit{Monab}\rightsquigarrow S$ de la siguiente forma: Para todo monoide abeliano A, $F(A)=\{f \mid f:S\longrightarrow A\}$, es decir F(A) es el conjunto de todas las aplicaciones de S en A. Para todo homomorfismo de monoides abelianos $\phi:A\longrightarrow B$ $F(\phi):F(A)\longrightarrow F(B)$ se define por $F(\phi)=f\cdot\phi$. La proposicion 24 demuestra que el funtor F es representable.

DEFINICION 17.- Al objeto representante de F se le llama monoide abeliano libre sobre S.

Es decir, un monoide abeliano libre sobre S es un monoide abeliano L junto con una aplicacion $i:S\longrightarrow L$ tal que para cualquier otro monoide abeliano X y cualquier aplicacion $\phi:S\longrightarrow X$ existe un morfismo unico de monoides $f:L\longrightarrow X$ tal que $f\cdot i=\phi$.

PROPOSICION 24.- Para todo conjunto S existe un monoide abeliano libre sobre S.

Demostracion: Tomamos L=Fun(S,N) el conjunto de todas las aplicaciones de S en N (mOnOide de los numeros naturales). Definimos una suma en L asi: $(f+g)s=f(s)+g(s)$. Es immediato verificar que con esta ley L tiene estructura de mo noide abeliano. Definimos una aplicacion $j:S\longrightarrow L$ asi: $j(s)=j_s$ donde $j_s:S\longrightarrow N$ viene dada por $j_s(s)=1$, $j_s(t)=0$ para $t\neq s$.

Llamamos $F_S$ al submonoide engendrado por todas las $j_s$, y definimos $i:S\longrightarrow F_S$ como restriccion de $j$: $j(s)=i(s)=j_s$. Vamos a demostrar que $F_S$ con la aplicacion $i$ es un monoide abeliano libre sobre S.

Sea X otro monoide abeliano y $\phi:S\longrightarrow X$ una aplicacion cualquiera. Definimos $f:F_S\longrightarrow X$ asi: $f(j_s)=\phi(s)$; para todo $\xi$ de $F_S$ llamamos $\xi_s=\xi(s)\varepsilon N$. Solo un numero finito de $\xi_s$ son distintos de cero. Es facil ver que $\xi=\sum\xi_s j_s$. Entonces $f(\xi)=$ $=\sum\xi_s\phi(s)$. Tambien es rutinario comprobar que f es un morfismo de monoides, y $f\cdot i=\phi$. Supongamos que existiese otro morfismo $g:F_S\longrightarrow X$ tal que $g\cdot i=\phi$. Entonces para todo $\xi$ de $F_S$, $g(\xi)=g(\sum\xi_s j_s)=\sum\xi_s g(j_s)=\sum\xi_s g\cdot i(s)=\sum\xi_s\phi(s)=f(\xi)$. Luego $g=f$.

DEFINICION 18.- Un monoide abeliano A se llama libre si es isomorfo a un monoide abeliano libre sobre un conjunto S.

PROPOSICION 25.- Sea A un monoide abeliano engendrado por los elementos $a_1, \ldots ,a_n$ tales que:

$$k_1a_1+\ldots+k_na_n=k_1'a_1+\ldots+k_n'a_n \text{ implica } k_i=k_i' \quad i=1,\ldots,n$$

Entonces A es un monoide abeliano libre.

Demostracion: Sea $F_S$ el monoide abeliano libre sobre $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Definimos la aplicacion de inclusion $\phi:S\longrightarrow A$. Existe un unico morfismo $f:F_S\longrightarrow A$ tal que $f\cdot i=\phi$. Este f viene definido por $f(\sum\xi_j i_j)=\sum\xi_j\phi(a_j)=\sum\xi_j a_j$.

a) f es sobre, ya que para $a\varepsilon A$ existen $k_j\varepsilon N$ tales que $a=\sum k_j a_j$. Luego $a=f(\sum k_j i_j)$.

b) f es inyectiva: Sea $f(\sum\xi_j i_j)=f(\sum\eta_j i_j)=\sum\xi_j a_j=\sum\eta j a_j$ Pero entonces $\xi_j=\eta_j$.

--------------

DEFINICION 19.- Sea $f_\lambda:B\longrightarrow A_\lambda$ $\lambda\varepsilon\Lambda$ una familia de morfismos de monoides abelianos con el mismo dominio. Llamamos suma amalgamada o impulsor de la familia $f_\lambda$ a un monoide abeliano I junto con una familia de morfismos de monoides $i_\lambda:A_\lambda\longrightarrow I$ que verifiquen dos condiciones:

I1) Para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda$, $i_\lambda f_\lambda=i_\mu f_\mu$.

I2) Para todo monoide abeliano X y toda familia de morfismos de monoides $g_\lambda:A_\lambda\longrightarrow X$ tal que $g_\lambda f_\lambda=g_\mu f_\mu$, existe un único morfismo $g:I\longrightarrow X$ tal que $g\cdot i_\lambda=g_\lambda$ , $\lambda\varepsilon\Lambda$

PROPOSICION 26.- Para toda familia $\{f_\lambda\}$ $\lambda\varepsilon\Lambda$ de morfismos de monoides abelianos con el mismo dominio existe un impulsor.

Demostracion: Consideremos el coproducto $C=\coprod_{\lambda\varepsilon\Lambda}A_\lambda$, y sean $j_\lambda:A_\lambda\longrightarrow C$ los morfismos canonicos. Sea ahora la familia de morfismos $j_\lambda\cdot f_\lambda:B\longrightarrow C$, y sea I el coigualador de esta familia siendo $\rho:C\longrightarrow I$ la proyeccion canonica. Vamos a demostrar que I junto con los morfismos $i_\lambda=\rho j_\lambda:A_\lambda\longrightarrow I$ es un impulsor de la familia $\{f_\lambda\}$.

a) $i_\lambda f_\lambda = \rho j_\lambda f_\lambda$ y $i_\mu f_\mu = \rho j_\mu f_\mu$. Por definicion de coigualador, $\rho j_\lambda f_\lambda = \rho j_\mu f_\mu$.

b) Sea $g_\lambda : A_\lambda \longrightarrow X$ una familia de morfismos tal que para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda$ , $g_\lambda f_\lambda = g_\mu f_\mu$. Entonces por definicion de coproducto existe un unico $h:C\longrightarrow X$ tal que $hj_\lambda = g_\lambda$. Ademas $h(j_\lambda f_\lambda)=$ $=(hj_\lambda)f_\lambda = g_\lambda f_\lambda = g_\mu f_\mu = (hj_\mu)f_\mu = h(j_\mu f_\mu)$. Por la propiedad universal del coigualador existe un unico $g:I\longrightarrow X$ tal que $g\rho = h$.

Pero entonces $gi_\lambda = g\rho j_\lambda = hj_\lambda = g_\lambda$, con lo que queda demostrada la existencia. La unicidad es immediata.

COROLARIO .- I esta engendrado por la union de las imagenes $i_\lambda(A_\lambda)$ para $\lambda\varepsilon\Lambda$.

La definicion de impulsor nos dice que I junto con los morfismos $i_\lambda$ forma un elemento universal para el funtor $F:\mathit{Monab}\rightsquigarrow \mathit{S}$ definido asi:

$$F(X)=\{(g_\lambda)\varepsilon\prod_{\lambda\varepsilon\Lambda}\hom(A_\lambda,X)\mid g_\lambda f_\lambda = g_\mu f_\mu \quad \lambda,\mu\varepsilon\Lambda\}.$$

para la funcion objeto. Y para la funcion morfismo: Si $\phi:X\longrightarrow Y$, $F(\phi):F(X)\longrightarrow F(Y)$ dado por $F(\phi)(g_\lambda)=(\phi\cdot g_\lambda)$.

DEFINICION 20.- Sea $f_\lambda : A_\lambda \longrightarrow B$ una familia de morfismos de monoides abelianos con el mismo codominio. Llamamos producto fibrado o tirador de la familia $\{f_\lambda\}$ a un monoide abeliano T junto con una familia de morfismos de monoides $q_\lambda : T\longrightarrow A_\lambda$ que verifica las condiciones:

T1) Para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda$ , $f_\lambda q_\lambda = f_\mu q_\mu$.

T2) Para cualquier monoide abeliano X y cualquier familia de morfismos $g_\lambda : X \longrightarrow A_\lambda$ tal que $f_\lambda g_\lambda = f_\mu g_\mu$, existe un unico morfismo $g: X \longrightarrow T$ tal que $g_\lambda = q_\lambda \cdot g$.

PROPOSICION 27.- Para cualquier familia $\{f_\lambda\}$ $\lambda\varepsilon\Lambda$ de morfismos de monoides abelianos con el mismo codominio existe un tirador.

Demostracion: Consideremos el producto $P=\prod_{\lambda\varepsilon\Lambda} A_\lambda$, y sean $p_\lambda : P \longrightarrow A_\lambda$ los morfismos canonicos.

Tomamos la familia de morfismos $f_\lambda p_\lambda : P \longrightarrow B$ y sea T el igualador de esta familia con morfismo canonico $j: T \longrightarrow P$. Vamos a demostrar que T junto con la familia de morfismos $q_\lambda = p_\lambda \cdot j : T \longrightarrow A$ es un tirador para la familia $\{f_\lambda\}$.

a) Para todo $\lambda,\mu\varepsilon\Lambda$ $f_\lambda q_\lambda = f_\lambda p_\lambda j$ y $f_\mu q_\mu = f_\mu p_\mu j$. Por la propiedad universal del igualador $f_\lambda p_\lambda j = f_\mu p_\mu j$.

b) Sea $g_\lambda : X \longrightarrow A_\lambda$ una familia de morfismos que verifican $f_\lambda g_\lambda = f_\mu g_\mu$. Por la definicion de producto existe un unico $h: X \longrightarrow P$ tal que $p_\lambda \cdot h = g_\lambda$ para todo $\lambda\varepsilon\Lambda$.

Consideremos la familia de morfismos $f_\lambda p_\lambda : P \longrightarrow B$. Tenemos $(f_\lambda p_\lambda)h = f_\lambda(p_\lambda h) = f_\lambda q_\lambda = f_\mu q_\mu = f_\mu(p_\mu h) = (f_\mu p_\mu)h$. Por la propiedad universal del igualador existe un unico $g: X \longrightarrow T$ tal que $j \cdot g = h$ Pero entonces $q_\lambda g = p_\lambda \cdot j \cdot g = p_\lambda \cdot h = g_\lambda$, con lo que queda demostrada la existencia. La unicidad es immediata.

La definicion de tirador nos dice que T junto con la familia $q_\lambda$ es un elemento universal para el funtor contravariante $G: \mathcal{Monab} \rightsquigarrow \mathcal{S}$ definido de la siguiente forma:

$$G(X)=\{(g_\lambda)\varepsilon\prod_{\lambda\varepsilon\Lambda}\hom(X,A_\lambda)\,|\,f_\lambda g_\lambda=f_\mu g_\mu\}.$$

para la funcion objeto. Y para la funcion morfismo:

Si $\phi: X\longrightarrow Y$ entonces $F(\phi):F(Y)\longrightarrow F(X)$ dado por $F(\phi)(g_\lambda)=(g_\lambda\cdot\phi)$.

Al ser el tirador y el impulsor elementos universales para determinados funtores, se les aplica el teorema de unicidad para elementos universales y obtenemos:

PROPOSICION 28.- a) El tirador de una familia $f_\lambda: A\longrightarrow B$ es unico salvo isomorfismos.

b) El impulsor de una familia $f_\lambda: B\longrightarrow A$ es unico salvo isomorfismos.

Particularmente interesantes son los casos de impulsor cuando B es un submonoide de cada $A_\lambda$ y $f_\lambda$ es la aplicacion de inclusion, en cuyo caso al impulsor I le vamos a llamar suma amalgamada de los $A_\lambda$ con amalgama B, y lo representamos por $\coprod_B A_\lambda$, y el caso dual del tirador cuando los $f_\lambda$ son todos epimorfismos, aunque en este caso no le daremos nombre especial. Volviendo al caso primero, si $\Lambda$ es un conjunto de dos elementos $\{1,2\}$ usaremos la notacion $A_1\coprod_B A_2$ para representar la suma amalgamada de $A_1$ y $A_2$ con amalgama B.

En estos dos casos se verifican las propiedades siguien tes:

PROPOSICION 29.- Sea T el tirador de los morfismos $f_1:A_1 \longrightarrow B$ y $f_2:A_2 \longrightarrow B$. Sean $q_i:T \longrightarrow A_i$ $i=1,2$ los morfismos canonicos. Entonces si $f_1$ es monomorfismo, $q_2$ es monomorfismo y si $f_2$ es un monomorfismo, $q_1$ es un monomorfismo.

PROPOSICION 30.- Sea I el impulsor de los morfismos $f_1:B \longrightarrow A_1$ y $f_2:B \longrightarrow A_2$. Sean $j_i:A_i \longrightarrow I$ los morfismos canonicos. Entonces si $f_1$ es epimorfismo, $j_2$ es epimorfismo, y si $f_2$ es epimorfismo, $j_1$ es epimorfismo.

# C A P I T U L O III

## Monoides ciclicos. Componentes.

DEFINICION 21.- Sea M un monoide. Se dice que M es ciclico si existe un elemento a de M tal que para cualquier otro x de M existe un natural n que verifica $x=na$. En particular $0=0a$. Tal elemento a cuando existe se llama generador de M y no necesita ser unico. Escribiremos tambien $M=\langle a\rangle=Na$.

Un monoide ciclico dado M puede ser finito o infinito. Vamos a establecer una caracterizacion.

PROPOSICION 31.- Un monoide ciclico M con generador a es finito si y solo si existen $m,n\varepsilon N$, $m\neq n$ tales que $ma=na$.

Demostracion: a) Necesidad: Consideremos la aplicacion $f:N\longrightarrow M$ dada por $f(n)=na$. Al ser M finito, f no puede ser inyectiva luego existen $m\neq n$, tales que $f(m)=ma=na=f(n)$.

b) Suficiencia: Sean $m,n\varepsilon N$, $m<n$ y $ma=na$. Entonces por induccion sobre p: $(m+p)a=(m+(p-1))a+a=(n+(p-1)a+a=(n+p)a$, de forma que todos los elementos desde n en adelante son repeticion de los anteriores y solo hay un numero finito de elementos distintos en M.

COROLARIO 1.- Un monoide ciclico M con generador a es infinito si y solo si para todos $m,n\varepsilon N$, $m\neq n$ implica $ma\neq na$.

COROLARIO 2.- La aplicacion $f:N \longrightarrow M$ dada por $f(n)=na$ es un epimorfismo de monoides si M es ciclico de generador a, y ademas es un isomorfismo si M es ciclico infinito de generador a.

Demostracion: $f(m+n)=(m+n)a=ma+na=f(m)+f(n)$; $f(0)=0a=0$ luego f es un homomorfismo de monoides. Si M es ciclico de generador a, para todo x de M existe un n de N tal que $x=na$ luego $x=f(n)$ y f es sobre. Si ademas M es infinito, por el corolario 1, $m \neq n$ implica $ma \neq na$ o sea $f(m) \neq f(n)$ y f es inyectiva.

Luego todo monoide ciclico infinito es isomorfo al de los numeros naturales con la ley suma. Vamos a estudiar ahora la estructura de los monoides ciclicos finitos.

Sea M un monoide ciclico finito con generador a. Consideremos el conjunto S de pares $(m,n) \in N \times N$ con $m<n$ y $ma=na$. Este conjunto es no vacio por la proposicion 31. Sea ahora $T=pr_2(S)=\{n \in N \mid \text{existe un } m \in N \text{ tal que } (m,n) \in S\}$. Por ser un subconjunto de N esta bien ordenado y tiene primer elemento. Sea $\nu$ este primer elemento. Sea ahora $\mu<\nu$ tal que $\mu a=\nu a$, lo que equivale a $(\mu,\nu) \in S$. Como vimos en la demostracion de la Proposicion 31, para todo p de N $(\nu+p)a=(\mu+p)a$. En general para todo $n \in N$ por el algoritmo de la division, $(n-\mu)=q(\nu-\mu)+$ $+r$ donde $0 \leq r<\nu-\mu$, y $na=((n-\mu)+\mu)a=(r+\mu)a$ si $n \geq \mu$. Los primeros $\mu$ elementos, desde $0=0a$ hasta $(\mu-1)a$, no se repiten nunca, mientras que los demas se repiten con periodicidad $(\nu-\mu)$

M queda pues perfectamente determinado por estos dos numeros. A $\mu$ le llamamos numero inicial (y a los elementos $0,a,\ldots,(\mu-1)a$ elementos iniciales) de M y de a, y a $t=\nu-\mu$ le llamamos periodo de M y de a (y a los elementos $\mu a,\ldots,(\nu-1)a$ elementos periodicos).

DEFINICION 22.- Un elemento a de un monoide M se llama de torsion si el monoide ciclico engendrado por a es finito.

Esto es equivalente a decir: Un elemento a de M es de torsion si existen m,n de N, $m\neq n$ tales que $ma=na$.

DEFINICION 23.- Un elemento a de un monoide M se llama periodico si existe un natural n tal que $na=a$.

Es decir, un elemento periodico es un elemento de torsion con numero inicial cero o uno.

PROPOSICION 32.- Un monoide ciclico de generador a es un grupo si y solo si existe un natural $n\neq 0$ tal que $na=0$.

Demostracion: Sea $n\neq 0$ y $na=0$. Sea x un elemento de M entoces $x=ka$ con $k\varepsilon N$. Sea $k=qn+r$ con $0\leq r<n$ Sea $y=(n-r)a$. Entonces $x+y=ka+(n-r)a=(q+1)ma=(q+1)0=0$. Luego x tiene un inverso y M es un grupo.

A la inversa, supongamos que M es un grupo. Existe un elemento $b=-a$ en M tal que $a+b=0$. Pero como M es ciclico de generador a, existe un natural n tal que $b=na$. Luego $a+b= =a+na=(n+1)a=0$ con $n+1$ natural, como queriamos.

Ademas M como grupo es ciclico de generador a.

PROPOSICION 33.- Sea $M=\langle a\rangle$. M admite otro generador si y solo si a es periodico de periodo mayor que uno.

Demostracion: Sea $M=\langle a\rangle=\langle b\rangle$, $b\neq a$. Existen naturales h y k tales que $a=hb$ y $b=ka$. Entonces $a=h(ka)=(hk)a=na$ y a es periodico. A la inversa, sea a periodico de periodo $t>1$. Entonces $a=(t+1)a$. Sea $k\varepsilon N$ tal que $mcd(k,t)=1$. Esto implica que existen $x,y\varepsilon N$ tales que $xk-yt=1$ o sea $kx=1+yt$. Luego $a= (1+yt)a=xka=xb$, siendo pues $b=ka$ otro generador.

PROPOSICION 34.- Sea $f:M\longrightarrow A$ un epimorfismo de monoides, sea M ciclico de generador a. Entonces A es ciclico de generador $b=f(a)$.

Demostracion: Para todo y de A existe un x de M tal que $y=f(x)$. Por ser Mciclico de generador a existe un natural n tal que $x=na$. Luego $y=f(na)=nf(a)=nb$.

COROLARIO.- Un monoide ciclico $M=\langle a\rangle$ tal que el numero inicial de a sea mayor que uno, solo tiene un automorfismo.

Demostracion: Cualquier automorfismo tiene que llevar a en otro generador segun la Proposicion 34. Pero al ser el numero inicial de a mayor que 1, M no tiene ningun otro generador segun la Proposicion 33.

PROPOSICION 35.- Sea M un monoide, $a\varepsilon M$, t el periodo de a e i su numero inicial. Entonces $k=tm\varepsilon N$ si y solo si $ia=$ $=(i+k)a$.

Demostracion: Suficiencia: Sea $k=tm$. Vamos a demostrarlo por induccion sobre m. Para $m=0$ es trivial. Supongamoslo para $(m-1)$. Entonces $(i+k)a=(i+tm)a=(i+t+t(m-1))a=(i+t)a+$ $+t(m-1)a=ia+t(m-1)a=(i+t(m-1))a=ia$.

Necesidad: Sea $(i+k)a=ia$. Sea $k=qt+r$ con $0\leq r<t$. Entonces $(i+k)a=(i+qt+r)a=(i+r)a$. Por definicion de periodo,esto implica $r=0$. Luego $k=qt$.

COROLARIO 1.- En las condiciones de la Proposicion 35 sea $r\geq i$. Entonces $ra=(r+k)a$ si y solo si $k=tm$.

Al periodo de un elemento $a\varepsilon M$ le vamos a notar per(a), y al numero inicial i(a).

COROLARIO 2.- Sea M un monoide abeliano, a un elemento de torsion de M y $b=ka$. Entonces el periodo de b es un divisor del periodo de a.

Demostracion: Sea $m=per(a)$; $n=per(b)$ e $i=i(a)$. Tenemos: $ib=ika=ika+mka=ib+mb$. Por el Corolario 1, $m=nq$ como queriamos demostrar.

COROLARIO 3.- En el enunciado del Corolario 2 sea $m=$ $per(a)$. Si $mcd(m,k)=1$ entonces $pre(b)=m$.

Demostracion: Sean $m'=per(b)$ e $i=i(b)$. Por el Corolario 2, $m'|m$. Ademas $ib=(i+m')b$ implica $ika=(ik+m'k)a$. Por la Proposicion 35, $m\ m'k$. Pero $mcd(m,k)=1$ luego $m|m'$ y $m'=m$.

PROPOSICION 36.- Sea M un monoide ciclico de periodo $t=mq$. Si M tiene un elemento $b\neq 0$ con periodo q, entonces $b=$ $=mb'$ para algun $b'\varepsilon M$.

Demostracion: Sea a un generador de M, asi que $b=ka$ para algun k de N. Sea $i=i(b)$. Tenemos: $ib=(i+q)b$ o sea $ika=(ik+qk)a$. Luego qk es un multiplo del periodo t de a, sea $qk=st=smq$. Esta es una igualdad de numeros naturales distintos de cero luego $k=ms$. Sea $b'=sa$. Entonces $b=ka=msa=mb'$

La Proposicion 34 nos dice que todo monoide cociente de un monoide ciclico es a su vez ciclico. Sin embargo los submonoides de un monoide ciclico no tienen porque ser ciclicos. Pero la Proposicion 36 nos da una parte de la estructura de los submonoides ciclicos de un monoide ciclico. Para completarlo establecemos el resultado siguiente:

PROPOSICION 37.- Sea A un monoide, $a\varepsilon A$ y $t=per(a)$. Sea $b=ma$. Sea $t'=per(b)$. Entonces $t'|t$ y $\frac{t}{t'}=mcd(m,t)$

Demostracion: Sea $d=mcd(m,t)$. Entonces $m=m_1d$ y $t=t_1d$. Ademas existen naturales x,y tales que $d=xm-yt$. Vamos a demostrarlo en dos partes: a)$dt'|t$, lo que equivale a $t'|t_1$

$ib+t_1b=(im+t_1m)a=(im+t_1dm_1)a=(im+tm_1)a=ima=ib$. Por el Corolario 1 de la Proposicion 35, $t'|t$.

b) $t|dt'$, lo que equivale a $t_1|t'$.

$ib+t'b=ib=(im+t'm)a=ima$, luego $t|t'm$ o sea $t_1d|t'm_1d$ luego $t_1|t'm_1$. Pero como $mcd(t_1,m_1)=1$, tenemos $t_1|t'$.

COROLARIO.- El elemento b' de la Proposicion 36 tiene periodo $t=per(a)$ si $mcd(s,m)=1$.

Demostracion: En las condiciones de la Proposicion 36 hemos visto que $b'=sa$, donde $k=ms$. Por la Proposicion 37, $q=$ $=per(b)=\frac{t}{mcd(k,t)}$ o sea $mcd(k,t)=\frac{t}{q}=m=mcd(ms,mq)=m\cdot mcd(s,q)$ luego $mcd(s,q)=1$. Luego $mcd(s,t)=mcd(s,m)=1$. Por la Proposicion 37, $per(b')=t=per(a)$.

DEFINICION 24.- Un monoide abeliano se llama de torsion si todos sus elementos son de torsion, y libre de torsion si no tiene ningun elemento de torsion excepto el neutro.

DEFINICION 25.- Un monoide abeliano se llama periodico si todos sus elementos son periodicos.

PROPOSICION 38.- Un monoide de torsion fintamente generado es finito y viceversa.

DEFINICION 26.- Sea M un monoide abeliano cualquiera. Llamamos Tor(M) al conjunto de los elementos de torsion de M. Y llamamos Per(M) al conjunto de los elementos periodicos de M.

PROPOSICION 39.- Tor(M) es un submonoide de M.

Demostracion: Evidentemente $0 \varepsilon Tor(M)$. Sean $a,b \varepsilon Tor(M)$ luego existen $m,n,p,q \varepsilon N$, $m>n$, $p>q$ tales que $ma=na$ y $pb=qb$. $p-q>0$ luego $m(p-q)>n(p-q)$ luego $mp-mq>np-nq$ de donde $mp+nq>np+mq$ . Pero $(mp+nq)(a+b)=mpa+nqa+mpb+nqb=npa+mqa+npb+$ $+mqb=(np+mq)(a+b)$. Luego $a+b \varepsilon$ $Tor(M)$

PROPOSICION 40.- $Per(M)$ es un submonoide de M.

Demostracion: Sean $a,b \varepsilon Per(M)$. Sea $m=per(a)$ y $n=per(b)$. Entonces $a=(1+m)a$ y $b=(1+n)b$. Luego por la Proposicion 35, $(1+mn)(a+b)=(1+mn)a+(1+mn)b=a+b$, luego $a+b \varepsilon Per(M)$. Ademas $0=n0$ para todo $n \varepsilon N$. Luego $0 \varepsilon Per(M)$.

DEFINICION 27.- Sea M un monoide de torsion.Un numero natural m se llama exponente de M si para todo a de M, m es divisible por per(a). Un monoide de torsion M se llama de exponente finito si si existe un exponente de M. Al minimo de esos exponentes se le llama periodo u orden de M. Se representa por o(M).

PROPOSICION 41.- Sea M un monoide de exponente finito y sea n un exponente suyo. Entonces o(M) divide a n.

La demostracion es trivial.

PROPOSICION 42.- Sean a,b dos elementos de torsion de un monoide abeliano M. Sean $k_1=per(a)$ y $k_2=per(b)$. Entonces $per(a+b)|k_1k_2$.

Demostracion: Sea i un natural mayor que los numeros <u>i</u>

niciales de a y b. Por la Proposicion 35, $(i+k_1k_2)(a+b)=(i+k_1k_2)a+(i+k_1k_2)b=ia+ib=i(a+b)$. Luego por la misma Proposicion 35 $per(a+b)|k_1k_2$.

PROPOSICION 43.- Sea M un monoide abeliano y a un elemento periodico suyo. Si $a=a_1+a_2$, con $per(a_i)=t_i$, $i=1,2$ entonces existen $b_1,b_2 \varepsilon Per(M)$ tales que $a=b_1+b_2$ y $per(b_i)=t_i$.

Demostracion: Sean $i_1,i_2$ los numeros iniciales de $a_1,a_2$ Sea s un natural tal que $st_1t_2>i_1,i_2$. Entonces: $a=(1+st_1t_2+t_1t_2)a=(1+st_1t_2+t_1t_2)a_1+(1+st_1t_2+t_1t_2)a_2=$ $=(1+st_1t_2)a_1+(1+st_1t_2)a_2$. Sean $b_i=(1+st_1t_2)a_i$. Por el Corolario 3 de la Proposicion 35, ya que $mcd(1+st_1t_2,t_i)=1$, tenemos $per(b_i)=t_i$, y $a=b_1+b_2$.

Po otra parte, $(1+t_i)b_i=(1+t_i)(1+st_1t_2)a_i=(1+st_1t_2+$ $+t_i(1+st_1t_2))a_i=(1+st_1t_2)a_i=b_i$. Luego $b_i$ es periodico.

De manera analoga se demuestra:

PROPOSICION 44.- Si $a \varepsilon M$ es periodico, tal que $a=a_1+a_2+$ $+\dots+a_n$ con $per(a_i)=t_i$, existen $b_1,b_2,\dots,b_n \varepsilon Per(M)$ tales que $per(b_i)=t_i$ y $a=b_1+b_2+\dots+b_n$.

DEFINICION 28.- Sea M un monoide abeliano, a un elemento de M y p un natural primo. Se dica que a es un p-elemento si el periodo de a es una potencia de p.

DEFINICION 29.- Un monoide abeliano M se llama p-monoide si todos sus elementos son p-elementos.

DEFINICION 30.- Al conjunto de los p-elementos de un monoide abeliano M le llamamos p-componente de M o componente p-primaria y le representamos por M(p) o $M_p$.

PROPOSICION 45.- M(p) es un submonoide de M.

Demostracion: Evidentemente per(0)=1 es una potencia de p. Sean a,b elementos de M(p). Sea $per(a)=p^i$, $per(b)=p^j$. Por la Proposicion 42, per(a+b) divide a $p^i p^j = p^{i+j}$, luego es una potencia de p y a+b es un p-elemento.

DEFINICION 31.- Un elemento a de un monoide abeliano se llama singular si su periodo es 1.

DEFINICION 32.- Al conjunto de los elementos singulares de un monoide abeliano M le llamamos componente singular de M y lo representamos por M(1) o $M_1$.

PROPOSICION 46.- M(1) es un submonoide de M.

Demostracion: Sean a,b dos elementos singulares de M. Por la Proposicion 42, per(a+b) es un divisor del producto per(a)per(b)=1. Luego a+b es singular. Por otra parte, per(0) es uno.

PROPOSICION 47.- Para todo primo p, $M_1$ esta contenido en $M_p$.

PROPOSICION 48.- Sean p,q dos numeros primos distintos. Entonces la interseccion de $M_p$ y $M_q$ es $M_1$.

Demostracion: Sea a un elemento a la vez en $M_p$ y $M_q$. En tonces $per(a)=p^i=q^j$. Pero esto solo es posible si $i=j=0$, y a es singular.

PROPOSICION 49.- Sea M un p-monoide abeliano finito. Sea $b\neq 0$ un elemento de M. Sea $p^n$ el periodo de b, y sea k un natural menor que n. Sea $p^m$ el periodo de $p^k b$. Entonces $n=$ $=k+m$.

Demostracion: Sea i el numero inicial de $p^k b$. Entonces $ip^k b=(i+p^m)p^k b=(ip^k+p^{k+m})b$. Luego $p^{k+m}$ es un multiplo de $p^n$, o sea $m+k\geq n$. Por otra parte, sea r el numero inicial de b. Sea $\lambda p^k\geq r$. $(p^{n-k}+i+\lambda)p^k b=p^n b+\lambda p^k b+ip^k b=\lambda p^k b+ip^k b=(\lambda+i)p^k b$ luego $p^m$ divide a $p^{n-k}$, luego $m\leq n-k$, luego $m+k\leq n$.

# C A P I T U L O IV

## Descomposiciones

Sea $\Lambda$ el conjunto de todos los primos. Sea M un monoide abeliano de torsion. Sean:

$$i_p:M_1\longrightarrow M_p;\quad i:M_1\longrightarrow M;\quad j_p:M_p\longrightarrow M$$

las inclusiones correspondientes. Sea C el impulsor de los $i_p$ y sean $k_p:M_p\longrightarrow C$ los morfismos canonicos. Entonces $i=j_p i_p$.

PROPOSICION 50.- Existe un unico morfismo $j:C\longrightarrow M$ tal que $j\cdot k_p=j_p$ para todo $p\varepsilon\Lambda$.

Demostracion: La familia $j_p$ verifica respecto a $i_p$ la condicion I2 de la Definicion 19. Por la misma definicion existe el j unico buscado.

COROLARIO 1.- Los $k_p$ son monomorfismos.

Demostracion: Ya que el compuesto $j\cdot k_p=j_p$ es un monomorfismo tambien lo es $k_p$.

COROLARIO 2.- Todo elemento periodico de M pertenece a la imagen de j.

Demostracion: Sea $a\varepsilon M$ periodico y sea $per(a)=m=pq$, donde $mcd(p,q)=1$. Entonces existen $r,s\varepsilon Z$ tales que $rp+sq=1$. Sea $r>0$, entonces $s<0$. Sea t un natural tal que $tp>-s$. Por la Proposicion 35, $a=(1+tm)a=(rp+sq+tm)a=rpa+(s+tp)qa$.

Por la Proposicion 37, per(pa)=q y per(qa)=p. Si q,p son potencias de primos, sea $q=q_1^i$ $p=p_1^j$ entonces $rpa=b\varepsilon M_1$ y $(s+tp)\cdot$ $\cdot qa=c\varepsilon M_{p_1}$. Luego $a=b+c=j_{q_1}(b)+j_{p_1}(c)$ pertenece a la imagen de j. Si q o p no son potencias de primos se procede por induccion.

Para establecer los siguientes resultados necesitamos investigar como se define la suma amalgamada sobre un submonoide. Para mayor claridad lo hacemos con solo dos factores. Sean B y C dos monoides abelianos, y A un submonoide de ambos. Consideremos la suma amalgamada $B\coprod_A C$. Sean $f_1,f_2$ las inserciones respectivas de A en B y C. Entonces por la Proposicion 26, la suma $B\coprod_A C$ se define como el monoide cociente de $B\coprod C$ sobre la minima congruencia que contiene a la relacion: $(a+x,b)R(a,b+x)$ para todo a de B, todo b de C y todo x de A.

PROPOSICION 51.- Sea M un monoide periodico, A su submonoide singular, y B,C dos submonoides de M tales que:

a) B+C=M y b) la interseccion de B y C es A.

Entonces existe un isomorfismo $g:B\coprod_A C\longrightarrow M$.

Demostracion: Sea $h:B\coprod C\longrightarrow B\coprod_A C$ el epimorfismo canonico. Consideremos las inclusiones $i_1,i_2$ respectivas de B y C en M. Estos dos morfismos verifican la condicion I2 de la Definicion 19, luego existe un morfismo $g:B\coprod_A C\longrightarrow M$

unico verificando la commutatividad de diagrama correspondiente. Este morfismo viene dado por: $g(h(b,c))=b+c$.

Por la condicion a) del enunciado, es un epimorfismo. Para ver que es inyectivo, sea $a=b_1+c_1=b_2+c_2$. Sean $m=per(c_1)$ y $n=per(b_2)$, y consideramos el elemento $x=(m-1)c_1+(n-1)b_2$. Los elementos $mc_1$ y $nb_2$ son singulares por la Proposicion 37. Sea ahora el elemento $a+x=b_1+(n-1)b_2+mc_1=nb_2+(m-1)c_1+c_2$. La expresion del primer miembro nos dice que pertenece a B y la del segundo miembro que pertenece a C. Por la condicion b) del enunciado, a+x es un elemento singular. Sumandole $b_2$ y $c_1$ sucesivamente, obtenemos:

$$a+x+b_2=b_2+nb_2+(m-1)c_1+c_2=b_2+c_2+(m-1)c_1=b_1+mc_1$$

$$a+x+c_1=b_1+(n-1)b_2+mc_1+c_1=b_1+c_1+(n-1)b_2=nb_2+c_2$$

las dos primeras igualdades por ser $b_2$ y $c_1$ periodicos, y las segundas por la doble expresion de a. Tenemos:

$(b_1,c_1)=(b_1,c_1+mc_1)R(b_1+mc_1,c_1)=(b_2+a+x,c_1)R(b_2,c_1+a+x)=$ $=(b_2,c_2+nb_2)R(b_2+nb_2,c_2)=(b_2,c_2)$, luego $(b_1,c_1)$ y $(b_2,c_2)$ son congruentes y $h(b_1,c_1)=h(b_2,c_2)$. De donde g es inyectivo.

COROLARIO.- Elmorfismo j de la Proposicion 50 es inyectivo sobre los elementos periodicos.

La Proposicion 50 nos da entonces un isomorfismo entre los submonoides periodicos respectivos. Los elementos de M que pueden no pertenecer a la imagen de j son elementos iniciales cuyo periodo no sea una potencia de primo. Vamos ahora a dualizar estos resultados.

. Sea M un monoide abeliano. Llamamos $nM=\{na|a\varepsilon M\}$ para $n\varepsilon N$

PROPOSICION 52.- nM es un submonoide de M.

Demostracion: Sean $b_1,b_2$ elementos de nM. Existen $a_1,a_2$ en M tales que $b_i=na_i$. Entonces $b_1+b_2=n(a_1+a_2)$. $0=n0$.

Sea ahora M un monoide abeliano de exponente finito, y sea $n=o(M)$. Descomponemos n en factores primos: $n=p_1^{e_1}\ldots p_m^{e_m}$ Sea $n_i=n/p_i^{e_i}$. Consideramos las aplicaciones:

$k_i:M\longrightarrow n_iM$ $\quad$ $h_i:n_iM\longrightarrow nM$ $\quad$ $k:M\longrightarrow nM$

$k_i(a)=n_ia$ $\quad$ $h_i(b)=p_i^{e_i}\cdot b$ $\quad$ $k(a)=na$

PROPOSICION 53.- $k_i,h_i$ y k son epimorfismos.

PROPOSICION 54.- a) $n_iM$ es un $p_i$-monoide

b) nM es un Monoide singular.

Demostracion: a) Todo b de $n_iM$ es de la forma $b=n_ia$ para un elemento a de M. Luego para $r>i(b)$, $rb=rn_i(a)=(rn_i+$ $+n)a=(rn_i+p_i^{e_i}\cdot n_i)a=(r+p_i^{e_i})b$. Por la Proposicion 35, b es un $p_i$-elemento.

b) Todo b de nM es de la forma $b=na$. Para r suficientemente grande, $rb=rna=(rn+n)a=(r+1)b$, luego b es singular.

Sea ahora T el tirador de los $h_i$, y sean $q_i:T\longrightarrow n_iM$ los morfismos canonicos.

PROPOSICON 55.- Existe un unico morfismo $h:M \longrightarrow T$ tal que

$$q_i h = k_i.$$

Demostracion: Por la definicion de $h_i, k_i, k$ tenemos $h_i k_i = k$, luego los $k_i$ verifican la condicion T2 de la Definicion 20. Por dicha definicion existe el h unico pedido.

COROLARIO.- Si $a,b \varepsilon M$ son periodicos y $h(a)=h(b)$, entonces $a=b$

Demostracion: Sean $k_i(a)=q_i h(a)=q_i h(b)=k_i(b)$, $i=1,..,m$ Es decir, $n_i a = n_i b$. Como $mcd(n_1,...,n_m)=1$, existen $x_i \varepsilon Z$ tales que $\sum x_i n_i = 1$. Descomponemos la suma, tomando en una suma parcial los terminos con $x_i > 0$, y en otra aquellos con $x_j = -y_j$ menores que cero. Entonces: $\sum x_i n_i = 1 + \sum y_j n_j$. Tenemos: $(\sum x_i n_i)a = \sum x_i (n_i a) = \sum x_i (n_i b) = (\sum x_i n_i) b$. Luego $(1+\sum y_j n_j)a = (1+\sum y_j n_j)b$. Por induccion, si $z_j \geqq y_j$, $(1+\sum z_j n_j)a = (1+\sum z_j n_j)b$. Entonces $(1+\sum y_j p_j^{e_j} n_j)a = (1+\sum y_j p_j^{e_j} n_j)b$. Pero esto es:

$$(1+\sum y_j n)a = (1+\sum y_j n)b = a = b.$$

PROPOSICION 56.- Si $a \varepsilon T$ es periodico, existe un $x \varepsilon M$ tal que

$$a = h(x).$$

Demostracion: a) T es por construccion un submonoide de $n_1 M \times ... \times n_m M$, luego $a=(a_1,...,a_m)$ con $a_i \varepsilon n_i M$. Sea $t=per(a)$. Por ser a periodico, $(1+t)a=a$ lo que equivale a $(1+t)a_i = a_i$. Luego todos los $a_i$ son periodicos. Ademas $per(a_i) | p_i^{e_i}$. Por otra parte, $p_i^{e_i} a_i = p_j^{e_j} a_j = b$ para todo $i,j$ por la construccion del tirador. Luego $a_i=(1+p_i^{e_i})a_i=a_i+b$, luego $ka_i=ka_i+b$ para todo natural no nulo k.

b) Como $mcd(n_i,p_i^{e_i})=1$ existen $r_i,s_i>0$ tales que $n_ir_i=$ $=1+s_ip_i^{e_i}$ . Sea $x=r_1a_1+\dots+r_ma_m$. Entonces $n_ix=n_ir_ia_i+\sum_{i\neq j}n_ir_ia_j=$ $=n_ir_ia_i+\sum_{i\neq j}\frac{n_i}{p_j^{e_j}}r_jp_j^{e_j}a_j=n_ir_ia_i+(\sum\frac{n_i}{p_j^{e_j}}r_j)b=n_ir_ia_i=(1+s_ip_i^{e_i})a_i=a_i$ Luego $h(x)=(n_1x,\dots,n_mx)=(a_1,\dots,a_m)=a$ como queriamos.

PROPOSICION 57.- Sea a un $p_i$-elemento de M y $b=k_i(a)$. Entonces $per(b)=per(a)$.

Demostracion: Sea $per(a)=p_i^{\alpha}$, $\alpha\leqq e_i$ y $t=per(b)$. Existe entonces un natural r tal que $(r+t)b=rb$; $b=k_i(a)=n_ia$, luego $(rn_i+tn_i)a=rn_ia$. Por la Proposicion 35, Corolario 1, $p_i^{\alpha}|tn_i$ Pero $mcd(p_i^{\alpha},n_i)=1$ luego $p_i^{\alpha}|t$. Por otra parte existe s tal que $(s+p_i^{\alpha})a=sa$. Entonces $sb=sn_ia=n_i(s+p_i^{\alpha})a=(n_is+p_i^{\alpha}n_i)a=$ $=(s+p_i^{\alpha})b$. Luego $t|p_i^{\alpha}$ y por tanto $t=p_i^{\alpha}$.

PROPOSICION 58.- Sea a un $p_i$-elemento de M, sea $b=k_j(a)$ $i\neq j$. Entonces $per(b)=1$.

Demostracion: Existe un natural r tal que $ra=(r+p_i^{\alpha})a$. Entonces $rb=rn_ja=(rn_j+p_i^{\alpha}n_j)a=(r+p_i^{\alpha})n_ja=(r+p_i^{\alpha})b$. Luego $p_i^{\alpha}$ es un multiplo de $per(b)$. Por la Proposicion 54 a), b es un $p_j$-elemento y $p_j\neq p_i$. Luego $per(b)=1$.

PROPOSICION 59.- Sea a un elemento de M. Entonces

$$per(a)=per(ha).$$

Demostracion: Sea $t=per(ha)$. Sea i tal que ia sea periodico y $iha=(i+t)ha=h(ia)=h((i+t)a)$. Por la Proposicion 55 Corolario, $(i+t)a=ia$, luego $per(a)|t$. Por otra parte, sea $n=$ $=per(a)$, entonces existe $r$ tal que $ra=(r+n)a$. Luego $rha=$ $h(ra)=h((r+n)a)=(r+n)ha$, y $t|n=per(a)$. Luego $t=per(a)$.

Las Proposiciones 55 y 56 nos dicen que el morfismo h induce un isomorfismo entre los submonoides periodicos de M y de T. Por otra parte, sobre los elementos iniciales de M, h no tiene por que ser inyectivo. Combinando estos hechos con con las Proposiciones 50 y 51, y una generalizacion de esta ultima que daremos despues, la situacion que tenemos es la siguiente:

Sea M un monoide abeliano de exponente finito. Tenemos los morfismos:

$$C \xrightarrow{j} M \xrightarrow{h} T$$

donde C es la suma amalgamada de las p-componentes de M con amalgama el submonoide singular, y T es el producto fibrado de los $n_i M$ que son p-monoides, sobre un monoide singular. Esta es una generalizacion del Teorema de descomposicion primaria para grupos abelianos de exponente finito. Ademas hemos visto que j y h inducen isomorfismos entre los submonoides periodicos correspondientes.

PROPOSICION 60.- Sea M un monoide periodico, A su submonoide singular y $B_1,\dots,B_m$ submonoides de M verificando:

a) $M=B_1+\dots+B_m$

b) La interseccion de $(B_1+\dots+B_i)$ y $B_{i+1}$ es A para todo $i=0,\dots,m-1$.

Entonces existe un isomorfismo $g:\coprod_A B_i \to M$.

Demostracion: Por induccion sobre m. Para m=2 es la Proposicion 51. Supongamoslo cierto para m-1. Sea entonces $C=B_1+\dots+B_{m-1}$. Entonces existe tal isomorfismo para C, y el par $C,B_m$ verifica las condiciones de la Proposicion 51. Existe pues un isomorfismo $h:C\coprod_A B_m \to M$. Sustituyendo C por la suma amalgamada correspondiente obtenemos el resultado.

# CAPITULO V

## Aplicaciones a morfismos.

Sean A,B dos monoide abelianos y $f:A\to B$ un morfismo.

PROPOSICION 61.- Sea $a\varepsilon A$, $n=per(a)$. Entonces $per(fa)|n$.

Demostracion: Sea $i=i(a)$, $ia=(i+n)a$, luego $if(a)=f(ia)=f((i+n)a)=(i+n)f(a)$, luego $per(f(a))|n$.

COROLARIO 1.-a)Si $a\varepsilon A$ es un p-elemento, f(a) es un p--elemento.

b) Si $a\varepsilon A$ es singular, f(a) es singular.

COROLARIO 2.- Sean $A_p$, $B_p$ las p-componentes respectivas de A y B, siendo p un numero primo, y sean $A_1$,$B_1$ los submonoides singulares respectivos. Entonces $f(A_p)$ esta contenida en $B_p$ y $f(A_1)$ esta contenida en $B_1$.

PROPOSICION 62.- f(nA) esta contenida en nB

Demostracion: Para $na\varepsilon nA$, $f(na)=nf(a)\varepsilon nB$.

PROPOSICION 63.- Si A es ciclico, Hom(A,A) es isomorfo a A.

Demostracion: $f:A\to A$ esta determinada por f(a), siendo a un generador de A. Definimos $\phi:Hom(A,A)\to A$ asi: $\phi(f)=f(a)$ $\phi$ es un isomorfismo.

Sea ahora $f_\lambda: C \longrightarrow B_\lambda$ una familia de homomorfismos de monoides abelianos, y $B = \coprod_C B_\lambda$ su impulsor. Sean $i_\lambda: B \longrightarrow B$ los morfismos canonicos. Llamamos $F = Hom(A,C)$ para cualquier monoide abeliano A, y definimos los homomorfismos:

$$f_{\lambda *}: Hom(A,C) \longrightarrow Hom(A,B_\lambda) \qquad i_{\lambda *}: Hom(A,B_\lambda) \quad Hom(A,B)$$

$$f_{\lambda *}(\phi) = f_\lambda \cdot \phi. \qquad i_{\lambda *}(\phi) = i_\lambda \cdot \phi.$$

Sea $\coprod_F Hom(A,B_\lambda)$ el impulsor de los $f_{\lambda *}$, y sean $p_\lambda: Hom(A,B_\lambda) \to \coprod_F Hom(A,B_\lambda)$ los morfismos canonicos. Entonces para $\phi \in Hom(A,C)$, $i_{\lambda *} f_{\lambda *}(\phi) = i_\lambda \cdot f_\lambda \cdot \phi = i_\mu \cdot f_\mu \cdot \phi = i_{\lambda *} f_{\lambda *}(\phi)$

Por la Definicion 19 se deduce:

PROPOSICION 64.- Existe un morfismo unico

$$\Phi: \coprod_F Hom(A,B_\lambda) \longrightarrow Hom(A, \coprod_C B_\lambda)$$

tal que $i_{\lambda *} = \Phi \cdot p_\lambda$ para todo $\lambda$ .

El morfismo $\Phi$ viene definido asi: Si

$$\rho: \coprod Hom(A,B_\lambda) \longrightarrow \coprod_F Hom(A,B_\lambda)$$

es la proyeccion canonica, entonces $\Phi\{\rho(\phi_\lambda)\} = \sum_\lambda i_{\lambda *}(\phi_\lambda) = \sum_\lambda i_\lambda \cdot \phi_\lambda$.

COROLARIO.- Si $f_\lambda$ es inyectivo, $p_\lambda$ es inyectivo.

Demostracion: Por el Corolario 1 de la Proposicion 50, $i_\lambda$ es inyectivo, por tanto $i_{\lambda *}$ es inyectivo. Pero $i_{\lambda *} = \Phi \cdot p_\lambda$, luego $p_\lambda$ es inyectivo.

Tomemos por otra parte una familia $g_\lambda:A_\lambda\longrightarrow C$ de morfismos de monoides abelianos, y sea $A=\prod_C A$ su tirador. Sean $j_\lambda:A\longrightarrow A_\lambda$ los morfismos canonicos. Sea B un monoide abeliano cualquiera. Llamamos G=Hom(C,B). Definimos los morfismos:

$$g_\lambda^*:\mathrm{Hom}(C,B)\longrightarrow \mathrm{Hom}(A_\lambda,B) \qquad j_\lambda^*:\mathrm{Hom}(A_\lambda,B)\longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C)$$

$$g_\lambda^*(\phi)=\phi\cdot g_\lambda . \qquad j_\lambda^*(\phi)=\phi\cdot j_\lambda .$$

Sea $\coprod_G \mathrm{Hom}(A_\lambda,B)$ el impulsor de los $g_\lambda^*$, y sean $q_\lambda:\mathrm{Hom}(A_\lambda,B)\longrightarrow\coprod_G \mathrm{Hom}(A_\lambda,B)$ los morfismos canonicos. Entonces para $\phi\in \mathrm{Hom}(C,B)$, $j_\lambda^* g_\lambda^*(\phi)=j_\lambda\cdot g_\lambda\cdot\phi=j_\mu\cdot g_\mu\cdot\phi=j_\mu^* g_\mu^*(\phi)$. Por la Definicion 19 se deduce:

PROPOSICION 65.- Existe un morfismo unico

$$\Psi:\coprod_G \mathrm{Hom}(A_\lambda,B)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\prod_C A_\lambda,B)$$

tal que $j_\lambda^*=\psi\cdot q_\lambda$.

El morfismo $\Psi$ viene definido asi: Si

$$\pi:\coprod \mathrm{Hom}(A_\lambda,B)\longrightarrow\coprod_G \mathrm{Hom}(A_\lambda,B)$$

es el morfismo canonico, entonces $\Psi\{\pi(\phi_\lambda)\}=\sum_\lambda \phi_\lambda\cdot j_\lambda$.

COROLARIO.- Si $g_\lambda$ es suprayectivo, $q_\lambda$ es inyectivo.

Demostracion: Al ser $g_\lambda$ suprayectivo, $g_\lambda^*$ es inyectivo. Por el Corolario 1 de la Proposicion 50, $q_\lambda$ es inyectivo.

Tomemos ahora una familia $h_\lambda:B_\lambda\to C$ de morfismos de monoides abelianos, y sea $B=\prod_C B$ su tirador. Sean $m_\lambda:B\to B_\lambda$ los morfismos canonicos, y sea A un monoide abeliano cualquiera. Llamamos $H=Hom(A,C)$. Definimos los morfismos:

$$h_{\lambda *}:Hom(A,B_\lambda)\to Hom(A,C) \qquad m_{\lambda *}:Hom(A,B)\to Hom(A,B_\lambda)$$

$$h_{\lambda *}(\phi)=h_\lambda\cdot\phi. \qquad m_{\lambda *}(\phi)=m_\lambda\cdot\phi.$$

Sea $\prod_H Hom(A,B_\lambda)$ el tirador de los $h_{\lambda *}$, y sean $r_\lambda:\prod_H Hom(A,B_\lambda)\to Hom(A,B_\lambda)$ los morfismos canonicos.Entonces para $\phi\in Hom(A,\prod_C B_\lambda)$ tenemos: $h_{\lambda *}m_{\lambda *}(\phi)=h_\lambda\cdot m_\lambda\cdot\phi=h_\mu\cdot m_\mu\cdot\phi=$ $=h_{\mu *}m_{\mu *}(\phi)$. Por la Definicion 20 tenemos:

PROPOSICION 66.- Existe un morfismo unico:

$$\Theta:Hom(A,\prod_C B_\lambda)\longrightarrow\prod_H Hom(A,B_\lambda)$$

tal que $m_{\lambda *}=r_\lambda\cdot\Theta$ .

COROLARIO .- Si $h_\lambda$ es suprayectivo, $r_\lambda$ es suprayectivo.

Demostracion: Al ser $h_\lambda$ suprayectivo, $m_\lambda$ es suprayectivo y por tanto $r_\lambda$ es suprayectivo.

El morfismo $\Theta$ viene dado por: $\Theta(\phi)=(m_\lambda\cdot\phi)$.

Finalmente, sea $k_\lambda:C\to A_\lambda$ una familia de morfismos de monoides abelianos, y sea $A=\coprod_C A$ su impulsor. Sean $n_\lambda:A_\lambda\to A$ los morfismos canonicos, y sea B un monoide abeliano cualquiera. Llamamos $K=Hom(C,B)$. Definimos los morfismos:

$$k_\lambda^*:Hom(A_\lambda,B)\to Hom(C,B) \qquad n_\lambda^*:Hom(A,B)\to Hom(A_\lambda,B)$$

$$k_\lambda^*(\phi)=\phi\cdot k_\lambda. \qquad n_\lambda^*(\phi)=\phi\cdot n_\lambda.$$

Sea $\prod_K Hom(A_\lambda,B)$ el tirador de los $k^*_\lambda$, y sean $s_\lambda:\prod_K Hom(A_\lambda,B)\longrightarrow Hom(A_\lambda,B)$ los morfismos canonicos. Entonces para $\phi\varepsilon Hom(\coprod_C A_\lambda,B)$ tenemos: $k^*_\lambda n^*_\lambda(\phi)=\phi\cdot n_\lambda\cdot k_\lambda=\phi\cdot n_\mu\cdot k_\mu= =k^*_\mu n^*_\mu(\phi)$. Por la Definicion 20:

PROPOSICION 67.- Existe un morfismo unico:

$$\Omega:Hom(\coprod_C A_\lambda,B)\longrightarrow\prod_K Hom(A_\lambda,B)$$

tal que $n^*_\lambda=s_\lambda\cdot\Omega$.

El morfismo $\Omega$ viene dado por: $\Omega(\phi)=(\phi\cdot n_\lambda)$.

COROLARIO .- Si $k_\lambda$ es inyectivo, $s_\lambda$ es suprayectivo.

PROPOSICION 68.- a) El morfismo $\Omega$ es inyectivo.

b) El morfismo $\Theta$ es inyectivo si el numero de $B_\lambda$ es finito.

Demostracion: a) Sea $\Omega(\phi)=\Omega(\phi')$. Esto es $\phi\cdot n_\lambda=\phi'\cdot n_\lambda$ para todo $\lambda$. Por el Corolario de la Proposicion 26, A esta engendrado por los conjuntos $n_\lambda(A_\lambda)$. Como $\phi$ y $\phi'$ coinciden sobre ellos, $\phi=\phi'$.

b) B es un submonoide de $\prod B_\lambda$. Sean $t_\lambda:\prod B_\lambda\longrightarrow B_\lambda$, y $u_\lambda:B_\lambda\longrightarrow\prod B$ los morfismos canonicos (Proposicion 22), entonces $t_\lambda u_\lambda=1_{B_\lambda}$ y $\sum u_\lambda t_\lambda=1_{\prod B_\lambda}$. Tenemos $m_\lambda=t_\lambda\rho$ donde $\rho:B\longrightarrow\prod B_\lambda$ es la inclusion (que es inyectiva):

$$\sum u_\lambda m_\lambda\phi=\sum u_\lambda t_\lambda\rho\phi=\rho\phi=\sum u_\lambda m_\lambda\phi'=\sum u_\lambda t_\lambda\rho\phi'=\rho\phi'.\ \text{Luego}\ \phi=\phi'.$$

Sean A y B dos monoides abelianos, $A_p$ y $B_p$ sus p-componentes, siendo p primo, y $A_1,B_1$ los submonoides singulares correspondientes. Llamamos a las distintas inclusiones y morfismos canonicos segun el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_p \arrow[d, "k_p"'] & A_1 \arrow[l, "f_p"'] \arrow[d, "f"] \\ \coprod_{A_1} A_p \arrow[r, "j"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_p \arrow[d, "h_p"'] & B_1 \arrow[l, "g_p"'] \arrow[d, "g"] \\ \coprod_{B_1} B_p \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

Ademas $j\cdot k_p=j_p$ y $i\cdot h_p=i_p$.

Sea $\phi:A\longrightarrow B$ un morfismo de monoides. Por el Corolario 2 de la Proposicion 61, de finimos por restriccion para cada primo p un morfismo $\phi_p:A_p\longrightarrow B_p$, y otro $\phi_1:A_1\longrightarrow B_1$, que verifican: $\phi_p\cdot f_p=g_p\cdot f_1$, $\phi\cdot j_p=i_p\cdot\phi_p$.

Consideremos la familia $h_p\cdot\phi_p:A_p\longrightarrow\coprod_{B_1}B_p$. Entonces: $(h_p\cdot\phi_p)\cdot f_p(a)=h_p\cdot\phi_p(a)=h_p\{\phi(a)\}=h_q\{\phi(a)\}$ para todo par de primos p,q luego$(h_p\cdot\phi_p)\cdot f_p=(h_q\cdot\phi_q)f_q$. Por la definicion 19 existe un morfismo unico $\phi'=\coprod_{A_1}\phi_p:\coprod_{A_1}A_p\longrightarrow\coprod_{B_1}B_p$ tal que $k_p\cdot\phi'=\phi_p$ para todo primo p.

Sea $\psi:A\longrightarrow B$ otro morfismo. Entonces $(\phi_p+\psi_p)=(\phi+\psi)_p$ como es facil comprobar y $k_p\cdot(\phi'+\psi')=k_p\cdot\phi'+k_p\cdot\psi'=\phi_p+\psi_p=(\phi+\psi)_p$. Por la unicidad se deduce $\phi'+\psi'=(\phi+\psi)'$. Tenemos pues:

PROPOSICION 69.- Existe un morfismo

$$\Gamma:\mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1}A_p,\ \coprod_{B_1}B_p)$$

dado por $\Gamma(\phi)=\phi'$.

COROLARIO.- Sean $\phi,\psi:A\longrightarrow B$ dos morfismos tales que $\Gamma(\phi)=\Gamma(\psi)$. Sea $a\varepsilon A$ tal que $\phi(a)\neq\psi(a)$. Entonces $a$ es **inicial.**

Se deduce del Corolario de la **Proposicion 51.**

Consideremos ahora los monoides:

$F=\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1}A_p,B_1)$ $\qquad$ $G=\mathrm{Hom}(A_1,\coprod_{B_1}B_q)$

$F_p=\mathrm{Hom}(A_p,B_1)$ $\qquad$ $G_q=\mathrm{Hom}(A_1,B_q)$

$$H=\mathrm{Hom}(A_1,B_1)$$

Tenemos los morfismos inducidos:

$$\begin{tikzcd} F_p \arrow[r, "f_p^*"] & H \arrow[r, "g_{q*}"] & G_q \arrow[d, "h_{q*}"] \\ F \arrow[u, "k_p^*"] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A_p,B_q) \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

$$g_{q*}:F_p\longrightarrow\mathrm{Hom}(A_p,B_q) \qquad f_p^*:\mathrm{Hom}(A_p,B_q)\longrightarrow G_q$$

donde ambos $g_{q*}$ son inyectivos por serlo $g_q$. Consideremos ahora los morfismos:

$$\Omega_q:\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1}A_p,B_q)\longrightarrow\prod_{G_q}\mathrm{Hom}(A_p,B_q)$$

dados por la Proposicion 67: $\Omega_q(\phi)=(\phi\cdot k_p)$.

Consideremos tambien los morfismos:

$$\lambda_q:F'=\prod_H F_p\longrightarrow\prod_{G_q}\mathrm{Hom}(A_p,B_q).$$

dados por $\lambda_q(\phi_p)=(g_q\cdot\phi_p)$ y formemos su impulsor.**Tenemos el** diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F=\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, B_1) \arrow[d, "g_{q*}"] & F'=\prod_H \mathrm{Hom}(A_p, B_1) \arrow[d, "\lambda_q"] \\
\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, B_q) \arrow[r, "\Omega_q"] \arrow[d, "n_q"] & \prod_{G_q} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \arrow[d, "m_q"] \\
\coprod_F \mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, B_q) & \coprod_{F'} \prod_{G_q} \mathrm{Hom}(A_p, B_q)
\end{tikzcd}$$

Los morfismos compuestos $m_q \Omega_q$ verifican:

$(m_q \Omega_q) g_{q*}(\phi) = m_q g_q \phi k_p = m_q \lambda_q(\phi k_p) = m_{q'} \lambda_{q'} g_{q'*} \phi$. Luego satisfacen la condicion I2 de la Definicion 19. Existe un morfismo unico:

$$\Omega' : \coprod_F \mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, B_q) \longrightarrow \coprod_{F'} \prod_{G_q} \mathrm{Hom}(A_p, B_q)$$

tal que $\Omega' n_q = m_q \Omega_q$ para todo q.

Este morfismo viene dado asi: $\Omega'\{\rho(\phi_q)\} = \rho\{(\phi_q k_p)\}$. donde $\rho$ es la proyeccion del coproducto correspondiente en la suma amalgamada.

Dualmente, consideramos los morfismos

$$\Phi_p : \coprod_{F_p} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_p, \coprod_{B_1} B_q)$$
$$\mu_p : \coprod_{F_p} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \longrightarrow G' = \coprod_H \mathrm{Hom}(A_1, B_q)$$

y formamos el tirador de los $\mu_p$, obtendriamos un nuevo morfismo $\Phi' : \prod_{G'} \coprod_{F_p} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \longrightarrow \prod_G \mathrm{Hom}(A_p, \coprod_{B_1} B_q)$ dado por: $s_p \Phi' = \Phi_p r_p$ para todo p. Junto con los morfismos $\Phi, \Omega, \Phi_1, \Omega_1$ definidos por las Proposiciones 64 y 67, obtenemos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
F=\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, B_1) \arrow[r, "\Omega_1"] \arrow[d, "g_q^*"] & F'=\prod_H \mathrm{Hom}(A_p, B_1) \arrow[d, "\lambda_q"] \\
\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, B_q) \arrow[r, "\Omega_q"] \arrow[d, "n_q"] & \prod_{G_q} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \arrow[d, "m_q"] \\
\coprod_F \mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, B_q) \arrow[r, "\Omega'"] \arrow[d, "\Phi"] & \coprod_{F'} \prod_{G_q} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \\
\mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p, \coprod_{B_1} B_q) \arrow[d, "\Omega"] & \\
\prod_G \mathrm{Hom}(A_p, \coprod_{B_1} B_q) \arrow[d, "s_p"] & \prod_{G'} \coprod_{F_p} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \arrow[l, "\Phi'"'] \arrow[d, "r_p"] \\
\mathrm{Hom}(A_p, \coprod_{B_1} B_q) \arrow[d, "f_p^*"] & \coprod_{F_p} \mathrm{Hom}(A_p, B_q) \arrow[l, "\Phi_p"'] \arrow[d, "\mu_p"] \\
G=\mathrm{Hom}(A_1, \coprod_{B_1} B_q) & G'=\coprod_H \mathrm{Hom}(A_1, B_q) \arrow[l, "\Phi_1"']
\end{tikzcd}
$$

Segun la definicion de producto fibrado, cada $\phi_q$ de $\prod_{G_q} \mathrm{Hom}(A_p,B_q)$ es un elemento $\phi_q=((\phi_{pq}))\varepsilon\prod \mathrm{Hom}(A_p,B_q)$ sujeto a la condicion de que $f_p^*(\phi_{pq})=f_{p'}^*(\phi_{p'q})=\phi_{pq}f_p=\phi_{p'q}f_{p'}$. Por la propiedad universal de la suma amalgamada de los $f_p$, existe un unico $\phi_q'$: $\coprod_{A_1} A_p \longrightarrow B_q$ tal que $\phi_{pq}=\phi_q' f_p$ para todo p. La aplicacion $\Delta_q:\prod_{G_q} \mathrm{Hom}(A_p,B_q)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\coprod_{A_1} A_p,B_q)$ tal que a cada $_q$ le hace corresponder $\phi_q'$ es un morfismo de monoides, como es facil comprobar.

Ademas se verifica de la definicion de $\Delta_q$ que este es el morfismo inverso de $\Omega_q$. Luego $\Omega_q$ es un isomorfismo. Analogamente se comprueba que $\Omega_1$ es tambien un isomorfismo, y que el diagrama anterior es commutativo. Luego $\Omega'$ es tambien un isomorfismo por la forma de definirla.

Dualmente se demuestra que $\Phi'$ es tambien un isomorfismo, y obtenemos asi unos homomorfismos compuestos:

$$\coprod_{F'}\prod_{G_q}\mathrm{Hom}(A_p,B_q)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\coprod_{A_1}A_p,\coprod_{B_1}B_q)\longrightarrow\prod_{G'}\coprod_{F_p}\mathrm{Hom}(A_p,B_q)$$

Vamos a detrminar ahora como podemos representar a los elementos de los monoides extremos y su relacion con los elementos del monoide central cuando las sumas son finitas:

Sea $\psi\varepsilon\coprod_{F'}\prod_{G_q}\mathrm{Hom}(A_p,B_q)$. Entonces $\psi=\rho(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ donde cada $\psi_i\varepsilon\prod_{G_q}\mathrm{Hom}(A_{p_i},B_q)$ y $\rho$ es la proyeccion canonica del coproducto sobre la suma amalgamada. Es decir, $\rho(\psi_q)=\rho(\psi'_q)$ si existe un $\psi\varepsilon F'$ tal que $\psi_q=\psi'_q+\lambda_q(\psi)$, $\psi_{q'}+\lambda_{q'}(\psi)=\psi'_{q'}$ y $\psi_{q''}=\psi'_{q''}$ para $q\neq q''\neq q'$.

Cada $\psi_i$ por la definicion de producto fibrado es de la forma:

$$\psi_i=\begin{pmatrix}\psi_{1i}\\ \vdots\\ \psi_{mi}\end{pmatrix}\text{donde}\psi_{ji}\varepsilon\mathrm{Hom}(A_{p_i},B_{q_j})\quad\text{y son tales que } \psi_{ji}f_j=$$

$=\psi_{ki}f_k$, $j,k=1,\ldots,m$.

En resumen, cada elemento de $\coprod_{F'}\prod_{G_q}\mathrm{Hom}(A_p,B_q)$ queda determinado de manera unica por una matriz:

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi_{11} & \cdots & \psi_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \psi_{m1} & \cdots & \psi_{mn}\end{pmatrix}$$

donde cada $\psi_{ji}$ es un morfismo de $A_{p_i}$ en $B_{q_j}$ , que cada columna debe verificar $\psi_{1i}f_1=\ldots=\psi_{mi}f_m$, y donde dos matrices se consideran iguales si se obtiene una a partir de la otra mediante un numero finito de pasos de la relacion descrita en la pagina 60. Pero cada una de estas matrices me determinan un morfismo unico $\psi':\coprod_{A_1} A_{p_i} \longrightarrow \coprod_{B_1} B_{q_j}$. mediante el morfismo antes descrito. Luego para esudiar los morfismos entre los monoides abelianos $\coprod_{A_1} A_{p_i}$ y $\coprod_{B_1} B_{q_j}$ basta estudiar las matrices del tipo anterior.

Por el Corolario de la Proposicion 69, tales matrices determinan tambien los morfismos de A en B, correspondiendole a dos morfismos distintos la misma matriz solo si coinciden ambos morfismos sobre los elementos periodicos de A.

Repitiendo el proceso con $\prod_{G'}\coprod_{F_p} \mathrm{Hom}(A_p,B_q)$ se obtiene otra vez la misma representacion por matrices de la forma antedicha. Como $\Omega$ es inyectiva y $\Phi'$ es un isomorfismo, esto demuestra que la correspondencia entre matrices y morfismos es biunivoca.