

Tit Proo 24/128

T
15
130

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Faculta 22/10/01
CANADA NIM. 3749



UNIVERSIDAD DE GRANADA
11 OCT. 2001
COMISION DE DOCTORADO

Departamento de Física Aplicada

**MÉTODOS PARAMÉTRICOS DE ESTIMACIÓN
 TRIESPECTRAL. APLICACIONES A LA
 TÉCNICA E-PULSO DE IDENTIFICACIÓN DE
 BLANCOS DE RADAR.**

David Blanco Navarro
TESIS DOCTORAL
Granada, 2001

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 437509x
Nº Copia 2123553

Dña. M^a del Carmen Carrión Pérez, Doctora en Ciencias Físicas y Profesora Titular del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, y

D. Diego Pablo Ruiz Padillo, Doctor en Ciencias Físicas y Profesor Titular del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

MANIFIESTAN:

Que la presente Memoria titulada "Métodos paramétricos de estimación trispectral. Aplicaciones a la técnica E-pulso de identificación de blancos de radar", presentada por David Blanco Navarro para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas, ha sido realizada bajo nuestra dirección en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Con esta fecha autorizamos la presentación de la misma.

Granada, 11 de Octubre de 2001

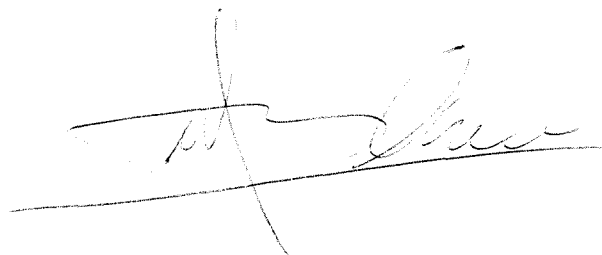


Fdo: M^a del Carmen Carrión Pérez



Fdo: Diego Pablo Ruiz Padillo

Memoria presentada por David Blanco Navarro para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.



Fdo: David Blanco Navarro

Hace más de seis años, desde los exámenes finales del tercer curso, que empezó mi colaboración con el grupo de investigación "Sistemas, Señales y Ondas" del Departamento de Física Aplicada. A lo largo de los últimos cursos de carrera y, sobre todo, de estos cuatro años de beca predoctoral, sus integrantes me han prestado su apoyo, su esfuerzo y su amistad, proporcionandome todos los medios y conocimientos a su alcance para facilitar mi labor. Por esto quiero agradecer a mis compañeros de grupo, M^a Carmen, Diego, Juan Antonio, Jorge y Enrique, todo lo que han hecho por mí y por mi trabajo durante estos años.

Muy especialmente estoy agradecido a mis directores, M^a Carmen Carrión y Diego Pablo Ruiz, por dirigirme y enseñarme durante la investigación. La total confianza que han mostrado por mi trabajo y su continua ayuda han sido esenciales en la realización de esta Tesis Doctoral.

También quiero recordar especialmente a Enrique, quien en todo momento ha estado siempre dispuesto a ayudarme y ha sabido soportar estoicamente mi compañía durante tres años.

Por supuesto, tanto durante los años de licenciatura, como en los posteriores dedicados exclusivamente a la investigación, debo agradecer el aliento y la amistad de mis padres, Miguel y Dolores, mis hermanos, Yeyo y Dani, mis familiares y de todos mis amigos marbelluos y granaínos, que han estado siempre a mi lado. Darles las gracias adecuadamente a cada uno de ellos me llevaría escribir, como poco, otra Tesis, así que espero que cada uno de ellos sepa lo mucho que me han ayudado. Por ser mis amigos y aguantarme, ellos son el atributo de esta Tesis, sin ellos no hubiera podido ni hubiese querido hacerla.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. CUMULANTES Y MOMENTOS DE SEÑALES ALEATORIAS .	13
I.1. Introducción	15
I.2. Cumulantes y momentos de señales aleatorias	15
I.2.1. Definición de momentos y cumulantes	15
I.2.2. Momentos y cumulantes de las funciones de densidad de probabilidad más usuales	17
I.2.3. Relaciones entre momentos y cumulantes	19
I.2.4. Propiedades de momentos y cumulantes	20
I.2.5. Momentos y cumulantes de procesos aleatorios. Estacionaridad .	21
I.2.6. Ergodicidad y momentos	24
I.3. Poliespectros	25
I.3.1. Definición basada en la TF	25
I.3.2. Definición alternativa basada en la representación espectral de Cramer	26
I.3.3. Casos especiales de poliespectros	27
I.3.4. El espectro de cumulantes frente al de momentos	29
I.3.5. Funciones de coherencia de orden n	30
I.3.6. Proceso blanco de orden n	31
I.4. Propiedades de los poliespectros de procesos estacionarios	31
I.4.1. Procesos gaussianos	32
I.4.2. Cambios de fase lineal	32
I.4.3. Procesos gaussianos y no gaussianos a través de sistemas lineales	32
a) Cumulantes de salida de procesos lineales no gaussianos	33
b) Sistemas de fase mínima, máxima y mixta	35
I.4.4. Sistemas no lineales operando bajo entrada aleatoria	38
a) Sistemas no lineales excitados por procesos sinusoidales	38
b) Acoplos cuadráticos y cúbicos de fase	39
c) Procesos gaussianos aplicados a sistemas no lineales	41

d) Procesos lineales no gaussianos frente a no lineales	42
CAPÍTULO II. MÉTODOS PARAMÉTRICOS AUTORREGRESIVOS DE ESTIMACIÓN TRIESPECTRAL	43
II.1. Introducción	45
II.2. Planteamiento del problema	49
II.3. Ecuaciones recursivas de cuarto orden	51
II.3.1. Esquema de predicción lineal	52
II.4. Métodos lineales AR de estimación triespectral	55
II.4.1. Métodos recursivos en el orden	56
a) Método de Levinson	56
b) Método de los coeficientes de reflexión	56
c) Método geométrico	65
II.4.2. Métodos no recursivos	67
a) Método LS o de mínimos cuadrados	67
b) Método CFOM simple	68
c) Método CFOM complejo	69
II.5. Conclusiones	72
CAPÍTULO III. MÉTODOS PARAMÉTRICOS AUTORREGRESIVOS DE ESTIMACIÓN TRIESPECTRAL: SIMULACIONES Y RESULTADOS	73
III.1. Introducción	75
III.2. Procesos de banda ancha	77
III.2.1. Definición de las señales	77
III.2.2. Estudio de cuarto orden	78
III.2.3. Estudio de segundo orden	91
III.3. Procesos de banda estrecha	97
III.3.1. Definición de las señales	97
III.2.2. Estudio de cuarto y de segundo orden	98
III.4. Conclusiones	110

CAPÍTULO IV. ACOPLOS CÚBICOS DE FASE 115

IV.1. Introducción 117

IV.2. Acoplos cuadráticos de fase y modelación AR 118

IV.3. Acoplos cúbicos de fase y modelación AR 120

IV.4. Acoplos cúbicos de fase en señales armónicas 126

**IV.5. Condiciones de estacionaridad y ergodicidad en cuarto orden para
procesos armónicos 127**

IV.5.1. Estacionaridad 130

IV.5.2. Ergodicidad 130

IV.5.3. Señales con acoplos cúbicos de fase 133

IV.6. Acoplos cúbicos de fase en señales complejas y modelación AR ... 138

IV.7. Métodos AR de estimación triespectral para señales complejas ... 142

a) Método de Levinson 142

b) Método de LS 143

c) Método de CFOM simple 143

d) Método de CFOM complejo 144

e) Método RCM 145

IV.8. Método de ESPRIT 147

IV.9. Conclusiones 158

**CAPÍTULO V. ACOPLOS CÚBICOS DE FASE: SIMULACIONES Y RESULTADOS
..... 159**

V.1. Introducción 161

V.2. Métodos AR 161

V.2.1. Un acoplos cúbico de fase 162

a) Señal $x_1(n)$ 162

b) Señal $x_2(n)$ 177

V.2.2. Un acoplos cúbico de fase y cuatro frecuencias relacionadas
armónicamente y no acopladas 183

V.3. Método ESPRIT 191

V.3.1. Señal $x_2(n)$	193
V.3.2. Señal $x_1(n)$	197
V.3.3. Señal $x_1(n)$	198
V.4. Conclusiones	200

CAPÍTULO VI. ESQUEMAS DE IDENTIFICACIÓN Y DISCRIMINACIÓN Y DISCRIMINACIÓN DE BLANCOS DE RADAR 203

VI.1. Introducción	205
VI.2. Técnicas de polarización	206
VI.3. Técnicas basadas en la respuesta en frecuencias	207
a) Técnicas basadas en la mitad de la respuesta en frecuencias a determinadas excitaciones	207
b) Técnicas basadas en la comparación de resonancias naturales	210
c) Técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes	210
VI.4. El pulso de extinción (E-pulso)	211
VI.5. Técnicas de optimización	213
VI.6. El filtro de aniquilación de resonancias (FAR)	214

CAPÍTULO VII. CONSTRUCCIÓN DE PULSOS DE EXTINCIÓN CON *SPLINES*: NUEVAS CODICIONES E-PULSO 217

VII.1. Introducción	219
VII.2. Construcción del E-pulso mediante <i>splines</i>	222
VII.2.1. E-pulso determinado	224
VII.2.2. E-pulso no determinado	228
VII.3. β-<i>Splines</i>	228
VII.4. Ecuaciones E-pulso con β-<i>Splines</i>	233
VII.5. Nuevas condiciones E-pulso	240
VII.6. Construcción del E-pulso a partir de los coeficientes del desarrollo en β-<i>Splines</i>	244
VII.7. Conclusiones β-<i>Splines</i>	246

CAPÍTULO VIII. NUEVO ESQUEMA DE DISCRIMINACIÓN DE BLANCOS DE RADAR BASADO EN PULSOS DE EXTINCIÓN 247

VIII.1. Introducción 249

VIII.2. E-pulso clásico 249

VIII.3. E-pulso con distintos períodos de muestreo 252

VIII.4. Ruido aditivo coloreado 260

VIII.5. Conclusiones 261

CAPÍTULO IX. DISCRIMINACIÓN DE BLANCOS DE RADAR MEDIANTE PULSOS DE EXTINCIÓN: SIMULACIÓN Y RESULTADOS 263

IX.1. Introducción 265

IX.2. Campo eléctrico dispersado por un hilo conductor. Respuesta impulso del hilo 266

IX.3. Construcción de los E-pulsos 273

IX.4. E-pulsos con distintas frecuencias de muestreo 283

IX.4.1. Ruido aditivo blanco 283

IX.4.2. Ruido aditivo coloreado 286

CONCLUSIONES 289

APENDICE A 294

A.1. Introducción 295

A.2. El concepto de resonancias y de modos naturales 295

A.3. Soluciones de la ecuación integral mediante expansión en funciones de Green causales 297

A.4. Respuesta a una excitación de onda plana 299

A.4.1. Respuesta a una onda plana impulsiva 300

A.4.2. Respuesta temprana y tardía del blanco 303

BIBLIOGRAFÍA 307

INTRODUCCIÓN

En sistemas físicos, la existencia de propiedades que varían con el tiempo ha estado presente para el conocimiento humano prácticamente desde su nacimiento. Durante toda la historia el hombre ha sido capaz de diseñar calendarios, predecir estaciones, mareas, cambios meteorológicos, fases de la luna, etc., y relacionar unos fenómenos con otros gracias a la observación y a la repetición de estos sucesos con cierta periodicidad. Ya en el siglo VI a.C., Pitágoras estableció una relación entre la frecuencia de vibración de notas musicales producidas por la oscilación armónica de una cuerda sometida a tensión constante y un número característico de su longitud. Luego extendió esta relación al movimiento armónico de cuerpos celestes en lo que denominó “música de las esferas”.

Desde estas primeras observaciones de sistemas físicos periódicos, se ha ido avanzando en el estudio de estas propiedades variables con el tiempo y descubriendo, poco a poco, la gran cantidad de información que proporcionan. A estas magnitudes que varían con el tiempo y/o con el espacio, y que proporcionan información del sistema físico del cual provienen se les llama señales. El tratamiento matemático de estas señales comenzó con Sir Isaac Newton en el siglo XVII, en un estudio en el que observó que la luz del sol al paso por un prisma se dividía en bandas de distintos colores. Explicó el fenómeno asociándole a los corpúsculos de luz asociados a los diversos colores distintos tamaños que generaban en el éter estados distintos estados de vibración elásticas y que la luz blanca era el resultado de la suma de las contribuciones. Introdujo el término “espectro”, (de la voz latina “*specter*”) para designar esas bandas de colores de luz. En su trabajo *Principia* 1687 estableció el primer tratamiento matemático de los movimientos ondulatorios que Pitágoras había observado empíricamente tantos siglos antes.

En los trabajos posteriores de Daniel Bernoulli, L. Euler y finalmente J.B. Fourier, se estudiaron más profundamente el problema del movimiento de una cuerda tensa, extendiéndolo a todo movimiento periódico, y dando lugar al análisis armónico mediante desarrollos de Fourier, herramienta clave en el tratamiento de señales periódicas y que posteriormente se extendió a señales no periódicas. La posibilidad de determinar completamente cualquier función periódica a partir de los coeficientes de un desarrollo discreto y la notable abundancia de tales funciones en la naturaleza, impulsaron el estudio de este campo y la construcción de máquinas capaces de calcular esos coeficientes, llamados coeficientes de Fourier. Estos integradores mecánicos permitieron, desde casi mitad del siglo XIX, la aplicación del análisis de Fourier a numerosos campos, tales como mareas, estudios de espectros ópticos, meteorología, declinaciones magnéticas y número de manchas solares.

Aunque estos analizadores mecánicos eran útiles en el análisis de series claramente periódicas, su utilidad era muy limitada en el caso de señales con periodicidades no evidentes, contaminadas con ruido o con alguna componente no armónica. Para estudiar estas señales se hizo necesario el uso de cálculo numérico y, por consiguiente, de un tratamiento discreto de estas señales, que clásicamente se había abordado desde un punto de vista continuo. Los primeros trabajos que realizaban un tratamiento discreto de los datos provenientes de señales, comenzaron a aparecer en los años 50, sobre todo en campos donde se necesitaba análisis muy sofisticado. Este era el caso de datos geofísicos, los cuales se recogían en cintas magnéticas para posteriormente ser tratados en grandes ordenadores digitales. Por supuesto, este tratamiento digital no se producía en tiempo real, necesitando minutos o incluso horas para procesar segundos de datos.

Por las mismas fechas, el tratamiento digital y el uso de los incipientes ordenadores se empezó a desarrollar en otra vertiente. Debido a la gran flexibilidad de los ordenadores digitales, se utilizaron en numerosas ocasiones para simular sistemas analógicos, como paso previo a su construcción. Esta simulación permitía estudiar el sistema en un gran número de situaciones y ambientes por un coste mínimo, sin la necesidad de construir el sistema en todas esas situaciones. Este fue el origen, por ejemplo, de los filtros digitales: se hacía una conversión analógico-digital de un filtro analógico, se estudiaba y simulaba mediante el ordenador para estudiar su comportamiento en todas aquellas situaciones que fueran de interés, para finalmente hacer una última conversión digital-analógico, que llevara al final a la construcción del filtro analógico.

Aunque el uso de un esquema digital de trabajo permitía un gran avance en cuanto a la flexibilidad y al ahorro de medios, el hecho de que el procesado no se pudiese realizar en tiempo real, así como el excesivo coste y el gran tamaño que requerían los ordenadores, producía que los sistemas y el cálculo digital se viese como aproximación o simulación de sistemas analógicos, limitando de hecho su aplicación. El desarrollo matemático de técnicas propiamente de análisis digital también surgió como aproximación a las técnicas analógicas, naciendo de esta manera la transformada Z y la transformada discreta de Fourier, como aproximación a la transformada de Fourier y las series de Fourier, respectivamente.

Sin embargo, debido a este uso de ordenadores digitales en el análisis de las señales, se produjo una tendencia hacia el desarrollo de técnicas y algoritmos de procesamiento puramente digital, algunos de las cuales no poseían aplicación analógica alguna; por tanto, aunque eran interesantes desde el punto de vista teórico, carecían en ese momento de una utilidad práctica. Entre estas técnicas estaban las técnicas de análisis del cepstrum y los filtros homomórficos, en el desarrollo de las cuales era necesario el cálculo de la inversa de la transformada de Fourier. Aunque teóricamente se esperaba una mejora del análisis de ciertas señales mediante el uso de estas técnicas, la precisión que se requería en el cálculo de las transformadas de Fourier estaban fuera del alcance de los analizadores de espectros analógicos.

La evolución hacia un nuevo punto de vista sobre el análisis digital de señales se produjo en 1965 con el desarrollo de algoritmos rápidos para el cálculo de la transformada de Fourier, algoritmos conocidos con el nombre de transformada rápida de Fourier (FFT). Debido a la gran utilización que el procesado de señal, tanto analógico como digital, hace del análisis de Fourier, la FFT revolucionó el desarrollo práctico y la filosofía con la que se abordaban los problemas. La importancia de la FFT fue doble. Por un lado disminuyó el esfuerzo de cálculo de la transformada de Fourier en varios ordenes de magnitud, lo que produjo que muchos algoritmos se pudiesen implementar en tiempo real y que otros, que eran impracticables debido al excesivo esfuerzo computacional que requerían, se pudiesen llevar a la práctica. Por otro lado, la transformada discreta de Fourier y su cálculo mediante la FFT representaban un problema inherentemente discreto o digital. A partir de una señal discreta se calcula su FFT, que proporciona una señal también discreta en el espacio de la frecuencia, y la relación entre ambas es exacta, en este dominio discreto, y no necesita interpretarse como una aproximación a la transformada continua de Fourier. Esto produjo la reformulación de conceptos y algoritmos del procesado analógico desde un punto de vista exclusivamente digital, favoreció el desarrollo de un tratamiento matemático riguroso de las transformadas y los conceptos que aparecen en el estudio de señales discretas, a la vez que impulsó la construcción de sistemas puramente digitales.

Por supuesto, la extensión a la que ha llegado del uso del análisis digital (y por tanto discreto) de señales no habría podido tener lugar de no ser por el explosivo desarrollo que se han vivido los ordenadores digitales y los componentes electrónicos en general, lo que ha permitido desarrollar algoritmos cada vez más complicados e implementarlos en situaciones prácticas en las que se trabajen con sistemas físicos muy complejos. En la actualidad, el uso de procesado digital de señales se ha extendido a prácticamente todas las ramas de la física en las que aparecen señales que varían en el tiempo y/o en el espacio, siendo en estos momentos una herramienta en continua progresión, ya que los algoritmos que hace apenas cinco años eran impracticables, ahora se pueden desarrollar casi en tiempo real.

El procesado discreto de señal trata con señales representadas por secuencias de números o símbolos y el procesamiento de tales secuencias. El objetivo puede ser la estimación de ciertos parámetros o la transformación de la secuencia en una nueva forma más sencilla o que sea más fácilmente interpretable. En el desarrollo del anterior proceso de análisis, es posible, y en algunos casos imprescindible, añadir a la secuencia de datos información adicional que se posea sobre la señal o sobre el sistema físico que la produce, a través, por ejemplo, de modelos que se sabe que ha de cumplir la secuencia; lo que simplifica enormemente el problema y permite a la vez una mayor profundización en la información que posee la señal. Esta información adicional puede ser previa al análisis de la señal propiamente dicha, proveniente de un estudio teórico de la física del sistema, o bien puede surgir como una hipótesis de trabajo tras un primer análisis de la señal; el cual daría lugar a un segundo análisis teniendo en cuenta las anteriores hipótesis, con el que se podrá corroborar las hipótesis y mejorar la información obtenida del primer análisis.

En una situación práctica concreta, la asunción de ciertas hipótesis es un paso previo ineludible para poder analizar la señal, de forma que, por ejemplo, admitir que una señal es estacionaria o no conduce a dos tratamientos completamente diferentes de la misma, por lo que es necesario determinar con anterioridad en que conjunto se puede englobar a la señal. De igual forma, el desarrollo teórico de técnicas y algoritmos de procesado de señal no se suele realizar para señales genéricas, sino pensando en resolver problemas concretos que se presentan dentro de tipos específicos de señales. De esta forma, hay que tener cuidado al comparar dos métodos, ya que la comparación dependerá fuertemente de la señal con la que se trabaje y de la información concreta que se quiera obtener.

La hipótesis más habitual con la que se suele trabajar es que el sistema del cual proviene la señal es lineal e invariante en el tiempo. Esta hipótesis puede abandonarse cuando sea necesario, pero en la práctica es ampliamente cumplida y permite un tratamiento en función de la llamada *función de transferencia* del sistema, lo que permite a su vez caracterizar el sistema a partir de un conjunto finito de coeficientes.

Como ya se señaló anteriormente, una de las herramientas más importantes del procesado de señales es el análisis espectral, el cual consiste en analizar el contenido espectral o en frecuencias que posee una determinada señal. Para una señal continua este análisis se realiza mediante las series de Fourier, si la señal es periódica, y mediante la transformada de Fourier, para señales no periódicas pero de energía finita. Para señales discretas se utiliza la transformada Z, si la señal no es periódica pero de energía finita, y la transformada discreta de Fourier, si la señal es periódica. Por supuesto, todas las anteriores transformaciones cumplen una serie de relaciones que permiten expresar unas en función de las otras para casos concretos. Dependiendo del tipo de señal con el que se trabaje se aplicará una transformación

u otra, con el fin de estudiar su contenido espectral y con ello la contribución a la energía de cada frecuencia.

El proceso anterior no es válido para un tipo de señales importantísimo: las señales aleatorias. Una señal puede ser aleatoria debido a su propia naturaleza, como sucede en el movimiento Browniano, o porque se encuentre contaminada con un ruido aleatorio, como sucede en comunicaciones. La aplicación de las anteriores transformaciones directamente sobre los datos de estas señales no es adecuada por un doble motivo. En primer lugar debido a que, por lo general, no son señales ni periódicas ni de energía finita, lo que hace que la aplicación de las anteriores técnicas no sea posible. Por otro lado, debido a la aleatoriedad que caracteriza a este tipo de señales, no se puede extraer apenas información directamente de los datos aleatorios, sin establecer previamente algún tipo de promedio entre ellos.

Para una señal aleatoria no se puede obtener una información precisa, en los mismos términos que sucede con las señales deterministas; lo que se obtiene es una información estadística a través de promedios realizados sobre la variable aleatoria, que en este caso son los datos de la señal. De esta manera, promediando en distintas realizaciones independientes la señal a un tiempo n , se consigue la media de la señal en ese instante n , lo que matemáticamente corresponde a tomar el valor esperado de la señal en ese tiempo. Se observa como para obtener esa información es necesario un determinado número de realizaciones que permitan llevar a cabo el promedio. Cualquier función de la señal, tal y como su energía o su potencia, será una variable aleatoria, siempre y cuando no se realice ningún promedio estadístico en el cálculo de la función, no pudiéndose extraer en general información de una única realización. Es para evitar esta indeterminación para lo que se recurre al promedio, definiéndose estas funciones, como energía o potencia, a través de promedios estadísticos para que sean deterministas y proporcionen información que no dependa de la realización concreta con la que se trabaja.

La media de una señal para un determinado instante no es la única información extraíble de una señal; por ejemplo, es muy interesante saber como se relacionan los datos a tiempos distintos. Esta información queda recogida en el valor esperado del producto del dato a tiempo n con el dato a tiempo m , la función de dos variables que resulta de esta operación se conoce como *función de autocorrelación*, y hay que señalar que no es una variable aleatoria, ya que se ha realizado el un promedio estadístico en su definición, lo que hace que pierda el carácter aleatorio. Esta función recoge la información que se llama de *segundo orden* y es la base de la *estadística de segundo orden* de la señal. Sí se puede realizar la transformada de Fourier de esta función de autocorrelación, ya que prácticamente siempre posee energía finita. El resultado, que es función de uno de los tiempos m , módulo cuadrado, es lo que se conoce como espectro de potencia de la señal, que indica la contribución a la energía de cada frecuencia, en el tiempo m ; y, al igual que la función de autocorrelación, determina la estadística de segundo orden.

La utilización del espectro de potencia y de la función de autocorrelación ha sido la base de lo que se ha conocido como análisis espectral clásico, o simplemente análisis espectral; quizás la herramienta más importante, más aplicada y más estudiada del procesado de señal. Un desarrollo detallado de este análisis espectral clásico basado en la estadística de segundo orden se puede encontrar en numerosos libros y artículos como [MAR87][KAY88], donde también aparecen numerosas aplicaciones prácticas. En toda la amplia bibliografía se recoge como, durante más de 50 años, este análisis espectral ha sido el gran impulsor de numerosas

ramas de la física y la electrónica, tanto analógica como posteriormente digital, y su enorme potencia para el análisis, comprensión y diseño de sistemas físicos y electrónicos.

Es fácil de observar que puede que no toda la información sea accesible a partir de un estudio de segundo orden, tal y como es el que se ha mostrado. Por ejemplo, la información de cómo se relacionan tres datos a tiempos distintos, en principio, no está recogida en la función de autocorrelación. En la práctica se puede demostrar que, en efecto, existe información adicional que no se puede obtener mediante la estadística de segundo orden siempre que el proceso aleatorio sea no-gaussiano [NIK93a] [MEN91].

Aunque los procesos gaussianos se encuentren muy abundantemente en la naturaleza, estos suelen ir asociados con sistemas muy azarosos, ya que, por el teorema central del límite, la suma de muchos procesos aleatorios de cualquier tipo tiende a ser un proceso gaussiano. Por tanto, los procesos gaussianos, en muchas ocasiones, se asocian a señales que son el resultado de la suma de muchos procesos aleatorios. Aunque no siempre es así, en una enorme cantidad de casos, esta es una buena aproximación de lo que se entiende por ruido: una suma de muchos procesos aleatorios, la cual se asocia con aquella parte de la señal que no posee información deseable. Por otro lado, la parte de la señal que posee información no tiene por que ser suma de muchos procesos aleatorios, y por tanto se puede desviar ampliamente de la gaussianidad. Esta es la situación muy habitual en numerosos sistemas físicos.

En este caso, en el que la señal propiamente dicha, la que posee información, no es un proceso gaussiano, la información recogida mediante un estudio de segundo orden no es completa. Esto no significa que el estudio de la estadística de segundo orden sea inútil. En muchos casos es más que suficiente para obtener la información deseada de la señal, pero en otras situaciones este estudio es insuficiente e incluso erróneo. Se debe entonces intentar definir nuevos promedios estadísticos, como el que se señaló anteriormente a partir del producto de tres datos a tiempos distintos. Estos promedios se conocen con el nombre de series de cumulantes o de momentos de alto orden, en el dominio del tiempo, o como poliespectros, en el dominio de la frecuencia. De esta forma surge un análisis de señal basado en la llamada *estadística de alto orden*, también conocido como *análisis espectral de alto orden* o, simplemente, *análisis poliespectral* (HOS); el cual intenta obtener información de la señal que no es accesible a partir de la estadística de segundo orden. Históricamente, el término *Poliespectro* es debido a Tukey y Brillinger [BRI65], mientras que el de HOS se atribuye a Brillinger y Rossenblatt [BRI67a] y a Akaike [AKA66].

La importancia que posee la información no accesible para la estadística de segundo orden, ha producido que la estadística de alto orden haya experimentado en las últimas décadas un espectacular desarrollo, tanto en el estudio teórico de algoritmos y propiedades que aparecen en este nuevo dominio estadístico, como en aplicaciones prácticas. Desde mitad de los años 60 se puede encontrar trabajos donde se desarrollan técnicas basadas en estadística de órdenes superiores [BRI65][AKA66][BRI67a][BRI67b], así como múltiples aplicaciones en diversas áreas tales como análisis de datos solares [BRI67a][BRI67b], mecánica de fluidos [LII76], geofísica [HIN68], oceanografía [HAS63], biomedicina [KOR68], telecomunicaciones [BEN80], tratamiento de voz e imágenes [WEL85], series económicas [HIN85a], física de plasmas [KIM80], radar [JOU90], etc. Sin embargo, ha sido especialmente en estos últimos veinte años cuando la comunidad ha retomado estos conceptos [NIK87] [ROS83] [RAG85] [MEN91], dedicando un gran esfuerzo investigador que ha motivado la celebración de seis “*workshop*” internacionales específicos sobre estadística de órdenes superiores, que se celebran

bianualmente desde 1989 en los continentes Europeo y Americano, alternativamente. Paralelamente, todos los congresos y revistas de la especialidad han incluido secciones especiales y tópicos dedicados al análisis basado en estadística de órdenes superiores.

Los principales problemas que presenta el análisis espectral clásico y que resuelve el HOS son tres. Primero, como se ha señalado, la estadística de segundo orden sólo proporciona una información completa en el caso de tratar con señales gaussianas, por lo que para estudiar las posibles desviaciones respecto a la gaussianidad que se puedan presentar es preciso recurrir a la estadística de alto orden. En segundo lugar, el análisis de segundo orden es un análisis lineal y no puede obtener información de posibles no-linealidades que aparezcan en la señal. El efecto que estas no-linealidades poseen en el dominio de la frecuencia, es relacionar más de dos de ellas, por lo que la estadística de segundo orden no es capaz de detectar ni analizar estas relaciones. A su vez, la estadística de alto orden proporciona información tanto de la amplitud como de la fase de la respuesta de un sistema, lo que no hace el análisis clásico, ya que es ciego a cualquier relación de fase que pueda aparecer. Esto lo que produce es que los sistemas de fase no-mínima se deban tratar con estadística de alto orden, ya que los métodos basados en el espectro de potencia y la autocorrelación proporcionan resultados que siempre son de fase mínima. Por último, el hecho de que los procesos gaussianos no posean información adicional más allá de la estadística de segundo orden puede utilizarse para construir la estadística de alto orden de forma que elimine cualquier ruido aditivo gaussiano. La ventaja que presenta este esquema de eliminación de ruido respecto de los existentes en segundo orden es que no es necesario hacer ninguna suposición sobre el contenido espectral del ruido gaussiano, que puede ser completamente desconocido, mientras que en segundo orden es necesario suponer que es blanco, o en caso de no serlo, es necesario conocer de antemano su contenido espectral, lo que no suele ser posible.

Es, precisamente, la aparición de los anteriores problemas en numerosos campos de la física, lo que hace tan amplio en número de aplicaciones distintas que posee la estadística de alto orden, y que se han enunciado anteriormente.

Como se verá más adelante, el aumentar la estadística con la que se trabaja (orden tres, orden cuatro,...) aumenta mucho el coste computacional y empeora las propiedades de convergencia estadística de las funciones que se deben calcular. Esto hace que la estadística más estudiada y utilizada en la bibliografía sea la de tercer orden, que se caracteriza en el dominio del tiempo por la serie de momentos o de cumulantes de orden tres y en el dominio de la frecuencia por el *biespectro*. Son muy numerosas las referencias en las que se pueden encontrar tanto estudios teóricos rigurosos de las propiedades del biespectro como desarrollos de métodos de análisis específico que utilizan esta función espectral. También es posible encontrar aplicaciones prácticas en las que se presenta como una herramienta fundamental para caracterizar el sistema y comprender su naturaleza, demostrando ampliamente su utilidad.

Si bien es cierto que la estadística de tercer orden es, en general, la idónea dentro del alto orden, en cuanto a complejidad de cálculo y velocidad de convergencia estadística, existen situaciones en las que esto no es así. En este sentido, se encuentran dos situaciones en las que la estadística de tercer orden se muestra incapaz de proporcionar información de alto orden. La primera son señales en la que aparecen no-linealidades de orden mayor que dos, como por ejemplo sucede con las no-linealidades cúbicas. El segundo caso es cuando la señal aleatoria posee una función densidad de probabilidad simétrica, hecho bastante habitual en la naturaleza. En esta situación la estadística de tercer orden, al igual que cualquier estadística de orden

impar, es nula. En ambos, la estadística de tercer orden es incapaz de conseguir estudiar con éxito tales señales, y es necesario subir el orden de la estadística con el fin de obtener información extra de la señal; aún a costa de aumentar la dificultad y tiempo de cálculo y empeorar la convergencia estadística.

El siguiente orden estadístico es el cuarto, cuya estadística viene caracterizada en el dominio del tiempo por la serie de cumulantes o de momentos de orden cuatro, y por el *triespectro* en el dominio de la frecuencia. Será esta estadística la que habrá que utilizar en el caso de querer estudiar alguno de los dos últimos casos con una profundidad mayor de lo que permite el análisis clásico. Sobre el estudio de esta estadística y sobre la construcción de algoritmos de análisis de señales tratarán las dos primeras partes de este trabajo, que engloban los capítulos I al V.

Como se definirán posteriormente, los promedios estadísticos con los que se van a caracterizar las señales conllevarán la aplicación del operador estadístico valor esperado. Este operador requiere de un conocimiento completo de la estadística de la señal, bien a través de la función densidad de probabilidad del sistema o bien a partir de un número infinito de realizaciones, lo que proporciona una información idéntica a la luz de la definición inductiva de probabilidad [PAP84]. En la práctica esto no es accesible, y sólo se suele contar con una o varias secuencias de datos de la señal que pueden ser independientes entre ellas. Con esta información no se pueden calcular exactamente los promedios estadísticos antes indicados y hay que conformarse con estimarlos. Este es el principal problema práctico con el que se encuentra el procesado de señal, clásico y de alto orden, al aplicar sus resultados teóricos, lo que hace de la estimación espectral uno de los principales campos del procesado de señal. En general, lo que persiguen es conseguir la mejor estimación con el menor número de datos posible.

Inicialmente el deseo de trabajar con el menor número de datos posible surgió debido al tiempo que requerían los primeros ordenadores digitales en realizar sus cálculos. Esta primera motivación ha perdido parte de su interés, debido al espectacular aumento en la rapidez de ordenadores digitales; sin embargo en la estadística de cuarto orden, que es muy costosa computacionalmente, esta limitación sigue estando vigente, no pudiéndose tratar con registros demasiado largos si se desea trabajar en tiempo real. Sin embargo, existen muchas otras situaciones en las que el número de datos está limitado por causas distintas de la que supone la velocidad computacional. El principal problema es que al aumentar el número de datos de una señal se pueden introducir no-estacionariedades en ésta, lo que significa que el sistema físico que se está estudiando varía sus propiedades al aumentar el tiempo de observación sobre él. Esto sucede claramente, por ejemplo, en oceanografía o meteorología, en las que no se puede aumentar indefinidamente el tiempo de observación, ya que el sistema de estudio cambia sus propiedades, siempre y cuando no se trabaje en un laboratorio controlado. Pero este no es el único factor que limita el número de datos. Hay señales que están limitadas por su propia naturaleza y no se puede disponer de un número ilimitado de datos, como series económicas, datos de manchas solares, datos de terremotos, etc. También es posible que las medidas impliquen un gran esfuerzo experimental por lo que disminuirlas en la medida de lo posible sería deseable, como ocurre en la interferometría óptica, en la que cada medida implica el desplazamiento de un espejo, o en medidas de sensores distribuidos espacialmente, donde aumentar el número de datos implica aumentar en número de sensores.

Este esfuerzo por trabajar con el menor número de datos es especialmente importante

en la estadística de cuarto orden, donde los tiempos de cálculo son varios ordenes de magnitud superiores a los que aparecen en el análisis clásico e incluso en el análisis de tercer orden.

En la estimación de los poliespectros existen dos grandes conjuntos de métodos o técnicas de estimación, que surgieron a semejanza de lo que ocurre en el análisis clásico. Estos son los métodos convencionales, que hacen uso directamente de las definiciones de los poliespectros, por lo se consiguen a través de transformadas de Fourier; y los métodos paramétricos, en los que la señal se modela, de forma que el conocimiento de ésta se reduce al conocimiento de un conjunto de parámetros y a la estadística de señal muy sencilla, construyéndose los poliespectros a partir de éstos. Los primeros métodos son más costosos computacionalmente y se ha comprobado que poseen una menor resolución. Los segundos presentan una mayor resolución y son menos costosos computacionalmente, lo que es especialmente importante en la estadística de cuarto orden. Entre los últimos, los más utilizados son los métodos autorregresivos (AR), de media móvil (MA) y los autorregresivos de media móvil (ARMA). Aunque una señal no tiene porque seguir ninguno de los anteriores esquemas paramétricos, se puede demostrar que si el sistema es lineal e invariante temporal, la señal se puede aproximar tanto como se quiera mediante un proceso lineal, sin más que aumentar en número de coeficientes. Concretamente, la primera parte de esta memoria se centrará en el desarrollo de distintos métodos de estimación AR del triespectro, así como una comparación práctica de los métodos para distintas señales.

En el capítulo I se hace una introducción de los conceptos necesarios para el estudio de alto orden, haciendo especial hincapié en la estadística de cuarto orden y en las propiedades del triespectro. Posteriormente, en el capítulo II, se desarrollan distintos métodos de estimación AR del triespectro, entre los que se adaptan métodos clásicos y se desarrollan otros nuevos. Las propiedades y características de estos métodos se analizan para distintas señales en el capítulo III, a la vez que se comparan los resultados obtenidos con los que proporcionan los métodos clásicos de estimación, buscando las circunstancias prácticas en las que es necesario el estudio de cuarto orden.

El principal uso de los métodos de estimación AR en la estadística de tercer orden es el de la estimación de biespectros de señales, pero no es el único. Otro uso para el que los métodos de estimación AR biespectrales se han mostrado especialmente eficientes es el de la detección y caracterización de un tipo de no-linealidades de segundo orden, llamados acoplos cuadráticos de fase. En la segunda parte de esta memoria, se pretende seguir este esquema dentro de la estadística de cuarto orden y aplicar los métodos de estimación AR del triespectro, desarrollados en el apartado anterior, a la detección y caracterización de acoplos cúbicos de fase. El estudio de este tipo de señales y la aplicación de los métodos AR desarrollados en el capítulo II a señales complejas es lo que se desarrolla en el capítulo IV, mientras que el estudio de las estimaciones para distintas señales se lleva a cabo en el capítulo V.

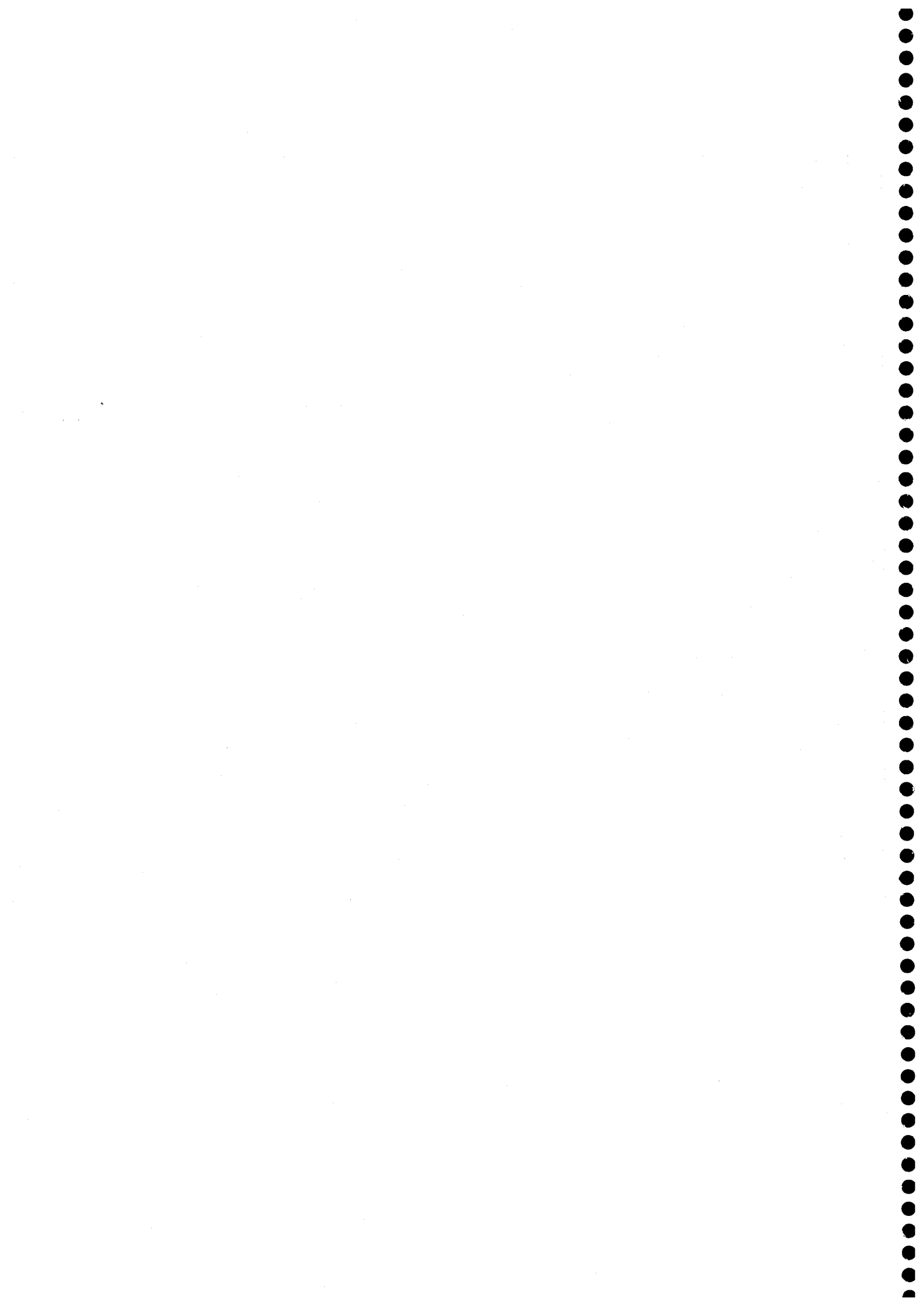
Tanto en el biespectro como en el triespectro, la detección y caracterización de acoplos mediante métodos AR posee ciertas limitaciones e inconvenientes. En un intento de salvar estos problemas, en esta parte, también se desarrollará un esquema de identificación basado en técnicas de ESPRIT (*Estimating signal parameters via rotation invariance techniques*), que clásicamente se ha aplicado en DOA (*Direction of Arrival*) con excelentes resultados. Se basa en la similitud que existe entre las señales recogidas por un array de sensores en el problema de la determinación del ángulo de incidencia de señales electromagnéticas y las señales armónicas con acoplos. Estos métodos tienen la ventaja adicional de proporcionar un

estimador de la amplitud del acoplos, lo que no son capaces de proporcionar los métodos AR, que sólo son capaces de detectarlos o dar las frecuencias a las que ocurre. El desarrollo de este método se realiza en el capítulo IV, paralelamente con los métodos AR; al igual que el estudio mediante simulaciones de las estimaciones que produce, que se realiza en el capítulo V.

Por último, en la tercera parte de esta memoria se aborda el problema de discriminación de blancos de radar mediante la técnica del pulso de extinción o E-pulso, aprovechando la dilatada experiencia que el grupo de investigación posee en este campo. Este esquema de identificación se puede aplicar tanto a radares convencionales como de superficie, poseyendo importantes ventajas frente a los esquemas de identificación más extendidos. En general, en todo esquema de identificación de un blanco de radar se precisa de la extracción de parámetros ligados con su geometría y composición, a partir del campo electromagnético dispersado. De esta forma la identificación se realiza comparando estos parámetros con los del conjunto de blancos patrón o blancos conocidos. Las experiencias realizadas sobre blancos conductores excitados por ondas electromagnéticas transitorias de amplio espectro [NIC72] [AND74], junto con el Método de Expansión de Singularidades (SEM) [BAU76] y el análisis de los resultados obtenidos mediante métodos numéricos [MIL80], han mostrado que la respuesta de un blanco conductor (intensidad o cargas inducidas en él, campo eléctrico dispersado, etc) se puede modelar en el dominio del tiempo por una suma de exponenciales complejas amortiguadas, cuyas frecuencias complejas se denominan resonancias naturales o polos del blanco. Estos parámetros sólo dependen de la geometría y características electromagnéticas del blanco, siendo independientes tanto de la orientación como de la excitación utilizada [ROT85b]. Esta cualidad de las resonancias naturales las hace muy atractivas y útiles en la identificación de blancos.

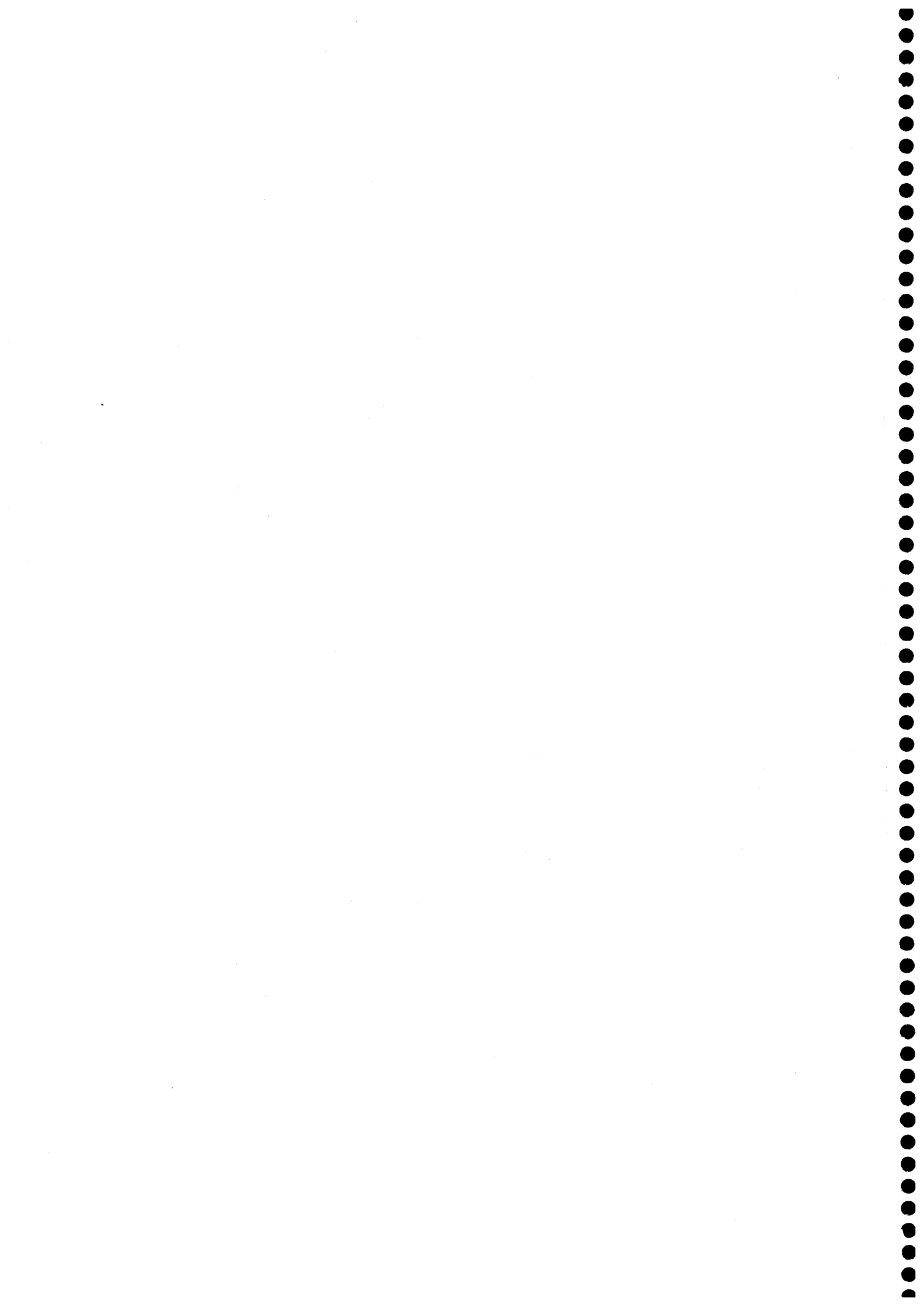
Tras una breve introducción de los distintos métodos de discriminación que aparecen en la bibliografía y sus características más importantes, que se realiza en el capítulo VI; lo que se persigue en el capítulo VII es utilizar la teoría de splines para establecer un método rápido y sencillo de construcción de los E-pulsos, lo que permitirá disminuir la dimensión del problema e imponer nuevas condiciones que mejoren la identificación de una manera sencilla. A la vez se intentará mejorar los resultados que se obtienen del esquema clásico de identificación E-pulso, mediante un nuevo esquema que aprovechen las propiedades estadísticas del ruido para su eliminación, ya que el esquema clásico, pese a sus buenos resultados, no presta atención a su naturaleza. En el capítulo VIII se estudia el esquema de identificación clásico, comprobando como proporciona resultados asintóticamente erróneos, lo que da lugar a otro esquema de identificación basado en correlaciones cruzadas, cuyos resultados son correctos asintóticamente. El estudio mediante simulaciones de los desarrollos teóricos de los capítulos VII y VIII es lo que se desarrolla en el último capítulo IX.

Al final de cada capítulo se exponen con las conclusiones más importantes que se pueden desprender de su desarrollo y, para concluir, las más importantes se recogen brevemente en un capítulo final de conclusiones.



CAPÍTULO I

CUMULANTES Y MOMENTOS DE SEÑALES ALEATORIAS



I.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se definirán las series de cumulantes, de momentos y los poliespectros de señales aleatorias, así como las propiedades que estos poseen. Estas funciones caracterizarán las estadísticas de los distintos ordenes y de sus propiedades dependerá la utilidad del análisis de alto orden.

El capítulo se estructura de la siguiente forma:

-En primer lugar, en la sección I.2. se introducen las definiciones y propiedades más importantes de los momentos y cumulantes de un conjunto de variables aleatorias. Se pondrá especial énfasis en la relación entre cumulantes y momentos, y en las propiedades que poseen en el caso muy común de procesos estacionarios.

-En la sección I.3. se introducen la definición de los espectros de cumulantes, también llamados poliespectros o espectros de alto orden. Como casos especiales se estudiarán las definiciones concretas del poliespectro de orden dos, o espectro de potencia; el de orden tres, o biespectro; y especialmente del espectro de orden cuatro, o triespectro. Asimismo se discuten las razones de utilizar espectro de cumulantes en lugar de espectro de momentos, y se definen los conceptos que se utilizarán a lo largo de la memoria.

-En la sección I.4. se presentan las propiedades de los poliespectros de procesos estacionarios, propiedades que van a permitir utilizarlos como instrumento útil en la detección de no linealidades o para la eliminación de ruido aditivo gaussiano, temas de los que tratarán los capítulos del II al V. A parte de estos usos se presenta la utilidad para la detección de sistemas de fase no mínima, lo que se ilustrará con un ejemplo sencillo en el que distintos procesos presentarán un mismo espectro de potencia y diferente biespectro. Por último se estudiará los sistemas no lineales operando bajo entrada aleatoria, introduciendo el problema de los acoplos de fase, sobre el que tratarán los capítulos IV y V.

I.2. CUMULANTES Y MOMENTOS DE SEÑALES ALEATORIAS

I.2.1. Definición de momentos y cumulantes.

Dado un conjunto de n variables aleatorias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, su momento conjunto de orden $r = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, se define como [PAP84]:

$$\text{Mom}[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}] \equiv \mathcal{E}\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}\} = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \dots \partial \omega_n^{k_n}} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0}, \quad (1.1)$$

donde $\mathcal{E}\{\cdot\}$ representa el operador estadístico valor esperado y la función $\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ es la función característica conjunta definida por [PAP84]:

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \equiv \mathcal{E}\{e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n)}\}. \quad (1.2)$$

La definición (1.1) indica que los momentos conjugados son los coeficientes del desarrollo en serie en torno al origen de la función característica definida en (1.2).

La segunda función característica conjunta resulta se define como el logaritmo neperiano de la anterior función [PAP84]:

$$\Psi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \equiv \ln[\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)]. \quad (1.3)$$

A partir de esta segunda función característica se definen, al igual que se hizo con los momentos, el cumulante de orden $r = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ como los coeficientes del desarrollo en serie en torno al origen de la segunda función característica, es decir [PAP84] [ROS83] [ROS85] [SHI63]:

$$\text{Cum}[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}] \equiv (-j)^r \frac{\partial^r \Psi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \dots \partial \omega_n^{k_n}} \Bigg|_{\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0} \quad (1.4)$$

A través de la relación que existe entre las dos funciones características se puede establecer una relación entre cumulantes y momentos. Por ejemplo, para un variable aleatoria x , sus primeros momentos son:

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{Mom}[x] = \mathcal{E}\{x\} & m_2 &= \text{Mom}[x, x] = \mathcal{E}\{x^2\} \\ m_3 &= \text{Mom}[x, x, x] = \mathcal{E}\{x^3\} & m_4 &= \text{Mom}[x, x, x, x] = \mathcal{E}\{x^4\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

y sus cumulantes se relacionan con estos momentos según las relaciones:

$$\begin{aligned} c_1 &= \text{Cum}[x] = m_1 & c_2 &= \text{Cum}[x, x] = m_2 - m_1^2 \\ c_3 &= \text{Cum}[x, x, x] = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \\ c_4 &= \text{Cum}[x, x, x, x] = m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12m_2 m_1^2 - 6m_1^4. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Las expresiones anteriores se pueden comprobar sustituyendo el desarrollo en serie de la función característica:

$$\Phi(\omega) = 1 + j\omega m_1 - \frac{\omega^2}{2!} m_2 + \dots + \frac{(j\omega)^k}{k!} m_k + \dots \quad (1.7)$$

en (1.1), (1.3) y (1.4). Notese que si la variable aleatoria x es de media cero, es decir $\mathcal{E}\{x\} = 0$, las relaciones (1.6) quedan $c_2 = m_2$, $c_3 = m_3$ y $c_4 = m_4 - 3m_2^2$.

I.2.2. Momentos y cumulantes de las funciones de densidad de probabilidad más usuales.

Con el fin de ilustrar las anteriores definiciones, se va a suponer una variable aleatoria x , la cual poseerá una determinada función de densidad de probabilidad (*pdf*), y se van a calcular sus cumulantes y momentos hasta orden cuarto. Se realiza este proceso para las *pdf* más usuales, que por simplicidad se han tomado de media nula cuando ha sido posible, y estas serán:

-Uniforme:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & |x| < c \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.8)$$

-Gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.9)$$

-Laplaciana:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}. \quad (1.10)$$

-Exponencial:

$$f(x) = e^{-\lambda x} u(x). \quad (1.11)$$

-Rayleigh:

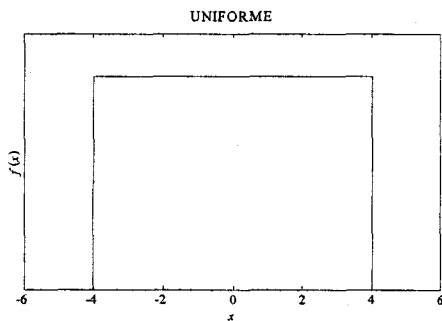
$$f(x) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} u(x). \quad (1.12)$$

En las siguientes figuras se muestran las *pdf* anteriores, junto con sus momentos y

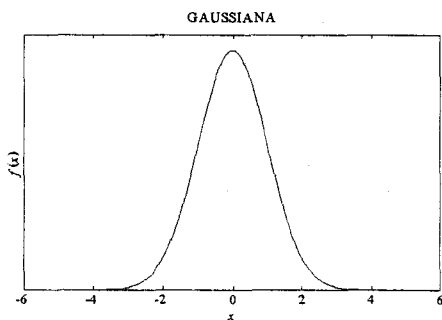
cumulantes para ordenes desde uno a cuatro. Los momentos pueden generarse a través de la expresión:

$$m_n = \mathcal{E}\{x^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx, \quad (1.13)$$

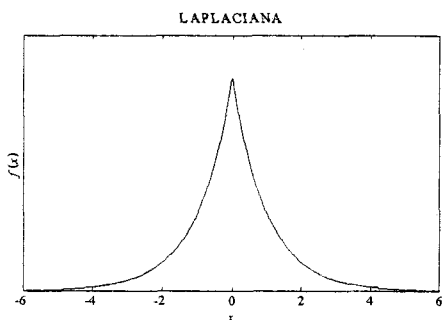
mientras que los cumulantes se obtienen aplicado las relaciones (1.6). Se puede observar como los cumulantes y momentos de ordenes impares, para variables con *pdf* simétricas, son nulos, lo que producirá que la estadística de tercer orden de estos procesos no proporcione información y haya que recurrir a la de cuarto orden, como se apuntó en la introducción. También puede observarse como los cumulantes de orden mayor que dos son nulos cuando la variable aleatoria posee una *pdf* gaussiana. Éste es un hecho que cumplen todos los cumulantes de orden mayor que dos y que posteriormente servirá de argumento en favor de la utilización de los cumulantes en lugar de momentos, para caracterizar la estadística de un cierto orden.



n	m_n	c_n
1	0	0
2	$c^2/3$	$c^2/3$
3	0	0
4	$c^4/5$	$-2c^4/15$

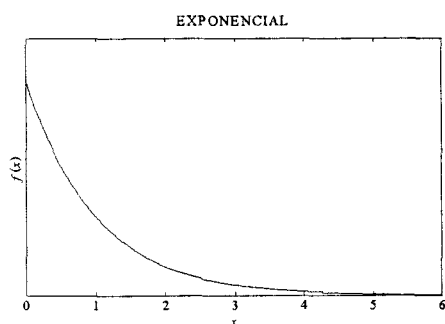


n	m_n	c_n
1	0	0
2	σ^2	σ^2
3	0	0
4	$3\sigma^4$	0

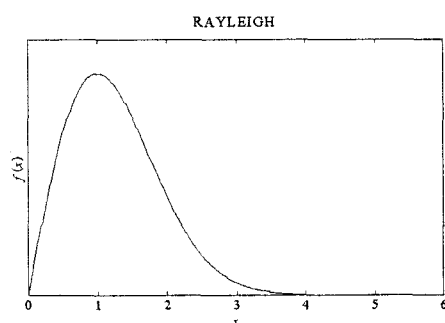


n	m_n	c_n
1	0	0
2	2	2
3	0	0
4	24	12

Figuras 1.1. Momentos y cumulantes para $n=1, \dots, 4$ de las *pdf*'s Uniforma, Gaussiana y Laplace.



n	m_n	c_n
1	$1/\lambda$	$1/\lambda$
2	$2/\lambda^2$	$1/\lambda^2$
3	$6/\lambda^3$	$2/\lambda^3$
4	$24/\lambda^4$	$6/\lambda^4$



n	m_n	c_n
1	$\alpha(\pi/2)^{1/2}$	$\alpha(\pi/2)^{1/2}$
2	$2\alpha^2$	$\alpha^2(2-\pi/2)$
3	$3\alpha^3(\pi/2)^{1/2}$	$-3\alpha^3 \pi(\pi/2)^{1/2}$
4	$8\alpha^4$	$\alpha^4(12\pi-3\pi^2-8)/2$

Figuras 1.2. Momentos y cumulantes para $n=1, \dots, 4$ de las pdf's Exponencial y Rayleigh.

1.2.3. Relación entre momentos y cumulantes.

En (1.6) aparecen relaciones válidas hasta orden cuatro y para una única variable aleatoria. El razonamiento seguido en la obtención de (1.6) se puede generalizar para cualquier orden y número de variables, sin más que realizar los desarrollos en serie que definen a las series de cumulantes y momentos conjuntos y utilizar la relación que existe entre las respectivas funciones de transferencia. Haciendo esto se obtiene [BRI65] [ROS85] [LEO59]:

$$\text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \sum (-1)^{p-1} (p-1)! \mathcal{E}\left\{ \prod_{i \in s_1} x_i \right\} \mathcal{E}\left\{ \prod_{i \in s_2} x_i \right\} \dots \mathcal{E}\left\{ \prod_{i \in s_p} x_i \right\}, \quad (1.14)$$

donde la sumatoria se extiende sobre todas las posibles particiones no ordenadas, (s_1, s_2, \dots, s_p) , con $p=1, 2, \dots, n$, del conjunto de enteros $(1, 2, \dots, n)$. Por ejemplo, el conjunto de enteros $(1, 2, 3)$ puede ser partido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p=1 \quad & s_1 = \{1, 2, 3\} \\ p=2 \quad & s_1 = \{1\}, \quad s_2 = \{2, 3\} \\ & s_1 = \{2\}, \quad s_2 = \{1, 3\} \\ & s_1 = \{3\}, \quad s_2 = \{1, 2\} \\ p=3 \quad & s_1 = \{1\}, \quad s_2 = \{2\}, \quad s_3 = \{3\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

con lo que la expresión (1.14) para orden tres queda:

$$\text{Cum}[x_1, x_2, x_3] = \mathcal{E}\{x_1 x_2 x_3\} - \mathcal{E}\{x_1\}\mathcal{E}\{x_2 x_3\} - \mathcal{E}\{x_2\}\mathcal{E}\{x_1 x_3\} - \mathcal{E}\{x_3\}\mathcal{E}\{x_1 x_2\} + 2\mathcal{E}\{x_1\}\mathcal{E}\{x_2\}\mathcal{E}\{x_3\}, \quad (1.16)$$

y para orden cuatro:

$$\begin{aligned} \text{Cum}[x_1, x_2, x_3, x_4] = & \mathcal{E}\{x_1 x_2 x_3 x_4\} - \mathcal{E}\{x_1 x_2\}\mathcal{E}\{x_3 x_4\} - \mathcal{E}\{x_1 x_3\}\mathcal{E}\{x_2 x_4\} - \mathcal{E}\{x_1 x_4\}\mathcal{E}\{x_2 x_3\} - \\ & \mathcal{E}\{x_1\}\mathcal{E}\{x_2 x_3 x_4\} - \mathcal{E}\{x_2\}\mathcal{E}\{x_1 x_3 x_4\} - \mathcal{E}\{x_3\}\mathcal{E}\{x_1 x_2 x_4\} - \mathcal{E}\{x_4\}\mathcal{E}\{x_1 x_2 x_3\} + \\ & 2\mathcal{E}\{x_1 x_2\}\mathcal{E}\{x_3\}\mathcal{E}\{x_4\} + 2\mathcal{E}\{x_1 x_3\}\mathcal{E}\{x_2\}\mathcal{E}\{x_4\} + 2\mathcal{E}\{x_1 x_4\}\mathcal{E}\{x_2\}\mathcal{E}\{x_3\} + 2\mathcal{E}\{x_2 x_3\}\mathcal{E}\{x_1\}\mathcal{E}\{x_4\} + \\ & 2\mathcal{E}\{x_2 x_4\}\mathcal{E}\{x_1\}\mathcal{E}\{x_3\} + 2\mathcal{E}\{x_3 x_4\}\mathcal{E}\{x_1\}\mathcal{E}\{x_2\} - 6\mathcal{E}\{x_1\}\mathcal{E}\{x_2\}\mathcal{E}\{x_3\}\mathcal{E}\{x_4\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

En las anteriores ecuaciones se puede comprobar que si todas las variables aleatorias son la misma se vuelve a obtener las relaciones (1.6). También puede verse como, para procesos de media nula, los momentos y cumulantes conjuntos de orden tres son iguales, mientras que los cumulantes de orden cuatro quedan, para este tipo de procesos, como:

$$\text{Cum}[x_1, x_2, x_3, x_4] = \mathcal{E}\{x_1 x_2 x_3 x_4\} - \mathcal{E}\{x_1 x_2\}\mathcal{E}\{x_3 x_4\} - \mathcal{E}\{x_1 x_3\}\mathcal{E}\{x_2 x_4\} - \mathcal{E}\{x_1 x_4\}\mathcal{E}\{x_2 x_3\}. \quad (1.18)$$

En general, el conocimiento del cumulante conjunto de orden n requiere el conocimiento de los momentos conjuntos desde orden 1 hasta orden n , aunque para procesos de media nula se simplifican mucho las expresiones, como ha podido verse en para los cumulantes de orden cuatro.

I.2.4. Propiedades de momentos y cumulantes.

A continuación se enumeran algunas de las principales propiedades de los cumulantes y momentos conjuntos. Todas ellas se pueden deducir fácilmente a partir de las definiciones dadas en la sección I.2.1. [BRI65] [BRI67] [ROS83] [SHI63] [ROS85] [SIN63] [RAO84]:

1. Si $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son constantes, los cumulantes y los momentos cumplen:

$$\begin{aligned} \text{Mom}[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] \\ \text{Cum}[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

2. Los momentos y los cumulantes son funciones simétricas en sus argumentos, lo que implica:

$$\begin{aligned} \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \text{Mom}[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] \\ \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \text{Cum}[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}], \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde (i_1, i_2, \dots, i_n) es cualquier permutación del conjunto de enteros $(1, 2, \dots, n)$.

3. Si las variables aleatorias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se pueden dividir en dos o más grupos de variables estadísticamente independientes, entonces su cumulante de orden n es nulo, es decir, $\text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$, lo que no es cierto, en general, para los momentos, $\text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] \neq 0$. Este hecho es una consecuencia de las propiedades de las funciones características. Por ejemplo, para los conjuntos $\{x_1, x_2, \dots, x_\lambda\}$ y $\{x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n\}$ sus funciones características cumplen $\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda) \Phi(\omega_{\lambda+1}, \omega_{\lambda+2}, \dots, \omega_n)$ y $\Psi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \Psi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda) + \Psi(\omega_{\lambda+1}, \omega_{\lambda+2}, \dots, \omega_n)$, lo que produce, una vez realizadas las derivadas parciales de (1.1) y (1.4) y impuesta la independencia estadística de ambos conjuntos, cumulantes conjuntos nulos y momentos no nulos.

4. Si las variables aleatorias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son independientes, entonces se cumple:

$$\text{Cum}[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] = \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Cum}[y_1, y_2, \dots, y_n], \quad (1.21)$$

lo que en general no se cumple para los momentos, ya que:

$$\begin{aligned} \text{Mom}[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] = \\ \mathcal{E}\{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \dots (x_n + y_n)\} \neq \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Mom}[y_1, y_2, \dots, y_n]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Sin embargo, para las variables aleatorias $\{x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n\}$ se cumple:

$$\begin{aligned} \text{Mom}[x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n] &= \text{Mom}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Mom}[y_1, x_2, \dots, x_n] \\ \text{Cum}[x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n] &= \text{Cum}[x_1, x_2, \dots, x_n] + \text{Cum}[y_1, x_2, \dots, x_n]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

5. Si un conjunto de variables aleatorias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son conjuntamente gaussianas, toda su información estadística queda recogida en los momentos de orden $n \leq 2$, por lo que los momentos de mayor orden no aportan información adicional alguna. Esto queda explícitamente recogido en el hecho de que los cumulantes de orden $n > 2$ para estas variables son nulos. Esta propiedad hace de los cumulantes un buen indicador de la naturaleza no-gaussiana de las series temporales, como se explicará posteriormente.

1.2.5. Momentos y cumulantes de procesos aleatorios. Estacionaridad.

Se considera $\{x(k)\}$, con k entero, un proceso discreto aleatorio real, cuyos momentos hasta orden n existen y vienen dados por:

$$m_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}; k) \equiv \text{Mom}[x(k), x(k + \tau_1), \dots, x(k + \tau_{n-1})] = \mathcal{E}\{x(k)x(k + \tau_1) \dots x(k + \tau_{n-1})\}. \quad (1.24)$$

De igual manera se definen los cumulantes:

$$c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}; k) \equiv \text{Cum}[x(k), x(k + \tau_1), \dots, x(k + \tau_{n-1})] \quad (1.25)$$

Que el proceso $\{x(k)\}$ sea estacionario de orden n significará que sus momentos hasta orden n dependerán únicamente de las diferencias temporales $\tau_i, i=1, \dots, n-1$, y no del origen de tiempos tomado, k en las anteriores expresiones. Esto significa que:

$$\begin{aligned} m_p^x(\tau_1, \dots, \tau_{p-1}) &= \text{Mom}[x(k), x(k+\tau_1), \dots, x(k+\tau_{p-1})] \\ c_p^x(\tau_1, \dots, \tau_{p-1}) &= \text{Cum}[x(k), x(k+\tau_1), \dots, x(k+\tau_{p-1})], \end{aligned} \quad (1.26)$$

con p desde uno hasta n .

Con las anteriores definiciones y la relación entre momentos y cumulantes (1.14), es fácil encontrar para procesos aleatorios estacionarios las siguientes relaciones:

-Primer orden:

$$c_1^x = m_1^x = \mathcal{E}\{x(k)\}. \quad (1.27)$$

-Segundo orden:

$$c_2^x(\tau) = m_2^x(\tau) - (m_1^x)^2. \quad (1.28)$$

La función $m_2^x(\tau)$ se conoce como función de autocorrelación y $c_2^x(\tau)$ como autocovarianza.

-Tercer orden:

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = m_3^x(\tau_1, \tau_2) - m_1^x [m_2^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + m_2^x(\tau_2 - \tau_1)] - 2(m_1^x)^3 \quad (1.29)$$

-Cuarto orden:

$$\begin{aligned} c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3 - \tau_1) - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2 - \tau_1) - \\ & m_1^x [m_3^x(\tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_1) + m_3^x(\tau_1, \tau_2) + m_3^x(\tau_1, \tau_3) + m_3^x(\tau_2, \tau_3)] + (m_1^x)^4 [m_2^x(\tau_1) + m_2^x(\tau_2) + \\ & m_2^x(\tau_3) + m_2^x(\tau_3 - \tau_1) + m_2^x(\tau_3 - \tau_2) + m_2^x(\tau_2 - \tau_1)] - 6(m_1^x)^4. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Es conveniente recordar que para procesos de media cero los cumulantes de orden uno a tres son iguales a los momentos, y para el caso de cumulantes de orden cuatro, la relación se simplifica mucho, quedando la relación como :

$$c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = m_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^x(\tau_1)m_2^x(\tau_3 - \tau_2) - m_2^x(\tau_2)m_2^x(\tau_3 - \tau_1) - m_2^x(\tau_3)m_2^x(\tau_2 - \tau_1). \quad (1.31)$$

Esta última será la expresión que se utilizará para calcular los cumulantes de cuarto orden en procesos estacionarios de media nula, donde se puede ver como es necesario conocer el momento de orden cuatro y la secuencia de autocorrelación, sin necesidad de conocer el momento de orden tres.

Para los ordenes tres y cuatro, los cumulantes de un procesos no-gaussianos estacionarios $x(k)$ se pueden expresar como:

$$c_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) - m_n^G(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}), \quad (1.32)$$

donde $m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ es el momento de orden n de $x(k)$ y $m_n^G(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ es el momento de orden n de un proceso gaussiano equivalente, de forma que posea la misma media y la misma función de autocorrelación que el proceso $x(k)$. De esta relación se desprende que si $x(k)$ es un proceso gaussiano $m_n^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = m_n^G(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$, de forma que el cumulante es nulo. Aunque la anterior relación sólo es válida para $n=3,4$, recuerdese que el hecho que el cumulante de un proceso gaussiano sea nulo es válido para todo $n>2$.

Al igual que se define la media de un proceso, medida que caracteriza la estadística de primer orden, se pueden definir otras medidas para caracterizar las siguientes estadísticas. Así se definen la varianza, el coeficiente de asimetría y la kurtosis de $x(k)$, evaluando los cumulantes de orden dos, tres y cuatro, respectivamente, a retraso temporal cero, es decir:

$$\begin{aligned} \text{-Varianza:} & \quad \gamma_2^x = c_2^x(0) = \mathcal{E}\{x(k)^2\} \\ \text{-Coeficiente de asimetría:} & \quad \gamma_3^x = c_3^x(0,0) = \mathcal{E}\{x(k)^3\} \\ \text{-Kurtosis:} & \quad \gamma_4^x = \bar{c}_4^x(0,0,0) = \mathcal{E}\{x(k)^4\} - (\gamma_2^x)^2, \end{aligned} \quad (1.33)$$

expresiones que se han construido para procesos de medio nula por simplicidad.

Como puede verse de las definiciones, los cumulantes y los momentos de orden n de procesos estacionarios son funciones de $n-1$ argumentos, es decir $n-1$ dimensionales. Sin embargo, en muchas aplicaciones del procesado de señal será interesante trabajar con funciones de una dimensión (1-D), por los que serán funciones de una sola variable, que se conocen en la literatura como 1-D *slices* de cumulantes o de momentos [NIK91] [NIK93b]. Estos 1-D *slices* se obtienen a partir de cumulantes o momentos, dejando libre sólo uno de sus $n-1$ grados de libertad. De esta forma se pueden elegir muchos tipos de 1-D *slices*, destacando los radiales, los horizontales, los verticales y los diagonales; estos últimos se construyen haciendo $\tau_i = \tau$, para $i=1, \dots, n-1$, en los argumentos de momentos y cumulantes.

Como ya se apuntó en la introducción y se ha puesto de manifiesto a lo largo de este apartado, existen situaciones en las que los cumulantes de orden tres no ofrecen información

del proceso, tal y como ocurre cuando la *pdf* es simétrica respecto de su valor medio, lo que se ha comprobado explícitamente para las *pdf* laplaciana y uniforme. En este caso es necesario recurrir a la estadística de cuarto orden para obtener una información de alto orden de estos procesos. No es éste el único caso en el que es más útil la estadística de cuarto orden que la de tercer orden, ya que existen procesos cuyos cumulantes de orden tres, sin ser nulos, son muchos más pequeños que los de orden cuatro, de forma que puede resultar conveniente utilizar estos últimos. A su vez, si existen no-linealidades de tercer orden, como ocurre en los acoplos cúbicos de fase que se tratarán en la segunda parte de esta memoria, la estadística de tercer orden también se muestra incapaz de proporcionar información respecto de ellas y vuelve a ser necesario recurrir a la estadística de cuarto orden para estudiarla.

1.2.6. Ergodicidad y momentos.

Un proceso aleatorio $x(k)$ es ergódico, con probabilidad uno (w.p.1), si todos sus momentos pueden obtenerse a partir de una única realización. Definiendo operador promedio temporal $\langle \cdot \rangle$ como:

$$\langle f(k) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N f(k), \quad (1.34)$$

una señal es ergódica w.p.1. si se cumple para todo n :

$$\langle x(k)x(k+\tau_1)\dots x(k+\tau_{n-1}) \rangle = \mathcal{E}\{x(k)x(k+\tau_1)\dots x(k+\tau_{n-1})\} \text{ w.p.1.} \quad (1.35)$$

De esta forma, que una señal aleatoria sea ergódica indica que los promedios temporales de todas las posibles secuencias de muestras son iguales entre sí e iguales al valor esperado de estas secuencias.

Igual que se ha definido ergodicidad w.p.1. se puede definir ergodicidad en valor absoluto, en media cuadrática, etc. sin más que exigir que la convergencia estadística del límite sea en valor absoluto, en media cuadrática, etc.; aunque la definición más utilizada es la de ergodicidad w.p.1. y todas las definiciones son idénticas para la mayoría de las señales.

Al estudiar la ergodicidad de una señal es imposible estudiar todos los ordenes n y comprobar si la señal es o no ergódica, esto sólo es posible realizarlo a partir del conocimiento *pdf* o de la función característica, información de la que no se puede disponer. Lo que se hace en la práctica es restringir el concepto de ergodicidad a un determinado orden, de esta forma una señal será ergódica de orden n w.p.1. si los estimadores media temporal de sus momentos hasta orden n tienden a los valores verdaderos w.p.1. Esto implica que la condición (1.35) la cumplen todos los momentos de orden uno hasta orden n .

En cualquier situación práctica, el límite que define el promedio temporal en (1.34) no puede llevarse a cabo al disponerse únicamente de un número N finito de datos de la señal. Por tanto, el promedio temporal de cualquier función solamente podrá estimarse o aproximarse a partir de estos datos. Concretamente, la estimación de las medias temporales de los momentos de la señal $x(n)$ a partir de N datos finitos resulta:

$$\langle x(k)x(k+\tau_1)\dots x(k+\tau_{n-1}) \rangle_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x(k)x(k+\tau_1)\dots x(k+\tau_{n-1}), \quad (1.36)$$

donde puede verse como la estimación depende explícitamente del número de datos N de los que se dispongan.

Por último, es interesante resaltar que la estacionaridad es una condición necesario para la ergodicidad. En efecto, en la definición (1.34) del promedio temporal puede verse como la función $\langle f(k) \rangle$ no depende del índice k , ya que éste se ha sumado a todos sus posibles valores; dependencia que sí aparece en los momentos de las señales no estacionarias, por lo que, para estas señales, es imposible que los promedios temporales y los valores esperados sean iguales.

El tratamiento riguroso de la ergodicidad necesita una profundización en áreas como la teoría de probabilidad, procesos estocásticos y convergencia estadística, lo que queda fuera del alcance de esta memoria. Estudios amplios y rigurosos respecto a la ergodicidad, así como a otros muchos conceptos estadísticos, pueden encontrarse en [PAP84] [SHI63], entre otros. A lo largo de esta memoria se asumirá, a menos que se indique lo contrario, que (1.35) se cumple hasta orden n , lo que indica que los cumulantes hasta orden n existen y pueden calcularse a partir de un único registro, aplicando promedios temporales.

I.3. POLIESPECTROS

En la estadística de segundo orden se define el espectro de potencia como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. La utilidad de esta función espectral radica en que la información que recoge es muy útil y manejable, permitiendo una fácil interpretación de la naturaleza de la señal; a su vez es una potente herramienta en el diseño de filtros, la estimación paramétrica, la eliminación de ruido, etc. Siguiendo esta idea, en la estadística de ordenes superiores se definen los espectros de alto orden, también llamados poliespectros, con el fin de utilizarlos de forma análoga a como se hace con el espectro de potencia. Estos poliespectros no serán otra cosa que la representación en el espacio de la frecuencia de la información contenida en la estadística de un orden determinado y se calculan mediante la transformada de Fourier (TF) multidimensional de la secuencia de momentos o de cumulantes de ese orden. Según esto, se pueden definir los poliespectros tanto a partir de cumulantes como de momentos, y la idoneidad de uno u otro camino depende del tipo de señal. Tal y como se verá en el apartado I.3.4., en el caso de señales aleatorias es más adecuado trabajar con espectros construidos a partir de cumulantes y, para señales deterministas, es preferible trabajar partiendo de los momentos. En esta memoria se trabajará únicamente con señales aleatorias, por lo que los poliespectros se construyen utilizando los cumulantes.

I.3.1. Definición basada en la TF.

El poliespectro de orden n de un proceso real y estrictamente estacionario se define con la TF n -multidimensional de su secuencia de cumulantes, es decir [NIK87] [MEN91]

[NIK93a] [NIK93b]:

$$C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{n-1} \tau_{n-1})}, \quad (1.37)$$

con $|\omega_i| \leq \pi$ para $i=1, \dots, n-1$ y $|\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}| \leq \pi$. Esta representación espectral para los espectros de cumulantes se debe originalmente a Kolmogorov [SHI60] [SHI63] [SIN63].

Una condición suficiente para que un poliespectro exista es que su cumulante asociado sea absolutamente sumable:

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} |c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})| < \infty, \quad (1.38)$$

o bien, de forma equivalente, que [NIK93b]:

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{n-1}=-\infty}^{\infty} (1 + |\tau_i|) |c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})| < \infty, \quad (1.39)$$

para $i=1, \dots, n-1$.

Es fácil ver como, aunque se ha restringido por ahora el estudio a señales reales, los poliespectros son funciones complejas, es decir:

$$C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = |C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})| e^{j\psi_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})}, \quad (1.40)$$

y también periódicas con periodo 2π en todas sus variables.

$$C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = C_n^x(\omega_1 + 2\pi, \dots, \omega_{n-1} + 2\pi). \quad (1.41)$$

En este sentido es conveniente recordar que se están tomado los retardos temporales τ_i , $i=1, \dots, n-1$ como enteros, lo que implica un periodo de muestreo igual a la unidad.

1.3.2. Definición alternativa basada en la Representación Espectral de Cramer.

El significado físico de los poliespectros se hace más evidente cuando estos se expresan en términos de las componentes $dZ(\omega)$ de la representación Fourier-Stieltjes de $x(k)$ (también llamada representación espectral de Cramer), dada por [ROS83] [ROS85] [CRA46]:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega k} dZ(\omega) \quad \forall k, \quad (1.42)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{dZ(\omega)\} &= 0 \\ \text{Cum}[dZ(\omega_1), \dots, dZ(\omega_n)] &= \begin{cases} C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} & \text{si } \omega_1 + \dots + \omega_n = 0 \\ 0 & \text{si } \omega_1 + \dots + \omega_n \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Según esto, el espectro de cumulantes de orden n representa la contribución al cumulante de n componentes de Fourier, la suma de cuyas frecuencias sea igual a cero. Nótese que, aunque el espectro de cumulantes de orden n es función de $n-1$ variables $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, hay que tener en cuenta que existe una variable oculta $\omega_n = -\omega_1 - \dots - \omega_{n-1}$ en (1.43) [ROS83].

I.3.3. Casos especiales de poliespectros.

Tanto el espectro de potencia, el biespectro, como el triespectro son casos especiales de espectros de cumulantes definidos por (1.37). Concretamente:

-Espectro de Potencia, $n=2$ [KAY81] [MAR87]:

$$C_2^x(\omega) \equiv P(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_2^x(\tau) e^{-j\omega\tau}, \quad (1.44)$$

donde $|\omega| \leq \pi$ y $c_2^x(\tau)$ es la secuencia de covarianza de $x(k)$ dada en (1.28). Si además $x(k)$ es un proceso de media nula, entonces $c_2^x(\tau)$ coincidirá con la secuencia de autocorrelación y (1.44) se conoce, en este caso particular, como identidad de Wiener-Khintchine [WHI83]. Por otro lado, de (1.28) y (1.44) se tiene que el espectro de potencia cumple las siguientes propiedades de simetría

$$\begin{aligned} C_2^x(\omega) &= C_2^x(-\omega) \\ C_2^x(\omega) &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

lo que implica que el espectro de potencia es una función real no negativa.

Según la representación espectral de Cramer, también se tiene que, si $x(k)$ es de media nula,

$$\mathcal{E}\{dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)\} = \begin{cases} 2\pi P(\omega)d\omega & \text{si } \omega_1 = \omega_2 = \omega \\ 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases} \quad (1.46)$$

lo cual indica que el espectro de potencia $P(\omega)$ representa la contribución al producto medio de dos componentes de Fourier cuyas frecuencias sean las mismas.

-Biespectro, $n=3$ [NIK87]:

$$C_3^x(\omega_1, \omega_2) \equiv B_x(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_3^x(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)}, \quad (1.47)$$

con $|\omega_i| \leq \pi$ para $i=1,2$ y $|\omega_1 + \omega_2| \leq \pi$, siendo $c_3^x(\tau_1, \tau_2)$ la secuencia de cumulantes de orden tres, dada por (1.29). Al igual que en el espectro de potencia, debido a las propiedades de los cumulantes de orden tres y a la propia definición del biespectro, éste presenta importantes propiedades de simetría. En particular se encuentran 12 regiones de simetría, de forma que el conocimiento del biespectro en una de ellas es suficiente para conocer la función en todo su dominio. La región definida por $\omega_2 > 0$, $\omega_1 > \omega_2$ y $\omega_1 + \omega_2 < \pi$ es una de estas regiones de simetría que se conoce como región principal del biespectro, y su cálculo se restringe habitualmente a ella.

En este caso, según la representación espectral de Cramer, y en el caso en que $x(k)$ sea de media nula [NIK87]:

$$\mathcal{E}\{dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)dZ^*(\omega_3)\} = \begin{cases} B_x(\omega_1, \omega_2)d\omega_1d\omega_2 & \text{si } \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \\ 0 & \text{si } \omega_1 + \omega_2 \neq \omega_3 \end{cases} \quad (1.48)$$

es decir, $B_x(\omega_1, \omega_2)$ representa la contribución al producto medio de tres componentes de Fourier, donde una de ellas es igual a la suma de las otras dos.

-Triespectro, $n=4$ [DAL89]:

$$C_4^x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)}, \quad (1.49)$$

con $|\omega_i| \leq \pi$ para $i=1,2,3$ y $|\omega_1 + \omega_2 + \omega_3| \leq \pi$, siendo $c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ la secuencia de cumulantes de cuarto orden dada en (1.30). De (1.30) y de la definición anterior, pueden derivarse una gran cantidad de propiedades de simetría del triespectro similares a las del biespectro. Por ejemplo, puesto que los momentos son funciones simétricas en sus argumentos, se tiene que

$$\begin{aligned} C_4^x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= C_4^x(\omega_2, \omega_1, \omega_3) = C_4^x(\omega_3, \omega_2, \omega_1) = \\ C_4^x(\omega_1, \omega_3, \omega_2) &= C_4^x(\omega_2, \omega_3, \omega_1) = C_4^x(\omega_3, \omega_1, \omega_2) = \text{etc.} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Pflug y colaboradores [PFU92] establecieron que el triespectro de procesos reales cuenta exactamente, gracias a propiedades de este tipo, con 96 regiones de simetría.

En este punto, también es interesante hacer ver que las medidas de varianza, coeficiente de asimetría y kurtosis establecidas en la sección I.2.5, pueden calcularse mediante un simple proceso de transformación inversa de los espectros de cumulantes de orden dos, tres y cuatro, respectivamente. Para ello, la transformada inversa de Fourier de (1.37) conduce a:

$$c_n^x(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) e^{j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_{n-1} \tau_{n-1})} d\omega_1 \dots d\omega_{n-1}. \quad (1.51)$$

Eligiendo $n=2,3,4$ y haciendo $\tau_i=0$ ($i=1, \dots, n-1$), se tiene que:

-Varianza:

$$\gamma_2^x = c_2^x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_2^x(\omega) d\omega. \quad (1.52)$$

-Coeficiente de asimetría (skewness):

$$\gamma_3^x = c_3^x(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_3^x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (1.53)$$

-Kurtosis:

$$\gamma_4^x = c_4^x(0,0,0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_4^x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \quad (1.54)$$

I.3.4. El espectro de cumulantes frente al de momentos.

Con anterioridad se señaló que, en esta memoria, el estudio de los poliespectros se iba a restringir a aquellos generados a partir de los cumulantes, en vez de momentos; ya que siempre se iba a trabajar con señales aleatorias. Llegado este punto, es interesante y necesario exponer ciertas razones acerca de por qué, en el caso de estas señales, son más útiles los espectros de cumulantes que los de momentos. Las razones más importantes son las siguientes [NIK93b]:

-Si $x(k)$ es un proceso aleatorio estacionario y gaussiano, todos los momentos de orden $n \geq 3$ no proporcionan información adicional relativa al proceso, aunque no son nulos. Por tanto, es útil trabajar con funciones que presenten este hecho de forma explícita, lo que se encuentra al trabajar con cumulantes, ya que sus valores para orden $n \geq 3$ en el caso de procesos gaussianos son nulos.

-Como ya se indicó en la propiedad 4 de la sección (I.2.4), los cumulantes de dos

procesos aleatorios estadísticamente independientes son iguales a la suma de los cumulantes de los procesos aleatorios individuales. Este hecho no es cierto, sin embargo, para momentos de alto orden. Esta propiedad es útil para separar, por ejemplo, la contribución de una señal y la de su posible ruido aditivo, que se supone que son estadísticamente independientes.

-Al igual que la función covarianza de un ruido blanco es un impulso y su espectro de potencia es plano, los cumulantes de alto orden de un ruido blanco son funciones impulso multidimensionales y su poliespectro (en términos de cumulantes) es multidimensionalmente plano.

- Los cumulantes, a diferencia de los momentos, proporcionan una medida adecuada de la dependencia estadística en series temporales, ya que los cumulantes conjuntos de variables aleatorias estadísticamente independientes son nulos.

-Finalmente, Brillinger indicó que los requerimientos de ergodicidad se cumplen más fácilmente con cumulantes que con momentos [BRI65].

No obstante, a pesar de estas razones a favor de los poliespectros de cumulantes, es importante hacer resaltar también dos cuestiones. En primer lugar, los momentos y espectros de momentos son muy útiles en el análisis y estudio de señales deterministas (transitorias y periódicas) [NIK93a] [NIK93b]. En segundo lugar, tanto en el caso del espectro de potencia, como en el del biespectro, cuando el proceso es de media nula, los espectros de cumulantes y de momentos coinciden, sin embargo sí aparece diferencia a partir de la estadística de cuarto orden.

I.3.5. Función de Coherencia de orden n .

En la Sección I.3.1. se ha introducido la definición del espectro de cumulantes de orden n , como una generalización del espectro de potencia a la estadística de orden n . En la literatura del procesado de señal HOS se ha definido también una función que combina estas dos entidades completamente diferentes, como son $C_2^x(\omega)$ y $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, a la que se denomina indistintamente como *función normalizada de cumulantes* o *función de coherencia de orden n* , y se define como [NIK93b]:

$$P_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \equiv \frac{C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})}{\sqrt{C_n^x(\omega_1)C_2^x(\omega_2) \dots C_2^x(\omega_{n-1})C_2^x(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})}}, \quad (1.55)$$

y cuyo módulo se denomina *índice de coherencia de orden n* . En los casos particulares de $n=3$ y $n=4$, el índice de coherencia se denomina también *índice de bicoherencia* e *índice de tricoherencia* o *biespectro normalizado* y *triespectro normalizado*, respectivamente [RAG85] [HAS63] [HIN85a].

Como han mostrado diversos autores [RAG85] [HAS63] [KIM80] [HIN85a] [HUB81], este índice es muy útil para la detección y caracterización de no linealidades en series temporales, a través de relaciones de fase de componentes armónicas. También, dicho índice se hace muy recomendable en el estudio de la respuesta en fase de procesos lineales no

gaussianos, en los cuales los poliespectros pueden modelarse por el mismo filtro lineal.

I.3.6. Proceso blanco de orden n .

Es bien conocido que un proceso cuyo espectro de potencia es constante para todas las frecuencias, se denomina en la literatura del procesado de señal como *blanco*. Sin embargo, esta definición se refiere solamente a las características espectrales del proceso y no a las poliespectrales. Existe, por tanto, la posibilidad de considerar un proceso blanco en orden n . Para establecer esta definición considérese que $w(k)$ es un proceso estacionario no gaussiano (para que de esta forma tenga espectros de cumulantes distintos de cero), y con media nula. Si su secuencia de cumulantes de orden n cumple:

$$c_n^w(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \gamma_n^w \delta(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}), \quad (1.56)$$

donde γ_n^w es una constante y $\delta(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ es la función delta de Kronecker de dimensión $n-1$, se dice que $w(k)$ es un proceso blanco de orden n [BRI65] [GIA89]. Nótese que para ello debe asumirse que los cumulantes γ_n^w sean finitos y distintos de cero. De acuerdo con (1.56) y con la definición de espectro de cumulantes, se tiene que estos procesos blancos de orden n cumplen:

$$C_n^w(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \gamma_n^w, \quad (1.57)$$

es decir, es plano para todas las frecuencias. De esta definición general, tendremos que un proceso blanco de segundo, tercer y cuarto orden, respectivamente, tendrá espectro, biespectro o trispectro dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \gamma_2^w \\ B_w(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_3^w \\ C_4^w(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \gamma_4^w. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Los procesos que no cumplan con lo anterior y por tanto no sean blancos, se llamarán coloreados.

I.4. PROPIEDADES DE LOS POLIESPECTROS DE PROCESOS ESTACIONARIOS

Una vez presentas las definiciones y algunas propiedades básicas de cumulantes, momentos, y sus espectros de orden n asociados, esta sección se centra en las propiedades más relevantes que poseen los poliespectros de señales aleatorias, propiedades que los van a convertir en una herramienta útil para tratar diversos problemas tales como la detección de no linealidades, la identificación de sistemas de fase no mínima o la eliminación de ruido aditivo.

I.4.1. Procesos gaussianos.

Una importante propiedad de los espectros de orden mayor que dos o poliespectros, apuntada anteriormente en este capítulo, es que si $x(k)$ es un proceso estacionario gaussiano, su poliespectro, definido en términos de sus cumulantes se anula [HUB81]. Esta propiedad es de enorme interés de cara a aplicar el análisis basado en estadística de órdenes superiores para la eliminación de ruidos aditivos contaminantes. En la mayoría de los casos, estos ruidos pueden suponerse estadísticamente gaussianos, tal y como se explicó en la introducción en base al teorema central del límite y de la naturaleza del ruido; lo que los diferencian de los procesos portadores de la información, que serán las señales propiamente dichas. Es interesante remarcar que esta propiedad es válida sea cual sea el contenido espectral del proceso gaussiano, lo que permite tratar de igual manera ruidos blancos y coloreados, cosa que no es posible en la estadística de segundo orden.

I.4.2. Cambios de fase lineal.

Dado un proceso $x(k)$ con espectro de potencia $P_x(\omega)$ y espectro de orden n $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, el proceso desplazado $y(k)=x(k-D)$, donde D es un número entero cualquiera, tiene el mismo espectro de potencia y poliespectro, es decir, $P_x(\omega)=P_y(\omega)$ y $C_n^x(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})=C_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. De esta forma, tanto el espectro de alto orden como el espectro de potencia suprimen toda información acerca de una fase lineal. Sin embargo, mientras que el espectro de potencia suprime además toda información referente a la fase del proceso, los poliespectros no lo hacen [LII76] [LII82].

I.4.3. Procesos gaussianos y no gaussianos a través de sistemas lineales.

Un familiar punto de partida en muchos problemas del procesado de señal clásico y en la teoría de sistemas es el de un modelo de *sistema lineal e invariante temporal* (LTI), de entrada y salida únicas, tal y como se muestra en la figura 1.3. En dicho modelo, la entrada $w(k)$ se considera un proceso estacionario y blanco en segundo orden con varianza finita γ_2^w (en general, gaussiano o no gaussiano) y está relacionado con la salida $x(k)$ por:

$$x(k)=h(k)*w(k), \quad (1.59)$$

donde “*” denota la convolución discreta y $h(k)$ es la respuesta impulso del sistema, es decir, la salida del sistema cuando la entrada $w(k)$ es la función impulso (función que vale cero para $k \neq 0$ y uno para $k=0$). El sistema se suele suponer que es estable, de manera que no provoque una salida infinita a una entrada finita, y causal, de forma que $h(k)=0$ para $k < 0$. La transformada Z de esta respuesta impulso se llama *función de transferencia* $H(z)$ del sistema lineal y su evaluación en el círculo unidad $H(\omega)$, con $z=\exp(j\omega)$, se conoce como *respuesta en frecuencia* del sistema, que existe debido a que se ha supuesto que el sistema es causal y estable. La suposición de causalidad implica que la función de transferencia debe presentar sus polos dentro del círculo unidad, para que esta pueda ser

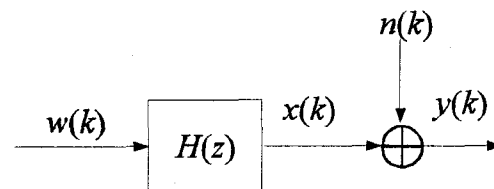


Figura 1.3. Esquema de un sistema LTI alimentado por un proceso $w(k)$.

evaluada sobre el círculo unidad y producir así una respuesta en frecuencias.

La salida $x(k)$ del sistema ha sido contaminada con ruido aditivo gaussiano (blanco o coloreado) $n(k)$, siendo este ruido y la entrada del sistema $w(k)$ estadísticamente independientes.

Debido a la propiedad de la convolución, la relación (1.59) se expresa en el dominio Z o en el de la frecuencia como:

$$\begin{aligned} X(z) &= H(z)W(z) \\ X(\omega) &= H(\omega)W(\omega), \end{aligned} \quad (1.60)$$

donde $X(z)$ y $X(\omega)$ son las transformadas Z y de Fourier de la salida $x(k)$, y $W(z)$ y $W(\omega)$ lo son de la entrada $w(k)$.

Bajo este esquema, es bien conocido que en el dominio de la estadística de segundo orden, la secuencia de autocorrelación de la salida no ruidosa $x(k)$ y la ruidosa $z(k)$ están relacionadas a través de [MEN91] [NIK93b] [PAPO84]

$$c_2^y(\tau) = c_2^x(\tau) + c_2^n(\tau) = \gamma_2^w \sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k+\tau) + c_2^n(\tau). \quad (1.61)$$

Por otra parte, el espectro de potencia de la señal ruidosa viene dado por [MEN91] [NIK93b]:

$$\begin{aligned} C_2^y(z) &= \gamma_2^w H(z)H(z^{-1}) + C_2^n(z) \\ C_2^y(\omega) &= \gamma_2^w |H(\omega)|^2 + C_2^n(\omega). \end{aligned} \quad (1.62)$$

De estas expresiones es interesante hacer notar dos cuestiones importantes:

-En el espectro de potencia de la salida del sistema, influye tanto el modelo del sistema LTI, a través de su función de transferencia, como el espectro de potencia del ruido contaminante $n(k)$. De esta forma $C_2^y(\omega)$ puede catalogarse como un espectro de potencia *ruidoso*.

-De la ecuación (1.62) puede verse que, a través del espectro de potencia (o equivalentemente la autocorrelación), se pierde toda información acerca de la fase de $H(\omega)$. Es por esto por lo que se dice que la autocorrelación y el espectro de potencia son *ciegos* a la fase del sistema LTI.

a) Cumulantes de salida de procesos lineales no gaussianos.

Bajo el modelo de sistema LTI mostrado en la figura 1.3, Bartlett [BAR55] en 1955 y Brillinger y Rosenblat en 1967 [BRI67a], mostraron que es posible generalizar las

expresiones (1.60) y (1.61) desde el dominio de la estadística de segundo orden al de órdenes superiores. En particular, si $w(k)$ es un proceso no gaussiano, independiente e idénticamente distribuido, es decir:

$$c_n^w(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \begin{cases} \gamma_n^w & \tau_1 = \dots = \tau_{n-1} = 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.63)$$

para todo n , se tiene que [MEN91]:

$$c_n^y(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \gamma_n^w \sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k+\tau_1)\dots h(k+\tau_{n-1}), \quad (1.64)$$

y

$$C_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \gamma_n^w H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i\right), \quad (1.65)$$

Expresiones en las que se ve explícitamente que no aparece contribución alguna del ruido $n(k)$, ya que se ha considerado que es gaussiano.

Se puede encontrar una expresión todavía más general si se considera que el proceso $w(k)$ que alimenta al sistema no es blanco de orden n , sino coloreado y con espectro de cumulantes dado por $C_n^w(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. Bajo esta hipótesis, se puede demostrar que [BRI67a] [MEN91]:

$$C_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = C_n^w(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i\right). \quad (1.66)$$

Por otro lado, la generalización de (1.64) a este caso de un proceso de entrada coloreado está dada en [MEN91], y básicamente consiste en una convolución de orden $(n-1)$ entre las secuencias de cumulantes $c_n^w(\tau_1^{2x}, \dots, \tau_{n-1}^{2x})$ y $c_h^n(\tau_1^{2x}, \dots, \tau_{n-1}^{2x}) = \sum h(k)h(k+\tau_1)\dots h(k+\tau_{n-1})$.

En particular, para los casos más habituales de la estadística de tercer orden y cuarto orden, se tiene que el biespectro y el triespectro de la salida ruidosa del sistema, en el caso general de entrada no gaussiana coloreada $w(k)$, viene dado según (1.66) por [NIK87]:

$$\begin{aligned} B_y(\omega_1, \omega_2) &= B_w(\omega_1, \omega_2) H(\omega_1) H(\omega_2) H^*(\omega_1 + \omega_2) \\ T_y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= T_w(\omega_1, \omega_2, \omega_3) H(\omega_1) H(\omega_2) H(\omega_3) H^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3), \end{aligned} \quad (1.67)$$

con módulo y fase dadas por:

$$\begin{aligned}
 |B_y(\omega, \omega_2)| &= |B_w(\omega_1, \omega_2)| |H(\omega_1)| |H(\omega_2)| |H^*(\omega_1 + \omega_2)| \\
 \psi_y(\omega_1, \omega_2) &= \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2) - \varphi(\omega_1 + \omega_2) + \psi_w(\omega_1 + \omega_2) \\
 |T_y(\omega, \omega_2, \omega_3)| &= |B_w(\omega_1, \omega_2, \omega_3)| |H(\omega_1)| |H(\omega_2)| |H(\omega_3)| |H^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)| \\
 \psi_y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2) + \varphi(\omega_3) - \varphi(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + \psi_w(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3),
 \end{aligned}
 \tag{1.68}$$

siendo $\varphi(\omega)$ la fase de $H(\omega)$. Si la entrada del sistema es un proceso blanco de tercer y cuarto orden, tal que $|B_w(\omega_1, \omega_2)| = \gamma_3^w$, $\psi_w(\omega_1, \omega_2) = 0$, $|T_w(\omega_1, \omega_2, \omega_3)| = \gamma_4^w$ y $\psi_w(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$, la anterior expresión (1.67) queda:

$$\begin{aligned}
 B_y(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_3^w H(\omega_1) H(\omega_2) H^*(\omega_1 + \omega_2) \\
 T_y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \gamma_4^w H(\omega_1) H(\omega_2) H(\omega_3) H^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3).
 \end{aligned}
 \tag{1.69}$$

Es interesante también remarcar que todas estas conclusiones son totalmente generales sea cual sea el modelo para $H(\omega)$, siempre que éste sea lineal, causal y exponencialmente estable, y los procesos $w(k)$ y $n(k)$ cumplan los requisitos estadísticos que han sido especificados para cada caso particular. De hecho, son muchos los modelos de $H(\omega)$ que se han presentado en la literatura, dependiendo de la aplicación y las características de las señales aleatorias consideradas. En concreto, la expresión (1.69) del proceso $y(k)$ es la base de un tipo de técnicas de estimación poliespectrales denominadas *técnicas de modelación paramétrica* [NIK87] [NIK93a].

Otra cuestión importante que es conveniente resaltar en este momento, es que los sistemas lineales obtenidos para la modelación del espectro de potencia son, en general, diferentes de los utilizados para la modelación de los poliespectros [NIK87] [RAG85] [RAG86]. Es decir, una función de transferencia $H(\omega)$ que reproduzca adecuadamente el espectro de potencia, y otra, $H(\omega)$, que haga lo mismo con el poliespectro de un orden dado del mismo proceso, pueden ser totalmente diferentes entre sí. Incluso las funciones de transferencia que modelen poliespectros de distintos órdenes, puede ser distintas entre ellas. Esta característica muestra que el análisis basado en estadística de órdenes superiores puede jugar un importante papel en la identificación de procesos que involucren componentes gaussianas y no gaussianas.

b) Sistemas de fase mínima, máxima y mixta.

El hecho de que la secuencia de cumulantes de un proceso no gaussiano, a diferencia de la de autocorrelación, retenga la información sobre la fase (salvo, obviamente, términos de fase lineal), hace que los cumulantes de salida de los sistemas lineales sean extraordinariamente útiles en la identificación y caracterización de sistemas que, teniendo la misma respuesta en amplitud, sólo difieren en su respuesta en fase [NIK87] [GIA89] [LII84] [NIK86b]. Los sistemas de este tipo que, aún siendo distintos, poseen un espectro de potencia idéntico, tal y

como puede deducirse a partir de (1.62).

En relación con la respuesta en fase de un sistema se distinguen tres tipos de sistemas básicos [NIK87]: a) *Sistemas de fase mínima*, caracterizados por que todos los ceros de $H(z)$ caen dentro del círculo unidad en el plano complejo Z ; b) *Sistemas de fase máxima*, que presentan todos sus ceros fuera del círculo unidad; c) *Sistemas de fase mixta* que tienen ceros tanto dentro como fuera del círculo unidad. Es dentro de los dos últimos tipos de sistemas, conjuntamente llamados como de fase no mínima y que son los más generales y comunes en muchas aplicaciones concretas, donde el análisis poliespectral juega un importante papel frente al espectro de potencia clásico. Para demostrar este hecho, considerese los siguientes tres sistemas (filtros) FIR (*respuesta impulso infinita*) de segundo orden, excitados por un proceso blanco de segundo y tercer orden $\mathcal{E}\{w(k)w(k+r)\}=\delta(r)$, $\mathcal{E}\{w(k)w(k+r)w(k+s)\}=\delta(r,s)$, no gaussiano y con media cero, caracterizado por [NIK87]:

-Sistema de fase mínima

$$\begin{aligned} H_1(z) &= (1-az^{-1})(1-bz^{-1}) \\ y_1(n) &= w(n) - (a+b)w(n-1) + abw(n-2). \end{aligned} \quad (1.70)$$

-Sistema de fase máxima

$$\begin{aligned} H_2(z) &= (1-az)(1-bz) \\ y_2(k) &= w(k) - (a+b)w(k+1) + abw(k+2). \end{aligned} \quad (1.71)$$

-Sistema de fase mixta

$$\begin{aligned} H_3(z) &= (1-az)(1-bz^{-1}) \\ y_3(k) &= -aw(k+1) - (1+ab)w(k) - bw(k-1). \end{aligned} \quad (1.72)$$

En todos los sistemas las constantes son iguales y cumplen $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$.

Puede comprobarse que las señales de salida de cada uno de los sistemas tienen idéntica secuencia de autocorrelación dada por [NIK87]:

$$\begin{aligned} c_2^y(\tau) &= \mathcal{E}\{y_1(k)y_1(k+\tau)\} = \mathcal{E}\{y_2(k)y_2(k+\tau)\} = \mathcal{E}\{y_3(k)y_3(k+\tau)\} \\ c_2^y(0) &= 1 + a^2b^2 + (a+b)^2 \\ c_2^y(1) &= -(a+b)(1+ab); \quad c_2^y(2) = ab \\ c_2^y(\tau) &= 0 \quad \tau \geq 3, \end{aligned} \quad (1.73)$$

lo que implica que todos ellos tienen el mismo espectro de potencia, dado, según (1.62), por

$$P(\omega) = |H_1(\omega)|^2 = |H_2(\omega)|^2 = |H_3(\omega)|^2. \quad (1.74)$$

Este resultado, sin embargo, no es del todo sorprendente ya que el cuadrado del valor absoluto de una función de transferencia FIR no reconoce un cero (z_0) de su inverso conjugado ($1/z_0^*$). De esta forma, los tres sistemas son espectralmente equivalentes y, por consiguiente, es imposible discriminarlos mediante un análisis exclusivamente basado en el espectro de potencia.

Por otra parte, las tres señales de salida tienen diferentes cumulantes de orden n , y por tanto diferentes espectros de cumulantes. La tabla (I.1) muestra este hecho, mediante la secuencia de cumulantes de tercer orden de la salida de cada uno de los tres sistemas. Según esto, parece claro que mientras que el biespectro de la salida del sistema es capaz de detectar el verdadero carácter de fase del sistema, el espectro de potencia los ve a todos ellos como si fuesen de fase mínima [NIK93a]. Esta propiedad de los poliespectros tiene además importantes implicaciones en aplicaciones de deconvolución en campos como geofísica [MAT84] y comunicaciones [BEN80] [NIK86a].

	Fase mínima	Fase máxima	Fase mixta
$H(z)$	$(1-az^{-1})(1-bz^{-1})$	$(1-az)(1-bz)$	$(1-az)(1-bz^{-1})$
$y(k)$	$w(k)-(a+b)w(k-1)+abw(k-2)$	$w(k)-(a+b)w(k+1)+abw(k+2)$	$-aw(k+1)+(1+ab)w(k)-bw(k-1)$
Localización de los ceros			
Cumulantes			
$c_3(0,0)$	$1-(a+b)^3+a^3b^3$	$1-(a+b)^3+a^3b^3$	$(1+ab)^3-a^3-b^3$
$c_3(1,1)$	$(a+b)^2-(a+b)a^2b^2$	$-(a+b)^2+(a+b)^2ab$	$-a(1+ab)^2+(1+ab)^2b$
$c_3(2,2)$	a^2b^2	ab	$-a^2b$
$c_3(1,0)$	$-(a+b)+ab(a+b)^2$	$(a+b)^2-(a^2+b^2)^2$	$a^2(1+ab)-(1+ab)^2b$
$c_3(2,0)$	ab	a^2b^2	$-a^2b$
$c_3(2,1)$	$-(a+b)ab$	$-(a+b)ab$	$-(1+ab)ab$
Autocorrelaciones			
$c_2(0)$		$1+a^2b^2+(a+b)^2$	
$c_2(1)$		$-(a+b)(1+ab)$	
$c_2(2)$		ab	

Tabla (I.1): Procesos de fase mínima, máxima y mixta con idéntico espectro de potencia pero distinto biespectro.

I.4.4. Sistemas no lineales operando bajo entrada aleatoria.

Como ya se comentó en la introducción, los poliespectros juegan un papel fundamental en la detección y cuantificación de no linealidades ocultas en señales estocásticas, originadas usualmente cuando un sistema no lineal opera bajo entrada aleatoria. Aunque para el caso de sistemas lineales excitados por señales aleatorias se dispone, como hemos visto, de un amplio conjunto de relaciones y propiedades generales (muchas de ellas basadas en criterios de autocorrelación), esto no es posible en el caso de sistemas no lineales arbitrarios. Es por esto por lo que clásicamente cada tipo de no linealidad se ha tratado por separado y como un caso especial. En este sentido, el análisis HOS viene a aportar una importante ayuda en la caracterización y estudio de los distintos tipos de no linealidades, tal y como se muestra en los siguientes apartados [NIK87] [HIN85a] [HIN85b] [TIC82][BEN82] [BLA64] [MAG54] [MAR86] [SUB67].

a) Sistemas no lineales excitados por procesos sinusoidales.

Se considera un sistema LTI (lineal invariante en el tiempo) como se muestra en la figura 1.4.(a) cuya entrada es [NIK87]

$$x(k) = \sum_m A_m e^{j(\omega_m k + \phi_m)}, \quad (1.75)$$

donde $\{\phi_m\}$ son variables aleatorias independientes, idéntica y uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi)$. Bajo estas premisas, la salida del sistema LTI, $y_1(k)$, es [OPP75]:

donde $H(\omega)$ es la respuesta en frecuencia del

$$y_1(k) = \sum_m B_m e^{j(\omega_m k + \theta_m)} = \sum_m H(\omega_m) e^{j\omega_m k}, \quad (1.76)$$

sistema. Se puede ver como $y_1(k)$, la salida del sistema LTI, cuando la entrada es una suma de sinusoidales, es otra suma de sinusoidales con las mismas frecuencias que la entrada, aunque con distinta amplitud y fase. Puede verificarse fácilmente que todos los cumulantes de $y_1(k)$ de orden mayor que dos son cero [NIK87]. De esta forma, un poliespectro cero indicará que sólo existen mecanismos lineales en la generación de la señal de salida del sistema.

Si, por el contrario, como se muestra en la figura 1.4.(b), se hace pasar el proceso $x(k)$ a través de un sistema no lineal (NL) como es un procesador de Volterra de orden N [SCH80], la salida resulta ser

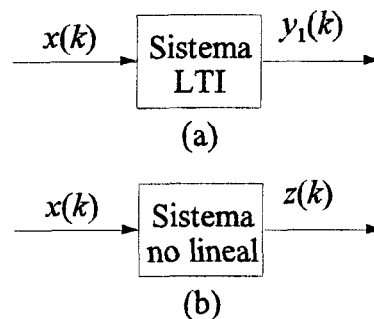


Figura 1.4. (a) Salida de un sistema LTI con entrada sinusoidal. (b) Salida de un sistema NL con entrada sinusoidal

$$z(k) = \sum_{i_1=0}^{M_1-1} h_1(i_1)x(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^{M_2-1} \sum_{i_2=0}^{M_2-1} h_{12}(i_1, i_2)x(k-i_1)x(k-i_2) + \dots + \sum_{i_1=0}^{M_{N-1}-1} \dots \sum_{i_N=0}^{M_N-1} h_{1,2,\dots,N}(i_1, \dots, i_N)x(k-i_1)\dots x(k-i_N), \quad (1.77)$$

Sin entrar en detalles de los procesadores de Volterra, lo ilustrativo es que la salida $z(k)$ puede expresarse como:

$$z(k) = \sum_{\lambda=1}^N y_\lambda(k), \quad (1.78)$$

donde y_λ está dado por (1.76) y

$$y_2(k) = \sum_m \sum_n C_m C_n e^{j[(\omega_m + \omega_n)k + (\theta_m + \theta_n)]}$$

$$y_3(k) = \sum_m \sum_n \sum_l D_m D_n D_l e^{j[(\omega_m + \omega_n + \omega_l)k + (\theta_m + \theta_n + \theta_l)]}$$

$$\vdots$$

$$y_{N-1}(k) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \dots \sum_{m_{N-1}} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_{N-1}} e^{j[(\omega_{m_1} + \omega_{m_2} + \dots + \omega_{m_{N-1}})k + (\theta_{m_1} + \theta_{m_2} + \dots + \theta_{m_{N-1}})]}$$
(1.79)

Puede verse como las sinusoides de la salida están relacionadas en frecuencia y fase con las de entrada [NIK87] [BRI65], lo que significa que las frecuencias y fases de la salida son sumas y/o restas de las frecuencias y fases de la entrada, el número de los sumandos indican el orden de la no linealidad. Cuando una frecuencia sea la suma de otras se dirá que están relacionadas armónicamente, mientras que cuando también lo la fase de la primera sea la suma de las otras, se dirá que existe un acoplo de fase. En este caso, un biespectro no nulo de $z(k)$ indicará la existencia del término $y_2(k)$ en (1.78) y con ello una no linealidad cuadrática, mientras que un triespectro distinto de cero indicará la existencia del término $y_3(k)$, y por tanto, la presencia de una no linealidad cúbica. Así, las propiedades no lineales de los mecanismos que generan series temporales pueden cuantificarse usando HOS debido a las relaciones de fase entre las componentes armónicas del proceso [BRI65].

b) Acoplos cuadráticos y cúbicos de fase.

Son muchas las situaciones en las cuales, debido a la interacción entre dos o más componentes armónicas de una señal, se produce una contribución al espectro de potencia de la suma y/o diferencia de tales frecuencias. Estos fenómenos, que como se ha comentado en el apartado anterior, pueden deberse a no linealidades; en concreto, para no linealidades de tercer y cuarto orden, pueden aparecer lo que se conoce como *acoplos cuadráticos de fase* y *acoplos cúbicos de fase* [NIK87] [RAG85] [NIK93a] [KIM80] [RAG86] [RAG84]. En

algunas aplicaciones concretas, es necesario determinar si un determinado pico en el espectro de potencia corresponde o no a un acoplo de fase. Sin embargo, debido a que el espectro de potencia suprime todas las relaciones de fase, este no nos puede proporcionar tal información, haciéndose imprescindible acudir al biespectro o al triespectro para detectar si, efectivamente, se trata o no de un acoplo cuadrático o cúbico de fase. Este hecho puede mostrarse más fácilmente mediante el siguiente ejemplo concreto [NIK87] [RAG85]:

Considerese el proceso sinusoidal

$$x(k) = \sum_{i=1}^6 \cos(\lambda_i k + \varphi_i), \tag{1.80}$$

donde $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $\lambda_5 > \lambda_4 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_6 = \lambda_4 + \lambda_5$, y φ_i , con $i=1, \dots, 5$, son variables aleatorias independientes, uniformemente distribuidas sobre $[0, 2\pi)$ y $\varphi_6 = \varphi_4 + \varphi_5$. En (1.80), mientras que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ por un lado, y $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ por otro, son frecuencias relacionadas armónicamente, sólo la componente λ_6 es el resultado de un acoplo cuadrático de fase entre λ_4 y λ_5 , ya que además se cumple que $\varphi_6 = \varphi_4 + \varphi_5$; mientras que λ_3 es una componente armónica independiente. El espectro de potencia de $x(k)$ consiste básicamente en seis impulsos en λ_i ($i=1, \dots, 6$), tal y como se muestra en la figura 1.5.(a). A través de éste, sin embargo, no se puede determinar si un determinado pico corresponde realmente a un acoplo cuadrático de fase o no.

Por otro lado, puede comprobarse que la secuencia de cumulantes de $x(k)$ está dada por [RAG85]:

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4} \{ \cos(\lambda_5 \tau_1 + \lambda_4 \tau_2) + \cos(\lambda_6 \tau_1 + \lambda_4 \tau_2) + \cos(\lambda_4 \tau_1 + \lambda_5 \tau_2) + \cos(\lambda_6 \tau_1 - \lambda_5 \tau_2) + \cos(\lambda_4 \tau_1 - \lambda_6 \tau_2) + \cos(\lambda_5 \tau_1 - \lambda_6 \tau_2) \}. \tag{1.81}$$

Es interesante ver como en (1.81) sólo aparecen las componentes que están acopladas en fase. Si se calcula el biespectro puede verse como muestra un único impulso en $(\omega_1, \omega_2) = (\lambda_5, \lambda_4)$, indicando que solamente este par de frecuencias está acoplado en fase, tal y como se ilustra la figura 1.5.(b), donde la parte sombreada corresponde a la región principal

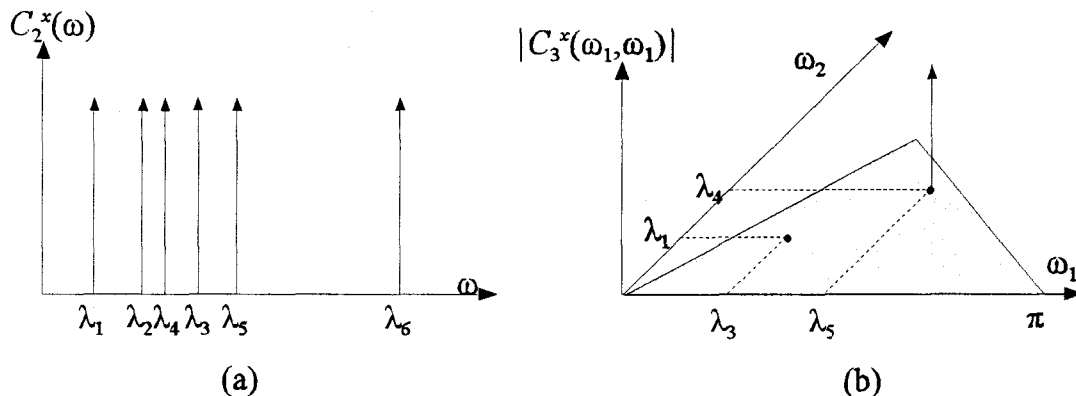


Figura 1.5. Acoplos cuadráticos de fase. (a) Espectro de potencia del proceso descrito en la ecuación (1.92). (b) Módulo del biespectro correspondiente al mismo proceso.

del biespectro. Si no existe ningún acoplo cuadrático de fase, la secuencia de cumulantes de tercer orden, y por consiguiente el biespectro, serán nulos. De esta forma, el hecho de que sólo las componentes acopladas contribuyan a la secuencia de cumulantes del proceso es lo que hace que el biespectro sea una herramienta útil para la detección de acoplos cuadráticos de fase y en su discriminación de aquellas frecuencias relacionadas armónicamente que no estén acopladas en fase. Esta misma idea se extenderá al dominio de la estadística de cuarto orden y los acoplos cúbicos de fase, en la segunda parte de esta memoria.

c) Procesos gaussianos aplicados a sistemas no lineales.

Sea $x(k)$ un proceso gaussiano, estacionario, con media cero, con secuencia de autocorrelación c_2^x y espectro de potencia $C_2^x(\omega)$. Sea además el proceso definido por:

$$y(k) = G[x(k)], \quad (1.82)$$

donde $G[\cdot]$ es una función no lineal. Restringiéndonos por simplicidad al caso de estadística de tercer orden, asumamos que dicha función contiene alguna componente par, como por ejemplo de tipo cuadrático (ya que si $G[\cdot]$ fuese una función impar, el biespectro de $y(k)$ es nulo [HUB81]):

$$y(k) = x(k) + \varepsilon x(k)^2, \quad (1.83)$$

donde ε es pequeño, de tal forma que ε^3 sea despreciable. Según esto, puede demostrarse que $y(k)$ tiene secuencia de autocorrelación y espectro de potencia [NIK87] [NIK93b]

$$\begin{aligned} m_2^y(\tau) &= m_2^x(\tau) + 2\varepsilon^2 [m_2^x(\tau)]^2 + \varepsilon^2 [m_2^x(0)]^2 \\ P_y(\omega) &= P_x(\omega) + \varepsilon^2 [m_2^x(0)]^2 \delta(\omega) + 2\varepsilon^2 \int P_x(\lambda) P_x(\omega - \lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (1.84)$$

mientras que su biespectro sigue la expresión:

$$\begin{aligned} B_y(\omega_1, \omega_2) &= 2\varepsilon \{ P_x(\omega_1) P_x(\omega_2) + P_x(\omega_2) P_x(\omega_1 + \omega_2) \} + \\ &+ \varepsilon m_2^x(0) \{ P_x(\omega_1) \delta(\omega_2) + P_x(\omega_2) \delta(\omega_1) + P_x(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Nótese que si $\varepsilon=0$, entonces $P_y(\omega) = P_x(\omega)$ y $B_y(\omega_1, \omega_2) = 0$. Además, conociendo el espectro de potencia del proceso gaussiano de entrada y calculando el biespectro de la salida, se puede estimar el parámetro ε que caracteriza al sistema cuadrático, sin más que usar la ecuación (1.85). Por otro lado, junto a estos resultados, existen otros adicionales relativos a la identificación de sistemas cuadráticos por medio de entrada Gaussiana. Para casos de identificación de sistemas con funciones $G[\cdot]$ más generales, existen también varios trabajos en la bibliografía [BRI65] [BEN82] [BRI70].

d) Procesos lineales no gaussianos frente a no lineales.

Existen algunas situaciones prácticas en las que es necesario discernir entre un proceso lineal no gaussiano y un proceso lineal. Si se asume que en ambos casos los cumulantes de orden n del proceso son nulos, existe un buen test estadístico basado en la función de coherencia de orden n definida en la sección (I.3.5) [RAO84] [HIN82]. En efecto, si el proceso no gaussiano es lineal, su poliespectro está dado por (1.65) y su espectro de potencia por (1.62). De esta forma, la función de coherencia de orden n tiene la forma

$$P_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \frac{\gamma_n^x}{(\gamma_2^x)^{n/2}} \frac{H(\omega_1) \dots H(\omega_{n-1}) H^*(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})}{|H(\omega_1)| \dots |H(\omega_{n-1})| |H^*(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})|}. \quad (1.86)$$

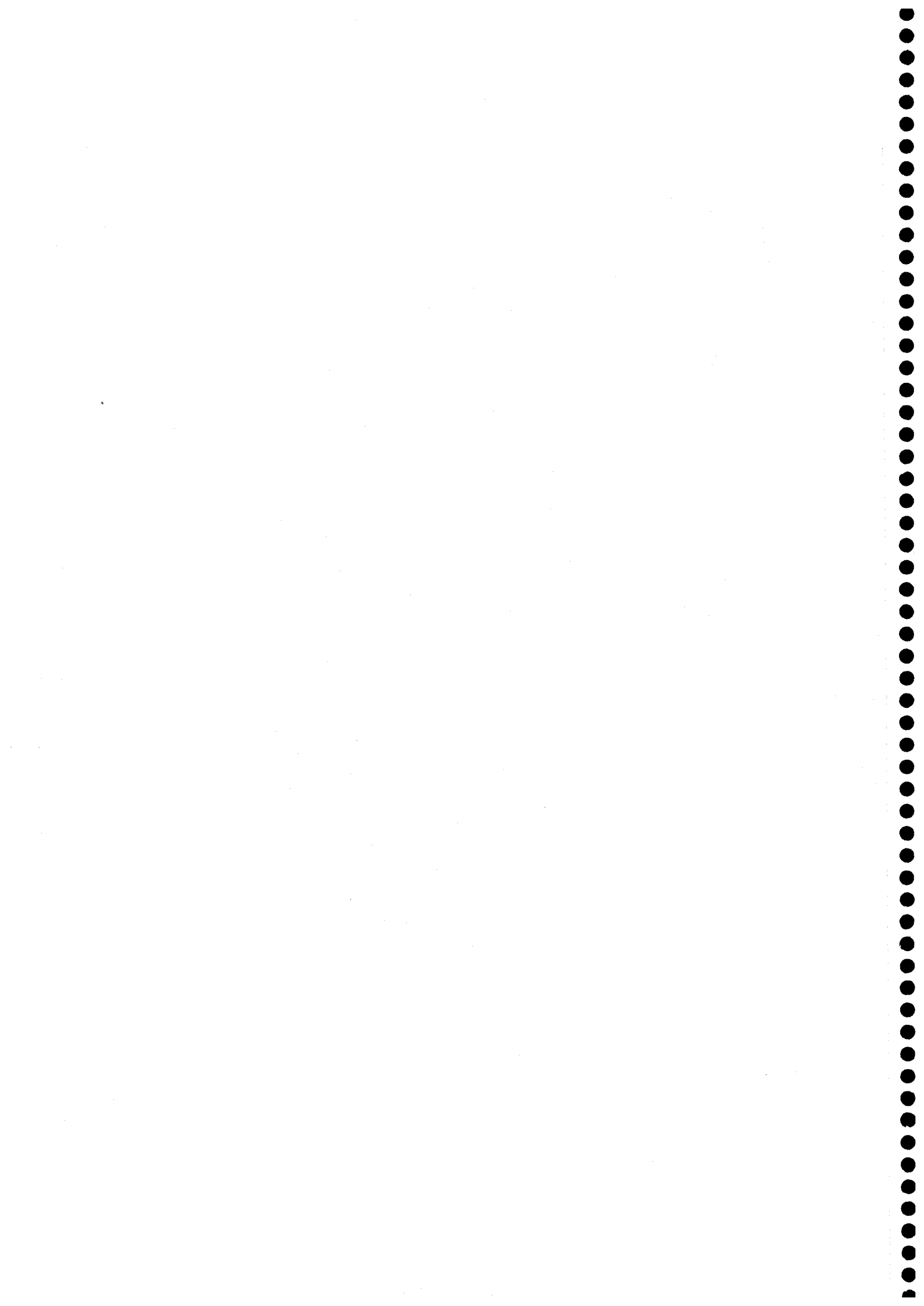
Por tanto, su módulo o índice de coherencia es

$$|P_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})| = \frac{\gamma_n^x}{(\gamma_2^x)^{n/2}}, \quad (1.87)$$

y, como puede verse, es constante en todas las frecuencias. Si el proceso lineal es gaussiano, entonces $\gamma_n^x = 0 \forall n > 2$ y $|P_n^y(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})| = 0$. Por el contrario, si el valor del índice de coherencia de orden n no es constante y depende de las frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, se tiene que el proceso $y(k)$ será no lineal. Ejemplos concretos en los que el índice de bicoherencia es dependiente de la frecuencia son entre otros los definidos por (1.77) y (1.83).

CAPÍTULO II

MÉTODOS PARAMÉTRICOS AUTORREGRESIVOS DE ESTIMACIÓN TRIESPECTRAL



II.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo I se presentaron las definiciones de las series de momentos y cumulantes conjuntos, así como sus correspondientes poliespectros, para variables aleatorias. Se hizo especial hincapié en los procesos estacionarios y, dentro de estos, en los procesos de salida de sistemas LTI. También se resumieron las principales propiedades de estas funciones, en especial de los poliespectros, y como pueden ser utilizados en la resolución de problemas de análisis de señal. Todo este planteamiento se realizó desde un punto de vista teórico, es decir, se establecieron las propiedades de las distintas funciones estadísticas de un proceso, así como sus posibles usos, una vez conocidas éstas. No se planteó, por tanto, el problema de como se calculan estas funciones a partir de la información disponible de una señal. Es precisamente dentro de este problema general donde se enmarca el presente capítulo: la estimación a través de información limitada sobre una señal de las funciones definidas en el capítulo anterior.

En una situación práctica la información que se posee sobre la señal es limitada, generalmente a través de una o varias series finitas de datos, que pueden ser independientes entre ellas. Es a partir de esta información limitada a partir de la cual se deben calcular o estimar las funciones deseadas, que en este capítulo será el triespectro.

El estudio del triespectro, a pesar de los problemas de estimación que presenta frente al biespectro y que se analizarán un poco más adelante en esta introducción, ha sido justificado en distintas partes del capítulo I, y pueden resumirse de la siguiente forma:

-Primero: La estadística de tercer orden de procesos aleatorios con densidad de probabilidad simétricas respecto a su media, es nula, tal y como se presentó explícitamente en el apartado I.2.2. para las funciones densidad uniforme, laplaciana y gaussiana. En realidad, este hecho es genérico para todas las estadísticas de orden impar. La abundancia de los procesos simétricos en la naturaleza hace este argumento el principal apoyo en el estudio del triespectro y en el desarrollo de métodos para estimarlo.

-Segundo: Aún sin ser nulos existen procesos cuyos cumulantes de orden tres sean menores que sus cumulantes de orden cuatro, lo que hace que estos últimos puedan ser más adecuados en el análisis.

-Tercero: La presencia de no linealidades cúbicas no es tratable a partir de la estadística de tercer orden, como se ilustró en el apartado I.4.4.(a) para un sistema de Volterra alimentado con una entrada armónica y como sucede en el caso de acoplos cúbicos de fase, y es necesario utilizar la estadística de cuarto orden.

Bajo la suposición de estacionaridad y ergodicidad, definidas en el capítulo I, se hace inmediato un primer camino de estimación poliespectral. En efecto, si la señal con la que se está tratando es ergódica, los valores medios pueden ser estimados mediante medias temporales finitas, tal y como se define en (1.36), para una señal de N datos. Una vez hecho esto, solamente hay que sustituir cada valor medio por esta media temporal, en las definiciones de cumulantes y, posteriormente, calcular el poliespectro haciendo uso de las transformadas de Fourier. Este procedimiento, junto a otros que siguen el mismo esquema pero introduciendo ciertas variaciones, se conocen como *métodos de estimación poliespectral indirectos*, nombre

que reciben al estimar primero los cumulantes y, a partir de estos, los poliespectros. Este método queda englobado dentro de un conjunto mayor, que se agrupan bajo el nombre de *métodos de estimación poliespectral convencionales*; entre los que se encuentran, a parte de los métodos indirectos ya nombrados, los *métodos de estimación directos*, que hacen uso de la representación espectral de Cramer, y los métodos de *demodulación compleja*.

Todos estos métodos de estimación poliespectral convencionales poseen la característica de que hacen uso de transformaciones de Fourier en su análisis, concretamente de la FFT. El resultado que se obtiene de utilizar estos métodos es la función poliespectral en el dominio de interés, generalmente el dominio o región principal. Sin embargo, la realización práctica de estos métodos adolece de ciertas limitaciones. Las principales son el alto coste computacional, la alta varianza, como causa de la lenta convergencia estadística, y la limitación en la resolución.

Debido a que en este capítulo se tratará el problema de la estimación triespectral, es interesante centrarse en qué les sucede a los métodos convencionales, al pasar de la estadística de tercer orden a la de cuarto orden. El primero de los inconvenientes de estos métodos, el coste computacional, se agrava al aumentar el orden de la estadística de la señal, ya que aumenta el número de operaciones necesarias en el cálculo de la función a estimar. El coste computacional entronca con los otros dos problemas. La varianza, por un lado, también aumenta al aumentar el orden de la estadística, para un mismo número de datos, necesitando muchos más datos en cuarto orden que en tercer orden para un mismo grado de convergencia, es decir, de estimación. Esta necesidad en el aumento del número de datos significa un aumento del coste computacional, que se ve agravado por el propio coste del aumento del orden. Por otro lado, es bien sabido que la resolución espectral, lo que se puede definir como la capacidad de resolver dos picos espectrales muy juntos, está relacionado con la longitud del número de datos que se posea, de forma que a mayor número de datos mejor resolución. De nuevo, la capacidad de resolución del triespectro es peor que la del biespectro para un mismo número de datos, encontrándose el mismo problema que aparece con la varianza. Con todo esto, es fácil ver que en la estimación triespectral convencional, los inconvenientes generales que los métodos convencionales presentan se ven importantemente agravados respecto de los que aparece en la estimación biespectral.

En la estimación espectral (no poliespectral) clásica, existían ya estos métodos convencionales, presentando los mismo problemas que presentan en el análisis poliespectral, aunque en menor grado. Para poder superar las importantes limitaciones que los métodos convencionales tipo Fourier poseían se desarrollaron otros tipos de métodos de estimación espectral que se denominaron *métodos paramétricos*. En ellos, la señal se suponía o modelaba como la salida de un sistema LTI, con entrada gaussiana blanca. Esto significaba que todo el conocimiento de la señal dependía de unos parámetros lineales y de la estadística de un proceso muy sencillo. Los métodos desarrollados según este esquema requerían mucho menor esfuerzo de cálculo y presentaban una mejor convergencia estadística y mejor resolución, que los métodos clásicos en segundo orden. El principal escollo era la elección adecuada del modelo, ya que una mala elección llevaba a la complicación del problema, en vez de simplificarlo, e incluso a la imposibilidad de obtener una solución correcta.

En la estimación poliespectral se ha extendido esta idea, dando lugar a los métodos de estimación poliespectral paramétricos, mediante una sencilla generalización. Se supone que la señal con la que se trabaja es la salida de un sistema LTI, tal y como se definió en la sección

I.4.3., siendo la entrada un proceso no gaussiano i.i.d., con el fin de que posea estadística de alto orden no nula. De esta forma, la información de la señal es completa si se conocen los coeficientes del sistema LTI, lo que está recogido en su función de transferencia $H(z)$, y la estadística de la señal de entrada, que debido a su simplicidad es equivalente a conocer una única constante, para un orden determinado. Es claro que el problema de estimación espectral se ha transformado, de esta forma, en un problema de estimación paramétrica mucho más sencillo, presentando claras ventajas en el coste computacional, ya que disminuye en varios ordenes de magnitud el esfuerzo de cálculo. La convergencia también se ve claramente mejorada, así como la resolución. De hecho, la estimación paramétrica clásica dio lugar a un conjunto de métodos de determinación armónica que se englobaban bajo el nombre de *métodos de alta resolución*.

La mejora en la estimación puede presentarse como fundamental en el caso de no poder aumentar indefinidamente el número de datos de una señal. Para esta situación, el problema no es el de disminuir el tiempo de cálculo, sino conseguir una buena estimación a partir de un número de datos que no puede ampliarse. En la introducción se apuntó como en ciertas señales al aumento del número de datos no es posible o no es adecuado. En estos casos puede suceder que para el número de datos de la señal los métodos convencionales no proporcionen buenas estimaciones. La mejora en la estimación que producen los métodos paramétricos no sólo permite una mayor rapidez, en estos casos, sino que también permite resolver un problema que era irresoluble a partir de los métodos convencionales.

La cuestión clave en el desarrollo de estos métodos es la elección del modelo que debe cumplir $H(z)$, y que será fundamental para una rápida y adecuada estimación o para una lenta e incluso imposible convergencia. El modelo más utilizado para modelar la función de transferencia es el modelo racional, es decir, $H(z)$ será un cociente de polinomios de la forma:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (2.1)$$

con:

$$A(z) = \sum_{i=0}^p a(i)z^{-i} \text{ y } B(z) = \sum_{i=0}^q b(i)z^{-i}. \quad (2.2)$$

La elección de este modelo se puede justificar mediante un doble argumento. Por una parte es el modelo más sencillo por lo que simplifica el análisis; siendo además la base de una aplicación tan importante del análisis de señal como es el análisis y diseño de filtros, que se construyen habitualmente siguiendo este modelo. En segundo lugar, cualquiera que sea la función $H(z)$ elegida, se puede aproximar tanto como se quiera por una función racional, sin más que hacer los índices p y q suficientemente grandes, tal y como se puede deducir del análisis de Taylor. En realidad, no sería necesario un modelo racional y bastaría con uno polinómico, sin embargo, mediante el modelo racional se consigue un mejor ajuste con índices mucho menores.

Si en la función de transferencia el polinomio del denominador es la unidad el modelo

se llama de *media móvil* (MA) o todo ceros:

$$H(z) = B(z), \quad (2.3)$$

mientras que si es el numerador el que es igual a la unidad, el modelo se llama *autorregresivo* (AR) o todo polos:

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} \quad (2.4)$$

El caso más general en el que ninguno de los dos polinomios sea constante se conoce como *modelo autorregresivo de media móvil* (ARMA), que es el caso que se recoge en (2.1.). Este capítulo se centrará en el desarrollo de modelos autorregresivos de estimación triespectral.

Brevemente, se intentará justificar la elección de estos métodos de estimación en el desarrollo de este capítulo, de entre todos los paramétricos. El primer motivo es la sencillez. Como se ha podido ver, la complejidad al tratar con estadística de cuarto orden, en lugar de tercer orden, aumenta considerablemente, por lo que es importante disminuir al máximo la complejidad de los métodos. En el modelado AR causal esto es posible, ya que los parámetros que caracterizan la señal se obtienen como solución de un sistema lineal de ecuaciones, sin necesidad de realizar complejas minimizaciones no lineales como sucede en otros métodos paramétricos. En segundo lugar, la estimación AR se ha presentado en segundo orden como una herramienta útil y de gran resolución en el análisis de componentes armónicas, mientras que en tercer orden modela adecuadamente la situación de acoplos cuadráticos de fase; presentado un comportamiento mucho más adecuado que los métodos convencionales. En este sentido, la tercera parte de esta memoria intentará hacer uso de los métodos AR que se desarrollaran a continuación en la detección y caracterización de acoplos cúbicos de fase. Tercero, el modelado ARMA, más complejo, se lleva a cabo a través de una primera estimación de los coeficientes AR, lo que requiere de algoritmos para realizar la estimación. Por último, si el modelo es realmente un modelo AR, los métodos de estimación AR son los que mejor estimación producen del triespectro.

En relación con el último punto, es cierto que un modelo AR causal puede determinarse adecuadamente mediante la estadística de segundo orden, ya que al ser causal se exige que todos sus polos estén dentro del círculo unidad, como se apuntó en el capítulo anterior. Hay que recordar que la estadística de segundo orden era ciega a fase, lo que implicaba que no reconoce un polo o cero z_0 de su reflexión respecto del círculo unidad $1/z_0^*$. Tal y como se vio en I.4.3., al imponer causalidad, se está imponiendo que todos los polos queden dentro del círculo unidad, luego la fase está determinada, y así se pueden aplicar los métodos de segundo orden. Lo primero que se puede pensar es en relajar la hipótesis de causalidad, permitiendo que haya polos tanto dentro como fuera del círculo unidad en la función de transferencia, sin embargo para estos procesos es imposible construir sistemas lineales de ecuaciones que proporcionen los coeficientes, y se requieren largas y costosas minimizaciones no lineales [], perdiendo en parte la sencillez buscada al elegir el modelo AR. Parece más interesante, en primera instancia, reducir el problema a modelos AR causales que permiten la construcción de sistemas lineales de ecuaciones, y no recurrir a modelos no causales a menos que sea

imprescindible por la naturaleza de la señal. Esto es lo que se hará a lo largo de todo el capítulo.

Queda por responder al hecho de que los modelos causales se pueden resolver mediante estadística de segundo orden. Esto es cierto siempre que no exista ruido aditivo o que este se conozca. Como estas situaciones no son comunes en la práctica, es necesario recurrir a alto orden para analizar los procesos, siempre que el ruido sea lo suficientemente importante como para no permitir un análisis de segundo orden. En qué situaciones concretas los problemas de estimación de la estadística de cuarto orden son menores que los errores deterministas que se introduce al trabajar con estadística de segundo orden, es uno de los problemas que precisamente se pretende resolver a lo largo del capítulo de resultados.

El esquema del capítulo será el siguiente:

-En el apartado II.2. se planteará el modelo a utilizar, particularizando las definiciones de los cumulantes de orden cuatro y del triespectro para este modelo de señal.

-En el apartado II.3. se presentan los sistemas de ecuaciones a partir de los cuales se va a resolver el problema, deduciéndose de forma directa y a partir del esquema de predicción lineal, con el fin de permitir la deducción de los métodos utilizando ambos enfoques.

-Por último en el apartado II.4. se desarrollan los distintos métodos de estimación, los cuales se compararan en situaciones distintas en el capítulo III. Estos métodos se separarán en métodos recursivos en el orden del modelo AR y métodos no recursivos, entre los que se adaptarán métodos clásicos y se desarrollaran otros nuevos.

II.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Según lo apuntado en la introducción, se va a tratar con una señal AR contaminada con ruido aditivo gaussiano coloreado, de contenido espectral desconocido, es decir:

$$x(n) = y(n) + u(n) \tag{2.5}$$

donde $y(n)$ es un proceso AR de orden p , estacionario y causal, es decir:

$$\sum_{i=0}^p a(i)y(n-i) = w(n) \tag{2.6}$$

con $w(n)$ una señal i.i.d. no gaussiana, con estadística de tercer orden y media nula, mientras que $u(n)$ es un ruido aditivo gaussiano coloreado, independiente de $y(n)$. En (2.6) se toma $a(0) = 1$ para evitar una indeterminación de escala, de forma que $\{a(i)\}_{i=1,\dots,p}$ y la kurtosis de $w(n)$, γ_4^w , forman el conjunto de coeficientes que caracterizan completamente la estadística de cuarto orden del proceso. Esto es cierto siempre que se conozca el orden p del modelo AR lo que no siempre es posible. Incluso si el proceso es realmente AR de orden p , la existencia de ruido y los errores de estimación debido al número finito de datos con los que hay que realizar los métodos hace que el modelo no se cumpla exactamente, y que el orden p pueda no ser el

más adecuado. En la práctica, por tanto, el orden de modelo AR será un parámetro a estimar, junto con el resto de los coeficientes que caracterizan el sistema. En este capítulo no se abordará el problema de la estimación del orden del modelo, suponiéndose que es un parámetro conocido; diversos métodos de estimación del orden pueden encontrarse en [NIK93].

Como ya se vio en (1.61), la secuencia de autocorrelación aparece una contribución del ruido, sin embargo esto no sucede en la secuencia de cumulantes de orden cuatro, que resulta ser:

$$c_4^y(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = c_4^x(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \gamma_4^w \sum_{i=1}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1)h(i+\tau_2)h(i+\tau_3). \quad (2.7)$$

donde se ha hecho uso de las propiedades 4 y 5 de la sección I.2.4.

La secuencia de cumulantes de tercer orden cumple:

$$c_4^y(\tau_1, \tau_2) = c_4^x(\tau_1, \tau_2) = \gamma_3^w \sum_{i=1}^{\infty} h(i)h(i+\tau_1)h(i+\tau_2), \quad (2.8)$$

y es nula, ya que el coeficiente de asimetría de $w(n)$ γ_3^w es nulo.

Haciendo uso de (1.65) y (2.4), se llega a una expresión sencilla para el triespectro de procesos AR [NIK93]:

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{\gamma_w^4}{A(\omega_1)A(\omega_2)A(\omega_3)A^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} \quad (2.9)$$

donde $A(\omega) = \sum_{i=0}^p a(i)e^{-j\omega i}$ es la transformada discreta de Fourier del conjunto de coeficientes

AR y $\gamma_w^4 = c_w^4(0,0,0)$. De la anterior expresión es interesante destacar que a partir de los coeficientes AR el triespectro de la señal queda totalmente determinado salvo un factor de escala. Esto significa que el problema inicial de la estimación triespectral, en el que lo que se persigue es estimar el valor del triespectro para todos los puntos de su región principal, se ha simplificado a un problema de estimación paramétrica. Una vez estimados los parámetros AR, el triespectro se obtiene de forma sencilla a partir de (2.9). En el siguiente apartado se obtendrán los coeficientes AR a partir de la resolución de sistemas lineales de ecuaciones, cuyas incógnitas serán dichos coeficientes y cuyos coeficientes vendrán dados por las series de cumulantes de orden cuatro.

En la práctica no será necesario que la señal sea un proceso AR, tal y como se ha definido, para poder aplicar los métodos de estimación paramétrica, sino que bastará con que la señal se aproxime suficientemente mediante un modelo de este tipo. Esta "aproximación suficiente" significa que con la modelación AR sea posible obtener la información buscada de

la señal, sin que ésta tenga que ser un modelo AR perfecto. El procesado de voz es un ejemplo concreto en el que sucede precisamente esto. En efecto, en el espectro típico de estos procesos aparecen varios picos relativamente estrechos unidos con zonas llanas. En este caso se ha demostrado ampliamente que un modelo AR es capaz de reproducir fielmente la zona de los picos, aunque en las zonas llanas la el espectro AR defiere notablemente del de voz. Sin embargo, la información que se persigue se encuentra únicamente en los picos, por lo que la modelación AR es ampliamente utilizada en procesamiento de voz, aunque no reproduzca fielmente el espectro completo [RAB78].

II.3. ECUACIONES RECURSIVAS DE CUARTO ORDEN

Los sistemas de ecuaciones recursivas de cuarto orden son los sistemas de ecuaciones lineales cuya resolución proporciona el conjunto de coeficientes AR. Para una señal AR, definidas en (2.5) y (2.6), es fácil de comprobar como la serie de cumulantes de cuarto orden cumplen el sistema de ecuaciones [MEN91]:

$$\sum_{i=0}^p a(i)c_x^4(\tau_1-i, \tau_1-\tau_2, \tau_1-\tau_3) = \gamma_w^4 \delta(\tau_1)\delta(\tau_2)\delta(\tau_3), \quad (2.10)$$

con $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \geq 0$. Se observa como las incógnitas del sistema de ecuaciones es el conjunto de coeficientes AR, mientras que los coeficientes son los cumulantes de orden cuatro de la señal. La resolución del anterior sistema de ecuaciones proporciona directamente el conjunto de coeficientes AR, por lo la expresión dada en (2.10) se conoce como *ecuaciones recursiva de cuarto orden* [NIK91]. Estas ecuaciones que aparecen en (2.10) son ciertas para cualesquiera valores de los retardos temporales τ_1, τ_2 y τ_3 , siempre que sean positivos; produciendo que distintas elecciones en los retardos temporales den como resultados distintos sistemas de ecuaciones a partir de (2.10), lo que dará lugar, a su vez, distintos métodos de estimación AR.

Los métodos que se van a desarrollar a partir de (2.10) se dividirán en dos grupos: los *métodos recursivos* en el orden del modelo AR y los *métodos no recursivos*. Los primeros, como su nombre indica, presentan la propiedad de ser recursivos en el orden del modelo AR, es decir, en la resolución de los métodos proporciona los coeficientes del modelo AR desde orden uno hasta un orden p dado. Esta propiedad es muy interesante en la práctica, ya que, como se ha dicho, el orden del modelo no suele ser conocido; de forma que en la construcción de criterios de elección del orden suele ser necesario calcular los coeficientes de los modelos AR, desde orden uno hasta que el criterio proporcione un orden óptimo []. Es claro que en estos casos, la utilización de métodos recursivos simplifica la resolución. Entre estos métodos se desarrollarán el clásico *método de Levinson*, el *método de los coeficientes de reflexión* (RCM) y el *método geométrico* (GM). En el desarrollo de estos métodos se construirán sistemas de ecuaciones cuya matriz de coeficientes posea ciertas propiedades geométricas que permita la resolución recursiva.

Los métodos no recursivos poseen el inconveniente de tener que realizarse orden a orden, si se desea obtener los coeficientes AR desde orden uno hasta orden p , lo que produce que suelen ser más lentos. En su favor tienen que suelen poseer mejor resolución y mejor

comportamiento frente al ruido, aunque son más costosos computacionalmente. Se suelen basar en la resolución de sistemas de ecuaciones sobredeterminados o sin propiedades geométricas interesantes, por lo que la resolución se lleva a cabo mediante los métodos clásicos de mínimos cuadrados o Gauss, dependiendo si el sistema es sobredeterminado o no. Los métodos no recursivos que se van a desarrollar son el *método de mínimos cuadrados* y el *método CFOM (Constrained Fourth-Order Mean)* del que se construirá una versión sobredeterminada, llamada *método CFOM complejo* y otra determinada, que se denominará *método CFOM simple*.

Los distintos métodos que se desarrollan en este trabajo difieren los unos de los otros en la elección de los retardos temporales realizada al construir el sistema de ecuaciones, en el carácter recursivo o no en el orden del modelo AR, que también se verá influenciado por la elección en los retardos temporales, y, en algunos casos, de las suposiciones estadísticas realizadas a priori sobre la señal.

Para el desarrollo de los métodos recursivos en el orden RCM y GM, es conveniente deducir el sistema de ecuaciones (2.10) partiendo de un esquema distinto al que se ha utilizado, esquema de predicción lineal, lo que se va realizar en el siguiente apartado.

II.3.1. Esquema de predicción lineal.

En la deducción de los sistemas de ecuaciones, se ha supuesto que la señal es un proceso AR y de ahí el conjunto de ecuaciones (2.10) se cumple de una forma natural y exacta, sin más que estudiar las relaciones que poseen entre sí los cumulantes de orden cuatro. En vez de trabajar bajo el marco de las señales AR, como se ha realizado hasta ahora, se van a deducir las mismas ecuaciones (2.10) trabajando bajo las hipótesis de predicción lineal. En este esquema, lo único que se le exigirá a la señal es que sea estacionaria y lo que se persigue es la construcción de la óptima aproximación lineal de ésta, tal y como de hizo en [KEY88] para la estadística de segundo orden.

A partir de una señal $x(n)$ arbitraria, a la que únicamente se le exige que sea estacionaria, se define predicción lineal hacia atrás y hacia delante de orden p como

$$\hat{x}_p^f(n) \equiv -\sum_{i=1}^p a_p(i)x(n-i) \text{ y } \hat{x}_p^b(n) \equiv -\sum_{i=1}^p b_p(i)x(n+i), \quad (2.11)$$

respectivamente, donde $\{a_p(i)\}_{i=1,\dots,p}$ y $\{b_p(i)\}_{i=1,\dots,p}$ se denominan coeficientes de predicción lineal hacia delante y hacia atrás, de orden p . Por supuesto, si la señal $x(n)$ es una señal AR, los coeficientes de predicción lineal y los coeficientes AR coincidirán, por lo que no se ha considerado necesario cambiar la notación.

Dependiendo del conjunto de coeficientes que se elija se obtendrá una predicción lineal u otra. Con el fin de encontrar la óptima estimación lineal, se definen los errores de predicción lineal hacia atrás y hacia delante como

$$e_p^f(n) \equiv x(n) - \hat{x}_p^f(n) \text{ y } e_p^b(n) \equiv x(n) - \hat{x}_p^b(n), \quad (2.12)$$

respectivamente. Lo que se perdigue es construir la predicción lineal que más se aproxime a la señal $x(n)$, lo que se consigue construyendo una distancia y definiendo la predicción lineal óptima como aquella cuyos parámetros de predicción lineal minimicen dicha distancia.

En un gran número de trabajos de procesos estocásticos, dentro del espacio lineal de las señales estacionarias con la suma, se define el producto vectorial, y con ello la norma, entre dos señales $y(n)$ y $z(n)$, pertenecientes al espacio lineal de las señales aleatorias, como $\langle y|z \rangle = \mathcal{E}\{y(n)z(n)\}$, es decir, el producto vectorial de dos señales es el valor esperado de su producto algebraico [PAP84]. Si las dos señales son iguales, salvo retardo temporal, su producto vectorial será igual a la función de autocorrelación. Este producto vectorial, y con él la norma del espacio, está sujeto a las limitaciones que posee la función de autocorrelación, puestas de manifiesto en el capítulo introductorio; luego cualquier análisis de predicción lineal que se desarrolle a partir de este producto escalar será incapaz de superar las limitaciones que posee el análisis de señal clásico de segundo orden. El primer paso, por tanto, será construir un criterio de distancia dentro del ámbito de la estadística de cuarto orden. Para ello se definen, para toda señal $x(n)$ estacionaria y todo par de señales $y(n)$ y $z(n)$ pertenecientes al espacio, las siguientes métricas no euclídeas:

$$\langle y(n)|z(n) \rangle_s = \text{Cum}[y(n), z(n), x(n-s), x(n-s)] \quad (2.13)$$

A partir de la definición es fácil ver que las aplicaciones bilineales anteriores son simétricas, como es necesario para poder considerarlas métricas.

Partiendo de las anteriores métricas y de los errores de predicción lineal hacia atrás y hacia delante se construyen las funciones error:

$$\begin{aligned} Q_{f,p}^s &= \|x(n) - \hat{x}_p^f(n)\|_s^2 = \|e_p^f(n)\|_s^2 & s=0, 1, \dots, p \\ Q_{b,p}^s &= \|x(n) - \hat{x}_p^b(n)\|_s^2 = \|e_p^b(n)\|_s^2 & s=0, -1, \dots, -p \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $\|\cdot\|_s$ significa, como es de esperar, $\langle \cdot | \cdot \rangle_s$. No es correcto nombrar las anteriores funciones como distancias, en primer lugar porque no tendría sentido definir más de una distancia en un espacio lineal, y en segundo lugar porque las métricas no son definidas positivas, lo que imposibilita definir una norma o distancia a partir de ellas. Por todo esto en el desarrollo siguiente no se utilizará el término distancia para referirse a ellas y se denominarán simplemente funciones error.

El hecho de que no sean funciones definidas positivas acarrea problemas en relación con la existencia de solución tras la minimización. En efecto, la minimización de una función error respecto de los parámetros de predicción lineal puede verse como la minimización de una función cuadrática de variables real. Para ver esto más claro basta expresar una función error como:

$$Q_{f,p}^s = \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{a} + c \quad (2.15)$$

con $\mathbf{a} = [a_p(1), \dots, a_p(p)]$, $(\mathbf{A})_{ij} = \langle x(n-i) | x(n-j) \rangle_s$, $\mathbf{b} = [\langle x(n) | x(n-1) \rangle_s, \dots, \langle x(n) | x(n-p) \rangle_s]$, $c = \langle x(n) | x(n) \rangle_s$. $Q_{f,p}^s$ es una función cuadrática ya que la matriz \mathbf{A} es simétrica. El conjunto de coeficientes que minimiza esta forma cuadrática resulta $\mathbf{a}_o = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Estos coeficientes sólo existen en el caso de que \mathbf{A} sea no singular, sin embargo, al no ser definidas positivas las métricas, esto no está asegurado. Por tanto, la minimización de una función error no es suficiente para asegurar la existencia de solución al problema. Es por esto por lo que se deben definir varias funciones error y no basta con una única (como sería deseable para tener una buena descripción topológica del espacio), si se desea asegurar la existencia de solución. Es posible demostrar que es suficiente la minimización de p funciones error para asegurar la existencia de solución [GIA90].

Expresando las funciones error como formas cuadráticas, como se ha hecho anteriormente, se puede realizar fácilmente la minimización y obtener las ecuaciones que cumplen los coeficientes de predicción lineal óptimos. Estas ecuaciones son $\mathbf{A}\mathbf{a}_o = -\mathbf{b}$, que tras desarrollar la expresión matricial, y trabajando de la misma manera para las funciones error hacia delante, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p a_p(i) \langle x(n-r) | x(n-i) \rangle_s &= \langle x(n-r) | e_p^f(n) \rangle_s = 0 \quad \text{para } r=1, \dots, p \text{ y } s=0, 1, \dots, p \\ \sum_{i=0}^p b_p(i) \langle x(n+r) | x(n+i) \rangle_s &= \langle x(n+r) | e_p^b(n) \rangle_s = 0 \quad \text{para } r=1, \dots, p \text{ y } s=0, -1, \dots, -p \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde se ha tomado $a_p(0) = b_p(0) = 1$. Sustituyendo las anteriores relaciones de ortogonalidad en la expresión de $Q_{f,p}^s$ y $Q_{b,p}^s$ obtendríamos un conjunto de $2(p+1)^2$ ecuaciones, en las que tenemos relacionados los coeficientes de predicción lineal con los cumulantes de orden cuatro:

$$\begin{aligned} \langle x(n-r) | e_p^f(n) \rangle_s &= (Q_{f,p}^s)_{\min} \delta(r) \quad \text{para } r=0, 1, \dots, p \text{ y } s=0, 1, \dots, p \\ \langle x(n+r) | e_p^b(n) \rangle_s &= (Q_{b,p}^s)_{\min} \delta(r) \quad \text{para } r=0, 1, \dots, p \text{ y } s=0, -1, \dots, -p. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Desarrollando las métricas se observa que el primero de los anteriores sistemas de ecuaciones es idéntico al que aparece en (2.10), sin más que hacer $\tau_1 = s$, $\tau_2 = r$, $\tau_3 = s$ y $\gamma_w^4 = (Q_{f,p}^s)_{\min}$. De esta manera, se han obtenido un sistema de ecuaciones recursivas de cuarto orden, como los obtenidos en (2.10) para señales AR, mediante predicción lineal de una señal estacionaria. Aunque el sistema de ecuaciones obtenido sea el mismo por ambos caminos, las suposiciones hechas sobre la señal son de muy distinta naturaleza. El primer esquema desarrollado, más restrictivo, supone que la señal sigue un esquema autorregresivo, como el dado en (2.5) y (2.6), mientras que en el segundo esquema, el que se trabaja en predicción lineal, lo único que se le exige a la señal es que sea estacionaria. Por supuesto, la predicción

lineal será tanto mejor cuanto más se parezca la señal a un proceso AR . Sin embargo, en su favor, la predicción lineal tiene el hecho de que cualquier señal estacionaria se puede expresar como un proceso AR de dimensión infinita. Por tanto, se puede aproximar una señal arbitraria mediante su predicción lineal con una precisión arbitraria sin más que elevar el orden de la predicción lineal.

Dentro de los sistemas de ecuaciones lineales dados en (2.10), en adelante se restringirá a las limitaciones dadas anteriormente: $\tau_1 = \tau_3 = s$, $\tau_2 = r$ y $0 \leq r, s \leq p$. Como se definió en el capítulo introductorio, una determinada elección de la cantidad $r-s$ dará lugar a 1-D *slice* de cumulantes, de forma que, por ejemplo, si se elige un sistema de ecuaciones formado por un único 1-D *slice* con $r-s=0$ (*slice* diagonal) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^p a(i)c_x^4(s-i, 0, 0) = \gamma_w^4 \delta(s), \text{ con } s=0, \dots, p. \quad (2.18)$$

Este sistema de ecuaciones posee una estructura geométrica llamada Toeplitz y podrá resolverse mediante el algoritmo estándar de Levinson de resolución de sistemas Toeplitz. Este algoritmo posee la propiedad de ser recursivo en el orden del modelo y constituye uno de los métodos recursivos que se desarrollarán y estudiarán en la siguiente sección.

La solución del sistema de ecuaciones (2.18) mediante el algoritmo de Levinson proporciona una solución exacta al sistema de ecuaciones; luego, para un sistema AR y estimados sus cumulantes, los parámetros obtenidos mediante este método resultan ser teóricamente los verdaderos. Sin embargo, en la práctica, al tener que estimarse los cumulantes a partir de una señal finita de datos contaminados de ruido, dicho algoritmo puede presentar deficiencias para ciertas señales y ciertos ambientes ruidosos. Con el fin de obtener métodos recursivos más sofisticados, en el siguiente capítulo se tratará la construcción de los métodos RCM y GM, métodos recursivos que persiguen una mayor robustez estadística frente al número finito de datos y a la existencia de ruido aditivo, construyéndose ambos de una forma muy similar y que sigue el esquema de predicción lineal, haciendo uso de las funciones error definidas en el espacio lineal de las señales estacionarias (2.14).

II.4. MÉTODOS LINEALES AR DE ESTIMACIÓN TRIESPECTRAL

A continuación se van a presentar los distintos métodos lineales AR con los que se persigue la estimación del triespectro, distinguiendo métodos recursivos en el orden y métodos no recursivos. Es conveniente recordar que es posible desarrollar otro tipo de métodos de estimación en cuarto orden que no poseen la propiedad de ser lineales. En estos métodos, los coeficientes AR que definen el sistema se obtienen de resolver sistemas de ecuaciones no-lineales y, aunque se pueden aplicar a procesos causales, son los únicos que permiten la estimación triespectral en procesos AR no-causales. A lo largo de este todo esta memoria no se van a tratar este tipo de métodos, como ya se señaló anteriormente junto con los motivos de la restricción que se hace a métodos lineales.

II.4.1. Métodos Recursivos en el Orden.

Los métodos de estimación recursivos en el orden permiten la estimación de los parámetros AR desde orden uno hasta un orden p dado, hecho que será especialmente útil en las situaciones prácticas en las que no se conozca el orden del modelo AR. Los métodos de este tipo que se construirán son el método de Levinson, el método RCM y el GM.

Originalmente, el método RCM fue construido para aplicarse a la estadística de tercer orden [GAL93] [CAR95]. En esta memoria se replantea el problema para el caso de cuarto orden, siguiendo una formulación distinta al original y que retoma la idea que dio lugar al algoritmo de Burg a partir del algoritmo de Levinson, en la estadística de segundo orden [KEY88]. Esto llevará unas expresiones diferentes a las del trabajo original para la estadística de tercer orden, pero manteniendo una estructura similar. Una vez desarrollado el método se generalizará la idea que dio lugar al algoritmo geométrico a partir del algoritmo de Burg, en la estadística de segundo orden [MAR87], construyendo así un nuevo algoritmo de la misma naturaleza recursiva que el RCM y que, por analogía a lo realizado en la estadística de segundo orden, se denominará Método Geométrico (GM).

a) Método de Levinson.

El algoritmo de Levinson es en realidad un método algebraico rápido de resolución de matrices Toeplitz. La utilización de este método sólo requiere que la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones posea esta determinada estructura, es decir que su elemento correspondiente a la fila i y la columna j cumpla

$$[A]_{ij} = a_{i-j} \quad (2.19)$$

Esto hace que la adaptación de este algoritmo al sistema de ecuaciones de ecuaciones (2.18) sea inmediato. La deducción del método desde un punto de vista exclusivamente matricial se puede encontrar en cualquier libro de álgebra matricial o en [MAR87]. Otro enfoque que proporciona ideas intuitivas interesante sobre el espacio vectorial de las señales aleatorias, en el que trabajando con proyecciones ortogonales y procesos de ortogonalización de Grand-Smith, se encuentra recogido en [KAY88].

Los dos métodos siguientes se han desarrollado con el fin de construir métodos recursivos más sofisticados y que puedan ser estadísticamente más estables que el método de Levinson. La búsqueda de otros métodos recursivos más estables se debe a que ya en las estadísticas de segundo y tercer orden, el método de Levinson presentaba problemas para número de datos pequeños o ambientes ruidoso, siendo necesario construir otro tipo de método, como el de Burg en la estadística de segundo orden, para solventar estos problemas. Como viene siendo habitual, se espera que estos problemas se verán acuciados en la estadística triespectral, por lo que la búsqueda de estos otros métodos recursivos es de esperar que sea totalmente necesaria.

b) Métodos de los Coeficientes de Reflexión (RCM).

En el desarrollo del algoritmo RCM se parte del sistema de ecuaciones (2.17), en el esquema de predicción lineal, que equivalente al sistema (2.10) restringido a $\tau_1 = \tau_3 = s$, $\tau_2 = r$ y $0 \leq r, s \leq p$.

En la sección anterior se puede observar como si se trabaja en el esquema de predicción lineal, lo que se impone a los p coeficientes es que cumplan las $(p+1)^2$ ecuaciones (2.17), surgidas tras la minimización de las funciones error (2.14), que se han definido como indicador de distancia de cuarto orden dentro del espacio lineal de las señales estacionarias. Por supuesto este sistema no tendrá en general solución al ser sobredeterminado, salvo en el caso de que $x(n)$ sea realmente un proceso AR y los cumulantes se hayan estimado sin error alguno, en cuyo caso no es el rango del sistema de ecuaciones será igual al número de incógnitas. Para la resolución de este sistema de ecuaciones sobredeterminado es necesario la utilización técnicas de mínimos cuadrados, las cuales son más costosas computacionalmente y, sobre todo, no poseen el carácter recursivo en el orden del modelo AR que se está buscando. Para conseguir que el método resultante sea recursivo, en esta sección se impondrá a los coeficientes de predicción lineal que cumplan sólo el conjunto de ecuaciones que corresponden al 1-D *slice* diagonal en (2.17). Los conjuntos de coeficientes de predicción lineal óptimos no tendrán, por tanto, que cumplir el resto de ecuaciones de (2.17) que no se han impuesto, es decir, los correspondientes a los 1-D *slices* no diagonales; aunque se espera que, si la señal se modela bien por un proceso AR (en cuyo caso la estimación lineal también aproxima bien el proceso), el resto de sistemas de ecuaciones sean cercanos a cero. De esta manera los métodos que se obtengan serán más rápidos que los que resultan de trabajar con el sistema sobredeterminado, al no tener que utilizar técnicas de mínimos cuadrados y tener que estimar un menor número de cumulantes. Sin embargo al trabajar con $p+1$ ecuaciones se utiliza menos información referente a la señal, por lo que los métodos se esperan que sean peores y más sensibles a los errores de estimación debidos al número finito de datos y a la existencia de ruido. En el apartado de resultados se compararan unos métodos y otros, de forma que se pueda comprobar la veracidad esta suposición.

El conjunto de ecuaciones que vamos a imponerle al sistema queda:

$$\begin{aligned} \langle x(n-s) | e_p^f(n) \rangle_s &= (Q_{f,p}^0)_{\min} \delta(s) & p \geq s \geq 0 \\ \langle x(n-s) | e_p^b(n) \rangle_s &= (Q_{b,p}^0)_{\min} \delta(s) & -p \leq s \leq 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde se ha restringido el conjunto de ecuaciones (2.17) al 1-D *slice* diagonal.

Desarrollando las métricas en las anteriores expresiones, es fácil ver que el primer sistema en (2.20) y el dado en (2.17) son idénticos, sin más que hacer $\gamma_w^4 = (Q_{f,p}^0)_{\min}$. Puede parecer que (2.20) es un sistema de $p+1$ ecuaciones con p incógnitas, sin embargo hay que notar que $(Q_{f,p}^0)_{\min}$ no se conoce y es, por tanto, una incógnita más del problema. Se puede trabajar con las ecuaciones con $s \neq 0$, obteniendo así un sistema de p ecuaciones cuyas p incógnitas son los coeficientes de predicción lineal, y, una vez conseguidos estos, se consiguen $(Q_{f,p}^0)_{\min}$ sin más que sustituir los anteriores coeficientes en las ecuaciones con $s=0$. Las ecuaciones (2.20) son, por tanto, las ecuaciones que han de solucionarse y que permitirán calcular los coeficientes óptimos de predicción lineal.

Para obtener las expresiones de una forma clara, se utilizará el esquema de predicción lineal y se procederá a la resolución siguiendo un esquema recursivo en el orden del modelo de predicción lineal. El proceso es el siguiente: se empieza construyendo los coeficientes para la óptima predicción lineal de orden uno, posteriormente se construye la óptima predicción lineal de orden dos a partir de la de orden uno y así sucesivamente, siguiendo un esquema similar al propuesto [KEY88] para la estadística de segundo orden, en el que se utiliza técnicas de proyectores ortogonales sobre subespacios. En este caso habrá que adaptar el esquema a la naturaleza métrica un tanto especial del espacio lineal con el que se está trabajando y habrá que salvar el concepto de ortogonalidad, difícil de definir adecuadamente debido a la existencia de más de una métrica.

A primer orden, la predicción lineal de orden uno hacia atrás de $x(n)$ es $\hat{x}_1^f(n) = -a_1(1)x(n-1)$. Por definición, esta predicción es óptima cuando minimiza las funciones error dadas en (2.14) para $p=0,1$, o lo que es lo mismo, cuando cumple las relaciones de ortogonalidad:

$$\left. \begin{aligned} \langle x(n-1) | e_1^f(n) \rangle_1 &= 0 \\ \langle x(n-1) | e_1^f(n) \rangle_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Si $x(n)$ fuera un sistema AR de orden uno, el coeficiente $a_1(1)$ cumpliría las dos ecuaciones de ortogonalidad, sin embargo $x(n)$ no tiene por que ser un proceso AR y lo que se está haciendo es una predicción lineal que se intenta que sea óptima, en el sentido ya especificado anteriormente. Como ya se explicó, para la deducción del algoritmo RCM se impondrá al coeficiente $a_1(1)$ que cumpla únicamente la primera ecuación de (2.21), que corresponde al 1-D slice diagonal, lo que implica que sólo debe cumplir la primera de las dos ecuaciones de (2.21). De esta manera se eludía el trabajar con sistemas sobredeterminados de ecuaciones, en busca de simplificar el problema y de un método de resolución recursivo en el orden del modelo. Si se hubiera procedido suponiendo que se tiene un proceso AR, las dos ecuaciones hubieran sido igual de válidas y en la determinación $a_1(1)$ se tendría que obtener teniendo en cuenta ambas.

Según lo anterior, la primera de las dos ecuaciones de (2.21) implica que el coeficiente $a_1(1)$ óptimo viene expresado como:

$$a_1(1) = -\frac{\langle x(n-1) | x(n) \rangle_1}{\langle x(n-1) | x(n-1) \rangle_1} \quad (2.22)$$

En segundo orden, la predicción lineal de orden dos resulta $\hat{x}_2^f(n) = -a_2(1)x(n-1) - a_2(2)x(n-2)$. De esta forma se cuenta ahora con un nuevo dato $x(n-2)$ para aproximar $x(n)$, el cual proporciona nueva información sobre él; información que se puede llamar *información lineal* de segundo orden. Pero no toda la información proveniente de $x(n-2)$ es nueva, ya que $\langle x(n-2) | x(n-1) \rangle_1 \neq 0$; por tanto, parte de $x(n-2)$ se puede obtener como información lineal de primer orden a partir de $x(n-1)$ como $\hat{x}_1^b(n-2) = -b_1(1)x(n-1)$. La parte de $x(n-2)$ que no se

puede estimar en primer orden lineal será exactamente $x(n-2) - \hat{x}_1^b(n-2) = e_1^b(n-2)$, según la definición de error de predicción lineal hacia delante. Teniendo en cuenta lo anterior, la mejor predicción de $x(n)$ basada en $x(n-1)$ y $x(n-2)$ será igual a la mejor predicción basada en $x(n-1)$ (ya calculada) más la mejor predicción basada en la parte de $x(n-2)$ que no esté ya incluida en la predicción basada en $x(n-1)$ (a primer orden). Como se ha visto, esta última es igual a algún coeficiente por $e_1^b(n-2)$. El nuevo coeficiente representará la óptima estimación de $x(n)$ sobre esta nueva "dirección", se llamará *coeficiente de reflexión hacia atrás* de orden dos y se notará por k_2^f . De esta manera la óptima predicción lineal hacia atrás de segundo orden de $x(n)$ queda:

$$\hat{x}_2^f(n) = \hat{x}_1^f(n) + k_2^f e_1^b(n-2). \quad (2.23)$$

Si se realiza el desarrollo anterior inductivamente se obtiene una expresión para la óptima predicción lineal hacia atrás de orden k , que es:

$$\hat{x}_k^f(n) = \hat{x}_{k-1}^f(n) + k_k^f e_{k-1}^b(n-k) \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta la definición de la predicción lineal hacia atrás de un determinado orden y la de error de predicción lineal hacia delante se puede expresar los coeficientes de la predicción lineal de orden k en función los de orden $k-1$ y los coeficientes de reflexión de orden k sin más que igualar ambas partes del igual:

$$\begin{cases} a_k(k) = k_k^f \\ a_k(i) = a_{k-1}(i) + k_k^f b_{k-1}(k-i) \end{cases} \quad i=1, \dots, k-1 \quad (2.25)$$

Repitiendo todo el proceso anterior pero para la predicción lineal hacia delante se obtiene al final:

$$\begin{cases} b_k(k) = k_k^b \\ b_k(i) = b_{k-1}(i) + k_k^b a_{k-1}(k-i) \end{cases} \quad i=1, \dots, k-1 \quad (2.26)$$

donde k_k^b es el *coeficiente de reflexión hacia delante* de orden k .

De estas expresiones se observa como al resolver se puede seguir un esquema recursivo en el orden, es decir, supuesto conocidos los coeficientes de predicción lineal hacia delante y hacia atrás de orden $k-1$ se pueden obtener los mismos coeficientes de orden k . Según esta idea, en el paso k , los coeficientes de predicción lineal de orden $k-1$ se suponen conocidos y lo único que se desconoce son los coeficientes de reflexión de orden k . El problema para seguir este esquema es que no se posee una expresión de los coeficientes de reflexión. Para ello habría

que definir que se entiende por “óptima estimación sobre una dirección”, es decir “proyección”, lo que no es sencillo ya que hay definidas varias métricas en el espacio y no una, por lo que no se puede establecer una buena definición de ortogonalidad ni de proyección. Es necesario, por tanto, encontrar una expresión de los coeficientes de reflexión en función de los datos del problema en el paso k del proceso recursivo, sin hacer uso de una definición de proyección. Los datos del problema en el paso k son los coeficientes de predicción lineal hacia atrás y hacia delante de orden $k-1$, el coeficiente de reflexión de orden $k-1$ y los cumulantes de orden cuatro de la señal.

Según el anterior desarrollo, en el paso k , se tiene que los coeficientes de predicción lineal de orden k son función de los coeficientes de reflexión de orden k y de los coeficientes de predicción lineal de orden $k-1$. De estos coeficientes, los últimos se conocen del paso anterior, luego en el paso k son constantes; quedando, en este punto, los coeficientes de reflexión como variables a determinar. Por tanto, la minimización de las funciones error (2.14) respecto de los coeficientes de predicción lineal de orden k pueden expresarse como una minimización de estas funciones respecto de los coeficientes de reflexión de orden k , haciendo uso de las relaciones de recurrencia (2.25) y (2.26) que liga ambos conjuntos de coeficientes. Con esto se consigue salvar el problema que acarrea tener que definir que se entiende por “óptima estimación en una dirección”, ya que el coeficiente de reflexión se obtendrá como resultado de la nueva minimización.

Para realizar la minimización de una forma más sencilla se utilizan las relaciones recursivas de los errores de predicción lineal:

$$\left. \begin{aligned} e_k^f(n) &= e_{k-1}^f(n) + k_k^f e_{k-1}^b(n-k) \\ e_k^b(n) &= e_{k-1}^b(n) + k_k^b e_{k-1}^f(n+k) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Para obtener las anteriores expresiones primero se expresan los errores de predicción lineal de orden k en función de los coeficientes de k ; luego se utilizan las expresiones recursivas de estos coeficientes dadas en (2.25) y (2.26), obteniendo los errores de predicción lineal de orden k como función de los coeficientes de predicción lineal de orden $k-1$; finalmente se utiliza la definición de los errores de predicción lineal de orden $k-1$ y se obtienen las expresiones recogidas en (2.27).

Para realizar la minimización, primero se sustituye (2.27) en la expresión de $Q_{k,s}^f$, obteniéndose:

$$Q_{k,s}^f = \|e_k^f(n)\|_s^2 = \langle e_{k-1}^f(n) + k_k^f e_{k-1}^b(n-k) | e_{k-1}^f(n) + k_k^f e_{k-1}^b(n-k) \rangle_s \quad (2.28)$$

Derivando la anterior expresión respecto a k_k^f , teniendo en cuenta la bilinealidad que cumplen las métricas, e igualando a cero se obtiene la buscada expresión del coeficiente de reflexión:

$$(k_k^f)_s = - \frac{\langle e_{k-1}^b(n-k) | e_{k-1}^f(n) \rangle_s}{\langle e_{k-1}^b(n-k) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_s} = - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^f(n) \rangle_s}{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_s} \quad s=0, \dots, k \quad (2.29)$$

Se observa como se ha conseguido expresar el coeficiente de reflexión hacia delante de orden k en función de los datos del problema en el paso k , como son las series de cumulantes de orden cuatro, los errores de predicción lineal de orden $k-1$ y los coeficientes de predicción lineal de orden $k-1$. Sin embargo aparecen, no una, sino $k+1$ expresiones distintas para el mismo coeficiente de reflexión. De esta forma, vuelve a aparecer una sobredeterminación en el sistema de ecuaciones que debe cumplir nuestros parámetros ($k+1$ ecuaciones con una incógnita), tal y como ocurrió inicialmente para los coeficientes de predicción lineal.

El problema resultó ser sobredeterminado, en primera estancia, tras la minimización de las funciones error respecto de los coeficientes de predicción lineal. Se restringió el número de ecuaciones que debían cumplir los coeficientes de predicción lineal al 1-D *slice* diagonal, con el fin de no tener que utilizar técnicas de mínimos cuadrados en la resolución y para poder trabajar con un sistema de ecuaciones que tuviera estructura Toeplitz, permitiendo la recursividad en el orden del modelo. El resultado fue trabajar con un sistema determinado de ecuaciones (2.20) para la obtención de los coeficientes de predicción lineal. Sin embargo, el problema vuelve a presentar sobredeterminación en el nuevo conjunto de coeficientes (coeficientes de reflexión), tras la minimización de las funciones error. Esto se debe a que, al realizar la minimización por segunda vez, no se ha podido tener en cuenta la restricción que se hizo antes sobre el conjunto de ecuaciones que deben cumplir los coeficientes de predicción lineal, ya que si se sustituyen estas ecuaciones, dadas en (2.20), dentro del nuevo sistema (2.29), que cumple el coeficiente de reflexión, no se consigue obtener un sistema determinado para la obtención de dicho coeficiente. Esto es debido a que, a causa de la relación que existe entre el coeficiente de reflexión y los de predicción lineal, cada una de las $k+1$ distintas expresiones del nuevo coeficiente dadas en (2.29), contienen elementos de todos los 1-D *slices* que aparecen en (2.17). Por tanto, al restringirse a un sólo 1-D *slice* (el diagonal) y luego sustituirlo en (2.29) se sigue teniendo $k+1$ ecuaciones para la obtención del coeficiente de reflexión y no se consigue tener un sistema determinado.

En un principio, el sistema de ecuaciones (2.17) no tenía por qué ser compatible; lo que quiere decir que el conjunto de coeficientes que se obtienen al resolver el 1-D *slice* diagonal (2.20) no tiene por qué cumplir el resto de 1-D *slices*. Sólo en el caso de tener un sistema AR y de obtener unos cumulantes estimados sin error (caso ideal), sucederá esto. En la práctica la señal no tiene por qué ser un sistema AR y las estimaciones no son perfectas, luego el sistema (2.17) no será, efectivamente, compatible. Sin embargo se espera que si la señal puede modelarse bien mediante un sistema AR, o lo que es lo mismo, que es aceptable la predicción lineal, los coeficientes que se obtienen al resolver el 1-D *slice* diagonal serán muy próximos a los que se obtendrían al resolver el resto de los 1-D *slices*. En este sentido se supone que las diferencias entre los coeficientes obtenidos a partir de distintos 1-D *slices* diferirán en cantidades debidas a errores de estimación y a la presencia de ruido. Esto hace que el utilizar más 1-D *slice* a la hora de calcular los coeficientes de predicción lineal debería ofrecer robustez

frente a errores de estimación y de ruido.

Por lo tanto, en un principio, la única ventaja que se tiene al desechar un número de ecuaciones en un sistema sobredeterminado, pero compatible salvo errores de estimación, con el fin de hacerlo determinado, es que no se tiene que utilizar técnicas de mínimos cuadrados y la resolución se realiza con menor coste computacional, amén de permitir una obtención recursiva en el orden de predicción lineal.

Si se trabaja con una señal que es bien modelada por un proceso *AR*, las ecuaciones dadas en (2.17) se cumplirán aproximadamente. Si se sustituyen en (2.29) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (k_k^f)_s &= \frac{\langle x(n-k) | e_{k-1}^f(n) \rangle_s}{\langle x(n-k) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_s} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1}(i) c_x^4(s-i, s-k, 0)}{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) c_x^4(s+i, s-k, 0)} \quad s=0, \dots, k-1 \\
 (k_k^f)_k &= \frac{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^f(n) \rangle_k}{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_k} = \frac{\sum_{ij=0}^{k-1} a_{k-1}(i) b_{k-1}(j) c_x^4(j, k-i, 0)}{\sum_{ij=0}^{k-1} b_{k-1}(i) b_{k-1}(j) c_x^4(j, i, 0)}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Se observa como sólo en el caso $s=k$ aparecen los términos que forman parte del 1-D *slice* diagonal. Esto es sólo aproximado, pero se espera que en el caso $s \neq k$ los términos que aparecen en el 1-D *slice* diagonal contribuyan poco al valor final del coeficiente de reflexión, debido a que se cumplirán aproximadamente todas las ecuaciones que aparecen en (2.17). Es por esto, y por el hecho de que en un principio la restricción se había hecho sobre este 1-D *slice*, por lo que se tomará como expresión del coeficiente de reflexión sólo aquella en la que los cumulantes del 1-D *slice* diagonal contribuyan al valor final del coeficiente de una manera significativa; es decir, las expresiones que aparecen en (2.28) para el coeficiente de reflexión se restringirán únicamente a $s=k$. En un principio esta elección podría ser tan buena como cualquier otra, pero como la relación entre coeficientes de predicción lineal y de correlación nació de la restricción al 1-D *slice* diagonal en (2.17), en principio parece adecuada.

Esta elección también se apoya en otros dos hechos: en primer lugar los cumulantes pertenecientes al 1-D *slice* diagonal poseen mejor estadística que el resto, al permitir un mayor número de datos en su estimación, lo que será más importante a medida que disminuye el número de datos disponibles en la estimación de los cumulantes. En segundo lugar, el valor absoluto de los cumulantes suele disminuir, en la mayoría de los casos, al aumentar el valor de la diferencia entre los retardos temporales de argumenteos de estos cumulantes, produciendo que el valor relativo de los errores de estimación respecto del de los cumulantes sea mayor. Es fácil ver que, para los 1-D *slices* no diagonales, la diferencia de los retardos temporales implicados es mayor que para el 1-D *slice* diagonales. Todo esto hace que el 1-D *slice* que se estime con mayor eficacia sea el diagonal, de forma que el coeficiente de reflexión obtenido mediante esta elección debe ser también el que mejor comportamiento estadístico presente, de todas las posibles elecciones en (2.29).

Tras el anterior razonamiento, se consigue finalmente una expresión que determine el

coeficiente de predicción lineal:

$$k_k^f = - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^f(n) \rangle_k}{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_k} = - \frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i) b_{k-1}(j) c_x^4(j, k-i, 0)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} b_{k-1}(i) b_{k-1}(j) c_x^4(j, i, 0)}. \quad (2.31)$$

Todo el anterior desarrollo se puede realizar para el coeficiente de orden k hacia delante, obteniéndose:

$$k_k^b = - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1}(i) \langle x(n+k-i) | e_{k-1}^b(n) \rangle_{-k}}{\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1}(i) \langle x(n+k-i) | e_{k-1}^f(n+k) \rangle_{-k}} = - \frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i) b_{k-1}(j) c_x^4(-i, j-k, 0)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i) a_{k-1}(j) c_x^4(-j, -i, 0)}. \quad (2.32)$$

Estas dos expresiones, junto con las relaciones de recurrencia en el orden de los coeficientes de predicción lineal dadas en (2.25) y en (2.26) y la inicialización, que resulta de especificar los valores iniciales $a_0(0)=b_0(0)=1$, cierran el ciclo recursivo y constituyen el método de estimación triespectral RCM. Se puede ver como, cuando se aplica el método de estimación RCM a una señal, se obtienen los coeficientes de estimación lineal hacia delante y hacia atrás óptimos desde orden uno hasta orden p . A partir de estos coeficientes es sencillo construir los poliespectros normalizados que resultan de modelar la señal con estimaciones lineales de ordenes entre uno hasta orden p , sin más que utilizar (2.9).

No sólo resulta interesante una comparación entre las estimaciones que se obtienen con el algoritmo de Levinson y con el algoritmo RCM, sino que también es interesante dar un número indicativo, aunque sea aproximado, del número de operaciones necesarias para llevar a cabo cada uno de los métodos, con el fin de dar una idea de la velocidad que con la que se pueden implementar en la práctica.

En la resolución del sistema de ecuaciones, es decir, una vez estimados los cumulantes, el algoritmo de Levinson necesita del orden de $2p^2$ operaciones para resolver [GOL83], mientras en el algoritmo RCM son necesarias p^3 operaciones para obtener los coeficientes de predicción lineal. Sin embargo, el mayor esfuerzo de cálculo reside en la estimación de los cumulantes, debido a que para obtener estimaciones aceptables el número de datos de una señal N debe ser relativamente elevado.

Si se trabaja con una señal de longitud N , se necesitan hacer del orden de $14Np^2$ operaciones para obtener los coeficientes de predicción lineal hasta orden p con el algoritmo RCM. Esto se debe a que es necesaria la construcción de $2p(p-1)-1$ cumulantes en el desarrollo del algoritmo y cada cumulante necesita de $7N$ operaciones para su estimación, al suponerse procesos de media nula. Se observa como, efectivamente, el número de operaciones necesarias para la estimación de los cumulantes es muy superior a las necesarias para la resolución del sistema de ecuaciones lineales, ya que en todas las situaciones prácticas en las

que se puede desarrollar una estimación triespectral $N \gg p$. Por otro lado el algoritmo de Levinson construye $2p+1$ cumulantes en su desarrollo por lo que necesita del orden de $14Np$ operaciones en la construcción del sistema de ecuaciones, otra vez muy superior a las p^2 operaciones necesarias en la resolución del sistema una vez construido.

Este comportamiento será general, es decir, tanto en este como en los demás algoritmos que se desarrollarán el orden de magnitud de las operaciones necesarias para desarrollar el método está dominado por el número de cumulantes que se han de calcular, más que por el número de operaciones necesarias en la resolución del sistema de ecuaciones una vez construido.

El resultado es que el algoritmo RCM resulta significativamente más lento que el Levinson, al necesitar estimar un mayor número de cumulantes. Por tanto, en el desarrollo del algoritmo RCM se ha buscado una mejora en el comportamiento respecto del algoritmo de Levinson (mejora que habrá que comprobar en el apartado de resultados), pero se ha pagado el precio de una menor rapidez en la implementación.

Algoritmo RCM.

Inicialización del proceso.

- $a_0(0)=1$ y $b_0(0)=1$

Orden k : recursión.

- Cálculo de momentos de orden cuatro:

$$m_{4,x}^k(-r,-t,0) = m_{4,x}^k(-t,-r,0) = \frac{N-k+1}{N-k} \left(m_{4,x}^{k-1}(-r,-t,0) - x(k-r)x(k-t)x(k)x(k) \right) \quad r \leq t; r=0,\dots,k-1; t=0,\dots,k-1$$

$$m_{4,x}^k(-r,-k,0) = m_{4,x}^k(-k,-r,0) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N x(n-r)x(n-k)x(n)x(n) \quad r=0,\dots,k$$

$$m_{4,x}^k(r,t,0) = m_{4,x}^k(t,r,0) = \frac{N-k+1}{N-k} \left(m_{4,x}^{k-1}(r,t,0) - x(k+r)x(k+t)x(k)x(k) \right) \quad r \leq t; r=0,\dots,k-1; t=0,\dots,k-1$$

$$m_{4,x}^k(r,k,0) = m_{4,x}^k(k,r,0) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} x(n+r)x(n+k)x(n)x(n) \quad r=0,\dots,k$$

- Cálculo de momentos de orden dos:

$$m_{2,x}^k(r) = m_{2,x}^k(-r) = \frac{N-k+1}{N-k} \left(m_{2,x}^{k-1}(r) - x(k-r)x(k) \right) \quad r=0,\dots,k-1$$

$$m_{2,x}^k(k) = m_{2,x}^k(-k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N x(n-k)x(n)$$

- Cálculo de cumulantes a partir de los momentos, ecuación (1.31).
- Cálculo de los coeficientes de reflexión:

$$k_k^f = - \frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i)b_{k-1}(j)c_{4,k}^x(j,k-i,0)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} b_{k-1}(i)b_{k-1}(j)c_{4,k}^x(j,i,0)} \quad \text{y} \quad k_k^b = - \frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i)b_{k-1}(j)c_{4,k}^x(j-k,-i,0)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i)a_{k-1}(j)c_{4,k}^x(-j,-i,0)}$$

- Cálculo de los coeficientes de predicción lineal de orden k :

$$\begin{cases} a_k(k) = k_k^f \\ a_k(i) = a_{k-1}(i) + k_k^f b_{k-1}(k-i) \quad i=1,\dots,k-1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} b_k(k) = k_k^b \\ b_k(i) = b_{k-1}(i) + k_k^b a_{k-1}(k-i) \quad i=1,\dots,k-1 \end{cases}$$

Cálculo del triespectro.

$$T_x^k(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{A_k(\omega_1)A_k(\omega_2)A_k(\omega_3)A_k(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}$$

donde $A_k(\omega)$ es la transformada discreta de Fourier del conjunto de coeficientes $\{a_k(i)\}_{i=1,\dots,k}$.

En el cuadro anterior se presenta explícitamente el algoritmo *RCM*, para una señal $x(n)$ de longitud N . Por supuesto al esquema indicado se le pueden añadir cualquier herramienta utilizada en la estimación dentro del procesado de señales, como segmentación, ventaneado, suavizado, etc.

c) Método Geométrico (GM).

El GM es un método de estimación AR recursivo en el orden del modelo AR y en su deducción se ha seguido el mismo razonamiento desarrollado en [MAR87] para construir el algoritmo Geométrico a partir del algoritmo de Burg, en segundo orden. La idea es seguir un esquema similar al desarrollado en el algoritmo RCM, pero, en el paso k , una vez se calcula el coeficiente de reflexión de orden k , en vez de calcular los coeficientes de predicción lineal como se hace en el método RCM, se calculan directamente los errores de predicción lineal de orden k . Hecho esto se calcula el coeficiente de reflexión de orden $k+1$ utilizando los errores de predicción lineal de orden k , y así sucesivamente. Es decir, en el paso k , se trabajara con los coeficientes de reflexión y con los errores de predicción lineal. Los coeficientes de predicción lineal se calculan en un último paso, una vez se han calculado todos los coeficientes de reflexión. En este método no se utilizarán estos coeficientes de predicción lineal y su fórmula recursiva para el cálculo de los coeficientes de reflexión, sino que serán los errores de predicción lineal, y la expresión recursiva de estos, los que jueguen ese papel.

La deducción de este método es totalmente idéntica a la seguida en para el método RCM, hasta la definición de los coeficientes de reflexión, dada en (2.31) y (2.32). En este algoritmo se calculan estos coeficientes reflexión haciendo uso de los errores de predicción lineal hacia delante y hacia atrás de orden $k-1$. Teniendo en cuenta las definiciones de estos coeficientes y las de los errores de predicción hacia delante y hacia tras (2.13), la expresión de los coeficientes de reflexión de orden k queda:

$$\begin{aligned}
 k_k^f &= -\frac{\langle e_{k-1}^b(n-k) | e_{k-1}^f(n) \rangle_k}{\langle e_{k-1}^b(n-k) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_k} = \frac{\text{Cum}(e_{k-1}^b(n-k), e_{k-1}^f(n), x(n-k), x(n-k))}{\text{Cum}(e_{k-1}^b(n-k), e_{k-1}^b(n-k), x(n-k), x(n-k))} \\
 k_k^b &= -\frac{\langle e_{k-1}^f(n+k) | e_{k-1}^b(n) \rangle_{-k}}{\langle e_{k-1}^f(n+k) | e_{k-1}^f(n-k) \rangle_{-k}} = \frac{\text{Cum}(e_{k-1}^f(n+k), e_{k-1}^b(n), x(n+k), x(n+k))}{\text{Cum}(e_{k-1}^f(n+k), e_{k-1}^f(n+k), x(n+k), x(n+k))}
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

siendo los errores de predicción lineal de orden $k-1$ conocidos.

Es necesario calcular los errores de predicción lineal en el paso k , conocidos los errores de predicción lineal en el paso $k-1$ y los coeficientes de reflexión en el paso k , que vienen dados de la expresión anterior, para que sea posible trabajar recursivamente. Esta expresión recursiva para los errores de predicción lineal ya ha sido calcula y viene dada por (2.27). Lo que falta para cerrar el ciclo recursivo, que de como fruto los coeficientes de reflexión desde orden uno hasta orden p , es inicializarlo, es decir, especificar cuanto deben valer los errores de predicción lineal de orden cero. De la definición de estos errores es fácil ver que se cumple $e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n)$.

La fórmula recursiva de los errores de predicción lineal (2.27), la expresión de los coeficientes de reflexión (2.33) y el valor de los errores de predicción lineal de orden cero, forman el algoritmo GM.

Para poder calcular los poliespectros es necesario, sin embargo, los coeficientes de predicción lineal. Estos son fáciles de conseguir una vez concluido el ciclo recursivo, ya que como resultado de este ciclo se obtienen todos los coeficientes de reflexión hacia delante y hacia atrás desde orden 1 hasta orden p ; por lo que basta con aplicar (2.25) y (2.26) para obtener los coeficientes de predicción lineal. Una vez hecho esto, los poliespectros se calculan como siempre utilizando (2.9).

Como se dijo anteriormente, en el número de operaciones necesarias para implementar el método GM va a estar dominado por número de operaciones necesarias en la construcción de los cumulantes. Si se trabaja con una señal de N datos, son necesarias del orden de $14Np$

Algoritmo GM.

Inicialización del proceso.

- $e_0^f(n) = e_0^b(n) = x(n)$

Orden k : recursión.

- Cálculo de los momentos desde orden cuatro:

$$M_4(y(n), z(n))_k = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N y(n)z(n)x(n-k)x(n-k)$$

$$M_5(y(n), z(n))_{-k} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} y(n)z(n)x(n+k)x(n+k)$$

donde $y(n)$ y $z(n)$ pueden ser $e_{k-1}^f(n)$ o $e_{k-1}^b(n-k)$ según interese.

- Cálculo de los momentos de orden dos:

$$M_2(y(n), z(n)) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N y(n)z(n) \quad \text{ó} \quad M_2(y(n), z(n)) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} y(n)z(n)$$

donde $y(n)$ y $z(n)$ pueden ser $e_{k-1}^f(n+k)$, $e_{k-1}^b(n)$, $x(n+k)$ o $x(n-k)$ según interese.

- Cálculo de cumulantes a partir de los momentos, ecuación (1.31).
- Cálculo de los coeficientes de reflexión:

$$k_k^f = -\frac{\text{Cum}(e_{k-1}^b(n-k), e_{k-1}^f(n), x(n-k), x(n-k))}{\text{Cum}(e_{k-1}^b(n-k), e_{k-1}^b(n-k), x(n-k), x(n-k))} \quad \text{y} \quad k_k^b = -\frac{\text{Cum}(e_{k-1}^f(n+k), e_{k-1}^b(n), x(n+k), x(n+k))}{\text{Cum}(e_{k-1}^f(n+k), e_{k-1}^f(n+k), x(n+k), x(n+k))}$$

- Cálculo de los errores de predicción lineal necesarios en el paso siguiente (salvo en el caso de $k=p$):

$$e_k^f(n) = e_{k-1}^f(n) + k_k^f e_{k-1}^b(n-k) \quad n=1, \dots, N$$

$$e_k^b(n) = e_{k-1}^b(n) + k_k^b e_{k-1}^f(n+k) \quad n=1, \dots, N-k$$

Cálculo del triespectro.

- Cálculo recursivo de los coeficientes de predicción lineal. Para orden k :

$$\begin{cases} a_k(k) = k_k^f \\ a_k(i) = a_{k-1}(i) + k_k^f b_{k-1}(k-i) \quad i=1, \dots, k-1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} b_k(k) = k_k^b \\ b_k(i) = b_{k-1}(i) + k_k^b a_{k-1}(k-i) \quad i=1, \dots, k-1 \end{cases}$$

- Cálculo del triespectro:

$$T_{x^k}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{A_k(\omega_1)A_k(\omega_2)A_k(\omega_3)A_k^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}$$

donde $A_k(\omega)$ es la transformada discreta de Fourier del conjunto de coeficientes $\{a_k(i)\}_{i=1, \dots, k}$.

operaciones para obtener el conjunto de coeficientes de predicción lineal. En este caso tanto el número de cumulantes que hay que calcular (son $4p$), como el número de operaciones necesarias en la resolución propiamente dicha del sistema de ecuaciones (del orden de p^2), son de un orden similar a las que se necesitan en el algoritmo de Levinson. Esto produce que una pequeña mejora en cuanto a estimación de los parámetros justificaría la utilización del algoritmo de geométrico frente al de Levinson. Puede verse como, siguiendo un esquema muy similar al desarrollado por el RCM, el número de operaciones necesarias para llevarlo a cabo es significativamente menor para el método GM.

Para finalizar este apartado, en el cuadro anterior se desarrolla explícitamente el algoritmo GM para una señal $x(n)$ de longitud N .

II.4.2. Métodos no recursivos.

En esta sección se presentan distintos métodos de estimación AR que carecen de la propiedad de recursividad en el orden del modelo AR. Esto se debe a que los sistemas de ecuaciones que van a resolver los distintos métodos dejan de tener estructura Toeplitz, pudiendo ser sistemas tanto determinados como sobredeterminados. Aunque presentan el inconveniente de no ser recursivos, y por ello más lentos, poseen, por otro lado, una mejor resolución, menor varianza y mejor comportamiento frente al ruido. Los métodos de este tipo que se van a estudiar son tres: el métodos LS o Método de Mínimos Cuadrados y los métodos CFOM simple y CFOM complejo.

a) Método LS o de Mínimos Cuadrados.

Como se puso de manifiesto en el apartado II.3, en (2.10) aparecen los sistemas de ecuaciones que se pueden imponer que cumplan los coeficientes AR. Dependiendo de las elecciones que se hagan sobre los retardos temporales, se tendrá un sistema de ecuaciones u otro y con ello un método de estimación u otro. En el apartado anterior se tomo como elección de los retardos temporales los correspondientes únicamente al *slice* diagonal, dando lugar al método de Levinson y, posteriormente, a los métodos RCM y GM. El sistema de ecuaciones es el dado en (2.18), en su forma matricial quedaría:

$$\begin{pmatrix} c_x^4(0,0,0) & \dots & c_x^4(1-p,0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x^4(p-1,0,0) & \dots & c_x^4(0,0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(p) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_x^4(1,0,0) \\ \vdots \\ c_x^4(p,0,0) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Como ya se sabe, este sistema de ecuaciones posee una estructura Toeplitz y es posible resolverlo mediante el algoritmo de Levinson. En el método LS, la elección de los retardos temporales no se va a restringir al 1-D *slice* diagonal, sino se utilizarán todos los 1-D *slice* que resultan de hacer $\tau_3 = \tau_1 = r$ y $\tau_2 = s$, con $0 \leq r \leq p$ y $(r-p) \leq s \leq r$ en la expresión (2.10), siendo p el orden del modelo AR. Haciendo esto, el sistema de ecuaciones (2.10) queda restringido a:

$$\sum_{i=0}^p a(i)c_x^4(r-i,r-s,0)=\gamma_w^4\delta(s)\delta(r) \text{ con } r=0,\dots,p \text{ y } s\leq r, \quad (2.35)$$

donde claramente aparecen todos los 1-D *slice* desde $r-s=0$ hasta $r-s=p$. En forma matricial, eliminando la ecuación en la que aparece γ_w^4 y reagrupando por 1-D *slices*, el anterior sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{pmatrix} c_x^4(0,0,0) & \dots & c_x^4(1-p,0,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_x^4(p-1,0,0) & \dots & c_x^4(0,0,0) \\ & \vdots & \\ c_x^4(0,p,0) & \dots & c_x^4(1-p,p,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_x^4(p-1,p,0) & \dots & c_x^4(0,p,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(p) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_x^4(1,0,0) \\ \vdots \\ c_x^4(p,0,0) \\ \vdots \\ c_x^4(1,p,0) \\ \vdots \\ c_x^4(p,p,0) \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Se observa como el sistema de ecuaciones es sobredeterminado, por lo tanto hay que recurrir al método de los mínimos cuadrados para poder obtener los coeficientes del sistema que son el conjunto de coeficientes de predicción lineal. En esto precisamente en lo que consiste el método LS, en la construcción y resolución del sistema de ecuaciones lineales dado en (2.36). En principio, las elecciones del sistema de ecuaciones a resolver pueden ser muchas. La elección que se ha hecho en el desarrollo del método LS, es debida a que es la más inmediata, una vez que ya se ha tomado el 1-D *slice* diagonal en los métodos recursivos, y se quiere introducir más información en un nuevo método. A vez se puede demostrar como el sistema de ecuaciones (2.36) es un sistema de ecuaciones completo, siempre que el proceso sea AR; y resulta se el sistema de menor tamaño que se ha demostrado que posea esta propiedad [GIA90].

En este método requiere calcular $(2p+1)(p+1)$ cumulantes, lo que implica un número de operaciones del orden de $14Np^2$, ya que cada cumulante requiere del orden de $7N$ operaciones para estimarse a partir de una señal de longitud N . Aunque la resolución del sistema una vez se ha construido es del orden de p^4 , para una señal de tamaño usual, la construcción de los cumulantes requiere una cantidad de operaciones bastante superior a las necesarias en la resolución. Comparando el número de operaciones que requiere este algoritmo con los anteriores se observa que el método LS requiere un número de operaciones similar al más costoso de los métodos recursivos, que es el RCM, y un orden de magnitud de operaciones más que los otros dos, el algoritmo de Levinson y el GM.

b) Método CFOM simple (*Constrained Fourth -Order Mean*).

Hasta este punto, al realizar la estimación de un cumulante, en este trabajo se ha

supuesto siempre que la señal es estacionaria, de forma que :

$$\text{Cum}(x(n-i), x(n-k), x(n-k), x(n-k)) = \text{Cum}(x(n+k-i)x(n)x(n)x(n)) = c_x^4(k-i, 0, 0) \quad (2.37)$$

Esto proporciona una gran cantidad de relaciones de simetría, lo que permite disminuir el número de cumulantes que deben ser estimados en la implementación de los métodos. Utilizando la estacionaridad que se ha supuesto en la señal resulta, por ejemplo, que en la matriz de los coeficientes del sistema dado en (2.18) sólo se tienen $2p+1$ cumulantes distintos, en vez de los p^2 que habría si no se utilizaran las relaciones de simetría. En el método CFOM, tanto simple como complejo, no se le impondrá esta condición de estacionaridad sobre la señal, por lo que se tendrá:

$$\text{Cum}(x(n-i), x(n-k), x(n-k), x(n-k)) \neq \text{Cum}(x(n+k-i)x(n)x(n)x(n)) \quad (2.38)$$

no apareciendo ninguna relación de simetría, salvo la resultante de permutar los argumentos de los cumulantes.

Para desarrollar el método CFOM en su versión simple se parte de las expresiones (2.5) y (2.6), que define la señal AR. Sobre esta definición se aplica tres veces $x(n-k)$, con k positivo, y se toman cumulantes. Haciendo esto, teniendo en cuenta la linealidad que presentan los cumulantes y las suposiciones hechas sobre el ruido, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Cum} \left(\sum_{i=0}^p a(i)x(n-i), x(n-k), x(n-k), x(n-k) \right) = \\ \sum_{i=0}^p a(i) \text{Cum}(x(n-i), x(n-k), x(n-k), x(n-k)) = \gamma_w^4 \delta(i) \delta(k) \end{aligned} \quad (2.39)$$

cumulantes que dependerán tanto de i como de k , y en los que no se podrá utilizar la expresión (2.37), que hace uso de la estacionaridad de la señal. Se define:

$$C_x(i, k) \equiv \text{Cum}(x(n-i), x(n-k), x(n-k), x(n-k)) \quad (2.40)$$

que para una señal de longitud N resulta:

$$C_x(i, k) \equiv \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-k)^3 - 3 \frac{1}{(N-p)^2} \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-k) \sum_{n=p+1}^N x(n-k)^2 \quad (2.41)$$

Con estas definiciones se construye el sistema de ecuaciones que, en este método, deben cumplir los coeficientes AR:

$$\sum_{i=1}^p a(i)C_x(i,k) = \gamma_w^4 \delta(i)\delta(k); \text{ con } k=0, \dots, p \quad (2.42)$$

o en su forma matricial, reducida a $k=1, \dots, p$ (subsistema que permite la obtención de los parámetros *AR*):

$$\begin{pmatrix} C_x(1,1) & \dots & C_x(p,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_x(1,p) & \dots & C_x(p,p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(p) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_x(0,1) \\ \vdots \\ C_x(0,p) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Se puede observar como la matriz de los coeficientes del anterior sistema de ecuaciones no posee estructura Toeplitz, por lo que no se pueden aplicar el algoritmo de Levinson en su resolución. El sistema presentado en (2.42) y (2.43) son la versión no estacionaria del sistema presentado en (2.18) y (2.34), sistema que es la base del método de estimación Levinson y del resto de los métodos recursivos.

En los métodos CFOM el número de cumulantes a estimar será mayor, al no aparecer relaciones de simetría producidas por la estacionaridad en los cumulantes, por los que serán más lentos que los métodos que resulten de la resolución del mismo sistema de ecuaciones construido teniendo en cuenta la hipótesis de estacionaridad. Por otro lado, estos métodos utilizan una mayor cantidad de información y no hace suposiciones al comportamiento estadístico de la señal, comportamiento estadístico que en realidad, para una señal concreta, nunca será perfecto. La utilidad de este tipo de métodos queda postergada al apartado de resultados, en el que se podrá comprobar si es adecuado actuar siguiendo este esquema en algún supuesto práctico.

El método CFOM simple consistirá en la construcción del sistema de ecuaciones determinado (2.43) y la resolución de este por alguno de los métodos estándares, como el método de Gauss. El número de cumulantes que se han de estimar es p^2 , por lo que el número de operaciones necesarias en la construcción del sistema de ecuaciones será de $7Np^2$. En la resolución del sistema de ecuaciones una vez construido se requieren del orden de p^2 operaciones, que como se puede apreciar es significativamente inferior al requerido en la construcción. Se puede apreciar como requiere un número de operaciones del orden de la mitad de los requeridos por el método LS y RCM, y un orden de magnitud superior a los otros métodos recursivos.

c) Método CFOM complejo.

Esta versión del algoritmo CFOM es completamente similar al anterior, salvo en el hecho de construir un sistema de ecuaciones sobredeterminado, el cual es resuelto mediante mínimos cuadrados. Se parte de las mismas expresiones (2.5) y (2.6), como en el CFOM simple, pero se aplica $x(n-r)$ un vez y $x(n-k)$ dos veces, con k y r positivos, y se toma cumulantes. De esta manera se llega a la expresión:

$$\text{Cum}\left(\sum_{i=0}^p a(i)x(n-i), x(n-r), x(n-k), x(n-k)\right) = \sum_{i=0}^p a(i)\text{Cum}(x(n-i), x(n-r), x(n-k), x(n-k)) = \gamma_w^4 \delta(i)\delta(r)\delta(k) \quad (2.44)$$

Al igual que anteriormente, en este caso no se utiliza ninguna relación de simetría proveniente de la estacionaridad, por lo que se define:

$$C_x(i, r, k) \equiv \text{Cum}(x(n-i), x(n-r), x(n-k), x(n-k)) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-r)x(n-k)^2 - 2 \frac{1}{(N-p)^2} \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-k) \sum_{n=p+1}^N x(n-r)x(n-k) - \frac{1}{(N-p)^2} \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-r) \sum_{n=p+1}^N x(n-k)^2 \quad (2.45)$$

donde se ha particularizado la definición para una señal de N datos. Con esto el sistema de ecuaciones que deben cumplir los coeficientes AR, en este método, es:

$$\sum_{i=0}^p a(i)C_x(i, r, k) = \gamma_w^4 \delta(i)\delta(r)\delta(k); \text{ con } r=0, \dots, p \text{ y } k=0, \dots, p \quad (2.46)$$

y, restringiéndose al subsistema con $r=0, \dots, p$ y $k=1, \dots, p$, matricialmente queda:

$$\begin{pmatrix} C_x(1,0,1) & \dots & C_x(p,0,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_x(1,0,p) & \dots & C_x(p,0,p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_x(1,p,1) & \dots & C_x(p,p,1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_x(1,p,p) & \dots & C_x(p,p,p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(p) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} C_x(0,0,1) \\ \vdots \\ C_x(0,1,p) \\ \vdots \\ C_x(0,p,1) \\ \vdots \\ C_x(0,p,p) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Los sistemas de ecuaciones (2.46) y (2.47) son la versión no estacionaria de los sistemas de ecuaciones (2.35) y (2.36), sistemas que son la base del método LS.

El método CFOM complejo consiste, por tanto, en la construcción del sistema de ecuaciones dado en (2.47) y en su resolución por el método de mínimos cuadrados, al ser el sistema sobredeterminado. El sistema de ecuaciones consta de $p(p+1)^2$ cumulantes, por lo que el número de operaciones necesarias en la construcción de este sistema será de $7Np^3$, lo que

hace que sea, con diferencia de casi un orden de magnitud, el método que mayor número de operaciones necesita. Sólo una gran mejora de estimación de los parámetros respecto a todos los demás justificará su utilización en situaciones en las que el tiempo empleado en el desarrollo de los métodos sea un factor importante. El número de operaciones necesarias para solucionar el sistema de ecuaciones (2.46) un vez construido es de p^4 , que vuelve a ser sensiblemente inferior al número de operaciones necesarias en la fase de construcción, por lo que sólo una gran mejora de estimación de los parámetros respecto a todos los demás justificará su utilización.

II.5. CONCLUSIONES

Este capítulo se ha centrado en el desarrollo de métodos lineales de estimación paramétrica AR del triespectro. El trabajo realizado ha sido el siguiente.

En primer lugar se han construido las ecuaciones recursivas de cuarto, a partir de las cuales se desarrollan todos los métodos paramétricos AR lineales de estimación triespectral. Este conjunto de ecuaciones también se ha deducido siguiendo el esquema de predicción lineal, lo que luego se ha utilizado en el desarrollo de algunos métodos.

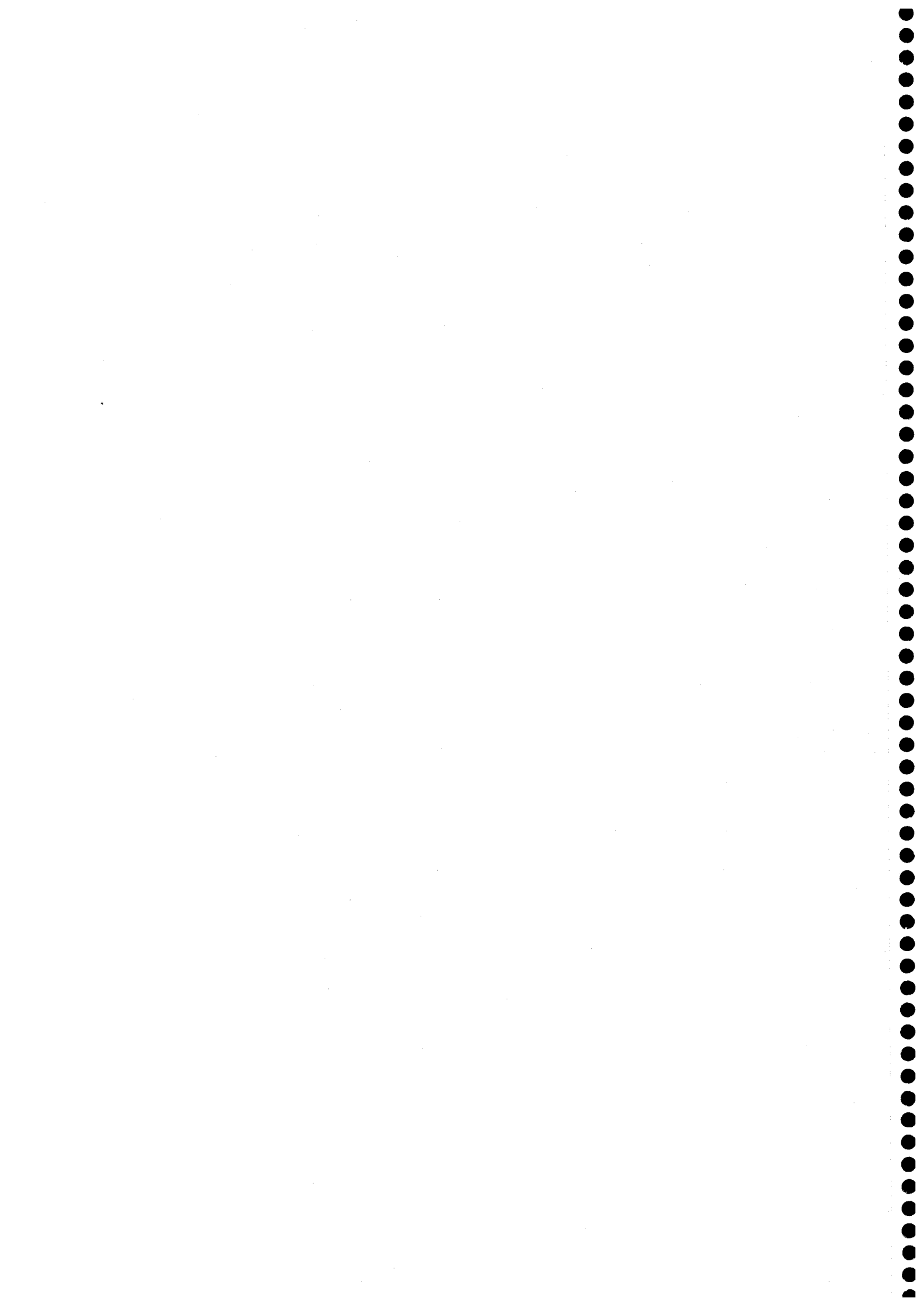
Los métodos se han dividido en dos tipos: los recursivos en el orden del modelo AR y los no recursivos. Los primeros proporcionan los coeficientes de predicción lineal desde orden uno hasta el orden deseado, lo que será interesante en el caso genérico de desconocer el orden óptimo AR que modela la señal con la que se trabaja.

El primer método AR recursivo en el orden ha sido la utilización de un algoritmo estándar de resolución rápida de sistemas de ecuaciones conocido como algoritmo de Levinson. El método así construido se ha llamado método de Levinson. Este método ya se ha utilizado en las estadísticas de ordenes inferiores, presentando deficiencias frente a errores de estimación. En la búsqueda de métodos recursivos más robustos se han desarrollado los métodos RCM y GM. En ambos casos se ha trabajado en el esquema de predicción lineal y han surgido como la búsqueda de la predicción lineal óptima de una señal arbitraria. Para esto ha sido necesario definir un funciones error que llevasen información de cuarto orden de la señal y minimizar estas funciones para conseguir las predicciones lineales óptimas.

En los métodos no recursivos, el primero ha sido la resolución de un sistema sobredeterminado de ecuaciones recursivas de cuarto orden, mediante el método de mínimos cuadrados. A este método se le ha llamada método LS. Junto a este se han desarrollado otros dos métodos, el método CFOM simple y el método CFOM complejo. La construcción de ambos métodos se ha llevado a cabo sin tener en cuenta las simetrías que los cumulantes de cuarto orden poseen, debido a la estacionaridad que se le supone a la señal. A partir de esto se construyen dos sistemas de ecuaciones, uno determinado y otro sobredeterminado, que son las bases de estos métodos.

CAPÍTULO III

MÉTODOS PARAMÉTRICOS AUTORREGRESIVOS DE ESTIMACIÓN TRIESPECTRAL: SIMULACIONES Y RESULTADOS



III.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se comparan los distintos métodos AR de estimación trispectral deducidos en el capítulo anterior. Para ello se estudia su comportamiento para diversas señales en función del nivel de ruido y del grado de segmentación que se tome. Con esto se persigue poder deducir estrategias a seguir para poder conseguir una óptima estimación con cada tipo de señal.

También se comparan los resultados obtenidos mediante estos métodos de cuarto orden con métodos clásicos de segundo orden. El interés de realizar esta comparación se debe, como se dijo en el apartado anterior, a que los modelos AR causales, como son los que se tratan en esta memoria, se pueden estimar mediante métodos de segundo orden, siempre que no haya ruido o que este se conozca. Sin embargo, aun en presencia de ruido desconocido, como es la situación con la que se va a trabajar, debe estudiarse si, efectivamente, los errores sistemáticos que aparecen en los resultados obtenidos mediante estadística de segundo orden, debido a la presencia de ruido, son más importantes que los errores aleatorios de estimación que aparecen en los resultados de los métodos de cuarto orden. Por supuesto, en los métodos de segundo orden también existen errores de estimación, pero estos se consideran despreciables frente a los errores de estimación que aparecen en los métodos de cuarto orden [CHA94]. Hay que recordar que el comportamiento estadístico empeora notablemente al ir aumentando el orden de la estadística con la que se trabaja, lo que representa una motivación importante para la realización del estudio comparativo que se va a llevar a cabo en este capítulo.

Una característica de las señales que influirá fuertemente en el comportamiento de los distintos métodos será la posición de los polos de sus funciones de transferencia $H(z)$, en el plano complejo. De esta forma, se diferencian entre procesos de banda ancha y procesos de banda estrecha. Los primeros presentan todos sus polos lejos del círculo unidad en el plano complejo (pero dentro de este para que sean procesos causales). Esto hace que su espectro de potencia presente un aspecto suave y con importante contribución energética a lo largo de un amplio espectro de frecuencia. Por el contrario, los procesos de banda estrecha poseen polos cerca del círculo unidad, lo que produce picos en su espectro de potencia, es decir, la mayor parte de su contribución energética en frecuencia está localizada en un pequeño intervalo. El diferente comportamiento de métodos frente a estos dos tipos de señales aparece ya en la estadística de segundo orden, y es este hecho el que produce la necesidad, a priori, de diferenciar el estudio en ambos tipos de señales.

Tal y como se presentó en (2.5) y (2.6), las señales con las que se va a tratar son procesos AR, con *pdf* simétrica, y contaminados con ruido aditivo gaussiano coloreado, de contenido espectral desconocido:

$$x(n) = y(n) + u(n) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^p a(i)y(n-i) = w(n) \quad (3.1)$$

donde $w(n)$ es un proceso i.i.d. simétrico y $u(n)$ es el ruido aditivo gaussiano coloreado. En concreto, a lo largo de este capítulo $w(n)$ poseerá un *pdf* laplaciana de media nula, que ya fue

presentada en el apartado I.2.2. donde se aprecia que es simétrica.

Para el ruido aditivo gaussiano coloreado se han construido dos tipos distintos, con el fin de comprobar la sensibilidad de los métodos a un cambio en el modelo ruidoso. Estos dos tipos se han construido haciendo pasar ruido gaussiano blanco por dos filtros distintos. El primero es un filtro ARMA, usado en [ZHA94], con parámetros AR [1, -2.2, 1.77, -0.5] y parámetros MA [1, -1.25]. El segundo es un filtro MA, utilizado en [PAP90], de coeficientes [0.5, 0.6, 0.07, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.0, 0.0, 0.5, 0.6, 0.07, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5].

En las figuras III.1. y III.2. se pueden ver los espectros de potencia de los dos filtros con los que se construye el ruido.

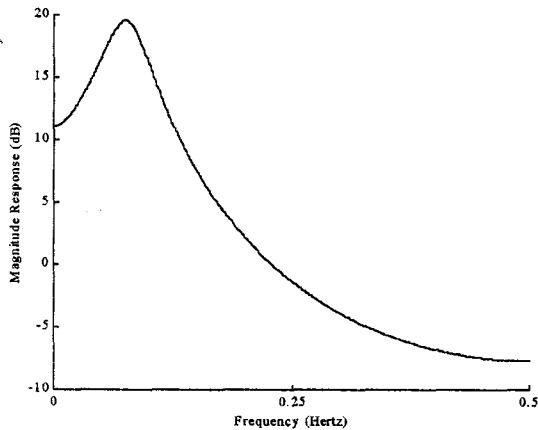


Figura 3.1. Espectro de potencia del ruido ARMA

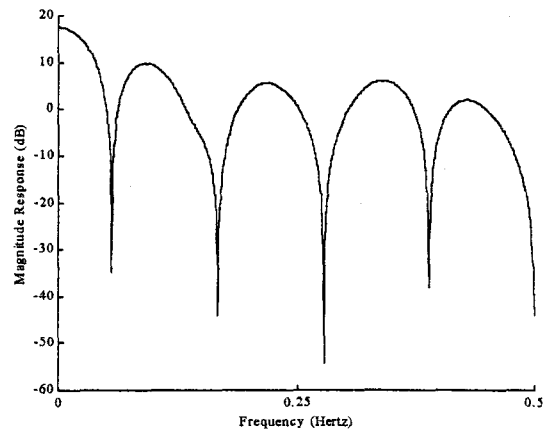


Figura 3.2. Espectro de potencia del ruido MA

El nivel de ruido que contamina la señal se suele caracteriza con un parámetro llamado *relación señal ruido* (SNR) que se define como:

$$SNR = 10 \log \frac{\sum_{n=1}^N y^2(n)}{\sum_{n=1}^N u^2(n)} \quad (3.2)$$

donde N es el número de datos de la señal. La SNR establece un valor cualitativo para la relación que existe entre las energías de la señal y del ruido aditivo. Se puede ver como a medida que aumenta el ruido, la SNR disminuye, de forma que, por ejemplo, una SNR que valga infinito implica la no existencia de ruido. Otro detalle a significar es que la SNR viene dada en decibelios, por lo que una disminución de una unidad en la SNR implica un aumento en la energía del ruido en un 26 %.

A los distintos procesos AR que se definan se les añadirá ruido aditivo gaussiano, que se colorea con alguno de los dos filtros definidos anteriormente. El nivel del ruido aditivo vendrá dado por el valor de la SNR. Una vez con la señal contaminada de ruido se procederá a aplicarle los distintos métodos, cuyo resultado será un conjunto de parámetros.

Para poder estudiar comparativamente los distintos métodos se debe especificar como se va a llevar a cabo tal comparación, es decir, hay que definir cual es la medida que indicará

cuando un método es mejor o proporciona mejores resultados que otro. Esta elección no es algo trivial. Se pueden definir distintos parámetros en la indicación de la calidad de un método dependiendo qué tipo de información se persiga en el análisis de la señal. Por ejemplo, como se apuntó en el capítulo anterior, en el análisis de voz mediante modelación AR, el modelo estima adecuadamente los picos pero no las zonas llanas. Si en este ejemplo se eligiese como parámetro que indique la calidad de un método la distancia entre el espectro verdadero y el estimado, los métodos AR darían mal resultado, ya que en la mayor parte del espectro no se reproduce la forma (las zonas llanas); en cambio si el parámetro se elige como la localización de los polos más cercanos al círculo unidad, que indicará la posición de los picos en el espectro, los métodos AR se presentarán como muy adecuados en esta estimación. En principio, se tomará como criterio de la calidad de una estimación lo que se definirá un error cuadrático medio (MSE) como:

$$\text{MSE} = \frac{\frac{1}{P} \sum_{i=1}^P (\hat{a}(i) - a(i))^2}{\sum_{i=1}^P a(i)^2} \quad (3.3)$$

donde $\{\hat{a}(i)\}_{i=1,\dots,P}$ es el conjunto de coeficientes AR estimados y $\{a(i)\}_{i=1,\dots,P}$ son los coeficientes verdaderos. El MSE lleva información sobre el sesgo y la varianza de los parámetros estimados, siendo posible que en algún caso exista la necesidad de distinguirlos, con el fin de estudiar independientemente las contribuciones de cada uno de estas dos funciones estadísticas al MSE, y obtener de esta forma una información más precisa del comportamiento estadístico de las estimaciones.

En el apartado dos se definen los procesos de banda ancha a los que se van a plicar los métodos. Con ellas se hace un estudio de cuarto orden en el que se comparan entre sí los diferentes métodos desarrollados en el capítulo II. Posteriormente se realiza un estudio de segundo orden de las mismas señales y se comparan estos resultados con los de segundo orden.

En el siguiente apartado se realiza el mismo procedimiento para las señales de banda estrecha. En este tipo de señales, una característica fundamental y de las que dependen fuertemente el comportamiento de los métodos será la distancia relativa entre los polos de la función de transferencia. De esta manera será necesario distinguir entre señales con polos cercano y lejanos entre sí, pero en ambos casos cercanos a la circunferencia unidad al estar tratando con señales de banda estrecha.

III.2. PROCESOS DE BANDA ANCHA

III.2.1. Definición de las señales.

En este apartado se tratará con señales AR de banda ancha, que, como se ha dicho en el anterior apartado, presentan todos los polos de su función de transferencia lejos del círculo unidad. El esquema de las señales con el que se va a trabajar está dado en (3.1), y van a ser

cuatro distintas; concretamente, los procesos AR serán de la forma:

$$y_k(n) = -\sum_{i=1}^k a(i)y_k(n-i) + v(n) \quad k=2, \dots, 5 \quad (3.4)$$

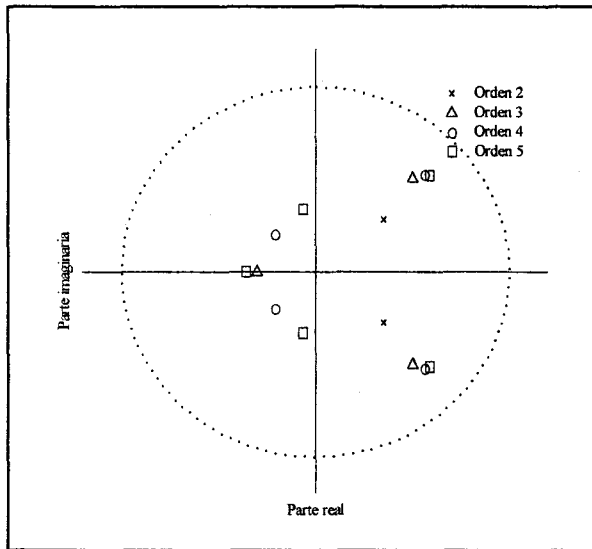


Figura 3.3. Distribución de polos de las funciones de transferencias de las señales de banda ancha.

donde $a(1)=-0.7$, $a(2)=0.2$, $a(3)=0.15$, $a(4)=0.05$, $a(5)=0.025$ y $v(n)$ es un proceso laplaciano i.i.d. de media nula. Se tienen así cuatro señales de ordenes distintos, una para cada k entre 2 y 5. Lo que aparece dibujado en la figura III.3. son los polos de las funciones de transferencia $H(z)$ de los distintos sistemas AR, que, por (2.4), no es otra cosa que $1/A(z)$, donde $A(z)$ es la transformada z del conjunto de coeficientes AR que se considere. Se puede observar como dichos polos quedan alejados del círculo unidad. Posteriormente se verá como el comportamiento de los distintos métodos dependerá fuertemente de la distancia de los polos del sistema a dicho círculo y también de la distancia que haya entre los distintos polos.

Tanto en el estudio de cuarto orden como en el de segundo orden que se van a desarrollar a continuación, en primer lugar, lo que se representa en las gráficas es el valor medio del MSE para 100 realizaciones distintas. Es decir, se genera una señal contaminada con ruido, se le aplican los distintos métodos, obteniéndose los consiguientes parámetros estimados; y se calcula el MSE para estos parámetros. Esta operación se realiza 100 veces y lo que se representa en las gráficas es el MSE medio para las 100 realizaciones.

III.2.2. Estudio de cuarto orden.

A partir de las señales definida con anterioridad, en este apartado se compara el comportamiento de los distintos métodos de estimación triespectral desarrollados a lo largo del capítulo II, en distintas situaciones de ruido, tanto de tipo como de intensidad, y para distinta segmentación de los datos.

Lo que se muestra en las figuras 3.4.-23. es el comportamiento del MSE de los distintos métodos en función de la SNR; para una segmentación dada; y para las cuatro señales dadas en (3.4), contaminadas con los ruidos aditivos definidos en la sección III.1.

El proceso de segmentación, que se explicará con detalle a continuación, es un método muy utilizado en procesamiento de señal que posee el efecto de disminuir la varianza de las estimaciones. Esta disminución conlleva habitualmente un aumento del sesgo de la estimación, por lo que es interesante estudiar como compiten ambos factores en el valor del MSE final. A su vez, en señales no ergódicas, como las que se estudiarán en el capítulo IV, es imprescindible

llevar a cabo una segmentación de los datos, en este caso en segmentos independientes, por lo que será interesante conocer el comportamiento de los métodos frente a este proceso de segmentación. El MSE representado, como ya se dijo, es la media de los MSE calculados para 100 realizaciones.

El procedimiento al calcular los parámetros estimados es el siguiente: Se parte de una realización del proceso AR, que consta de 4096 datos. Esta serie de datos se dividen en segmentos de tamaño N_s cada uno, a partir de los cuales se calculan los cumulantes en cada uno de los segmentos. A continuación se calcula la media de los cumulantes calculados en cada uno de los segmentos y finalmente se toma como valor estimado del cumulante de la señal a esta media. Con estos cumulantes medios se desarrollan los métodos de estimación AR, en los que se puede observar que estos cumulantes son los únicos datos necesarios para llevarlos a cabo, de los que se obtienen como resultado los coeficientes AR estimados. Posteriormente se calcula el MSE según (3.3) para cada método y se realiza esta operación para 100 realizaciones distintas de la señal, representando en las figuras la media de los MSE de esas 100 realizaciones.

Las distintas líneas que aparecen en las gráficas representan cada de los seis métodos de estimación AR desarrollados en el capítulo II. La escala en la que se representa el MSE es logarítmica con el fin de apreciar mejor los resultados. De estas figuras cabe señalar varios puntos:

a) Comportamiento general con la segmentación (N_s):

- Se observa para en todos los órdenes el MSE disminuye al aumentar la segmentación, en todos los métodos. Esta disminución es importante únicamente al pasar de $N_s=64$ a $N_s=128$, de forma que si se sigue aumentando la segmentación la mejora es inapreciable a partir de $N_s=512$.
- La diferencia entre los distintos métodos disminuye al aumentar N_s . Para $N_s=128$ y sobre todo para $N_s=64$ se aprecia una cierta diferencia entre el MSE proporcionado por los distintos métodos. Esta diferencia queda muy reducida en las figuras para $N_s=512$ o mayores.
- También se observa que los métodos se comportan mejor frente a la SNR al aumentar la segmentación, de manera que para $N_s=512$ y mayores se consigue un aumento suave del MSE al aumentar la SNR hasta SNR=2. Para N_s menores aparece un aumento brusco del MSE para SNR bastante mayores.
- Por último señalar que todos estos comportamientos con N_s se hacen más importantes a medida que aumenta el orden del modelo AR.

b) Comportamiento general frente a la SNR:

- Los distintos métodos presentan al principio un crecimiento suave del MSE a medida que aumenta la SNR. Este aumento suave se produce hasta SNR de 7 o 5 dB para N_s de 64 y 128 y SNR de 2 dB e incluso menores para los N_s mayores, a partir de donde aparece un aumento brusco del MSE. También se puede observar que al aumentar el orden del modelo AR, el aumento brusco en el MSE se produce un poco antes, siendo más acusado para las segmentaciones menores.
- Algunos métodos presentan irregularidades en este comportamiento, que de todas formas puede considerarse general. Estas irregularidades aparecen en mayor número a SNR bajos y

ordenes del modelo AR más altos.

c) Comportamiento general frente al orden del modelo AR:

- En general, el MSE aumenta, para una misma segmentación y una misma SNR, al aumentar el orden del modelo AR.
- Las diferencias entre los distintos métodos se hacen más acusadas, sobre todo a N_s bajos, con el aumento del orden del modelo AR.
- El aumento drástico del MSE al disminuir la SNR aparece antes a medida que aumenta el orden del modelo AR, volviendo a ser más importante este comportamiento para N_s bajos.

d) Comportamiento general frente al tipo de ruido:

- En general, el comportamiento de todos los métodos frente a los dos tipos de ruidos es muy similar para SNR altas e intermedias. A SNR bajas, sin embargo, se aprecia un sistemático aumento del MSE para el ruido MA, respecto del MSE que aparece para el ruido ARMA. Esta diferencia se hace más apreciable a medida que aumenta el orden del modelo AR.
- El aumento brusco en el MSE sucede a SNR ligeramente mayores para el ruido MA que para el ruido ARMA, siendo este comportamiento más acusado a medida que aumenta el orden del modelo.
- Se puede apreciar un ligero aumento en la inestabilidad de los métodos en presencia del ruido MA, respecto de la que poseen en presencia del ruido ARMA, aunque el comportamiento es muy similar, más si se tiene en cuenta la gran diferencia espectral existente entre ambos ruidos.

e) Comparación de los distintos métodos:

- El método CFOM simple y RCM presentan unos valores de MSE prácticamente idénticos en todas las circunstancias. Las únicas diferencias aparecen a SNR muy bajas, y en algunos casos, a la hora de producirse el aumento brusco del MSE, que el método CFOM simple tiende a hacerlo para SNR algo más bajas en segmentaciones bajas. De todas formas, estas diferencias suelen aparecer para valores del MSE bastante altos, en las que la utilidad de cualquiera de los métodos es bastante discutible.
- El método Levinson y LS presentan valores del MSE muy parecidos a SNR altas. Esta coincidencia desaparece a medida que la SNR disminuye, en cuyo caso el método LS soporta mucho mejor el aumento del ruido que el Levinson, manteniendo su MSE más bajo. A SNR altas los valores del MSE del método de Levinson tienden a ser ligeramente peores que los de los tres métodos anteriores, tendencia que es más acusada para segmentaciones pequeñas y ordenes de los modelos altos. A SNR bajas el método LS suele ser el que mejor soporta el ruido de todos los métodos, siendo el único en el que no se aprecia diferencia en su comportamiento frente a los dos tipos de ruido y para estas SNR bajas. Por otro lado el comportamiento del método de Levinson frente al ruido para SNR bajas y muy bajas no es sistemáticamente mejor ni peor que los otros. Bien es cierto que el método Levinson es el que más irregularmente presenta en su comportamiento, empeorando de pronto para una determinada SNR y mejorando para el siguiente. Esta nada deseable propiedad sucede incluso a SNR altas, sobre todo en presencia del ruido MA, como puede apreciarse en las figuras.
- El método GM es el que mejores valores del MSE proporciona a SNR altas e incluso

medias, aunque dicha mejora no es demasiado pronunciada. Para SNR bajos su tendencia suele ser como la de los métodos RCM o si acaso algo peor.

- El método CFOM complejo es el que peor se comporta de todos, no apareciendo apenas en las gráficas debido a que los valores de MSE que proporcionan quedan en muchos casos por encima de los representados. Para las señales de ordenes dos y tres se encuentra que el comportamiento es tal y como se han descrito en general, pero más acusado; es decir, MSE menor a medida que aumenta la segmentación, presentando un crecimiento más pronunciado al disminuir la SNR que el resto de los métodos, y se produce el aumento final brusco bastante antes. Sin embargo para ordenes cuatro y cinco el comportamiento frente a la segmentación se invierte, es decir, presenta un MSE menor para segmentaciones menores y al aumentar esta el MSE aumenta. En cualquier caso, los valores de MSE siempre son mayores que en los demás métodos para las señales de orden 4 y 5 y solamente presenta MSE similares a los otros métodos para orden 2 y para segmentaciones mayores de 512.

En conclusión se puede decir que el método GM es el que proporciona valores más bajos de MSE para todas las segmentaciones y todos los órdenes para SNR altas e intermedias (hasta 5 dB o incluso menos), siendo también muy estable en su comportamiento, para estas SNR, lo que se refleja en que no presenta subidas y bajadas bruscas del MSE. El método RCM, aunque con valores de MSE ligeramente mayores, sigue presentando esta misma característica de estabilidad. De entre los métodos recursivos en el orden, decir que el método Levinson da valores algo peores que los otros dos métodos recursivos, pero sobre todo resaltar la presencia de inestabilidad del MSE para SNR no bajas, indicando con esto un peor comportamiento frente a ruido y a errores de estimación, como se había supuesto en el desarrollo teórico. Entre los métodos no recursivos, el método CFOM simple es algo mejor que el método LS a niveles altos y medios de SNR presentando menos irregularidades. Para SNR más bajas el método que mejor se comporta es el LS aunque este comportamiento puede presentarse sólo a partir de SNR 10 o incluso 0 dB. El mejor comportamiento del método LS a SNR bajas es mucho más claro para el ruido aditivo MA que para el ARMA, ya que todos los métodos salvo el LS presentan peores estimaciones a SNR bajas para el ruido MA.

La mejora que los algoritmos RCM y GM producen respecto al algoritmo de Levinson no es demasiado grande, salvo para segmentaciones pequeñas y ordenes altos. Sin embargo, sí es importante los dos primeros métodos no presentan irregularidades a SNR no bajas, mientras que el método de Levinson sí las presenta, lo que es una propiedad nada deseable.

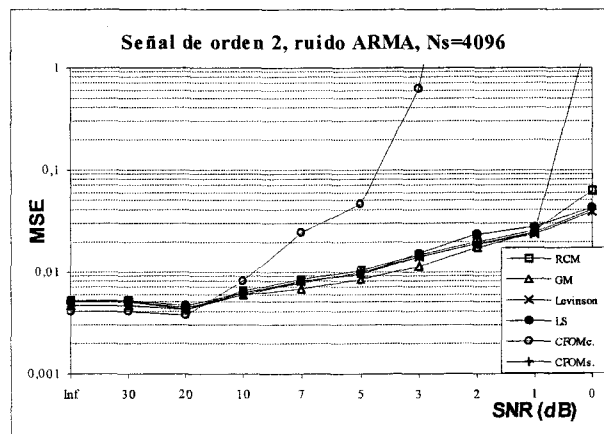
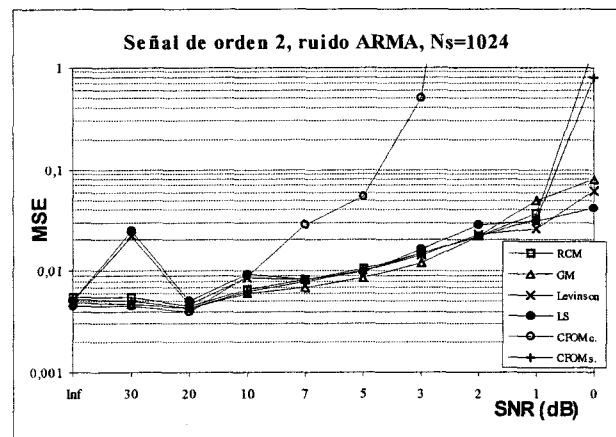
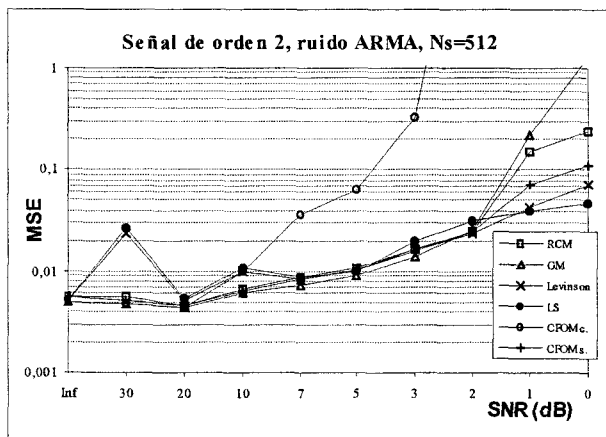
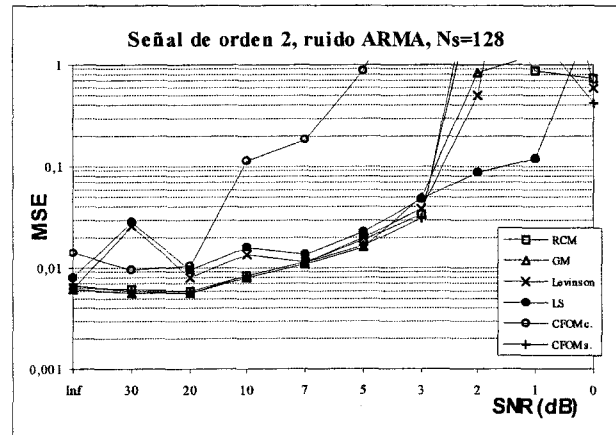
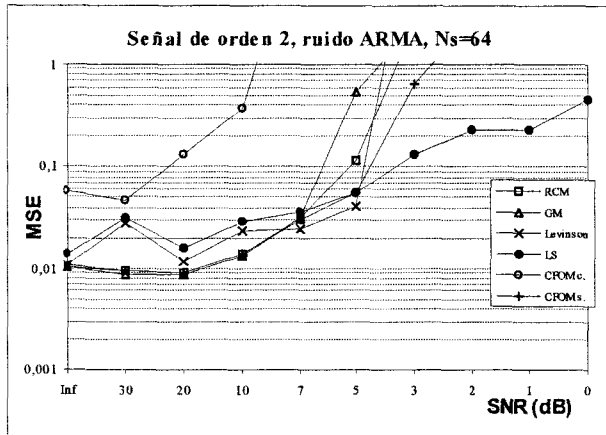
Hay que señalar también que la inclusión de más *slice* de cumulantes no mejora siempre los métodos. Este hecho puede parecer sorprendente a la luz de lo supuesto durante el desarrollo teórico, en el que se esperaba una mejora de la estimación al introducir más *slices*, ya que se está introduciendo más información y por tanto se esperaba un mejor comportamiento frente al ruido y a los errores de estimación. Este hecho es mucho más claro entre los métodos CFOM simple, que utiliza únicamente el *slice* diagonal, y el CFOM complejo, que trabaja con p *slice* más que el primero (siendo p el orden del modelo AR). El primer método es claramente mejor que el segundo en todos los casos, lo que contradice claramente la suposición inicial. Si se compara el método LS y el Levinson, este comportamiento no es tan claro. A alta y media SNR, los métodos Levinson y LS se comportan más o menos igual, incluso en ocasiones el método Levinson presenta un MSE más bajo. Sin embargo, el método LS se comporta mucho mejor al disminuir la SNR, lo que implica un mejor comportamiento frente al ruido.

Se pone en duda, por tanto, el hecho de que al introducir un mayor número de *slice* se mejore la estimación, como se había supuesto a priori. Esto se puede explicar si se tiene en cuenta que el valor absoluto de los cumulantes decae al aumentar los retardos temporales en los argumentos de los cumulantes. Al introducir nuevos *slice* los cumulantes de estos poseen retardos temporales mayores, luego esos cumulantes son menores, en valor absoluto, y con ello estarán peor estimados al ser más sensibles a errores de estimación y de ruido. De esta forma están compitiendo dos factores de efectos contrarios: por un lado la mejora al introducir más información en el desarrollo de los métodos y por otro la mayor sensibilidad de esta nueva información a errores de estimación y a presencia de ruido. En las gráficas se aprecia que la introducción de nueva información no mejora apreciablemente, salvo en el caso del método LS y para SNR bajas, e incluso puede empeorar significativamente, como sucede en el caso del método CFOM complejo; más si se tiene en cuenta que la inclusión de nuevos *slices* aumenta significativamente el esfuerzo de cálculo.

Por último queda evaluar el efecto de no hacer uso de la estacionaridad de las señales, que se debe hacer comparando el método de Levinson con el CFOM simple y el método LS con el CFOM complejo. De los dos primeros el método CFOM simple presenta un MSE algo menor que el Levinson, sobre todo con pequeña segmentación y orden alto. Sin embargo, entre los otros dos métodos, el método LS es claramente mejor que el CFOM complejo, que presenta MSE muy grandes. Esto hace cuestionar la utilidad de no hacer uso de la estacionaridad de la señal, sobre todo si se tiene en cuenta el aumento en el esfuerzo de cálculo que representa. Este comportamiento se puede explicar debido a que al no tener en cuenta la estacionaridad, se pierde simetría en las matrices con las que se trabaja, lo que normalmente conduce a un peor comportamiento frente al ruido. Esto es mucho más acusado para el método CFOM complejo, debido a que, al trabajar con más *slice*, la diferencia entre los retardos temporales es mayor, y con ello el valor absoluto de los cumulantes disminuye, haciéndolo más sensible a cualquier error de estimación y, por supuesto, a la presencia de ruido.

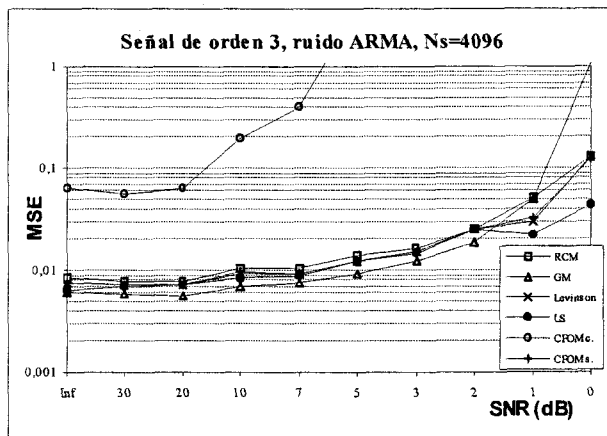
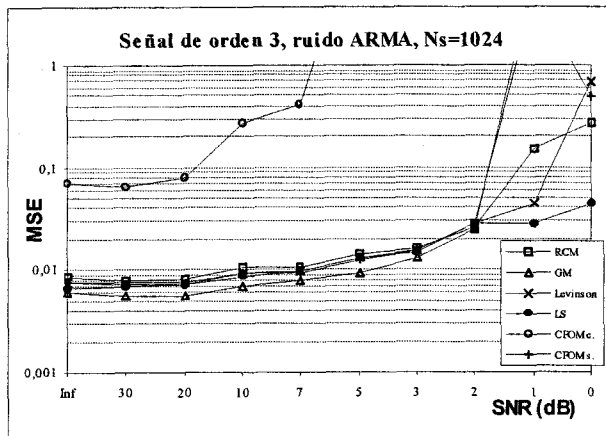
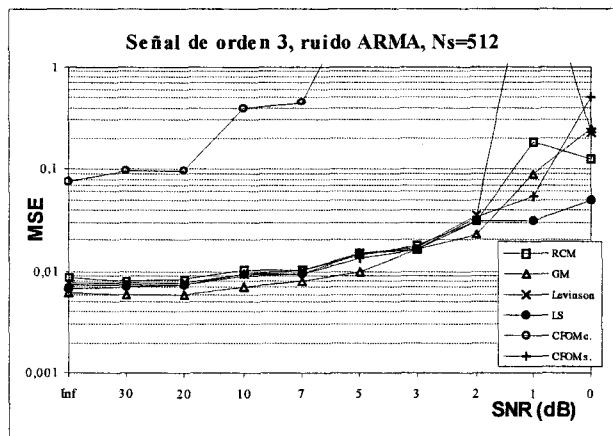
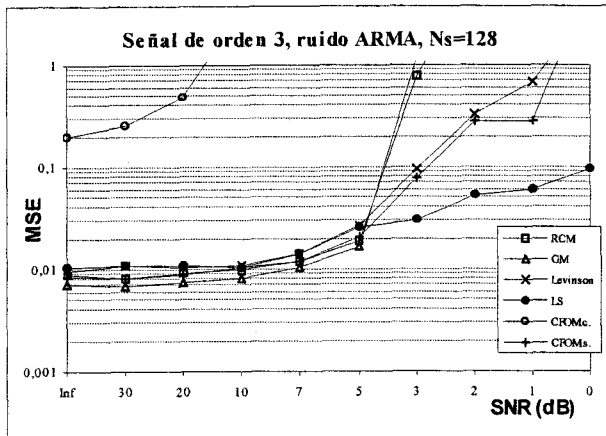
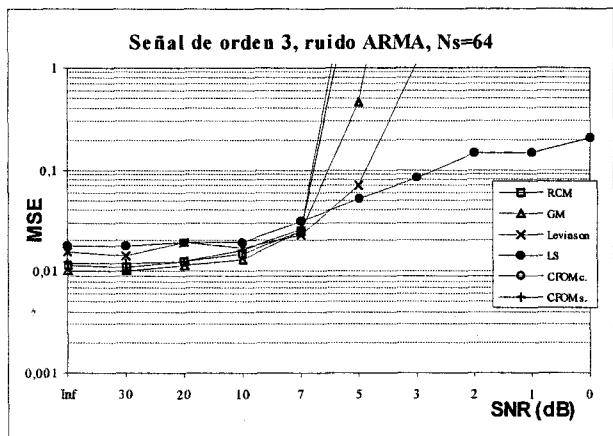
Figuras 3.4-8. Señal de Orden 2, Ruido ARMA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



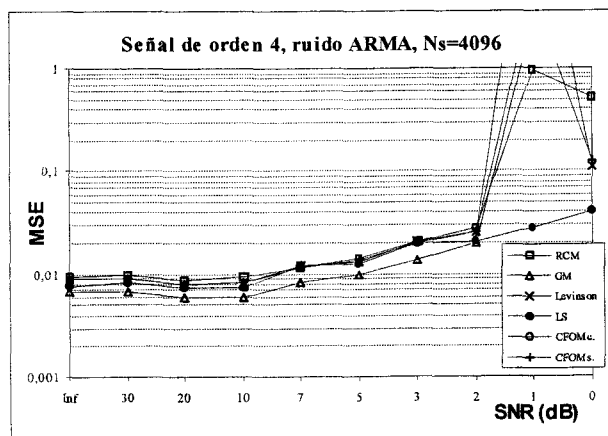
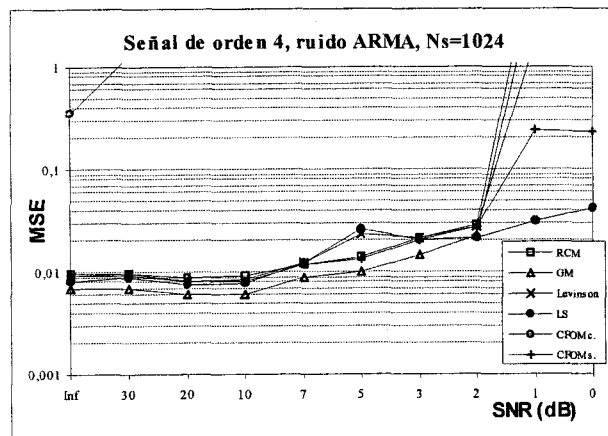
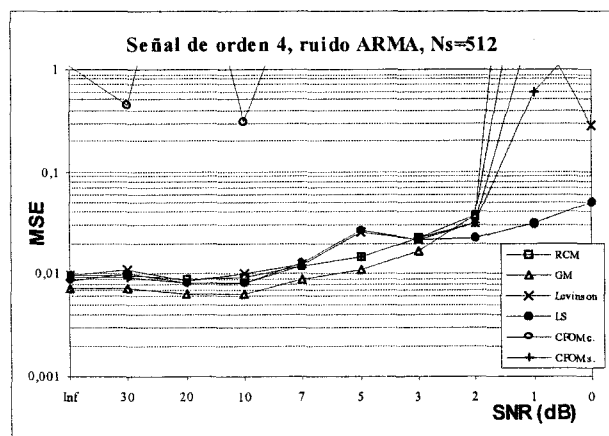
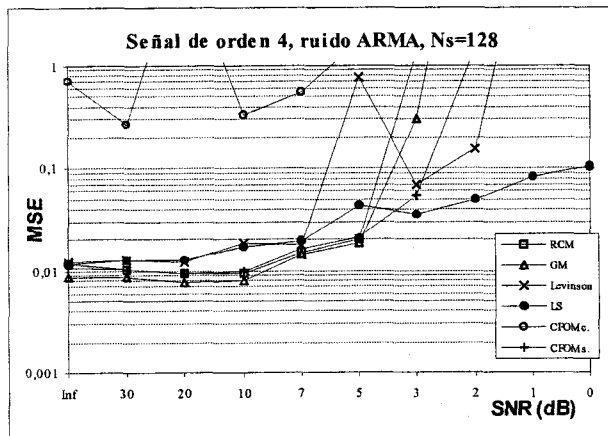
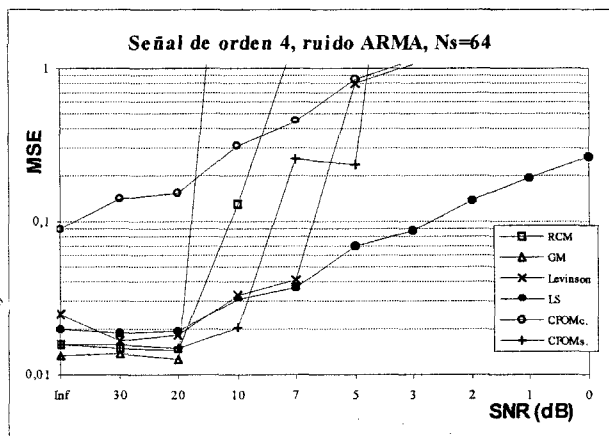
Figuras 3.9-13. Señal de Orden 3, Ruido ARMA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



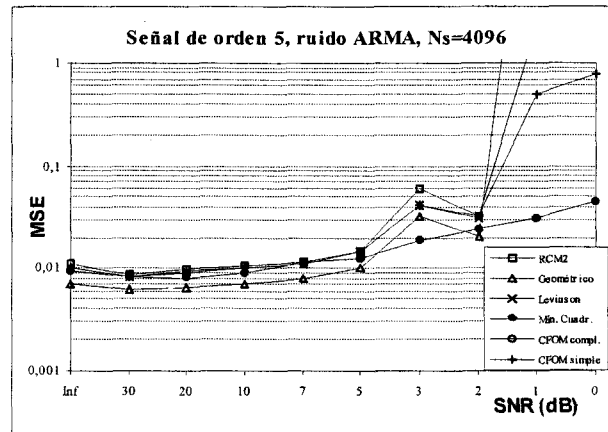
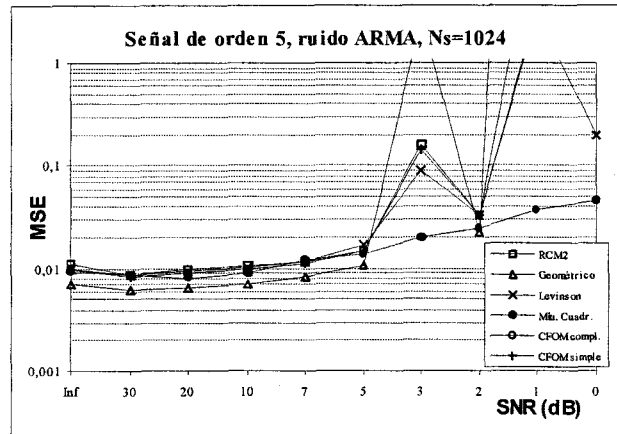
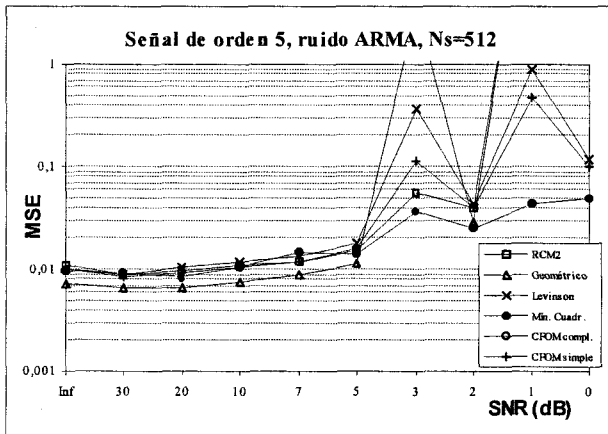
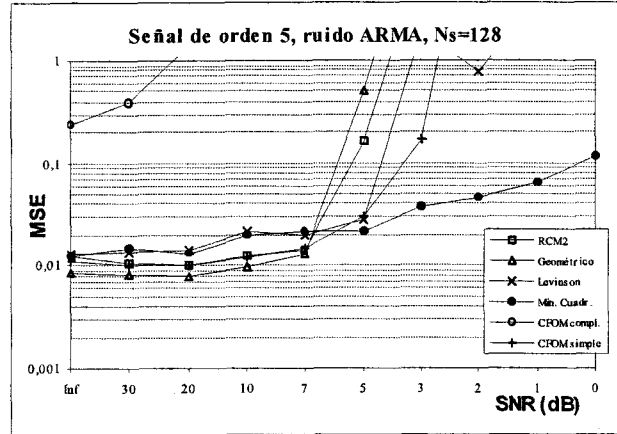
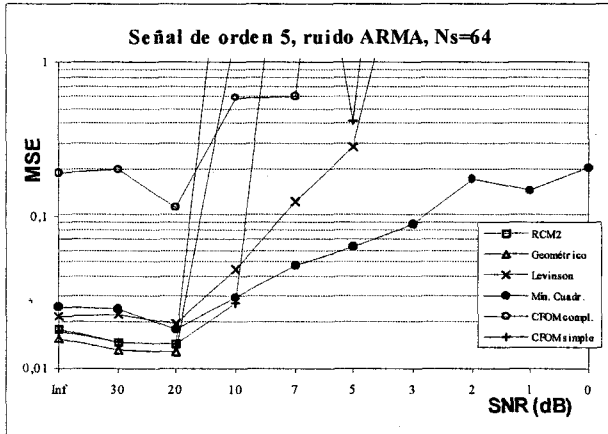
Figuras 3.14-18. Señal de Orden 4, Ruido ARMA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



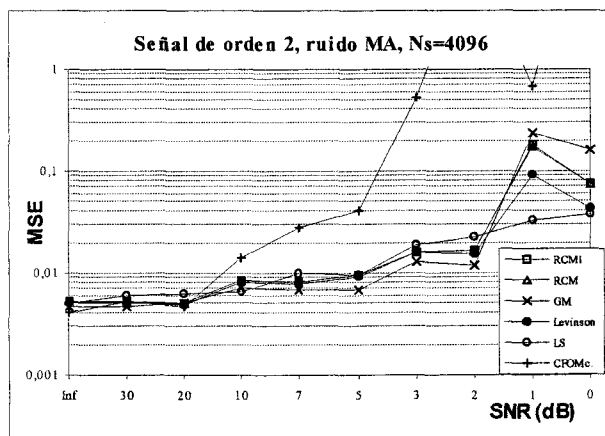
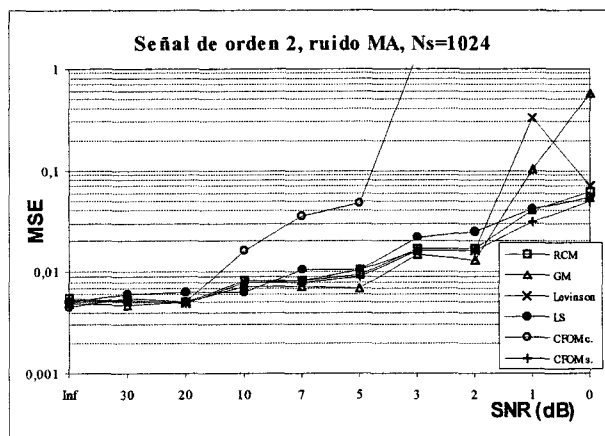
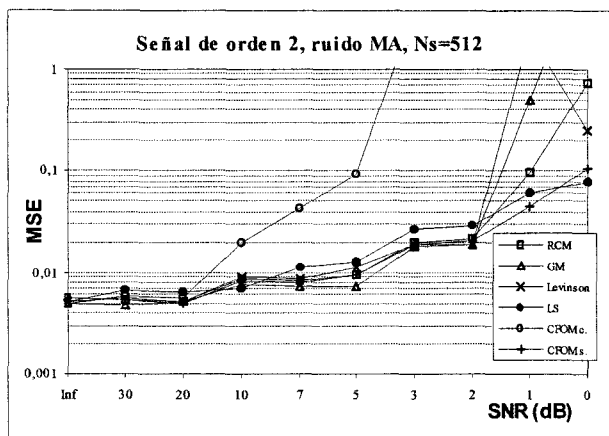
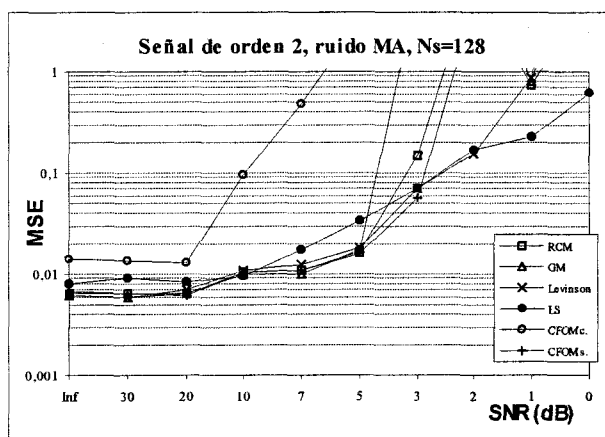
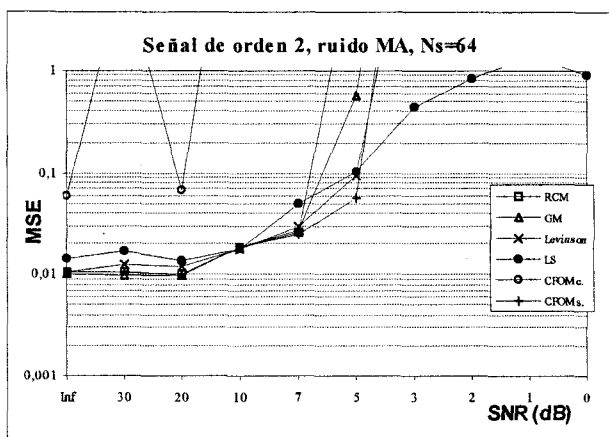
Figuras 3.19-23. Señal de Orden 5, Ruido ARMA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



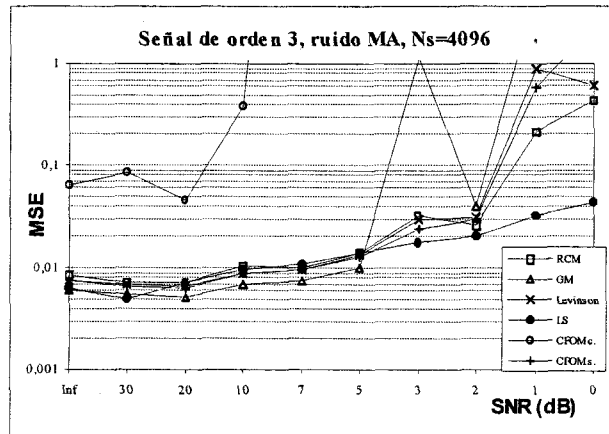
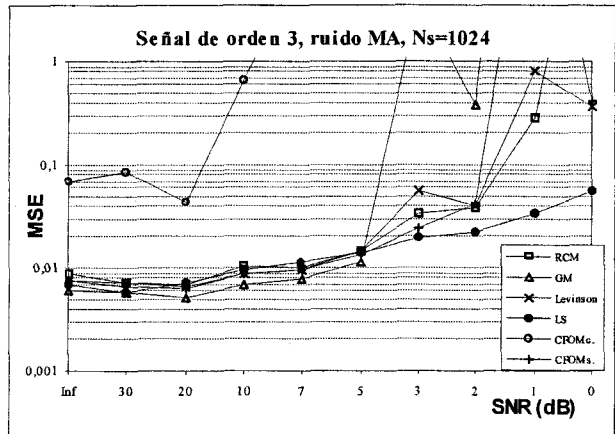
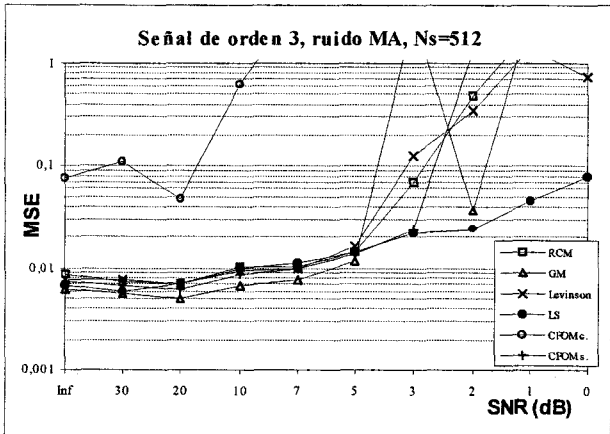
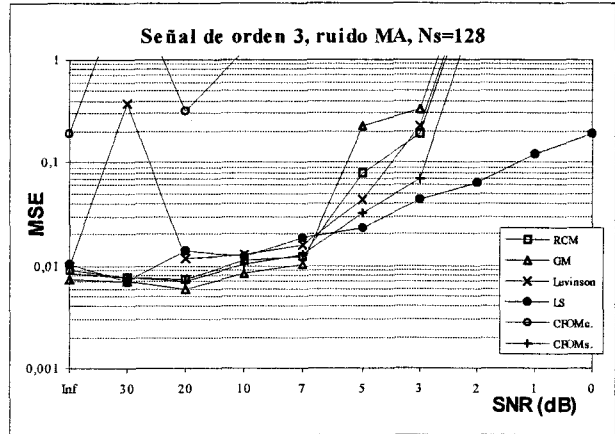
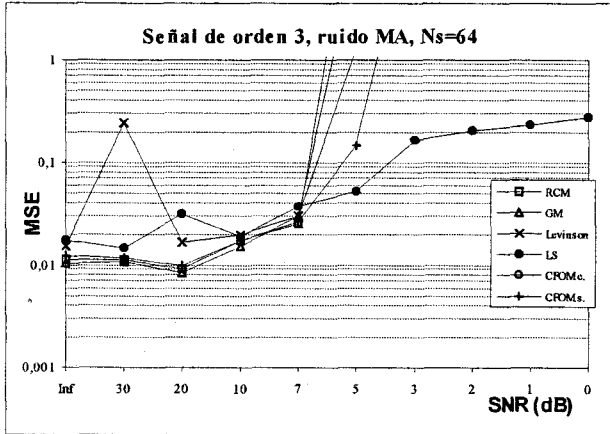
Figuras 3.24-28. Señal de Orden 2, Ruido MA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



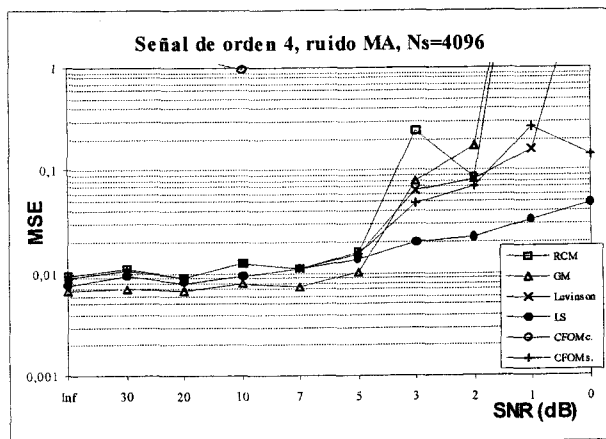
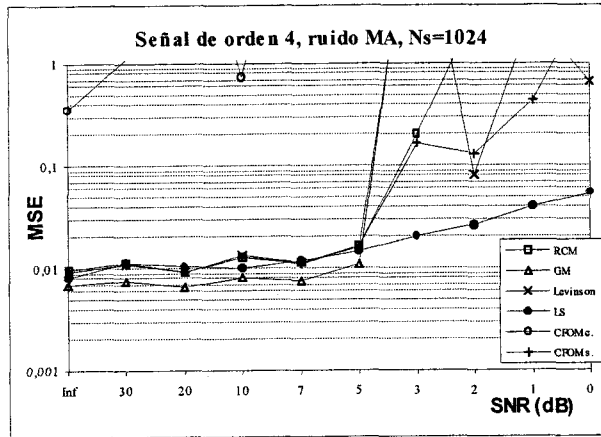
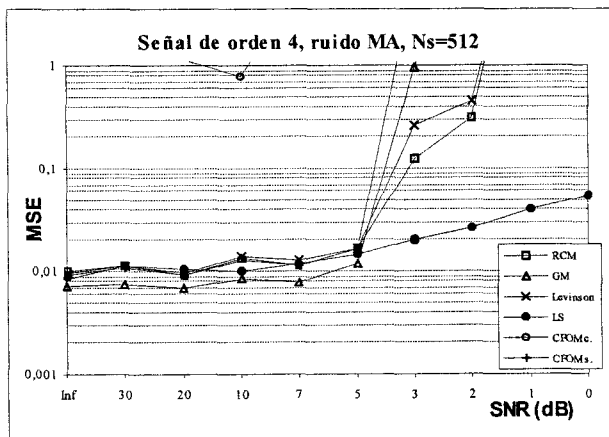
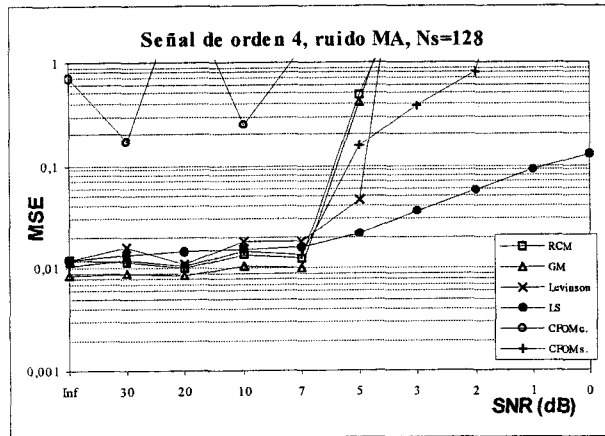
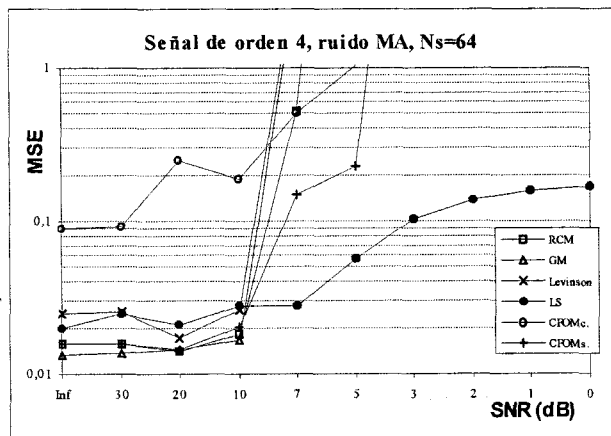
Figuras 3.29-33. Señal de Orden 3, Ruido MA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



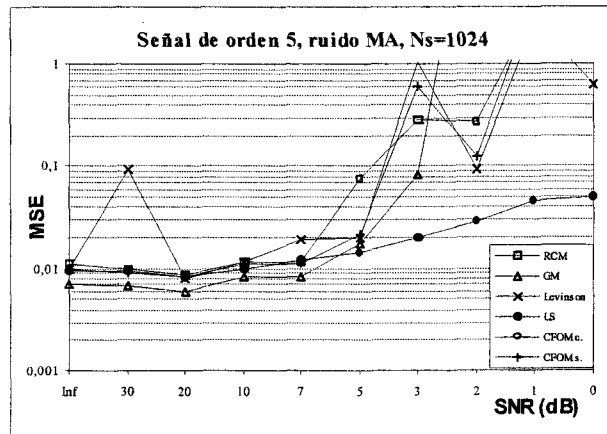
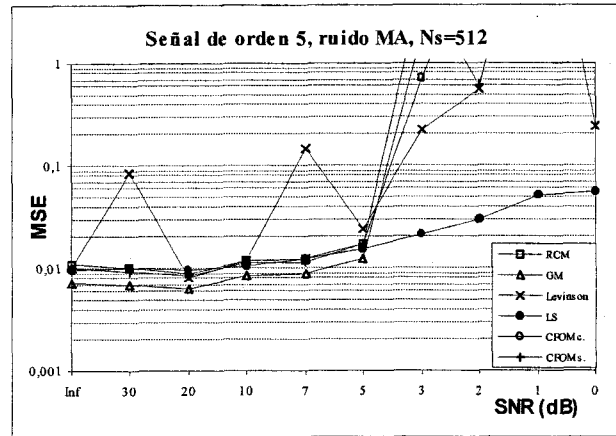
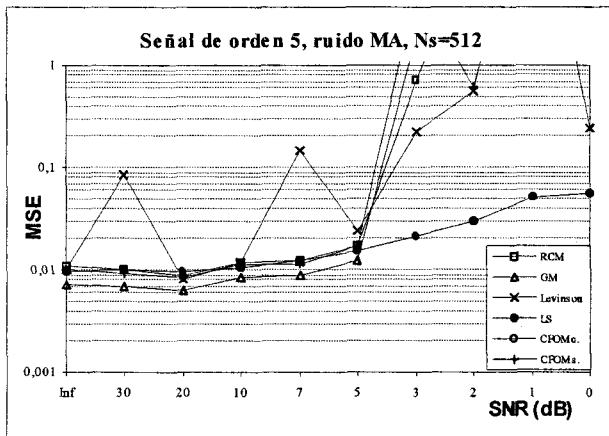
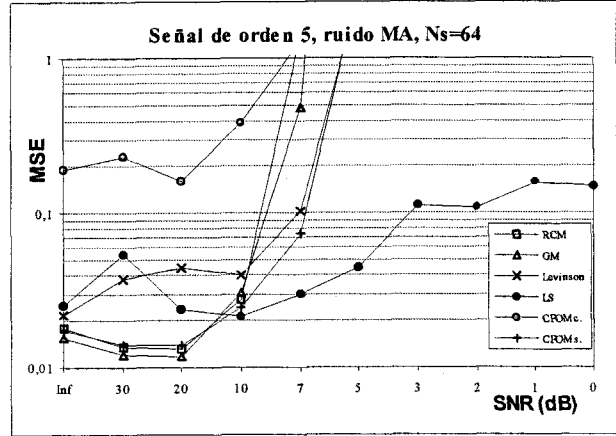
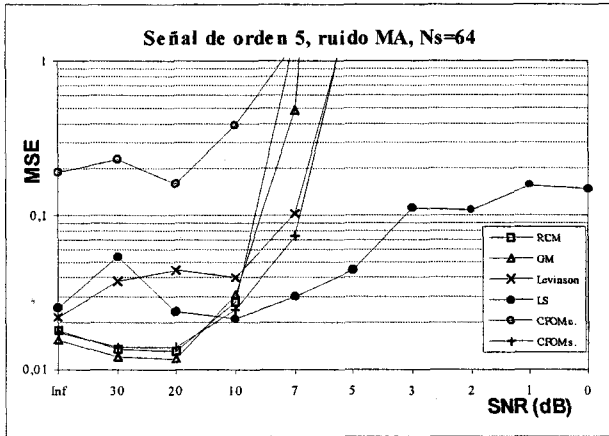
Figuras 3.34-38. Señal de Orden 4, Ruido MA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



Figuras 3.39-43. Señal de Orden 5, Ruido MA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



III.2.3. Estudio de segundo orden.

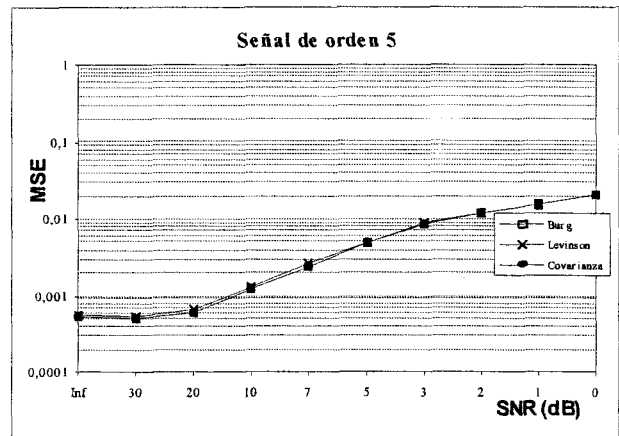
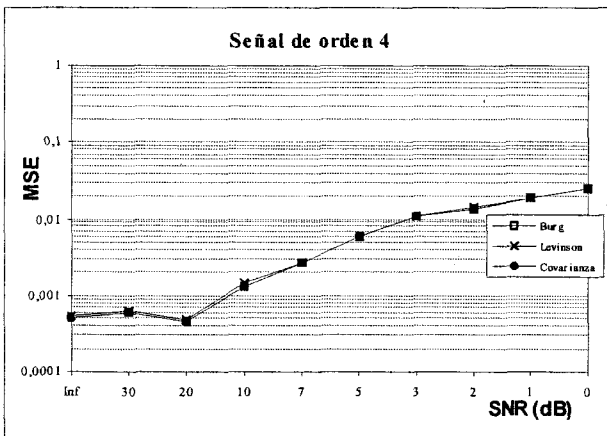
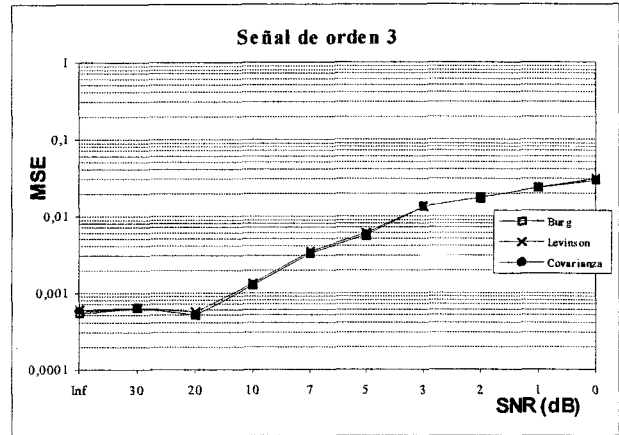
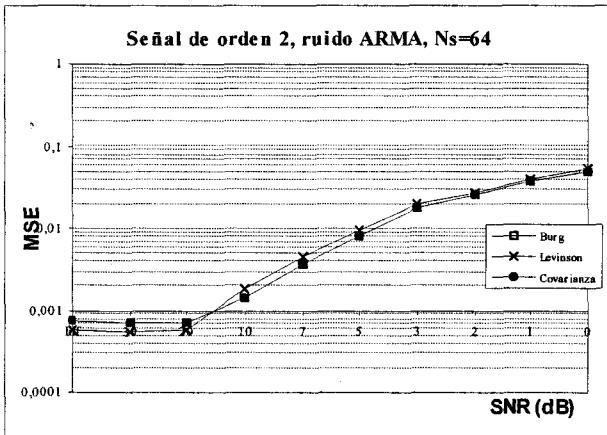
Para el tipo de señales con las que se está trabajando el uso de la estadística de cuarto orden en la estimación de parámetros AR se justifica por la existencia de ruido aditivo gaussiano. Como ya se ha explicado ampliamente, en presencia de este tipo de ruido, las técnicas de segundo orden son asintóticamente sesgadas, mientras que las técnicas que hacen uso de HOS no lo son. Sin embargo también es cierto que al aumentar el orden de la estadística con la que se estudia el sistema aumentan los errores de estimación, y con ellos la varianza. Por tanto, aunque asintóticamente los métodos de cuarto orden son los idóneos, para un número finito de datos es posible que la contribución de los errores de aleatorios de estimación, que se introducen al aumentar la estadística en estos métodos, sean mayores que los errores producidos por el ruido aditivo, en las técnicas de segundo orden y que teóricamente no aparecen al utilizar HOS. Esto produce que para una situación práctica concreta las técnicas de segundo orden pueden proporcionar mejores resultados que las de alto orden, aunque asintóticamente no lo hagan. Por supuesto, un parámetro determinante será la SNR, de forma que no se espera que los métodos de alto orden mejoren los resultados de las técnicas de segundo orden a SNR altas, sino precisamente a SNR bajas o intermedias.

Para comprobar si en condiciones prácticas de trabajo, como las que se han presentado en el apartado anterior, los métodos de cuarto orden proporcionan mejores estimaciones que los de segundo orden, se han estimado los coeficientes AR de las señales que se definen en (3.4) mediante técnicas de segundo orden, y en las mismas condiciones de SNR, segmentación y realizaciones que se han utilizado en el análisis de cuarto orden. Los métodos de segundo orden utilizados son el método de Burg, método de Levinson (en segundo orden) y método de la Covarianza [KAY88][MAR87]. El desarrollo de estos métodos se hace también a través de la resolución de un sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son los coeficientes AR, pero cuyos coeficientes están formados por datos de la secuencia de autocorrelación. De las diversas formas de construir las matrices y las hipótesis estadísticas realizadas sobre la señal al calcular la función de autocorrelación, surgen los diversos métodos de segundo orden con los que se trabaja en este apartado.

Realizándose la estimación mediante estos métodos de segundo orden en las mismas condiciones del apartado anterior se ha observado que prácticamente no hay dependencia en segmentación, en orden del modelo, ni en tipo de ruido aditivo. Como ejemplo se han representado en las figuras 3.44-47 los resultados del MSE medio para 100 realizaciones frente a la SNR, para las cuatro señales y con una segmentación de 512 y en presencia de ruido ARMA. Se presenta únicamente este resultado debido a que, como se ha dicho, apenas se aprecia variación alguna al variar la segmentación o el tipo de ruido, por lo que son totalmente representativos. El procedimiento que se sigue en la segmentación para desarrollar los métodos es idéntico al que se describió en el análisis de cuarto orden, salvo que en este caso no se calculan los cumulantes de orden cuatro, sino la función de autocorrelación.

En estas figuras se observa como para SNR hasta 20 dB, los métodos de segundo orden proporcionan un MSE de más de un orden de magnitud menor que los de cuarto orden. A medida que decrece la SNR el MSE aumenta más rápido que los de cuarto orden (la pendiente de la recta es mayor), hasta llegar a que a SNR de 3 dB el MSE de algunos métodos de cuarto orden puede ser comparable a los de orden dos. Aún así, los métodos de segundo

Figuras 3.44-47. Estadística de segundo orden
 Comportamiento del MSE frente a la SNR para $N_s=512.4$



orden presentan siempre un MSE claramente menor. Incluso para SNR muy pequeñas, del orden de 0 o 1 dB, el MSE es menor, lo que se debe a que en los métodos de segundo orden no se produce el aumento brusco del MSE al llegar a SNR bajas que se producía en los métodos de cuarto orden.

En principio puede parecer que estos resultados son contrarios a lo que cabría esperar de las propiedades estadísticas que las técnicas de segundo orden y de alto orden se saben que poseen; a partir de las que se espera que los métodos de cuarto orden estimen mejor a SNR bajas que los de segundo orden. Esta supuesta discordancia se debe al indicador de la calidad del estimador que hasta el momento se ha venido utilizando, es decir, el MSE definido en (3.3). Como ya se sabe, este indicador lleva información del sesgo y de la varianza que poseen los parámetros estimados.

Los métodos de segundo orden se basan en la función de autocorrelación, la cual, para las señales tratadas en este trabajo, poseen una parte debida a la señal y otra al ruido, tal y como se vio en (1.61). Es esta presencia en la función de autocorrelación de una componente debida al ruido, lo que hace que aparezca un error sistemático en los métodos que utilizan esta función en su análisis. Por otro lado, los posibles errores aleatorios se deben a la diferencias que habrá entre las autocorrelaciones teóricas de la señal más el ruido y la estimada a partir del registro de datos (errores de estimación), y a los errores introducidos por posibles correlaciones entre señal y ruido, que asintóticamente son nulas. Estos errores aleatorios son los que contribuyen a la varianza de las estimaciones, mientras que los errores sistemáticos son los que contribuyen al sesgo.

Los métodos de cuarto orden se basan en los cumulantes de cuarto orden, los que no poseen ninguna contribución debida al ruido, tal y como aparece en (1.64). Es por esto por lo que no aparecen errores sistemáticos en los métodos que utilizan a los cumulantes en sus cálculos. Los errores aleatorios que estos métodos poseen tres contribuciones distintas. Por un lado, las diferencias entre los cumulantes de la señal calculados con los registros de datos y los teóricos; por otro, los cumulantes cruzados estimados entre señal y ruido, que asintóticamente se anulan; y, finalmente, los cumulantes estimados del ruido, los cuales también se anulan asintóticamente. Es interesante destacar que no existe un error aleatorio en la estimación de la autocorrelación debido al ruido, ya que en este caso es sistemático, contribuyendo al sesgo y no a la varianza. Debido a esto y a que los errores de estimación que presentan los cumulantes son mucho mayores que los que presenta la función de autocorrelación, la varianza de los métodos de cuarto orden será mayor que la de los métodos de segundo orden.

A partir de esto también se puede concluir que la varianza de los métodos de cuarto orden aumentará apreciablemente al disminuir la SNR, mientras que la de los métodos de segundo orden debe ser relativamente independiente del nivel de ruido. Por otro lado los métodos de alto orden no poseen fuentes de errores sistemáticos, por lo que no estarán sesgados, mientras que las funciones de autocorrelación poseen una parte debida a la estimación del espectro del ruido, lo que introduce errores sistemáticos en la estimación de los coeficientes, haciendo que aparezca un sesgo en los parámetros estimados, tanto mayor cuanto menor sea la SNR. Por tanto, el aumento del MSE al disminuir la SNR en los métodos de cuarto y segundo orden se debe a dos causas distintas. En los primeros se debe a un aumento de la varianza y en los segundos del sesgo. Es precisamente el carácter estadístico de la primera el que hace que a SNR muy bajas el MSE de los métodos de cuarto orden se dispare. Sin

SEÑAL DE CUARTO ORDEN, $N_s=512$

SNR	CUARTO ORDEN						SEGUNDO ORDEN		
	RCM	GM	Levinson	LS	CFOM complejo	CFOM simple	Burg	Levinson	Covarianza
Inf	-0,706±0,0563	-0,694±0,0487	-0,698±0,0594	-0,69±0,0635	-0,683±0,0814	-0,696±0,0552	-0,699±0,0148	-0,7±0,0152	-0,699±0,0151
	0,198±0,0769	0,161±0,0576	0,189±0,0774	0,188±0,0731	0,22±0,129	0,19±0,0758	0,203±0,0185	0,202±0,019	0,203±0,0186
	0,147±0,0893	0,125±0,0709	0,148±0,0862	0,144±0,0743	-0,0435±0,952	0,149±0,0869	0,148±0,0176	0,147±0,0175	0,147±0,0175
	0,0485±0,0702	0,0426±0,0562	0,0475±0,0657	0,0467±0,0606	0,282±1,17	0,0488±0,066	0,0533±0,0158	0,0516±0,0158	0,0533±0,0158
30	-0,703±0,0595	-0,69±0,0519	-0,698±0,0659	-0,687±0,0667	-0,698±0,0755	-0,692±0,0547	-0,698±0,0159	-0,701±0,0172	-0,698±0,0158
	0,211±0,0866	0,172±0,0693	0,206±0,0962	0,201±0,0891	0,212±0,115	0,201±0,0831	0,201±0,0203	0,202±0,021	0,201±0,0205
	0,155±0,0772	0,13±0,0622	0,153±0,0796	0,15±0,0755	0,0902±0,658	0,156±0,0779	0,15±0,0201	0,149±0,0203	0,15±0,0202
	0,0437±0,07	0,0406±0,0572	0,0447±0,0692	0,0501±0,0665	0,103±0,743	0,0468±0,069	0,0509±0,0154	0,0489±0,0154	0,0509±0,0154
20	-0,709±0,0711	-0,694±0,0623	-0,697±0,0726	-0,691±0,0696	-0,576±0,987	-0,698±0,0697	-0,704±0,0149	-0,705±0,0148	-0,704±0,0149
	0,218±0,0735	0,176±0,0538	0,205±0,0743	0,202±0,0675	0,337±0,745	0,208±0,0709	0,201±0,0178	0,201±0,0189	0,201±0,0178
	0,14±0,0689	0,118±0,0551	0,144±0,0697	0,145±0,0688	-1,07±7,5	0,143±0,0695	0,151±0,016	0,151±0,0167	0,151±0,0159
	0,0471±0,0636	0,0416±0,0508	0,0463±0,0619	0,046±0,0619	1,42±8,6	0,048±0,0629	0,0501±0,0144	0,0482±0,0144	0,0501±0,0144
10	-0,711±0,0645	-0,698±0,0565	-0,706±0,0685	-0,694±0,0682	-0,701±0,0614	-0,701±0,0622	-0,738±0,0158	-0,74±0,0176	-0,738±0,0157
	0,231±0,0766	0,189±0,0599	0,226±0,0868	0,213±0,0737	0,253±0,0805	0,221±0,0723	0,204±0,0198	0,204±0,0218	0,204±0,0198
	0,138±0,0705	0,118±0,0576	0,139±0,0725	0,148±0,0676	-0,191±0,44	0,143±0,0701	0,144±0,0196	0,143±0,0199	0,144±0,0196
	0,0546±0,066	0,048±0,0538	0,0529±0,0642	0,0486±0,0627	0,414±0,47	0,0537±0,063	0,041±0,0161	0,039±0,016	0,041±0,0161
7	-0,689±0,0763	-0,675±0,0645	-0,675±0,0767	-0,674±0,0807	-0,622±0,49	-0,676±0,0738	-0,766±0,0156	-0,767±0,0167	-0,766±0,0155
	0,201±0,0888	0,165±0,0653	0,19±0,0899	0,19±0,0885	0,321±0,338	0,192±0,0855	0,201±0,0195	0,199±0,0203	0,201±0,0195
	0,147±0,0848	0,126±0,0734	0,149±0,0871	0,149±0,0882	-0,792±2,76	0,15±0,0875	0,143±0,0187	0,143±0,0187	0,143±0,0187
	0,0536±0,0772	0,0469±0,0645	0,0536±0,0785	0,0512±0,076	1,12±3,11	0,054±0,0787	0,0332±0,0165	0,0315±0,0164	0,0332±0,0165
5	-0,697±0,0948	-0,682±0,0831	-0,692±0,124	-0,691±0,125	-0,713±0,205	-0,684±0,093	-0,803±0,0188	-0,804±0,0196	-0,803±0,0188
	0,211±0,0917	0,171±0,0752	0,212±0,143	0,212±0,145	0,312±0,204	0,203±0,091	0,21±0,0221	0,21±0,0226	0,21±0,022
	0,156±0,0839	0,132±0,0702	0,146±0,117	0,139±0,119	-0,493±1,2	0,157±0,0851	0,135±0,0214	0,135±0,0213	0,135±0,0214
	0,0503±0,0936	0,0471±0,0766	0,0566±0,0931	0,057±0,0896	0,734±1,43	0,0543±0,091	0,0286±0,0151	0,0268±0,0154	0,0286±0,0151
3	-0,695±0,117	-0,678±0,104	-0,685±0,115	-0,684±0,117	-0,756±0,481	-0,68±0,115	-0,844±0,017	-0,845±0,0178	-0,844±0,0171
	0,231±0,102	0,189±0,0782	0,222±0,103	0,222±0,106	0,294±0,383	0,221±0,102	0,218±0,0211	0,217±0,0223	0,218±0,0212
	0,137±0,111	0,12±0,0955	0,14±0,111	0,13±0,102	-0,337±2,84	0,141±0,112	0,134±0,0205	0,134±0,0206	0,133±0,0205
	0,0612±0,114	0,0558±0,0996	0,0562±0,112	0,053±0,108	0,592±3,47	0,0601±0,112	0,0212±0,0163	0,0195±0,0166	0,0212±0,0163
2	-0,673±0,179	-0,651±0,179	-0,665±0,168	-0,694±0,123	-0,697±0,24	-0,663±0,163	-0,867±0,0169	-0,869±0,0191	-0,867±0,0168
	0,228±0,126	0,192±0,124	0,214±0,12	0,204±0,112	0,359±0,258	0,215±0,117	0,224±0,022	0,224±0,0241	0,223±0,0221
	0,159±0,141	0,145±0,144	0,151±0,126	0,128±0,107	-0,784±1,32	0,153±0,126	0,128±0,0189	0,129±0,019	0,128±0,0188
	0,077±0,12	0,0733±0,111	0,0702±0,108	0,0416±0,101	1,14±1,56	0,0707±0,111	0,0208±0,0137	0,0189±0,014	0,0208±0,0137
1	-0,944±1,68	-1,27±6,34	-0,586±2,16	-0,69±0,12	-0,67±0,457	-0,704±0,969	-0,894±0,0168	-0,896±0,0198	-0,894±0,0165
	-0,378±6,59	-7,25±80,4	0,26±0,812	0,197±0,137	0,385±0,306	0,186±0,434	0,231±0,0194	0,23±0,0226	0,23±0,0193
	-0,484±5,03	-8,27±90,2	0,166±0,636	0,12±0,127	-0,973±2,03	0,142±0,315	0,129±0,0175	0,129±0,0175	0,129±0,0174
	0,636±5,52	0,538±4,34	0,0366±1,07	0,0427±0,143	1,36±2,58	0,0606±0,319	0,0176±0,0131	0,016±0,0133	0,0176±0,0131
0	-0,575±1,66	-0,469±3,06	-0,624±0,552	-0,701±0,186	-7,94±72,9	-0,463±1,88	-0,926±0,0154	-0,926±0,0159	-0,926±0,0155
	1,2±7,38	0,47±2,64	0,226±0,313	0,204±0,168	-4,94±53,6	0,252±0,588	0,242±0,0212	0,241±0,0222	0,243±0,0213
	0,327±7,18	0,87±7,82	0,153±0,318	0,108±0,156	37±382	0,233±0,851	0,125±0,0229	0,125±0,0235	0,125±0,023
	0,478±5,28	0,0479±1,69	0,0879±0,341	0,0436±0,16	-48,4±500	0,148±0,864	0,0159±0,0172	0,0144±0,017	0,0159±0,0172

Tabla 3.1. Media y varianza para los parámetros estimados con los métodos de cuarto y segundo orden para una señal segmentada con $N_s=512$

embargo, a SNR no tan bajas, la estimación que proporciona los métodos de cuarto orden será sistemáticamente mejor, al no aparecer sesgada, aunque su MSE pueda ser mayor que la de los métodos de segundo orden, debido a la pequeña varianza que estos presentan. Todo esta discusión queda recogida en la tabla 3.1. y en las figuras 3.48-55.

En la tabla se puede observar como, efectivamente, la varianza de los métodos de cuarto orden es mayor que la de los métodos de segundo orden, y aumenta al disminuir la SNR, mientras que la media permanece en unos niveles bastante próximos a los valores reales. Por otro lado, en la estadística de segundo orden, la varianza que muestran los parámetros estimados es prácticamente independiente de la SNR, como se esperaba, mientras que es el sesgo el que empeora significativamente a medida que disminuye la SNR. Esto mismo es lo que

SEÑAL AR DE ORDEN CUATRO SIN RUIDO

Figura 3.48. Método de Burg.

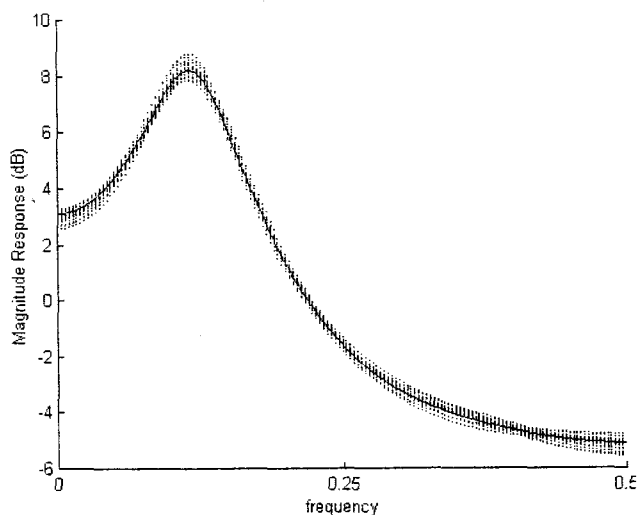
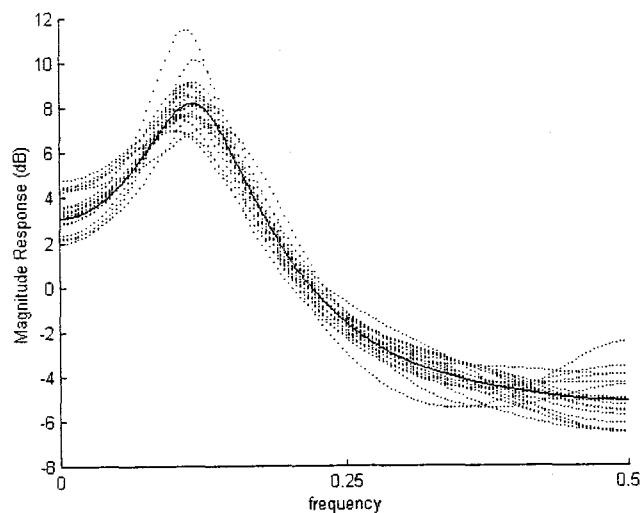


Figura 3.49. Método RCM.



En cada realización de las gráficas se trabaja con 4096 datos de señales AR de orden cuatro, sin ruido. Se le realiza una segmentación de 512 datos cada segmento. En la figura 26 se representan con puntos 20 espectros construidos con los coeficientes AR estimados mediante el método de Burg, método de segundo orden. También aparece representado con línea continua el espectro construido a partir de los coeficientes teóricos. En la figura 27 se representa con puntos 20 espectros construidos con los coeficientes AR estimados mediante el método RCM, método de cuarto orden. A su vez, aparece representado con línea continua el espectro que presentan los coeficientes AR teóricos.

Figura 3.50. Método de Burg.

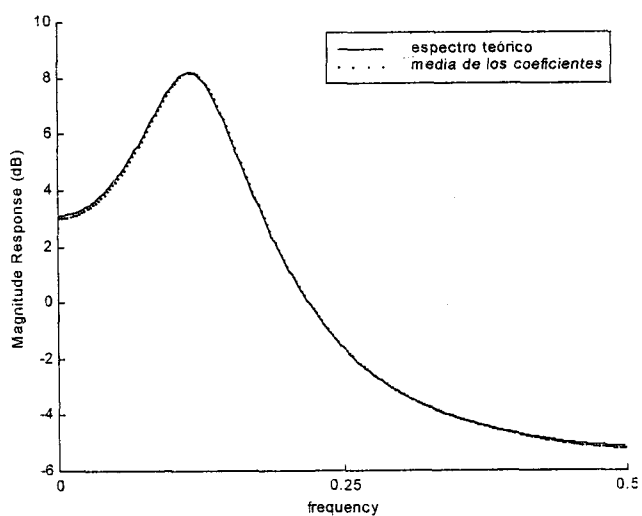
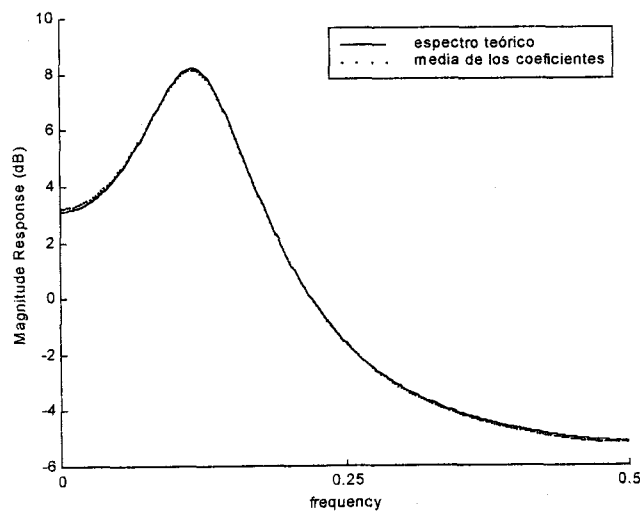


Figura 3.51. Método RCM.



En las figuras se representa el espectro de los coeficientes medios para 100 realizaciones con línea discontinua y el espectro de los coeficientes teóricos con línea continua. La figura 28 se representa este resultado para el método de Burg (método de segundo orden) y en la figura 29 para el método RCM (método de cuarto orden).

SEÑAL AR DE ORDEN CUATRO CON RUIDO ARMA DE SNR=7 dB

Figura 3.52. Método de Burg.

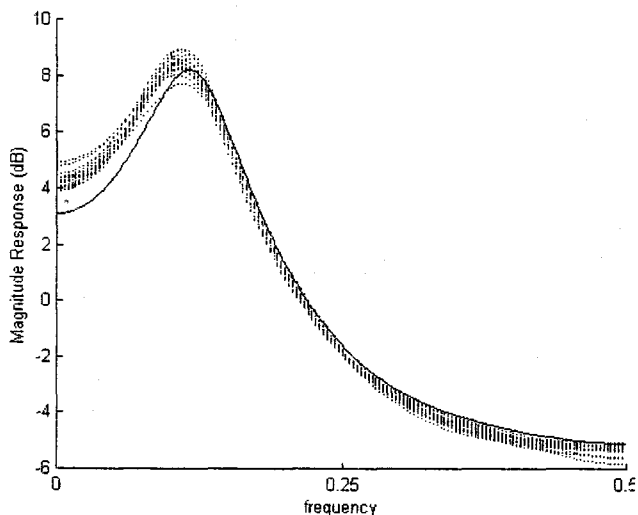
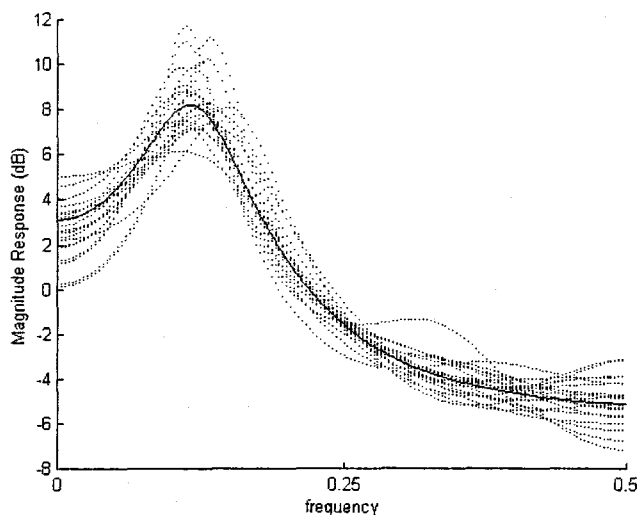


Figura 3.53. Método RCM.



En cada realización de las gráficas se trabaja con 4096 datos de señales AR de orden cuatro, contaminadas con un ruido gaussiano coloreado de SNR=7 dB. Se le realiza una segmentación de 512 datos cada segmento. En la figura 30 se representan con puntos 20 espectros construidos con los coeficientes AR estimados mediante el método de Burg, método de segundo orden. También aparece representado con línea continua el espectro construido a partir de los coeficientes teóricos. En la figura 31 se representa con puntos 20 espectros construidos con los coeficientes AR estimados mediante el método RCM, método de cuarto orden. A su vez, aparece representado con línea continua el espectro que presentan los coeficientes AR teóricos.

Figura 3.54. Método de Burg.

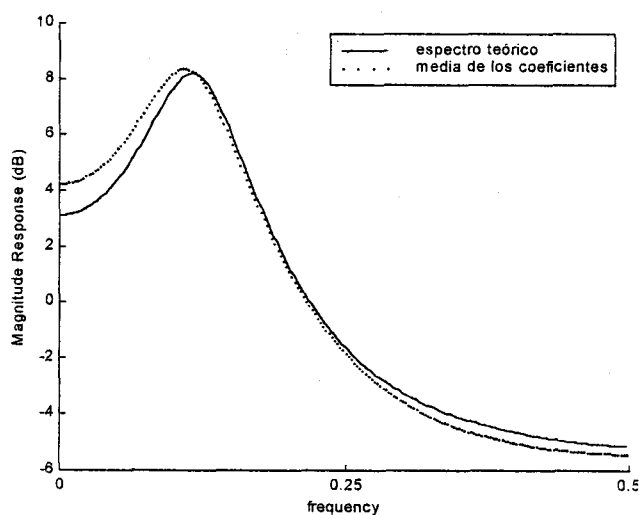
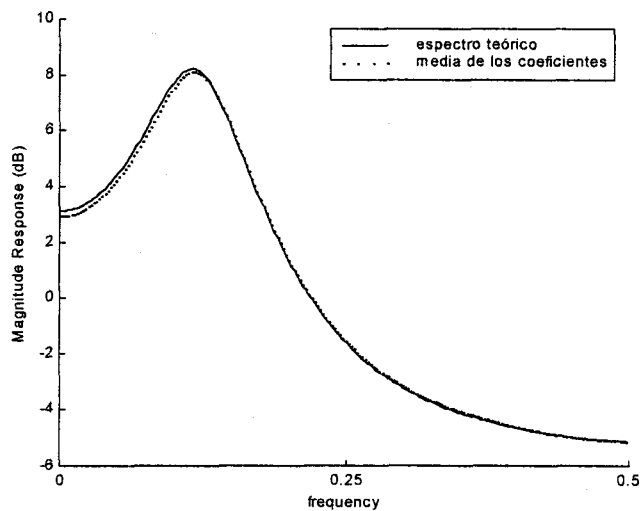


Figura 3.55. Método RCM



En las figuras se representa el espectro de los coeficientes medios para 100 realizaciones con línea discontinua y el espectro de los coeficientes teóricos con línea continua. La figura 32 se representa este resultado para el método de Burg (método de segundo orden) y en la figura 33 para el método RCM (método de cuarto orden).

se pone de manifiesto en las figuras de las dos páginas siguientes. En las figuras 3.48-51. se representan los espectros construidos a partir de los coeficientes de 20 estimaciones con el método de Burg, de segundo orden, y 20 estimaciones con el método RCM, de cuarto orden, las dos sin ruido aditivo gaussiano. De estas dos figuras se observa como la varianza del método RCM es bastante mayor que la del método de Burg, varianza que en este caso se debe únicamente a errores de estimación, al no haber ruido. Debajo aparecen los espectros construidos con los coeficientes medios de 100 realizaciones con el método de Burg y con el RCM. Se puede observar como apenas hay diferencia entre los espectros de los coeficientes medios y los teóricos.

En las figuras 3.52-55. se representa lo mismo pero para la misma señal contaminada de ruido gaussiano ARMA y una SNR de 7 dB. Se observa como el método de Burg sigue presentando mucha menor varianza que el RCM. Sin embargo a la hora de representar la media de las realizaciones se observa como el espectro proporcionado por el método de Burg está claramente sesgado, mientras que el que proporciona el método RCM es casi idéntico al que presenta los parámetros teóricos.

Se comprueba de esta manera la necesidad de utilizar técnicas basadas en cuarto orden para el análisis de señales contaminadas con ruido aditivo gaussiano, cuando la SNR de la señal es lo suficientemente pequeña.

Estos resultados que se han presentado para la señal AR de orden cuatro y con una segmentación de 512 es general y se ha comprobado que también aparecen para el resto de las señales y la segmentación, y en mayor o menor medida, para el resto de los métodos.

La reconstrucción del espectro de una señal contaminada de ruido coloreado, en las situaciones prácticas que se han presentado en este capítulo, se ha comprobado que es posible a partir de métodos que se enmarcan dentro de la estadística de cuarto orden. También se ha comprobado como los métodos de segundo orden presentan un compartimiento mucho mejor que los de orden cuarto, siendo los idóneos cuando sea posible. Sin embargo se ha visto como en el caso tratado en este capítulo, el de procesos AR de banda ancha contaminados con ruido aditivo gaussiano coloreado, no es posible utilizar estos métodos de segundo orden, ya que no son capaces de proporcionar una reconstrucción espectral adecuada, como se ha visto en las últimas figuras.

III.3. PROCESOS DE BANDA ESTRECHA

III.3.1. Definición de las señales.

Hasta ahora se ha estado trabajando con procesos de banda ancha, en los que los polos de la función de transferencia están lejos del círculo unidad. Se ha estudiado el comportamiento de los distintos métodos de cuarto orden frente a diversos parámetros y finalmente se han comparado los resultados frente a los proporcionados por métodos de segundo orden. En este apartado el objetivo es estudiar el comportamiento de los mismos métodos anteriores en señales de banda estrecha, es decir, señales cuya función de transferencia presenta polos cerca del círculo unidad, tal y como quedan representados en la figura 3.56.

Las estructura de estas señales es la misma que la que se ha definió en (3.1), es decir:

$$x(n)=y(n)+u(n)$$

donde $y(n)$ es un proceso AR de orden p dado por $y(n)=-\sum_{i=1}^p a(i)y(n-i)+v(n)$, tal y como se

definió en los procesos de banda ancha. Se va a tratar con una señal de orden dos ($p=2$) y con dos señales de orden cuatro ($p=4$), que nombraremos por AR1, AR2 y AR3. La diferencia entre las dos señales de orden cuatro radica en lo separado que presenten los polos de la función de transferencia en el plano complejo. En la figura 3.56. se observa como la señal AR2 presenta sus polos muchos más cerca entre ellos que la señal AR3. Los parámetros concretos de estas señales AR son:

-AR1: [1 -0.99 0.98]

-AR2: [1 -2.71 3.66 -2.65 0.96]

-AR3: [0.1907 -0.2824 0.2085 0.9600]

El estudio que se va a realizar con estas señales es totalmente idéntico al realizado con los procesos de banda ancha, es decir, primero se realizará un estudio de cuarto orden, en el que se compararan los distintos métodos desarrollados en el capítulo II. Una vez hecho esto, se compararán estos resultados y los obtenidos usando métodos de segundo orden.

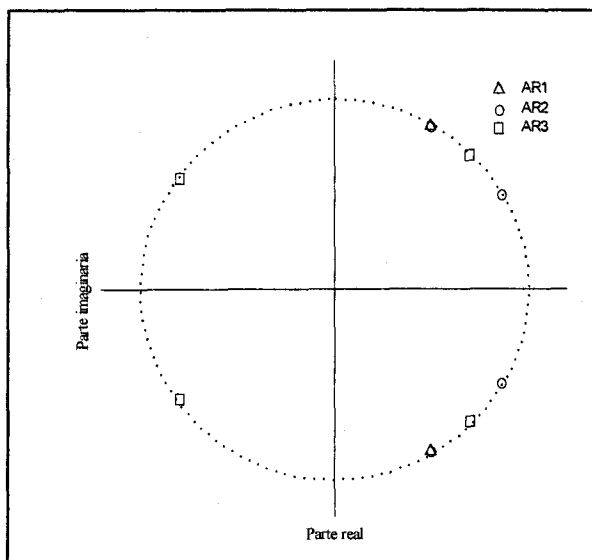


Figura 3.56. Distribución de polos de las funciones de trasferencias de las señales de banda estrecha.

El cálculo de los cumulantes, el número de datos de cada señal, los métodos, la definición de SNR y de MSE, son idénticos a los descritos anteriormente para los procesos de banda ancha.

III.3.2. Estudio de cuarto y de segundo orden.

En las figuras 3.57-71. se representan, tal y como se hizo en los procesos de banda ancha, los MSE medios para 100 realizaciones obtenidos con los distintos métodos de cuarto orden, en función de la SNR de la señal, para distintas segmentaciones. Únicamente se representan los resultados para las señales AR contaminadas con el ruido ARMA. Los resultados que se obtienen al contaminar las señales con el ruido MA son muy parecidos, más aún que en el caso de procesos de banda ancha, por lo que no se ha considerado necesaria su representación. Sólo resaltar a este respecto, que los métodos de estimación presentan menos sensibilidad al contenido espectral del ruido aditivo en procesos AR de banda estrecha que para procesos AR de banda ancha, lo que se induce a partir de la similitud de resultados antes apuntados.

Del estudio de estas figuras es posible señalar los siguientes comportamientos:

a) Comportamiento general frente a la segmentación:

- El MSE que presentan los distintos métodos es muy dependiente de la segmentación utilizada, siendo mucho menor para segmentaciones pequeñas que para grandes.
- El MSE es, en general, dos órdenes de magnitud menor para segmentaciones pequeñas (64 y 128) que para segmentaciones grandes (1024 y 4096). La segmentación de 512 presenta unos resultados ligeramente menor que las segmentaciones grandes.
- La estabilidad de los métodos en su comportamiento frente a la SNR también depende fuertemente de la segmentación, de forma que para segmentaciones pequeñas se aprecia un aumento suave del MSE al disminuir la SNR, mientras que para segmentaciones grandes se puede ver como el MSE de los distintos métodos no sigue un comportamiento definido frente a la SNR, aunque el comportamiento global es a aumentar.
- Para todas las segmentaciones los MSE que presentan los distintos métodos son bastante más diferentes entre ellos que en el caso de los procesos de banda ancha.
- Por último señalar que todos los métodos presentan MSE mucho menores y un mejor comportamiento frente a la SNR a segmentaciones bajas. Esto puede llevar a probar valores de la segmentación menores, con el fin de estudiar hasta que valor el MSE disminuye con la segmentación.

b) Comportamiento general frente a la SNR:

- Tal y como se ha señalado, el MSE de los métodos aumenta al disminuir la SNR de una forma bastante suave para segmentaciones pequeñas y de una forma irregular para segmentaciones grandes.
- Para segmentaciones pequeñas no aparece un aumento brusco del MSE al aumentar la SNR, como sucedía en los procesos de banda ancha, sin perder la tendencia a aumentar.

c) Comportamiento general frente al orden del modelo:

- El MSE que presentan los métodos para el proceso AR1 (de orden 2) es más de un orden de magnitud menor que el que presentan por los procesos AR2 y AR3 (de orden 4, ambos). También el comportamiento frente al ruido es mucho mejor para el proceso de orden dos, aumentando más el MSE al aumentar la SNR para los procesos de orden cuatro.

d) Comportamiento frente a la proximidad de los polos (comparación entre AR2 y AR3):

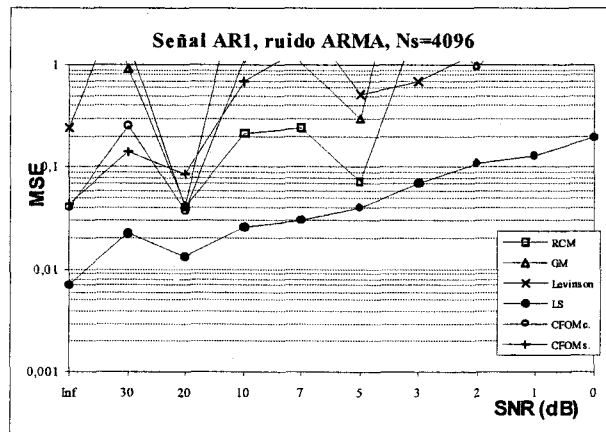
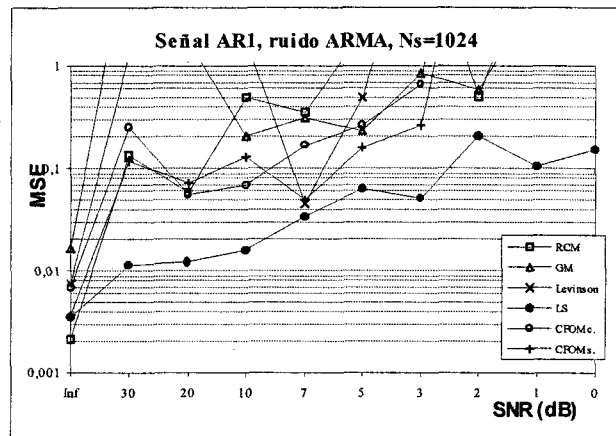
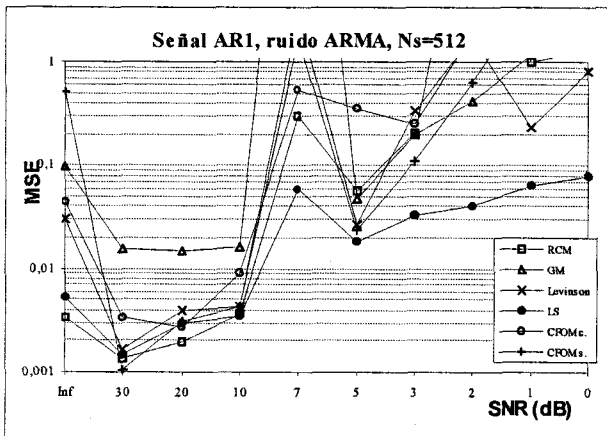
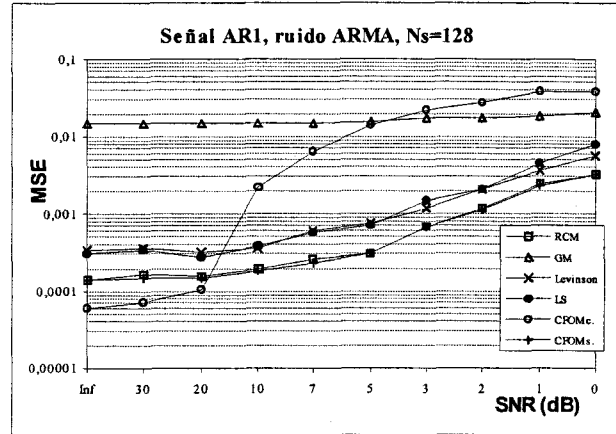
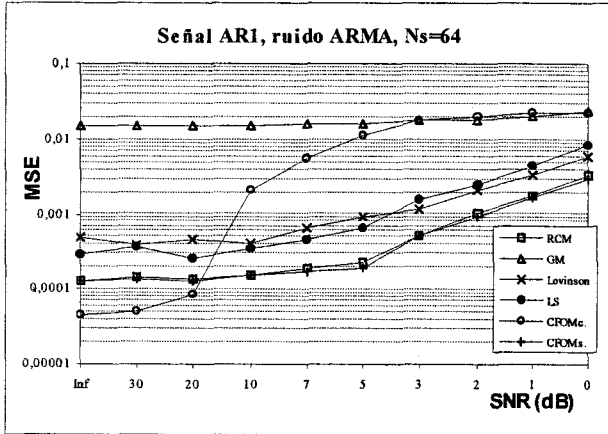
- En general, el MSE es bastante menor para los procesos de picos separados que para el de picos juntos, en casi todos los métodos.
- Este comportamiento se repite si se uno se fija en el comportamiento del MSE frente a la SNR, siendo mucho mejor para el proceso de picos separados que para el otro.

e) Comparación entre los distintos métodos:

- Para las señales AR1 y AR2 el método que mejor estima a SNR y segmentaciones bajas es el método CFOM complejo, siendo mucho más importante para la señal AR2. Este método es a su vez el que más siente el aumento de la SNR, presentando un aumento mayor del MSE

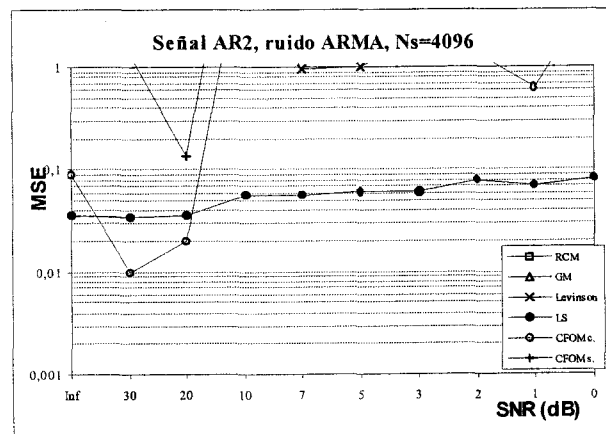
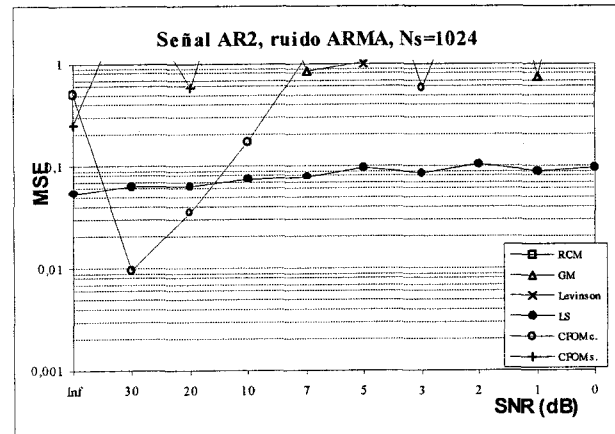
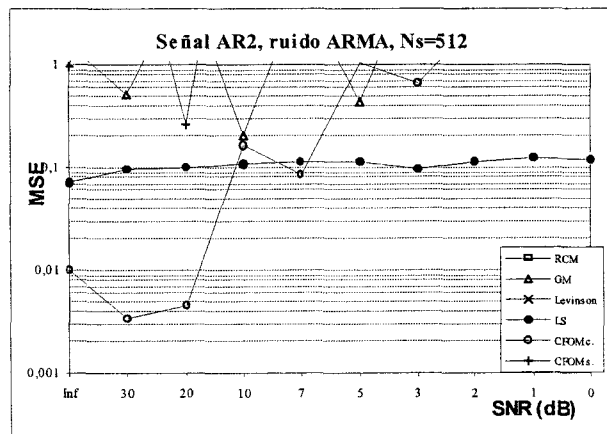
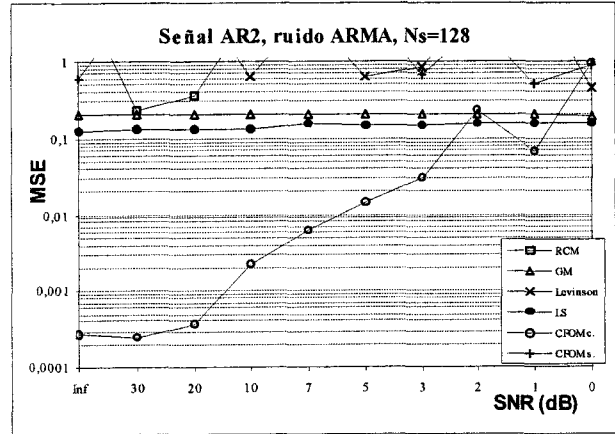
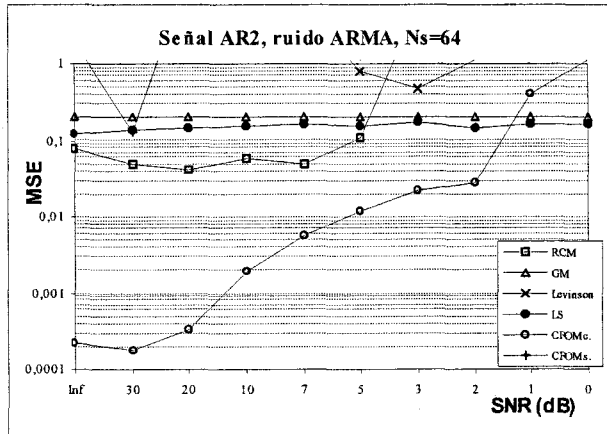
Figuras 3.57-61. Señal AR1, Ruido ARMA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



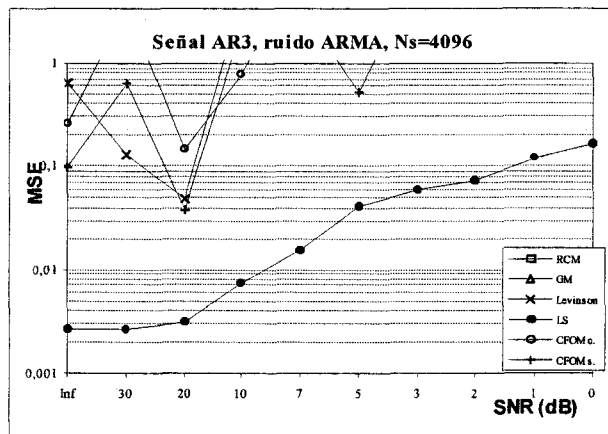
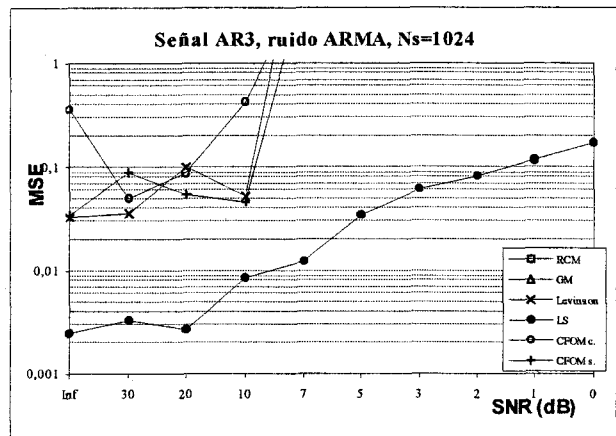
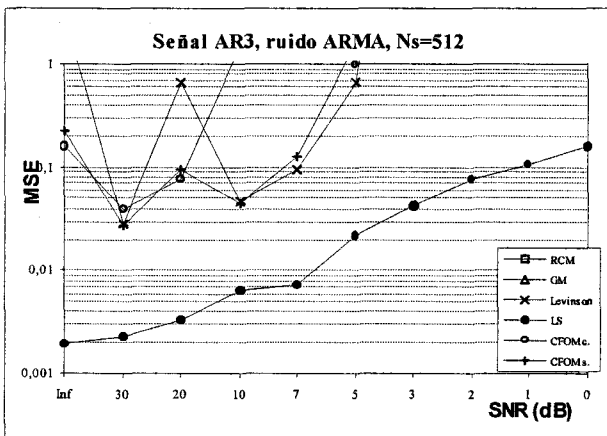
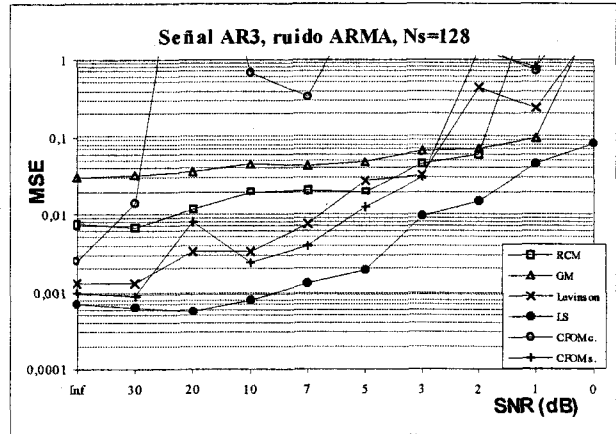
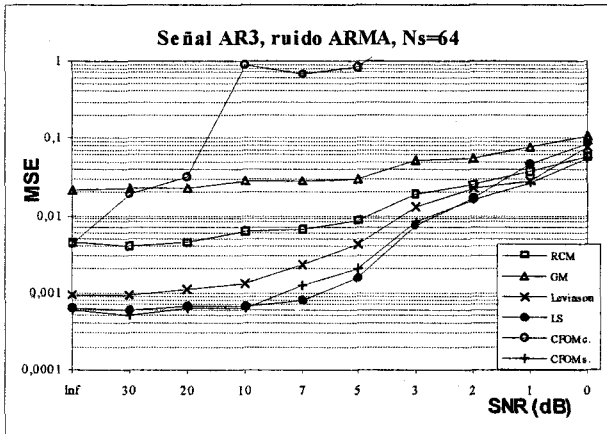
Figuras 3.62-66. Señal AR2, Ruido ARMA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



Figuras 3.67-71. Señal AR3, Ruido ARMA

Comportamiento del MSE frente a la SNR para distintas segmentaciones.



(mayor pendiente) que los demás métodos al aumentar la SNR. Incluso con este comportamiento, el MSE que presenta este método es menor que el de cualquier otro para segmentaciones bajas y para la señal AR2 hasta niveles de SNR de 2 dB. La mayor sensibilidad frente a ruido sigue presentandola para la señal AR3, no así su menor MSE, que en esta señal es mayor que el de la mayoría de los métodos.

- Para la señal AR1, el método RCM es el que proporciona un MSE menor a SNR medias y bajas, y a SNR altas sólo son superados por el método CFOM complejo. En la señal AR2 es el único método, aparte del CFOM complejo, que es capaz de obtener un MSE por debajo de 0.1, a segmentaciones bajas; a segmentaciones altas también lo consigue el método LS. En la señal AR3, también proporciona un MSE por debajo de 0.1 para segmentaciones pequeñas, en cambio casi todos los métodos obtienen valores menores.

- El método GM presenta las peores estimaciones, se puede observar como son casi independientes del nivel de SNR. Sin embargo, en la señal AR2 es de los métodos que mejor estimación proporciona, lo que choca con el comportamiento presentado en el resto de señales. Posteriormente se intentará explicar con mayor claridad este hecho a través de un estudio más detallado de la media y la varianza de las estimaciones.

- El método de Levinson y el LS presentan MSE muy similares para las señales AR1 y AR3 y para segmentaciones pequeñas, siendo el método de Levinson ligeramente peor. A segmentaciones grandes, el método LS es el único que proporciona MSE pequeños y un comportamiento regular de este frente a la disminución de la SNR. Para la señal AR2 presenta un MSE prácticamente independiente de la SNR utilizada, siendo también prácticamente independiente de la segmentación. Este comportamiento se podrá entender mejor con un estudio más detallado se media y varianza.

- El método CFOM simple presenta buenos MSE para las señales AR1 y AR3, pero no para la señal AR2. Concretamente, para la señal AR1 presenta un MSE prácticamente idéntico al método RCM, siendo a SNR bajas y medias, los MSE menores y a SNR altas sólo superiores al MSE que proporciona el método CFOM complejo. En la señal AR3 presenta MSE sólo ligeramente mayor que el proporcionado por el método de LS, que es el menor, siempre a segmentaciones bajas. A segmentaciones altas presenta un mal comportamiento, no apareciendo en muchos casos su MSE en la escala representada, sucediendo lo mismo para la señal AR2, en todas las circunstancias.

En conclusión se puede afirmar que, para procesos de banda estrecha, la segmentación con la que se trata a los datos es un factor mucho más determinante que en el caso anterior de procesos de banda ancha; de forma que el MSE de todos los métodos disminuye significativamente al disminuir la segmentación. Esta disminución puede ser de hasta de dos ordenes de magnitud. También se observa que la estimación de señales con polos cercanos es mucho menos efectiva con los métodos utilizados. Esta afirmación se ha corroborado estudiando distintos procesos de banda estrecha, con distintas distancias entre sus polos en el plano complejo, y comprobando que este comportamiento es general.

Por último cabe señalar que el comportamiento de los diferentes métodos varía sustancialmente para los procesos de banda estrecha, respecto del que aparecía en los procesos de banda ancha; de forma que métodos que anteriormente se presentaban deficiencias significativas a la hora de estimar, ahora se revelan como los que menores niveles de MSE proporcionan. Este es el caso del método CFOM complejo. En general se puede decir que al

introducir más *slices* de cumulantes en los sistemas de ecuaciones, se mejora apreciablemente los resultados obtenidos con los mismos métodos de un *slice*, al contrario de lo que sucedía en los procesos de banda ancha. Esta mejora se hace muy significativa en el caso de los métodos CFOM complejo y simple en la señal AR2. La explicación de este hecho hay que buscarla en la proximidad de los polos al círculo unidad, que hace que la respuesta impulso del sistema decaiga lentamente. Esto implica que al valor absoluto de los cumulantes de *slice* mayores, que dependen de la respuesta impulso de retardos temporales mayores, sea comparable al de los *slice* menores, con lo que la información que introducimos al incluir nuevos *slice* no es tan sensible a los errores de estimación como en el caso de los procesos de banda ancha. El resultado es que sí se mejoran las estimaciones los métodos al introducir más *slice*.

Hasta este punto se ha obtenido una primera valoración del comportamiento de los métodos haciendo uso del MSE que estos proporcionan. Sin embargo, se hace necesario un estudio más profundo que permita una caracterización más precisa de los métodos, así como de en que situaciones son preferibles unos u otros. A su vez, es necesario comparar los resultados obtenidos con estos métodos, con los obtenidos mediante métodos de segundo orden, ya que las técnicas de alto orden no tendrían sentido si no supusieran una mejora efectiva respecto de las técnicas clásicas de segundo orden.

Para explicar mejor los comportamientos de los distintos métodos en la señal AR2, se ha construido la tabla 3.2. en la que aparecen explícitamente la media y la varianza de las estimaciones de los distintos métodos, tanto de segundo como de cuarto orden, para esta señal y para una segmentación de 64 datos por segmento. Dentro de los métodos de cuarto orden, se observa como incluso a SNR infinito solamente el método de CFOM complejo es capaz de proporcionar unos valores cercanos a los verdaderos. Si a este hecho unimos el de una varianza bastante menor que la de los otros métodos, el resultado es el MSE varios ordenes de magnitud menor. Los métodos CFOM simple, RCM y LS proporcionan unos parámetros con errores importantes pero dentro de unos límites razonables. Al disminuir la SNR va aumentando tanto el sesgo como la varianza de casi todos los métodos, salvo del método Geométrico y el LS, los cuales apenas si van a verse afectados de por el ruido. Las estimaciones de estos dos métodos están lejos de los valores verdaderos, para esta señal, aunque su MSE permanece relativamente bajo debido a una varianza baja. De comparar esta tabla con tablas similares construidas para segmentaciones mayores, se observa que al aumentar el tamaño de los segmentos (aumenta N_s) la varianza en los parámetros aumenta exageradamente, lo que hace que aumente mucho el MSE y se vuelva inestable, tal y como se aprecia en las figuras. El comportamiento irregular de las curvas para segmentaciones altas se debe precisamente a esta alta varianza y su naturaleza estadística, que produce grandes fluctuaciones en el valor de los coeficientes de una realización a otra.

En la tabla 3.2. aparecen también los mismos cálculos para los métodos de segundo orden. En ella se aprecia como el método de Burg y el de la Covarianza proporcionan estimaciones casi perfectas a SNR infinito (sin ruido), sin embargo, a medida que la disminuye la SNR las estimaciones de estos métodos empeora notablemente. De esta forma se observa como a partir de SNR igual a 20 dB, la estimación del método CFOM complejo esta menos sesgada que la de los métodos de segundo orden, aunque presentan una varianza ligeramente mayor. Esto es mucho más claro a SNR 10 dB o menores, sin embargo a estas SNR las estimaciones que proporciona el método CFOM complejo aparecen ligeramente sesgadas. Esto

SEÑAL AR2, $N_s=64$

SNR	CUARTO ORDEN						SEGUNDO ORDEN		
	RCM	GM	Levinson	LS	CFOM complejo	CFOM simple	Burg	Levinson	Covarianza
Inf	-1,63±0,818	-0,935±0,0207	3,45±59,4	-1,49±0,585	-2,73±0,0292	-2,64±1,29	-2,71±0,00492	-4,78±13,7	-2,71±0,00466
	1,88±0,928	0,146±0,0369	5,36±52,6	1,07±0,934	3,71±0,0864	3,03±7,91	3,66±0,0105	9,08±35,4	3,66±0,0101
	-1,7±1,08	-0,0591±0,0097	-18±209	-0,611±0,584	-2,71±0,0952	-1,69±11,3	-2,65±0,0101	-8,27±36,5	-2,65±0,01
	1,04±0,919	0,107±0,00397	13,6±157	0,489±0,295	0,984±0,0432	0,445±5,9	0,958±0,00438	3,33±15,3	0,958±0,00439
30	-1,74±0,232	-0,936±0,0214	-1,06±8,53	-1,4±0,536	-2,73±0,0241	-2,86±1,23	-2,7±0,00492	81,2±824	-2,7±0,00471
	1,96±0,416	0,148±0,0381	-0,401±1,71	0,883±0,876	3,71±0,0729	4,01±2,69	3,63±0,0118	-214±2140	3,63±0,0118
	-1,61±0,493	-0,0603±0,0112	1,15±16,5	-0,435±0,552	-2,7±0,0816	-2,97±2,37	-2,62±0,012	222±2200	-2,62±0,012
	0,925±0,305	0,107±0,00335	-0,358±14,9	0,425±0,245	0,984±0,0379	1,06±0,827	0,948±0,00496	-92,6±920	0,948±0,00496
20	-1,78±0,201	-0,936±0,0163	-1,59±16,2	-1,36±0,492	-2,71±0,036	-1,92±11	-2,62±0,0127	0,116±22,5	-2,62±0,0127
	2,08±0,378	0,146±0,0307	-0,52±2,84	0,789±0,692	3,7±0,103	1,75±27,3	3,44±0,0355	-3,64±58,5	3,44±0,0356
	-1,74±0,425	-0,0584±0,00973	2,4±31,8	-0,373±0,438	-2,73±0,113	-0,898±25,6	-2,43±0,0359	4,81±59,9	-2,43±0,036
	0,972±0,25	0,106±0,00369	-1,36±28,6	0,423±0,338	1,01±0,0518	0,384±8,73	0,873±0,013	-2,11±24,5	0,873±0,013
10	-1,8±0,316	-0,934±0,0182	-0,306±5,7	-1,25±0,507	-2,53±0,0748	-2,25±5,67	-2,17±0,0397	-2,1±3,51	-2,17±0,0398
	2,12±0,811	0,141±0,0282	-1,22±8,34	0,641±0,724	3,49±0,206	3,46±17,3	2,34±0,11	2,19±9,21	2,34±0,111
	-1,78±1,22	-0,0563±0,00901	1,03±11,6	-0,331±0,465	-2,72±0,237	-3,23±19,7	-1,36±0,105	-1,24±9,61	-1,36±0,105
	0,988±0,716	0,107±0,00433	0,2±8,12	0,46±0,341	1,13±0,121	1,57±8,82	0,46±0,0328	0,415±4,1	0,46±0,0328
7	-1,83±0,403	-0,937±0,018	-1,1±5,77	-1,21±0,536	-2,38±0,114	-1,59±7	-1,97±0,0369	-1,93±1,58	-1,97±0,0368
	2,17±0,817	0,141±0,0279	0,664±9,79	0,625±0,78	3,32±0,335	2,35±18,2	1,86±0,1	1,73±4,35	1,86±0,1
	-1,8±0,953	-0,0564±0,0123	-0,658±17,5	-0,381±0,521	-2,74±0,416	-2,63±20,9	-0,916±0,0915	-0,761±4,65	-0,917±0,0915
	0,983±0,541	0,106±0,00559	0,719±11,9	0,511±0,374	1,23±0,227	1,62±10,1	0,291±0,0252	0,215±2,01	0,291±0,0252
5	-1,84±0,793	-0,941±0,0223	-1,09±3,36	-1,32±0,515	-2,24±0,168	-1,5±2,56	-1,84±0,0323	-0,944±8,93	-1,84±0,0324
	2,39±1,21	0,148±0,0298	-0,0531±2,42	0,72±0,765	3,1±0,511	1,17±6,58	1,56±0,0849	-0,936±24,9	1,56±0,0852
	-2,17±2,28	-0,0585±0,0139	0,574±4,96	-0,33±0,528	-2,64±0,609	-0,746±7,47	-0,643±0,0738	2,05±26,8	-0,643±0,074
	1,19±1,56	0,106±0,00685	0,00441±4,66	0,419±0,356	1,26±0,321	0,55±3,59	0,192±0,0184	-0,979±11,6	0,192±0,0184
3	-2,26±1,5	-0,945±0,027	-0,565±1,63	-1,21±0,563	-2,04±0,159	-2,02±2,35	-1,73±0,0321	-1,88±0,939	-1,73±0,0322
	2,59±1,2	0,149±0,0346	-0,218±1,97	0,546±0,706	2,75±0,576	2,07±7,28	1,32±0,0788	1,7±2,58	1,32±0,0791
	-1,68±19,6	-0,0566±0,0203	-0,217±3,71	-0,263±0,634	-2,43±0,767	-1,25±8,6	-0,435±0,0647	-0,83±2,77	-0,435±0,0648
	0,657±11,1	0,103±0,0102	0,78±2,85	0,446±0,561	1,26±0,442	0,536±4,03	0,119±0,0158	0,281±1,19	0,119±0,0158
2	-2,58±3,44	-0,954±0,0321	-1,07±3,36	-1,39±0,589	-1,94±0,157	-0,447±9,28	-1,68±0,0281	-1,74±0,438	-1,68±0,0279
	5,17±16,9	0,157±0,0407	0,551±4,49	0,817±0,912	2,59±0,57	-1,33±29,1	1,21±0,0725	1,4±1,1	1,21±0,0727
	-5,49±23,8	-0,0566±0,0244	-0,53±7,07	-0,383±0,611	-2,37±0,808	1,46±32,4	-0,346±0,0585	-0,566±1,12	-0,346±0,0586
	2,68±12,4	0,102±0,0129	0,656±5,25	0,414±0,379	1,29±0,488	-0,125±13,9	0,0909±0,0141	0,189±0,458	0,0909±0,0141
1	-1,85±2,93	-0,956±0,0365	0,451±14,5	-1,33±0,591	-1,78±0,687	-3,35±9,08	-1,64±0,0259	-1,72±0,357	-1,64±0,026
	1,93±14,9	0,161±0,0445	-0,433±5,02	0,658±0,839	2,07±3,27	5,41±24,3	1,12±0,0621	1,33±0,858	1,12±0,0625
	-1,35±25,1	-0,0601±0,0247	-1,95±24	-0,245±0,631	-1,77±4,71	-4,5±25,4	-0,276±0,047	-0,498±0,84	-0,277±0,0471
	0,677±14,7	0,0991±0,0143	2,39±22,7	0,375±0,491	0,984±2,83	1,71±10,5	0,0682±0,012	0,159±0,332	0,0682±0,012
0	-3,88±14,5	-0,968±0,0352	-0,13±9,29	-1,38±0,531	-1,78±0,492	-1,71±4,76	-1,6±0,0237	-1,91±2,4	-1,6±0,0242
	11,1±61,6	0,164±0,0466	-0,506±9,06	0,676±0,693	2,22±4,96	2,14±10,5	1,04±0,0567	1,95±6,94	1,04±0,0577
	-13,4±80,8	-0,0539±0,0307	-0,673±10,5	-0,169±0,563	-2,05±8,32	-2,09±11,4	-0,216±0,0454	-1,24±7,76	-0,216±0,0461
	6,57±39,7	0,0971±0,0155	1,34±10,1	0,304±0,499	1,2±5,38	1,23±5,82	0,0507±0,0149	0,513±3,51	0,0507±0,0149

Tabla 3.2. Media y varianza para los parámetros estimados con los métodos de cuarto y segundo orden para una señal segmentada con $N_s=64$

se aprecia perfectamente en las figuras 3.72-77. En ellas se observa como la estimación sin ruido es prácticamente perfecta y a medida que se añade ruido va empeorando más rápidamente para los métodos de segundo orden que para los de cuarto. Sin embargo, a los niveles de ruido para los que los métodos de segundo orden claramente no reproducen el espectro, SNR de 10 dB, el método de CFOM complejo (cuarto orden) reproduce la forma pero presenta el segundo pico algo sesgado. Esto mismo sucede para el método RCM el cual reproduce la forma pero presenta el segundo pico ligeramente desplazado. En la siguiente página, figuras 3.78-83, se representan los espectros de 20 estimaciones realizadas con los métodos RCM, LS y CFOM simple, para señales de 4096 datos, segmentaciones de 64 datos cada segmento y SNR infinito (sin ruido) y 10 dB. Vemos como el método RCM es capaz de reproducir la forma pero con el segundo pico bastante desplazado. El método LS es incapaz, por su parte, de reproducir la forma y no presentan segundo pico. Ninguno de estos dos

métodos presentan una diferencia apreciable al variar la SNR de la señal. Por otro lado, el método CFOM simple proporciona una estimación aceptable sin ruido pero se observa como a SNR=10 dB es incapaz de proporcionar si quiera el segundo pico, presentando por otro lado una muy alta varianza. El método Levinson (no representado) es incapaz de reproducir los dos picos y presenta una gran varianza a cualquier nivel de SNR, mientras que el GM presenta poca varianza pero la peor de todas las estimaciones, en las que no aparece pico alguno.

Como resumen, se puede decir que si se desea que aparezcan los dos picos para la señal AR2, a niveles de SNR en los que los métodos de segundo orden no los presenta, es decir SNR=10 dB, únicamente los métodos RCM y CFOM complejo son capaces de hacerlo; mientras que si se persigue una correcta ubicación de ambos picos, sólo lo consigue el método CFOM complejo, aunque presenta el segundo pico ligeramente sesgado. Para evitar el este pequeño sesgo y conseguir reproducir el espectro teórico con una SNR de 10 dB es necesario disminuir aún más el tamaño de los segmentos. Si a partir de las mismas señales tomadas con anterioridad aplicamos el método CFOM complejo con una segmentación de 32 datos por segmento, la figura que se obtiene es la figura 3.84. En ella se ve como efectivamente el método CFOM complejo resuelve perfectamente los picos a una SNR de 10 dB y sin apenas varianza. En el resto de los métodos de cuarto orden una disminución en el tamaño de los segmentos a 32 no proporciona mejoras significativas en las estimaciones, aunque tampoco proporciona peores resultados. Los métodos de segundo orden, por su parte, no mejoran al disminuir la segmentación, ya que son casi insensibles a este factor.

Si la señal AR presenta sus picos todavía más próximos que la señal AR2 ninguno de los métodos de cuarto orden propuestos consigue resolverlos, salvo el método CFOM complejo. En este caso los métodos de segundo orden son incapaces de presentar dos picos ya a SNR de 20 dB, donde el método CFOM complejo aún presenta estimaciones adecuadas, aunque con mayor varianza a medida que se juntan los picos de la señal. Esto es lo que se aprecia en las figuras 3.85-87. En 3.85. y 3.88 se representan, con líneas de puntos, 20 realizaciones de 4096 datos de un proceso AR de parámetros $[1 \ -2.760 \ 3.809 \ -2.654 \ 0.924]$, segmentadas a 64 datos por segmento, contaminadas con el mismo ruido ARMA que en las otras señales de banda estrecha y para SNR=20 dB. El método utilizado en la figura 3.85. es el método de la Covarianza, de segundo orden, y en la figura 3.86. es el método CFOM complejo, de cuarto orden. La línea continua es el espectro de potencia de los coeficientes teóricos. En la figura 3.87. lo que se representa es el espectro obtenido a partir de la media de los coeficientes de 100 realizaciones obtenidos con el método CFOM complejo en las circunstancias anteriores, representado por una línea de puntos. Una disminución de la segmentación a 32 datos por segmento no produce una mejora apreciable en las estimaciones del método CFOM complejo.

Como ya se ha señalado con anterioridad, el comportamiento de los distintos métodos en la estimación de procesos de banda estrecha varía apreciablemente del que aparecía en los procesos de banda ancha. De esta forma se ha podido observar como el mejor método para estimar los coeficientes de procesos AR de banda estrecha que posean polos de la función de transferencia cercanos entre sí en el plano complejo, es el método CFOM complejo, método que se presentó como el más ineficaz en la estimación de procesos de banda ancha. Por otra parte, se comprobó como los métodos de segundo orden eran capaces de reproducir la forma del espectro de los coeficientes teóricos en los procesos de banda ancha con ruido, pero estos aparecían sesgados, mientras que ahora (procesos de banda estrecha) son incapaces de

Figura 3.72. Método CFOM complejo,
 $N_s=64$, SNR=Inf

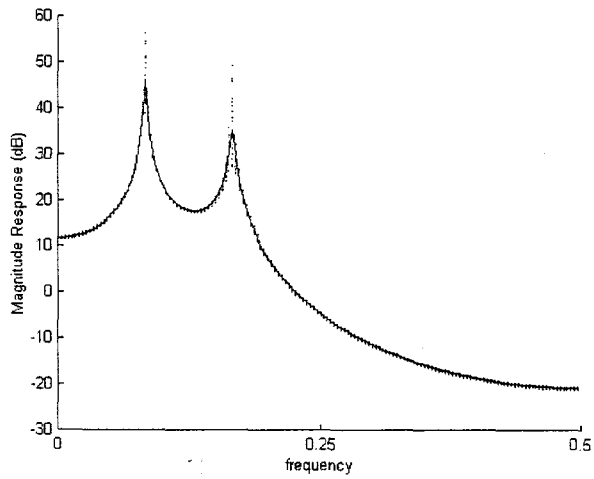


Figura 3.73. Método de la Covarianza,
 $N_s=64$, SNR=Inf

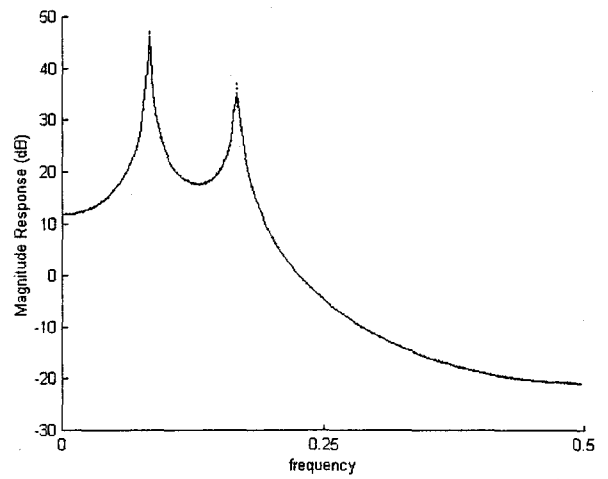


Figura 3.74. Método CFOM complejo,
 $N_s=64$, SNR=20 dB

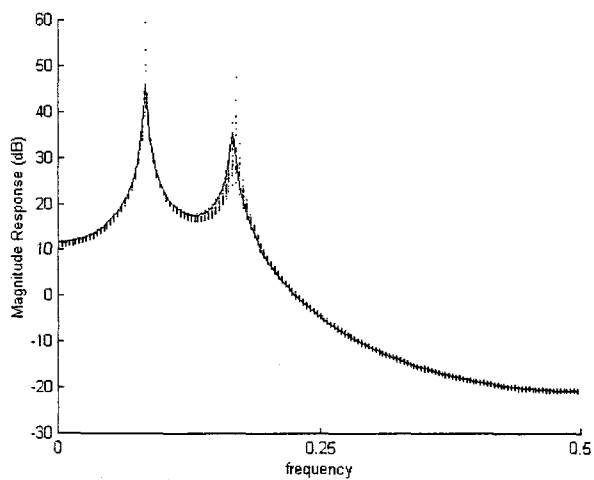


Figura 3.75. Método de la Covarianza,
 $N_s=64$, SNR=20 dB

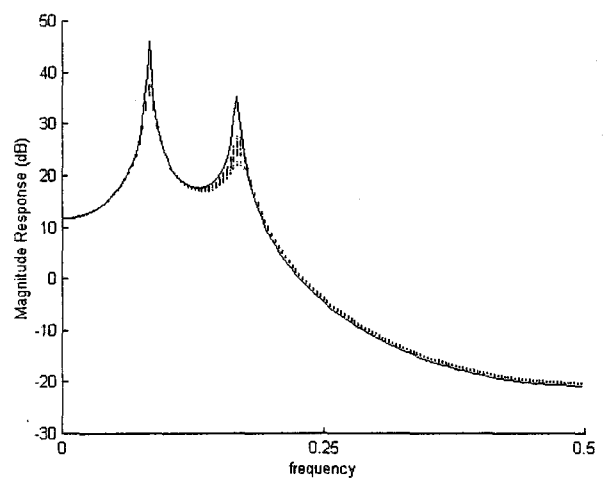


Figura 3.76. Método CFOM complejo,
 $N_s=64$, SNR=10 dB

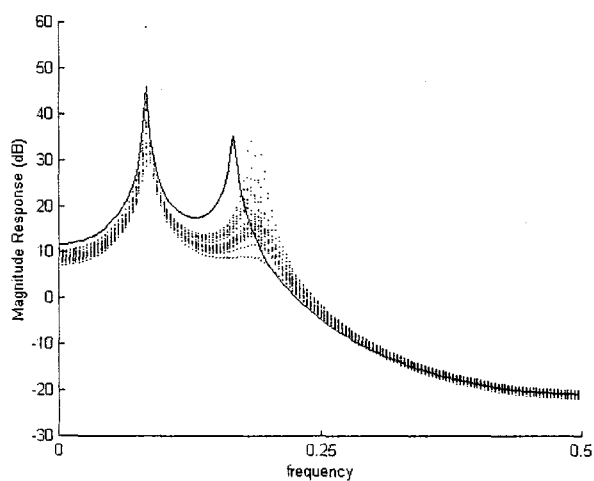
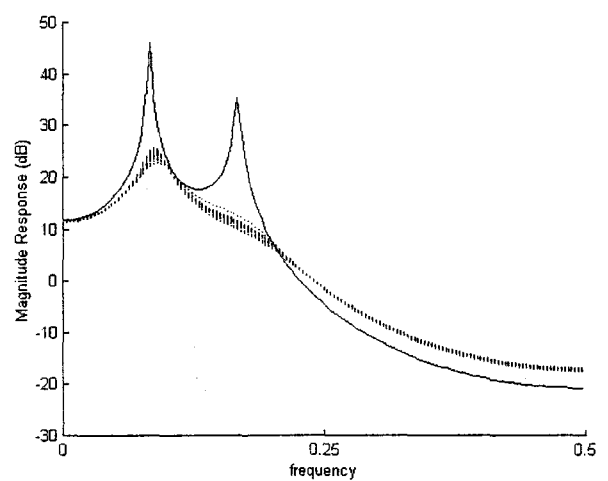


Figura 3.77. Método de la Covarianza,
 $N_s=64$, SNR=10 dB



y de la Covarianza, de segundo orden (derecha). Con línea continua se representa el espectro de los coeficientes teóricos.

Figura 3.78. Método RCM,
 $N_s=64$, SNR=Inf

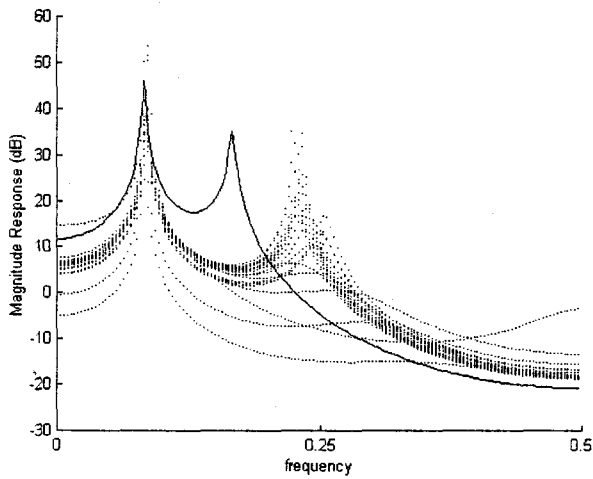


Figura 3.79. Método RCM,
 $N_s=64$, SNR=10 dB

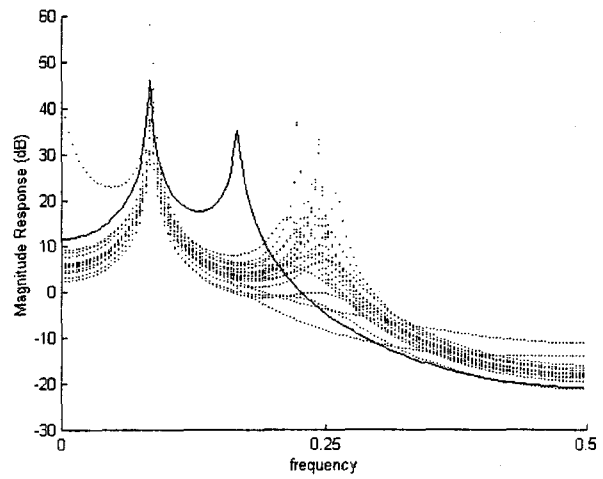


Figura 3.80. Método Mín. Cuadrados,
 $N_s=64$, SNR=Inf

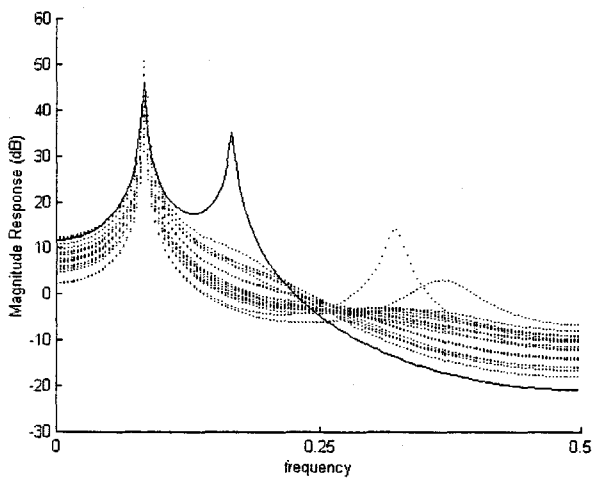


Figura 3.81. Método Mín. Cuadrados,
 $N_s=64$, SNR=10 dB

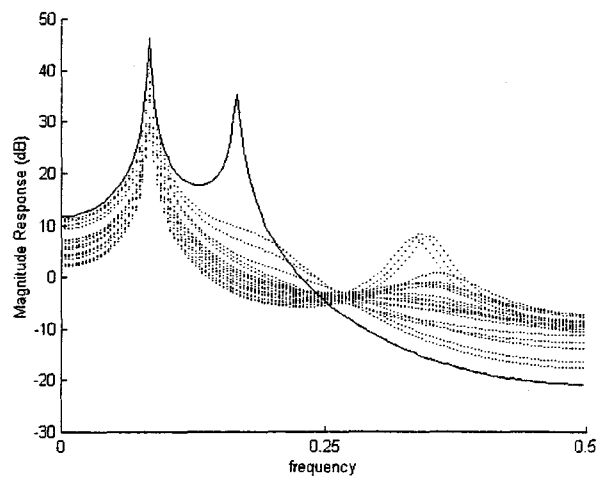


Figura 3.82. Método CFOM simple,
 $N_s=64$, SNR=Inf

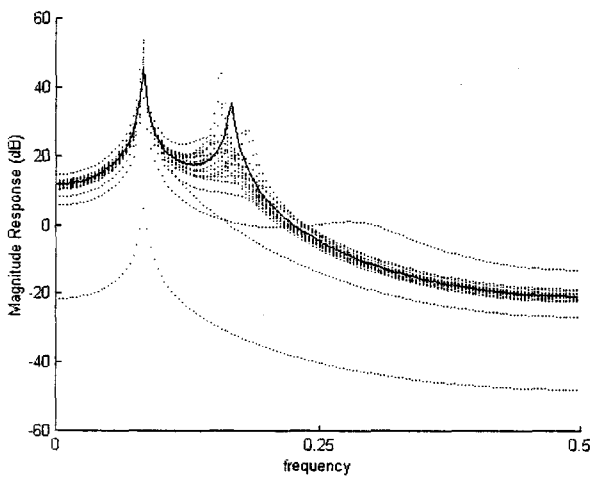
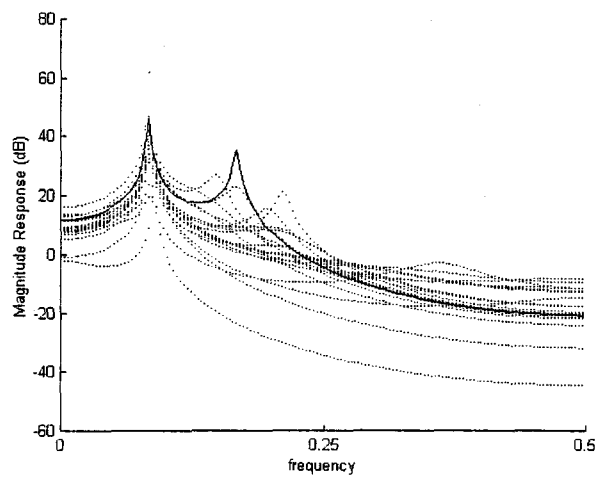


Figura 3.83. Método CFOM simple,
 $N_s=64$, SNR=10 dB



En las figuras se representa con líneas discontinuas los espectros de potencia de 20 estimaciones distintas con los métodos de cuarto orden RCM, Mínimos cuadrados y CFOM simple. Con línea continua se representa el espectro de los coeficientes teóricos.

Figura 3.84. Señal AR2
Método CFOM complejo, $N_s=32$, SNR=10 dB

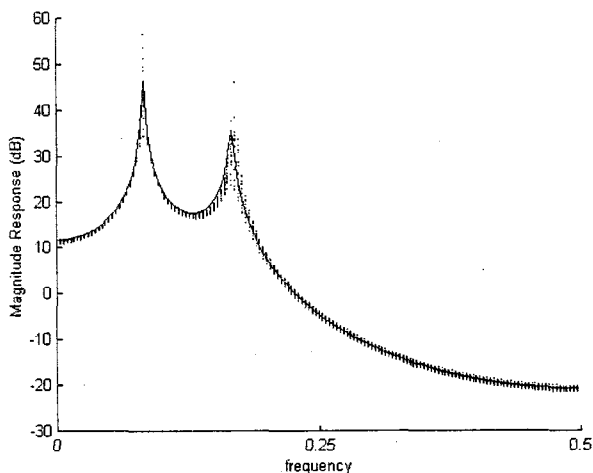
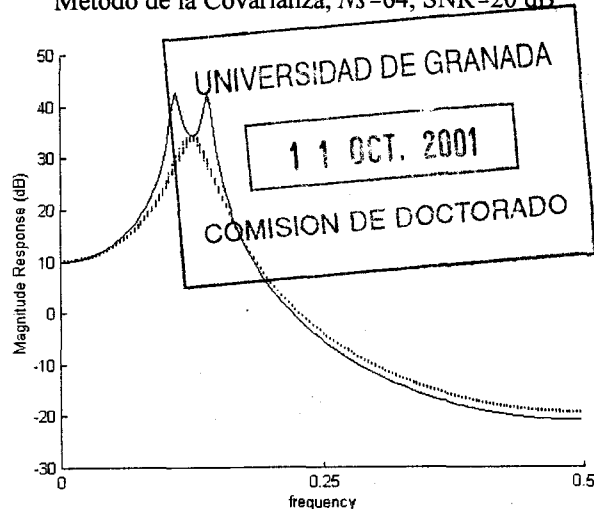


Figura 3.85. Señal de parámetros:
[1 -2.760 3.809 -2.654 0.924]
Método de la Covarianza, $N_s=64$, SNR=20 dB



En las tres primeras figuras se representan con líneas discontinuas los espectros de 20 parámetros estimados de distintas señales y con distintos métodos. En la figura 3.84 la señal es la señal AR2 y el método el CFOM complejo (cuarto orden). En las figuras 3.85 y 3.86 la señal es una señal AR de parámetros [1 -2.760 3.809 -2.654 0.924] y los métodos son el método de la Covarianza (segundo orden) en la figura 3.85., y el método CFOM complejo (cuarto orden) en la figura 3.86. En estas tres figuras la línea continua representa el espectro de los coeficientes teóricos. En la figura 65 se representa con línea de puntos el espectro de los coeficientes medios de 100 estimaciones con el método CFOM complejo. La señal es la misma que en las figuras 3.85-86.

Figura 3.86. Señal de parámetros:
[1 -2.760 3.809 -2.654 0.924]
Método CFOM complejo, $N_s=64$, SNR=20 dB

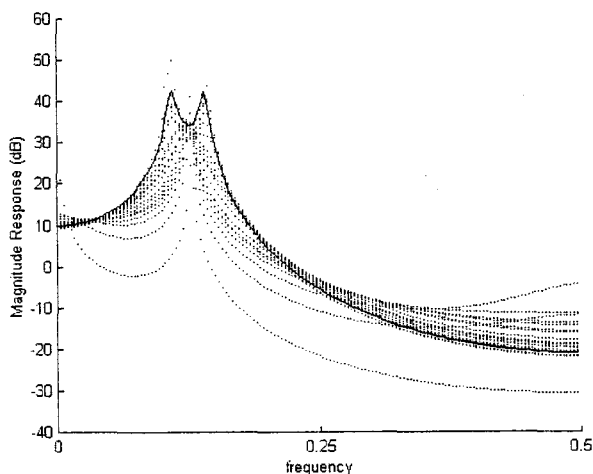
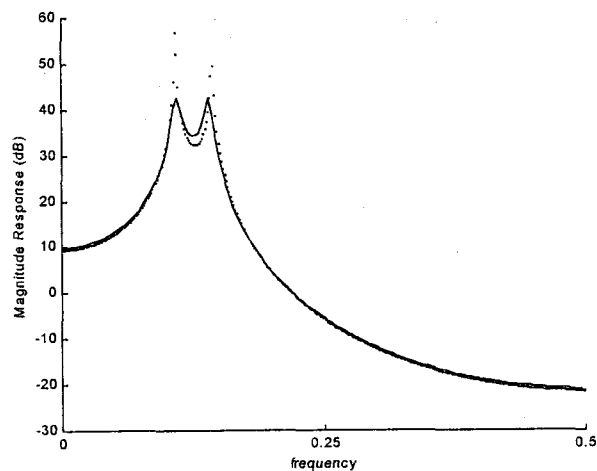


Figura 3.87. Señal de parámetros:
[1 -2.760 3.809 -2.654 0.924]
Método CFOM complejo, $N_s=64$, SNR=20 dB



reproducir siquiera la forma. Esta gran diferencia va disminuyendo a medida que se van separando los polos de la función de transferencia unos de otros en el plano complejo, pero cerca del círculo unidad para que sigan siendo procesos de banda estrecha. Este es el caso de la señal AR3. En ella el comportamiento de casi todos los métodos es mucho mejor que para la señal AR2, salvo en el caso del método CFOM complejo, que empeora notablemente, tal y como se espera de las gráficas de las figuras 3.67-71., y no se representa gráficamente debido al mala estimación que presenta. Sigue siendo un factor completamente determinante la segmentación con la que se trata la señal, salvo para el método LS; pero para segmentaciones pequeñas casi todos los métodos proporcionan estimaciones aceptables incluso a SNR bajas. Esto queda representado en las figuras 3.88-93. En estas figuras se representan con línea discontinua los espectros de las estimaciones realizadas a 20 realizaciones del proceso AR3 con una SNR de 5 dB y de 4096 datos cada una. Para realizar los cálculos se han tomado segmentos de 64 cada uno. Las cinco primeras figuras (3.88-92.) son métodos de cuarto orden, entre los que destacan el CFOM simple y el LS (como era de esperar a raíz de las figuras 3.67-71). Vemos como todos los métodos representados obtienen una estimación más o menos adecuada. No se ha representado el método CFOM complejo debido a que los espectros de los parámetros estimados mediante este método defieren mucho del teórico. De esta manera se pone de manifiesto que el método CFOM complejo no es adecuado para señales cuyos picos estén muy separados. En la figura 3.93. se representa los espectros de 20 estimaciones realizadas con el método de la Covarianza, de segundo orden. En esta figura se observa un comportamiento similar al que aparecía en los espectros de banda ancha, es decir, los métodos de segundo orden son capaces de reproducir la forma del espectro teórico pero esta aparece sesgada, aunque presentando una menor varianza que los métodos de cuarto orden.

Para finalizar, se ha representado en las figuras 3.94-99. el comportamiento, para la señal AR1, de los mismos métodos de cuarto y segundo orden que en el caso de la señal AR3. Se puede observar como el comportamiento para la señal AR1 es totalmente idéntico en todos los métodos al que presentan para la señal AR3, de forma que cuando los picos están suficientemente separados, el comportamiento de los métodos en la estimación de cada pico es como si estimaran cada pico individualmente, no presentando así ningún perjuicio en la estimación de dos picos respecto de la de un pico; no como sucede en el caso de la señal AR2, con los picos más juntos, donde el comportamiento de los distintos métodos es muy diferente al presentado en la estimación de un sólo pico.

III.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se han estudiados el comportamiento de los métodos desarrollados durante el capítulo II, así como su utilidad frente a otros métodos. Las principales aportaciones han sido:

- Estudio comparativo de los resultado que proporcionan los métodos paramétricos AR trispectrales construidos en el capítulo anterior en diversos procesos AR contaminados con ruido aditivo gaussiano coloreado.

- Comparación entre los resultados obtenidos para métodos de cuarto orden, con los obtenidos mediante métodos de segundo orden.

Figura 3.88. Señal AR3, Método RCM,
 $N_s=64$, SNR=5 dB

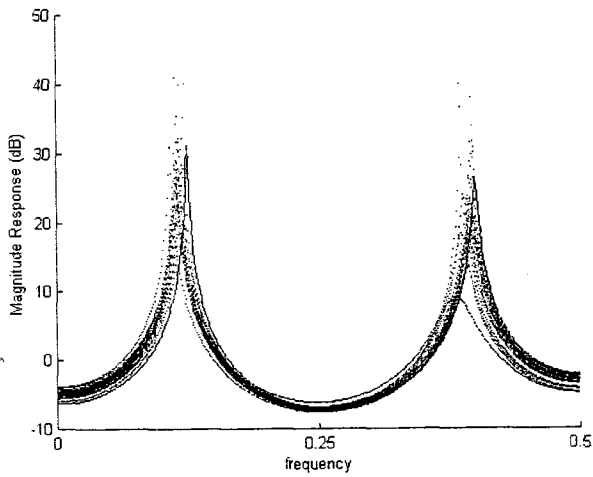


Figura 3.89. Señal AR3, Método GM,
 $N_s=64$, SNR=5 dB

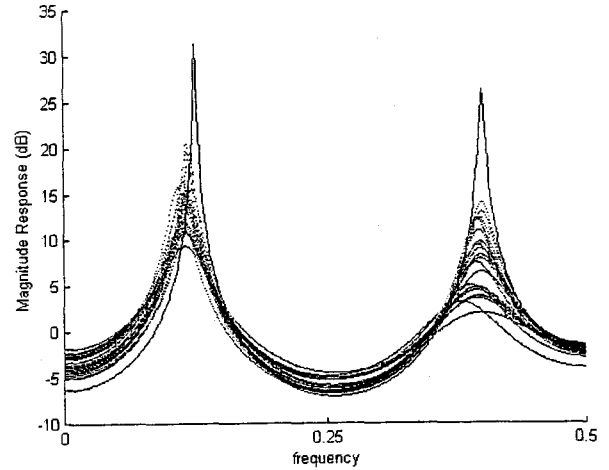


Figura 3.90. Señal AR3, Método Levinson,
 $N_s=64$, SNR=5 dB

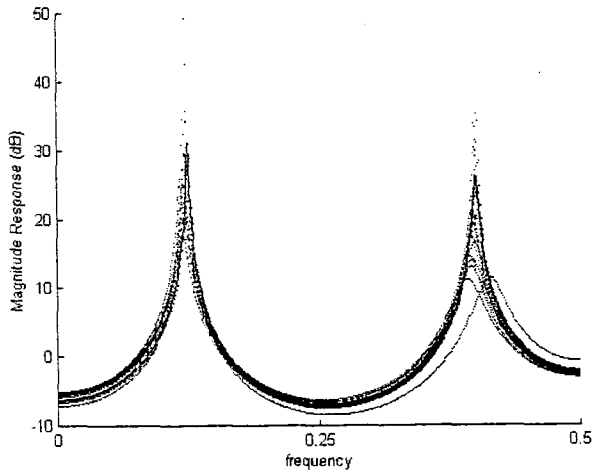


Figura 3.91. Señal AR3, Método LS,
 $N_s=64$, SNR=5 dB

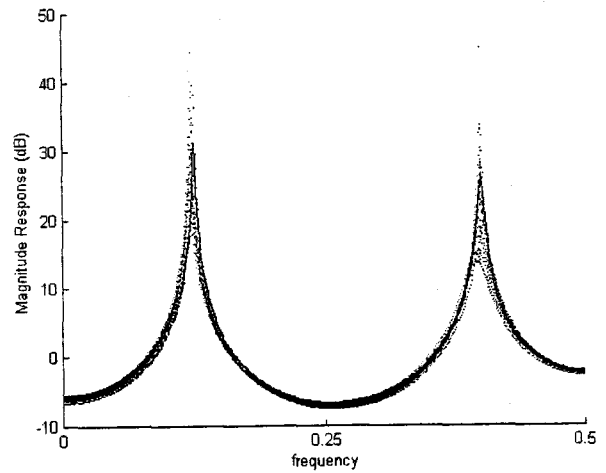


Figura 3.92. Señal AR3,
 Método CFOM simple, $N_s=64$, SNR=5 dB

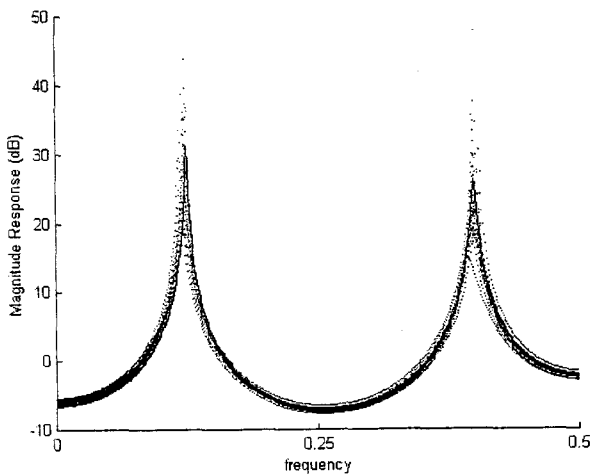
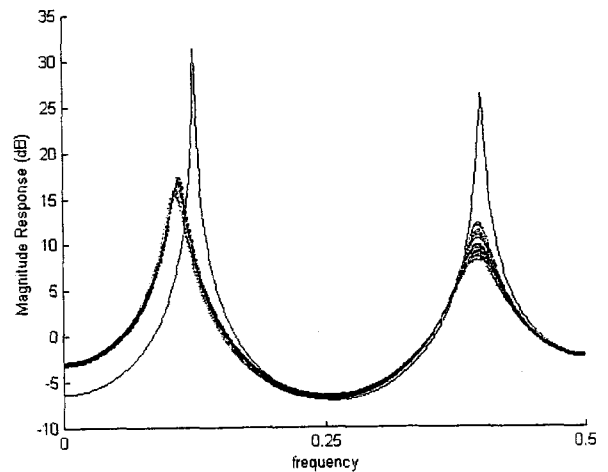


Figura 3.93. Señal AR3,
 Método de la Covarianza, $N_s=64$, SNR=5 dB



Con línea discontinua se los espectros de potencia de 20 estimaciones distintas de los distintos métodos para la señal AR3 bajo una SNR de 5 dB. La segmentación es de $N_s=64$. Las figura 3.88-92 son métodos de cuarto orden y la figura 3.93. un método de segundo orden.

Figura 3.94. Señal AR1,
Método RCM, $N_s=64$, SNR=5 dB

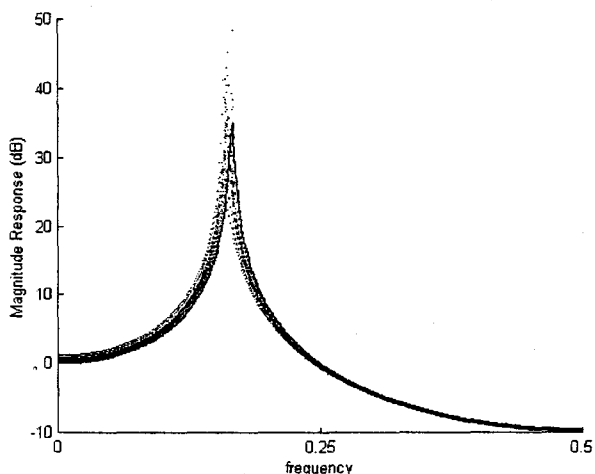


Figura 3.95. Señal AR1,
Método GM, $N_s=64$, SNR=5 dB

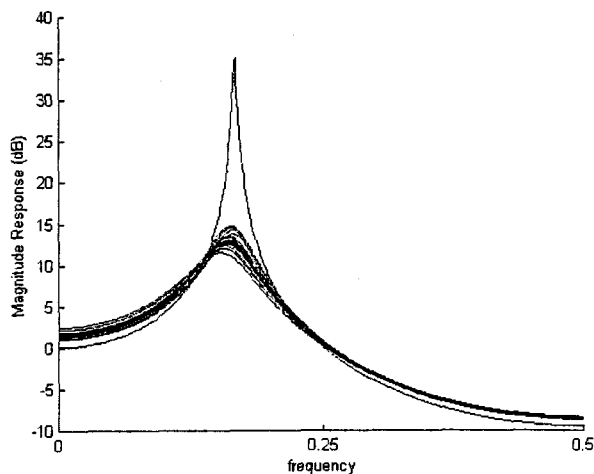


Figura 3.96. Señal AR1,
Método Levinson, $N_s=64$, SNR=5 dB

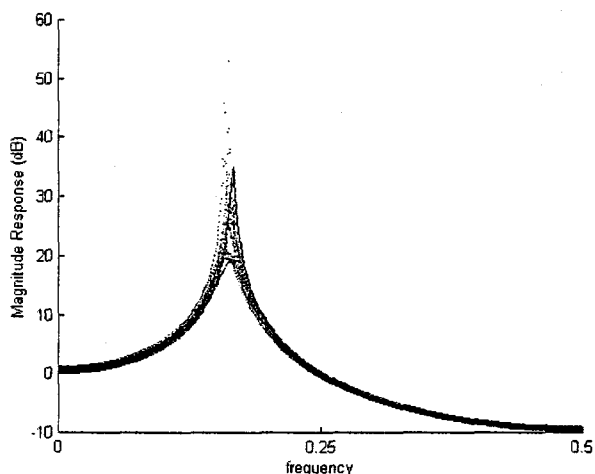


Figura 3.97. Señal AR1,
Método LS, $N_s=64$, SNR=5 dB

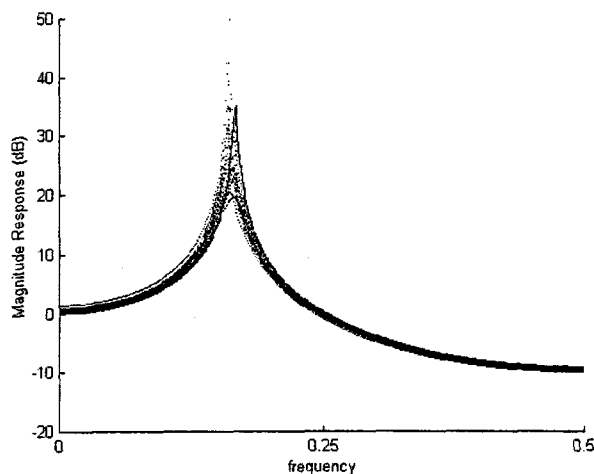


Figura 3.98. Señal AR1,
Método CFOM simple, $N_s=64$, SNR=5 dB

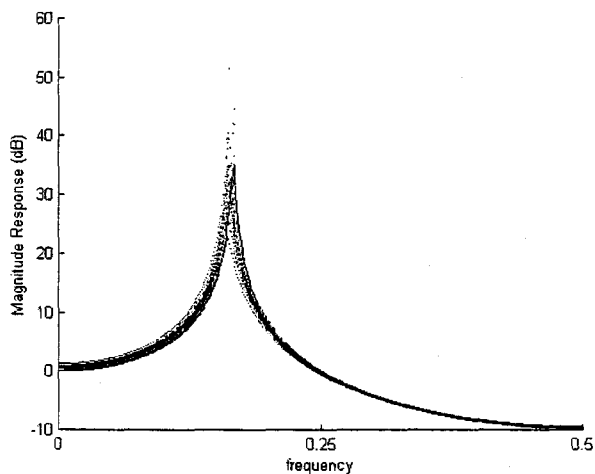
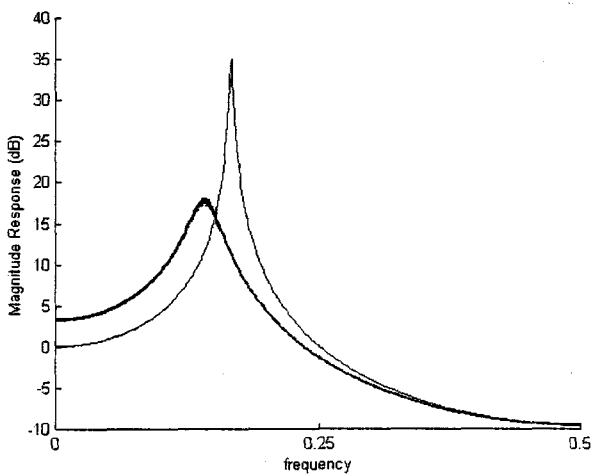


Figura 3.99. Señal AR1,
Método Covarianza, $N_s=64$, SNR=5 dB



Con línea discontinua se los espectros de potencia de 20 estimaciones distintas de los distintos métodos para la señal AR1 bajo una SNR de 5 dB. La segmentación es de $N_s=64$. Las figura 3.94-98 son métodos de cuarto orden y la figura 3.99. un método de segundo orden.

Dentro del primer punto, las principales conclusiones que se han podido sacar del estudio son:

-Se han estudiado y comparado los métodos propuestos para procesos *AR*, tanto de banda ancha, con polos de su función de transferencia lejos del círculo unidad, como de banda estrecha, con los polos cerca del círculo unidad, con ruido aditivo de tipo *MA* y *ARMA*. El estudio se ha realizado para distintas segmentaciones de los datos y para distintos niveles de la relación señal-ruido (SNR).

-Para procesos de banda ancha, el comportamiento de casi todos los métodos es muy parecido y se mantiene dentro de unos límites aceptables. Los métodos desarrollados se comportan mejor que los métodos clásicos, en casi todas las situaciones, exceptuando el método CFOM complejo, que estima mal este tipo de señales.

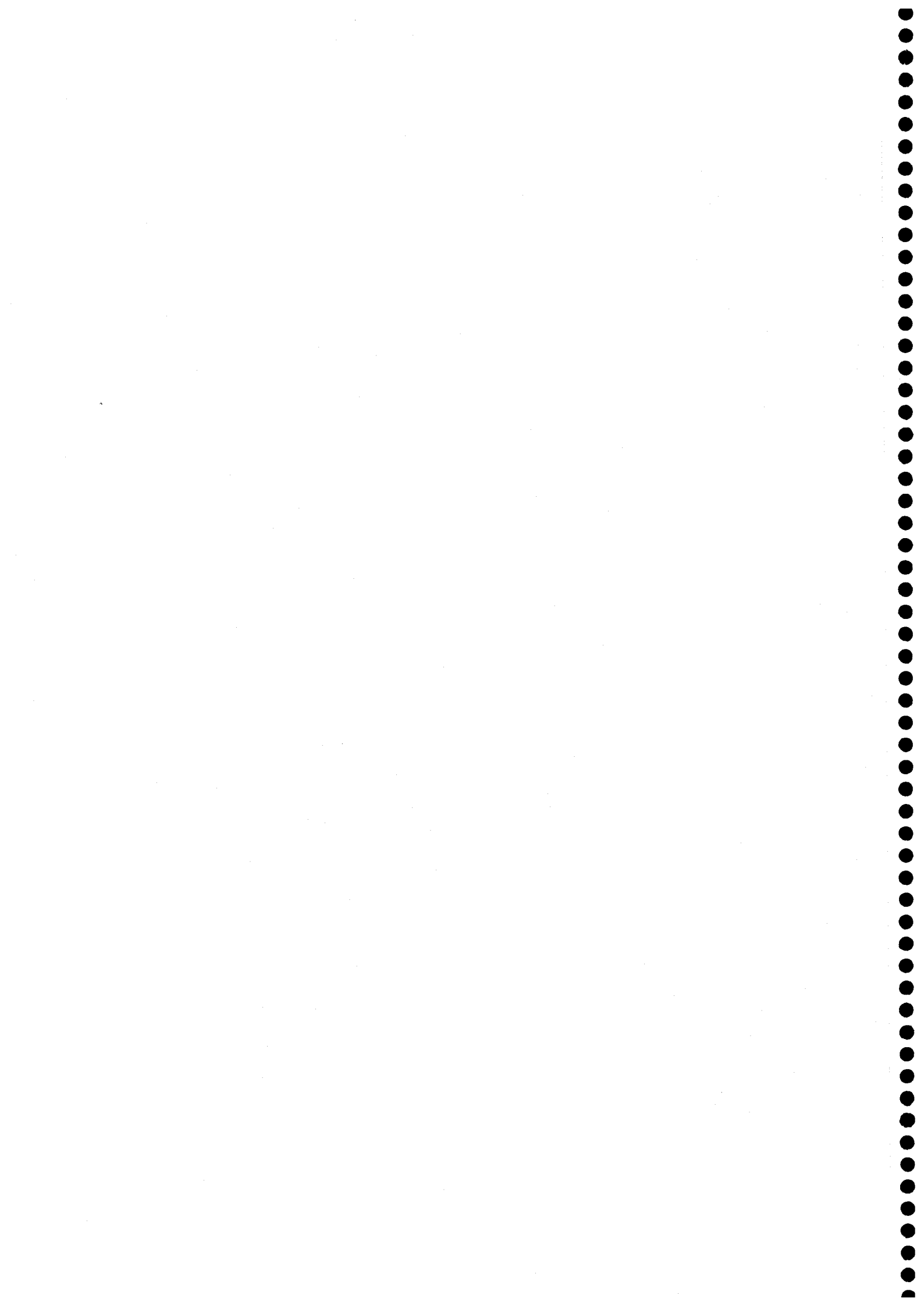
-Para procesos de banda estrecha, el comportamiento de los métodos varía sustancialmente del presentado anteriormente. Para procesos que presenten sus polos muy juntos entre sí, el método más eficiente, con mucha diferencia, es el método CFOM complejo, presentando todos los demás deficiencias importantes en la estimación. Para procesos con polos separados entre sí el comportamiento se vuelve a parecer al presentado para procesos de banda ancha. Este cambio de comportamiento es gradual con la separación entre polos.

En cuanto a la comparación con la estadística de segundo orden, las principales conclusiones que se pueden sacar de los resultados son:

-Se han obtenido estimaciones para las mismas señales que en los métodos de segundo orden y en las mismas circunstancias de ruido y segmentación.

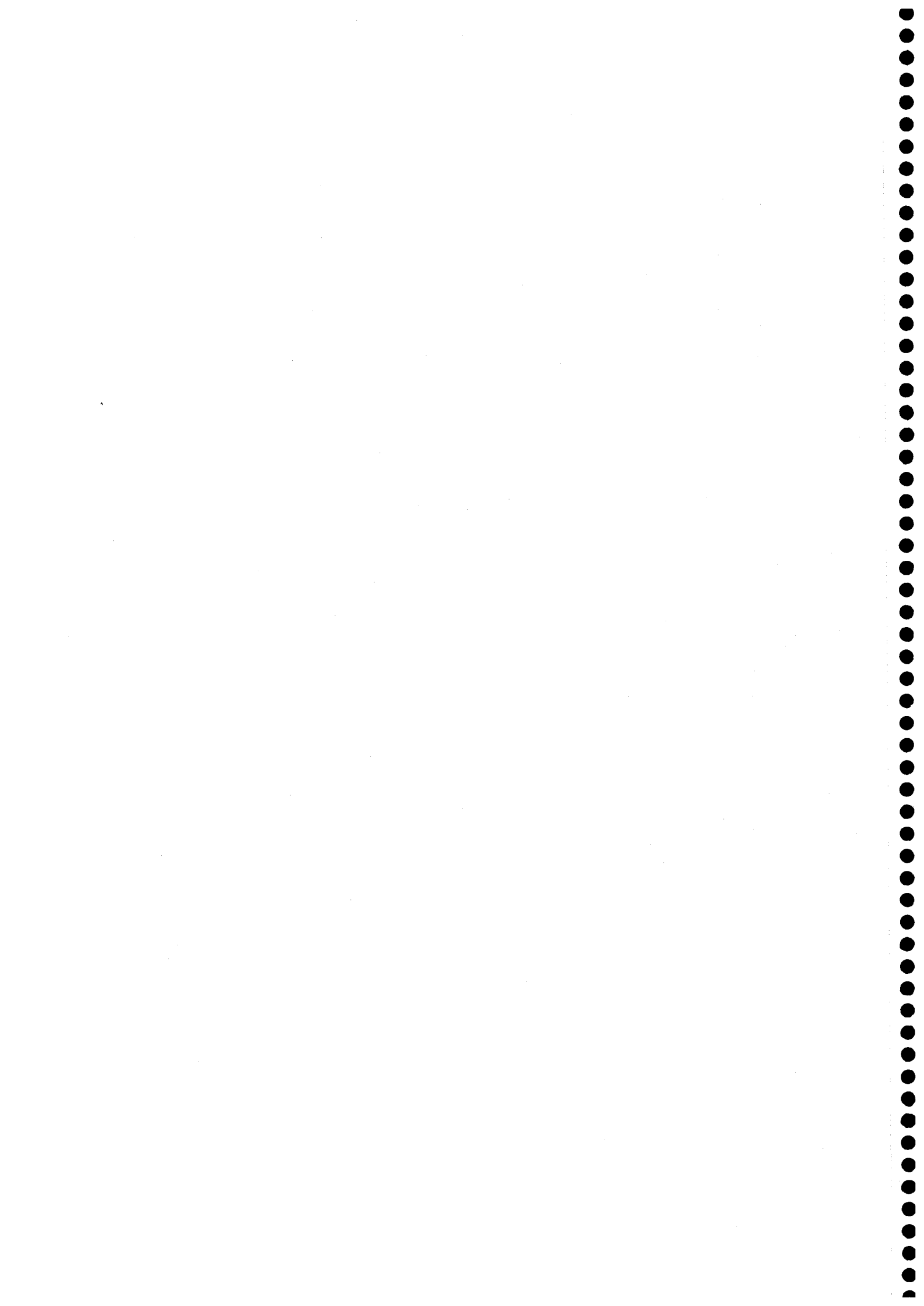
-Se ha observado como los métodos de segundo orden presentan menor varianza pero, en contra partida, están claramente sesgados, a niveles medios de SNR. También se ha constatado como en el caso de procesos de banda ancha son capaces de reproducir la forma del espectro, aunque sesgado, mientras que en procesos de banda estrecha con polos juntos entre sí, no son capaces ni de reproducir dicha forma del espectro.

-Por último se han interpretado los comportamientos de los métodos de cuarto y segundo orden, en cuanto a sesgo y varianza de sus estimaciones, y se ha puesto de manifiesto la necesidad de utilizar métodos de cuarto orden si se desean obtener estimaciones no sesgadas.



CAPÍTULO IV

ACOPLOS CÚBICOS DE FASE



IV.1. INTRODUCCIÓN

Cuando se hace pasar una señal armónica por un sistema no-lineal pueden aparecer contribuciones en frecuencias que son sumas y/o restas de las armónicas. Un ejemplo de esta situación serían los acoplos de fase, en los que la frecuencia y la fase de una componente es igual a la suma de un determinado número de otras componentes (dos en el caso de acoplos cuadráticos, tres en el caso de cúbicos, etc). Tanto en la introducción como en el primer capítulo de esta memoria, se ha visto como el uso de estadística de alto orden es indispensable a la hora de tratar con este tipo de señales, ya que la estadística de segundo orden es ciega a cualquier tipo de relación de fase, como la que sucede en los acoplos. En la bibliografía aparece ampliamente tratado el problema de los acoplos cuadráticos de fase, tanto el estudio estadístico de su comportamiento, como la estimación de estos mediante técnicas paramétricas AR en la estadística de tercer orden [NIK87]. Sin embargo, para el estudio de acoplos cúbicos de fase es necesario recurrir a un tratamiento trispectral, es decir, un tratamiento basado en la estadística de cuarto orden [NIK93]. En este capítulo se estudiarán las señales armónicas que poseen acoplos cúbicos de fase y se desarrollarán métodos para su estudio, el cual se llevará a cabo mediante simulaciones en el capítulo V.

El esquema que se va a seguir es el siguiente:

-En el apartado 2 se definen los acoplos cuadráticos de fase, se obtienen sus series de cumulantes de orden tres y sus biespectros y se analiza la utilización de la modelación AR de tercer orden en su estudio, la cual ha sido ampliamente desarrollada en la bibliografía donde ha se ha demostrado su validez.

-En el apartado 3 se definen los acoplos cúbicos de fase, se calculan sus series de cumulantes de orden cuatro y sus trispectros y se intenta generalizar la idea que permite la modelación AR de tercer orden de los acoplos cuadráticos a este caso. El resultado será negativo, debiéndose tratar con series reales en lugar de complejas para poder aplicar con éxito la modelación AR.

-En el apartado 4 se definen los acoplos cúbicos de fase en señales complejas y se obtienen las series de cumulantes de cuarto orden y los trispectros. En estas definiciones habrá que tener en cuenta que se tratan con datos complejos.

-En el apartado 5 se estudian las anteriores señales desde un punto de vista estadístico, concretamente se estudian las condiciones de estacionaridad y ergodicidad en cuarto orden para señales complejas. El estudio proporcionará estrategias que pueden ser usadas para mejorar los cumulantes estimados de estas señales, lo que será importante al desarrollar los métodos.

-En el apartado 6 se desarrolla la teoría que permite aplicar la modelación AR al tipo de señales con las que se está trabajando, especificando como obtener las frecuencias de los acoplo a partir de los coeficientes AR de la modelación.

-En el apartado 7 se adaptan los métodos AR del capítulo II a las señales complejas, ya que las señales a las que se van a aplicar la modelación son de este tipo.

-En el apartado 8 se desarrolla un método alternativo a los métodos AR para la estimación de los acoplos. Este método está basado en el método de ESPRIT y posee la interesante propiedad de que es capaz de obtener tanto las frecuencias como la fase de los acoplos.

IV.2. ACOPLS CUADRÁTICOS DE FASES Y MODELACIÓN AR

Uno de los principales usos de la modelación AR en la estadística de tercer orden es la detección de acoplos cuadráticos de fases. Este tipo de procesos ya se abordó desde un punto de vista general en el capítulo I.4.4. b), definiendolos y estudiando tanto su biespectro como los cumulantes de orden tres. En ese capítulo se definió un tipo de procesos armónicos consistentes en la suma de sinusoidales reales, de la forma:

$$x(n) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(\omega_i n + \psi_i), \quad (4.1)$$

donde las amplitudes son numeroso reales positivos, todas las frecuencias son distintas y están comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi)$, y las fases son variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi)$. En este tipo de procesos, se dice que existe un acoplo cuadrático de fase cuando para tres sumandos r, s y t de la sumatoria que aparece en (4.1) se cumple que $\omega_r = \omega_s + \omega_t$ y $\psi_r = \psi_s + \psi_t$; es decir, una frecuencia es la suma de otras dos y sus respectivas fases cumplen lo mismo. Si esta relación sólo la cumplen las frecuencias pero no las fases, se dice simplemente que las frecuencias están relacionadas armónicamente.

Separando los acoplos de fase del resto de las frecuencias no acopladas, la anterior expresión queda:

$$x(n) = \sum_{i=1}^s A_i \cos(\omega_i n + \psi_i) + \sum_{i=1}^r A_{1,i} \cos(\omega_{1,i} n + \psi_{1,i}) + \cos(\omega_{2,i} n + \psi_{2,i}) + \cos(\omega_{3,i} n + \psi_{3,i}), \quad (4.2)$$

donde $\omega_{3,i} = \omega_{1,i} + \omega_{2,i}$ y $\psi_{3,i} = \psi_{1,i} + \psi_{2,i}$. En la anterior expresión aparecen $3r$ frecuencias acopladas en fase, que forman r acoplos cuadráticos, y s frecuencias sin acoplar.

La serie de cumulantes de tercer orden de estas señales viene dada por:

$$c_3^x(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^r \frac{A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i}}{4} \{ \cos(\omega_{1,i} \tau_1 + \omega_{2,i} \tau_2) + \cos(\omega_{2,i} \tau_1 + \omega_{1,i} \tau_2) + \cos(\omega_{1,i} \tau_1 - \omega_{3,i} \tau_2) + \cos(\omega_{3,i} \tau_1 - \omega_{1,i} \tau_2) + \cos(\omega_{2,i} \tau_1 - \omega_{3,i} \tau_2) + \cos(\omega_{3,i} \tau_1 - \omega_{2,i} \tau_2) \}, \quad (4.3)$$

mientras que el biespectro resulta ser:

$$\begin{aligned}
 B_x(\omega_1, \omega_2) = & \sum_{i=1}^r \frac{A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i}}{8} \{ \delta(\omega_1 - \omega_{1,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{2,i}) + \delta(\omega_1 + \omega_{1,i}) \delta(\omega_1 + \omega_{2,i}) + \\
 & \delta(\omega_1 - \omega_{2,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{1,i}) + \delta(\omega_1 + \omega_{2,i}) \delta(\omega_1 + \omega_{1,i}) + \delta(\omega_1 - \omega_{1,i}) \delta(\omega_1 + \omega_{3,i}) + \\
 & \delta(\omega_1 + \omega_{1,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{3,i}) + \delta(\omega_1 + \omega_{3,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{1,i}) + \delta(\omega_1 - \omega_{3,i}) \delta(\omega_1 + \omega_{1,i}) + \\
 & \delta(\omega_1 - \omega_{2,i}) \delta(\omega_1 + \omega_{3,i}) + \delta(\omega_1 + \omega_{2,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{3,i}) + \delta(\omega_1 + \omega_{3,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{2,i}) + \\
 & \delta(\omega_1 - \omega_{3,i}) \delta(\omega_1 + \omega_{2,i}) \}. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Expresión que se simplifica mucho si se restringe al primer cuadrante del dominio del biespectro, es decir, a la región comprendida por $2\pi \geq \omega_1, \omega_2 \geq 0$, región dentro de la que se encuentra la región principal del biespectro definida en I.3.3. El biespectro dentro de esta región vale:

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^r \frac{A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i}}{8} \{ \delta(\omega_1 - \omega_{1,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{2,i}) + \delta(\omega_1 - \omega_{2,i}) \delta(\omega_1 - \omega_{1,i}) \}. \tag{4.5}$$

Como puede verse, el biespectro es nulo en todos los puntos, salvo en los conjuntos de frecuencias correspondientes a las frecuencias acopladas, en las que presenta una contribución infinita, aunque de área finita, tal y como representan las funciones delta.

No es obvio que estos procesos dados en (4.1) o (4.2) se puedan modelar adecuadamente mediante procesos AR, ya que aparentemente no poseen la estructura que define a los procesos AR y que se definió en (2.5) y (2.6). Esta modelación hace uso del siguiente teorema [RAG85].

Teorema: Siempre existen parámetros $\{a(1), \dots, a(6r)\}$ tales que los cumulantes de orden tres del proceso $x(n)$ definido en (4.2), consistente en la suma de cosenos de los cuales aparecen r acoplos cuadráticos de fase, satisfacen exactamente las ecuaciones recursivas de tercer orden:

$$c_x^3(-k, -l) + \sum_{i=1}^{6r} a(i) c_x^3(i-k, i-l) = \beta \delta(k) \delta(l). \tag{4.6}$$

Al realizar la prueba del anterior teorema se puede ver como el conjunto de $\{a(1), \dots, a(6r)\}$ debe ser tal que el polinomio $P(z) = \sum_{i=1}^{6r} a(i) z^i + 1$ presente sus ceros en $z = e^{\pm j\omega_{k,i}}$, con $k=1, 2, 3$ e $i=1, \dots, r$.

Un modelo AR definido por los parámetros AR $[1, a(1), \dots, a(6s)]$ su biespectro se define como :

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{\beta}{A(\omega_1)A(\omega_2)A^*(\omega_1 + \omega_2)} \quad (4.7)$$

donde $A(\omega) = \sum_{i=0}^{6r} a(i)e^{-j\omega i}$, y se ha tomado $a(0)=1$. A partir de esta expresión se puede comprobar como el biespectro del proceso AR, definido por los parámetros $[1, a(1), \dots, a(6r)]$ que cumplen en teorema, presentará picos localizados en las frecuencias correspondientes a los acoplos de fase, tal y como le sucedía al biespectro de la señal $x(n)$ definida en (4.2).

Se consigue de esta forma un método de detección y localización de acoplos cuadráticos de fase y es el siguiente. Primero se construye las ecuaciones recursivas de tercer orden (4.6) con los cumulantes de orden tres del proceso $x(n)$ al que se quiere estudiar sus acoplos. Este sistema de ecuaciones se resuelve mediante el método de estimación AR que se desee y como resultado se obtiene el conjunto de coeficientes AR. Con este conjunto de coeficientes AR se construye su biespectro, del que se localizarán los posibles picos que aparezcan. Las frecuencias correspondientes a los picos del anterior biespectro corresponderán a los acoplos cuadráticos de fase que aparezcan en la señal $x(n)$.

Esta capacidad que poseen los procesos AR para estudiar los acoplos cuadráticos de fase es lo que se pretende extender en este capítulo los acoplos cúbicos de fase. Para ello, en el siguiente apartado se intentará generalizar el procedimiento seguido para los acoplos cuadráticos de fase al problema de los acoplos cúbicos. Esto conllevará el paso de estadística de tercer orden a la de cuarto, en busca de un teorema similar al anterior, que permita la detección de los acoplos cúbicos haciendo uso de la modelación AR. Este camino llevará a la conclusión de que, debido a la forma que poseen las series de cumulantes de orden cuatro de acoplos cúbicos de fase, esto no será posible para señales reales; debiendo de tratar el problema de datos complejos, lo que obligará a replantear los métodos de los capítulos anteriores para poder aplicarlos a estas señales.

IV.3. ACOPLS CÚBICOS DE FASES Y MODELACIÓN AR

Los acoplos cúbicos de fases se pueden producir cuando señales sinusoidales atraviesan sistemas no-lineales, con no-linealidades de tercer orden. Una señal consistente en p sinusoidales, como la definida en (4.1) se dirá que posee un acoplo cúbico de fase si, para cuatro sumandos r, s, t y u de la sumatoria que aparece en la definición de $x(n)$ se cumple que $\omega_u = \omega_s + \omega_t + \omega_r$ y $\psi_u = \psi_s + \psi_t + \psi_r$; es decir, una frecuencia es la suma de otras tres y sus respectivas fases se encuentran en la misma relación. Al igual que en el caso de acoplos cuadráticos, si esta la relación sólo la cumplen las frecuencias y no las fases, se dice que las frecuencias están relacionadas armónicamente.

Se construye de esta manera, separando explícitamente los distintos términos, la señal de la forma:

$$x(n) = \sum_{i=1}^r A_i^u \cos(\omega_i^u n + \psi_i^u) + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^3 A_{k,i}^q \cos(\omega_{k,i}^q n + \psi_{k,i}^q) + \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^4 A_{k,i}^c \cos(\omega_{k,i}^c n + \psi_{k,i}^c), \quad (4.8)$$

donde $\omega_{3,i}^q = \omega_{1,i}^q + \omega_{2,i}^q$, $\psi_{3,i}^q = \psi_{1,i}^q + \psi_{2,i}^q$, con $i=1, \dots, s$; $\omega_{4,i}^c = \omega_{1,i}^c + \omega_{2,i}^c + \omega_{3,i}^c$, $\psi_{4,i}^c = \psi_{1,i}^c + \psi_{2,i}^c + \psi_{3,i}^c$, con donde $i=1, \dots, t$. Esto significa en la señal $x(n)$ aparecen s acoplos cuadráticos de fase (a los que se le asigna el superíndice q), t acoplos cúbicos de fase (a los que se le asigna el superíndice c) y r frecuencias sin acoplar (a los que se le asigna el superíndice u). Esta es la expresión más genérica que se puede construir para señales sinusoidales, de forma que aparezcan interacciones no lineales hasta de orden tres.

La serie de cumulantes de orden cuatro de estas señales viene dada por:

$$\begin{aligned} c_x^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^r (A_i^u)^4 [\cos(\omega_i^u(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3)) + \cos(\omega_i^u(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \cos(\omega_i^u(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3))] - \\ & \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^s (A_{k,i}^q)^4 [\cos(\omega_{k,i}^q(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3)) + \cos(\omega_{k,i}^q(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \cos(\omega_{k,i}^q(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3))] - \\ & \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^t (A_{k,i}^c)^4 [\cos(\omega_{k,i}^c(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3)) + \cos(\omega_{k,i}^c(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \cos(\omega_{k,i}^c(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3))] + \\ & \frac{1}{8} \sum_{i=1}^t A_{1,i}^c A_{2,i}^c A_{3,i}^c A_{4,i}^c \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in S_4} \cos(\omega_{1,i}^c \tau_{j_1} + \omega_{2,i}^c \tau_{j_2} + \omega_{3,i}^c \tau_{j_3} - \omega_{4,i}^c \tau_{j_4}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde S_4 es el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $(1,2,3,4)$ y $\tau_4=0$. Se puede observar importantes diferencias con los cumulantes de orden tres que presentaban los acoplos cuadráticos. Efectivamente, mientras que en (4.3) sólo aparece contribución de los acoplos cuadráticos, en esta expresión aparece contribución de todas las frecuencias que aparecen en la señal $x(n)$, por lo que serán distintos de cero incluso si no aparecen acoplos cúbicos; si bien es cierto que las frecuencias pertenecientes a un acoplo cúbico aparecen de manera distinta al resto. También se puede observar cómo, en la expresión (4.9), tanto las frecuencias no acopladas como las que forman parte de un acoplo cuadrático de fase se tratan de la misma manera, por lo que no es necesario hacer distinción entre estos dos tipos de frecuencias. Teniendo esto en cuenta, la expresión (4.8) queda:

$$x(n) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(\omega_i n + \psi_i) + \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^4 A_{k,i} \cos(\omega_{k,i} n + \psi_{k,i}), \quad (4.10)$$

donde en el primer término se incluyen todas las frecuencias sin acoplar y los posibles acoplos cuadráticos de fase, y en el segundo término están recogidos los acoplos cúbicos de fase.

Con esta definición de la señal y los cumulantes de orden cuatro se puede calcular el triespectro:

$$\begin{aligned}
 T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & -\frac{1}{16} \sum_{i=1}^p A_i^4 [\delta(\omega_1 - \omega_i) \delta(\omega_2 - \omega_i) \delta(\omega_3 + \omega_i) + \delta(\omega_1 - \omega_i) \delta(\omega_2 + \omega_i) \delta(\omega_3 - \omega_i) + \\
 & \delta(\omega_1 + \omega_i) \delta(\omega_2 - \omega_i) \delta(\omega_3 - \omega_i) + \delta(\omega_1 + \omega_i) \delta(\omega_2 + \omega_i) \delta(\omega_3 - \omega_i) + \delta(\omega_1 + \omega_i) \delta(\omega_2 - \omega_i) \cdot \\
 & \delta(\omega_3 + \omega_i) + \delta(\omega_1 - \omega_i) \delta(\omega_2 + \omega_i) \delta(\omega_3 + \omega_i)] - \frac{1}{16} \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^4 A_{k,i}^4 [\delta(\omega_1 - \omega_{k,i}) \delta(\omega_2 - \omega_{k,i}) \cdot \\
 & \delta(\omega_3 + \omega_{k,i}) + \delta(\omega_1 - \omega_{k,i}) \delta(\omega_2 + \omega_{k,i}) \delta(\omega_3 - \omega_{k,i}) + \delta(\omega_1 + \omega_{k,i}) \delta(\omega_2 - \omega_{k,i}) \delta(\omega_3 - \omega_{k,i}) + \\
 & \delta(\omega_1 + \omega_{k,i}) \delta(\omega_2 + \omega_{k,i}) \delta(\omega_3 - \omega_{k,i}) + \delta(\omega_1 + \omega_{k,i}) \delta(\omega_2 - \omega_{k,i}) \delta(\omega_3 + \omega_{k,i}) + \delta(\omega_1 - \omega_{k,i}) \cdot \\
 & \delta(\omega_2 + \omega_{k,i}) \delta(\omega_3 + \omega_{k,i})] + \frac{1}{16} \sum_{i=1}^t A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i} A_{4,i} \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in S_4} [\delta(\omega_1 - v_{j_1, i}) \delta(\omega_2 - v_{j_2, i}) \delta(\omega_3 - v_{j_3, i}) \cdot \\
 & \delta(\omega_1 + v_{j_4, i}) \delta(\omega_2 + v_{j_2, i}) \delta(\omega_3 + v_{j_3, i})],
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $v_{1,i} = \omega_{1,i}$, $v_{2,i} = \omega_{2,i}$, $v_{3,i} = \omega_{3,i}$, y $v_{4,i} = -\omega_{4,i}$. Se observa como las frecuencias que no pertenecen a ningún acoplo de fase sólo presentan contribución en el triespectro en ternas de frecuencias $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de forma que cumplan $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3|$, sin que las tres puedan tener el mismo signo. Si el triespectro se restringe al octante positivo de su dominio definido por $2\pi \geq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0$, el triespectro en esta región toma la forma:

$$T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^t A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i} A_{4,i} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} \delta(\omega_1 - \omega_{j_1, i}) \delta(\omega_2 - \omega_{j_2, i}) \delta(\omega_3 - \omega_{j_3, i}), \tag{4.12}$$

donde S_3 es el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $(1,2,3)$. Gracias a esta expresión será sencillo detectar los acoplos cúbicos de fase a partir del triespectro, ya que su valor es cero en todos los puntos del octante positivo, salvo en aquellos correspondientes con un acoplos cúbico de fase, donde toma un valor infinito, pero de área finita que depende de las amplitudes que acompañan a las frecuencias acopladas.

El siguiente paso en la búsqueda de utilizar los métodos de estimación AR en la determinación de los acoplos cúbicos de fase, es intentar encontrar algún conjunto de parámetros de forma que los cumulantes de orden cuatro de la señal $x(n)$ dada en (4.10) cumplan una ecuación recursiva de cuarto orden, similar a la que se define en (4.6). El siguiente teorema pretende esto:

Teorema: Siempre existen parámetros $\{1, a(1), \dots, a(2p+8t)\}$ tales que la secuencia de cumulantes de orden cuatro del proceso $x(n)$ definido en (4.10), consistente en la suma de $p+t$ cosenos con t acoplos cúbicos de fase, satisfacen exactamente la ecuación recursiva de cuarto orden:

$$\sum_{i=0}^{8t+2p} a(i) c_x^4(s-i, s-r, s-q) = \gamma \delta(r) \delta(s) \delta(q), \text{ con } r, s, q = 0, 1, \dots, 8t+2p.$$

Demostración: El cumulante de orden cuatro del proceso $x(n)$ es:

$$c_x^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{4t+p} B_i [\cos(\theta_i(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3)) + \cos(\theta_i(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)) + \cos(\theta_i(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3))] + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^t A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i} A_{4,i} \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in S_4} \cos(\omega_{1,i} \tau_{j_1} + \omega_{2,i} \tau_{j_2} + \omega_{3,i} \tau_{j_3} - \omega_{4,i} \tau_{j_4}) \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} B_i &= (A_i)^4 \text{ y } \theta_i = \omega_i \text{ para } 1 < i < p; \\ B_i &= (A_{1,i-p})^4 \text{ y } \theta_i = \omega_{1,i-p} \text{ para } p+1 < i < t+p; \\ B_i &= (A_{1,i-p-t})^4 \text{ y } \theta_i = \omega_{1,i-p-t} \text{ para } t+p+1 < i < 2t+p; \\ B_i &= (A_{1,i-p-2t})^4 \text{ y } \theta_i = \omega_{1,i-p-2t} \text{ para } 2t+p+1 < i < 3t+p; \\ B_i &= (A_{1,i-p-3t})^4 \text{ y } \theta_i = \omega_{1,i-p-3t} \text{ para } 3t+p+1 < i < 4t+p; \end{aligned} \quad (4.15)$$

y S_4 es el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $(1,2,3,4)$ y $\tau_4=0$.

Se construye:

$$E(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{4t+p} B_i [e^{j\theta_i(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3)} + e^{j\theta_i(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)} + e^{j\theta_i(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)}] + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^t A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i} A_{4,i} \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in S_4} e^{j(\omega_{1,i} \tau_{j_1} + \omega_{2,i} \tau_{j_2} + \omega_{3,i} \tau_{j_3} - \omega_{4,i} \tau_{j_4})}. \quad (4.16)$$

Es fácil ver que se cumple que:

$$c_x^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{2} [E(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + E^*(\tau_1, \tau_2, \tau_3)]. \quad (4.17)$$

Se construye el polinomio:

$$P(z) = \prod_{i=1}^{4t+p} (z - e^{j\theta_i})(z - e^{-j\theta_i}). \quad (4.18)$$

El polinomio $P(z)$ es de grado $8t+2p$, por lo que se puede escribir como:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{8t+2p} a(i)z^i, \quad (4.19)$$

donde claramente $a(0)=a(8t+2p)=1$. Este polinomio presenta raíces en $z_0=e^{\pm j\theta_i}$, donde $i=1,\dots,4t+p$, es decir, en todas las frecuencias que aparecen en la señal $x(n)$ en (4.9). Con los coeficientes del anterior polinomio se construye las siguientes combinaciones lineales de polinomios:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{8t+2p} a(k)E(k-r,k-s,k-q) &= -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{4t+p} B_i^4 [e^{-j\theta_i(r+s-q)} + e^{-j\theta_i(r-s+q)} + e^{-j\theta_i(-r+s+q)}]. \\ \sum_{k=1}^{8p+2p} a(k)e^{j\theta_i k} + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^t A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i} A_{4,i} \sum_{(j_1 j_2 j_3 j_4) \in S_4} e^{-j(\omega_{1,i} \tau_{j_1} + \omega_{2,i} \tau_{j_2} + \omega_{3,i} \tau_{j_3} - \omega_{4,i} \tau_{j_4})} & \quad (4.20) \\ \left[\sum_{k=1}^{8t+2p} a(k) \exp(-j\omega_{\tau_{j_4,i}} k(-1)^{\delta_{4,\tau_{j_4,i}}}) \right] \end{aligned}$$

Donde $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = (r, s, q, 0)$, S_4 todas las permutaciones de $(1, 2, 3, 4)$ y $\omega_{\tau_{j_4,i}}$ es la frecuencia que acompaña a τ_4 en la primera exponencial de la sumatoria en S_4 . Se puede observar como los últimos términos de los dos sumandos en la anterior expresión son nulos debido a que equivalen a $P(z_0)$ siendo z_0 es cero del polinomio. Por tanto se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{8t+2p} a(i)E(i-r, i-s, i-q) = 0. \quad (4.21)$$

De la misma manera se puede comprobar que también se cumple:

$$\sum_{i=0}^{8t+2p} a(i)E^*(i-r, i-s, i-q) = 0. \quad (4.22)$$

Las dos expresiones últimas conducen a $\sum_{i=0}^{8t+2p} a(i)c_x^4(i-r, i-s, i-q) = 0$, que es lo que se pretendía demostrar. ■

A primera vista podría parecer que ya se ha conseguido poder utilizar la modelación AR para estudiar los acoplos cúbicos de fase, sin embargo esto no es así. Para verlo es necesario estudiar como es el triespectro que presenta un modelo AR con coeficientes cumpliendo el anterior teorema.

En el capítulo anterior se presentó la expresión del triespectro de un proceso AR en (2.9). En esta expresión se puede ver como para que tres frecuencias $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ presenten una contribución en el triespectro de un proceso AR las tres deben poseer contribución lo más pequeña posible en la transformada de Fourier de los coeficientes AR, es decir, en

$A(\omega) = \sum_{i=0}^p a(i)e^{-j\omega i}$, donde $[1, a(1), \dots, a(p)]$ son los coeficientes AR. Además, en la transformada

de los coeficientes AR debe aparecer también una contribución lo más pequeña posible en la suma de las tres frecuencias. Precisamente esto ocurre si las tres frecuencias $(\omega_1', \omega_2', \omega_3')$ forman un acoplo cúbico de fase y el sistema AR es tal que cumple el anterior teorema, ya que presenta una contribución nula en las tres frecuencias acopladas y, por supuesto en la suma de estas. Sin embargo, si la señal $x(n)$ posee cuatro frecuencias relacionadas armónicamente pero que no forman un acoplo de fase, es decir, cuatro frecuencias que cumplan $\omega_4' = \omega_1' + \omega_2' + \omega_3'$, pero que sus fases no estén relacionadas, la transformada de Fourier $A(\omega)$ presentará contribución nulas en las cuatro, ya que, como se vio en la prueba del teorema el polinomio (4.19), presenta ceros en todas las frecuencias presentes en (4.19), acopladas o no. Por tanto, el triespectro que se construye mediante (2.9), presentará un pico a las frecuencias $(\omega_1', \omega_2', \omega_3')$, aunque no están acopladas en fase. Sin embargo, de (4.12) se sabe que el triespectro sólo presenta pico en el octante positivo en las frecuencias acopladas, mientras que por lo anterior, el triespectro de los coeficientes AR que cumplen el teorema presentarán picos en todas las frecuencias relacionadas armónicamente, estén acopladas en fase o no.

De esta forma, mediante modelación AR no se puede distinguir cuando cuatro frecuencias relacionadas armónicamente forman realmente un acoplo cúbico de fase. Por otra parte, una estimación del triespectro de la señal $x(n)$ basada en las técnicas clásicas de Fourier sí permitiría distinguir entre ambos tipos de frecuencias, y con ello una detección eficaz de los acoplos cúbicos de fase.

La imposibilidad de realizar la anterior distinción por los métodos AR de cuarto orden se hace más preocupante si se piensa que los mismos resultados pueden obtenerse mediante la estadística de segundo orden. Efectivamente, se puede hacer una estimación AR de la señal $x(n)$ utilizando la función de autocorrelación, y el resultado sería un conjunto de coeficientes AR, que proporciona un espectro de potencia con picos en todas las frecuencias que aparecen en $x(n)$, ya que la transformada de Fourier del conjunto de coeficientes AR es nula en todas estas frecuencias. Si se utiliza este conjunto de coeficientes para calcular el triespectro a través de (2.9), este será idéntico al que se conseguiría con los coeficientes AR que cumplen el teorema, y por tanto se han conseguido utilizando estadística de cuarto orden. Por tanto, la utilización de modelación AR de cuarto orden de la señal $x(n)$ no sólo no resuelve el problema, sino que no presenta variación alguna con la modelación de segundo orden. Por supuesto, si la señal $x(n)$ estuviese contaminada con ruido aditivo gaussiano, la modelación AR de cuarto orden lo eliminaría, mientras que la de segundo orden no; pero seguiría sin poder distinguir cuando cuatro frecuencias relacionadas armónicamente forman realmente un acoplo cúbico de fase. Esto significa que la modelación AR de cuarto orden presenta una mejora frente a la de segundo orden frente a la eliminación de ruido desconocido, pero no frente a la detección de los acoplos cúbicos de fase.

Como resumen, señalar que si se posee una señal $x(n)$ definida en (4.10) en la que se pretende detectar los acoplos cúbicos de fase, hay que recurrir a la estimación clásica del triespectro mediante métodos de Fourier para poder hacerlo. La modelación AR no es, por tanto, una herramienta útil en este tipo de procesos, al contrario de lo sucede para acoplos cuadráticos de fase. Es precisamente la aparición de todas las frecuencias de la señal $x(n)$ en los cumulantes de orden cuatro, lo que produce esto.

Sin embargo, en la siguiente sección se verá como, si en vez de trabajar con señales reales se trabaja con señales compleja, es decir, exponenciales complejas, los cumulantes de cuarto orden sólo presentarán contribuciones en las frecuencias acopladas, por lo que sí será posible utilizar la modelación AR para detectar acoplos cuadráticos de fase. El trabajar con señales complejas obligará, a su vez, a una breve reformulación de algunos métodos de estimación AR construidos en el capítulo II.

IV.4. ACOPLLOS CÚBICOS DE FASES EN SEÑALES COMPLEJAS

A partir de esta sección se tratarán con señales armónicas complejas, formadas por la suma de exponenciales de la forma:

$$x(n) = \sum_{i=1}^p A_i e^{j(\omega_i n + \psi_i)} \quad (4.23)$$

donde las amplitudes son números reales positivos, todas las frecuencias son distintas y están comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi)$, y las fases son variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi)$. Los acoplos de fase, tanto cúbicos como cuadráticos, se definen de igual forma a como se ha hecho para señales reales. En concreto, si se separan las contribuciones de las frecuencias acopladas cuadráticamente, las acopladas cúbicamente y las no acopladas, se llega a una expresión similar a (4.8), sin más que sustituir los cosenos por exponenciales complejas:

$$x(n) = \sum_{i=1}^r A_i^u e^{j(\omega_i^u n + \psi_i^u)} + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^3 A_{k,i}^q e^{j(\omega_{k,i}^q n + \psi_{k,i}^q)} + \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^4 A_{k,i}^c e^{j(\omega_{k,i}^c n + \psi_{k,i}^c)}, \quad (4.24)$$

donde se ha supuesto que hay s acoplos cuadráticos, t acoplos cúbicos y r frecuencias sin acoplar.

Como ya se ha apuntado, el trabajar con señales complejas en lugar de reales, viene motivado por la imposibilidad de utilizar métodos AR en la detección de acoplos cúbicos de fase en estas últimas señales; mientras que se demostrará como sí es posible en señales complejas.

Si se toman los cumulantes de orden cuatro de la señal $x(n)$ de la forma:

$$c_x^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \text{Cum}[(x^*(n), x(n+\tau_1), x(n+\tau_2), x(n+\tau_3))] = \sum_{i=1}^t A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i} A_{4,i} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} e^{j(\omega_{1,i}^c \tau_{j_1} + \omega_{2,i}^c \tau_{j_2} + \omega_{3,i}^c \tau_{j_3})}, \quad (4.25)$$

donde S_3 es el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $(1, 2, 3)$. Como puede verse, se pueden hacer distintas definiciones de los cumulantes de orden cuatro, dependiendo de

cuantos y cuales de sus argumentos se conjuguen, no siendo todas las elecciones independientes unas de otras. Se ha elegido la anterior combinación, ya que los cumulantes así definidos sólo presentan contribuciones de las frecuencias acopladas cúbicamente, como se desea. También puede verse que con los cumulantes así definidos no se distinguen entre frecuencias acopladas cuadráticamente y frecuencias sin acoplar, como ya sucedía en para señales reales, de forma que en la definición (4.24) no es necesario distinguir entre estos dos conjuntos, quedando:

$$x(n) = \sum_{i=1}^p A_i e^{j(\omega_i n + \psi_i)} + \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^4 A_{k,i} e^{j(\omega_{k,i} n + \psi_{k,i})}. \quad (4.26)$$

El triespectro de esta señal es fácil de calcular a partir de (4.25) y da como resultado:

$$T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{i=1}^t A_{1,i} A_{2,i} A_{3,i} A_{4,i} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} \delta(\omega_1 - \omega_{j_1, i}) \delta(\omega_2 - \omega_{j_2, i}) \delta(\omega_3 - \omega_{j_3, i}). \quad (4.27)$$

Esto representa un triespectro que es nulo a todas las frecuencias, salvo en las frecuencias correspondientes a un acoplo cúbico de fase, en las que toma un valor infinito, lo que permitirá la utilización del modelado AR en la detección de los acoplos.

Una vez especificado el tipo de señal con las que se va a trabajar es interesante estudiar las propiedades estadísticas que poseen, con el fin de facilitar el proceso de estimación. En el siguiente apartado se abordará el estudio señales armónicas, a las cuales pertenecen de las definidas en (4.26), desde un punto de vista estadístico. El fin será encontrar las condiciones teóricas de estacionaridad y ergodicidad, así como estrategias para trabajar con señales que no las cumplan.

IV.5. CONDICIONES DE ESTACIONARIDAD Y ERGODICIDAD EN CUARTO ORDEN PARA PROCESOS ARMÓNICOS.

Este apartado se buscarán las condiciones que deben cumplir los procesos armónicos para que sean estacionarios y ergódicos. Estos procesos armónicos serán un conjunto más general que las que se han definido en (4.26), por lo que una vez obtenidas las condiciones de estacionaridad y ergodicidad para las señales armónicas, estas se particularizaran para las señales que interesan en este capítulo, que son aquellas que presentan acoplos cúbicos de fase.

Las señales armónicas son de la forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p A_i e^{j\omega_i t}, \quad (4.28)$$

donde las frecuencias ω_i son reales, $A_i = B_i e^{j\psi_i}$, $\mathcal{E}\{A_i\} = 0$, con B_i variables aleatorias tomando

valores en el intervalo $[0, \infty)$ y por tanto $\mathcal{E}\{B_i\} > 0$, y las fases ψ_i son variables aleatorias en $[-\pi, \pi)$, para todo $i \in [1, p]$, donde p es el número de sumandos presentes en la señal. Este tipo de señales ha sido ampliamente tratado en la bibliografía, tanto en tercer [PAR94] como en cuarto orden [CHA94], y han demostrado su capacidad para modelar un gran número de procesos. Al final del apartado se particularizarán las conclusiones generales al caso particular de señales con acoplos cúbicos de fase, tal y como se definió en (4.26), que representan un caso particular de las señales definidas en (4.28), con las que se van a realizar el estudio estadístico.

Se suponen en (4.28) que todas las frecuencias ω_i son distintas, lo que siempre es posible redefiniendo la amplitud compleja de los distintos sumandos que puedan aparecer con idéntica frecuencia. En principio las frecuencias pueden tomar cualquier valor en el intervalo $(-\infty, \infty)$, debido a que la señal $y(t)$ es una señal continua en el tiempo. Aunque se pueden encontrar las condiciones buscadas para señales continuas, en este apartado se restringirá el estudio al caso de señales discretas en el tiempo. Esta restricción no se realiza tanto por la simplificación en la deducción, como por la utilidad real de tales señales. En efecto, en la inmensa mayoría de los casos prácticos, las señales con las que se trabajan son señales digitales, por lo que la deducción de las condiciones se reducirá a este tipo. De esta manera, las señales quedan de la forma

$$y(n) = \sum_{i=1}^p A_i e^{j\omega_i n}, \text{ con } n \text{ entero,} \quad (4.29)$$

donde se ha supuesto que el periodo de muestreo es la unidad. Esta restricción en el periodo de muestreo no es una limitación real, ya que una señal muestreada con un periodo distinto no exige más que un reescalado lineal en las frecuencias para convertirla en una señal de periodo unidad. Todo esto produce que las frecuencias ω_i pueden tomar cualquier valor en el intervalo $(-\pi, \pi]$, ya que cualesquiera frecuencias que difieran 2π son idénticas. En este caso la imposición de que las frecuencias ω_i sean distintas se traduce en que dichas frecuencias sean distintas módulo 2π ($\text{mod } 2\pi$), lo que vuelve a ser posible sin más que redefinir la amplitud compleja, tal como se indicó inicialmente en el caso continuo.

Aunque las nociones de estacionaridad y ergodicidad en procesos estocásticos son de sobra conocidas y se han definido brevemente en el capítulo I; sin embargo, en la bibliografía aparecen definiciones ligeramente distintas sobre ellas, por lo es conveniente fijar las que se van a utilizar en este apartado para establecer un marco concreto de trabajo.

Definición: Una señal aleatoria compleja $z(n)$ se dice que es estacionaria de cuarto orden cuando $\text{Cum}[z^*(n), z(n+\tau_1), z(n+\tau_2), z(n+\tau_3)] = \text{Cum}[z^*(0), z(\tau_1), z(\tau_2), z(\tau_3)]$, para todo n, τ_1, τ_2 y τ_3 .

Definición: Una señal aleatoria compleja $z(n)$ de media cero estacionaria de cuarto orden se dice que es ergódica de cuarto orden con probabilidad uno si en sus cumulantes de cuarto orden se cumple que la medias muestrales sean iguales a los valores esperados, con

probabilidad uno. Esto significa, para una función aleatoria $f(n)$, que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} f(n) = \mathcal{E}\{f(n)\}$

w.p.1. En concreto, lo que implica que las medias muestrales en los cumulantes de cuarto orden sean iguales a los valores esperados, es:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} z^*(n)z(n+\tau_1)z(n+\tau_2)z(n+\tau_3) &= \mathcal{E}\{z^*(n)z(n+\tau_1)z(n+\tau_2)z(n+\tau_3)\}, \text{ w.p.1.} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} z^*(n)z(n+\tau) &= \mathcal{E}\{z^*(n)z(n+\tau)\}, \text{ w.p.1. y} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} z(n)z(n+\tau) &= \mathcal{E}\{z(n)z(n+\tau)\}, \text{ w.p.1.} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Es decir, tanto los momentos de segundo y como los de cuarto orden sean ergódicos, con probabilidad uno.

Así mismo se puede definir señal ergódica en el sentido de error cuadrático, en probabilidad, etc., sin más que exigir que la igualdad $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} f(n) = \mathcal{E}\{f(n)\}$ sea en el sentido de error cuadrático, en probabilidad, etc.

En principio, también habría que imponer la condición sobre los momentos de orden uno:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} z(n) = \mathcal{E}\{z(n)\} = 0, \text{ w.p.1.}$$

sin embargo, debido a la forma de las señales con las que se van a trabajar, la anterior igualdad se cumple inmediatamente, sin introducir ninguna restricción sobre las señal, salvo la de que ninguna de las ω_i sean nulas; luego esta será una restricción que habrá que tener en cuenta a la hora de estudiar la ergodicidad. La situación de frecuencia nula no es común en la práctica, ya que implica una media temporal distinta para cada señal independiente. En este trabajo se restringe el estudio, a menos que se especifique, a señales que no posean la frecuencia nula. Esta restricción ya aparece en las condiciones de ergodicidad en primer orden para cualquier señal que posea líneas espectrales [PIC97], como es el caso de señales armónicas.

Definición: Se definirán para su posterior utilización los siguientes conjuntos:

$$\Phi_1 \equiv \{(i,j,k,l) / 1 \leq i,j,k,l \leq p \text{ y } \omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i = 0 \pmod{2\pi}\}$$

$$\Phi_2 \equiv \{(i,j,k,l) / 1 \leq i,j,k,l \leq p \text{ y } \mathcal{E}\{A_i^* A_j A_k A_l\} \neq 0\}$$

$$\Phi_3 \equiv \{(i,j) / 1 \leq i,j \leq p \text{ y } \omega_j + \omega_i = 0 \pmod{2\pi}\}$$

$$\Phi_4 \equiv \{(i,j) / 1 \leq i,j \leq p \text{ y } \mathcal{E}\{A_i A_j\} \neq 0\}$$

$$\Phi_5 \equiv \{(i,j) / 1 \leq i,j \leq p, i \neq j \text{ y } \mathcal{E}\{A_i^* A_j\} \neq 0\}.$$

IV.5.1. Estacionaridad.

En este apartado se estudiará las condiciones que hay que imponer sobre las distintas componentes de la señal para que sean estacionarias de cuarto orden, según la definición dada con anterioridad. Al ser procesos de media cero, los momentos de orden uno y tres no aparecen en los cumulantes de cuarto orden. Si se desarrolla el cumulante de cuarto orden para estos procesos, el resultado es:

$$\begin{aligned} c_z^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \text{Cum}[z^*(n), z(n+\tau_1), z(n+\tau_2), z(n+\tau_3)] = \mathcal{E}\{z^*(n)z(n+\tau_1)z(n+\tau_2)z(n+\tau_3)\} - \\ &\quad \mathcal{E}\{z^*(n)z(n+\tau_1)\}\mathcal{E}\{z(n+\tau_2)z(n+\tau_3)\} - \mathcal{E}\{z^*(n)z(n+\tau_2)\}\mathcal{E}\{z(n+\tau_1)z(n+\tau_3)\} - \\ &\quad \mathcal{E}\{z^*(n)z(n+\tau_3)\}\mathcal{E}\{z(n+\tau_1)z(n+\tau_2)\} = \left[\sum_{ij, k, l = \Phi_1 \cap \Phi_2} \mathcal{E}\{A_i^* A_j A_k A_l\} + \sum_{ij, k, l = \Phi_2 / \Phi_1} \mathcal{E}\{A_i^* A_j A_k A_l\} \right] \\ &\quad e^{j(\omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i)n} \left[e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} - \left[\sum_{i=1}^p \mathcal{E}\{|A_i|^2\} + \sum_{ij \in \Phi_3} \mathcal{E}\{A_i^* A_j\} e^{j(\omega_j - \omega_i)n} \right] \left[\sum_{k, l = \Phi_3 \cap \Phi_4} \mathcal{E}\{A_k A_l\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{k, l \in \Phi_4 / \Phi_3} \mathcal{E}\{A_k A_l\} e^{j(\omega_k + \omega_l)n} \right] \cdot \left(e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} + e^{j(\omega_j \tau_2 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_3)} + e^{j(\omega_j \tau_3 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_2)} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde el conjunto Φ / Φ_j significa el conjunto de elementos que están en Φ , pero no están en Φ_j . Para que la señal $z(n)$ sea estacionaria de cuarto orden, el cumulante debe ser independiente de n y depender sólo de los retrasos temporales que presentan los argumentos de los cumulantes entre ellos, es decir τ_1 , τ_2 y τ_3 . El establecimiento de las condiciones para que lo anterior suceda es fácilmente realizable a partir de la expresión (4.32). El primer término es independiente de n siempre y cuando $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$, los siguientes términos son independientes de n siempre que no exista Φ_4 o, en el caso de que exista, que esté incluido en Φ_3 ($\Phi_4 \subseteq \Phi_3$) y no exista Φ_5 .

Resumiendo, las condiciones para que una señal del tipo tratado sea estacionaria son:

- 1) $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$.
- 2) O no exista Φ_4 o, si existe, $\Phi_4 \subseteq \Phi_3$ y no exista Φ_5 .

IV.5.2. Ergodicidad.

Generalmente esta condición se impone sobre los momentos, de forma que una señal que sea ergódica de orden k significa que su momento de orden k -ésimo es ergódico o, lo que es lo mismo, que la media temporal del momento de orden k -ésimo tiende al valor verdadero de este. Sin embargo, según las definiciones presentadas con anterioridad, el concepto de ergodicidad va a ir asociado a los cumulantes y no a los momentos. Más concretamente se ha visto en la definición (4.30) que la ergodicidad de cuarto orden implicará que tanto los momentos de orden cuatro como los de orden dos serán ergódicos, ya que no se permiten

señales con alguna de sus frecuencias ω_i nulas, condición suficiente para que los momentos de orden uno sean ergódicos y no influyan en los cumulantes de orden cuatro.

Como es sabido, para que una señal sea ergódica, es necesario que sea estacionaria en el mismo sentido. Esto se debe a que al realizar cualquier media temporal se pierde la dependencia en n , siendo imposible que una señal ergódica no sea estacionaria. Por tanto, en este apartado se supone que la señal es estacionaria de cuarto orden, es decir, que se cumplen las anteriores condiciones 1) y 2), deducidas en el apartado anterior para las señales estacionarias. El estimador promedio temporal de la serie de cumulantes de orden cuatro para una señal de longitud T será:

$$\begin{aligned} \hat{c}_z^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, T) &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} z^*(n)z(n+\tau_1)z(n+\tau_2)z(n+\tau_3) - \frac{1}{T^2} \sum_{n=0}^{T-1} z^*(n)z(n+\tau_1) \cdot \\ &\sum_{n=0}^{T-1} z(n+\tau_2)z(n+\tau_3) - \frac{1}{T^2} \sum_{n=0}^{T-1} z^*(n)z(n+\tau_2) \sum_{n=0}^{T-1} z(n+\tau_1)z(n+\tau_3) - \frac{1}{T^2} \sum_{n=0}^{T-1} z^*(n)z(n+\tau_3) \cdot \\ &\sum_{n=0}^{T-1} z(n+\tau_1)z(n+\tau_2) = \sum_{1 \leq ijkl \leq p} A_i^* A_j A_k A_l e^{j(\omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i)(\frac{T-1}{2})} e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\text{sen}((\omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i)\frac{T}{2})}{T \text{sen}((\omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i)/2)} - \sum_{1 \leq ij \leq p} A_i^* A_j e^{j(\omega_j - \omega_i)(\frac{T-1}{2})} \frac{\text{sen}((\omega_j - \omega_i)\frac{T}{2})}{T \text{sen}((\omega_j - \omega_i)/2)} \sum_{1 \leq kl \leq p} A_k A_l e^{j(\omega_k + \omega_l)(\frac{T-1}{2})} \cdot \\ &e^{j(\omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} \frac{\text{sen}((\omega_k + \omega_l)\frac{T}{2})}{T \text{sen}((\omega_k + \omega_l)/2)} \left(e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} + e^{j(\omega_j \tau_2 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_3)} + e^{j(\omega_j \tau_3 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_2)} \right). \end{aligned}$$

Para estudiar las condiciones de ergodicidad, se calcula la diferencia entre el valor verdadero de los cumulantes y su estimador promedio temporal y se imponen las condiciones de estacionaridad. Haciendo esto y definiendo $g(\omega, T) = \frac{\text{sen}(\omega \frac{T}{2})}{T \text{sen}(\omega/2)} e^{j\omega(\frac{T-1}{2})}$ resulta:

$$\begin{aligned} \hat{c}_z^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, T) - c_z^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \sum_{i,j,k,l \in \Phi_2} (A_i^* A_j A_k A_l - \mathcal{E}\{A_i^* A_j A_k A_l\}) e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} + \\ &+ \sum_{i,j,k,l \in \Phi_1/\Phi_2} A_i^* A_j A_k A_l e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} + \sum_{i,j,k,l \in \Phi_1} A_i^* A_j A_k A_l g(\omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_p, T) e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} - \\ &\left[\sum_{j=1}^p |A_j|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq p} A_i^* A_j g(\omega_j - \omega_p, T) \right] \left[\sum_{k,l \in \Phi_3} A_k A_l + \sum_{k,l \in \Phi_3} A_k A_l g(\omega_k + \omega_p, T) \right] - \\ &\sum_{j=1}^p \mathcal{E}\{|A_j|^2\} \sum_{k,l \in \Phi_4} \mathcal{E}\{A_k A_l\} \left[e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_3 + \omega_l \tau_2)} + e^{j(\omega_j \tau_2 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_3)} + e^{j(\omega_j \tau_3 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_2)} \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde se ha hecho uso de la propiedad $g(0, T) = 1$. También se ha tenido en cuenta que se cumplen las condiciones 1) y 2) de estacionaridad. Se aplica ahora el límite $T \rightarrow \infty$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_z^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, T) - c_z^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right) &= \sum_{i,j,k,l \in \Phi_2} \left(A_i^* A_j A_k A_l - \mathcal{E} \{ A_i^* A_j A_k A_l \} \right) e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} + \\ &+ \sum_{i,j,k,l \in \Phi_1 / \Phi_2} A_i^* A_j A_k A_l e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} - \left[\sum_{j=1}^p |A_j|^2 \left[\sum_{k,l \in \Phi_4} A_k A_l + \sum_{k,l \in \Phi_3 / \Phi_4} A_k A_l \right] - \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^p \mathcal{E} \{ |A_i|^2 \} \sum_{k,l \in \Phi_4} \mathcal{E} \{ A_k A_l \} \right] \left(e^{j(\omega_j \tau_1 + \omega_k \tau_2 + \omega_l \tau_3)} + e^{j(\omega_j \tau_2 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_3)} + e^{j(\omega_j \tau_3 + \omega_k \tau_1 + \omega_l \tau_2)} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde se ha aplicado que $\lim_{T \rightarrow \infty} (g(\omega, T)) = 0$ siempre que $\omega \neq 0$.

Las condiciones para que el anterior límite sea nulo (que son las condiciones de ergodicidad de cuarto orden) se deducen anulando cada uno de los términos del anterior límite, y resultan:

- 1) No existe Φ_1 / Φ_2 .
- 2) Si $i, j, k, l \in \Phi_2$ entonces $A_i^* A_j A_k A_l$ es no aleatoria.
- 3) O no existe Φ_3 o, si existe, $|A_i|^2$ es no aleatoria $\forall i = 1, \dots, p$.
- 4) No existe Φ_3 / Φ_4 .
- 5) Si existe Φ_4 , entonces para $(i, j) \in \Phi_4$ entonces $A_i A_j$ es no aleatoria.

Es fácil ver que si se cumplen las tres primeras se cumplen las otras dos:

· 1), 2) y 3) son verdaderos y supongase que 4) es falso. Esto último significa que $\exists (i, j) \in \Phi_3 / \Phi_4$, luego $\exists (i, j) \ 1 \leq i, j \leq p \ / \ \mathcal{E} \{ A_i A_j \} = 0$ y $\omega_i + \omega_j = 0 \pmod{2\pi}$. Entonces, para todo $k = 1, \dots, p$ se cumple, debido a que se ha supuesto que 3) es verdadero y a que Φ_3 debe existir para que 4) pueda ser falso, que $\mathcal{E} \{ A_k^* A_i A_j A_k \} = |A_k|^2 \mathcal{E} \{ A_i A_j \} = 0$ y $\omega_i + \omega_j + \omega_k - \omega_k = \omega_i + \omega_j = 0 \pmod{2\pi}$, lo que contradice 1. Por tanto 4) es verdadero, siempre que sean verdaderos las tres primeras.

· 1), 2) y 3) son verdaderos y supongase que 5) es falso. Esto implica que $\exists (i, j) \in \Phi_4 / A_i A_j$ es aleatoria. Entonces, para todo $k = 1, \dots, p$ se cumple que $\mathcal{E} \{ A_k^* A_i A_j A_k \} = |A_k|^2 \mathcal{E} \{ A_i A_j \} \neq 0$ y $A_k^* A_i A_j A_k$ es aleatoria, ya que por 3) $A_k^* A_k$ es no aleatoria, al tener que existir Φ_3 ($\Phi_4 \subset \Phi_3$) para que 5) pueda ser falso; luego, y como si $i, j \in \Phi_4$ entonces $k, i, j, k \in \Phi_2$, no se cumple 2).

Tras todo esto se pueden enunciar las condiciones de ergodicidad y estacionaridad:

- I. $\Phi_2 = \Phi_1$.
- II. Si $i, j, k, l \in \Phi_2$ entonces $A_i^* A_j A_k A_l$ es no aleatoria.
- III. $\Phi_4 = \Phi_3$.
- IV. O no existe Φ_3 o, si existe, $|A_i|^2$ es no aleatoria $\forall i = 1, \dots, p$. y no existe Φ_5 .

Este conjunto de ecuaciones es un conjunto suficiente de ecuaciones para que las señales armónicas sean estacionarias y ergódicas de cuarto orden. Además, en virtud de la independencia lineal de las exponenciales con argumentos independientes, también es un conjunto necesario.

Por último, recordar que para una señal $x(n)$ armónica que cumpla con las anteriores condiciones se tiene que el estimador media temporal posee las siguientes propiedades estadísticas:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\hat{c}_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, T)\} &= c_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \text{ w.p.1.} \\ \text{Var}\{\hat{c}_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, T)\} &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

La primera expresión proviene directamente de las imposiciones hechas sobre la señal y que han dado lugar a las condiciones I-IV. La segunda de las expresiones proviene del hecho de que si el estimador media temporal tiende al valor verdadero con probabilidad uno, también lo hace en error cuadrático, lo que implica que la varianza cumple lo anteriormente expuesto [PAP84].

IV.5.3. Señales con acoplos cúbicos de fase.

A continuación se van a imponer condiciones sobre las amplitudes dadas en (4.28), consiguiendo así un tipo de señales armónicas con las que se modelan los acoplos de fase, tal y como se definen en (4.26). Las señales van a ser de la forma dada en (4.28), donde $A_i = B_i e^{j\psi_i}$, con las amplitudes B_i constantes y las fases ψ_i variables aleatorias uniformemente distribuidas en $[0, 2\pi)$, pero no necesariamente independientes, ya que se permite que algunas de ellas sean suma de otras. Recuerdes que cuando una frecuencia sea la suma de otras se dirá que están relacionadas armónicamente, y si además de esto se cumple que la fase de la primera es la suma de las otras fases se dirá que forman un acoplo de fase. El acoplo será cuadrático si una frecuencia es la suma de otras dos, y la fase de la primera la suma de las otras fases; será cúbico si se cumple lo anterior pero para la suma de tres, y así sucesivamente.

Con las restricciones impuestas sobre las amplitudes se consigue el tipo de señales definidas en 4.26. Sin más que adaptar las condiciones generales a este subconjunto de señales armónicas, es fácil ver que las condiciones de estacionaridad resultan:

- 1) Para todos $1 \leq i, j, k, l \leq p$ que cumplan $\psi_j + \psi_k + \psi_l - \psi_i = 0$, se cumple que $\omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i = 0$.
- 2) O no existen $1 \leq i, j \leq p$ tales que $\psi_j + \psi_i = 0$, o, si existen, se cumple que $\omega_j + \omega_i = 0 \pmod{2\pi}$ y no existen $1 \leq i \neq j \leq p$ tales que $\psi_j = \psi_i$.

De la misma forma, las condiciones de ergodicidad y estacionaridad quedan:

- 1) Para todo $1 \leq i, j, k, l \leq p$ se cumple que $\psi_j + \psi_k + \psi_l - \psi_i = 0$ si y sólo si $\omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i = 0$.

II) Para todo $1 \leq i, j \leq p$ se cumple que $\psi_j + \psi_i = 0$ si y sólo si $\omega_j + \omega_i = 0 \pmod{2\pi}$.

III) O no existen $1 \leq i, j \leq p$ tal que cumpla $\psi_j + \psi_i = 0$, o, si existen, no lo hacen $1 \leq i \neq j \leq p$ tales que $\psi_j = \psi_i$.

El resto de las condiciones no es necesario imponerlas debido a la propia naturaleza de las señales. Se puede apreciar que para que una señal de este tipo sea ergódica debe cumplir que si cuatro frecuencias están relacionadas armónicamente entonces forman un acoplo cúbico de fase. Así una señal de la forma:

$$x(n) = \sum_{i=1}^8 A_i e^{j(\omega_i n + \psi_i)}, \quad (4.37)$$

con $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, $\omega_8 = \omega_5 + \omega_6 + \omega_7$, $\psi_8 = \psi_5 + \psi_6 + \psi_7$ y ψ_i con $i = 1, \dots, 7$ independientes, no es una señal ergódica.

El estimador promedio temporal de la serie de cumulantes tiende hacia un valor que no es el valor verdadero de la serie de cumulantes del proceso:

$$\begin{aligned} \hat{c}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} & A_1 A_2 A_3 A_4^* e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4)} \left(e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} + e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_3 \tau_2 + \omega_2 \tau_3)} + e^{j(\omega_2 \tau_1 + \omega_1 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} \right. \\ & e^{j(\omega_3 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_1 \tau_3)} + e^{j(\omega_2 \tau_1 + \omega_3 \tau_2 + \omega_1 \tau_3)} + e^{j(\omega_3 \tau_1 + \omega_1 \tau_2 + \omega_2 \tau_3)} \Big) + A_5 A_6 A_7 A_8^* \left(e^{j(\omega_5 \tau_1 + \omega_6 \tau_2 + \omega_7 \tau_3)} + \right. \\ & \left. e^{j(\omega_5 \tau_1 + \omega_7 \tau_2 + \omega_6 \tau_3)} + e^{j(\omega_6 \tau_1 + \omega_5 \tau_2 + \omega_7 \tau_3)} + e^{j(\omega_7 \tau_1 + \omega_6 \tau_2 + \omega_5 \tau_3)} + e^{j(\omega_6 \tau_1 + \omega_7 \tau_2 + \omega_5 \tau_3)} + e^{j(\omega_7 \tau_1 + \omega_5 \tau_2 + \omega_6 \tau_3)} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como se puso de manifiesto en el apartado IV.4., la serie de cumulantes verdadera sólo poseerá el segundo sumando. Para obtener un valor verdadero den la estimación de la serie de cumulantes es necesario promediar los estimadores promedio temporal en registros independientes. Si se poseen K registros independientes con L datos cada uno, se calcula el estimador promedio temporal en cada uno de los registros independientes $\hat{c}^i(\tau_1, \tau_2, \tau_3, L)$, y posteriormente el estimador se calculara promediando este en registros independientes, de forma que:

$$\hat{c}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, L, K) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{c}^i(\tau_1, \tau_2, \tau_3, L) \quad (4.39)$$

Este estimador cumplirá que:

$$\begin{aligned} \hat{c}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, L, K) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} & A_1 A_2 A_3 A_4 \left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K e^{j(\psi_1^i + \psi_2^i + \psi_3^i - \psi_4^i)} \right) \left(e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} + e^{j(\omega_1 \tau_1 + \omega_3 \tau_2 + \omega_2 \tau_3)} + \right. \\ & + e^{j(\omega_2 \tau_1 + \omega_1 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} + e^{j(\omega_3 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_1 \tau_3)} + e^{j(\omega_2 \tau_1 + \omega_3 \tau_2 + \omega_1 \tau_3)} + e^{j(\omega_3 \tau_1 + \omega_1 \tau_2 + \omega_2 \tau_3)} \Big) + A_5 A_6 A_7 A_8^* \\ & \left(e^{j(\omega_5 \tau_1 + \omega_6 \tau_2 + \omega_7 \tau_3)} + e^{j(\omega_5 \tau_1 + \omega_7 \tau_2 + \omega_6 \tau_3)} + e^{j(\omega_6 \tau_1 + \omega_5 \tau_2 + \omega_7 \tau_3)} + \right. \\ & \left. e^{j(\omega_7 \tau_1 + \omega_6 \tau_2 + \omega_5 \tau_3)} + e^{j(\omega_6 \tau_1 + \omega_7 \tau_2 + \omega_5 \tau_3)} + e^{j(\omega_7 \tau_1 + \omega_5 \tau_2 + \omega_6 \tau_3)} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Un poco más adelante se demostrará que la suma y resta de funciones aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[0, 2\pi) \pmod{2\pi}$ es una función aleatoria uniformemente distribuida en $[0, 2\pi)$. Teniendo en cuenta este resultado la sumatoria en K tiende a cero para K tendiendo a infinito, es decir:

$$\begin{aligned} \hat{c}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, L, K) \xrightarrow{L, K \rightarrow \infty} & A_5 A_6 A_7 A_8^* \left(e^{j(\omega_5 \tau_1 + \omega_6 \tau_2 + \omega_7 \tau_3)} + e^{j(\omega_5 \tau_1 + \omega_7 \tau_2 + \omega_6 \tau_3)} + \right. \\ & \left. + e^{j(\omega_6 \tau_1 + \omega_5 \tau_2 + \omega_7 \tau_3)} + e^{j(\omega_7 \tau_1 + \omega_6 \tau_2 + \omega_5 \tau_3)} + e^{j(\omega_6 \tau_1 + \omega_7 \tau_2 + \omega_5 \tau_3)} + e^{j(\omega_7 \tau_1 + \omega_5 \tau_2 + \omega_6 \tau_3)} \right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

que es el valor verdadero de la serie de cumulantes.

Una pregunta que se podría plantar es con qué velocidad va a tender el estimador promedio temporal al valor verdadero de la series de cumulantes. Para una señal ergódica, el estimador promediado en el tiempo, para una cantidad de datos T concreta, va a ser igual al valor correcto de la serie de cumulantes, más términos que van a cero como $g(\omega, T)$, con $\omega \neq 0$. Esta función va a tender a cero, para $\omega \neq 0$, como $1/T$. Los mayores problemas de convergencia aparecen cuando ω es muy próximo a cero, en cuyo caso la tendencia será como $2/(\omega T)$, que tardará más en converger mientras menor sea ω . Por ejemplo, una $\omega = 0.01$, requiere un T de 20000 para que la función $g(\omega, T) \sim 0.1$, un 10% de su valor máximo ($T=0$). Hay que recordar que las ω que aparecen como argumento de las funciones g provienen tanto de sumas o restas de dos frecuencias individuales como de cuatro. Si las frecuencias individuales ω_i son bastantes distintas, es fácil ver que, salvo coincidencias, las sumas y restas de estas serán bastante distintas de cero. Esto no es cierto para las sumas y restas de cuatro frecuencias, más si se tienen en cuenta que todos las posibles combinaciones de ellas están incluidas en los argumentos de las funciones g , a poco que el número de frecuencias sea mayor de cuatro. Luego no es nada extraño que el estimador promediado en el tiempo de funciones ergódicas requiera un T relativamente grande para tender adecuadamente al valor verdadero de la serie de cumulantes, debido a alguna/s combinación/es de cuatro frecuencias individuales que haga que $\omega = \omega_j + \omega_k + \omega_l - \omega_i$ sea muy próxima a cero, lo que produce que hasta T altos la señal se comporte como no ergódica.

En el caso de tener acceso a registros independientes, se abre otra posibilidad para intentar acelerar la convergencia del estimador promediado en el tiempo de señales ergódicas. Como ya se dijo anteriormente, esta posibilidad es la única en señales no ergódicas, en las que

es imprescindible el promediar en registros independientes para poder obtener el estimador correcto. A diferencia del comportamiento del estimador promediado en el tiempo, para ver como va a tender el promedio en registros independientes es necesario conocer la naturaleza estadística de las amplitudes de los procesos armónicos. Por ser el caso que centra este capítulo se restringirá este estudio al caso de amplitudes constantes y fases uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi)$, tal y como aparece en (4.26).

En este caso, la tendencia del estimador va a venir dominada por la función $h(K) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K e^{j(\psi'_1 + \psi'_2 + \psi'_3 - \psi'_4)}$. Lo primero es ver como se comporta una función aleatoria que sea la exponencial de la suma de tres fases menos una, todas uniformemente distribuidas entre $[0, 2\pi)$ e independientes entre sí. Una variable aleatoria $z = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4$, donde todas las ψ son independientes uniformemente distribuidas entre $[0, 2\pi)$ sigue una distribución:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq -2\pi \\ \frac{z^3}{6} + z^2\pi + 2\pi z + \frac{4}{3}\pi^3 & \text{si } -2\pi < z \leq 0 \\ -\frac{z^3}{2} + z^2\pi + 2\pi z + \frac{4}{3}\pi^3 & \text{si } 0 < z \leq 2\pi \\ \frac{z^3}{2} - 5z^2\pi + 14\pi z + \frac{20}{3}\pi^3 & \text{si } -2\pi < z \leq 4\pi \\ -\frac{z^3}{6} + 3z^2\pi - 18\pi z + 36\pi^3 & \text{si } -4\pi < z \leq 6\pi \\ 0 & \text{si } -z \geq 6\pi \end{cases}$$

Si se tiene en cuenta que las fases tienen módulo 2π , es decir, que $\psi = \psi + 2\pi$, como dominio de z habrá que tomar sólo el intervalo $[0, 2\pi)$ (que es a la vez la región principal de la exponencial compleja que es multivaluada), debiendo trasladar la contribución de los distintos intervalos fuera del de interés a este, mediante traslación de los trozos de la función de distribución que quedan fuera de este intervalo. Haciendo esto se llega a que z también sigue una distribución uniforme en este intervalo.

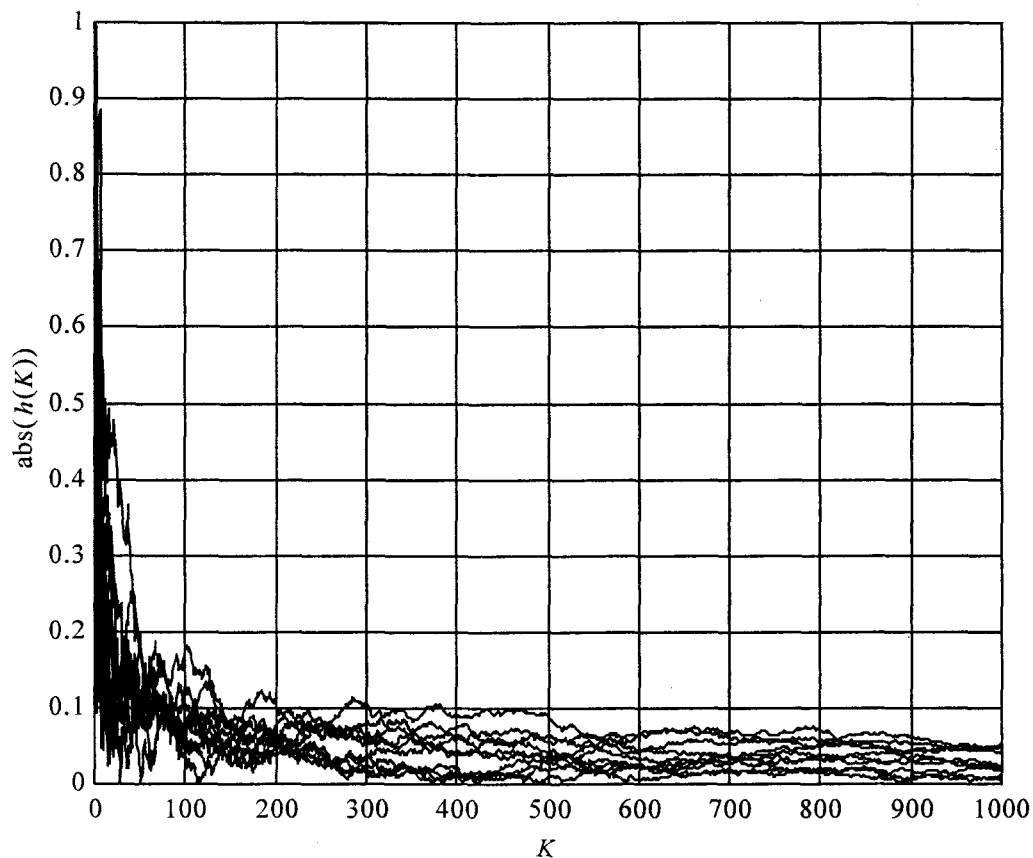
Según lo anterior, para ver como mejora el promedio en registros respecto al promedio temporal simple, habrá que estudiar el comportamiento de la media muestral de una exponencial cuyo exponente sigue una distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi)$, entendiendo por media muestral $h(K) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K e^{j\psi'_i}$, donde las fases ψ'_i son independientes. Esta

$h(K)$ es una variable aleatoria de media cero y varianza, definida como $\sigma^2 = \mathcal{E}\{h^*(n)h(n)\}$, igual a $1/K$. A partir de la desigualdad de Tchebycheff se obtiene una cota inferior al valor de que la probabilidad de que el valor absoluto de esa variable aleatoria sea menor que una determinada cantidad ϵ . Esta cota es $P\{|h(K)| \leq \epsilon\} \geq 1 - \frac{1}{K\epsilon^2}$. Si se quiere mejorar la estimación

en un orden de magnitud significa multiplicar cada uno de los sumandos asintóticamente nulos por un factor 0.1. Tomando $\epsilon = 0.1$, según la anterior desigualdad, se obtiene $P\{|h(K)| \leq \epsilon\} \geq 1 - \frac{100}{K}$. Si se desea una probabilidad del 90% de que el valor absoluto de $h(K)$

sea menor que ε se necesita, según la expresión anterior, un $K=1000$. Se observa que la convergencia que predice este límite es muy lenta. Sin embargo, lo que proporciona el límite de Tchebycheff es una cota superior, pero el comportamiento real de la media muestral puede ser mejor que el que predice la anterior desigualdad. Para ver lo que realmente sucede habría que calcular la función de distribución de la variable $h(K)$, lo que requiere un arduo trabajo probabilístico, que puede involucrar cálculos inabordables. Se puede conseguir una idea aproximada de como va a ser el comportamiento de la media muestral a partir de distintas realizaciones de los procesos anteriores y un estudio de su convergencia.

En la siguiente figura se representa el valor absoluto de 10 medias muestrales en función del número de muestras K :



Se puede ver como con 200 realizaciones, todas las medias muestrales menos una están por debajo de 0.1, lo que implica un 90% de las veces. Por supuesto esto es sólo indicativo y se necesitaría muchas más realizaciones para conseguir inducir adecuadamente el porcentaje de veces que con 200 realizaciones la media muestral se encuentra por debajo de 0.1. Sin embargo, sí indica que el límite que proporciona la desigualdad de Tchebycheff es muy amplio, y que la convergencia real de la media muestral es bastante más rápida. También se aprecia como el valor de la media muestral se reduce muy rápidamente hasta 100 registros independientes, y que a partir de 300 la mejora es muy poca. Estos resultados deberán ser tenidos en cuenta a la hora de realizar una elección óptima para el parámetro K , de forma que la mejora introducida justifique el esfuerzo adicional de cálculo.

Una ventaja obvia de promediar en registros independientes, es que la mejora que produce no depende de los valores de las frecuencias individuales ω , como sucede en los promedios temporales, lo que es siempre deseable. El principal inconveniente es que la convergencia es significativamente más lenta.

Imagínese que se tiene una señal en la que aparece algún ω de los argumentos de las funciones g que aparecen en los promedios temporales del orden de 0.01. Entonces, para conseguir que $g(\omega, L) \sim 0.1$ se necesita un $L \sim 2000$ datos. Si tomamos 200 realizaciones independientes de $L=10$ datos cada una, se consigue reducir a 0.1, un 95% de las veces, la parte asintóticamente nula del estimador. Se ve como en este caso es similar el estimador promediado en el tiempo con 2000 datos, que promediar en 200 registros independientes el promedio temporal para 10 datos, siendo también similar el esfuerzo de cálculo. Sin embargo, si $\omega \sim 0.002$ se necesita un $L \sim 10000$ datos para producir un valor de $g(\omega, L) \sim 0.1$, mientras que promediar 1000 registros independientes de 10 datos cada uno proporciona un valor, prácticamente siempre, de 0.05 en las contribuciones asintóticamente nulas. Con un mismo esfuerzo de cálculo, puede ser más interesante una estrategia que otra. Bien es cierto que esto será posible realizarlo dependiendo de la disponibilidad de registros independientes y de la longitud de los registros en la situación concreta de trabajo.

IV.6. ACOPLOS CÚBICOS DE FASE EN SEÑALES COMPLEJAS Y MODELACIÓN AR.

En este apartado se intentará encontrar un conjunto de coeficientes AR que puedan utilizarse para la detección de acoplos cúbicos de fase en señales armónicas. El modelo de señal será el dado en (4.26) y lo que se persigue es construir sistemas de ecuaciones cuyos coeficientes sean cumulantes de cuarto orden de la señal $x(n)$ dada en (4.26) y cuyas incógnitas sean los coeficientes AR. Siguiendo la misma idea que se siguió en la modelación AR de acoplos cuadráticos de fase en sinusoidales reales, el sistema de ecuaciones debe ser tal que mediante el triespectro construido con los coeficientes AR que lo solucionan se puedan detectar los acoplos cúbicos.

El sistema de ecuaciones será:

$$\sum_{i=0}^{3t} a_1(i) c_x^4(m-i, n, q) = 0, \quad n, q = 0, \dots, 3t \text{ y } m = 1, \dots, 3t, \quad (4.42)$$

con $a_1(0)=1$. La definición de cumulantes de cuarto orden es la misma que se siguió en (4.25). Este sistema de ecuaciones es idéntico al sistema de ecuaciones recursivas que cumple un sistema AR, tal y como se mostró en (2.10). Lo interesante es saber que propiedades deben cumplir los coeficientes $\{a_1(i)\}_{i=0, \dots, 3t}$ para que el anterior sistema se cumpla. Para ello hay que sustituir el valor de los cumulantes de la señal $x(n)$, que se calcularon en (4.25). Haciendo esto, el anterior sistema de ecuaciones queda como:

$$\sum_{i=0}^{3t} a_1(i) \sum_{s=1}^t A_{s,1} A_{s,2} A_{s,3} A_{s,4} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} e^{j(\omega_{s,j_1}(m-i) + \omega_{s,j_2}n + \omega_{s,j_3}q)} = \sum_{s=1}^t A_{s,1} A_{s,2} A_{s,3} A_{s,4} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} e^{j(\omega_{s,j_1}m + \omega_{s,j_2}n + \omega_{s,j_3}q)} \sum_{i=0}^{3r} a_1(i) e^{-j\omega_{s,j_1}i} = 0. \quad (4.43)$$

Para que lo anterior se cumpla es necesario y suficiente que los coeficientes cumplan la condición

$$\sum_{i=0}^{3t} a_1(i) e^{-j\omega_{s,k}i} = 0, \text{ para todo } s=1, \dots, t \text{ y } k=1, 2, 3. \quad (4.44)$$

Se sabe que siempre es posible encontrar un conjunto de coeficientes que cumplan la anterior ecuación, sean cuales sean las frecuencias acopladas, ya que para cualquier q conjunto de números en el plano complejo, existe un polinomio de orden q cuyas raíces son los q números del conjunto. En la anterior igualdad existe una ambigüedad de escala que se ha eliminado al hacer $a_1(0)=1$.

A partir de (4.44), es fácil ver como la transformada de Fourier de este conjunto de coeficientes AR:

$$A_1(\omega) = \sum_{n=0}^{3t} a_1(n) e^{-j\omega n}, \quad (4.45)$$

presentará ceros únicamente en las frecuencias acopladas, es decir, en las frecuencias $\omega = \omega_{s,k}$ con $s=1, \dots, t$ y $k=1, 2, 3$. A estos de coeficientes se les llamarán *coeficientes AR de frecuencias*, al igual que al modelo AR que queda caracterizado con ellos.

El sistema a solucionar queda, en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} c_x^4(0, n, q) & \dots & c_x^4(-3t+1, n, q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x^4(3t-1, n, q) & \dots & c_x^4(0, n, q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(1) \\ \vdots \\ a_1(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x^4(1, n, q) \\ \vdots \\ c_x^4(3t, n, q) \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Ya es posible identificar las frecuencias acopladas a partir de este conjunto de coeficientes AR de frecuencias, sin más que encontrar los ceros de la transformada de Fourier de sus coeficientes. Sin embargo, si existen más de un acoplo cúbico, no es posible determinar en el conjunto de las frecuencias cuales corresponden a un acoplo y cuales corresponden a otro, ya que en este caso no aparece contribución alguna por parte de la suma de frecuencias de los acoplos. Es precisamente para determinar esto para lo que se construye un nuevo sistema de ecuaciones y por lo que los anteriores conjuntos de coeficientes han llevado en todo momento un subíndice uno, distinguiendolos de esta forma del conjunto de coeficientes que

va a deducir a continuación.

El otro conjunto de ecuaciones que se va a construir es el siguiente:

$$\sum_{i=0}^t a_2(i) c_x^4(m-i, n+m-i, q+m-i) = 0, \quad n, q = 0, \dots, t \text{ y } m = 1, \dots, t. \quad (4.47)$$

Al igual que anteriormente, hay que encontrar las propiedades que deben cumplir el conjunto de coeficientes AR $\{a_2(i)\}_{i=0, \dots, t}$ para que el anterior sistema se cumpla. Para ello no habrá más que sustituir en (4.47) el valor de los cumulantes orden cuatro, quedando el sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^t a_2(i) \sum_{s=1}^t A_{s,1} A_{s,2} A_{s,3} A_{s,4} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} e^{j(\omega_{s,j_1}(m-i) + \omega_{s,j_2}(n+m-i) + \omega_{s,j_3}(q+m-i))} = \\ \sum_{s=1}^t A_{s,1} A_{s,2} A_{s,3} A_{s,4} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} e^{j(\omega_{s,j_1}m + \omega_{s,j_2}(n+m) + \omega_{s,j_3}(q+m))} \sum_{i=0}^t a_2(i) e^{-j\omega_{s,4}i} = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para que el anterior sistema sea cierto es necesario y suficiente que se cumpla:

$$\sum_{i=0}^t a_2(i) e^{-j\omega_{s,4}i} = 0, \quad \text{para todo } s = 1, \dots, t. \quad (4.49)$$

En la anterior igualdad existe una ambigüedad de escala que vuelve a eliminarse haciendo $a_2(0) = 1$. A partir de (4.49), es fácil ver como la transformada de Fourier de este conjunto de coeficientes AR:

$$A_2(\omega) = \sum_{n=0}^t a_2(n) e^{-j\omega n}, \quad (4.50)$$

presentará ceros únicamente en la suma de las frecuencias acopladas, es decir, en las frecuencias $\omega = \omega_{s,4}$, con $s = 1, \dots, t$. A estos coeficientes se les llamarán *coeficientes AR de suma*, al igual que al modelo AR que se puede definir a partir de ellos.

El triespectro para ambos conjuntos de coeficientes AR se obtiene a partir de (2.9), es decir:

$$\begin{aligned} T_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) H_1(\omega_3) H_1^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ T_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= H_2(\omega_1) H_2(\omega_2) H_2(\omega_3) H_2^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3), \end{aligned} \quad (4.51)$$

con $H_1(\omega) = 1/A_1(\omega)$ o $H_2(\omega) = 1/A_2(\omega)$. Ninguno de estos dos triespectros modelan bien el

comportamiento de del triespectro verdadero de la señal $x(n)$ de partida, el cual es cero en todo punto salvo en los correspondientes a los acoplos cúbicos de fase. Esto se debe a que la transformada del conjunto de coeficientes de frecuencias no presenta un cero en la suma de las frecuencias del acoplo, lo que es necesario para que $H_1^*(\omega_1+\omega_2+\omega_3)$ posea una contribución infinita cuando las tres frecuencias sean las de un acoplos, que en la práctica se convertirá en un pico. Por su parte, el conjunto de coeficientes de suma anula su transformada de Fourier en ninguna de las frecuencias de los acoplos, salvo en la suma de estas, por lo que tampoco presentará el deseado esquema de picos que con el que es posible detectar los acoplos cúbicos de fase.

Sin embargo, haciendo uso de los dos conjuntos de coeficientes AR se puede definir una triespectro, tal y como:

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_2^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3). \quad (4.52)$$

Este triespectro sí presentará picos en todos aquellos conjuntos (v_1, v_2, v_3) que formen un acoplo cúbico de fase, ya que la función $H_1(\omega)$ presenta una contribución infinita a cada una de las frecuencias individuales y la función $H_2(\omega)$ presenta una contribución infinita a la suma de estas.

Se ha conseguido de esta manera la detección de acoplos cúbicos en señales complejas mediante el uso de la modelación AR de cuarto orden, como se deseaba.

Es conveniente señalar ciertas particularidades del procedimiento anteriormente descrito. La primera es el hecho del que el método que se ha propuesto es exacto, en la medida que se puedan calcular exactamente los cumulantes de orden cuatro de la señal $x(n)$ dada en (4.26). Incluso en el caso de señal sin ruido, esto no será posible, ya que sólo se dispondrá de un número finito de datos, por lo que aparecerán errores de estimación. A estos errores hay que sumarles los errores producidos por el ruido aditivo, que en cualquier caso práctico está presente en mayor o menor medida. Estos errores producirán que los métodos no sean exactos, por lo que es interesante estudiar diferentes estrategias en la resolución y construcción de las ecuaciones, que proporcionarán resultados distintos.

Unas de las variables que han quedado libres en el planteamiento han sido los índices m , n y q en las ecuaciones (4.47). Distintas elecciones en estos índices darán lugar a métodos distintos de estimación de los coeficientes AR, tal y como se vio en el capítulo II para señales reales.

Otra interesante puntualización es que el tamaño $3t$ y t de los sistemas de ecuaciones uno y dos, son dos límites inferiores, pero es posible aumentar las dimensiones de los sistemas de ecuaciones, cumpliéndose que el triespectro resultante presenta picos en las frecuencias acopladas. Este es un procedimiento que suele utilizarse en para acoplos cuadráticos en señales reales, y que permite disminuir los errores debido a la presencia de ruido aditivo. En efecto, si la señal está contaminada con ruido y los cumulantes obtenidos presentan errores a causa de ello, los ordenes óptimos de los sistemas uno y dos de ecuaciones no será $3t$ y t , respectivamente, sino que serán mayores. Se abre de esta manera el problema de determinar cuál es el orden óptimo de los sistemas AR, y con ello de las señales AR que modelen la señal

$x(n)$. Este será un problema que no se abordará en esta tesis, aunque en su resolución será inevitable hacer un barrido en los ordenes de los modelos AR, tarea que ya se sabe que es facilitado por los métodos de resolución recursivos en el orden.

Una limitación que aparece en estos métodos es la determinación de las amplitudes de los acoplos. Mediante la modelación AR se ha visto que es posible encontrar la terna de frecuencias que lo forman, pero no se dispone de ningún mecanismo que permita establecer la magnitud de tales acoplos. Esta limitación ya aparecía en la aplicación del modelado AR a los acoplos cuadráticos de fase en señales reales, incluso en la aplicación del modelado AR de segundo orden en la detección de frecuencias en procesos armónicos lineales. Si se desea información sobre estas amplitudes es necesario recurrir a métodos de estimación clásicos e incluso de esta manera será muy difícil encontrar una estimación adecuada a tales magnitudes. Esto se deberá a que en el triespectro teórico de estas señales, las amplitudes de los acoplos aparecen como el área de una delta de Dirac, lo que siempre presenta enorme problema de estimación a partir de datos ruidosos y finitos. Esta será una de las motivaciones del desarrollo de un método alternativo de cálculo de acoplos basados en ESPRIT (*estimation signal parameters via rotation invariance techniques*), que se desarrollara en el apartado IV.8.; que permitirá estimar las amplitudes de los acoplos, aparte de las frecuencias acopladas, claro está.

En el siguiente apartado se indica brevemente las modificaciones que son necesarias para adaptar a señales complejas los métodos de estimación AR del triespectro desarrollados en el capítulo II para señales reales.

IV.7. MÉTODOS AR DE ESTIMACIÓN TRIESPECTRAL PARA SEÑALES COMPLEJAS

Para poder realizar una estimación mediante los métodos AR desarrollados en el capítulo II habrá que estudiar previamente si es necesario introducir en estos alguna corrección debido a que se trata con datos complejos, en vez de los datos reales para los cuales fueron diseñados.

a) Método de Levinson

Este método es un método estándar de resolución de sistemas de ecuaciones toeplitz, reales o complejas, por lo que sólo habrá que construir sistemas de ecuaciones que posean esta estructura con los índices que quedan libres en las ecuaciones (4.42) y (4.47.).

En concreto los sistemas el sistema de ecuaciones uno se consigue haciendo $n=q=0$ y $m=1, \dots, 3t$, lo que proporciona un sistemas de ecuaciones idénticos al de (2.34), con los cumulantes definidos para señales complejas. El segundo sistema de ecuaciones se consigue haciendo $n=q=0$ y $m=1, \dots, t$, dando lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} c_x^4(0,0,0) & \dots & c_x^4(-t+1,-t+1,-t+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x^4(t-1,t-1,t-1) & \dots & c_x^4(0,0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(1) \\ \vdots \\ a_1(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x^4(1,1,1) \\ \vdots \\ c_x^4(t,t,t) \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

que puede verse que posee estructura toeplitz.

b) Método de LS

Al igual que en el método de Levinson, una vez construidas las matrices, la resolución se realiza mediante un proceso estándar de resolución por mínimos cuadrados el sistema de ecuaciones sobredeterminado que resulta. Sólo habrá por tanto que fijar las elecciones de los índices de los sistemas de ecuaciones (4.42) y (4.47), y una vez con estos resolver mediante mínimos cuadrados. El primer sistema de ecuaciones resulta de hacer en (4.42) $m=1,\dots,3t$, $n=0,\dots,3t$ y $q=0$. Se obtiene de esta forma un sistema similar al obtenido en (2.36), sin más que cambiar los cumulantes reales por los complejos. El segundo sistema de ecuaciones se consigue haciendo $m=1,\dots,t$, $n=0,\dots,t$ y $q=0$ en (4.47).

$$\begin{pmatrix} c_x^4(0,0,0) & \dots & c_x^4(-t+1,-t+1,-t+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x^4(t-1,t-1,t-1) & \dots & c_x^4(0,0,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x^4(0,t,0) & \dots & c_x^4(-t+1,1,-t+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x^4(t-1,2t-1,t-1) & \dots & c_x^4(0,t,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(1) \\ \vdots \\ a_1(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x^4(1,1,1) \\ \vdots \\ c_x^4(t,t,t) \\ \vdots \\ c_x^4(1,t+1,1) \\ \vdots \\ c_x^4(t,2t,t) \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Una vez con ellos el método es inmediato.

c) Método de CFOM simple

Este método se distinguía del método de Levinson que en el cálculo los cumulantes no se utiliza las propiedad de estacionaridad que posee la señal. Se basaba en la definición de unos estimadores de los cumulantes de cuarto orden que se daban en (2.41) y que no tenían en cuenta la citada propiedad de estacionaridad que los cumulantes poseen. En el caso de señales complejas, la definición de estos estimadores que no tienen en cuenta la estacionaridad es, para el primer sistema de ecuaciones es:

$$C_x^1(i,k) \equiv \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x^*(n-k)x(n-k)^2 - \frac{1}{(N-p)^2} \left[\sum_{n=p+1}^N x(n-i)x^*(n-k) \sum_{n=p+1}^N x(n-k)^2 + 2 \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-k) \sum_{n=p+1}^N |x(n-k)|^2 \right] \quad (4.55)$$

y con ellos se construye el primer sistema de ecuaciones que resulta ser idéntico al que aparece en (2.43). En el segundo sistema de ecuaciones los estimadores de los cumulantes se definen como:

$$C_x^2(i,k) \equiv \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-k)^3 - \frac{3}{(N-p)^2} \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-k) \sum_{n=p+1}^N x(n-k)^2, \quad (4.56)$$

y con estos estimadores se vuelve a construir un sistema de ecuaciones idéntico al que aparece en (2.42).

Los dos sistemas tienen la misma estructura pero serán distintos, al ser distinta la definición de los estimadores no estacionarios de los cumulantes de orden cuatro.

c) Método de CFOM complejo.

En su modificación, lo que hay que hacer es lo mismo que se realizó para el método CFOM simple, es decir, definir los estimadores no estacionarios de los cumulantes de orden cuatro. Para el primer sistema de ecuaciones, esta definición queda:

$$C_x^1(i,r,k) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-r)x^*(n-k)x(n-k) - \frac{1}{(N-p)^2} \left[\sum_{n=p+1}^N x(n-i)x^*(n-k) \sum_{n=p+1}^N x(n-r)x(n-k) + \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-k) \sum_{n=p+1}^N x(n-r)x^*(n-k) + \sum_{n=p+1}^N x(n-i)x(n-r) \sum_{n=p+1}^N |x(n-k)|^2 \right]. \quad (4.57)$$

Con esta definición se construye el sistema de ecuaciones (2.47). Para el segundo sistema de ecuaciones se construyen los estimadores no estacionarios de los cumulantes de orden cuatro como:

$$C_x^2(i,r,k) = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-r)x(n-k)^2 - \frac{2}{(N-p)^2} \left[\sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-k) \sum_{n=p+1}^N x(n-r)x(n-k) + \sum_{n=p+1}^N x^*(n-i)x(n-r) \sum_{n=p+1}^N x(n-k)^2 \right] \quad (4.58)$$

con los que se vuelve a construir un sistema como el dado en (2.47).

d) Método RCM

La generalización del método RCM a señales complejas no será tan directa como lo ha sido para el resto de los métodos. El desarrollo del método RCM comenzaba con la definición de varios productos escalares entre dos señales (2.13). Para dos señales complejas $y(n)$ y $z(n)$ los productos escalares se definen para señales complejas como:

$$\langle y(n) | z(n) \rangle_s = \text{Cum}[y^*(n), z(n), x(n-s), x(n-s)]. \quad (4.59)$$

Una vez hecho esto, se construían las funciones error (2.14). En este caso complejo, las funciones error se definirán de igual forma, teniendo en cuenta que $\|\cdot\|_s$ significa $\langle \cdot | \cdot \rangle_s$ y que las definiciones de producto escalar no son las dadas en (2.13), sino en (4.59), como era de esperar.

$$\begin{aligned} Q_{f,p}^s &= \|x(n) - \hat{x}_p^f(n)\|_s^2 = \|e_p^f(n)\|_s^2 & s=0,1,\dots,p \\ Q_{b,p}^s &= \|x(n) - \hat{x}_p^b(n)\|_s^2 = \|e_p^b(n)\|_s^2 & s=0,-1,\dots,-p. \end{aligned} \quad (4.60)$$

A continuación hay que realizar una primera minimización de estas funciones error respecto de los coeficientes de predicción lineal. En el caso de señales complejas, la minimización debe realizarse respecto de la parte real y la parte imaginaria de los coeficientes por separado, obteniéndose así el doble de ecuaciones que en el caso real. Se debe cumplir de esta forma:

$$\frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial a_p^R(i)} = 0, \quad \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial a_p^I(i)} = 0, \quad \frac{\partial Q_{b,p}^s}{\partial b_p^R(i)} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q_{b,p}^s}{\partial b_p^I(i)} = 0, \quad (4.61)$$

lo que se hará ahora es reagrupar las derivadas para facilitar la deducción de las ecuaciones RCM. De forma que las anteriores cuatro condiciones se pueden imponer de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial a_p^R(i)} + j \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial a_p^I(i)} = 0, & \quad \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial a_p^R(i)} - j \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial a_p^I(i)} = 0, \\ \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial b_p^R(i)} + j \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial b_p^I(i)} = 0, & \quad \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial b_p^R(i)} - j \frac{\partial Q_{f,p}^s}{\partial b_p^I(i)} = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Es fácil ver que las condiciones (4.61) y (4.62) son idénticas, ya que se han hecho combinaciones lineales independientes. Tras esta minimización, y haciendo las mismas consideraciones que se hicieron en el capítulo II, resultan los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \langle x(n-s) | \hat{e}^f(n) \rangle_s &= (Q_s^0)_{\min} \delta(s) & p \geq s \geq 0 \\
 \langle \hat{e}^f(n) | x(n-s) \rangle_s &= (Q_s^0)_{\min} \delta(s) & p \geq s \geq 0 \\
 \langle x(n-s) | \hat{e}^b(n) \rangle_s &= (Q_b^0)_{\min} \delta(s) & -p \leq s \leq 0 \\
 \langle \hat{e}^b(n) | x(n-s) \rangle_s &= (Q_b^0)_{\min} \delta(s) & -p \leq s \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Todos los sistemas de ecuaciones son sistemas toeplitz, por lo que se pueden definir unas relaciones para los coeficientes de predicción lineal que sean recurrentes en el orden del modelo de predicción lineal y que estén dominadas por unos coeficientes que como ya se sabe se llamarán coeficientes de reflexión, es decir unas relaciones como las dadas en (2.25) y (2.26). En este caso se tienen las relaciones para los coeficientes de predicción lineal hacia delante y hacia atrás y para sus complejos conjugados; siendo estas relaciones independientes entre sí, es decir, unas ecuaciones no son las complejo conjugadas de las otras, por lo que habrá que imponerlas independientemente. Los coeficientes que cumplan unas ecuaciones tampoco serán los complejos conjugados de los otros, aunque se noten así. De esta manera se obtienen dos conjuntos de coeficientes de predicción lineal hacia delante y hacia atrás.

Si se desarrollan las expresiones de los productos escalares en los anteriores sistemas (4.63), resulta que el primer y el tercer sistema corresponden al sistema de ecuaciones que cumplen los coeficientes $\{a_1(i)\}_{i=0,\dots,p}$, haciendo $p=3t, m=s, n=q=0$ y el segundo y el cuarto sistema corresponde al que cumplen los coeficientes $\{a_2(i)\}_{i=0,\dots,p}$, haciendo $p=t, m=n=q=s$. Por lo tanto, si se resuelven los anteriores sistemas de ecuaciones se podrá estar en disposición de construir el triespectro dado en (4.52) y que permite detectar los acoplos cúbicos de fase en la señal $x(n)$.

En el desarrollo del método RCM, el siguiente paso es realizar una nueva minimización de las funciones error (4.60) respecto de los coeficientes de predicción lineal, pero teniendo en cuenta que están sujetos a las relaciones recursivas antes impuestas. El resultado es que la minimización de las funciones error respecto de los coeficientes de predicción lineal se transforman en una minimización de las funciones error respecto de los coeficientes de reflexión, tal y como sucedió en el caso real. En esta minimización sucede lo mismo que la anterior (4.61): hay que tener en cuenta parte real y parte imaginaria de los coeficientes de reflexión por separado.

Tras realizar el mismo razonamiento que en el caso real, el resultado son las expresiones de los coeficientes de reflexión en función de los cumulantes de cuarto orden y de los datos del paso anterior del proceso recursivo; lo que, junto a las relaciones recursivas en el orden que cumplen los coeficientes de predicción lineal, cierran el ciclo y producen los coeficientes de predicción lineal. Estas expresiones para los coeficientes de reflexión son:

$$\begin{aligned}
 k_k^f &= -\frac{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}^*(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^f(n) \rangle_k}{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}^*(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_k} = -\frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i) b_{k-1}^*(j) c_x^4(k-j-i, -j, -j)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} b_{k-1}(i) b_{k-1}^*(j) c_x^4(i-j, -j, -j)} \\
 (k_k^f)^* &= -\frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1}^*(i) \langle x(n-i) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_k}{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}^*(i) \langle x(n-k+i) | e_{k-1}^b(n-k) \rangle_k} = -\frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}^*(i) b_{k-1}(j) c_x^4(j+i-k, i-k, i-k)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} b_{k-1}^*(i) b_{k-1}(j) c_x^4(i-j, -j, -j)},
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

donde los cumulantes están definidos tal y como se ha venido haciendo para señales complejas y viene recogido en (4.25).

De igual forma se obtienen los coeficientes de reflexión hacia atrás:

$$\begin{aligned}
 k_k^b &= -\frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1}^*(i) \langle x(n+k-i) | e_{k-1}^b(n) \rangle_{-k}}{\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1}^*(i) \langle x(n+k-i) | e_{k-1}^f(n+k) \rangle_{-k}} = -\frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}^*(i) b_{k-1}(j) c_x^4(j+i-k, i, i)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}^*(i) a_{k-1}(j) c_x^4(i-j, i, i)} \\
 (k_k^b)^* &= -\frac{\sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1}(i) \langle x(n+i) | e_{k-1}^f(n+k) \rangle_{-k}}{\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1}^*(i) \langle x(n+k-i) | e_{k-1}^f(n+k) \rangle_{-k}} = -\frac{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i) b_{k-1}^*(j) c_x^4(k-i-j, k-j, k-j)}{\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{k-1}(i) a_{k-1}^*(j) c_x^4(i-j, i, i)}.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Los conjuntos de coeficientes de predicción lineal equivaldrán al conjunto de coeficientes AR $\{a_1(i)\}_{i=0,\dots,p}$, haciendo $p=3t$, $m=s$, $n=q=0$; mientras que el conjunto de coeficientes de predicción lineal complejos conjugados corresponde a los coeficientes AR $\{a_2(i)\}_{i=0,\dots,p}$, haciendo $p=t$, $m=n=q=s$. No debe confundir la notación, ya que aunque unos conjuntos de coeficientes se notan como los complejos conjugados de los otros, en realidad se obtienen mediante ecuaciones distintas, por lo que no están relacionados entre sí por conjugación, y poseen las diferencias que se sabe que hay entre los conjuntos de coeficientes AR uno y dos.

El método GM no será desarrollado para este problema, ya que presenta muy mal comportamiento para señales AR con sus polos cerca del círculo unidad, tal y como se pudo comprobar con resultados experimentales en el capítulo III.

IV.7. MÉTODO DE ESPRIT

En este apartado se presenta un método alternativo a los métodos AR para la detección de acoplos cúbicos de fase en las señales que se definieron en (4.26). Sin embargo, en aquella

ocasión se exigió que todas las frecuencias fuesen distintas, unas de otras. De esta forma no se permitía que un mismo acoplo tuviese dos frecuencias iguales, es decir, no se permitía un acoplo de una frecuencia consigo misma. En realidad, es posible relajar esta condición en los métodos AR, sin más que redefinir las dimensiones mínimas de los sistemas de ecuaciones, que en el caso de que se permitan acoplos con algunas frecuencias iguales, no serán $3t$ y t , sino menores. Para el desarrollo de este nuevo método se hará explícitamente el tratamiento teniendo en cuenta que pueden aparecer dos frecuencias iguales en los acoplos.

Una de las principales ventajas que presenta este método es que en su construcción aparece una determinación del número de acoplos presentes en la señal $x(n)$, cosa que no se conseguía directamente con los modelos AR y que, en general, no suele conocerse a priori en los casos prácticos. Otra ventaja es que se puede obtener información de las amplitudes de los acoplos, lo que se ha visto que no es posible a partir de la modelación AR.

El algoritmo desarrollado está encaminado a la estimación de acoplos cúbicos de fase en una señal compleja, siguiendo un esquema análogo a los métodos de ESPRIT, clásicamente aplicados al problema electromagnético de DOA (*Direction of Arrival*), haciendo uso de la similitud existente entre procesos armónicos complejos y los desfases que se introducen entre las medidas de distintos detectores dentro de un serie de sensores.

El modelo de señal que vamos a tratar es el siguiente: supongase una señal compleja $x(n)=s(n)+w(n)$ donde $s(n)$ una señal consistente en t acoplos cúbicos de fase y p procesos armónicos complejos sin acoplar, es decir:

$$s(n) = \sum_{i=1}^t [s_{1,i}(n) + s_{2,i}(n) + s_{3,i}(n) + s_{4,i}(n)] + \sum_{i=1}^p s_i(n), \quad (4.66)$$

donde:

$$\begin{aligned} s_{j,i}(n) &= A_{k,i} e^{j(\omega_{k,i}n + \varphi_{j,i})}, \quad 1 \leq k \leq 4, \quad 1 \leq i \leq t \\ \omega_{4,i} &= \omega_{1,i} + \omega_{2,i} + \omega_{3,i}, \quad \varphi_{4,i} = \varphi_{1,i} + \varphi_{2,i} + \varphi_{3,i} \\ s_i(n) &= A_i e^{j(\omega_i n + \varphi_i)}, \quad 1 \leq i \leq p. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Sobre la señal $x(n)$ se realizan las siguientes suposiciones:

- A1) Las amplitudes $\{A_{k,i}, 1 \leq k \leq 4, 1 \leq i \leq t\}$ y $\{A_i, 1 \leq i \leq p\}$ son constantes reales, positivas y no aleatorias.
- A2) Las fases $\{\varphi_{k,i}, 1 \leq k \leq 3, 1 \leq i \leq t\}$ y $\{\varphi_i, 1 \leq i \leq p\}$ son variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas (i.i.d.) en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- A3) Las ternas de frecuencias $\{\omega_{k,i}, 1 \leq k \leq 3\}$ para distintos i son distintas entre si. Esto quiere decir que para distintos acoplos (i distinto) existe al menos una frecuencia de cada acoplo que son distintas entre sí, no impidiéndose que las dos parejas restantes sean iguales.
- A4) $w(n)$ es un proceso aleatorio gaussiano, blanco o coloreado, independiente de la señal $s(n)$.

El cumulante de cuarto orden de la señal $x(n)$ ha sido calculado con anterioridad en

(4.25). Supongase que de los t acoplos cúbicos de la señal, se tiene s acoplos cuyas frecuencias son iguales ($\omega_{1,i}=\omega_{2,i}=\omega_{3,i}$, $1 \leq i \leq s$), q acoplos con dos frecuencias iguales ($\omega_{1,i}=\omega_{2,i} \neq \omega_{3,i}$, $1+s \leq i \leq s+q$) y m acoplos con todas las frecuencias distintas ($\omega_{1,i} \neq \omega_{2,i} \neq \omega_{3,i}$, $1+s+q \leq i \leq s+q+m=t$). Utilizando esto y llamando $A_1, A_2, A_3, A_{4,i} = \lambda_i$, los cumulantes de orden cuatro de la señal $x(n)$ quedan:

$$c_x^4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sum_{i=1}^{6t-3q-5s} \alpha_i e^{j(\theta_{1,i}\tau_1 + \theta_{2,i}\tau_2 + \theta_{3,i}\tau_3)}, \quad (4.68)$$

con:

$$\begin{aligned} 1,i &= \theta_{2,i} = \theta_{3,i} = \omega_{1,i}; \quad \alpha_i = 6\lambda_i; \quad 1 \leq i \leq s \\ 1,i &= \theta_{2,i} = \omega_{1,i}; \quad \theta_{3,i} = \omega_{3,i}; \quad \alpha_i = 2\lambda_i; \quad 1+s \leq i \leq s+q \\ 1,i &= \theta_{3,i} = \omega_{1,i-q}; \quad \theta_{2,i} = \omega_{3,i-q}; \quad \alpha_i = 2\lambda_{i-q}; \quad 1+s+q \leq i \leq s+2q \\ 2,i &= \theta_{3,i} = \omega_{1,i-2q}; \quad \theta_{1,i} = \omega_{3,i-2q}; \quad \alpha_i = 2\lambda_{i-2q}; \quad 1+s+2q \leq i \leq s+3q \\ 1,i &= \omega_{1,i-2q}; \quad \theta_{2,i} = \omega_{2,i-2q}; \quad \theta_{3,i} = \omega_{3,i-2q}; \quad \alpha_i = \lambda_{i-2q}; \quad 1+s+3q \leq i \leq s+3q+m \\ 1,i &= \omega_{1,i-2q-m}; \quad \theta_{2,i} = \omega_{2,i-2q-m}; \quad \theta_{3,i} = \omega_{3,i-2q-m}; \quad \alpha_i = \lambda_{i-2q-m}; \quad 1+s+3q+m \leq i \leq s+3q+2m \\ 1,i &= \omega_{1,i-2q-2m}; \quad \theta_{2,i} = \omega_{2,i-2q-2m}; \quad \theta_{3,i} = \omega_{3,i-2q-2m}; \quad \alpha_i = \lambda_{i-2q-2m}; \quad 1+s+3q+2m \leq i \leq s+3q+3m \\ 1,i &= \omega_{1,i-2q-3m}; \quad \theta_{2,i} = \omega_{2,i-2q-3m}; \quad \theta_{3,i} = \omega_{3,i-2q-3m}; \quad \alpha_i = \lambda_{i-2q-3m}; \quad 1+s+3q+3m \leq i \leq s+3q+4m \\ 1,i &= \omega_{1,i-2q-4m}; \quad \theta_{2,i} = \omega_{2,i-2q-4m}; \quad \theta_{3,i} = \omega_{3,i-2q-4m}; \quad \alpha_i = \lambda_{i-2q-4m}; \quad 1+s+3q+4m \leq i \leq s+3q+5m \\ 1,i &= \omega_{1,i-2q-5m}; \quad \theta_{2,i} = \omega_{2,i-2q-5m}; \quad \theta_{3,i} = \omega_{3,i-2q-5m}; \quad \alpha_i = \lambda_{i-2q-5m}; \quad 1+s+3q+5m \leq i \leq s+3q+6m \end{aligned} \quad (4.69)$$

A partir de ahora se notará $r=s+3q+6m$.

Sea N un entero positivo de forma que $N \geq 3m+2q+s$ y $M=N^3$, se define la matriz $Cx_{a,b,c}$ como la matriz $M \times M$ cuyo elemento $(Cx_{a,b,c})_{ij}$ con $i=N^2d+Ne+f+1$ y $j=N^2g+Nh+k+1$ corresponde a el cumulante $c_x^4(d-g-a, e-h-b, f-k-c)$.

Definiendo:

$$\begin{aligned} e(\theta) &= [1, e^{j\theta}, \dots, e^{j(N-1)\theta}]^T \\ a_i &= e(\theta_{1,i}) \otimes e(\theta_{2,i}) \otimes e(\theta_{3,i}), \quad 1 \leq i \leq r \\ A &= [a_1, \dots, a_r] \\ \Phi_i &= \text{diag}(e^{j\theta_{1,i}}, \dots, e^{j\theta_{i,r}}) \\ D &= \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \end{aligned} \quad (4.70)$$

donde $\text{diag}(\cdot)$ significa una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son sus argumentos. A partir de estas definiciones, la matriz $Cx_{a,b,c}$ puede escribirse como:

$$Cx_{a,b,c} = AD(\Phi_1^a \Phi_2^b \Phi_3^c) H A^H \quad (4.71)$$

Será esta forma matricial de $Cx_{a,b,c}$ la que permitirá la obtención de los acoplos y de las amplitudes de la señal $x(n)$. Para lograr esto será necesario la utilización de una serie de teoremas, los cuales se enuncian a continuación.

Teorema 1: Las columnas de A son linealmente independientes, luego $\text{Rango}(A)=r$.

Demostración: Se construye el conjunto $\Xi_0 = \bigcup_{i=1}^r \{\theta_{1,i}\}$ como la unión de todas las $\theta_{1,i}$ distintas entre sí. Es conveniente recordar que la suposición A3 no excluye la posibilidad de tener frecuencias repetidas en distintos acoplos, sino que evita que dos acoplos sean iguales en todas sus frecuencias. Por supuesto, como es fácil de comprobar a partir de la definición de las $\theta_{k,i}$, se cumple que $\Xi_0 = \bigcup_{i=1}^r \{\theta_{2,i}\} = \bigcup_{i=1}^r \{\theta_{3,i}\}$. Se observa que el conjunto $\Xi = \{(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}, \theta_{3,i}), 1 \leq i \leq r\}$ es un subconjunto de $\Xi_0 \otimes \Xi_0 \otimes \Xi_0$ y el número de elementos de Ξ_0 es menor o igual que $3m+2q+s \leq N$. Se tiene que el conjunto $\Gamma_0 = \{e(\theta) : \theta \in \Xi_0\}$ es un conjunto linealmente independiente en \mathbb{C}^N , debido a las propiedades de los vectores de Vandervals, luego $\Gamma_0 \otimes \Gamma_0 \otimes \Gamma_0 = \{e(\theta_1) \otimes e(\theta_2) \otimes e(\theta_3) : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi_0 \otimes \Xi_0 \otimes \Xi_0\}$ es un conjunto linealmente independiente en \mathbb{C}^M . Como el conjunto $\Gamma = \{e(\theta_1) \otimes e(\theta_2) \otimes e(\theta_3) : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi\}$ es un subconjunto de $\Gamma_0 \otimes \Gamma_0 \otimes \Gamma_0$, será a su vez linealmente independiente en \mathbb{C}^M . Como los elementos de Γ son las columnas de A , la demostración queda concluida. ■

Teorema 2: Sea X una matriz $m \times n$ compleja de rango n y sea Y una matriz $n \times n$ compleja de rango k . Entonces:

- a) XYX^H tiene rango k y la dimensión del núcleo es $m-k$. Además, si $k=n$ (lo que significa que Y es no singular), entonces:
- b) $\text{Rango}(XYX^H) = \text{Rango}(X)$.
- c) $\text{Ker}(XYX^H) = \text{Ker}(X^H)$.

Donde Ker indica el núcleo de una matriz. Este es un teorema general dentro del álgebra de matrices y su demostración se puede encontrar en cualquier libro general sobre la materia.

- Teorema 3:** a) $Cx \equiv Cx_{0,0,0}$ es una matriz hermítica, definida positiva, de rango r .
- b) $\text{Rango}(Cx_{a,b,c}) = \text{Rango}(Cx_{a,b,c}^H) = \text{Rango}(A)$.
 - c) $\text{Ker}(Cx_{a,b,c}) = \text{Ker}(Cx_{a,b,c}^H) = \text{Ker}(A^H)$.

Demostración: La hermiticidad y el rango r de la matriz Cx se sigue inmediatamente de su definición y del teorema 2. De la misma forma, es inmediato b) y c) del teorema 2 y de (4.71). Falta por demostrar que la matriz Cx es definida positiva. Para ello sería necesario comprobar que:

$$\sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a^*(m)a(n)Cx(n,m) > 0 \quad (4.72)$$

para cualquier vector $[a(1), \dots, a(M)]$ complejo. Utilizando la definición de Cx y la ecuación (4.68):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M a^*(m)a(n)Cx(n,m) &= \sum_{d,e,f=0}^{N-1} \sum_{g,h,i=0}^{N-1} a^*(N^2d+Ne+f+1)a(N^2g+Nh+k+1) \\ &\quad c_x^4(d-g, e-h, f-k) = \sum_{d,e,f,g,h,k=0}^{N-1} a^*(N^2d+Ne+f+1)a(N^2g+Nh+k+1) \cdot \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i e^{j(\theta_{1,i}(d-g)+\theta_{2,i}(e-h)+\theta_{3,i}(f-k))} &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \sum_{d,e,f=0}^{N-1} a^*(N^2d+Ne+f+1) e^{j(\theta_{1,i}d+\theta_{2,i}e+\theta_{3,i}f)} \cdot \\ &\quad \sum_{g,h,i=0}^{N-1} a(N^2g+Nh+k+1) e^{-j(\theta_{1,i}g+\theta_{2,i}h+\theta_{3,i}k)} = \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i \left| \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{N-1} a(N^2\alpha+N\beta+\gamma+1) e^{-j(\theta_{1,i}\alpha+\theta_{2,i}\beta+\theta_{3,i}\gamma)} \right|^2 &> 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

■

Como Cx es una matriz $M \times M$, hermitica, de rango r existe un conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ de vectores de \mathbb{C}^M ortogonales, tales que son autovectores correspondientes a autovalores no nulos de la matriz Cx , que se notarán como $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ y se les llamará *autovectores de la señal*. De la misma forma existen un conjunto de vectores $\{v_{r+1}, \dots, v_M\}$ de \mathbb{C}^M ortogonales que forman una base del núcleo de la matriz Cx , a estos autovectores se les llamarán *autovectores del ruido*. De esta forma se cumple que:

$$Cx = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i v_i^H + 0 \cdot \sum_{i=r+1}^M v_i v_i^H \quad (4.74)$$

Teorema 4: a) $s = \text{Rango}(Cx) - \text{Rango}(Cx_{1,0,0} + Cx_{0,1,0} - 2Cx_{1,0,0})$.

b) $q + s = \text{Rango}(Cx) - \text{Rango}(Cx_{1,0,0} - Cx_{0,1,0})$.

Esto unido a que $\text{Rango}(Cx) = r$ y a que $r = 6m + 3q + s$ permite obtener los valores de r, s, m y q .

Demostración: De la ecuación (4.71) se obtiene:

$$Cx_{0,0,1} + Cx_{0,1,0} - 2Cx_{1,0,0} = AD(\Phi_3 + \Phi_2 - 2\Phi_1)^H A^H \quad (4.75)$$

Es claro que los s primeros elementos de la diagonal de $\Phi_3+\Phi_2-2\Phi_1$ son nulos. Falta por comprobar que los $r-s$ restantes no se pueden anular. Si algún elemento de la diagonal de $\Phi_3+\Phi_2-2\Phi_1$ es nulo se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
 e^{j\theta_{3,i}}+e^{j\theta_{2,i}}-2e^{j\theta_{1,i}}=0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_{3,i}+\cos\theta_{2,i}-2\cos\theta_{1,i}=0 \\ \text{sen}\theta_{3,i}+\text{sen}\theta_{2,i}-2\text{sen}\theta_{1,i}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\theta_{3,i}+\cos^2\theta_{2,i}+2\cos\theta_{3,i}\cos\theta_{2,i}=4\cos^2\theta_{1,i} \\ \text{sen}^2\theta_{3,i}+\text{sen}^2\theta_{2,i}+2\text{sen}\theta_{3,i}\text{sen}\theta_{2,i}=4\text{sen}^2\theta_{1,i} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos^2\theta_{3,i}+\cos^2\theta_{2,i}+2\cos\theta_{3,i}\cos\theta_{2,i} &=4-\text{sen}^2\theta_{3,i}-\text{sen}^2\theta_{2,i}-2\text{sen}\theta_{3,i}\text{sen}\theta_{2,i} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos\theta_{3,i}\cos\theta_{2,i}+\text{sen}\theta_{3,i}\text{sen}\theta_{2,i}=1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos(\theta_{3,i}-\theta_{2,i})=1 \Leftrightarrow \theta_{3,i}=\theta_{2,i}+2\pi k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Como se ha supuesto que $0 \leq \theta_{1,i}, \theta_{2,i}, \theta_{3,i} \leq 2\pi$, la última condición implica $\theta_{2,i} = \theta_{3,i} = \theta_i$. Sustituyendo esto en el primer sistema de ecuaciones resulta que $\theta_{1,i}$ y θ_i son ángulos de igual seno e igual coseno, luego son el mismo ángulo, ya que ambos tienen que estar en el intervalo $[0, 2\pi)$. Se obtiene que un elemento de la diagonal de $\Phi_3+\Phi_2-2\Phi_1$ es nulo si y sólo si corresponde a un acoplo con las tres frecuencias iguales, lo que sucede sólo para las s primeras frecuencias, luego $\Phi_3+\Phi_2-2\Phi_1$ tiene rango $r-s$. A partir de este resultado es inmediato el apartado a). Para el apartado b) hay que ver cuando se anulan los elementos de la diagonal de $\Phi_1-\Phi_2$. Esto sucederá cuando $\theta_{1,i}$ y $\theta_{2,i}$ sean iguales lo que sucede para las $q+s$ primeras frecuencias. A partir de este resultado se demuestra el apartado b) fácilmente. ■

Teorema 5: Sea $\gamma_{k,i} = \exp(j\theta_{k,i})$, $k=1,2,3$, $i=1, \dots, r$. Se construye el conjunto $B_0 = \{\exp(j\theta) : \theta \in \Xi_0\}$ (todos distintos). Entonces los elementos de B_0 son los números que reducen rango de la matriz $Cx-\gamma Cx_{1,0,0}$ (también de las matrices $Cx-\gamma Cx_{0,1,0}$ y $Cx-\gamma Cx_{0,0,1}$). Esto quieren decir que la matriz $Cx-\gamma Cx_{1,0,0}$ posee rango r para todo valor de γ , salvo para γ igual a algún elemento de B_0 . Además, $\text{Rango}(Cx-\gamma_{k,i} Cx_{1,0,0}) = \text{Rango}(Cx-\gamma_{k,i} Cx_{0,1,0}) = \text{Rango}(Cx-\gamma_{k,i} Cx_{0,0,1}) = r - \nu_{k,i}$, donde $\nu_{k,i}$ es la multiplicidad de ese número que reduce rango, o lo que es lo mismo, el número de veces que aparece en el conjunto $\{\exp(j\theta_{1,i}), 1 \leq i \leq r\}$.

Demostración: A partir de las definiciones de las matrices se obtiene que :

$$Cx-\gamma Cx_{1,0,0} = AD(I_M - \gamma \Phi_1^H)A^H \quad (4.76)$$

Como A y D son matrices de rango completo, el rango de la matriz anterior dependerá del rango de la matriz $I_M - \gamma \Phi_1^H$. Esta es una matriz diagonal que cuyos elementos de la diagonal valen $1 - \gamma \exp(-j\theta_{1,i})$, $1 \leq i \leq r$. Para que alguno de estos elementos de la diagonal se anule tiene que suceder que $\gamma = \exp(j\theta_{1,i})$, para algún $i \in \{1, \dots, r\}$, o lo que es lo mismo, tiene que suceder que $\gamma \in B_0$. Si esto sucede la matriz diagonal $I_M - \gamma \Phi_1^H$ tendrá $\nu_{1,k}$ ceros elementos de la diagonal iguales a cero, correspondientes a las $\nu_{1,k}$ veces que aparece el elemento de B_0 al que es igual γ en la diagonal de Φ_1 , es decir en $\{\exp(j\theta_{1,i}), 1 \leq i \leq r\}$. Con el resto de las matrices del teorema

se demuestra de la misma forma. ■

Colorario 5.1: Sea $\Lambda = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_r]$, sea $E_s = [v_1 | \dots | v_r]$ y $E_r = [v_{1+r} | \dots | v_M]$, las matrices cuyas columnas son los autovectores de la señal y del ruido (definidos anteriormente), respectivamente. Entonces los autovalores de las matrices $\Lambda^{-1} E_s^H C x_{1,0,0} E_s$, $\Lambda^{-1} E_s^H C x_{0,1,0} E_s$ y $\Lambda^{-1} E_s^H C x_{0,0,1} E_s$ son los complejos conjugados de los elementos de B_0 .

Demostración: La matriz $[E_s | E_r]$ es unitaria (por tanto no singular) debido a que la matriz Cx es hermitica. Entonces las matrices $Cx - \gamma Cx_{1,0,0}$ y $[E_s | E_r]^H [Cx - \gamma Cx_{1,0,0}] [E_s | E_r]$ tienen el mismo rango. Del teorema 3 se deduce que :

$$[E_s | E_r]^H Cx [E_s | E_r] = \begin{bmatrix} E_s^H Cx E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E_s | E_r]^H Cx_{1,0,0} [E_s | E_r] = \begin{bmatrix} E_s^H Cx_{1,0,0} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $\text{Rango}(Cx - \gamma Cx_{1,0,0}) = \text{Rango}(\Lambda - \gamma E_s^H Cx_{1,0,0} E_s) = \text{Rango}(I_r - \Lambda^{-1} E_s^H Cx_{1,0,0} E_s)$. Se sabe que $E_s^H Cx_{1,0,0} E_s$ tiene el mismo rango que $Cx_{1,0,0}$, es decir r , además Λ es no singular, luego $\text{Rango}(\Lambda^{-1} E_s^H Cx_{1,0,0} E_s) = r$. Si se toma un β tal que $\beta^* \in B_0$, por el teorema 5, $\text{Rango}(Cx - \beta^* Cx_{1,0,0}) < r$, por lo que $\text{Rango}(I_r - \beta^* \Lambda^{-1} E_s^H Cx_{1,0,0} E_s) < r$ y, haciendo uso que $\beta^* = \beta^{-1}$, $\text{Rango}(\beta I_r - \Lambda^{-1} E_s^H Cx_{1,0,0} E_s) < r$, por lo que β es un autovalor de la matriz $\Lambda^{-1} E_s^H Cx_{1,0,0} E_s$. El hecho de que todos los autovalores de esta matriz son tales que su conjugado pertenece a B_0 se debe a que los elementos de este conjunto son los únicos números que reducen rango de la matriz $Cx - \gamma Cx_{1,0,0}$. Para demostrar el teorema para el resto de las matrices se procede de la misma manera. ■

El resultado de todo este proceso es la detección de todos los elementos del conjunto Ξ_0 y su multiplicidad. El siguiente paso será agrupar estos elementos de tres formando los distintos acoplos cúbicos. Para ello es posible utilizar distintos algoritmos.

Algoritmo 1.

Teorema 6: Sean $W_1(\gamma) = \text{Ker}(Cx - \gamma Cx_{1,0,0})$, $W_2(\gamma) = \text{Ker}(Cx - \gamma Cx_{0,1,0})$ y $W_3(\gamma) = \text{Ker}(Cx - \gamma Cx_{0,0,1})$. Sean $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 2\pi)$ y $\gamma_k = \exp(j\theta_k)$, con $k=1,2,3$. Si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi$, entonces el subespacio $W_1(\gamma_1) \cap W_2(\gamma_2) \cap W_3(\gamma_3) = \bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tiene dimensión $M-r+1$. Si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \notin \Xi$, entonces el subespacio $\bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tiene dimensión $M-r$.

Demostración: Como A es de rango completo y D es una matriz cuadrada no singular se cumple que $\text{Ker}(Cx - \gamma Cx_{1,0,0}) = \text{Ker}((I_r - \gamma \Phi_1^H) A^H)$. Sea un vector z de \mathbb{C}^N . Si $z \in \text{Ker}((I_r - \gamma \Phi_1^H) A^H)$ eso significa que:

$$(I_r - \gamma \Phi_1^H) A^H z = 0 \Leftrightarrow \left[(1 - e^{j(\theta - \theta_{1,1})}) a_{1,z}, \dots, (1 - e^{j(\theta - \theta_{1,r})}) a_{r,z} \right] = 0 \quad (4.78)$$

con $\gamma = e^{j\theta}$. Para que la anterior igualdad sea cierta z debe ser ortogonal a todo a_i , con $i=1, \dots, r$, salvo que $\theta_{1,i} = \theta$. Esto significa que:

$$\text{Ker}(Cx - \gamma Cx_{1,0,0}) = \text{Ker}(I_r - \gamma \Phi_1^H) A^H = W_1(\gamma) = L^\perp \{ a_i, 1 \leq i \leq r / \theta \neq \theta_{1,i} \} \quad (4.79)$$

donde el operador $L\{\cdot\}$ significa la combinación lineal, y el superíndice “ \perp ” significa el complemento ortogonal del subespacio al que va acompañando. Se puede ver que el subespacio de (4.79) posee dimensión $M-r$ siempre que $\theta \notin \Xi_0$, y dimensión $M-r+u$ si $\theta \in \Xi_0$, siendo u la multiplicidad de θ en Ξ .

Es fácil ver que:

$$\bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = L^\perp \{ a_i, 1 \leq i \leq r / (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \neq (\theta_{1,i}, \theta_{2,i}, \theta_{3,i}) \} \quad (4.80)$$

lo que representa el subespacio ortogonal al subespacio formado por la combinación lineal de todas las columnas de la matriz A , salvo si algún acoplo coincide con la terna de frecuencias, en cuyo caso la columna correspondiente no entra en el subespacio.

Si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi$, entonces $\bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tiene dimensión $M-r+1$, ya todos los acoplos deben ser distintos, y si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \notin \Xi$, entonces $\bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tiene dimensión $M-r$. ■

Habrà que calcular todos r^3 posibles tríos a los que habrá que calcular la dimensión del conjunto intersección $\bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Para poder realizar el procedimiento en la práctica, el siguiente corolario traslada el problema de hallar la dimensión de un subespacio a la comprobación de si una matriz es de rango completo en columnas, es decir, si sus columnas son linealmente independientes.

Corolario 6.1: Se define la matriz:

$$B(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \left[(\Lambda - \gamma_1 E_s^H C x_{1,0,0} E_s)^T \mid (\Lambda - \gamma_2 E_s^H C x_{1,0,0} E_s)^T \mid (\Lambda - \gamma_3 E_s^H C x_{1,0,0} E_s)^T \right]^T \quad (4.81)$$

con $\theta_k \in \Xi_0$ y $\gamma_k = \exp(j\theta_k)$ para $k=1,2,3$. Entonces si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi$ implica que $\text{Rango}(B(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = r-1$ y si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \notin \Xi$ $\text{Rango}(B(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = r$.

Demostración: Si $z \in \text{Ker}(Cx)$, por el teorema 3 cumple $z \in \text{Ker}(Cx - \gamma Cx_{1,0,0}) = W_1(\gamma)$,

luego $\text{Ker}(Cx) \subseteq W_1(\gamma)$ y también $\text{Ker}(Cx) \subseteq \bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi$, por el teorema 6, $\dim(\bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = M - r + 1$. Como la dimensión de $\text{Ker}(Cx)$ es $M - r$, existe un único vector h de \mathbb{C}^M tal que $h \in \bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y no está incluido en el núcleo de Cx . Por esto último h se puede escribir como $h = E_s x$ con $x \in \mathbb{C}^r$.

Se sabe que:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(Cx - \gamma_1 Cx_{1,0,0}) &= \text{Ker}([E_s^H | E_r^H](Cx - \gamma_1 E_s^H Cx_{1,0,0})) = \\ &= \text{Ker}(E_s^H Cx - \gamma_1 E_s^H Cx_{1,0,0}) = W_1(\gamma_1) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Como $h \in \bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y $h = E_s x$, entonces:

$$\begin{aligned} E_s^H Cx E_s x - \gamma_1 E_s^H Cx_{1,0,0} E_s x &= E_s^H Cx E_s x - \gamma_2 E_s^H Cx_{0,1,0} E_s x = \\ &= E_s^H Cx E_s x - \gamma_3 E_s^H Cx_{0,0,1} E_s x = 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

o lo que es lo mismo:

$$\Lambda - \gamma_1 E_s^H Cx_{1,0,0} E_s x = \Lambda - \gamma_2 E_s^H Cx_{0,1,0} E_s x = \Lambda - \gamma_3 E_s^H Cx_{0,0,1} E_s x = 0 \quad (4.84)$$

Esto implica que existe un único $x \in \mathbb{C}^r$, tal que $B(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)x = 0$.

Si, por el contrario $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \notin \Xi$, entonces $\text{Ker}(Cx) = \bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y no existe ningún $x \in \mathbb{C}^r$ de forma que $E_s x \in \bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Por tanto, no existirá ningún x distinto de cero que haga que $B(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)x = 0$, lo que implica que $B(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ es una matriz de rango completo en columnas. ■

El anterior teorema presenta un mecanismo que permite emparejar las distintas frecuencias del conjunto Ξ_0 según se encuentren acopladas. El siguiente y último teorema de este primer algoritmo permitirá la evaluación de las amplitudes de los acoplos formados haciendo uso del teorema 6.

Teorema 7: Sea $\gamma_{k,i} = \exp(j\theta_{k,i})$ con $k=1,2,3$ y $1 \leq i \leq r$. Según la prueba del corolario 6.1, para cada $l=1, \dots, r$ existe un vector $x_l \in \mathbb{C}^r$ no nulo, tal que $B(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l})x_l = 0$. Entonces, para cada uno de estos x_l se tiene que la amplitud del acoplo resulta ser:

$$\alpha_l = \frac{x_l^H \Lambda x_l}{|a_l^H E_s x_l|^2} \quad (4.85)$$

Demostración: Para cada uno de los x_i se tiene que $h_i = E_s x_i$. Estos h_i cumplen que $h_i \in \bigcap (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y se vio que esto era lo mismo que decir que $h_i \in L^\perp \{a_i, 1 \leq i \leq r \quad i \neq l\}$. Esto significa que $a_i^H h_i = 0$, siempre que $i \neq l$. En el caso de que suceda que $i = l$, ocurre que $a_l^H h_l \neq 0$, ya que si $a_l^H h_l = 0$ entonces h_l pertenecería al núcleo de Cx y no se podría poner $h_l = E_s x_l$, que es la forma que presentan los vectores del complemento ortogonal del núcleo.

Si se recuerda que $Cx = ADA^H$, multiplicandose por la izquierda por h_l^H y por la derecha por h_l , el resultado es:

$$h_l^H Cx h_l = \alpha_l |a_l^H h_l|^2 \Rightarrow \alpha_l = \frac{h_l^H Cx h_l}{|a_l^H h_l|^2} = \frac{x_l^H E_s^H Cx E_s x_l}{|a_l^H E_s x_l|^2} = \frac{x_l^H \Lambda x_l}{|a_l^H E_s x_l|^2} \quad (4.86)$$

Algoritmo 2.

Teorema 8. Sea $\gamma_k = \exp(j\theta_k)$ con $k=1,2,3$, y $F(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \equiv 3Cx - \gamma_1 Cx_{1,0,0} - \gamma_2 Cx_{0,1,0} - \gamma_3 Cx_{0,0,1}$. Entonces, si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi$ implica que $\text{Rango}(F(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = r-1$ y si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \notin \Xi$ implica que $\text{Rango}(F(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = r$.

Demostración: Por el teorema 2 se sabe que $\text{Rango}(F(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = \text{Rango}(D(3I_r - \gamma_1 \Phi_1^H - \gamma_2 \Phi_2^H - \gamma_3 \Phi_3^H))$. Como D es de rango completo y cuadrada, entonces $\text{Rango}(F(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = \text{Rango}(3I_r - \gamma_1 \Phi_1^H - \gamma_2 \Phi_2^H - \gamma_3 \Phi_3^H)$. Como:

$$I_r - \gamma_1 \Phi_1^H - \gamma_2 \Phi_2^H - \gamma_3 \Phi_3^H = \text{diag} \left[3 - e^{j(\theta_1 - \theta_{1,1})} - e^{j(\theta_2 - \theta_{2,1})} - e^{j(\theta_3 - \theta_{3,1})}, \dots, 3 - e^{j(\theta_1 - \theta_{1,1})} - e^{j(\theta_2 - \theta_{2,1})} - e^{j(\theta_3 - \theta_{3,1})} \right] \quad (4.87)$$

es fácil ver que si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi$ un elemento de la diagonal se anulará, y sólo uno. También de cumple que si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \notin \Xi$ todos los elementos de la diagonal serán distintos de cero. Estos hecho producen el comportamiento de los rangos que predice el teorema.

Corolario 8.1. Sea $H(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \equiv 3\Lambda - \gamma_1 E_s^H Cx_{1,0,0} E_s - \gamma_2 E_s^H Cx_{0,1,0} E_s - \gamma_3 E_s^H Cx_{0,0,1} E_s$. Entonces si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Xi$ implica que $\text{Rango}(H(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = r-1$ y si $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \notin \Xi$ entonces $\text{Rango}(H(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) = r$.

Demostración: Es fácil demostrar el corolario a partir del teorema sin más que operar:

$$\begin{aligned} \text{Rango}(F(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) &= \text{Rango}(3Cx - \gamma_1 Cx_{1,0,0} - \gamma_2 Cx_{0,1,0} - \gamma_3 Cx_{0,0,1}) = \text{Rango}([E_s^H | E_r^H](3Cx - \gamma_1 Cx_{1,0,0} \\ &\quad - \gamma_2 Cx_{0,1,0} - \gamma_3 Cx_{0,0,1})[E_s | E_r]) = \text{Rango}(3\Lambda - \gamma_1 E_s^H Cx_{1,0,0} E_s - \gamma_2 E_s^H Cx_{0,1,0} E_s - \gamma_3 E_s^H Cx_{0,0,1} E_s) \end{aligned}$$

■

Teorema 9: Sea $\gamma_{k,i} = \exp(j\theta_{k,i})$ con $k=1,2,3$ y $1 \leq i \leq r$. Para cada $l=1, \dots, r$ existe un vector $y_l \in \mathbb{C}^r$ no nulo, tal que $H(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l})y_l = 0$. Entonces, para cada uno de estos y_l se tiene que la amplitud del acoplo resulta ser:

$$\alpha_l = \frac{y_l^H \Lambda y_l}{|a_l^H E_s y_l|^2} \quad (4.89)$$

Demostración: La igualdad $H(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l})y_l = 0$ puede escribirse como $E_s^H F(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l})E_s y_l = 0$. Si se define $z_l = E_s y_l$, como

$$\begin{aligned} \text{Ker}(F(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l})) &= \text{Ker}(Cx - \gamma_{1,l} Cx_{1,0,0} - \gamma_{2,l} Cx_{0,1,0} - \gamma_{3,l} Cx_{0,0,1}) = \\ \text{Ker}([E_s^H | E_r^H](Cx - \gamma_{1,l} Cx_{1,0,0} - \gamma_{2,l} Cx_{0,1,0} - \gamma_{3,l} Cx_{0,0,1})) &= \text{Ker}(E_s^H F(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l})) \end{aligned} \quad (4.90)$$

entonces $z_l \in \text{Ker}(F(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l}))$. Debido a la definición de z_l también se sabe que $z_l \notin \text{Ker}(Cx)$. También se sabe que $\text{Ker}(F(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l})) = \text{Ker}(3Cx - \gamma_{1,l} Cx_{1,0,0} - \gamma_{2,l} Cx_{0,1,0} - \gamma_{3,l} Cx_{0,0,1}) = \text{Ker}((3I_r - \gamma_{1,l} \Phi_1^H - \gamma_{2,l} \Phi_2^H - \gamma_{3,l} \Phi_3^H)A^H)$, por lo que puede verse que:

$$\begin{aligned} (3I_r - \gamma_{1,l} \Phi_1^H - \gamma_{2,l} \Phi_2^H - \gamma_{3,l} \Phi_3^H)A^H z = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[(3 - e^{j(\theta_{1,l} - \theta_{1,1})} - e^{j(\theta_{2,l} - \theta_{2,1})} - e^{j(\theta_{3,l} - \theta_{3,1})})a_{1,l}^H z, \dots, (3 - e^{j(\theta_{1,l} - \theta_{1,r})} - e^{j(\theta_{2,l} - \theta_{2,r})} - e^{j(\theta_{3,l} - \theta_{3,r})})a_{r,l}^H z \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

luego:

$$F(\gamma_{1,l}, \gamma_{2,l}, \gamma_{3,l}) = L^\perp \{a_i, 1 \leq i \leq r \mid i \neq l\} \quad (4.92)$$

Además como $z_l \notin \text{Ker}(Cx)$, tiene que suceder que $a_l^H z_l \neq 0$. Teniendo esto en cuenta resulta, de aplicar z_l por la derecha y por la izquierda a Cx :

$$z_l^H C x z_l = \alpha_l |a_l^H z_l|^2 \Rightarrow \alpha_l = \frac{z_l^H C x z_l}{|a_l^H z_l|^2} = \frac{y_l^H E_s^H C x E_s y_l}{|a_l^H E_s y_l|^2} = \frac{y_l^H \Lambda y_l}{|a_l^H E_s y_l|^2} \quad (4.93)$$

■

IV. CONCLUSIONES

A lo largo de todo el capítulo se ha tratado el problema de los acoplos cúbicos de fase en señales armónicas. Las principales conclusiones que se pueden deducir de el desarrollo son las siguientes:

-Se ha visto como no es posible utilizar la modelación AR para aplicarla a acoplos cúbicos en señales reales, lo que ha sido debido de la forma concreta que poseen la serie de cumulantes de orden tres en la que aparecen contribuciones de todas las frecuencias presentes en la señal, estén acopladas en fase o no.

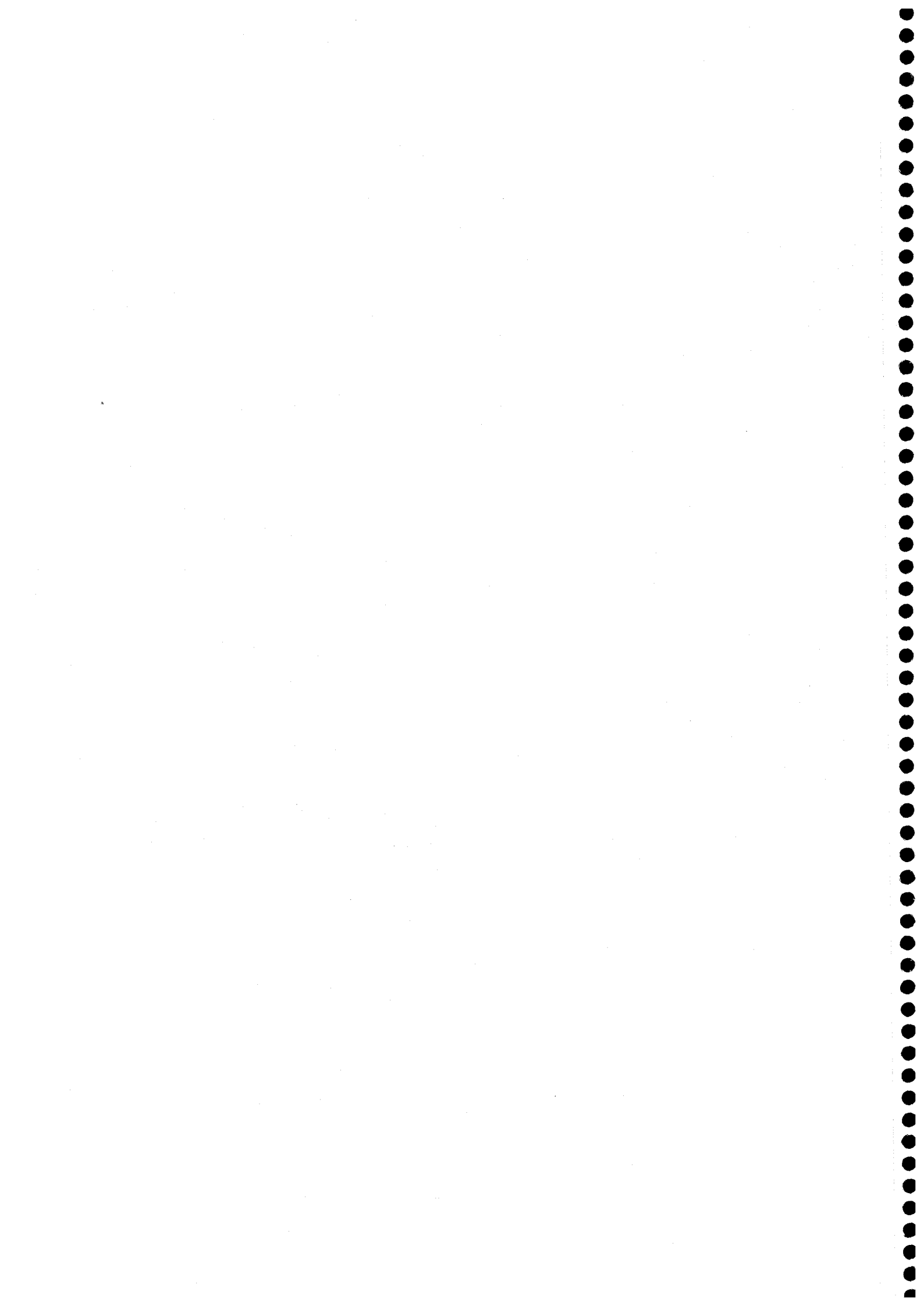
-Se ha podido demostrar que en el caso de señales complejas sí es posible utilizar tal modelación, adaptándose los métodos AR desarrollados en el capítulo II a este tipo de señales.

-Se han deducido las condiciones de estacionaridad y de ergodicidad en cuarto orden para señales armónicas complejas. Así mismo se ha estudiado la forma de actuar ante señales en las que las condiciones anteriores no se cumplen o la convergencia estadística es muy lenta. Todo esto podrá utilizarse en la estimación de las series de cumulantes que se requieren en el desarrollo de los métodos.

-Por último se ha construido un método alternativo muy interesante basado en el método de ESPRIT, que se utiliza en el problema de DOA. Este método es capaz de presentar tanto la amplitud como las frecuencias de los acoplos, a la vez que proporciona un método para la determinación del número de acoplos basado en valores singulares.

CAPÍTULO V

ACOPLOS CÚBICOS DE FASE: SIMULACIONES Y RESULTADOS



V.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se pretende estudiar los distintos métodos que se han desarrollado para el estudio de acoplos cúbicos de fase. El comportamiento de los métodos dependerá fundamentalmente del número de datos de la señal, del número de acoplos y frecuencias sin acoplar cúbicamente, del nivel de ruido que contamine la señal y de los índices que quedan variables en los distintos métodos; como son el orden de los modelos AR, en los métodos AR, y el orden de las matrices, en el método de ESPRIT.

Las señales serán del tipo definido en (4.26), con distinto número de acoplos y de frecuencias sin acoplar. Estas señales se contaminarán con ruido aditivo gaussiano coloreado. El coloreado del ruido se conseguirá haciendo pasar ruido aditivo blanco por un filtro ARMA, como el utilizado en el apartado III.1., cuyo contenido espectral está representado en la figura 3.1. El nivel del ruido que contamina la señal está caracterizado por la SNR, tal y como se define en (3.2).

El esquema del capítulo será el siguiente:

-En el apartado 2 se estudiarán los resultados de los métodos AR aplicados a señales con distintos acoplos. Se estudiarán, tanto las estrategias de estimación de los coeficientes como la obtención de las frecuencias acopladas a partir de esos coeficientes. En los métodos se estudiarán la varianza, la capacidad de resolución y el comportamiento que cada uno de ellos presenta ante señales con acoplos y con frecuencias relacionadas armónicamente pero no acopladas en fase. A partir de esto se intentarán enunciar las estrategias óptimas a seguir en la estimación de cada una de las señales.

-En el apartado 3 se tratarán las mismas cuestiones pero para el método de ESPRIT. Previamente se estudian las propiedades teóricas que poseen las matrices que se utilizan en los métodos y cómo imponer esas propiedades a las matrices que se construyan. Se estudiarán las distintas opciones en la imposición de condiciones, tomándose la más adecuada. Se aplicarán los métodos a las mismas señales que en los métodos AR, obteniendo el comportamiento de los métodos ante las distintas señales y los distintos ambientes.

V.2. MÉTODOS AR

En este capítulo se estudiará como responden los diversos métodos de estimación AR, desarrollados en el capítulo II y modificado en el capítulo IV para señales complejas, ante distintas señales, distintos ordenes del modelo y distintos niveles de ruido y de segmentación.

En primer lugar se estudiará su comportamiento para señales del tipo (4.26), en las que únicamente existe un acoplo cúbico de fase y ninguna frecuencia sin acoplar. Las señales de este tipo serán dos, que se diferenciarán entre sí en la distancia entre los picos del espectro, con el fin de testear la capacidad de resolución de los distintos métodos.

En segundo lugar se estudiará el caso tratado en el ejemplo de la sección IV.5.3, es

decir, un acoplo cúbico de fase y otras cuatro frecuencias relacionadas armónicamente, pero no en fase. El principal objetivo de trabajar con esta señal es preguntarse sobre la capacidad que tienen los métodos de diferenciar cuatro frecuencias acopladas en fase y cuatro frecuencias que sólo estén relacionadas armónicamente.

La última señal tratada consistirá en dos acoplos cúbicos de fase, ya que se espera que el comportamiento de los métodos se vea drásticamente afectado con el número de acoplos presentes en la señal, lo que se comprobará con esta señal.

V.2.1. Un acoplo cúbico de fase.

Las dos señales utilizadas en este apartado serán de la forma:

$$x_s(n) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{j(\omega_k^s n + \psi_k^s)} \quad (5.1)$$

donde $\omega_4^s = \omega_1^s + \omega_2^s + \omega_3^s$, $\psi_4^s = \psi_1^s + \psi_2^s + \psi_3^s$, y $s=1,2$. Esto significa que las señales consistirán en un único acoplos de fase y ninguna frecuencia sin acoplar.

Las frecuencias acopladas serán $(\omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1) = 2\pi(0.07, 0.12, 0.45)$ y $(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2) = 2\pi(0.07, 0.1, 0.15)$. A continuación se presentan los resultados obtenidos para la primera de ellas

a) Señal $x_1(n)$.

Según la teoría desarrollada en la sección IV.3., para poder estudiar mediante modelación AR las señales de este apartado, habrá que construir dos sistemas de ecuaciones, de dimensión tres y uno, respectivamente; lo que proporcionará los conjuntos de coeficientes AR de frecuencias y de suma, definidos en la misma sección. El modelo AR de frecuencias era el que indicaba la posición de las frecuencias individuales de los acoplos, mientras que el modelo AR de suma era el que proporcionaba la posición de la suma de las frecuencias.

Las dimensiones anteriormente citadas de los sistemas de ecuaciones, que se convertirán en los ordenes de los modelos AR de frecuencias y de suma, son cotas mínimas; es decir, es el orden mínimo de los modelos AR que pueden modelar las señales (5.1). Sin embargo, este orden no tiene por qué ser el óptimo para la modelación. De hecho, salvo en el caso ideal de estimaciones perfectas, debido a la presencia de ruido y a la longitud finita de los datos, el orden óptimo de los modelos AR será mayor. Esto puede verse en las siguientes figuras 5.1-5. En ellas se presenta el espectro de potencia para los modelos AR uno y dos estimados para la señal $x_1(n)$ con los cinco métodos. El orden de estos modelos será el mínimo que permite la teoría, es decir, orden tres para el primer modelo y orden uno para el segundo. La señal se ha construido sin ruido y con una longitud de 1024. Se ha tomado una segmentación de $N_s=128$ datos por segmento y se representan los resultados de 20 realizaciones independientes.

Figura 5.1. RCM

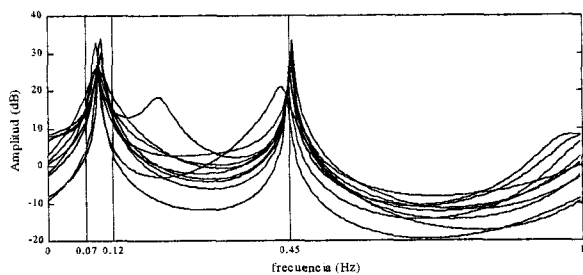


Figura 5.2. Levinson

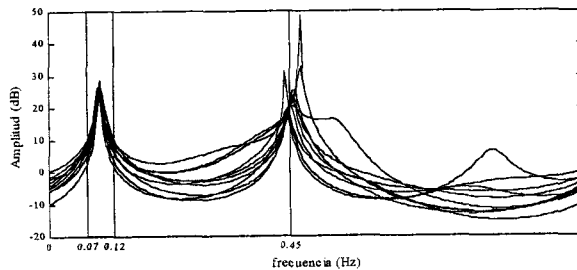


Figura 5.3. LS

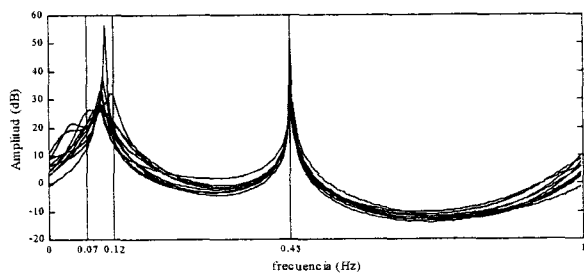


Figura 5.4. CFOM simple

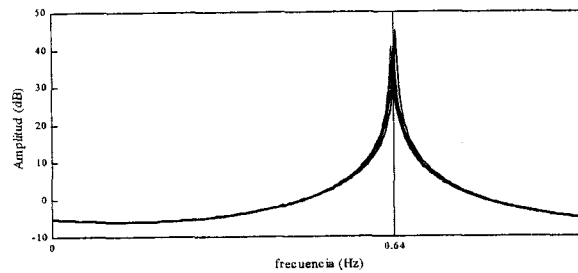
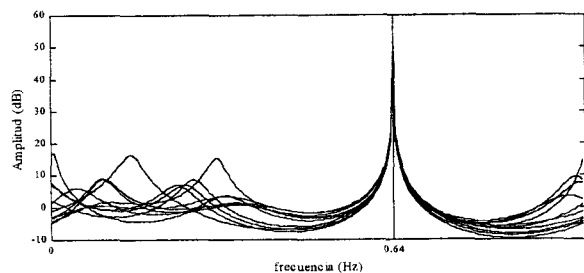
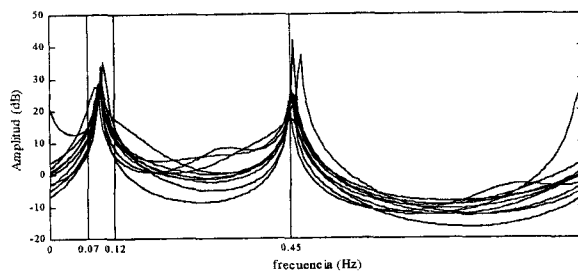
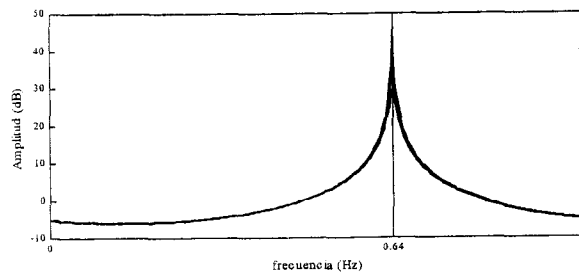
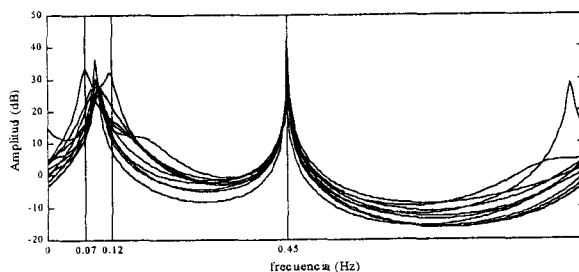


Figura 5.5. CFOM complejo



Puede verse como los métodos no son capaces de resolver las frecuencias para el modelo AR de frecuencias, que es el que proporciona las frecuencias de los acoplos, aunque sí localizan adecuadamente la suma de estas en el otro modelo AR. Sin embargo si se aumenta únicamente en uno los ordenes, es decir, orden cuatro para el modelo AR de frecuencias y orden dos para el modelo AR de suma, los resultados son los que se muestran en las figuras 3.6-10. siguientes:

Figura 5.6.RCM

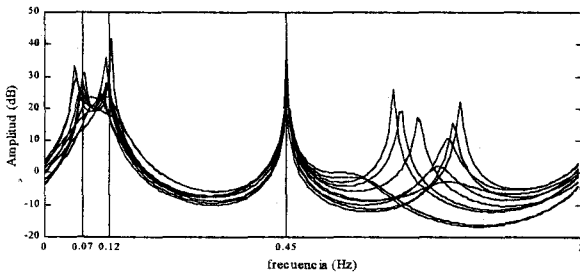


Figura 5.7. Levinson

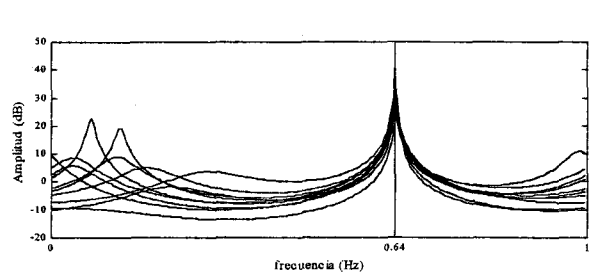
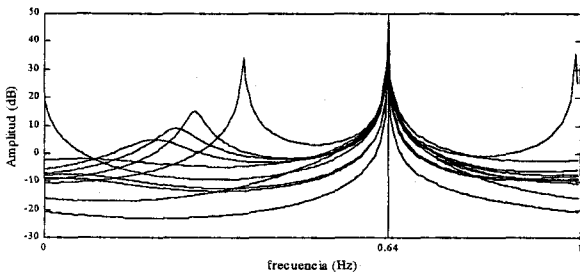
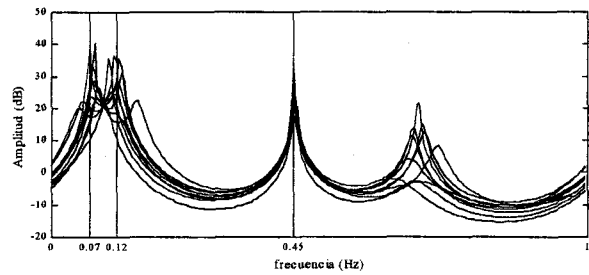


Figura 5.8. LS

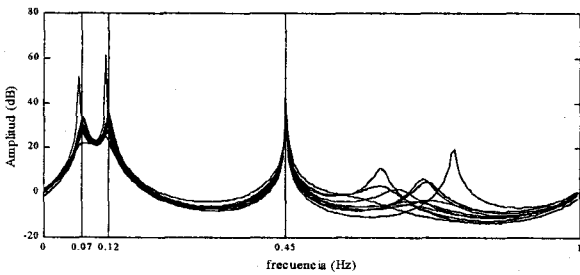


Figura 5.9. CFOM simple

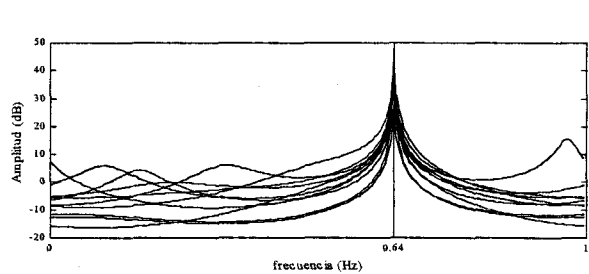
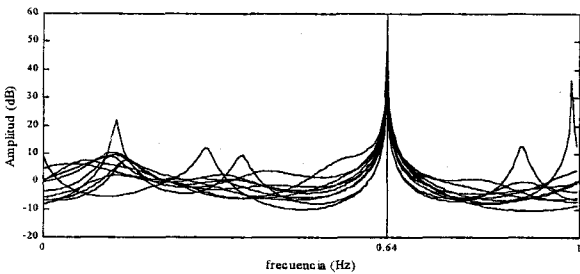
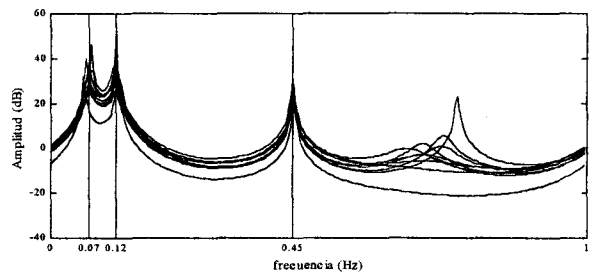
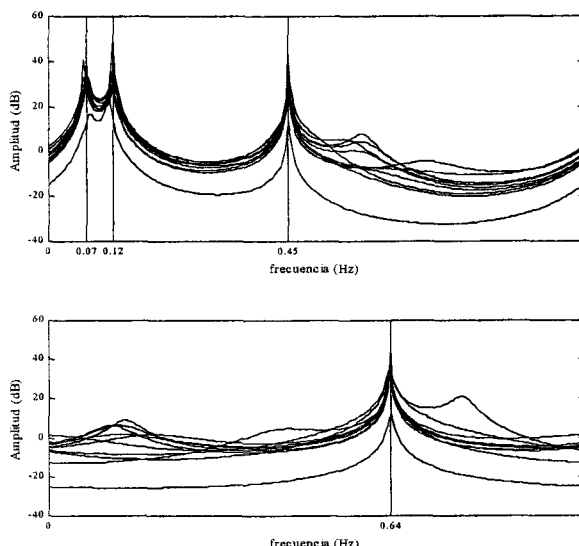


Figura 5.10. CFOM complejo



Puede verse como al aumentar en uno el orden del modelo AR de frecuencias, todos los métodos son capaces de localizar las tres frecuencias individuales del acoplo con bastante claridad. El procedimiento de aumentar el orden de los modelos AR para mejorar la estimación se ha utilizado tanto en los métodos de segundo como en los de tercer orden, dentro de los métodos de determinación de algún tipo de componente armónica. No es el único camino para producir esta mejora; otra opción aumentar el número de datos de la señal, siempre que sea posible (lo que no sucede siempre). Sin embargo, para alcanzar la misma mejora en la determinación de las frecuencias que aumentando el orden de los modelos AR, es necesario aumentar enormemente el número de datos, con el consiguiente esfuerzo de cálculo. En las siguientes figuras 5.11-16 se representan el resultado de 20 realizaciones independientes para la señal $x_2(n)$ con 10240 datos, segmentada con $N_s=128$, sin ruido y para los ordenes tres y uno de los modelos AR uno y AR dos, respectivamente:

Figura 5.11. RCM

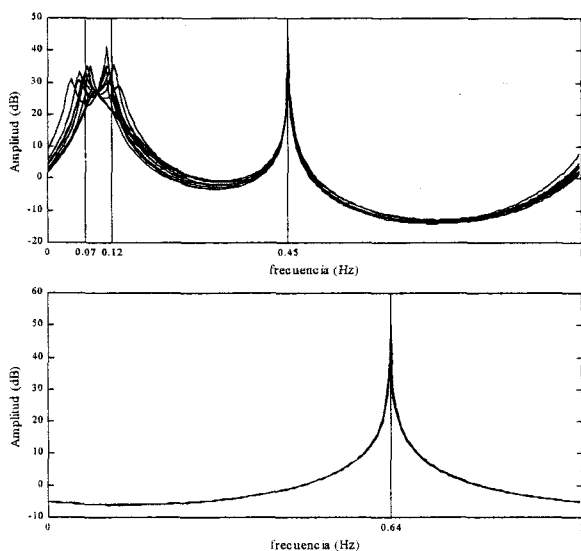


Figura 5.12. Levinson

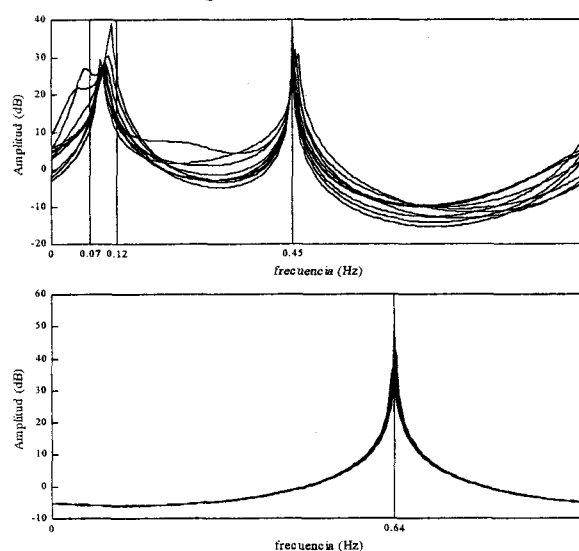


Figura 5.13. LS

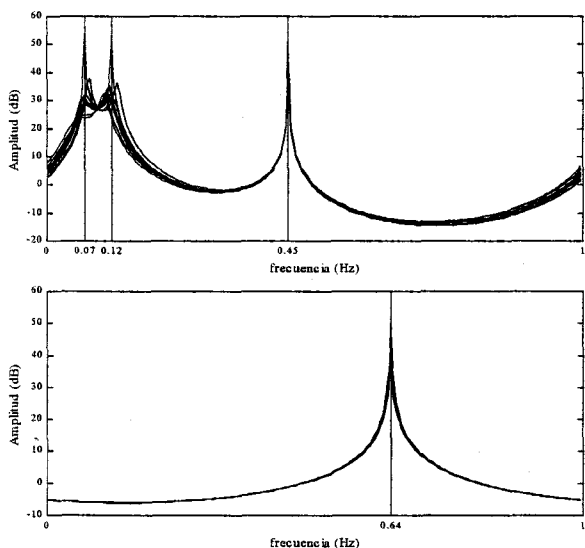


Figura 5.14. CFOM simple

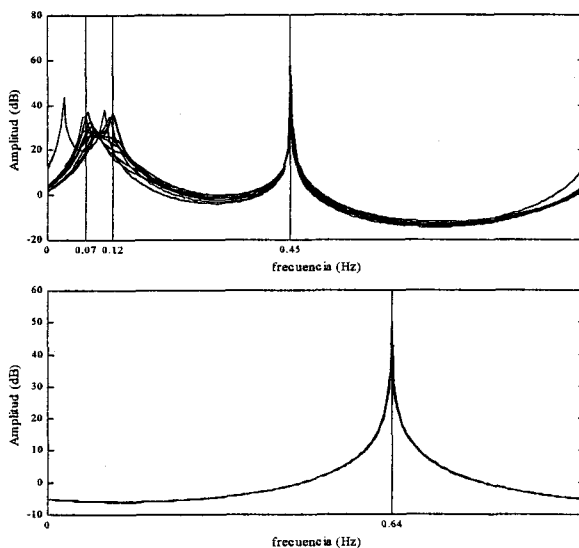
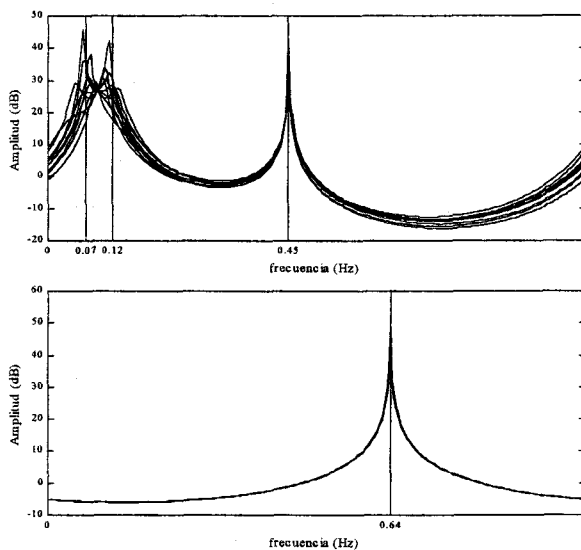


Figura 5.15. CFOM complejo



En las anteriores imágenes puede comprobarse como, ni aumentando 10 veces el número de datos de la señal, se consigue la misma mejora en la estimación que al aumentar en uno el orden del modelo. Por supuesto, no siempre sucederá esto, pero sí da una idea de la utilidad de aumentar los órdenes de los modelos AR, de cara a mejorar la estimación.

Sin embargo, al aumentar el orden de los modelos AR se crean picos espúreos, es decir, picos que no aparecen en el espectro teórico de la señal; tal y como puede verse en las figuras 5.6-10. En estas figura se observa como en muchas realizaciones, aunque las frecuencias acopladas poseen picos, también aparecen otros picos que no corresponden a ninguna frecuencia individual de los acoplos presentes.

Las funciones de transferencias de los modelos AR de frecuencias y de suma de ordenes tres y uno, respectivamente, deben presentar sus polos en las frecuencias individuales del acoplo cúbico, el primer modelo, y en la suma de las anteriores, el segundo modelo. Al

aumentar el orden de los modelos, también aumentará el número de polos que de sus funciones de transferencias, ya que al ser estas funciones racionales, se está llevando a cabo un aumento del orden del polinomio del denominador. En la resolución de los distintos métodos no aparece condición alguna sobre la ubicación de estos nuevos polos, por lo que en principio pueden situarse en cualquier parte del plano complejo. Cuando uno de estos polos se encuentra cerca de la circunferencia unidad del plano complejo, aparece un pico en el espectro del modelo.

Si la localización de los polos que no corresponden a frecuencia alguna del acoplo no sigue ninguna sistemática, es decir, se distribuyen con cierta aleatoriedad por el plano complejo, es posible calcular los coeficientes para varias realizaciones independientes y luego obtener unos coeficientes promediados, que presentarán contribución mayor en aquellas frecuencias que aparecen en todas las realizaciones, como se espera que suceda con las frecuencias de los acoplos. Sin embargo, las contribuciones que aparezcan para unas realizaciones y otras no, como sucede con los polos no pertenecientes a acoplos, bajo la hipótesis de aleatoriedad, estarán muy reducidas debido al promedio.

En cambio, si los polos que no pertenecen a los acoplos se distribuyen sistemáticamente en determinadas zonas cerca de la circunferencia unidad, el promedio en registros independientes de los coeficientes obtenidos, será una estrategia inútil, y no será posible, en estos espectros distinguir los picos reales de los que no lo son.

Como ejemplo de lo anterior, en las siguientes figuras 5.16-17 se presenta el espectro de 20 realizaciones para el modelo AR de frecuencias de orden seis. Los resultados se han obtenido aplicando los métodos RCM y LS, para señales de 1024 datos, segmentadas en cuatro segmentos independientes de 512 datos cada uno y contaminadas con un ruido de $SNR=30$ dB, se recogen en la figura 5.16. Puede verse como en el método LS la resolución de los picos de las frecuencias individuales es mucho mejor que en el método RCM, así como la varianza es significativamente menor, aunque aparece un pico espúreo. En la siguiente figura se representa el espectro que resulta de promediar geoméricamente los 20 espectros anteriores para cada método, en los que puede verse como el espectro del método RCM, aunque con picos menos estrechos, es más parecido al espectro teórico, en el que únicamente deben aparecer picos en cada una de las frecuencias individuales. El promedio ha producido una disminución en los picos espúreos que aparecen en el espectro del método RCM, mientras el pico falso del método LS no se ve afectado por el promedio, al aparecer en todas las realizaciones. La explicación de lo sucedido se ve mucho más clara si se representan los polos de las funciones de transferencia de los modelos AR de frecuencias en el plano Z. Esto es lo que se hace en las figuras 5.18. y 5.19. En ellas se marca como el lugar donde deben encontrarse los polos teóricos, correspondientes a las tres frecuencias individuales, con un círculo mayor, y cada uno de los círculos menores corresponden a polos de las funciones de transferencia de los modelos AR calculados con cada uno de los métodos y que han sido representadas sus funciones de transferencia en la figura 5.16. Puede observarse como la varianza del método LS es claramente menor (incluso no se aprecian a simple vista los distintos polos que coinciden con las frecuencias individuales), si embargo, mientras en los polos espúreos del método RCM se distribuyen por el plano Z sin aparente sistemática, el método LS presenta una acumulación de polos espúreos cerca del círculo unidad, lo que se transformará en un pico en el espectro, tal y como se ve en las figuras 5.17-18.

Este hecho apunta a que debe utilizarse con cuidado el aumento de los índices de los

modelos, y señala el promedio geométrico de espectros como una posible herramienta que puede proporcionar interesantes resultados. También se puede concluir que la distribución sistemáticas de los polos “sobrantes” en el plano Z puede acarrear problemas en la identificación, siempre que se sitúen cerca de la circunferencia unidad.

Figura 5.16

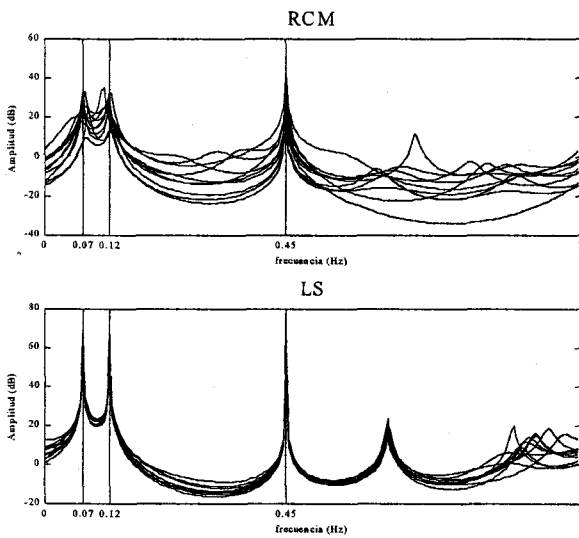


Figura 5.17

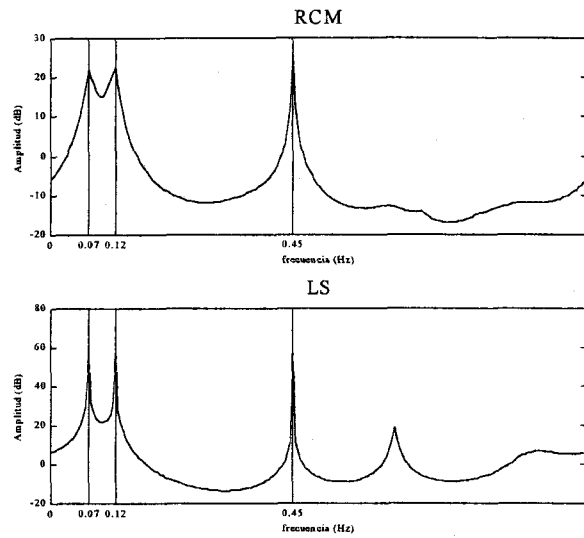


Figura 5.18. RCM

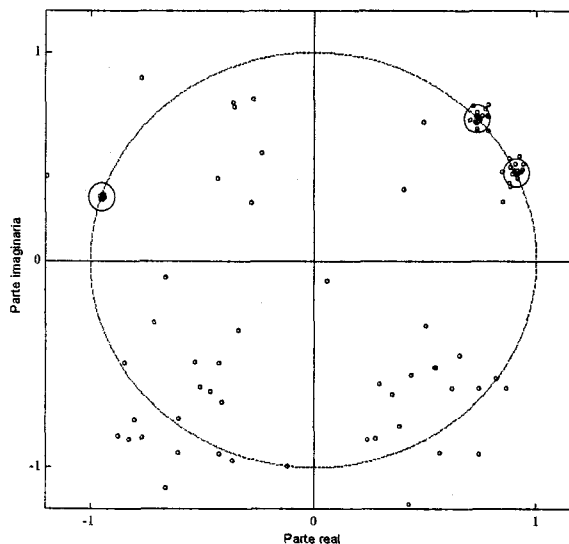
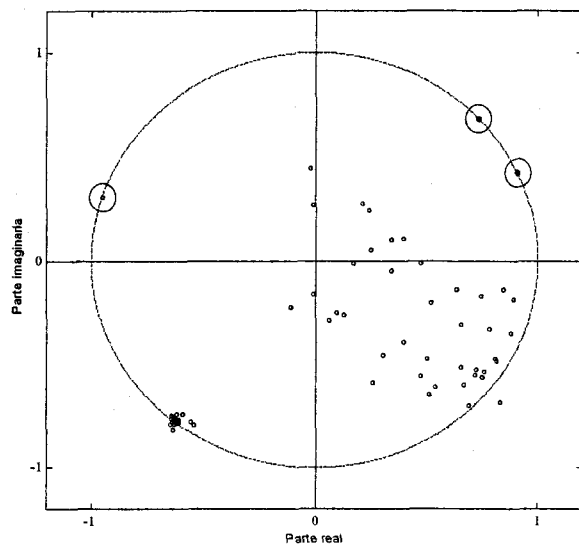


Figura 5.19. LS



Hasta este momento, las comparaciones y consideraciones que se han hecho sobre los resultados de los métodos han partido de la observación cualitativa de los espectros que presentan los modelos AR calculados. En este punto, será necesario definir un criterio cualitativo que permita la comparación de los distintos métodos. Como lo que se persigue es la determinación de las frecuencias del acoplos, lo más acertado será definir un error cuadrático medio de las frecuencias estimadas, tal y como se hizo en el capítulo III.1. para los parámetros AR. Según esto, el error cuadrático medio (MSE) se definirá como:

$$\text{MSE} = \sum_{i=1}^3 (\hat{f}_i - f_i)^2, \quad (5.2)$$

donde (f_1, f_2, f_3) son las tres frecuencias del acoplos en hertzios, y $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$ son las tres frecuencias estimadas del acoplo.

Al aplicar algunos de los métodos AR a una señal, el resultado es dos conjuntos de coeficientes AR. Sin embargo, lo que se desea conseguir y lo que aparece en la definición de MSE son las frecuencias, por lo que habrá que indicar como se obtienen a partir de los coeficientes. En la construcción de los métodos, dada en la sección IV.6., se vio como a partir de los dos conjuntos de coeficientes AR se construye el triespectro (4.52), y los acoplos se obtienen a partir de los picos que presente este triespectro. Como es fácil de imaginar, la localización de picos en el triespectro no es inmediato de realizar a simple vista, ya que es una función de tres variables, y por ello difícil de representar. Habrá que dar un criterio matemático de pico en esta función, detectar los posibles picos que se encuentren, y obtener sus frecuencias, que corresponderán con sus coordenadas. Este será el procedimiento más general que habrá que seguir para la obtención de las frecuencias de los posibles acoplos. Sin embargo, si se parte que se conoce que existe un sólo acoplos cúbico, a partir de algún métodos de determinación del número de acoplos o a partir de alguna información adicional de la señal, es posible localizarlo sin más que determinar el máximo del triespectro. Esto tiene la ventaja de que no es necesario dar un criterio matemático de cuando se tiene un pico, lo que simplifica sustancialmente el problema. El principal inconveniente es que se necesita conocer la existencia a priori de uno y sólo un acoplo cúbico de fase. En el método de ESPRIT se dará un ejemplo de un método de estimación del número de acoplos.

El principal problema que se encuentra en esta determinación de las frecuencias a partir de los coeficientes es la necesidad de utilizar la FFT. Para la construcción del triespectro, se calcula la respuesta en frecuencias de los modelos AR, como la inversa de la FFT de los coeficientes. Con las dos respuestas en frecuencias se construye el triespectro, tal y como se define en (4.52). Esto supone, que la utilización de N puntos en la FFT, implica la construcción de un triespectro de dimensión N^3 , en el cual se persigue buscar el máximo. La frecuencia más pequeña que posee la señal con la que se está trabajando es $f_1 = 0.07$ Hz, por lo que necesita una frecuencia de paso, como mínimo de 0.01, para poder estimar correctamente; esto supone un número de datos en la FFT de 100. De esta forma, el triespectro donde hay que buscar el máximo es de dimensión 10^6 , lo que ya supone un esfuerzo de cálculo considerable. Aún así, la resolución que se obtiene con $N=100$ no es excesiva y puede ser necesario un aumento de la dimensión de la FFT para realizar la comparación de los métodos adecuadamente. Si las frecuencias no son múltiplos de la frecuencia de paso, como suele pasar en la práctica, la determinación de las frecuencias se ve seriamente empeorada, debido al fenómeno que en procesado de señal se conoce como *lackage*. Este es intrínseco del tratamiento que realiza la FFT, y se reducen sus efectos aumentando el número de datos N de la FFT. Sin embargo, aumentar N en el problema que se está tratando, implica disparar la dimensión del triespectro, de forma que el cálculo de las frecuencias puede ser computacionalmente prohibitivo.

Por otro lado, el espectro deseado posee un pico en el triespectro a las frecuencias del acoplo, pero no todos los triespectros que posean un máximo en ese punto tienen por qué

parecerse al espectro teórico de la señal. Esto se puede apreciar en los siguientes resultados. En la figura 5.20. se representa el espectro de los modelos AR de frecuencias y de suma de ordenes 4 y 2, obtenidos con el método de Levinson, para una señal de 1024 datos, sin ruido y segmentada con un $N_S=64$. Lo mismo se representa en la figura 5.21., pero para el método CFOM complejo.

Figura 5.20. RCM

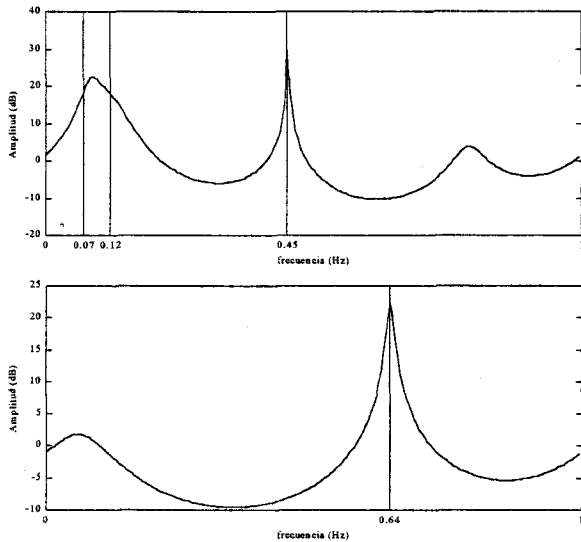
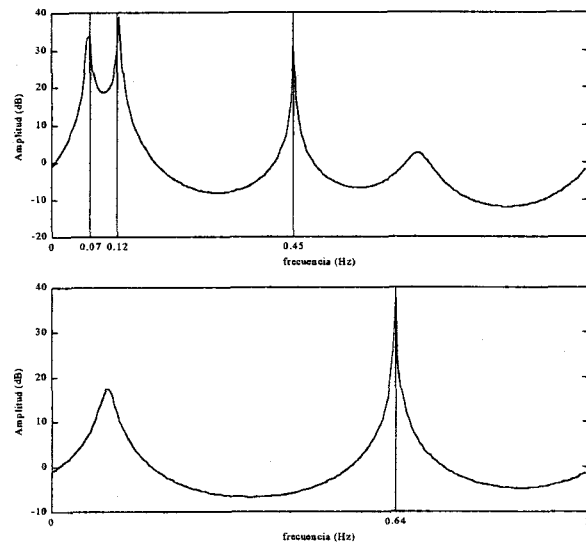


Figura 5.21. CFOM complejo



Con los coeficientes que dan lugar a las dos anteriores figuras se calculan las frecuencias a las cuales se encuentran los máximos de los respectivos triespectros, construido tomando 200 datos en la FFT, y con éstas se calcula el MSE de esta estimación. Tras hacer todo esto el MSE de ambas estimaciones es idéntico e igual a cero, aunque ambas estimaciones puede verse en las imágenes que son totalmente distintas. El criterio de comparar los métodos utilizando el MSE definido en (5.2), conllevaría a señalar ambas estimaciones como óptimas, lo que no parece muy acertado a la luz de las anteriores figuras. De hecho, la estimación que proporciona el método de Levinson ni siquiera resuelve las dos primeras frecuencias. Tanto por este hecho, como por la dificultad de cálculo que acarrea, es conveniente definir otro MSE que permita una mejor comparación de los métodos entre sí.

Para el nuevo MSE que se va a tomar, en las figuras 5.22-23 se muestran los polos de la función de transferencia de los modelos AR de frecuencias y de suma, cuyas funciones de transferencia se han representado anteriormente en las figuras 5.20-21. Los polos se representan con círculos pequeños y la posición de los polos teóricos se indica con círculos mayores, en cuyo centro se encuentran localizados.

Figura 5.22. Levinson

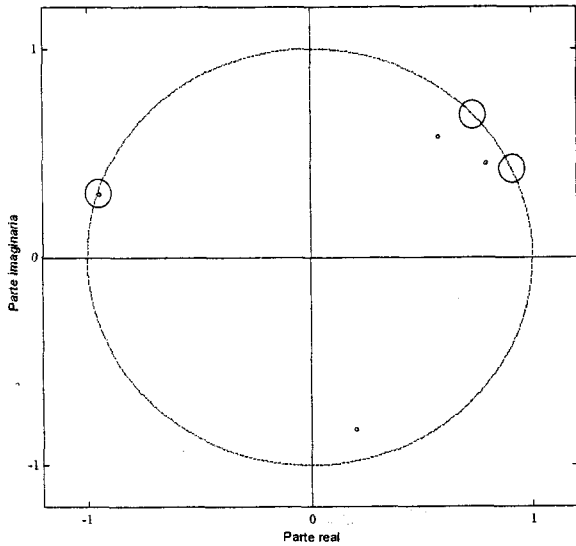
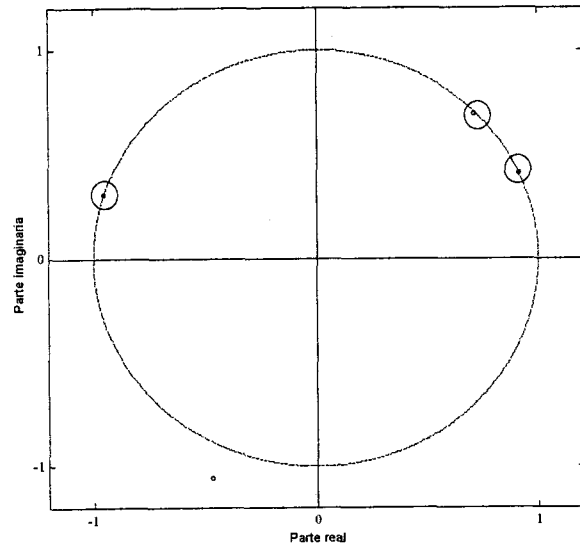


Figura 5.23. CFOM complejo



En ellas puede apreciarse claramente la gran diferencia que hay entre las dos estimaciones. En la definición del nuevo MSE se intentará plasmar esta diferencia que se desprende de las anteriores figuras. La idea principal es calcular la distancia de los polos de las funciones de transferencia de los modelos AR de frecuencias a la posición teórica que deben ocupar, lo que es muy sencillo de realizar a partir de los coeficientes AR. El primer problema es que, si el orden es mayor que tres, existen más polos que frecuencias a estimar. El procedimiento previo será quedarse con los tres polos más cercanos la circunferencia unidad y calcular en estos su distancia las posiciones teóricas.

$$MSE = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |\hat{z}_i - z_i|^2}, \tag{5.3}$$

con $z_i = e^{j2\pi f_i}$ y donde $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3)$ son los tres polos de conjunto de coeficientes AR que más se aproximan al círculo unidad, ordenados según argumento creciente. Con esta definición los coeficientes AR de frecuencias que dan lugar a la figura 5.20. tienen un $MSE = 1.36$, mientras coeficientes de la gráfica 5.21. poseen un $MSE = 0.018$, casi tres órdenes de magnitud menor.

El tomar este MSE para comparar los distintos métodos implica fundamentalmente dos cosas. En primer lugar, no se utilizan los modelos AR de suma, que presentaban la posición de la suma de las frecuencias. Esto es posible hacerse ya que se está suponiendo que existe un único acoplo en la señal. Sin embargo, aunque existieran más de un acoplo, el MSE seguiría siendo útil para la determinación de las frecuencias individuales de los distintos acoplos, y los modelos AR de suma se utilizaría para determinar qué ternas de las frecuencias individuales forman cada acoplo. En segundo lugar, si uno de los polos espúreos se encuentra más cerca de la circunferencia unidad que uno de los polos de las frecuencias, aunque el último esté bien situado y la estimación sea correcta, el MSE se disparará. Se puede decir que por este motivo, el MSE puede sufrir un aumento que no corresponda con un error desmesurado en la

estimación de los polos verdaderos, sino con la elección de uno de los polos espúreos como correcto.

Si los polos se distribuyen aleatoriamente por el plano complejo, se puede imaginar el siguiente caso: se toman 10 realizaciones independientes de la señal, se calculan sus estimaciones con un determinado método y el resultado es que los polos verdaderos se sitúan muy cerca de los verdaderos en el plano complejo. Según esto se espera que los 10 MSE sean muy pequeños. Si en alguna de las 10 estimaciones realizadas, algunos de los polos espúreos se sitúa más cerca de la circunferencia unidad que uno de los verdaderos, el resultado será una MSE muy elevado. Esto producirá que, al calcular la media de los MSE el resultado sea una media incorrecta con una gran varianza, aunque la estimación sea correcta. Se puede ver como también con este MSE existen problemas al realizar una comparación aceptable de las realizaciones. Por supuesto, la probabilidad de que esto suceda disminuirá mientras mejor se estimen los polos correctos, ya que estos está sobre el círculo unidad, pero como las estimaciones nunca son perfectas, la probabilidad de un MSE muy grande siempre existe.

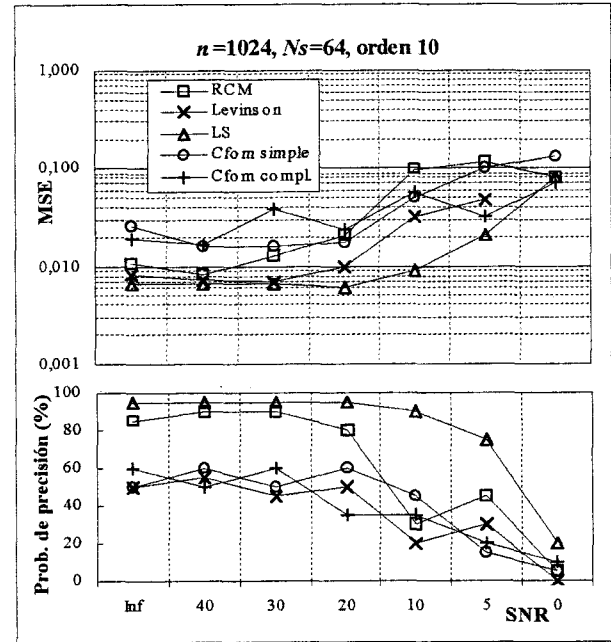
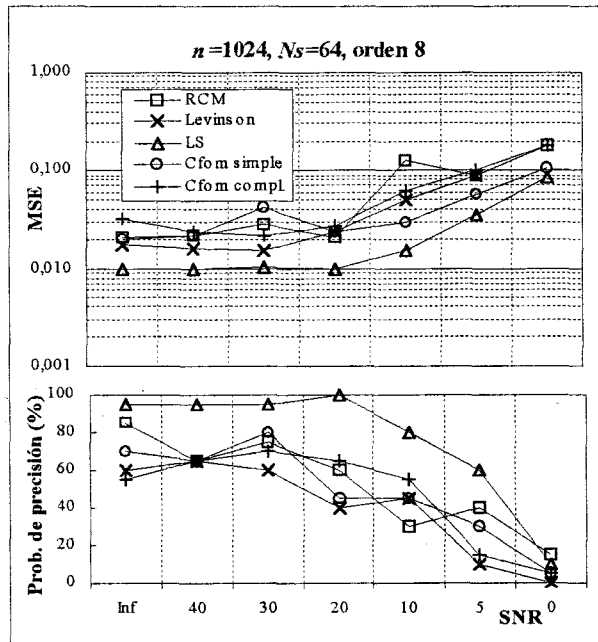
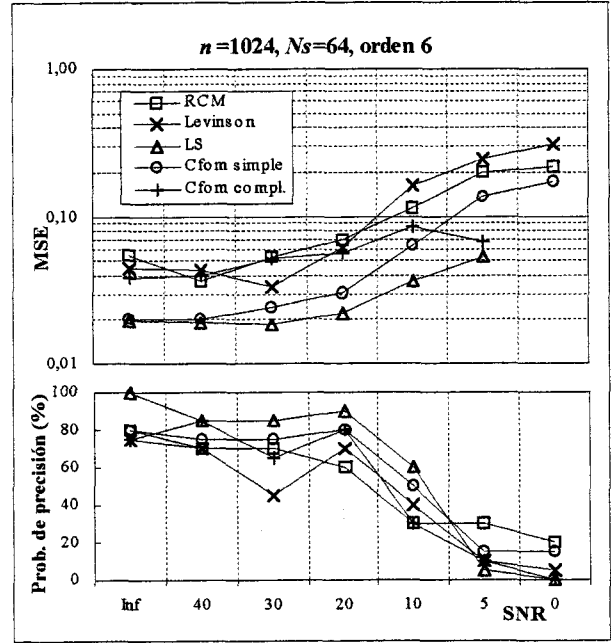
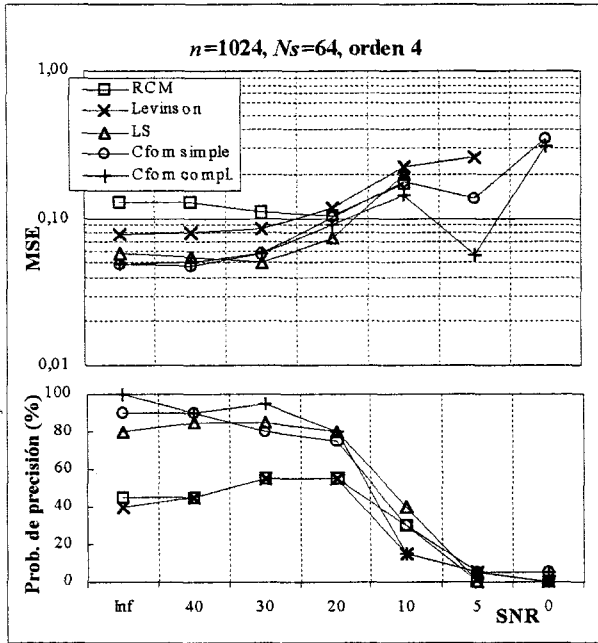
Los problemas de este MSE se pueden eliminar si se tiene en cuenta la naturaleza estadística del MSE. Las variables aleatorias y las estimaciones de parámetros, a parte de mediante su media y su varianza, se pueden caracterizar a través de un intervalo de confianza y de la probabilidad de encontrar la estimación dentro de ese intervalo de confianza. Esto es precisamente lo que se hará para comparar los distintos métodos. Se partirá de distintas realizaciones de las señales a estimar; con ellas se realizarán las estimaciones, obteniéndose un MSE para cada una de las realizaciones. Se fija un intervalo de confianza en el MSE y se calcula en número de realizaciones cuyo MSE cae dentro de ese MSE, a esto se llamará *probabilidad de precisión*. Con este número se puede dar una idea de la probabilidad que se tiene de hacer una estimación con una cierta precisión. Posteriormente se calcula la media de los MSE estimados que caen dentro del intervalo, para poder comparar estimaciones con igual o parecida probabilidad de precisión.

El intervalo de confianza que se va a tomar, salvo que se especifique lo contrario, será de 0.35 en el MSE, que representa una distancia entre frecuencias teóricas y estimadas de 0.1 Hz.

Al comparar los distintos métodos, no podremos fijarnos únicamente en el MSE, ya que la probabilidad de precisión será una cantidad que dirá mucho de la utilidad de los métodos en situaciones concretas. De esta forma, un MSE muy bajo con poca probabilidad de precisión, implicará que para una realización concreta será poco probable determinar correctamente las frecuencias a través de los polos de los coeficientes AR, ya que es muy probable que tome un polo espúreo como correcto. Sin embargo, cuando no se equivoca en los polos, la estimación de las frecuencias será muy buena, tal y como indica el bajo MSE. Trabajar de esta manera obligará a prestar atención tanto al MSE medio, como a la probabilidad de precisión.

En las siguientes figuras se presentan estos dos indicadores, la probabilidad de precisión y el MSE, para una señal de 1024 datos, segmentada con un $N_s=64$. La probabilidad de precisión se calcula a partir de 20 realizaciones independientes. Sobre ellas se utilizan los métodos y se obtienen 20 conjunto AR uno estimados, con los que resultan 20 MSE. Se calculan, de esos 20 MSE, cuantos caen dentro del intervalo de confianza que se ha fijado para cada método y a partir de esto se estima la probabilidad de precisión que se representa en las gráficas de abajo de las siguientes figuras.

Figuras 5.24-27. MSE y probabilidad de precisión para $n=1024$, $N_s=64$ y diversos órdenes



En las figuras anteriores no se ha representado el orden 3, que teóricamente es el mínimo del modelo AR uno, ya que proporciona resultados muy malos. El primer orden al que aparecen resultados aceptables es el orden cuatro, que se presenta en la figura 5.24. Se puede ver como los métodos recursivos, tanto Levinson como RCM, proporcionan malas probabilidades de identificación, por debajo del 60%, y MSE peores que el resto. Los otros

tres métodos presentan resultados muy similares, tanto para la probabilidad de precisión, que queda por encima de 80%, como para el MSE.

Si se aumenta el orden del modelo AR de frecuencias a orden seis, lo que se representa en la figura 5.25., todos los métodos mejoran sus resultados de MSE, sobre todos los métodos recursivos. Aún así los métodos no recursivos LS y CFOM simple siguen presentando los mejores MSE. En cuanto a la probabilidad de precisión, lo más destacable es la mejora, hasta lograrse porcentajes cercanos al 80%, para los métodos recursivos. Esto significa una importante mejora, respecto de los resultados obtenidos para orden cuatro.

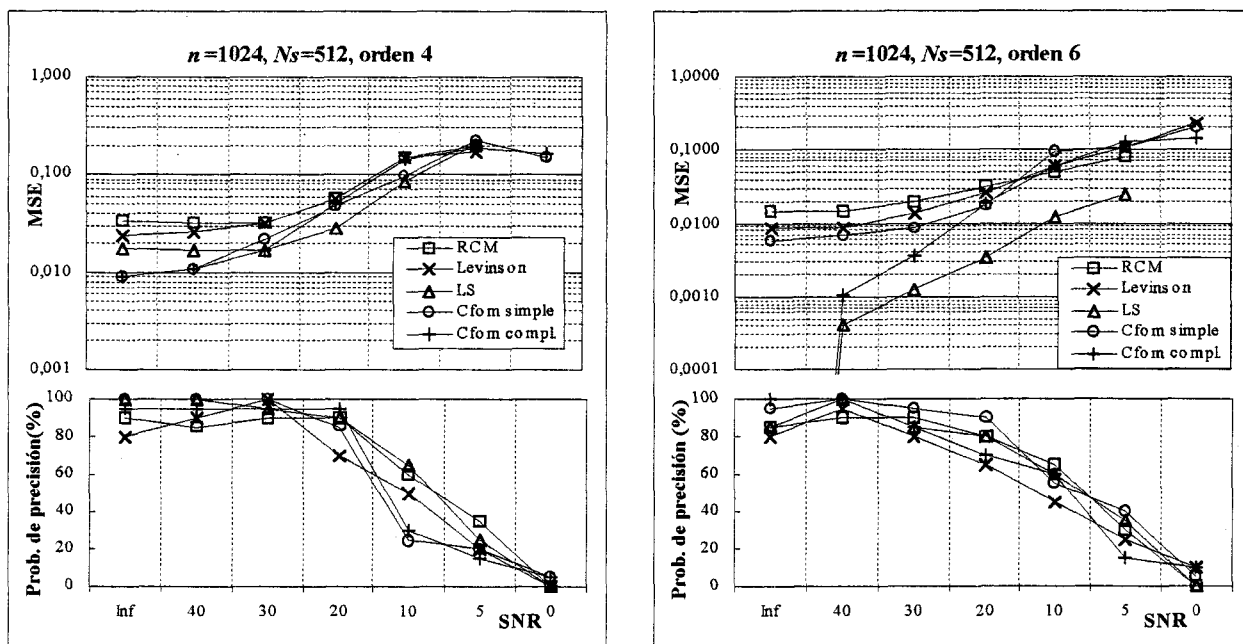
Para orden del modelo AR de ocho, los métodos vuelven a disminuir sus MSE, salvo el CFOM simple que se estanca, siendo el método LS el que menores MSE presenta, ya por debajo de 0.01. Las probabilidades de precisión presentan un leve empeoramiento con valores entre 60 y 80 %, salvo el método LS que presenta unos muy buenos 95 e incluso 100%.

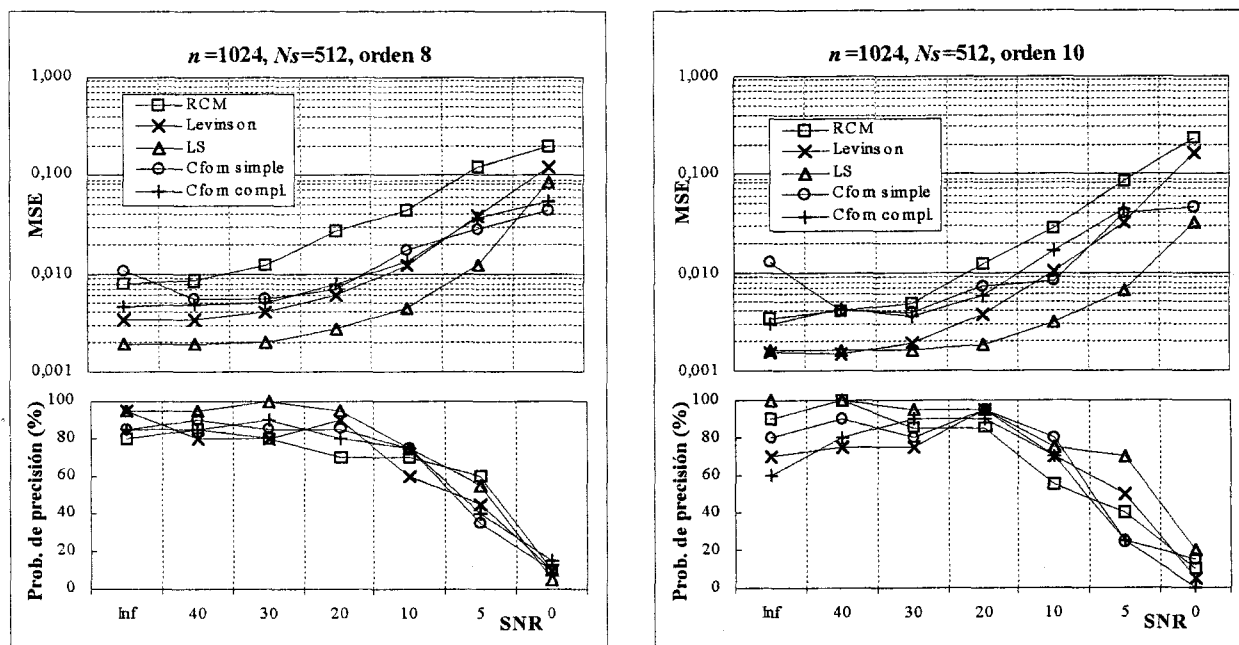
Al subir a 10 el orden, lo más destacado es que los dos métodos CFOM son los que proporcionan mayores MSE y el empeoramiento de las probabilidades de identificación para los métodos CFOM simple, CFOM complejo y Levinson, mientras que los otros dos métodos, el RCM y el LS, presentan probabilidades en torno al 90 %.

Todo lo anterior es para SNR hasta, como mucho, 10 dB; a partir de ese nivel de ruido, todos los métodos empeoran rápidamente, tanto en MSE como en probabilidad de precisión.

Aumentar la segmentación de la señal con la que se calculan los cumulantes en los distintos métodos mejora en general los resultados. Esto se puede apreciar claramente si se representan los resultados para un $N_s=128$. Sin embargo, esta mejora es mucho más clara si se compara directamente con los resultados para $N_s=512$, que son los resultados que se presentan en las figuras 5.28-31.

Figuras 5.28-31. MSE y probabilidad de precisión para $n=1024$, $N_s=512$ y diversos órdenes





De la comparación de estos métodos con los obtenidos para $N_s=64$ puede verse como todos los métodos mejoran, tanto su MSE como su probabilidad de identificación. Es significativo que la probabilidad de identificación supera el 80% para SNR altos y en todos los órdenes, salvo para orden 10, donde las probabilidades bajan algo. También puede verse como el orden al que un método presenta mejores resultados no siempre es el más alto; de esta forma los métodos LS y CFOM complejo presentan sus MSE menores para orden seis, aunque el primero de los dos presenta la mayor probabilidad de precisión a ordenes ocho y diez.

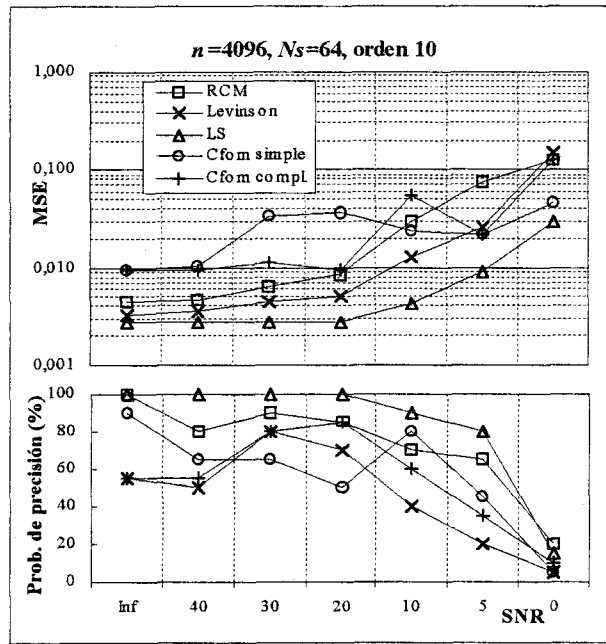
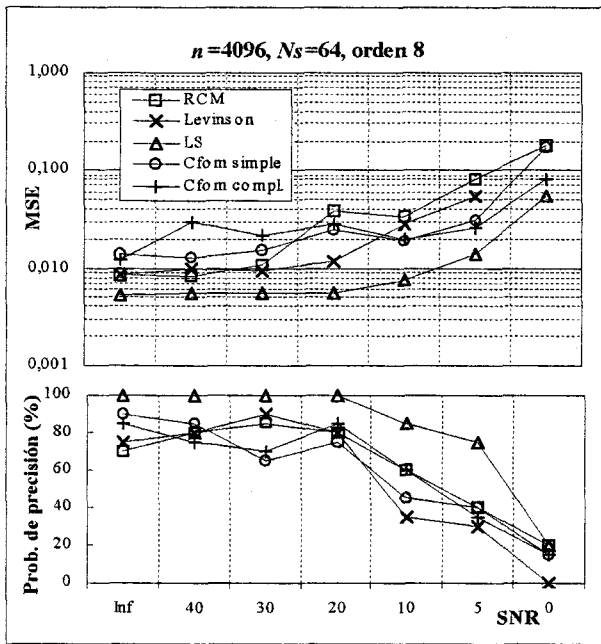
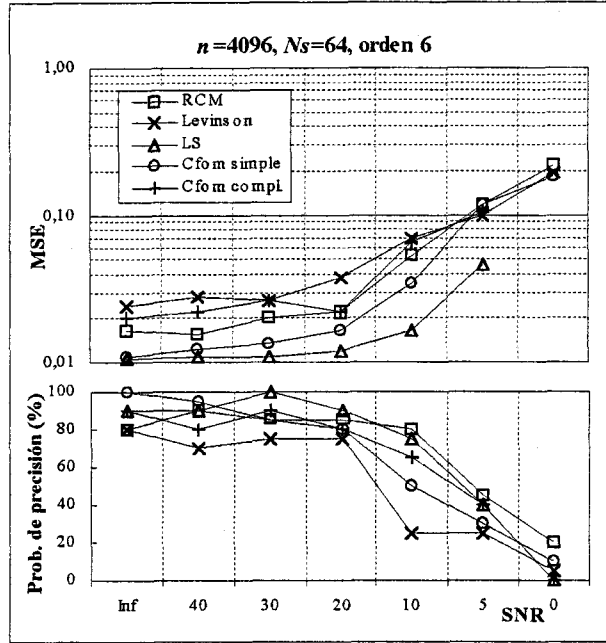
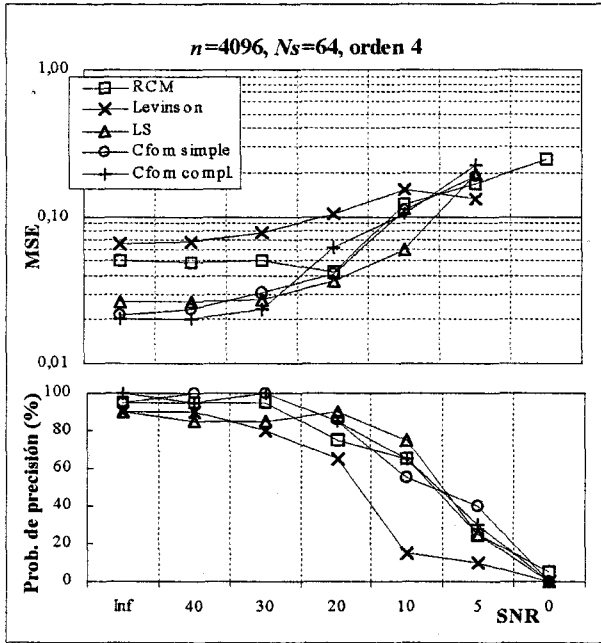
En general, puede decirse que al aumentar el tamaño de los segmentos se consigue mejores estimaciones. Esto es cierto siempre que se tengan señales ergódicas y que ninguno de los argumentos de las funciones $g(\omega, N)$, presentadas en la sección IV.5. y que dominan la convergencia de los estimadores, sean muy próximos a cero; tal y como son las que se están tratando. En caso de que lo anterior no suceda, el promedio en registros independientes es el causante de la convergencia de los estimadores, por lo que será más importante un número elevado de segmentos independientes que una gran longitud de estos. En general, las señales requerirán del promedio en segmentos para que sus cumulantes converjan, por lo que en este capítulo es más interesante centrarse en comparar los métodos cuando se realizan promedios significativos.

Al aumentar el orden, existen dos contribuciones distintas a la probabilidad de precisión se oponen dos factores. Por un lado, al aumentar el orden suele mejorarse la estimación de los polos correctos, por lo que estos estarán más cerca de la circunferencia unidad, produciendo que sea más difícil que un polo espúreo esté más cerca de la circunferencia que uno correcto; pero, por otro lado, aumenta el número de polos, lo que significa que aumenta la probabilidad de que alguno tenga módulo más cercano a uno. Como puede verse, estos dos factores influyen de manera contraria en el valor de la probabilidad de precisión: mientras que el primero tiende a aumentarla, el segundo tenderá a disminuir su valor. La influencia concreta

dependerá tanto del método como de la posición de los acoplos. Esta competencia es, precisamente, la que produce la disminución de la probabilidad de precisión, para varios métodos, a orden 10.

Para ver como afecta el aumento en el número de datos, a continuación se presentan los resultados para $n=4096$ y $N_s=64$, para los mismos órdenes que en el caso de $n=1024$. Esto es lo que se representa en las figuras 3.32-35.

Figuras 5.32-35. MSE y probabilidad de precisión para $n=4096$, $N_s=64$ y diversos órdenes



De la comparación entre las anteriores gráficas y las correspondientes a $n=1024$ puede verse como el aumento en el orden produce una mejora en las estimaciones a todos los ordenes. La mejora es menor que la que se obtiene aumentando el orden o la segmentación, como ya se apuntó con anterioridad en esta misma sección.

El aumento en el número de datos de la señal se espera que sea más importante para señales no ergódicas, ya que este permitirá trabajar con registros mayores, como $N_s=512$, y suficientes segmentos independientes.

b) Señal $x_2(n)$.

En este subapartado se va a seguir estudiando el caso de un sólo acoplo, pero en este caso la señal $x_2(n)$ con la que se va a tratar posee las frecuencias del acoplo mucho más cercanas entre sí que las del caso anterior. Esto se espera que produzca un empeoramiento importante en los resultados de todos los métodos, persiguiendo comparar el poder resolutivo de estos en situaciones de frecuencias próximas.

Para la señal del subapartado partiendo de señales de $n=1024$ datos y segmentadas en segmentos independientes de longitud $N_s=128$, sin ruido, bastaba tomar un modelo AR de frecuencias de orden 4 para poder estimar adecuadamente las frecuencias. Sin embargo, para la señal $x_2(n)$ los resultados que se obtiene, para la misma situación anterior son muy diferentes. En las siguientes cinco gráficas se muestran las funciones de transferencia para los modelos AR de frecuencias estimados en 20 realizaciones independientes.

Figura 5.36. RCM

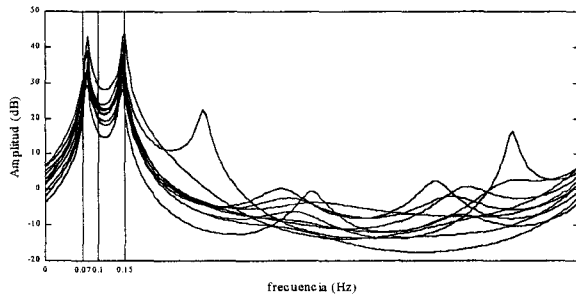


Figura 5.37. Levinson

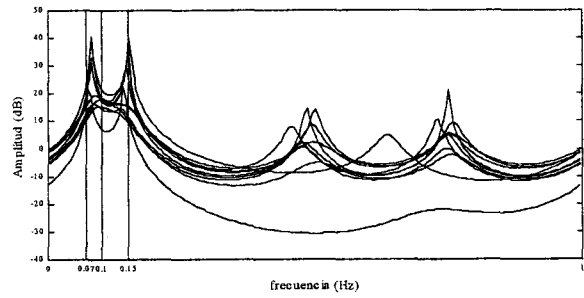


Figura 5.38. LS

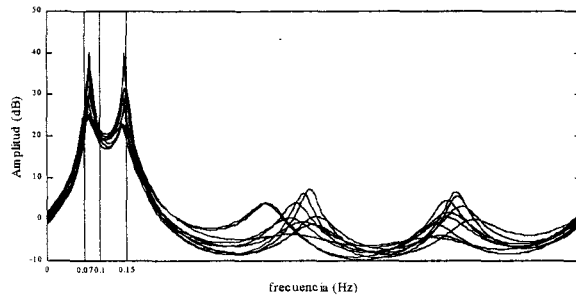


Figura 5.39. CFOM simple

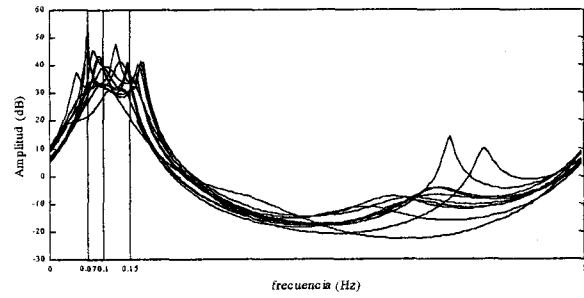
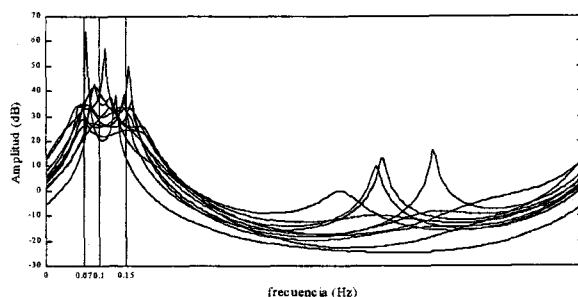


Figura 5.40. CFOM complejo



De estas figuras puede verse como, para orden cuatro en el modelo AR de frecuencias, los métodos no son capaces de resolver los tres picos que deben presentar. Únicamente en alguna realización los métodos CFOM simple y CFOM complejo son capaces de resolver estos picos, aunque en la mayoría de las estimaciones fallan.

En este caso no se han representado los modelos AR dos. Esto es debido a que, como se explicó para la señal anterior, se está interesado únicamente en las frecuencias individuales, ya que se supone que se sabe que únicamente aparece un acoplo. También se explicó como, aún cuando la señal posee más acoplos, este procedimiento sigue siendo válido. En ese caso, a través del modelo AR uno, se determinan las frecuencias individuales que componen los acoplos como primer paso. El segundo paso será determinar que frecuencias individuales concretas forman cada uno de los acoplos, para lo que sí hará falta el modelo AR dos, en el que se presentan las sumas de las frecuencias, lo que permite la determinación de las frecuencias individuales que forman cada acoplo.

Se ha podido ver como, efectivamente, la cercanía de las frecuencias entre ellas produce que el orden del modelo AR para el cual se reproducen los picos, en las circunstancias especificadas anteriormente, no sea cuatro, tal y como sucedía en $x_1(n)$. Para lograr que los métodos resuelvan los tres picos hay que seguir aumentando el orden, el orden concreto al que se consigue realizar una estimación adecuada depende de cada método concreto. En las siguientes cinco figuras se muestran los espectro de los coeficientes AR uno para $n=1024$, $N_s=128$, sin ruido y para orden siete en los modelos AR.

Figura 5.41. RCM

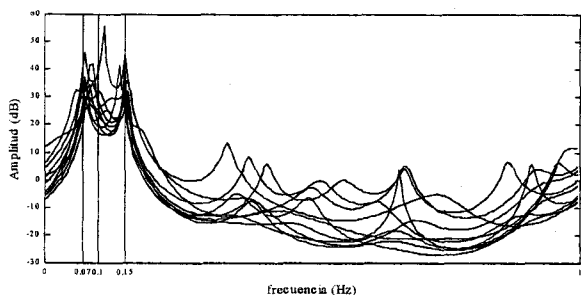


Figura 5.42. Levinson

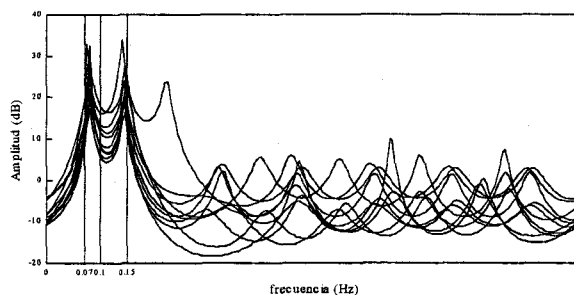


Figura 5.43. LS

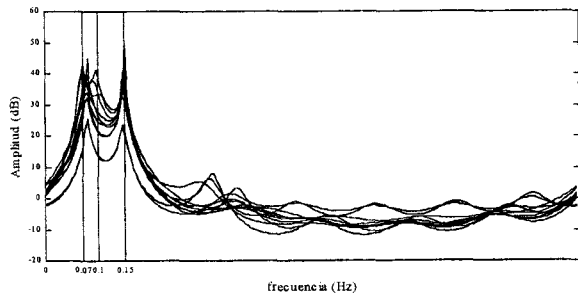


Figura 5.44. CFOM simple

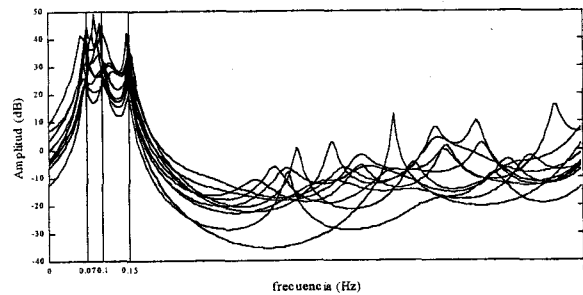
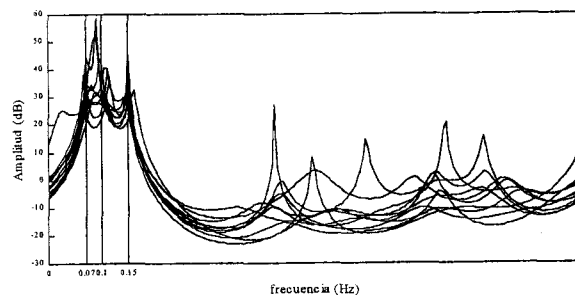


Figura 5.45. CFOM complejo

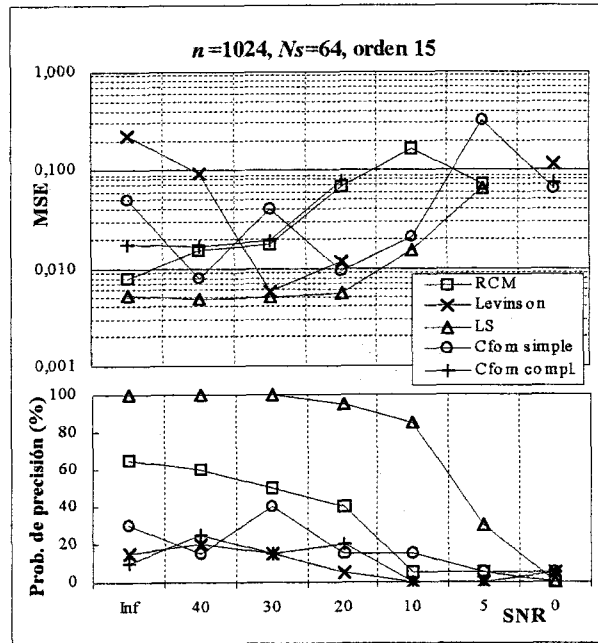
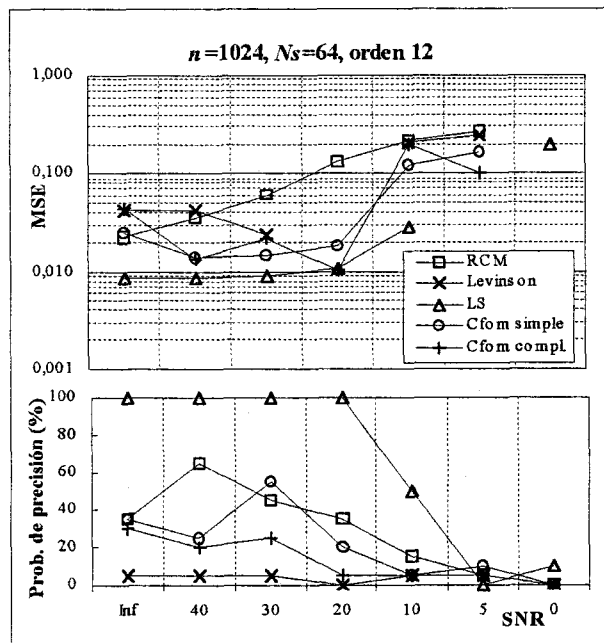
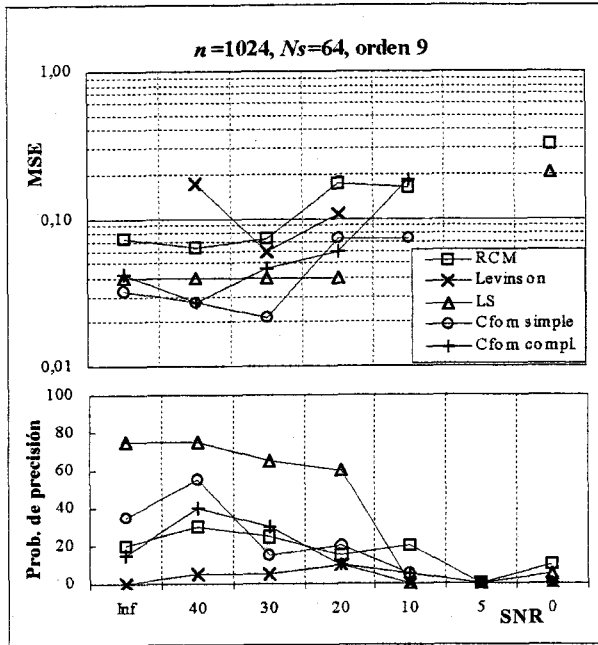
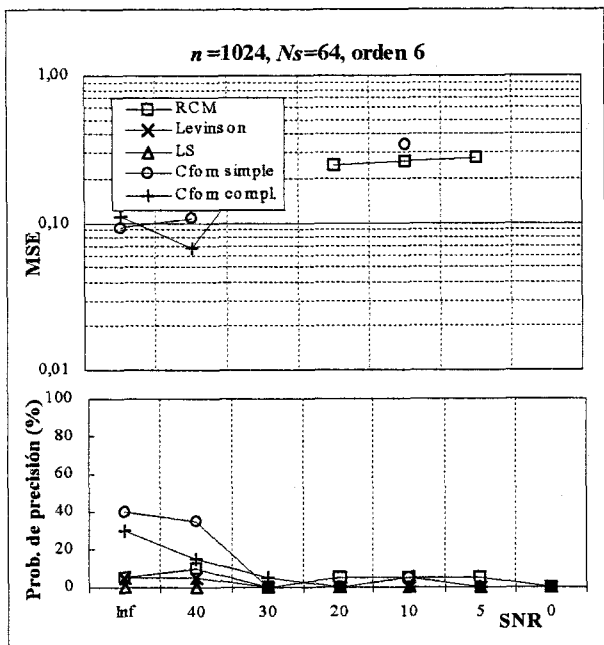


Puede verse como, incluso a orden siete, sólo los métodos CFOM simple y, sobre todo, CFOM complejo son capaces de resolver los tres picos en la mayoría de las ocasiones. El método LS y el RCM consiguen en alguna realización resolver adecuadamente, mientras que el método de Levinson no lo logra en ninguna ocasión.

Si se sigue aumentando el orden, es posible conseguir mejores estimaciones, para los mismos valores de n , N_s y SNR anteriores; de forma que los métodos LS, CFOM simple y CFOM complejo consiguen presentar picos claros en las diez realizaciones ya para orden ocho, presentado el método LS una varianza significativamente menor que los otros. El método RCM requiere llegar a orden diez para que todas las realizaciones presenten picos en las tres frecuencias y el método de Levinson necesita llegar como poco a orden 12 en el modelo AR

A continuación se presentan, en las figuras 5.46-49., el MSE y la probabilidad de precisión en función de la SNR para los distintos métodos. Las señales poseen un número de datos $n=1024$, divididas en segmentos independientes de longitud $N_s=64$ y para órdenes del modelo AR de frecuencias que van de seis a quince. La necesidad de irse hasta órdenes mayores que en la señal del subapartado a) se debe a la ya manifestada dificultad que poseen los métodos para estimar adecuadamente las frecuencias.

Figuras 5.46-49. MSE y probabilidad de precisión para $n=4096$, $N_s=64$ y diversos órdenes

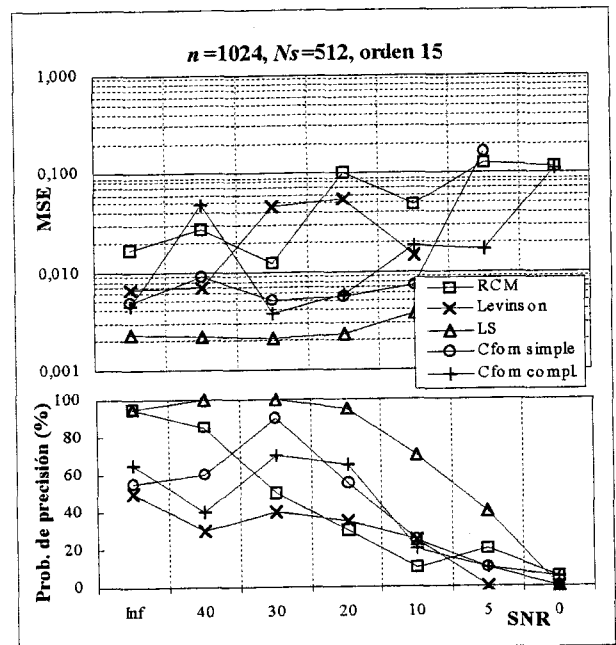
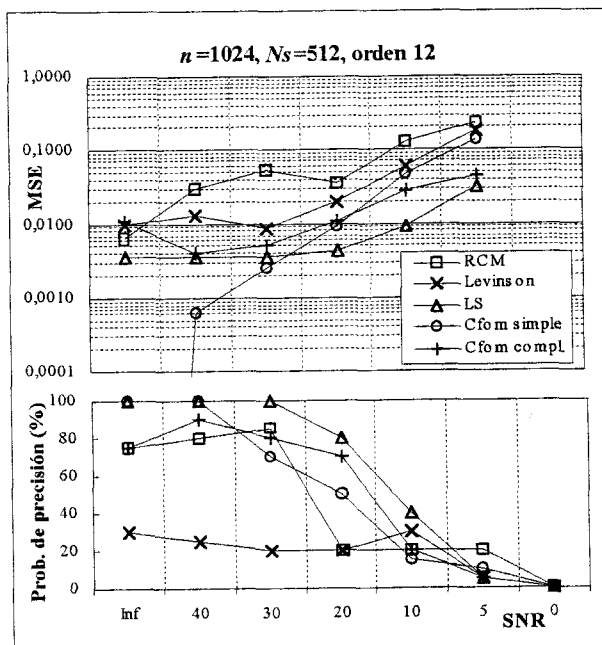
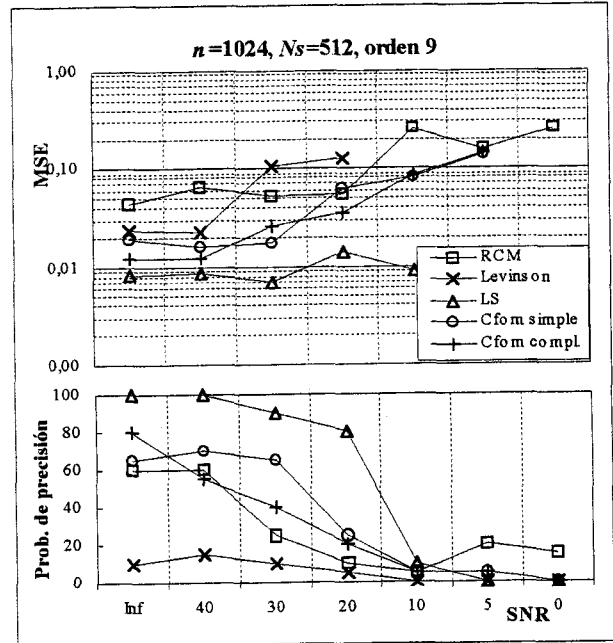
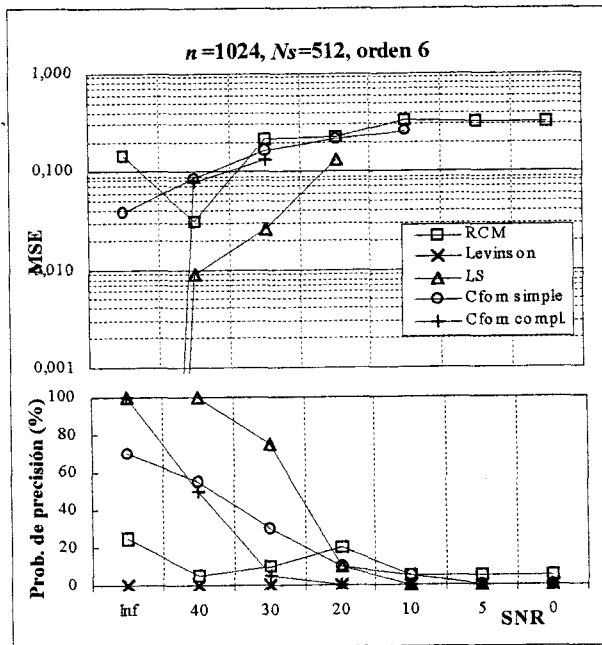


La dificultad que representa estimar correctamente las frecuencias del acoplo queda recogida en las anteriores gráficas, lo que es especialmente patente en la probabilidad de precisión. Únicamente el método LS proporciona valores por encima del 80% en la probabilidad de precisión y para órdenes superiores a diez, siendo también el que menor MSE presenta para estos órdenes. El resto de los métodos no presentan resultados aceptables, no

tanto por el valor del MSE, sino por la poca probabilidad de precisión que presentan, lo que provoca que se equivoquen, como poco en un 35 % de los casos.

El aumento en la longitud de los segmentos produce mejores resultados, tal y como sucedía en la señal $x_1(n)$, pero la mejora es ahora significativamente más acusada que lo que era para la otra señal. Esto puede verse en las gráficas 5.50-53.

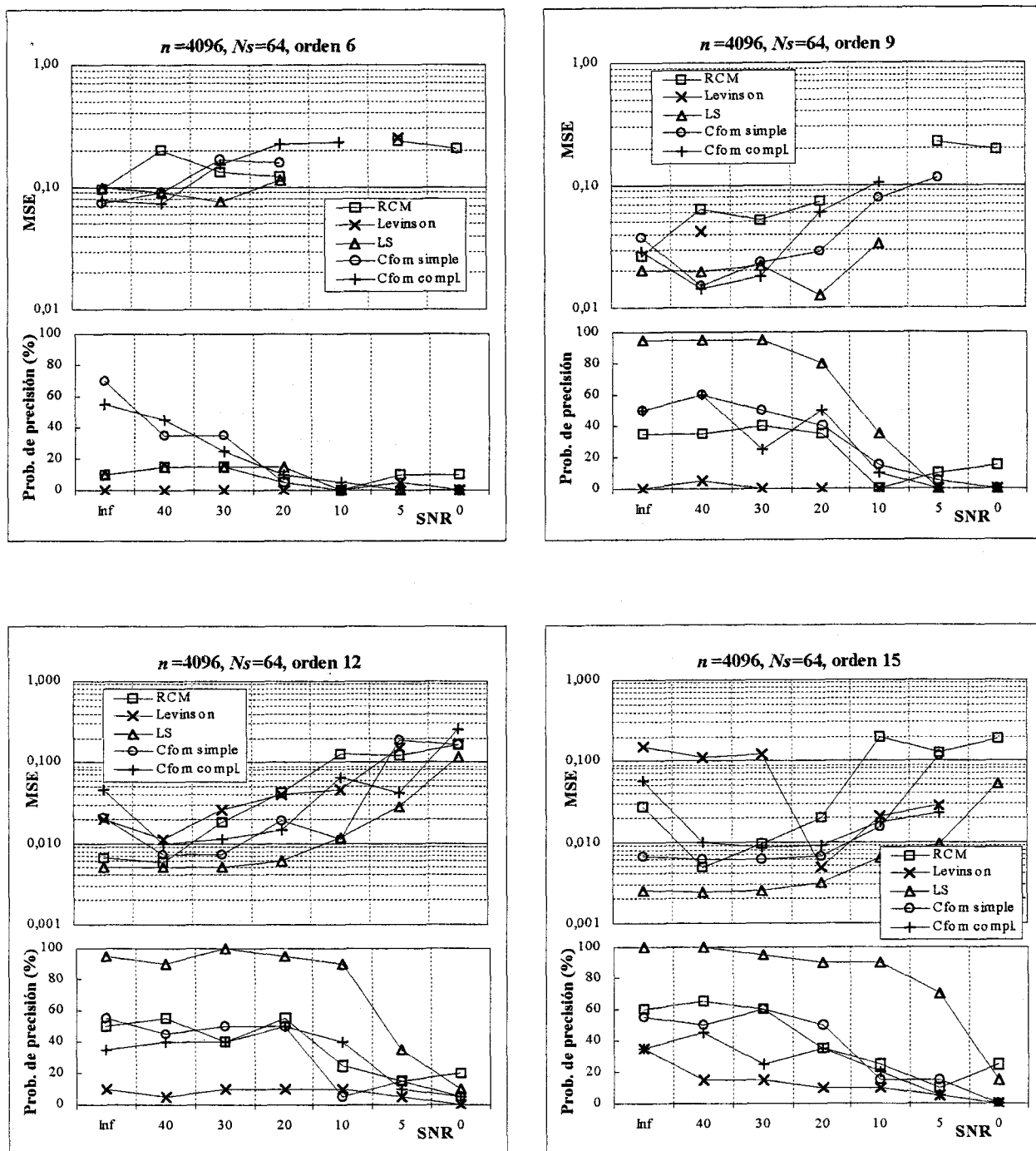
Figuras 5.50-53. MSE y probabilidad de precisión para $n=1024$, $N_s=512$ y diversos órdenes



En las gráficas se aprecia la gran mejora que produce en los resultados el aumentar la longitud de los registros. Sin embargo, les sigue costando a los métodos conseguir una probabilidad de precisión mayor del 80%, salvo para el método LS. El método que en ninguna situación consigue una probabilidad de precisión aceptable es el método de Levinson, por lo que su capacidad de resolver picos juntos será limitada.

Cómo repercute el aumento en el número de datos n es lo que se representa en las siguientes figuras.

Figuras 5.54-57. MSE y probabilidad de precisión para $n=4096$, $N_s=64$ y diversos órdenes



promediado en segmentos independientes cobra un importancia especial en este caso.

Al haber un sólo acoplo cúbico de fase, el orden menor del modelo AR uno con el cual se puedan determinar las frecuencias individuales de los acoplos, es tres. Aunque las frecuencias no están muy cercanas unas de otras, lo que sí sucedía en $x_2(n)$, la presencia de las otras cuatro frecuencias relacionadas armónicamente hará que no se consigan buenas estimaciones para este orden, incluso sin ruido.

A continuación se presentan los espectros de los modelos AR uno que modelan 20 realizaciones independientes de la señal $x_3(n)$ para señales con un número de datos $n=1024$, segmentadas en registros independientes de longitud $N_s=64$, sin ruido y para orden cuatro en el modelo AR.

Figura 5.58. RCM

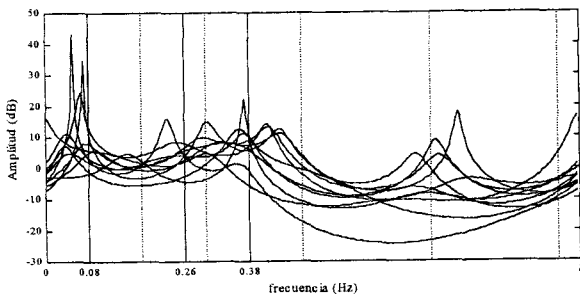


Figura 5.59. Levinson

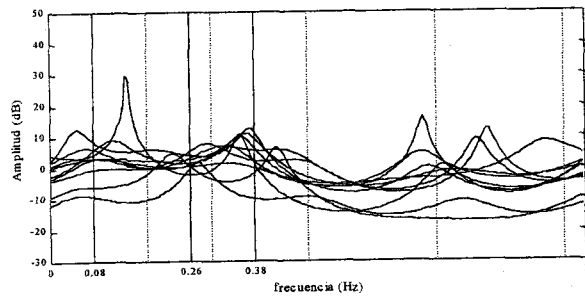


Figura 5.60. LS

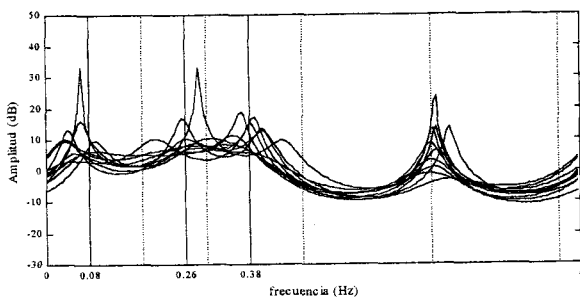


Figura 5.61. CFOM simple

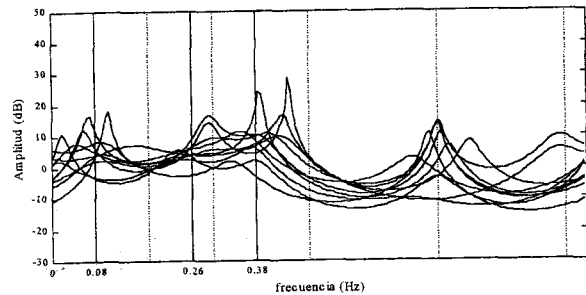
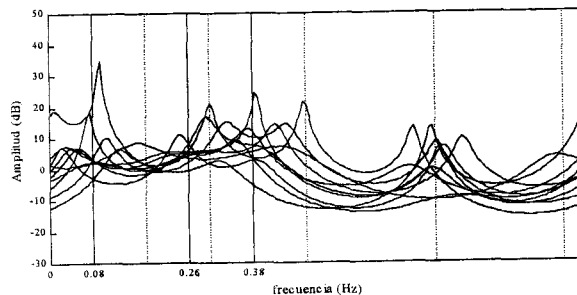


Figura 5.62. CFOM complejo



Las líneas verticales sólidas indican la posición de las frecuencias individuales del

Aunque de estas figuras se puede apreciar una mejora respecto de los resultados obtenidos con 1024 datos por señal, la mejora no es muy significativa, sobre todo si se compara con la mejora que produce el aumento de la longitud de los segmentos. Lo más interesante en el aumento del número de datos será que permitirá tratar con segmentos de mayores longitudes y un número suficiente de segmentos independientes. Esto será especialmente importante en la siguiente señal, como se comportan los métodos ante señales con una acoplo de fase y otras cuatro frecuencias relacionadas armónicamente, pero que no están acopladas en fase.

V.2.2. Un acoplo cúbico de fase y cuatro frecuencias relacionadas armónicamente y no acopladas.

En este apartado se persigue estudiar como se comportan los métodos frente a frecuencias que no están acopladas, pero sí están relacionadas armónicamente. En este caso, las señales no son ergódicas y el promedio en registros o segmentos independientes se convierte en fundamental, tal y como se explicó con detalle en el apartado IV.5.3. Por tanto, la señal será de la forma:

$$x_3(n) = \sum_{k=1}^4 A_k^u e^{j(\omega_k^u n + \psi_k^u)} + \sum_{k=1}^4 A_k^c e^{j(\omega_k^c n + \psi_k^c)} \quad (5.4)$$

con $\omega_4^u = \omega_1^u + \omega_2^u + \omega_3^u$, $\omega_4^c = \omega_1^c + \omega_2^c + \omega_3^c$, $\psi_4^c = \psi_1^c + \psi_2^c + \psi_3^c$, y las variables aleatorias $\{\psi_k^c, \text{ con } k=1,2,3\}$ y $\{\psi_p^u, \text{ con } p=1,\dots,4\}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi)$ y todas las amplitudes iguales a la unidad. Según esto, el segundo de los sumandos de (5.4) corresponderá al acoplos cúbico de fase, mientras que el primer sumando serán frecuencias no acopladas, pero relacionadas armónicamente, ya que una es la suma de otras tres.

En concreto, el valor que se ha dado a las anteriores frecuencias es el siguiente:

$$\begin{aligned} (\omega_1^c, \omega_2^c, \omega_3^c, \omega_4^c) &= 2\pi(0.08, 0.26, 0.38, 0.72) \\ (\omega_1^u, \omega_2^u, \omega_3^u, \omega_4^u) &= 2\pi(0.18, 0.3, 0.48, 0.96) \end{aligned} \quad (5.5)$$

El estudio se centrará únicamente sobre el modelo AR uno, tal y como se realizó durante el anterior apartado. También se utilizará el MSE definido en (5.3), en esta definición está implícito que el número de acoplos presentes es uno. Este hecho, que hasta ahora se ha supuesto conocido, es importante estudiar su posible deducción de los resultados de los métodos, aunque sea cualitativamente.

La señal (5.4) es no ergódica, lo que significa que los resultados que se obtengan sin segmentar las señales en registros independientes serán falsos, tal y como se vio en IV.5.3. Esto no sucede en las otras dos señales del apartado V.2.1., por lo que el efecto del

acoplo cúbico, mientras que las líneas punteadas hacen lo propio con el resto de las frecuencias que están presentes en (5.4) y (5.5), es decir, las cuatro frecuencias no acopladas y la suma de las frecuencias individuales de los acoplos.

Como puede verse, aunque las frecuencias del acoplo están bastante separadas, tal y como sucedía en $x_1(n)$, no es posible realizar una estimación adecuada a orden cuatro del modelo AR. Será necesario, por tanto, aumentar el orden del modelo. Si se realiza esto, dejando fijos el resto de los parámetros, al llegar a orden siete ya aparece claramente picos en las frecuencias individuales de los acoplos. Esto es lo que se representa en las siguientes figuras.

Figura 5.63. RCM

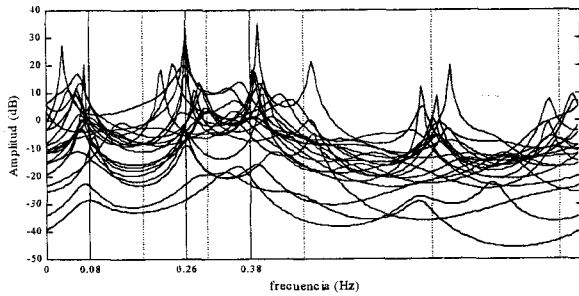


Figura 5.64. Levinson

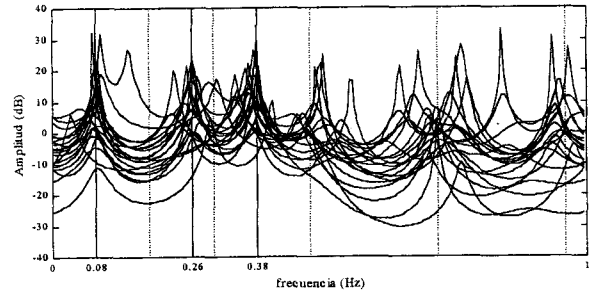


Figura 5.65. LS

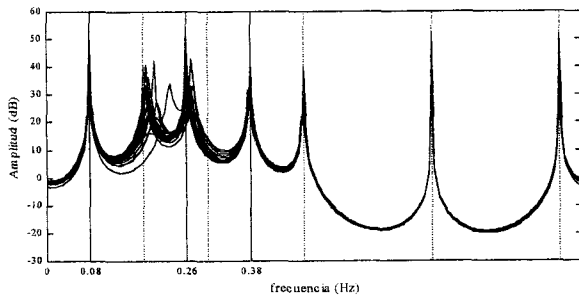


Figura 5.66. CFOM simple

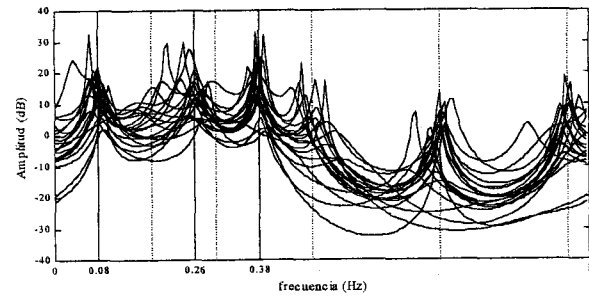
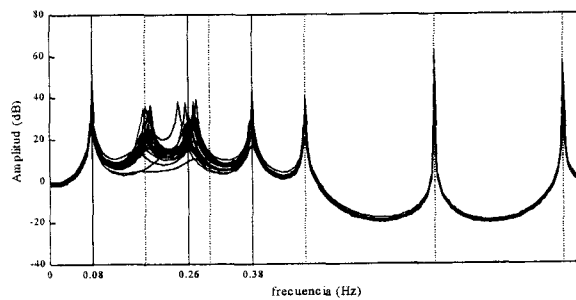


Figura 5.67. CFOM complejo



Para orden siete del modelo AR, puede apreciarse una gran diferencia entre los distintos métodos. Todos ellos presentan picos en las frecuencias individuales de los acoplos, con mayor o menor claridad, para un número elevado de realizaciones. Incluso, los métodos

LS y CFOM complejo presentan una varianza realmente pequeña. Pero esto no significa que se tenga una estimación correcta. Si uno se fija en los espectros de los dos métodos anteriores, su aspecto no es el que debería presentar un acoplos y que se representa en las figuras 5.6-10., más bien es el aspecto que debe presentar dos acoplos. Esto se debe a que no sólo aparecen picos en las frecuencias individuales del acoplo en el espectro del modelo AR, sino en todas las frecuencias que están presentes en (5.4) y (5.5).

Si se desconoce el número de acoplos que componen la señal, a la luz de los espectros de los métodos se puede deducir que existen dos, con claridad, por lo que la interpretación posterior sobre el sistema físico del que provenga la señal serán erróneos. Pero, incluso si se conoce a priori que sólo existe un acoplo en la señal, no se obtendrían buenos resultados mediante estos dos métodos, ya que se estimarían como frecuencias aquellas cuyos polos estén más cerca de la circunferencia unidad, que en ninguno de los casos corresponden con las frecuencias individuales del acoplo. De hecho, si se calcula la probabilidad de precisión en los anteriores métodos, el resultado es cero, ya que se equivoca en todas las identificaciones de los polos como verdaderos.

El método CFOM simple, aunque presenta una mayor varianza y también aparecen picos espúreos en su espectro, presenta como los tres picos más importantes los correspondientes a las frecuencias individuales del acoplo, en un gran número de ocasiones. Algo parecido ocurre con el método RCM, aunque en menor medida, ya que la varianza es más elevada.

El siguiente paso, en busca de un correcto procesado es elevar el número de datos de la señal, dejando fija la segmentación. Lo que se persigue es elevar el promedio en registros independientes, ya que esto favorece la convergencia en las señales no ergódicas. Los resultados, para $N_s=64$, $n=4096$, 20 realizaciones, sin ruido y un orden del modelo AR de siete, son los que se muestran en las siguientes figuras.

Figura 5.68. RCM

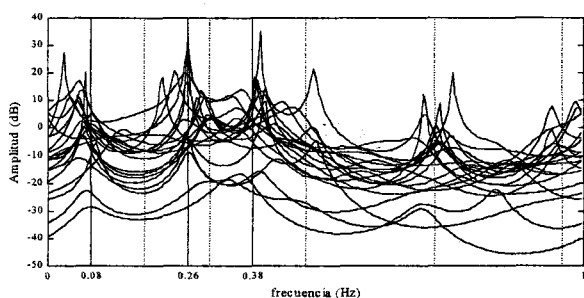


Figura 5.69. Levinson

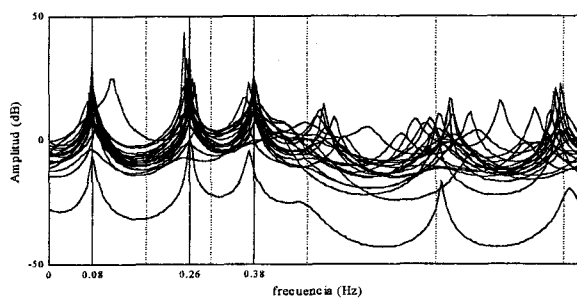


Figura 5.70. LS

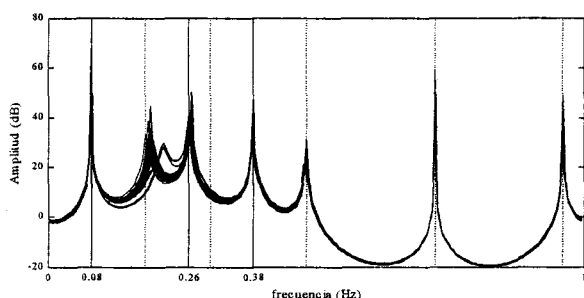


Figura 5.71. CFOM simple

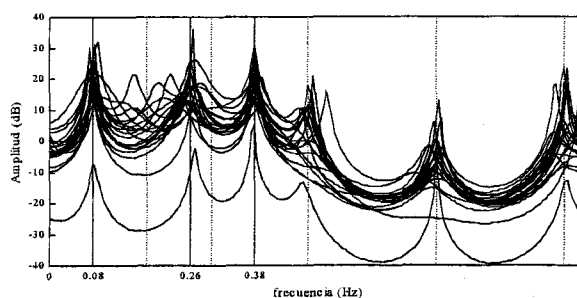
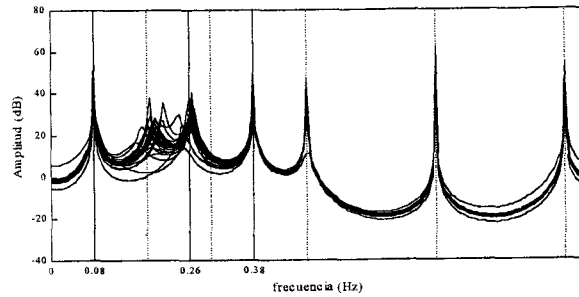


Figura 5.72. CFOM complejo



En estas figuras puede verse como, aún multiplicando por cuatro el número de datos de cada señal, no se consigue disminuir los picos espúreos que aparecen en los métodos LS y CFOM complejo. La varianza que aparece tanto en el método RCM como en el de Levinson, puede utilizarse para intentar conseguir un espectro que posea una forma similar al espectro teórico, el cual sólo presenta picos en las frecuencias individuales acopladas. Estos, se vio a principio del apartado anterior que podía realizarse promediando geoméricamente los distintos espectros presentados. La media de los espectro de las anteriores figuras es lo que aparecen en las siguientes:

Figura 5.73. RCM

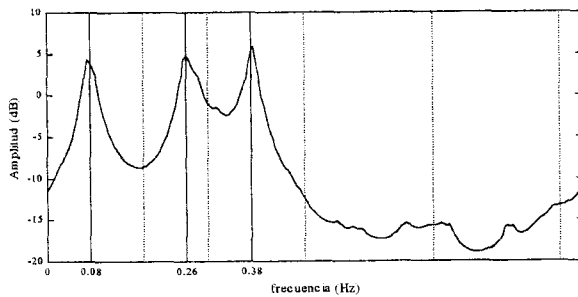


Figura 5.74. Levinson

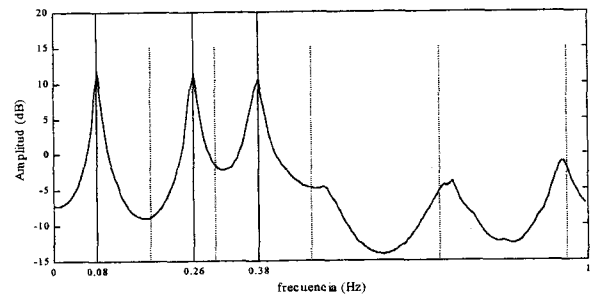


Figura 5.75. LS

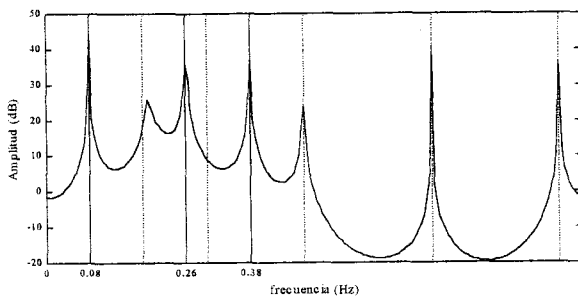


Figura 5.76. CFOM simple

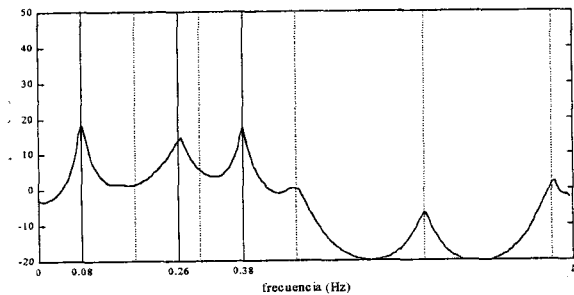
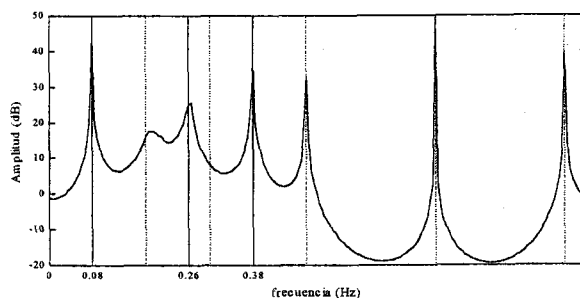


Figura 5.77. CFOM complejo



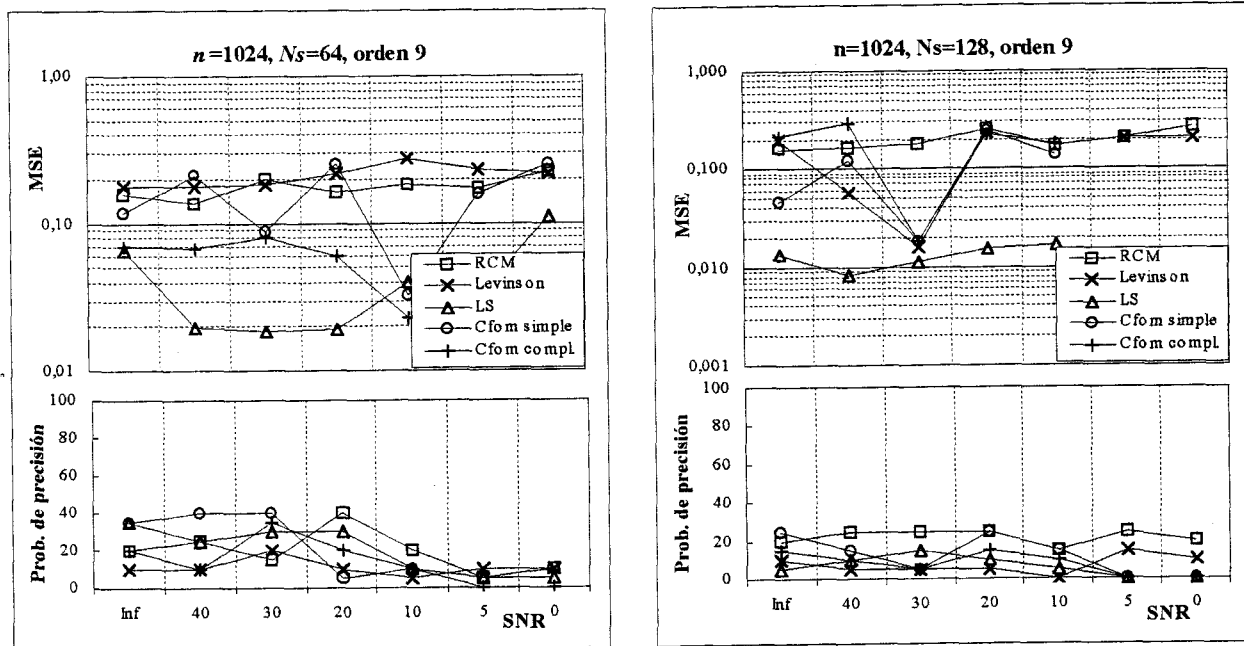
De estas figuras puede verse como el espectro que más se asemeja al espectro teórico es la que proporciona el método RCM, el cual presenta únicamente tres picos diferenciables, como se está buscando. Los métodos Levinson y CFOM simple, también producen espectros similares, aunque aparece algún pico menor a altas frecuencias. Sin embargo, los otros dos métodos, LS y CFOM complejo, que eran precisamente los que mejores resultados habían dado en las señales anteriores son los que muestran un espectro más diferente del esperado. Esto provoca la dificultad tanto en el número de acoplos como en las frecuencias concretas. Se puede concluir que los métodos LS y CFOM complejo son los menos sensibles al promedio en segmentos independientes, y por ello no producen resultados adecuados para señales no ergódicas, como es la que se está estudiando en este apartado.

Para concluir con estas señales se estudiará el MSE y la probabilidad de identificación, lo que proporcionará una mayor comprensión sobre los mecanismos que siguen los métodos en la estimación. Tanto en la definición de MSE como en la probabilidad de identificación, se supone que las señales poseen un sólo acoplo, por lo que de estos parámetros no se puede obtener consideración alguna sobre la existencia de más picos o la identificación acertada del número de acoplos. Con estos parámetros se puede estudiar cómo afecta el orden, la segmentación y el número de datos en los distintos métodos.

En primer lugar se estudiará la influencia que el aumento de la longitud de los segmentos tiene sobre estos parámetros, manteniendo fijo el número total de datos de la señal. Por ello, en las figuras 5.78-79. se presentan el MSE y la probabilidad de precisión calculadas a partir de 20 realizaciones, para $n=1024$ y $N_s=64$ y $N_s=128$, siendo el orden del modelo AR de frecuencias nueve.

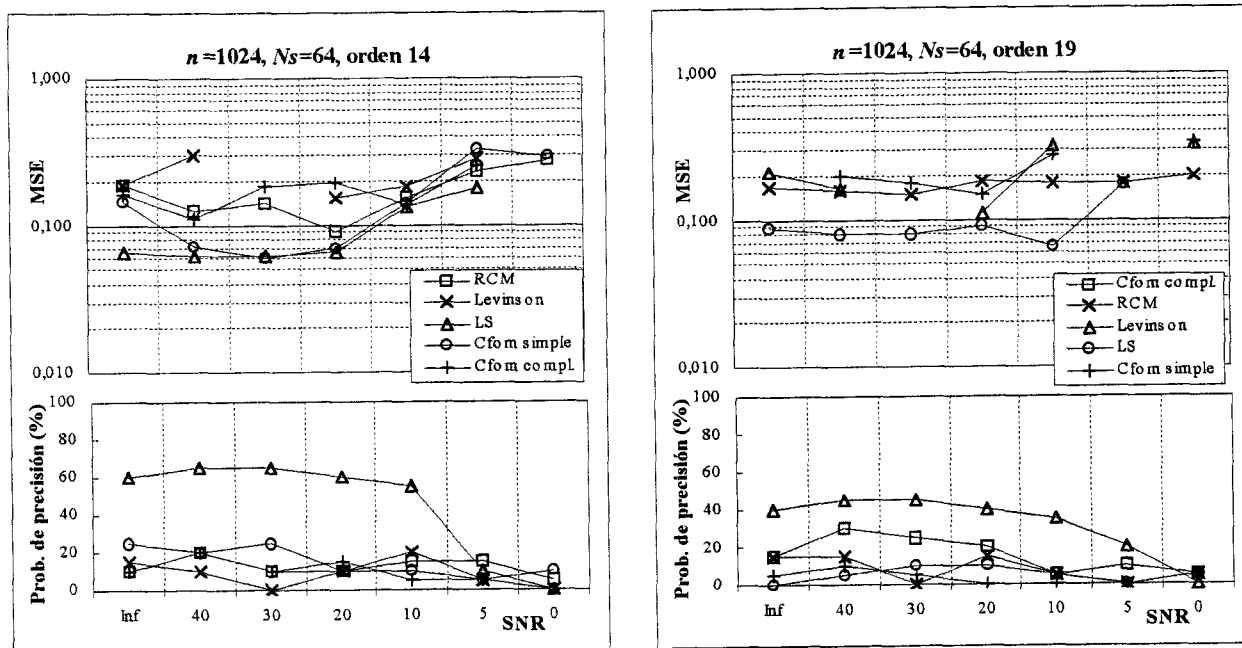
En estas dos figuras se puede ver como el aumento en la longitud de los segmentos, manteniendo el número de datos fijos, produce una disminución en la probabilidad de identificación. Esto se debe a que el promedio en registros independientes disminuye, por lo que la contribución de los picos falsos es mayor. Por otro lado se observa como disminuye el valor del MSE. Esto se puede explicar por el hecho de que al tener mayores segmentos se mejora la precisión, tal y como se vio en las señales del apartado anterior. Es decir, al aumentar el tamaño de los segmentos se identifica en menos ocasiones los picos verdaderos correctamente, pero cuando se acierta, los picos están mejor estimados.

Figuras 5.78-79. MSE y probabilidad de precisión para $n=1024$, $N_s=64$ y $N_s=128$, para orden del modelo AR de nueve.



Con el fin de estudiar el efecto del aumento del orden de los modelos AR, en las figuras 5.80-81 se presentan los resultados para ordenes mayores, señales de 1024 datos y $N_s=64$.

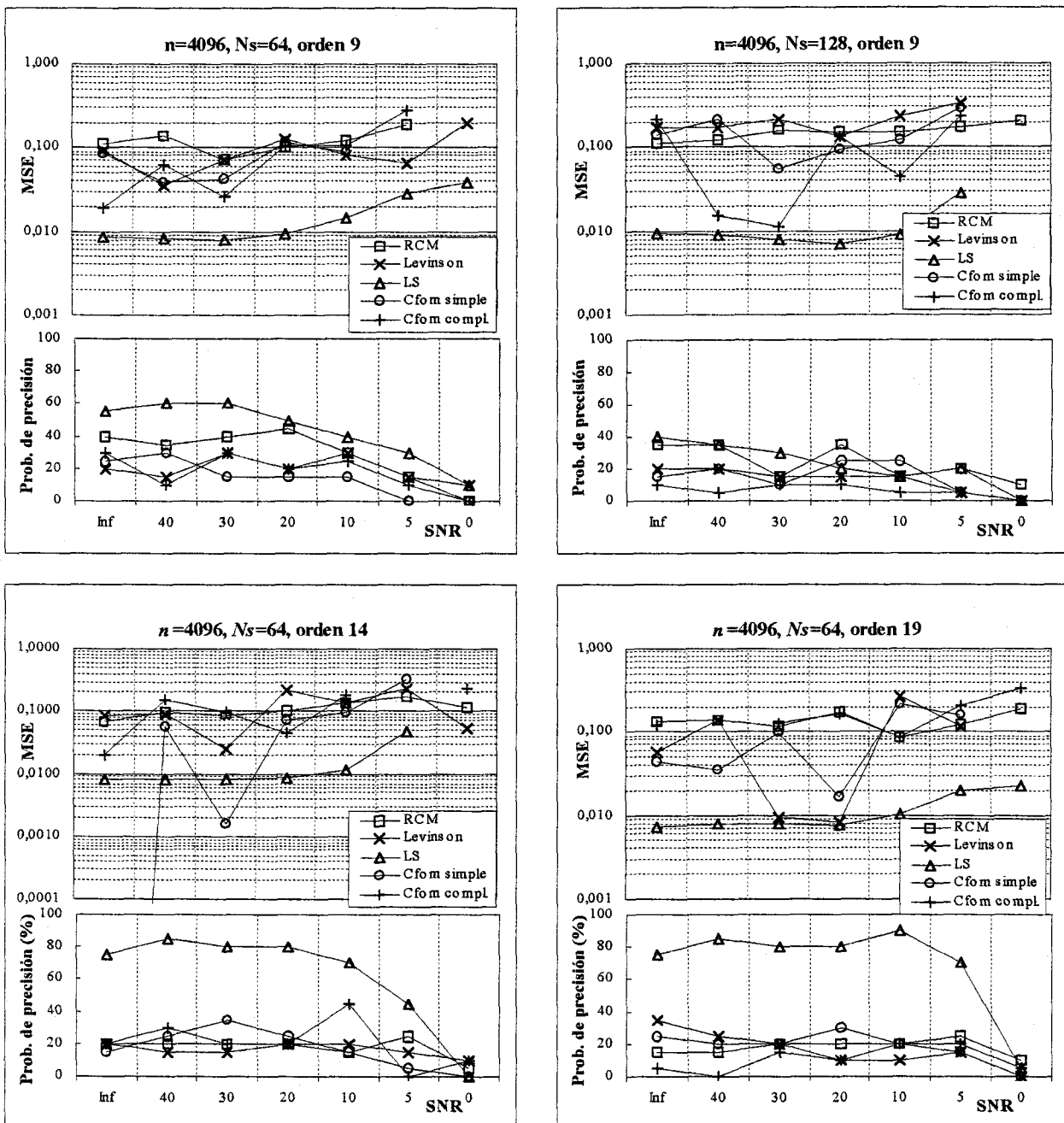
Figuras 5.80-81. MSE y probabilidad de precisión para $n=1024$ y $N_s=64$, para orden del modelo AR de catorce y diecinueve.



En las gráficas se puede ver como el aumento del orden no produce una mejora apreciable en las probabilidades de precesión, salvo para el método LS. Este método es con diferencia el que identifica correctamente los picos en un mayor número de ocasiones. El valor del MSE mejora levemente en algunos métodos, sobre todo en el método CFOM simple. Del paso de orden 14 a orden 19, puede verse como los resultados empeoran, en general. Esto era de esperar, ya que al aumentar tanto el orden, también lo hacen los picos espúreos y el espectro se contamina mucho con ellos.

Por último, en las siguientes figuras se muestra como influye el aumento del número de datos en los distintos métodos.

Figuras 5.82-85. MSE y probabilidad de precesión para $n=4096$.



De las anteriores figuras se puede ver como el aumento en el número de datos mejora todos los resultados, sobre todo a ordenes más altos. Sobre todo en el valor del MSE, siendo significativamente menor la mejora en el MSE. Sin embargo, la probabilidad de identificación no consigue valores adecuados, salvo para el método LS y en órdenes altos. Este método posee el inconveniente de presentar todas las frecuencias, sin apenas diferencia entre ellas, lo que dificulta la interpretación de la señal.

Como conclusión, el método que parece más adecuado en la detección de acoplos, una vez analizado los resultados, es el de promediar los espectros de las distintas realizaciones obtenidos con el método RCM. Con este espectro promediado, se pueden identificar cuales son y aproximadamente donde están colocadas las frecuencias individuales de los acoplos. Una vez realizado esto se puede intentar mejorar la estimación utilizando otros métodos, como el LS, que localizan con mayor precisión las frecuencias.

V.3. MÉTODO ESPRIT

En este apartado se estudiarán los resultados que proporciona el método desarrollado en el capítulo IV.7. para las mismas señales que aparecen en el apartado anterior. A través de este método lo que se obtenía directamente es el conjunto de frecuencias y las amplitudes de los acoplos, así como un procedimiento para determinar el número de acoplos presentes en la señal.

El procedimiento será el siguiente:

-Primero: Se construye la matriz Cx , de dimensión N^3 , definida en IV.7. En la construcción de esta matriz se hace necesario la estimación de los cumulantes de orden cuatro, por lo que en este pase es necesario fijar el número de datos y la segmentación que se utilizarán en la estimación; aparte del valor de N .

-Segundo: Se calculan los autovalores distintos de cero, que se han llamado autovalores de la señal $\{\mu_i\}_{i=1,\dots,r}$ donde r se define en (4.69). En teoría, el número de autovalores distintos de cero r dependerá del número de acoplos, y el resto de autovalores serán nulos. Sin embargo, debido a los errores de estimación, todos los autovalores serán distintos de cero, por lo que habrá que determinar cuando se tratan de errores de estimación y cuando es debido a un autovalor realmente no nulo. En principio se obviará este problema, y se trabajará con las dos primeras señales suponiendo que únicamente hay un acoplo, lo que, unido a que ninguna de las frecuencias están repetidas produce que haya seis autovalores de la matriz Cx teóricamente distintos de cero, aunque, como ya se ha dicho, en la práctica no habrá ninguno no nulo. Lo que se hará es tomar los seis autovalores mayores como los correspondientes a la señal, y el resto se considerará pertenecientes al ruido. Como resultado se obtendrán también los autovectores de la señal $\{v_i\}_{i=1,\dots,r}$.

-Segundo: Se construye la matriz $Cx_{1,0,0}$ y se calcula los autovalores de la matriz $\Gamma = \Lambda^{-1} E_s^H Cx_{1,0,0} E_s$, donde $\Lambda = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_r]$ y $E_s = [v_1 | \dots | v_r]$. Por el colorario 5.1 del capítulo anterior, los autovalores complejos conjugados serán los elementos del conjunto $B_0 = \{\exp(j\theta) : \theta \in \Xi_0\}$, donde los elementos $\theta \in \Xi_0$ son las frecuencias individuales de los acoplos.

Para una frecuencia se ha visto como $r=6$, luego, en el segundo paso, se obtendrán seis autovalores que corresponden a los elementos de B_0 , complejo conjugados. Sin embargo, en el tanto en el conjunto B_0 como en Ξ_0 , sólo hay tres elementos. Esto se debe a que, en los autovalores de la matriz Γ , aparecen dos veces cada uno de los elementos de B_0 , complejo conjugados. En teoría, los autovalores aparecerán repetidos y por parejas, pero en la práctica, y debido a los errores de estimación esto no sucederá. Por tanto existen dos opciones para obtener de los seis autovalores los tres elementos de B_0 y con ellos las tres frecuencias individuales del acoplo y que componen el conjunto Ξ_0 . Una es agrupar por parejas y tomar como elementos de B_0 estimados los valores medios de esas tres parejas. En las situaciones prácticas se ha tomado esta opción y se ha podido comprobar como produce resultados muy pobres en la estimación. La otra opción es tomar los tres autovalores más cercanos a la circunferencia unidad. Esta opción se basa en el hecho de los elementos teóricos del conjunto B_0 tienen módulo uno. Por supuesto, no existe ningún motivo a priori para que los tres autovalores de módulo más cercano a uno sean cada uno pertenecientes a una de las parejas, pudiendo en la práctica producir autovalores repetidos. En la práctica, sin embargo, no va a ser habitual y esta opción en la determinación de las frecuencias individuales es la que se va a seguir en la práctica.

En el paso primero, se determinan los autovalores de la señal como los autovalores mayores de la matriz Cx . En el caso de que uno autovalor del ruido, que teóricamente deben valer cero, sea mayor que un autovalor del ruido, a causa de errores de estimación, la estimación de las frecuencias no proporcionará resultados acertados. Pero, al igual que sucedía con las estimaciones mediante los métodos AR, estos errores no se deben a un problema de estimación propiamente dicho, sino a una elección equivocada de un autovalor del ruido como si fuera de la señal. Se puede seguir la misma idea que en los métodos AR, e interpretarlas como errores en la acertada determinación de los autovectores de la señal. Para la discriminación de qué estimación es correcta en cuanto a la elección de los autovalores, es preciso fijar un intervalo de confianza en las frecuencias, fuera del cual se supondrá que ha habido un error. De esta forma, se vuelve a tener una probabilidad de precisión, como la que aparecía en los métodos AR.

El parámetro N jugará el mismo papel que el orden del modelo AR, de forma que un aumento de él permitirá una mejor estimación de las frecuencias. En el caso de los modelos AR, el aumento estaba limitado por la aparición de picos espúreos en la señal, mientras que en este caso la limitación es puramente numérica. Efectivamente, la dimensión de la matriz Cx es N^3 por lo que al aumentar N la dimensión se dispara, sobre todo si se tiene en cuenta que hay que realizar un cálculo de autovalores, lo que requiere un importante esfuerzo de cálculo. Sin embargo, sobre todo para N altos, es interesante tener en cuenta que no son necesarios todos los autovalores, sino sólo los mayores, por lo que se puede evitar utilizar algoritmos clásico en los que se obtienen todos los autovalores, como el algoritmo QR, y tratar con algoritmos de extracción de autovalores subdominantes, en los que solamente se calculan los primeros autovalores. Esto permitirá aumentar N hasta valores donde los otros algoritmos no proporcionan resultados.

A continuación se procederá a estudiar cada una de las señales tratadas en el capítulo anterior. Sin embargo el orden será variado, presentándose primero los resultados para $x_2(n)$ y posteriormente para $x_1(n)$ y $x_3(n)$. El motivo es que, en la construcción de la matriz Cx se pueden imponer diferentes propiedades o condiciones, como se verá a continuación; la

diferencias en los resultados de las distintas elecciones se observan mejor en la señal $x_2(n)$, por lo que se ha presentado en primer lugar.

V.3.1. Señal $x_2(n)$

Un punto clave en la estimación será la construcción de la matriz Cx . El procedimiento de su construcción será estimar los cumulantes de orden cuatro a partir de la señal que tenga un determinado número de datos y fijando la segmentación, y una vez con ellos y con la definición de Cx se construye la matriz. La matriz así construida carecerá de ciertas propiedades interesantes que debería poseer, como son la hermiticidad y el rango 6. Estas propiedades se pueden imponer sobre la matriz, una vez construida, una a una o todas a la vez, siendo interesante comprobar como influye tal procedimiento en los resultados finales. Esto es lo que se va a realizar en primer lugar, estudiar el comportamiento de este procedimiento en los resultados finales. Para poder llevar a cabo el estudio hay que indicar como es la estructura toeplitz a bloques y como se puede imponer varias condiciones a la vez.

La condición de hermiticidad, sobre la matriz Cx es fácil de imponer, sin más que hacer:

$$Cx' = \frac{Cx + Cx^*}{2} \quad (5.6)$$

la nueva matriz Cx' , poseerá la propiedad de hermiticidad. La condición de hermiticidad se llamará condición uno.

La imposición del rango seis se puede realizar fácilmente una vez extraídos los seis primeros autovalores de Cx , $\{\mu_1, \dots, \mu_6\}$, y los autovectores asociados, $E_s = [v_1 | \dots | v_6]$. Como el resto de los autovalores se suponen nulos, la nueva matriz queda, tomando $\Lambda = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_6]$:

$$Cx' = E_s \Lambda E_s^H \quad (5.7)$$

La condición de que la matriz posea rango 6 se llamará condición dos.

Por supuesto, al imponer alguna de las dos anteriores condiciones se rompe la estructura toeplitz a bloques que posee la matriz Cx , que es producto de las las propiedades de simetría de los cumulantes. Para poder imponer se utilizará el procedimiento descrito en [CAD88], en el que se describe un procedimiento para poder imponer cualquier estructura lineal en matrices. El principal problema que acarrea este método es que habrá que construir matrices de dimensión $\frac{N}{3}(4N^2 - 1) \times N^6$, que son matrices muy grandes, tanto que para $N=4$, los cálculos se hacen enormes. También en [CAD88] se describe una forma estándar de trabajar para imponer distintas propiedades a la vez, con lo que se podrán imponer distintas de las anteriores propiedades a la vez. La condición de que la matriz posea la estructura toeplitz a bloques que teóricamente posee Cx se llamará condición tres.

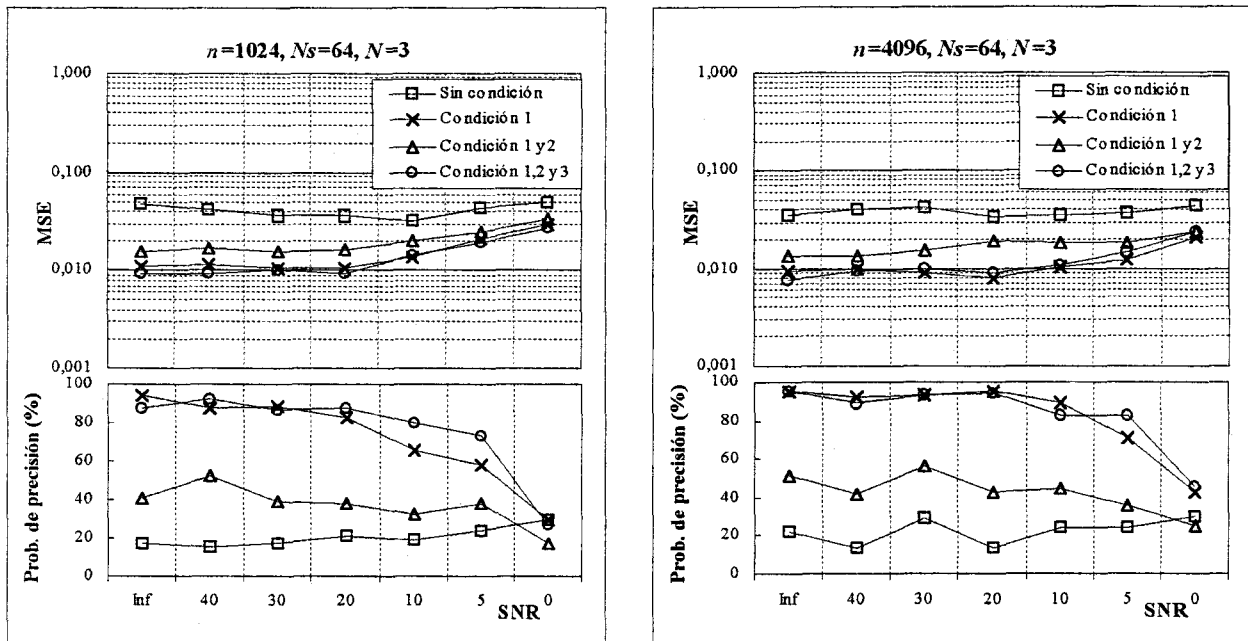
En el siguiente gráfico se presenta los resultados finales del método tomando cuatro opciones distintas sobre la construcción de la matriz Cx . La primera es no imponer condición

alguna, es decir, construir la matriz a partir de los cumulantes de orden cuatro y de su definición. Esta matriz poseerá estructura toeplitz a bloques pero ni será hermítica ni tendrá rango 6. La segunda opción es imponer únicamente hermiticidad, tal y como se lleva a cabo en (5.6). La tercera opción es imponer la condición de hermiticidad y la de rango 6, que se lleva a cabo como se indica en (5.7). Por último, en la cuarta se imponen las tres condiciones a la vez. Los resultados son los obtenidos para señales de $n=1024$ y $n=4096$ datos cada una y divididas en segmentos independientes de 64 datos. Se representa la probabilidad de precisión y el MSE en función de la SNR. La probabilidad de precisión se calcula tomando 100 señales, obteniendo las frecuencias estimadas y calculando el número de veces que ninguna de las tres frecuencias difiere de las verdaderas en más de 0.1 Hz, este número será el valor estimado de la probabilidad de precisión. Con las estimaciones que caen dentro del intervalo se les calcula el MSE de las frecuencias, definido como:

$$MSE = \sum_{i=1}^3 (\hat{f}_i - f_i)^2, \quad (5.8)$$

donde $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$ son las tres frecuencias estimadas.

Figuras 5.86-87. MSE y probabilidad de precisión para la imposición de las distintas condiciones.



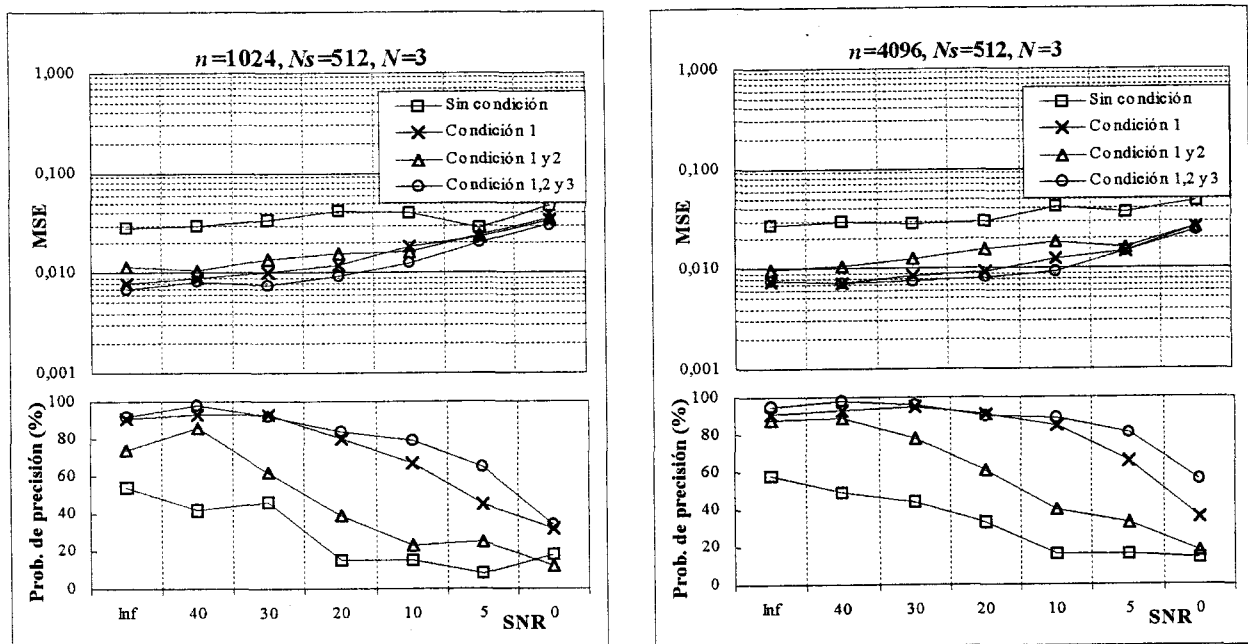
En las figuras 5.86-87. puede verse como las opciones en la construcción de la matriz C_x que mejores resultados producen son imponer sólo hermiticidad e imponer todas las condiciones. La diferencia es mínima, aunque la última opción proporciona resultados ligeramente menores. Sin embargo, esta no será la opción que se impondrá sobre las señales. El motivo es puramente computacional, ya que esta opción requiere, por un lado, la realización de un proceso iterativo lento, lo que produce que el método se ralentice; mientras que por otro

lado necesita la construcción de matrices muy grandes, que incluso para $N=4$ son prácticamente intratables.

La opción que se va tomar sobre la construcción de la matriz Cx es imponer únicamente la condición de hermiticidad. El procedimiento de obtención de la matriz Cx quedará de la siguiente manera: se calculan los cumulantes de orden cuatro, de construye la matriz Cx a partir de estos y de su definición y por último se obtiene la matriz definitiva mediante (5.6). De las anteriores gráficas puede verse como se obtienen probabilidades de precisión muy altas con esta opción, proporcionando también MSE bajos.

A continuación se presentan los mismos resultados para segmentaciones de $N_s=512$.

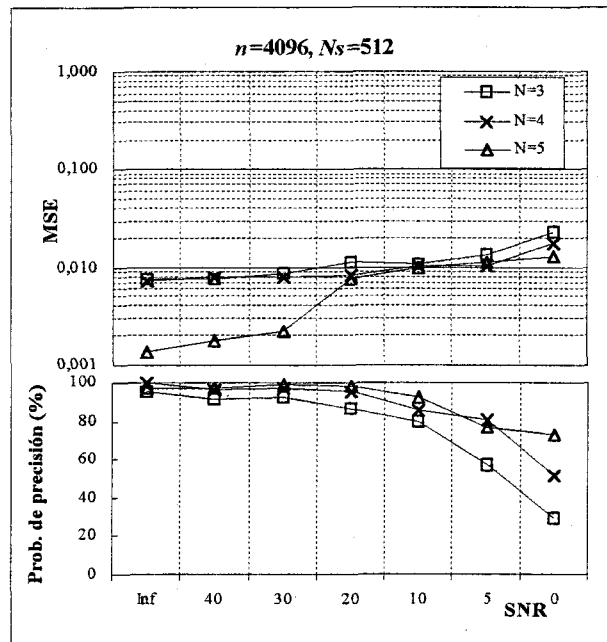
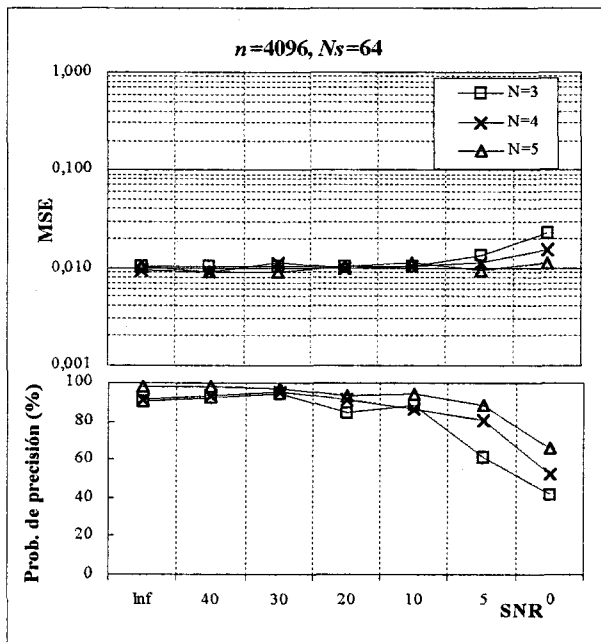
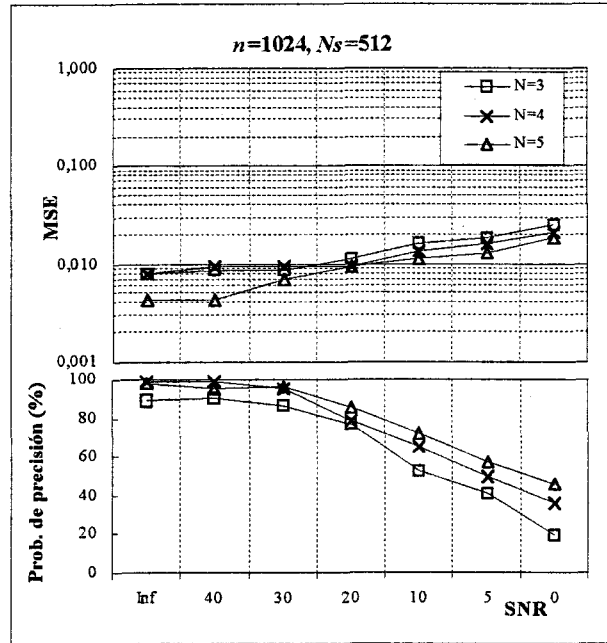
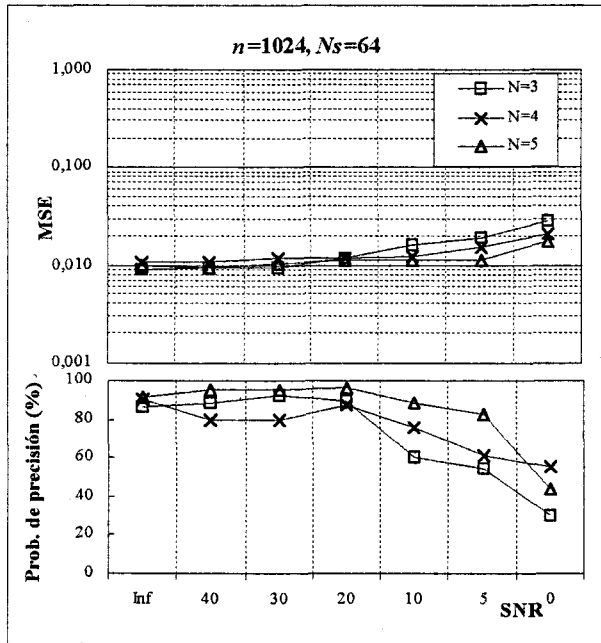
Figuras 5.88-89. MSE y probabilidad de precisión para la imposición de las distintas condiciones.



En las figuras 5.88-89 puede verse como, para la condición 1, que es la que interesa, el aumento de la segmentación no produce un gran cambio en los resultados, aunque mejora un poco. De los resultados de esta segmentación también se elige la condición 1 como la más adecuada, aunque no sea la mejor, ya que la mejora que aporta imponer todas las condiciones no es lo suficientemente importante para justificar el esfuerzo de cálculo que representa.

En las siguientes figuras, ya sólo impuesta la condición de hermiticidad, se presentan conjuntamente los resultados para $N=1,2,3$, para señales de $n=1028$ y $n=4096$ datos de longitud divididas en segmentos de longitud $N_s=64$ y $N_s=512$.

Figuras 5.90-93. MSE y probabilidad de precisión para distintos N y distinta segmentación de los datos.



El aumento de N proporciona mejores resultados, sobre todo al aumentar el ruido. Este hecho es común a todos los métodos de estimación de componentes armónicas, tanto de segundo como de alto orden, en los que al sobredimensionar el subespacio del ruido (el subespacio generado por los autovalores del ruido) se consigue mejorar los resultados y hacerlos más robustos frente al ruido. La mejora se presenta tanto en el MSE, como en la probabilidad de precisión, siendo mucho más evidente a SNR pequeñas.

El aumento de la segmentación produce una disminución del MSE, sobre todo para $N=5$ y bajo nivel de ruido. También parece plantear más problemas la segmentación de $N_s=512$ para SNR bajas, lo que se acusa más a $n=1024$.

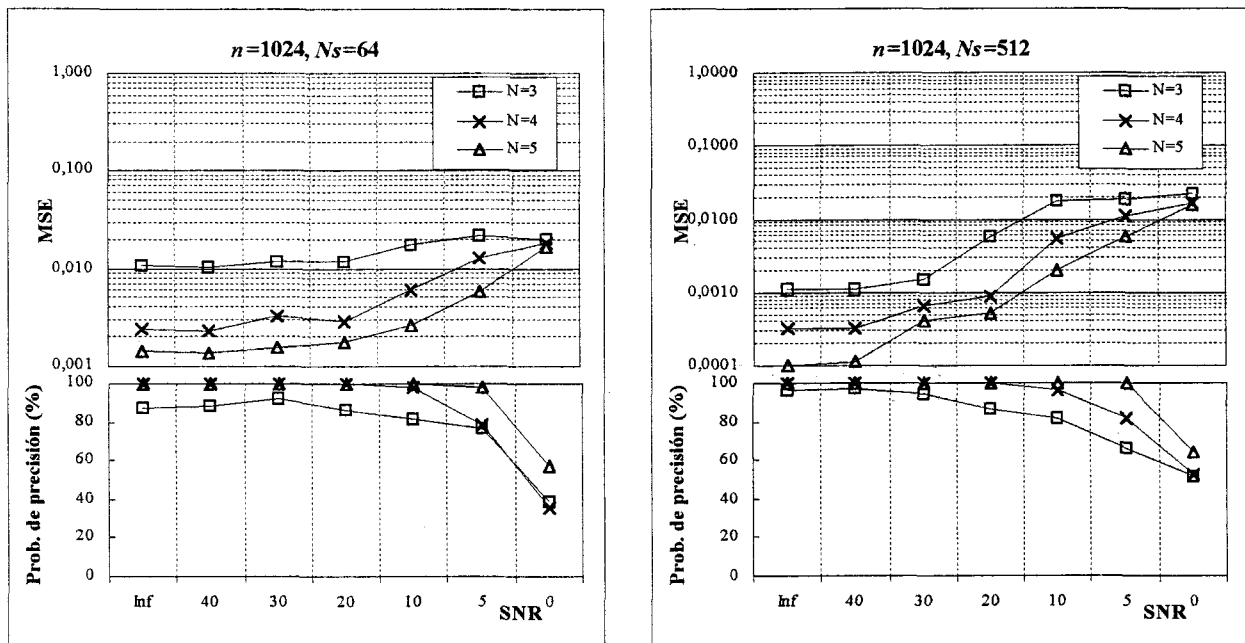
Aún así las estimaciones son muy acertadas, y las probabilidades de precisión muy altas, pudiéndose obtener valores superiores al 80% a SNR de 5 dB; lo que es significativamente mejores que en los métodos AR.

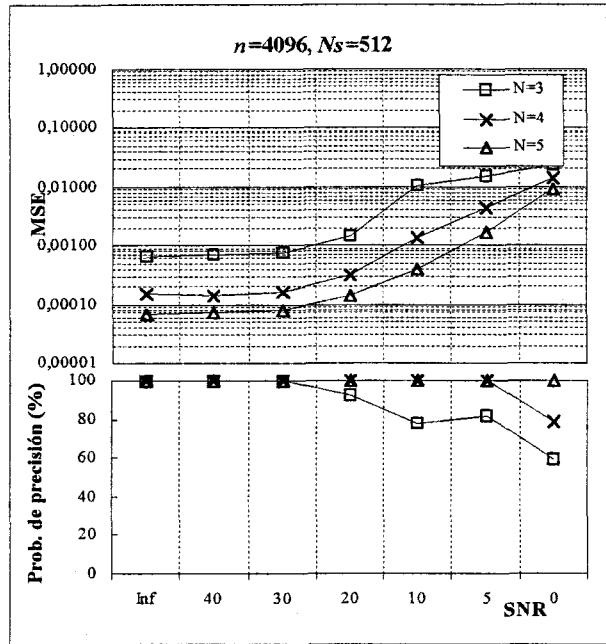
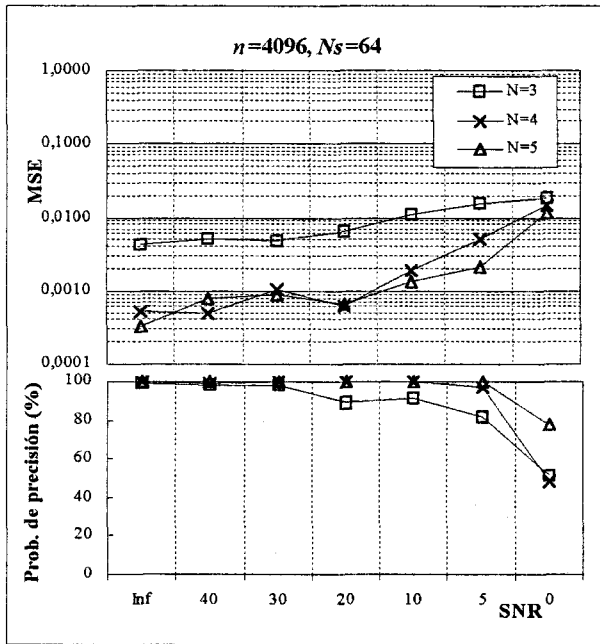
V.3.2. Señal $x_1(n)$.

Para los resultados de esta señal se va a tomar directamente la matriz Cx que queda de imponer la condición de hermiticidad, sin tratar el resto de las opciones, que se han desechado por distintos motivos, a la luz de los resultados de la señal anterior.

En las siguientes figuras se presentan los resultados que el método proporcionan para esta señal y en condiciones similares a las estudiadas en la señal $x_2(n)$; es decir, se comparan los resultados para $N=1,2,3$, para $n=1028$ y $n=4096$ y para $N_s=64$ y $N_s=512$.

Figuras 5.94-97. MSE y probabilidad de precisión para distintos N , n y distinta segmentación de los datos.





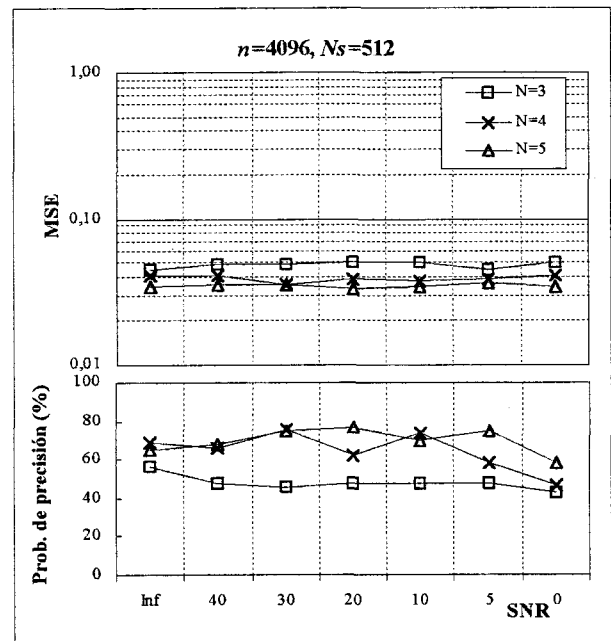
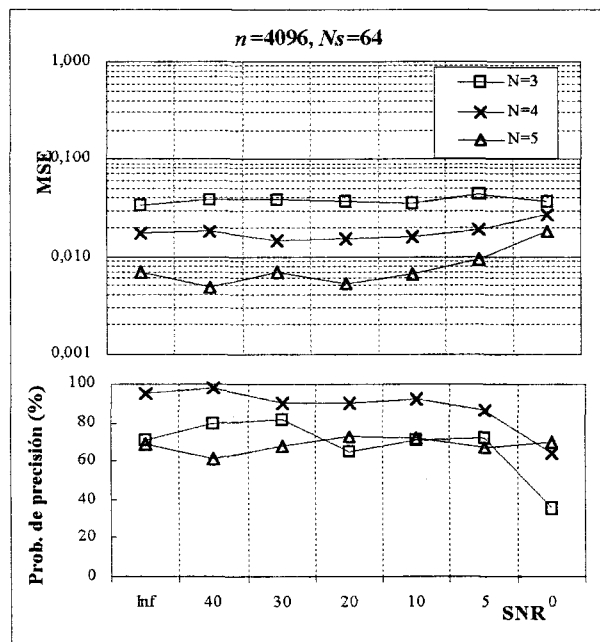
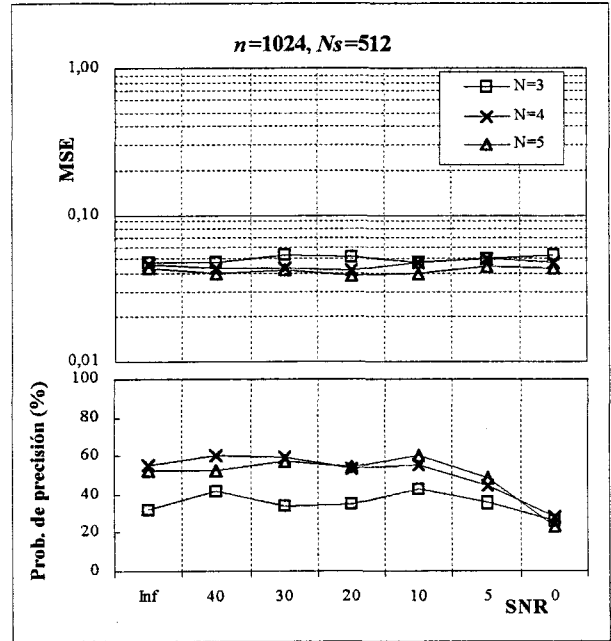
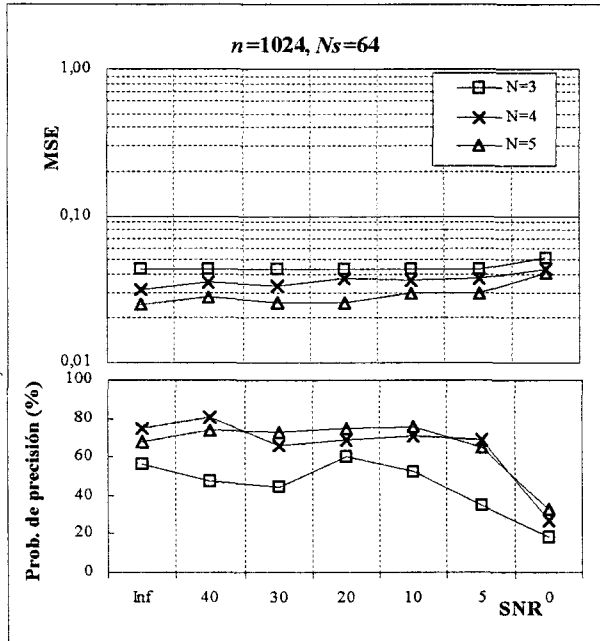
Si se comparan los resultados obtenidos son significativamente mejores que los que se consiguieron para la señal $x_2(n)$, tanto en probabilidad de precisión como en MSE. El aumento de N es un factor bastante más importante, consiguiéndose un 100% de probabilidad de precisión para $n=4096$ y $Ns=512$, así como un MSE bajísimo. Se hace mucho más evidente los excelentes resultados que se obtienen con este método, sobre todo si se comparan con los obtenidos con los métodos AR, sin necesidad de realizar las complejas consideraciones sobre polos espúreos, ordenes del modelo y medias de espectros que eran necesarias realizar en el desarrollo de los métodos AR.

V.3.3. Señal $x_3(n)$.

En este apartado se estudiará como se comporta este método ante la presencia de frecuencias relacionadas armónicamente, pero no acopladas en fase, lo cual ya se ha visto que presenta la señal $x_3(n)$.

En las siguientes figuras se presentan los resultados de aplicar el método en esta señal, para los mismos ordenes de las matrices, mismo números de datos y misma longitud de segmentos que en las señales anteriores.

Figuras 5.98-101. MSE y probabilidad de precisión para distintos N , n y distinta segmentación de los datos.



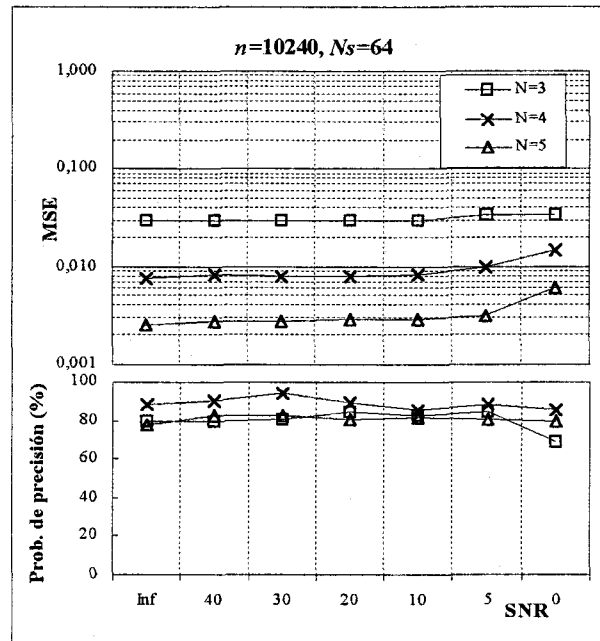
El empeoramiento respecto de la existencia de un único acoplo es claro. Disminuye importantemente la probabilidad de identificación, así como el MSE, respecto de los resultados que se obtienen para un único acoplo.

Es importante notar como el orden N no siempre el que mejores resultados proporciona, lo que puede apreciarse claramente en la figura 100, en la que la probabilidad de precisión para $N=4$ es mejor que para $N=5$, aunque con el MSE suceda al contrario.

Puede verse como un aumento en la longitud de los segmentos empeora fuertemente los resultados obtenidos, tanto en la probabilidad de precisión como en el valor de los MSE. Esto se aprecia más claramente para $n=4096$, lo era de esperar debido a la disminución en el promedio, necesario en las señales no ergódicas, que representa el aumento de la longitud de los segmentos.

Aunque los resultados son significativamente peores que los obtenidos para las señales con únicamente un acoplo, los resultados presentados en la figura 5.100. son más que aceptables.

Si se aumenta aún más el número de datos, y se mantiene la longitud de los segmentos a $N_s=64$, el promedio será significativamente mayor, lo que debe ir acompañado de una mejora de los resultados. Esto es lo que aparece en la figura 5.102, en la que los niveles de MSE son muy pequeños y las probabilidades de identificación superan el 80%. Aún así sigue presentandose $N=4$ como la que proporciona mejores probabilidades de precisión, por encima del 90%.



V.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha estudiado el comportamiento de los métodos AR y el método de ESPRIT, desarrollados en el capítulo IV. Para eso se han estudiado tres señales distintas, dos de ellas únicamente con un acoplo y la tercera con un acoplo y cuatro frecuencias no acopladas relacionadas armónicamente.

Se han presentado los resultados de los métodos AR para las señales. Inicialmente se ha procedido a un estudio cualitativo de los espectros que se obtienen con los conjuntos de ecuaciones de frecuencias y de suma. Posteriormente se ha establecido una comparación

cuantitativa de los métodos. Para poder realizar esto se ha tenido que definir no sólo un MSE, sino también otro parámetro llamado probabilidad de precisión. Este parámetro se hace necesario para dar cuenta de las veces que los métodos se equivocan en la identificación de los polos correctos de la función de transferencia, mientras que el MSE se calcula sobre las identificaciones correctas de los polos.

Se ha estudiado como afecta la segmentación, el orden del modelo AR y el aumento en el número de datos al valor de los parámetro de caracterización. Se ha podido comprobar como el orden del modelo AR es el factor más determinante en el comportamiento de los métodos, siendo su aumento el mejor camino para mejorar las estimaciones. Sin embargo, este aumento lleva consigo la aparición de picos espúreos, lo que produce que no se puede aumentar indefinidamente para mejorar las estimaciones.

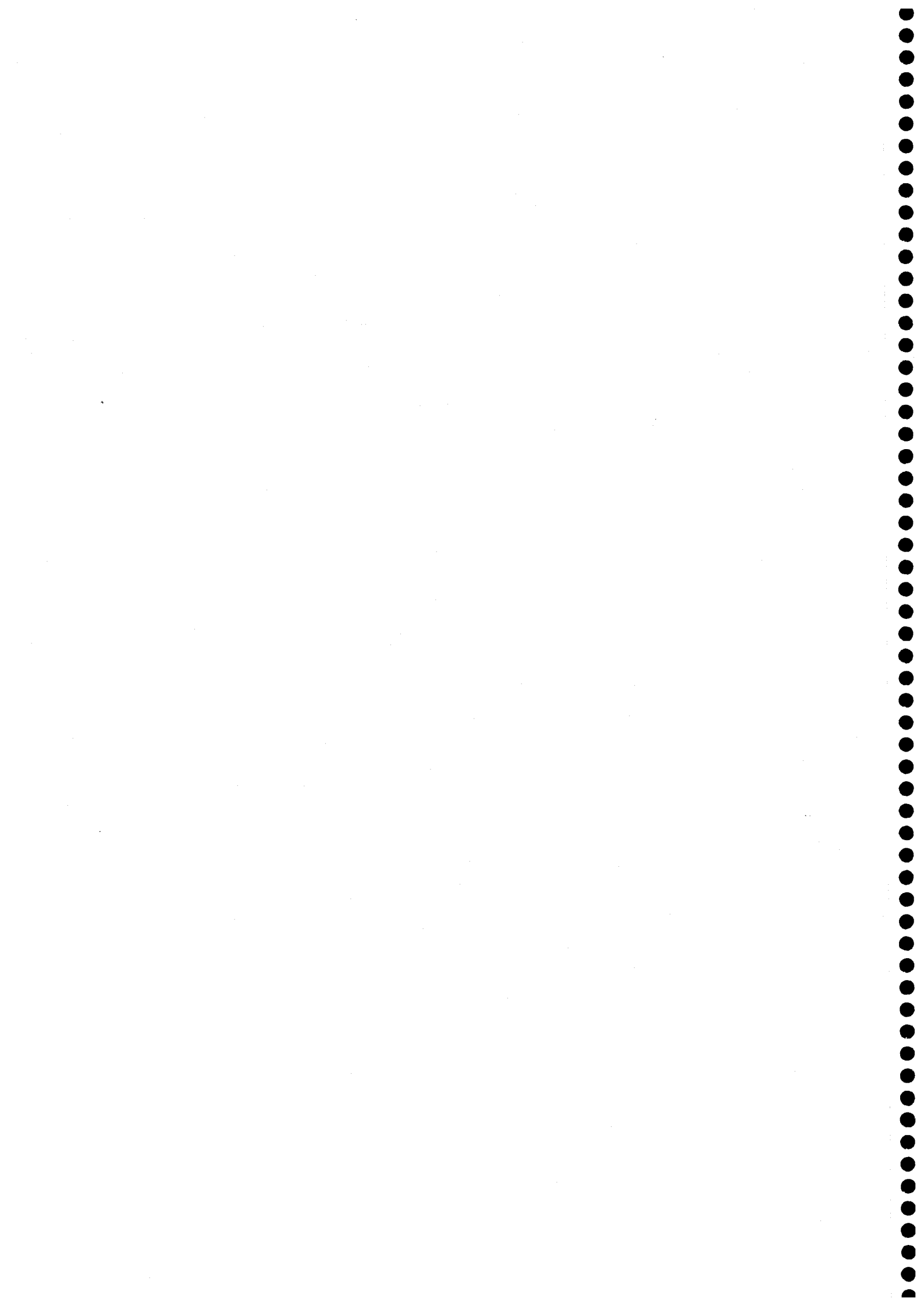
En las señales con únicamente un acoplo, los métodos no recursivos han presentado mejor resolución y mejor probabilidad de precisión, sobre todo el método LS. Los métodos recursivos presentan menor resolución y una mayor varianza, siendo el método RCM significativamente mejor que el de Levinson en sus estimaciones. Se ha indicado el promedio geométrico de los espectros como una posible herramienta en la que la varianza que presentan los métodos recursivos se aprovecha para eliminar la contribución de los picos espúreos.

En las señales con un acoplo y cuatro frecuencias no acopladas relacionadas armónicamente, el comportamiento de los métodos empeora notablemente. El método LS, que se ha presentado como el que mejores estimaciones presenta para un acoplo, es el menos sensible a la diferencia que existen entre las frecuencias; de forma que, aunque presenta gran resolución y poca varianza, no distingue adecuadamente las frecuencias acopladas de las que no lo están, siendo el método en el que menos influye el promediado en segmentos independientes. El resto de los métodos recursivos presentan las mismas propiedades que el método LS, pero menos acusadas. Por su parte el método RCM sigue presentando menos resolución y más varianza, pero es el que mejor distingue los tipos de frecuencias, siendo más sensible al promediado en segmentos independientes. Se establece un procedimiento para detectar y localizar los acoplos, discriminándolos de las frecuencias no acopladas, en el que se requiere tanto el método RCM como métodos no recursivos.

Para el comportamiento del método de ESPRIT se han tratado las mismas tres señales que en el caso de los métodos AR.

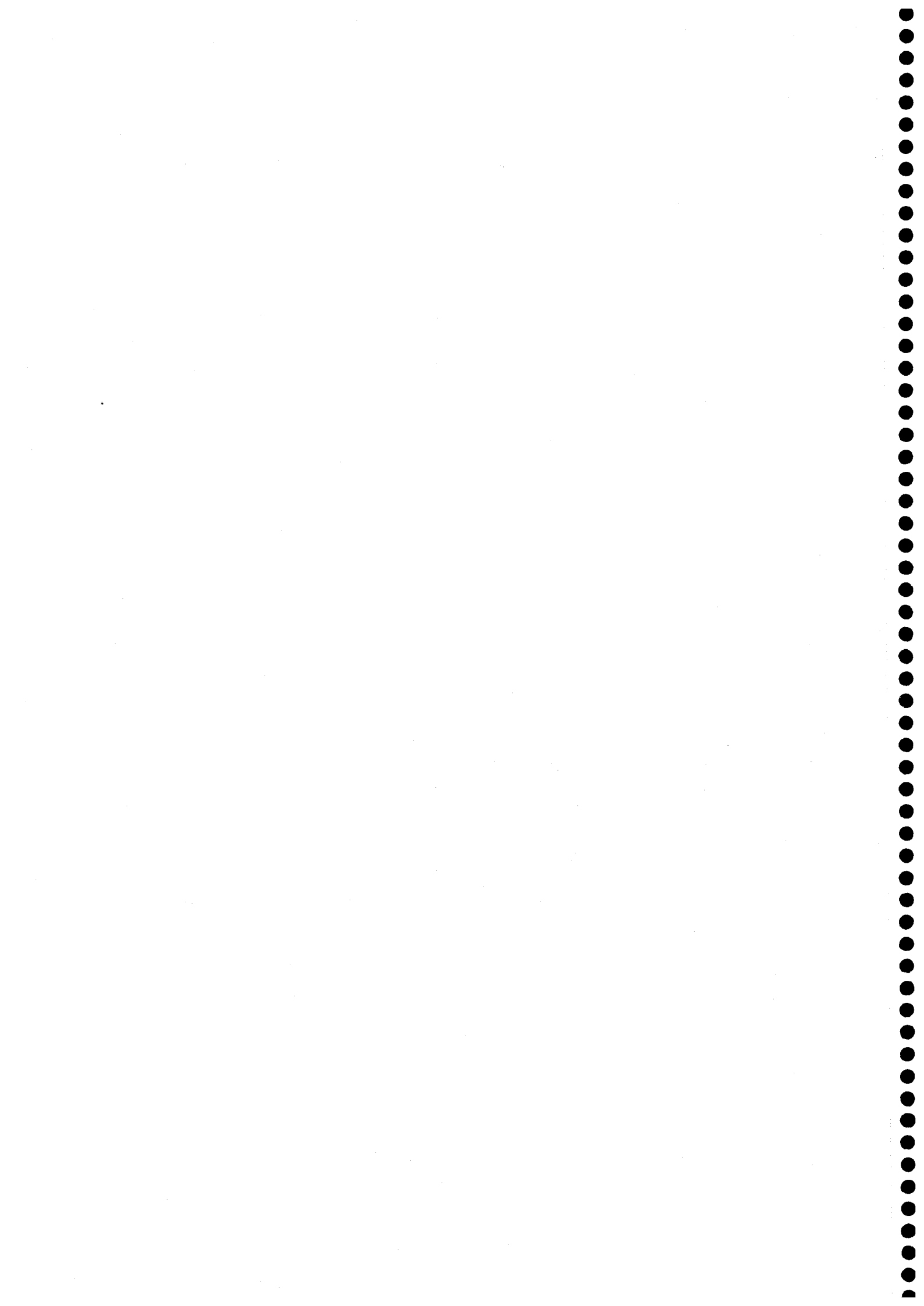
En primer lugar se han estudiados las distintas condiciones que se pueden imponer sobre las matrices que utiliza el método y los resultados que la imposición de estas condiciones poseen en los resultados finales. Un vez hecho esto se ha optado por imponer únicamente ergodicidad, aunque para el menor orden de las matrices se pueden imponer condiciones más sofisticadas que mejoran los resultados. Estas condiciones se han rechazado en general debido a que la complejidad de cálculo que representa no está justificada por la escasa mejora.

El método de ESPRIT ha presentado resultados excelentes en la detección de las frecuencias para las señales que sólo poseen un acoplo, significativamente mejores que los métodos AR. Sin embargo, para la señal con un acoplo y cuatro frecuencias no acopladas pero relacionadas armónicamente, los resultados no han sido tan satisfactorios, presentando estimaciones del mismo orden que las de los métodos AR.



CAPÍTULO VI

ESQUEMAS DE IDENTIFICACIÓN Y DISCRIMINACIÓN DE BLANCOS DE RADAR



VI.1. INTRODUCCIÓN

La discriminación de blancos de radar, en su forma más primitiva, es un problema electromagnético inverso en el que se persigue la determinación de la geometría y la composición de un blanco a partir del campo electromagnético dispersado por este. En realidad, el problema así planteado es irresoluble, ya que para una perfecta determinación geométrica y de composición haría falta una cantidad de información infinita, que consistiría en la respuesta dispersada por el blanco a todas las frecuencias y bajo todos los ángulos de observación.

En la práctica el problema se simplifica, ya que no se pretende una reconstrucción completa del blanco, sino más bien una discriminación eficaz del blanco que se encuentre presente de entre todos los blancos de un determinado conjunto, que se denomina librería. Según esta reformulación del problema de discriminación de blancos de radar, éste consistirá en la extracción, a partir del campo electromagnético dispersado por el blanco, de parámetros ligados a la geometría y a la composición y que lo identifiquen o discriminen unívocamente dentro del conjunto total de blancos de la librería [MES84]. Así, para la clasificación de una gran variedad de blancos no se requiere más que un pequeño número de parámetros, por ejemplo la sección equivalente de radar (RCS)¹.

Los principales problemas que se presentan en la discriminación de blancos de radar son la presencia de ruido en el campo electromagnético dispersado, debido a multitud de posibles causas, y la dependencia de los parámetros característicos con la orientación relativa del blanco a identificar. Esto último produce que haya que realizar la determinación paramétrica para todas las posibles orientaciones, lo que dificulta enormemente el proceso.

Todos los esquemas de identificación intentan salvar, de una u otra manera, estos problemas, minimizándolos al máximo. Pero ha sido en las dos últimas décadas cuando han aparecido técnicas más eficaces basadas en el desarrollo del método de expansión en singularidades o SEM descrito en el apéndice peich. A continuación se realizará un breve resumen de los métodos de identificación de blancos de radar, con el fin de englobar dentro de un marco general las técnicas basadas en pulsos de extinción (E-pulso) con el que se va a tratar en los capítulos siguientes.

Los esquemas de discriminación que han aparecido en los últimos años y que se describirán en este capítulo, pueden clasificarse en dos grupos fundamentales:

- 1º) Aquellas que se basan en la matriz de dispersión del blanco o matriz de "scattering", descritas en la sección VI.2
- 2º) Aquellas basadas en la respuesta del blanco en el dominio de la frecuencia o en el tiempo, cuyo estudio se realiza en la sección VI.3. Dentro de este grupo podemos distinguir tres tipos generales de técnicas:

¹ La RCS de un blanco se define como el área de un blanco equivalente que radie isotrópicamente la misma densidad de potencia por unidad de ángulo sólido que el blanco original.

a) Las basadas en obtener la respuesta a determinadas excitaciones y examinan el contenido en frecuencia de ésta (sección VI.3 (a)).

b) Las basadas en la extracción de las resonancias naturales y en la comparación de éstas para identificar blancos (sección VI.3 (b)).

c) Las basadas en el diseño de ondas discriminantes sintetizadas para identificar una respuesta específica del blanco entre un conjunto de respuesta (sección VI.3 (c)). Dentro de este grupo se encuentran el pulso de aniquilación (K-pulso), el pulso de extinción (E-pulso), las técnicas de optimización y los filtros de aniquilación de resonancias (FAR).

Entre estos dos grupos fundamentales son aquellas basadas en el estudio de la respuesta del blanco en el tiempo, es decir el grupo segundo, y entre éstas, las basadas en el diseño de ondas discriminantes, las que se han mostrado más exitosas en la discriminación y en la superación de los problemas asociados a la contaminación con ruido y a la sensibilidad con la orientación del blanco. Debido a que en este último grupo se encuentran las técnicas E-pulso de cuyo estudio trata esta tercera parte de la memoria, se llevará a cabo una descripción más detallada de este grupo de técnicas. Así, en la sección VI.4. nos ocuparemos del pulso de extinción ó E-pulso, en la sección VI.5. de las técnicas de optimización y en la sección VI.6. describiremos la síntesis de los filtros de aniquilación de resonancias, así como su uso en la discriminación de blancos de radar.

A continuación, pues, se describen brevemente, siguiendo la clasificación del apartado anterior, los fundamentos de las técnicas de identificación más recientes así como las características, ventajas e inconvenientes que presentan en la discriminación de blancos, deteniéndonos con más detalle en las basadas en el uso de pulsos de extinción, de los que son objeto esta tercera parte de la Memoria.

VI.2. TÉCNICAS DE POLARIZACIÓN

El primer grupo de técnicas de discriminación de blancos de radar son, siguiendo la clasificación dada en la introducción, las técnicas de polarización. Se basan en la matriz de dispersión del blanco. El campo eléctrico dispersado \vec{E}^s por un conductor perfecto se puede relacionar con el campo eléctrico incidente \vec{E}^i de la forma:

$$\vec{E}^s = \mathbf{A} \cdot \vec{E}^i \quad (6.1)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de dispersión (de dimensión 2) del blanco. Esta matriz de dispersión \mathbf{A} describe los cambios de polarización entre la onda incidente y la dispersada por el blanco [KEN52] y es función de la frecuencia de operación y de la orientación del blanco. Estos cambios de polarización se utilizan como parámetro de identificación y discriminación. Estas técnicas presentan el inconveniente de que la reconstrucción de la matriz de dispersión es

impracticable, ya que se requerirían medidas en un número infinito de estados de polarización. Esto llevó a la búsqueda y desarrollo de nuevos parámetros relacionados con estos cambios de polarización. Uno de ellos se basa en que cualquier blanco puede caracterizarse por sus "polarizaciones nulas", que son aquellos estados para los cuales la onda dispersada tiene polarización ortogonal a la antena transmisora, y para las cuales el blanco se hace invisible (estas polarizaciones corresponden a los autovectores de la matriz de dispersión A). Otra característica de discriminación mediante la técnica de las polarizaciones es la contraria a la anterior y recibe el nombre de "polarizaciones óptimas" [MIE83].

Uno de los mayores problemas que presenta este grupo de técnicas es su extremada dependencia y sensibilidad con la orientación del blanco.

VI.3. TÉCNICAS BASADAS EN LA RESPUESTA EN FRECUENCIA

El segundo gran grupo de técnicas de discriminación de blancos de radar son las técnicas basadas en la respuesta del blanco a una excitación dada. En él se pueden distinguir tres tipos:

VI.3.(a) Técnicas basadas en la medida de la respuesta en frecuencia a determinadas excitaciones.

Entre estas se encuentran:

(1) *Medidas a múltiples frecuencias.*

La componente del campo eléctrico dispersado en la dirección del campo eléctrico incidente a grandes distancias del blanco conductor se puede escribir como [REP75]:

$$E^s = \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{2\sqrt{\pi r}} G(j\omega) E^i \quad (6.2)$$

donde k es el número de ondas y $G(j\omega)$ es la respuesta en frecuencia del blanco para una orientación dada. La función $G(j\omega)$ determina unívocamente al blanco y por tanto puede utilizarse para su discriminación. Sin embargo el primer problema que se presenta es que $G(j\omega)$ es prácticamente imposible de reconstruir, ya que se requeriría medir el campo dispersado a un número infinito de frecuencias. Lo que se puede hacer es una aproximación de la misma, con un número menor de frecuencias de medida, cuidadosamente elegidas. Si la respuesta del blanco a estas frecuencias depende únicamente de su geometría, entonces la amplitud de la onda dispersada a estas frecuencias puede utilizarse como conjunto de parámetros de discriminación del mismo.

Es importante decidirse sobre un acertado rango de frecuencias de medida. El rango adecuado será aquel en que el blanco (su geometría) esté mejor y más completamente caracterizado. En este sentido habrá que tener en cuenta que las altas frecuencias caracterizarán mejor los detalles finos del blanco, mientras que las bajas lo harán sólo de la

forma volumétrica del mismo. Obtenido un buen rango de trabajo [LIN81], se han hecho clasificaciones de blancos de estructura simple, mediante las amplitudes del campo dispersado a un número discreto de frecuencias dentro de dicho rango.

Esta técnica presenta considerables limitaciones de tipo práctico. La primera de ellas es la necesidad de utilizar radares multi-frecuencia, a causa de lo cual se ha puesto mucho énfasis en minimizar el número de frecuencias requeridas para la discriminación. Para ello se han empleado la fase y polarización de la onda dispersada como características adicionales de discriminación. Otra importante limitación es la dependencia de la respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ con la orientación del blanco. Este problema se acentúa si se introduce la polarización de la onda dispersada como parámetro de discriminación.

(2) *Respuesta rampa.*

Una interesante característica del blanco, que lo describe de forma única, y por tanto se puede utilizar como parámetro de discriminación, es su respuesta a una rampa como onda incidente o *respuesta rampa* [KEN65] y [YOU76]. En el dominio de la frecuencia la respuesta a la señal rampa puede escribirse como:

$$F(j\omega) = \left(\frac{1}{j\omega} \right)^2 G(j\omega) \quad (6.3)$$

donde $G(j\omega)$ es la respuesta del blanco a la frecuencia ω . Utilizando las propiedades de la Transformada de Fourier, la respuesta rampa en el dominio del tiempo puede escribirse en términos de la segunda integral de la respuesta impulso del blanco.

$F(j\omega)$ se aproxima mediante medidas a diferentes frecuencias para un rango adecuado que describa lo más completamente posible las características del blanco. Si esto se hace, es posible construir la imagen del este. La discriminación puede llevarse a cabo mediante la comparación de esta imagen con las de blancos conocidos. Sin embargo la construcción de una imagen del blanco consume mucho tiempo y requiere la medida de la respuesta rampa (aproximada) para tres ángulos de orientación ortogonales [YOU76]. Por ello es más conveniente discriminar al blanco mediante la comparación directa de la respuesta rampa de éste con la del blanco conocido, es decir la característica de discriminación será la propia respuesta rampa, en lugar de la imagen del blanco. Es por ello que esta técnica tiene todas las limitaciones del método anterior, especialmente la sensibilidad con el ángulo de orientación.

(3) *Respuesta rampa basada en las resonancias naturales del blanco.*

El grave problema de la sensibilidad de los métodos de discriminación con la orientación puede reducirse introduciendo el concepto de resonancias naturales del blanco en la comparación de la respuesta rampa, ya que como se vio en el primer capítulo estos modos naturales son independientes de la orientación del blanco.

Se puede demostrar [COR65] que la respuesta rampa de cualquier sistema lineal obedece a una ecuación en diferencias de la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} A_{m,n} f(t-n\Delta T) \quad (6.4)$$

donde $f(t)$ es la respuesta y los coeficientes $A_{m,n}$ están definidos a través de relaciones apropiadas que dependen del número de frecuencias naturales del sistema, m como [MOF75]:

$$\prod_{n=1}^m (s + e^{s_n \Delta T}) = s^m + \sum_{n=1}^m A_{m,n} s^{m-n} \quad (6.5)$$

donde s_n son las resonancias naturales del blanco. Estas resonancias naturales, como se concluye el análisis del SEM, desarrollado en el Apéndice A, poseen la interesante propiedad de que no dependen de la orientación relativa del blanco, siendo función exclusivamente de su geometría. Por tanto, al hacer uso de ellas, se está resolviendo el problema de la dependencia en la orientación del blanco respecto de la antena emisora.

En este caso la discriminación del blanco se basa en el siguiente esquema. A partir de N medidas de $G(j\omega)$, se aproxima la respuesta rampa del blanco desconocida mediante la expresión:

$$F_R(t) = K \sum_{n=1}^N \frac{G(n\omega_0)}{n^2} \cos(n\omega_0 t + \varphi(n\omega_0)) \quad (6.6)$$

donde K es constante. Para el blanco conocido (del cual debemos conocer m resonancias naturales) se halla la respuesta rampa a través de la expresión (6.4). Comparando la respuesta rampa aproximada para el blanco desconocido con la del blanco conocido, a través de unos parámetros adecuados [MOF75] se puede identificar o discriminar el blanco. En la práctica la respuesta rampa reconstruida para el blanco conocido es solamente aproximada a causa de que sólo se pueden utilizar un número finito de resonancias.

Esta técnica se ha utilizado para estructuras sencillas y modelos por hilos de aviones, para las cuales se han obtenido teóricamente las frecuencias naturales mediante un análisis SEM. Lógicamente el modelado introduce errores y diferencias sustanciales con la experiencia.

Mejoras en la discriminación se han obtenido empleando el siguiente procedimiento. En lugar de modelar el blanco para obtener las resonancias a través del análisis SEM, se usa un proceso menos complicado y teórico. En primer lugar, la respuesta en frecuencia del blanco se obtiene (para una orientación concreta) numéricamente para un número discreto de frecuencias de medida. Conocida la respuesta en frecuencia, puede usarse para calcular de forma aproximada la respuesta rampa a través de (6.6). Finalmente las resonancias naturales dominantes de la respuesta rampa pueden obtenerse con el método de Prony [CHU76]. Este esquema de discriminación ha sido utilizado incluso para estructuras complejas de aviones a escala [CHU76].

Sin embargo a pesar de que esta técnica ha reducido el problema de la sensibilidad con la orientación del blanco, sigue presentando algunos inconvenientes. El método es complicado en su realización y sensible a la elección del ΔT en la ecuación (6.4). Además hacen falta suficientes valores de $G(j\omega)$ para obtener una discriminación adecuada, haciéndose necesario un sistema de radar multi-frecuencia.

VI.3.(b) Técnicas basadas en la comparación de resonancias naturales.

El camino más directo para utilizar las resonancias naturales en un esquema de discriminación es realizar una comparación directa de las mismas. La base del SME es que la respuesta dispersada por un blanco conductor en el periodo de tiempo que se conoce como *late-time*, que se establece desde que la onda incidente ha atravesado completamente el blanco hasta la total desexcitación de éste, se modela adecuadamente como la suma discreta de exponenciales, cuyas frecuencias complejas se conocen como resonancias, frecuencias o polos naturales del blanco y dependen exclusivamente de su geometría. A través del análisis de la respuesta dispersada por el blanco en el *late-time* se pueden obtener las resonancias naturales del blanco, las cuales se comparan con las de una librería de blancos conocidos o blancos patrón, de tal forma que el blanco desconocido se identifica o se discrimina. Esta técnica presenta ya de entrada una mejora sustancial respecto de métodos anteriores, ya que por un lado es independiente de la orientación del blanco, y además no precisa de un radar multi-frecuencia. Sólo será necesario excitar al blanco con una onda que contenga energía en el rango de las frecuencias naturales del blanco desconocido.

Por tanto en este esquema el problema se reduce a la extracción de las resonancias naturales en la región del *late-time* de la respuesta del blanco.

Son muchos los esquemas de extracción de polos de una señal temporal. Los tradicionalmente utilizados están basados en el método de Prony. Uno de los graves problemas que restringe el uso del método de Prony para la discriminación es la sensibilidad del método a la presencia de ruido en la respuesta del blanco. En este sentido se han hecho mejoras introduciendo variantes en el mismo, como la del método de Prony extendido [GOM86]. Otros problemas son los derivados de una mala estimación del número exacto de modos naturales contenidos en la respuesta, además de todos los problemas generales relacionados con el tratamiento de señales discretas en el tiempo (*aliasing*, *leakage*, uso de ventanas, etc.).

Como alternativa han surgido numerosos métodos de extracción de polos, entre los que cabe destacar el "*Pencil of-function method*" [HUA90], y los basados en la descomposición en valores singulares [KUM82]. Todos estos métodos tratan de eliminar la sensibilidad con el ruido que contamina la respuesta del blanco. Sin embargo, estos métodos tienen una limitación en la cantidad de ruido que contamina la onda dispersada por el blanco. Para valores de la relación señal-ruido bajas (alto porcentaje de ruido en la señal), la estimación de los polos exactos de la señal falla, haciendo imposible la discriminación entre blancos de estructura parecida.

VI.3.(c) Técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes.

El último tipo de esquemas de discriminación que usan la respuesta del blanco a una determinada excitación, tienen una filosofía completamente distinta a los anteriores. En lugar de analizar la señal respuesta del blanco en términos de sus modos naturales, estos esquemas se basan en la síntesis de formas de ondas de excitación para que la respuesta del blanco cumpla una serie de especificaciones preestablecidas.

Estas ondas de excitación en el dominio del tiempo se construyen de tal forma al convolucionarse con la respuesta del blanco para las cuales están diseñadas, lo que sucede en el proceso de dispersión, se aniquila un contenido de frecuencias naturales preseleccionado de

dichas respuestas. Al producirse esto, si el blanco que se quiere identificar es el blanco a partir de cuyas frecuencias naturales se ha construido la onda discriminante, el resultado será una respuesta dispersada nula, en la región del *late-time*. Estas frecuencias naturales, independientes de la excitación, pueden medirse en el laboratorio en un ambiente óptimo (sin ruido ni ecos) usando blancos modelados a escala, por lo que se puede disponer de ellas en caso de que sean necesarias para sintetizar las ondas discriminantes. Este tipo de esquemas tiene la ventaja sobre los anteriores de aunar la independencia del ángulo de orientación de la excitación con una menor sensibilidad al ruido, al determinarse las frecuencias naturales en un ambiente óptimo. Las técnicas basadas en el diseño de ondas discriminantes en la última década son:

- 1°) El pulso de aniquilación (K-pulso).
- 2°) El pulso de extinción (E-pulso).
- 3°) Técnicas de optimización.
- 4°) Los filtros de aniquilación de resonancias (FAR).

Dada la importancia de este tipo de técnicas y su estrecha relación con los pulsos de extinción de los que trata esta parte de la Memoria, se estudiarán brevemente cada una de estas técnicas por separado.

VI.4. EL PULSO DE EXTINCION (E-PULSO)

El concepto de pulso de extinción (E-pulso) fue introducido por Rothwell y colaboradores en 1985 [ROT85a] quienes propusieron un esquema de discriminación de blancos de radar basado en las oscilaciones naturales que presenta la respuesta de un blanco conductor en la región *late-time*.

La técnica de los pulsos de extinción tiene como precursora a otra más antigua, basada igualmente en el diseño de ondas discriminantes, que fue introducida por Kennaugh en 1981 [KEN81] denominada técnica de los pulsos de aniquilación (K-pulso). Un K-pulso se define como una onda de excitación de duración mínima, limitada en el tiempo, que cuando interaccionan con un blanco de radar produce una minimización de la respuesta del mismo. Con esta definición, la discriminación se basa en la correspondencia unívoca que existe entre un K-pulso y un blanco particular, de tal forma que la excitación de un blanco distinto a aquel para el que se sintetizó el K-pulso producirá una respuesta mayor.

Kennaugh construyó K-pulsos aproximados basándose en consideraciones geométricas. Su intención era aproximar las resonancias de un blanco usando la geometría propia de cada blanco, ya que las resonancias sólo dependen de ésta, pero no utilizaba directamente las frecuencias naturales. Sin embargo esta es una tarea muy complicada para hacer sistemáticamente. Un esquema más apropiado sería aquel que usara las frecuencias de resonancia del blanco directamente en la síntesis de tales ondas, de forma que una vez obtenidas éstas se construyera una onda discriminante específica para cada blanco. Así surgió la técnica del pulso de extinción (E-pulso) de la que nos ocuparemos en este apartado.

Un E-pulso se define como una onda de excitación, transitoria, de duración finita T_e ,

que aniquila o extingue la contribución de un número m preseleccionado de frecuencias complejas o modos. Así, la respuesta dispersada por un blanco conductor $r(t)$ resulta ser:

$$r(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si hay } m \text{ modos extinguidos} \\ \sum_{\substack{\text{modos no} \\ \text{extinguidos}}} A_n e^{\sigma_n t} \cos(\omega_n t + \phi_n) & \text{si hay } m' < m \text{ modos extinguidos} \end{array} \right\} \quad \forall t > T_L + T_i \quad (6.7)$$

donde T_L es la duración del *early-time*, es decir, el tiempo que tarda la onda incidente en atravesar el blanco.

El conjunto de modos para los cuales se va a anular su contribución se elige como las frecuencias naturales de un determinado blanco, de forma que se construirá un E-pulso para cada blanco de la librería, haciendo uso de sus frecuencias naturales. Según esta definición y puesto que las frecuencias naturales del blanco son independientes de la excitación, el E-pulso eliminará los modos deseados del blanco independientemente de la orientación del blanco con respecto a la antena transmisora o receptora. El conjunto de frecuencias naturales del blanco determina unívocamente su geometría, por lo que dos blancos de geometrías distintas no pueden tener todas las frecuencias naturales iguales. Aunque el número de resonancias naturales de cualquier blanco es infinito, basta trabajar con un intervalo finito de frecuencias de forma que los modos naturales que caigan dentro de él sean suficientes para discriminar entre los blancos de la librería, es decir, los conjuntos de frecuencias naturales sean distintos entre los blancos de la librería. Esto es suficiente ya que es esta discriminación y no una completa reconstrucción lo que se está buscando.

De esta forma, si el E-pulso construido para un determinado blanco excita este blanco, el campo dispersado en el *late-time* será nulo, ya que la onda incidente no lleva contribución energética en las frecuencias naturales de ese blanco. Por otro lado, si este E-pulso excita un blanco diferente, y por tanto con frecuencias naturales distintas, resulta un campo dispersado no nulo, permitiéndose así la discriminación de ambos. Desde un punto de vista espectral, mientras que la respuesta del blanco conocido (o blanco correcto) presentará muy poca energía en las frecuencias naturales de éste, la del blanco incorrecto presentará una gran energía sobre estas mismas frecuencias.

El E-pulso definido en (6.7) es una generalización del concepto del K-pulso definido por Kennaugh en 1981 [KEN81]. De hecho en [FOK87] se hace una comparación de ambos de tal forma que el E-pulso coincidirá con el K-pulso cuando el primero aniquile todas las resonancias y tenga duración mínima.

Otra cuestión de interés en este tipo de técnicas es que no es necesario excitar al blanco con un E-pulso con objeto de discriminarlo e identificarlo mediante esta técnica, lo que es técnicamente bastante complicado. Existe un procedimiento alternativo y más sencillo. Se usa cualquier otra onda de duración finita y ancho de banda adecuado como excitación, siempre que su contenido espectral sea tal que su respuesta contenga contribución en todos los modos naturales deseados del blanco, lo que dependerá del ancho de banda elegido. El E-pulso no es otra cosa que una señal en el tiempo cuya contribución espectral a las frecuencias naturales del blanco para el que se ha construido es nula. Por tanto, al convolucionar la señal temporal en

que consiste el E-pulso con la señal dispersada en el *late-time* para el blanco correcto, el resultado es nulo. Esto permite obtener resultados análogos a los que se hubieran obtenidos con la transmisión del E-pulso como onda incidente, por lo que no será necesario generar experimentalmente el pulso de extinción para su uso en la discriminación del blanco, sino simplemente hacer la convolución de la señal dispersada de una excitación sencilla con el E-pulso, lo que no es otra cosa que un proceso de filtrado. Se denominará esta manera de trabajar como E-pulso en el dominio de recepción, mientras que el primer procedimiento de transmitir el E-pulso como onda de excitación del blanco se conoce como E-pulso en el dominio de transmisión [ROT85]

Este último esquema es el que se desarrollará y estudiará en este capítulo, preocupándose en cómo conseguir de una manera fácil y sistemática los E-pulso para cada blanco, que en un esquema digital resultan un conjunto de filtros digitales. Una vez con estos filtros construidos se presentará un esquema de identificación basado en E-pulso que presentará mejores resultado que el esquema clásico.

VI.5. TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

Una de las técnicas mas recientes de discriminación de blancos de radar es el método de optimización [BAY90] desarrollado por Bayard y Schaubert en 1990. Se usa un planteamiento de partida diferente al E-pulso, basado en la maximización de la energía de la señal en un ancho de banda específico. En esta optimización la razón entre la energía del campo dispersado en un intervalo temporal T_0 (en la localización espacial x_0) y la energía total del campo eléctrico dispersado en x_0 se maximiza, es decir

$$\rho = \max \left(\frac{\int_{t_0}^{t_0+T_0} |\vec{E}^s(t, r_0, \theta_0)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}^s(t, r_0, \theta_0)|^2 dt} \right) \quad (6.8)$$

Para un ángulo apropiado de optimización θ_0 y de duración temporal T_0 , puede obtenerse una onda discriminante, independiente de la excitación. La elección de este ángulo apropiado está relacionada, dado un ancho de banda específico, con la presencia de modos naturales en dicho ancho de banda, aunque las resonancias naturales no necesitan ser conocidas a priori para sintetizar esta onda discriminante.

Los pasos que sigue el método de optimización para diseñar la onda discriminante son los siguientes:

- 1º) Seleccionar un ángulo de optimización para el cual todas las resonancias dentro del ancho de banda estén presentes.
- 2º) Elegir el intervalo temporal de optimización T_0 lo suficientemente grande para que ρ sea

casi la unidad para todas las orientaciones del blanco correcto.

3º) Maximizar ρ para obtener una onda óptima incidente. Esto quiere decir que la energía mínima fuera del intervalo T_0 es mínima, y por tanto se conseguirá una respuesta casi cero en el *late-time*. La maximización en el caso del hilo conductor lleva a una ecuación integral cuya solución está dada por las funciones de onda esféricas [BAY90] de orden cero restringidas al ancho de banda escogida de partida.

4º) Cambiar la orientación del blanco y verificar que la onda así obtenida produce una casi idéntica concentración de energía (ρ es independiente de la orientación).

Este método presenta la gran ventaja de no necesitar un conocimiento preciso de las resonancias naturales del blanco y además se comporta bien para niveles moderados de ruido aunque una reciente comparación con el método E-pulso muestra [BAY91] que éste último es más robusto al ruido que el método de optimización.

VI.6. EL FILTRO DE ANIQUILACIÓN DE RESONANCIAS (FAR)

El concepto de filtro de aniquilación de resonancias (FAR) fue introducido por Morgan [MOR88] como aquel sistema (filtro) lineal cuya salida, cuando se convoluciona con la respuesta dispersada del blanco para el que ha sido sintetizado, exhibe la más baja energía en el *late-time*. En el proceso de filtrado la respuesta electromagnética dispersada por un blanco desconocido, obtenida por la excitación de éste con una onda incidente $g(t)$, se convoluciona con la respuesta impulso del FAR $k(t)$ sintetizado a partir de las resonancias naturales de los blancos de la librería. Como puede verse es una idea similar al E-pulso en el dominio de recepción.

Por la teoría del SEM desarrollada en el apéndice A sabemos que el campo electromagnético dispersado $\vec{E}^s(r,t)$ ó $\vec{H}^s(r,t)$ puede desarrollarse en la forma (A.31)

$$y(t) = y_E(t) [u(t) - u(t - T_0)] + y_L(t) u(t - T_0) \quad (6.9)$$

donde $y(t)$ es el campo dispersado $\vec{E}^s(\vec{r},t)$ ó $\vec{H}^s(\vec{r},t)$, $y_E(t)$ es la componente 'early-time' de la señal de duración T_0 , y $y_L(t)$ es la respuesta dispersada en el 'late-time', constituida por una suma de sinusoides amortiguadas (A.36).

La respuesta del FAR $s(t)$ al campo dispersado $y(t)$ será la convolución de su respuesta impulso $k(t)$ con dicho campo dispersado

$$s(t) = k(t) * y(t) \quad (6.10)$$

Cuando se quiera discriminar entre un conjunto de M blancos, el proceso de decisión se basa en hacer pasar la señal dispersada por el conjunto de M FAR, sintetizados para cada uno de

esos blancos, y seleccionar como blanco correcto aquel cuya salida con el FAR correspondiente exhiba la mejor energía en el *late-time*, que corresponderá a una onda completamente aniquilada en el caso no ruidoso. Es decir se va computando para cada filtro representativo de un blanco conocido la energía de la respuesta del FAR, definida como:

$$\varepsilon_m = \int_{T_L}^{\infty} s_m^2(t) dt \quad \text{con } m = 1 \dots M \quad (6.11)$$

y se toma como blanco correcto aquel al que corresponda el FAR de energía mínima. En la ecuación (6.11) τ es el tiempo de comienzo del cómputo de la energía de salida, que debe ser suficientemente grande para excluir cualquier contribución del *'early-time'*, ya que el FAR está diseñado para cancelar exactamente un conjunto seleccionado de modos naturales, los cuales sólo aparecen en su forma pura en el *'late-time'*.

Teniendo en cuenta la discriminación, los criterios de diseño que se le exigen al FAR son [MOR88]:

- (1) No debe haber contribución del *'early-time'* (Apéndice A) de la señal. Esto implica que los filtros de aniquilación de resonancias han de ser de respuesta impulso finita (FIR). Tales filtros son no-recursivos y tienen una respuesta impulso que es cero más allá de un tiempo finito T_k . Esto implica que $T_L \geq T_0 + T_k$.
- (2) El rango de la integral de ε_m debe ser lo más amplio posible para tener la mayor cantidad de energía significativa en la región del *'late-time'* que es la que sirve para la discriminación (Apéndice A). Esto significa que debe minimizarse la duración de la respuesta impulso T_k .
- (3) La razón de energías entre el *'late-time'* del blanco correcto y el de otros blancos debería minimizarse sobre un rango de ángulos de orientación y polarizaciones de la onda.
- (4) Como la señal dispersada suele estar contaminada con ruido, tanto interno como externo a la antena receptora, el filtro debe minimizar la transferencia del ruido a través de él.

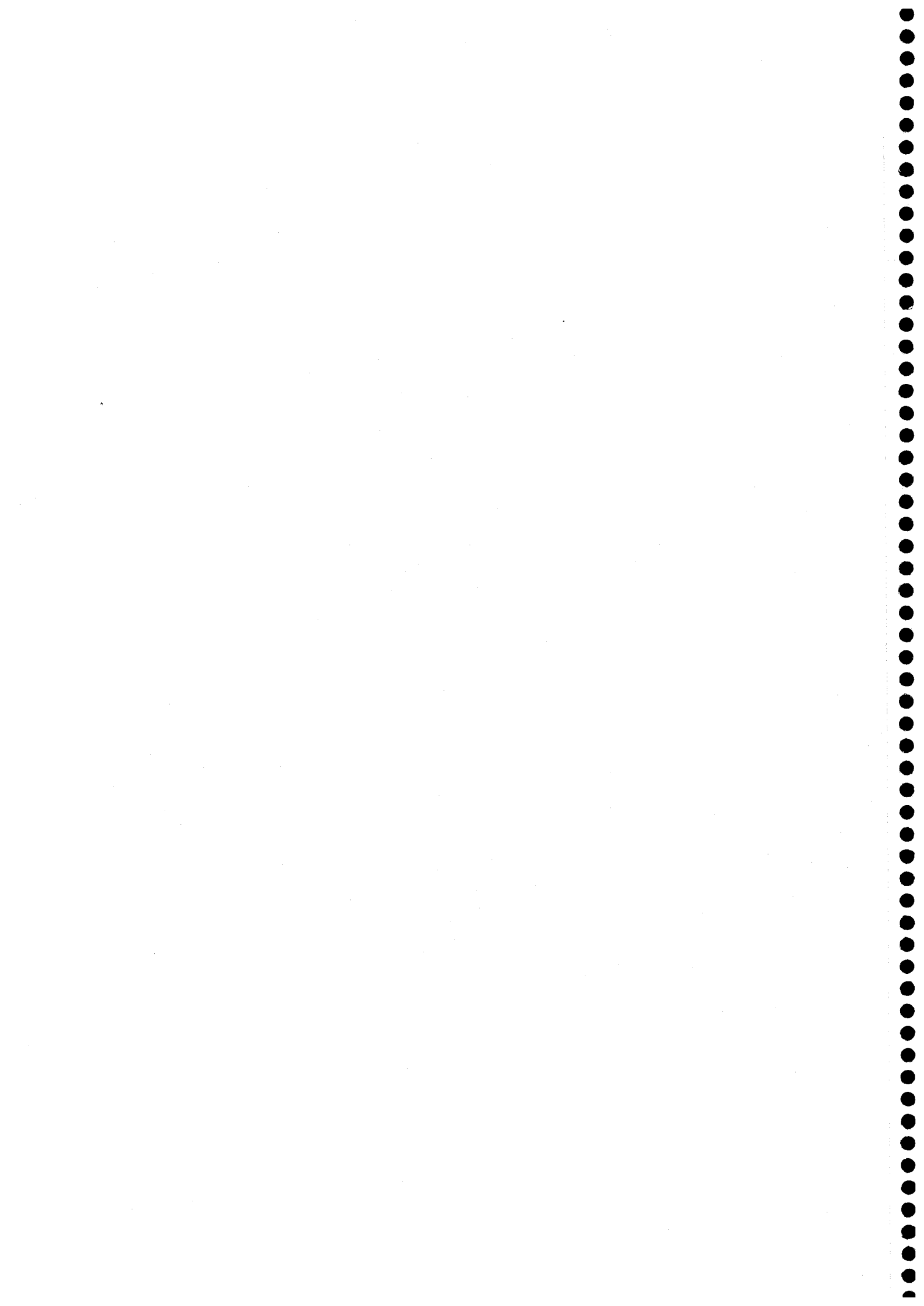
Algunos de estos criterios están en conflicto. Por ejemplo una eliminación efectiva del ruido requiere una integración de la señal a través de un filtrado FIR de suavizado de longitud dada, habiendo un conflicto entre (2) y (4). Por lo tanto habrá que llegar a un compromiso entre las distintas características para obtener un filtro óptimo. Teniendo éstas en cuenta el FAR puede sintetizarse usando técnicas analógicas o digitales.

La forma analógica del FAR se sintetiza a partir de la ecuación diferencial de segundo orden que cumplen cada uno de los modos naturales. Sin embargo en la práctica este procedimiento falla ya que, al intentar proporcionar consistentemente energías más bajas en el *late-time* para el blanco correcto, produce una excesiva amplificación de las altas frecuencias. Es esta forma de la transformada de Fourier de la respuesta impulso FAR analógica la que produce que cualquier error de redondeo o cualquier ruido presente en la señal se vea ampliamente amplificado y lleve a error en la identificación.

La forma digital está basada en la ecuación en diferencia que corresponde a la ecuación diferencial de los métodos analógicos. Al trabajar enteramente en métodos de procesado digitales de la señal se ha mostrado exitosa en los casos estudiados y suele ir acompañada de una etapa previa de suavizado de la señal, con el fin de minimizar los efectos de posibles ruidos aditivos. En el trabajo de [RUI95] se puede encontrar un detallado tratamiento de estas técnicas FAR.

CAPÍTULO VII

CONSTRUCCIÓN DE PULSOS DE EXTINCIÓN CON *SPLINES*: NUEVAS CONDICIONES E-PULSO



VII.1. INTRODUCCIÓN

Como ya se dijo en la introducción el esquema de identificación de blancos de radar E-pulso analiza la respuesta transitoria del campo dispersado por un blanco conductor haciendo uso de los resultados que proporcionan el método de expansión en singularidades (SEM), desarrollado en el apéndice A, el cual deduce que la respuesta en el *late-time* dispersado por un blanco conductor resulta ser la suma de exponenciales complejas de la forma:

$$r(t) = \sum_{i=1}^m A_i e^{s_i t}, \quad (7.1)$$

donde las frecuencias complejas s_i son las frecuencias, modos y resonancias naturales del blanco. Estas frecuencias poseen la propiedad de ser independientes de la orientación relativa del blanco respecto del emisor o el receptor, siendo función exclusivamente de la geometría del blanco. La información concerniente a la orientación y a la onda concreta con la que se ha excitado el blanco queda recogida en las amplitudes complejas A_i que acompañan cada sumando. El número entero m representa el número de frecuencias naturales del blanco y dependen del contenido espectral de la señal con la que se ha excitado, de forma que si la onda incidente no posee contribución a una determinada frecuencia natural del blanco, esta frecuencia no contribuirá a la repuesta en el *late-time*, es decir, no aparece en la sumatoria (7.1) al no haberse excitado dicho modo natural. El desarrollo teórico de esta técnica fue extensamente tratado por E.J. Rothwell [ROT85], así como un gran número de simulaciones donde se pone de manifiesto la gran utilidad práctica de este método.

El esquema concreto del E-pulso es el siguiente: para cada blanco de la librería se construye un pulso, es decir, una señal en el tiempo, que se usará como onda incidente y que no poseerá contribución a las frecuencias naturales de dicho blanco, siendo distinta de cero su contribución en el resto de frecuencias. Este planteamiento no es posible, en principio, ya que el número de frecuencias naturales de un blanco es infinito. Para poder trabajar en la práctica, lo que se hace es restringir el anterior esquema a un determinado ancho de banda en el espacio de la frecuencia. Elegido el ancho de banda, se construye un E-pulso para cada blanco de la librería, de forma que la señal E-pulso presente una contribución nula para todas las frecuencias naturales del blanco que queden dentro del ancho de banda y una contribución no nula para el resto de las frecuencias dentro de este ancho de banda.

En la elección del ancho de banda hay que tener en cuenta dos aspectos importantes. Primero, debe ser tal que las frecuencias naturales que caigan dentro de él permitan determinar unívocamente los blancos de la librería, lo que implica que no existan dos blancos en la librería con todas las frecuencias naturales iguales dentro del ancho de banda. Segundo, la contribución del resto de modos naturales que caen fuera del ancho de banda y por tanto no se anulan, no debe ser importante. Esto se debe a que no se va a imponer que el contenido en frecuencia del E-pulso para todas las frecuencias fuera del ancho de banda de estudio sea nulo, ya que eso impediría construir una señal E-pulso de longitud finita en el tiempo, aunque se deseará que

sea el mínimo posible para evitar la amplificación de las altas frecuencias.

De esta manera, al iluminar un blanco con un E-pulso, si el blanco presente es el blanco para el cual se ha construido el E-pulso, la respuesta dispersada en el *late-time* será nula. Por otro lado, si el blanco presente no es aquel para el que se ha construido el E-pulso, no se anularán todas sus frecuencias naturales, por lo que presentará una respuesta no nula en el *late-time*. Como se dijo en el capítulo anterior, a esta manera de trabajar se le llamará E-pulso en el dominio de la transmisión.

La síntesis de señales de formas determinadas y posiblemente complejas como ondas de radiación no es un problema sencillo, y que requiere un esfuerzo considerable en el diseño de antenas. Como ya se indicó, una alternativa sencilla y que proporciona idénticos resultados al de iluminar el blanco con la señal E-pulso es de trabajar en el dominio de la recepción. La primera etapa de esta forma de llevar a cabo el E-pulso es idéntica a trabajar en el dominio de la transmisión y consiste en la síntesis de los E-pulsos a partir de las frecuencias naturales del blanco. Pero en vez de iluminar el blanco con esta señal, se ilumina con una señal suave en el dominio de la frecuencia, con contribución espectral en todo el ancho de banda deseado, de forma que se exciten todos los modos naturales del blanco, dentro del ancho de banda. Por tanto, en el *late-time* la señal dispersada por el blanco será tal y como aparece en (7.1), con todos los modos excitados, dentro del intervalo de trabajo deseado. Si se hace convolucionar esta señal dispersada con la señal E-pulso se tiene que, si el blanco presente es aquel para el que se ha construido el E-pulso, el resultado de la convolución será una señal nula; mientras que si el blanco presente y aquel para el que se ha construido el E-pulso no coinciden, el resultado de la convolución no es nulo. Esto es fácil de ver si se tiene en cuenta que una convolución en tiempo implica un producto en el espacio de las frecuencias. De esta forma se obtiene los mismo resultados en trabajando con E-pulso en el dominio de la recepción que los obtenidos en el dominio de la transmisión, y sin necesidad de tener que transmitir al blanco excitaciones espectralmente complicadas.

Al trabajar con series de datos, la anterior convolución será una discreta y las señales

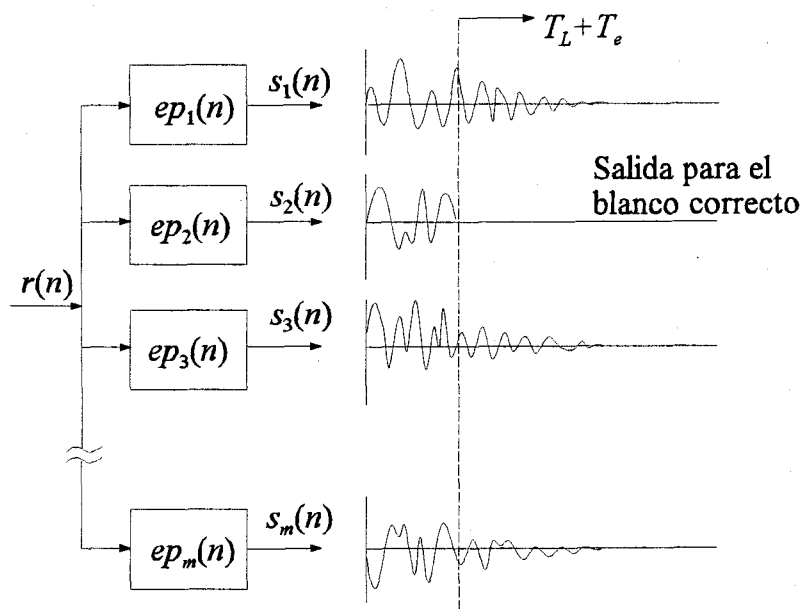


Figura 7.1. Esquema de identificación basado en E-pulsos.

E-pulso se pueden ver como filtros digitales, a través de los cuales se hace pasar la señal dispersada. En la siguiente figura 7.1. se representa este esquema. Puede verse como existen m canales por donde va a pasar la señal dispersada por el blanco desconocido $r(n)$. Cada uno de los canales corresponde a uno de los blancos de la librería y en ellos se realiza el filtrado con el correspondiente E-pulso, dando como salida del canal la señal ya filtrada.

Por tanto, partiendo de la señal $r(n)$, haciendola pasar por los m filtros E-pulsos $\{ep_i(n)\}_{i=1,\dots,m}$, correspondientes a los m blancos presentes, se consiguen m frecuencias de salida $\{s_i(n)\}_{i=1,\dots,m}$. El blanco presente será aquel cuyo canal presente una salida nula en el *late-time*. En el caso de la figura, el blanco desconocido será el blanco número dos. Por supuesto, esto sólo sucederá en una situación ideal en la que no haya errores en la construcción de los filtros E-pulso y, sobre todo, que no haya ruido.

En la práctica ninguna de las salidas de los distintos canales correspondientes a los distintos filtros E-pulso será nula, en el *late-time*, debido a errores en la construcción y a la existencia de ruido, por lo que debe elegirse como blanco verdadero aquel cuyo canal presente una menor energía de salida en el *late-time*.

Dado que la señal en el *late-time* decae como una exponencial amortiguada, el tiempo, y con ello el número de datos, donde la señal es significativamente distinta de cero es limitado. En la práctica la señal estará contaminada, por lo que en las salidas de todos los canales, incluido el correcto, aparecerá una contribución de la energía del ruido. Será interesante aumentar lo máximo posible la contribución de las salidas no nulas respecto al ruido. Esto se puede hacer maximizando el tiempo en el cual la señal es significativamente distinta de cero. Como no se tiene control sobre el tiempo en el cual comienza el *late-time* es decir T_L , sólo se puede minimizar el tiempo de duración de los E-pulsos, que viene dado por T_e , de forma que se intentarán construir los E-pulsos de longitud mínima, con el fin de optimizar los resultados frente al ruido.

En la construcción de los E-pulsos, la única imposición que recae sobre ellos, en principio, es la de que su contribución a las frecuencias naturales del blanco sea nula, es decir, si $ep_i(t)$ es la señal E-pulso del blanco i las ecuaciones que debe cumplir son:

$$Ep_i(s_p) = Ep_i(s_p^*) = 0, \quad 1 \leq p \leq m \quad (7.2)$$

donde $Ep_i(s)$ es la transformada de Laplace de $ep_i(t)$ y $\{s_p\}_{p=1,\dots,m}$ son las frecuencias naturales del blanco. A estas ecuaciones se les llamarán ecuaciones E-pulso

Por tanto existe una gran libertad al construir estos E-pulso, dado que no existe ninguna restricción al escoger la forma que deben tener. Una manera muy utilizada en la construcción de los E-pulsos es desarrollarlos en funciones bases, dejando parámetros libre y posteriormente ajustar estos parámetros para que se cumplan las condiciones (7.2). Diversos conjuntos de funciones bases se han utilizado ya desde el trabajo original de Rothwell, destacando el uso de polinomios a trozos y de funciones armónicas.

En este capítulo se tratarán con funciones base que serán polinómicas a trozos. Para esto se hará uso del formalismo de *splines*, que tratan con este tipo de funciones. El objetivo final es conseguir es expresar las funciones E-pulso como combinaciones lineales de funciones

base, que se llamarán β -*splines*. Al desarrollar los E-pulso en función de polinomios a trozos no se logra un desarrollo como el anterior, por lo que es más difícil trabajar con él o imponer nuevas condiciones espectrales sobre los E-pulso. El desarrollo en β -*splines* presenta una mayor sencillez y permitirá imponer de forma sencilla condiciones adicionales sobre los E-pulso, permitiendo también disminuir el número de ecuaciones que se necesitan resolver.

El esquema del resto del capítulo es el siguiente:

-En el apartado VII.2. se construyen los E-pulsos utilizando la técnica de *splines* en la interpolación polinómica, construyéndose los sistemas de ecuaciones que determinan completamente el E-pulso.

-En el apartado VII.3. se definen los β -*splines* y sus propiedades para su posterior aplicación al problema.

-En el apartado VII.4. se construyen los E-pulsos haciendo uso de los β -*splines*, poniendo de manifiesto la reducción en el orden del problema a resolver.

-En el apartado VII.5. se enuncian las nuevas condiciones E-pulsos y se construyen, utilizando los β -*splines*, los correspondientes E-pulsos que las cumplen.

-En el apartado VII.6. se explicita la obtención de la función E-pulso a partir de los coeficiente del desarrollo en β -*splines*.

VII.2. CONSTRUCCIÓN DEL E-PULSO MEDIANTE *SPLINES*

El problema que se va a resolver es construir las funciones E-pulso desarrollandolas como funciones polinómicas a trozos. La única restricción que se va a imponer sobre la señal E-pulso $ep(t)$ es que cumpla las ecuaciones (7.2), es decir, que su transformada de Laplace sea nula si se evalúa en las frecuencias naturales.

El procedimiento consistirá en desarrollar la función $ep(t)$ como combinación lineal de funciones base, de forma que lo que haya que determinar es un conjunto de coeficientes que determinan completamente el E-pulso. Estos coeficientes se obtendrán, generalmente, como solución de un sistema de ecuaciones lineales. Las funciones base en las que se puede desarrollar el E-pulso son arbitrarias, pudiendo encontrarse distintos tipos ya en el trabajo original de Rothwell [ROT85]. En este capítulo, las funciones que se van a utilizar son polinomios de grado k a trozos.

El E-pulso se segmenta en distintos intervalos temporales, y en cada intervalo temporal se aproxima la función por un polinomio de grado k . En este caso los coeficientes que quedan libres serán los coeficientes de los polinomios, $k+1$ coeficientes en cada trozo. Si a estos polinomios a trozos se le exige continuidad de la función y continuidad hasta la derivada $k-1$, estas funciones reciben el nombre de *splines* de grado k [KIN94], que es la forma en la que se suele trabajar al construir los E-pulsos como polinomios a trozos.

De esta forma la función $ep(t)$ se desarrolla en *splines* de grado k como:

$$ep(t) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i(t) \quad (7.3)$$

donde $S_i(t)$ es un polinomio de grado k , como máximo, que toma valores distintos de cero únicamente en el intervalo $[t_i, t_{i+1})$. Se va a suponer que los intervalos temporales están equiespaciados, luego $t_i = i \cdot \tau$, donde τ es la longitud constante de los intervalos. Aunque en el problema general de interpolación mediante *splines*, esta suposición de equiespaciado temporal no se suele hacer, pudiendo dejarse los tiempo t_i como parámetros libres y permitir así una mayor libertad en la forma de la función E-pulso; en el caso de la construcción de E-pulsos esta hipótesis de trabajo respecto a los intervalos temporales es de gran utilidad, simplificando enormemente el problema. Esto es debido a que los tiempos no aparecen de una forma lineal en las ecuaciones, lo que lleva a un conjunto bastante complejo de ecuaciones no lineales, de difícil solución y que no proporcionan mejoras apreciables en los resultados.

En el problema clásico de interpolación de funciones usando *splines* se suponen conocidos la función en los extremos de los intervalos temporales, $\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$ de forma que las ecuaciones que han de cumplirse son:

$$\begin{aligned} S_0(t_0) &= y_0, \quad S_{n-1}(t_n) = y_n \\ S_i(t_{i+1}) &= S_{i+1}(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i=0, \dots, n-2 \\ S'_i(t_{i+1}) &= S'_{i+1}(t_{i+1}), \quad i=0, \dots, n-2 \\ &\vdots \\ S_i^{k-1}(t_{i+1}) &= S_{i+1}^{k-1}(t_{i+1}), \quad i=0, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Los n polinomios poseen en total $n(k+1)$ parámetros desconocidos. Al imponer las $2n+(k-1)(n-1)$ ecuaciones, quedan un total de $(k-1)$ parámetros libres. Estos parámetros se suelen fijar tomando lo que se define como *splines* naturales, que proporcionan $k-1$ ecuaciones adicionales en los intervalos exteriores, lo que determina completamente la señal. Este es un problema de interpolación: conocidos $n+1$ valores de la señal (los y_i) se construye una función polinómica a trozos de grado k que pase por esos puntos y que posea derivadas continuas hasta orden $k-1$. Sin embargo el problema de la construcción del E-pulso es un problema distinto, ya que no se conocen los valores de la función en los puntos t_i y las condiciones se imponen sobre la transformada de Laplace y no sobre la función.

De esta forma las ecuaciones que se cumplen son:

$$\begin{aligned}
 S_i(t_{i+1}) &= S_{i+1}(t_{i+1}), \quad i=0, \dots, n-2 \\
 S'_i(t_{i+1}) &= S'_{i+1}(t_{i+1}), \quad i=0, \dots, n-2 \\
 &\vdots \\
 S_i^{(k-1)}(t_{i+1}) &= S_{i+1}^{(k-1)}(t_{i+1}), \quad i=0, \dots, n-2 \\
 Ep(s_p) &= Ep(s_p^*) = 0, \quad p=1, \dots, m
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

Se sigue teniendo $n(k+1)$ parámetros iniciales en los polinomios, como en el caso de interpolación de funciones, pero las ecuaciones son ahora $(n-1)k$ ecuaciones de continuidad y $2m$ ecuaciones E-pulso. En total $(n-1)k+2m$ ecuaciones.

Si se desea tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas hay que hacer $n=2m-k$, dando lugar a un sistema de $(2m-k)(k+1)$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas, lo que se conoce como E-pulso determinado. Si, por el contrario, se desea estar en el mismo caso que en el problema de la interpolación, E-pulso no determinado, es decir con $k-1$ parámetros libres, hay que hacer $n=2m-1$. En este caso habría que introducir ecuaciones adicionales para determinar el sistema.

VII.2.1. E-pulso determinado

Como se ha señalado en el apartado anterior, este será el caso en el que, tras la resolución del sistema de ecuaciones, el E-pulso quede totalmente determinado, sin necesidad de recurrir a ecuaciones adicionales. En este caso, como se ha visto con anterioridad, se ha de cumplir que $n=2m-k$, para tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Teniendo en cuenta que:

$$\int_0^{\infty} S_i(t) e^{-st} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_i(t) e^{-st} dt
 \tag{7.6}$$

las ecuaciones E-pulso para desarrollo en *splines* quedan:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} ep(t) e^{-s_p t} dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_i(t) e^{-s_p t} dt = 0 \\
 \int_0^{\infty} ep(t) e^{-s_p^* t} dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_i(t) e^{-s_p^* t} dt = 0
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

para $p=1, \dots, m$.

A continuación se construyen explícitamente las funciones E-pulso para los casos $k=0$, 1 y 2.

• $k=0$, *splines* constantes.

En este caso no se puede imponer ninguna condición de continuidad, ya que en cada trozo son funciones constantes. Por tanto, las únicas condiciones que se pueden imponer son las de E-pulso. Debido a que los *splines* son constantes en todo el intervalo, las condiciones E-pulso particularizadas para el caso $k=0$ queda:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} S_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s_p t} dt &= 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} S_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-s_p^* t} dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

para $p=1, \dots, m$.

Las integrales son fáciles de realizar, quedando las anteriores expresiones de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - e^{-s_p \tau}}{s_p} \sum_{i=0}^{n-1} S_i e^{-s_p i \tau} &= 0 \\ \frac{1 - e^{-s_p^* \tau}}{s_p^*} \sum_{i=0}^{n-1} S_i e^{-s_p^* i \tau} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad p=1, \dots, m \quad (7.9)$$

Como se ha tomado $n=2m$, se tiene un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas homogéneo, por lo que para tener solución no trivial el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser igual a cero. Haciendo esto se obtendrá una ecuación en τ , que fijará la longitud de los intervalos temporales, y con ello la longitud total del E-pulso. El determinante quedará:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-s_1 \tau} & \dots & e^{-s_m \tau} & e^{-s_1^* \tau} & \dots & e^{-s_m^* \tau} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-(2m-1)s_1 \tau} & \dots & e^{-(2m-1)s_m \tau} & e^{-(2m-1)s_1^* \tau} & \dots & e^{-(2m-1)s_m^* \tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.10)$$

Como se puede ver es un determinante de Vandermonde, lo que implica que es igual

a cero únicamente si algunos de los argumenteos de las distintas filas son iguales. Esto puede suceder si $(s_i - s_r)\tau = j2\pi k$ con $i, r = 1, \dots, m$, $i \neq r$ y $k \in \mathbb{Z}$, o bien si $(s_i - s_r^*)\tau = j2\pi k$ con $i, r = 1, \dots, m$ y con $k \in \mathbb{Z}$. Para que se cumpla la primera de las condiciones hay que imponer que las partes reales de dos frecuencias naturales distintas sean iguales, lo que no se puede hacer, ya que las frecuencias naturales no son parámetros del problema, sino constantes. La segunda condición puede no impone nada sobre las frecuencias naturales, siempre que $i = r$. En este caso queda:

$$\tau = \frac{\pi k}{\omega_i}, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \quad (7.11)$$

Se tiene, por tanto m posibles valores para τ . Como ya se indicó anteriormente, se está interesado en conseguir un E-pulso de longitud mínima, por tanto como valor τ se tomará el mínimo de estos valores, es decir:

$$\tau = \frac{\pi}{\max\{\omega_i\}_{i=1, \dots, m}} \quad (7.12)$$

Con este valor de τ , se soluciona el sistema de ecuaciones y se obtiene la función E-pulso, contante a trozos. Lo único que queda por determinar es un factor de escala, ya que al resolver el sistema de ecuaciones homogéneo y hacer el determinante de los coeficientes igual a cero se ha reducido en uno el rango de las ecuaciones y con ello de las incógnitas a determinar. Este problema se soluciona en la práctica debido a que se exige que todos los E-pulsos para los distintos blancos tengan igual energía. Esta imposición es necesaria para una correcta comparación entre la energía de salida de cada uno de los canales, como se verá más extensamente en el siguiente capítulo.

• $k=1$, *splines* lineales.

En este caso sí se impone la continuidad de la función de forma que las ecuaciones son las de continuidad de la función más las ecuaciones E-pulso. Si se define $S_i(t) = a_i t + b_i$, las ecuaciones que deben cumplir los coeficientes, teniendo en cuenta que los intervalos temporales son constantes de longitud τ , son:

$$\left. \begin{aligned} a_i(i+1)\tau + b_i &= a_{i+1}(i+1)\tau + b_{i+1} \\ \sum_{r=0}^{n-1} \int_{r\tau}^{(r+1)\tau} (a_r t + b_r) e^{-s_p t} dt &= 0 \\ \sum_{r=0}^{n-1} \int_{r\tau}^{(r+1)\tau} (a_r t + b_r) e^{-s_p^* t} dt &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i=0, \dots, n-2 \\ p=1, \dots, m \end{array} \quad (7.13)$$

Tras realizar las integrales, el sistema de ecuaciones anterior queda:

$$\left. \begin{aligned}
 & a_i(i+1)\tau + b_i = a_{i+1}(i+1)\tau + b_{i+1} \\
 & \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a_r}{s_p^2} \left[(r\tau s_p + 1)e^{-s_p r \tau} - ((r+1)\tau s_p + 1)e^{-s_p(r+1)\tau} \right] + \frac{b_r}{s_p} \left[e^{-s_p r \tau} - e^{-s_p(r+1)\tau} \right] = 0 \\
 & \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a_r}{s_p^{*2}} \left[(r\tau s_p^* + 1)e^{-s_p^* r \tau} - ((r+1)\tau s_p^* + 1)e^{-s_p^*(r+1)\tau} \right] + \frac{b_r}{s_p^*} \left[e^{-s_p^* r \tau} - e^{-s_p^*(r+1)\tau} \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i=0, \dots, n-2 \\ p=1, \dots, m \end{array} \quad (7.14)$$

Al igual que en el caso de *splines* constantes, el anterior sistema de ecuaciones posee el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, al ser $n=2m-1$, y es homogéneo, por lo que la solución no trivial se obtiene de hacer el determinante de la matriz de los coeficientes igual a cero, lo cual impone condiciones sobre τ , aunque no proporciona una forma analítica sobre los posibles valores del intervalo temporal τ , sino que hay que recurrir a la solución numérica para encontrarlos. Por supuesto, el valor de τ elegido será el menor dentro del conjunto de valores que haga que el determinante de los coeficientes del anterior sistema de ecuaciones sea igual a cero. El sistema de ecuaciones es más fácil de resolver si en vez de tomar como incógnitas a_i y b_i , se hace el cambio de variable $u_0 = -a_0$, $u_i = a_i - a_{i-1}$, $v_0 = -b_0$, $v_i = b_i - b_{i-1}$, con $i=1, \dots, n-1$.

• $k=2$, *splines* parabólicos.

Las ecuaciones serán continuidad de la función y de la primera derivada y las ecuaciones E-pulso. Definiendo $Si(t) = at^2 + bt + c$, teniendo en cuenta que los intervalos temporales son iguales de longitud τ y realizando la integrales, las ecuaciones quedan:

$$\left. \begin{aligned}
 & a_i(i+1)^2\tau^2 + b_i(i+1)\tau + b_i = a_{i+1}(i+1)^2\tau^2 + b_{i+1}(i+1)\tau + c_{i+1} \\
 & 2a_i(i+1)\tau + b_i = 2a_{i+1}(i+1)\tau + b_{i+1} \\
 & \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a_r}{s_p^3} \left[(r\tau s_p(r\tau s_p + 2) + 2)e^{-s_p r \tau} - ((r+1)\tau s_p((r+1)s_p + 2) + 2)e^{-s_p(r+1)\tau} \right] \\
 & + \frac{b_r}{s_p^2} \left[(r\tau s_p + 1)e^{-s_p r \tau} - ((r+1)\tau s_p + 1)e^{-s_p(r+1)\tau} \right] + \frac{c_r}{s_p} \left[e^{-s_p r \tau} - e^{-s_p(r+1)\tau} \right] = 0 \\
 & \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a_r}{s_p^{*3}} \left[(r\tau s_p^*(r\tau s_p^* + 2) + 2)e^{-s_p^* r \tau} - ((r+1)\tau s_p^*((r+1)s_p^* + 2) + 2)e^{-s_p^*(r+1)\tau} \right] + \\
 & \frac{b_r}{s_p^{*2}} \left[(r\tau s_p^* + 1)e^{-s_p^* r \tau} - ((r+1)\tau s_p^* + 1)e^{-s_p^*(r+1)\tau} \right] + \frac{c_r}{s_p^*} \left[e^{-s_p^* r \tau} - e^{-s_p^*(r+1)\tau} \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i=0, \dots, n-2 \\ p=1, \dots, m \end{array} \quad (7.15)$$

Sistema de ecuaciones homogéneo que se resuelve de forma análoga a los anteriores.

De esta manera se puede seguir encontrando los sistemas de ecuaciones para cualquier orden k de los polinomios.

VII.2.2. E-pulso no determinado.

En este caso, la resolución del sistema de ecuaciones no proporciona todos los parámetros, sino que son necesarias condiciones adicionales que hagan posible la obtención de los parámetros del problema. Estas condiciones para polinomios de grado impar proporcionan los llamados *splines* naturales. En estos *splines* las $k-1$ ecuaciones adicionales resultan de imponer que las derivadas desde orden $(k-1)/2$ hasta orden $k-1$ sean nulas en los puntos t_0 y t_n . La propiedad más importante de estos *splines* naturales la presenta los *splines* cúbicos naturales, que presentan, aproximadamente, el polinomio a trozos de menor curvatura sobre el intervalo. Una vez que se introducen las nuevas condiciones se vuelve a obtener un sistema de ecuaciones homogéneo, a partir del cual se actúa de manera idéntica al caso de E-pulso determinado.

Al poseer un mayor número de parámetros libre y, por tanto, permitir una mayor libertad en la elección de los parámetros del problema, este tipo de E-pulsos lo utilizó originalmente Rothwell para disminuir la longitud temporal de los E-pulso. Sin embargo los resultados que obtuvo fueron que si disminuía el tamaño del E-pulso no determinado por debajo del dado para el E-pulso determinado, los resultados obtenidos para este E-pulso de longitud mayor fallaban estrepitosamente. Por tanto, no se encontraba una mejora al disminuir el tamaño de los E-pulsos. No se trabajará con este tipo de E-pulsos en el resto del capítulo, restringiéndose al caso de E-pulsos determinados, más sencillos y que han proporcionado muy buenos resultados en situaciones prácticas.

VII.3. β -*SPLINES*

Los β -*splines* es otra representación equivalente a la utilizada hasta ahora, que debido las propiedades que presenta se ha utilizado con gran éxito en diversos campos, sobre todo en procesado de señal e imagen [USE99].

Los β -*splines* son funciones polinómicas a trozos que se definen como [CHU92]:

$$N_l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{l-1}(x-t)N_1(t)dt = (N_{l-1} * N_1)(x) \quad (7.16)$$

con

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.17)$$

Esta definición implicará con posterioridad la necesidad de una separación equiespaciada de los puntos de la función en los problemas de interpolación y en el cálculo de E-pulsos. Una definición más general sin imponer esta condición es posible y es la que aparece en [KIN94]. En este trabajo, sin embargo se restringirá a la definición proporcionada con anterioridad, al igual que se hizo en los apartados anteriores en el desarrollo de la teoría de *splines* ordinarios.

Existen un gran número de propiedades que cumplen los β -*splines*, solamente enunciaremos cuatro, ya que serán las necesarias en los desarrollos posteriores:

1. $N_l(x)=0$ para $x \leq 0$ y $x > 1$.
2. $N_l(x) = \frac{x}{l-1} N_{l-1}(x) + \frac{l-x}{l-1} N_{l-1}(x-1)$.
3. $N_l(\frac{l}{2} + x) = N_l(\frac{l}{2} - x)$.
4. Los β -*splines* son una base en dentro del espacio de *splines*.

(7.18)

La tercera de las propiedades significa que los β -*splines* son funciones simétricas respecto al centro del intervalo. La cuarta propiedad implica que cualquier función *splin*, es decir cualquier función polinómica a trozos de grado k , continuas y con derivadas continuas hasta orden $k-1$, se puede poner como combinación lineal de β -*splines*. Si la función se restringe a un intervalo $[t_0, t_n] = [0, n]\tau$, lo que significa un intervalo de tiempo dividido en subintervalos equiespaciados, el conjunto de β -*splines* $\{N_l(x/\tau - k)\}_{k=-l+1, \dots, n-1}$ es una base del espacio de *splines* definidos en el intervalo de interés. Lo que se desea es utilizar estos β -*splines* para desarrollar la función E-pulso en función de ellos, es decir, construir una expresión para el E-pulso del tipo:

$$ep(t) = \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r N_l(t/\tau - r) \tag{7.19}$$

Obviamente se tiene $n+l-1$ grados de libertad. En el problema de interpolación con *splines*, se tenía que tras fijar los $n+1$ valores de la función a interpolar, seguían habiendo $k-1$ grados de libertad. Esto vuelve a suceder en el caso de los β -*splines*, sin más que darse cuenta que un β -*splin* de grado l es un polinomio a trozos de grado $l-1$. Si se impone en la expresión anterior $n+1$ condiciones, correspondientes a los $n+1$ valores de la función que son necesarios en el problema de interpolación, quedan $l-2$ parámetros libres. Si se hace $l-1=k$, quedan $k-1$ parámetros libres, igual que el problema de interpolación original. Esto es lo que se esperaba, ya que, como se ha dicho, los β -*splines* son una base del espacio de *splines*.

Como ya se vio la construcción de la función E-pulso es un problema distinto al de interpolación. Lo que se quiere es que se cumpla las ecuaciones E-pulso, que anuladas la transformada de Laplace en las frecuencias naturales del blanco. Con el desarrollo en β -*splines* anteriores, las ecuaciones E-pulso quedan:

$$\sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^{T=n\tau} N_l(t/\tau-r) e^{-s_p t} dt = 0$$

$$\sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^{T=n\tau} N_l(t/\tau-r) e^{-s_p^* t} dt = 0$$
(7.20)

con $p=1, \dots, m$.

Por simplicidad se trabajará con $\tau=1$, y posteriormente se generalizarán las expresiones al caso de $\tau \neq 1$. Teniendo en cuenta esto las ecuaciones quedan:

$$\sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^n N_l(t-r) e^{-s_p t} dt = 0$$

$$\sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^n N_l(t-r) e^{-s_p^* t} dt = 0$$
(7.21)

con $p=1, \dots, m$.

Es interesante notar como, al utilizar β -*splines*, en lugar de *splines* ordinarios, no hay que imponer ninguna condición de continuidad sobre la función ni sobre sus derivadas, condiciones que van implícitas en las propiedades de los β -*splines*. De esta forma los sistemas de ecuaciones que se construyen son de $2m$ ecuaciones con $2m$ incógnitas, frente a los sistemas de $(2m-k)(k+1)$ ecuaciones con las mismas incógnitas que se tenían a partir de un tratamiento con *splines* estándares. De esta manera se consigue reducir el tamaño de los sistemas con los que se obtienen los parámetros que determinan la señal E-pulso.

Para poder obtener los coeficientes C_r , primero habrá que calcular las $n+l-1$ integrales. Sin embargo, debido a las propiedades de los β -*splines*, el número de integrales a calcular será bastante menor. A continuación se procede a calcular las integrales, diferenciando entre distintos casos que permiten una resolución conjunta:

1. Utilizando la definición de los β -*splines* es fácil llegar a que $N_l(x)$ es el resultado de convolucionar m veces el β -*splin* de orden uno:

$$N_l(x) = (N_1 * N_1 * \dots * N_1)(x)$$
(7.22)

con el resultado anterior es fácil calcular la integral:

$$\int_0^n N_l(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty N_l(t) e^{-st} dt = (N(s))^l$$
(7.23)

donde $N(s)$ es la transformada de Laplace del β -*splin* de orden uno:

$$N(s) = \int_0^{\infty} N_1(t) e^{-st} dt = \int_0^1 N_1(t) e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s}}{s} \quad (7.24)$$

2. Utilizando la propiedad de la convolución, también es fácil calcular otras integrales:

$$\int_0^n N_1(t-r) e^{-st} dt = e^{-sr} \int_0^n N_1(t) e^{-st} dt = e^{-sr} (N(s))^l, \text{ para } r=0, \dots, n-l \quad (7.25)$$

donde se ha tenido en cuenta que el soporte de la función $N_1(x)$ es el intervalo $[0,1]$.

3. Las únicas integrales que quedan por realizar son:

$$\int_0^n N_1(t-r) e^{-st} dt, \text{ para } r=-l+1, \dots, -1 \text{ y } r=n-l+1, \dots, n-1 \quad (7.26)$$

que representan un total de $2(l-1)$ integrales, las cuales no serán necesarias calcular en su totalidad debido a las relaciones que poseen los β -*splines*.

Dentro las integrales (7.26) que faltan por calcular se van a estudiar primero el caso de $r > n-l$, que dan lugar a $l-1$ integrales de este tipo. Estas integrales serán:

$$\int_0^n N_1(t-r) e^{-st} dt = e^{-rs} \int_0^{n-r} N_1(t) e^{-st} dt, \text{ para } r=n-l+1, \dots, n-1 \quad (7.27)$$

Para realizar estas integrales vamos a estudiarlas por separado:

• $r=n-1$, la integral quedaría:

$$\int_0^n N_1(t-(n-1)) e^{-st} dt = e^{-(n-1)s} \int_0^1 N_1(t) e^{-st} dt = e^{-(n-1)s} A_1^l(s) \quad (7.28)$$

• $r=n-2$, la integral quedaría:

$$\int_0^n N_l(t-(n-2))e^{-st}dt = e^{-(n-2)s} \int_0^2 N_l(t)e^{-st}dt = e^{-(n-2)s} A_2^l \quad (7.29)$$

y así sucesivamente hasta $r=n-[l/2]$, donde $[l/2]$ es el entero inmediatamente superior a $l/2$. A partir de este número lo que sucede es lo siguiente:

- Para un $r=n-i$ con i un entero superior a $[l/2]$:

$$\int_0^n N_l(t-r)e^{-st}dt = e^{-rs} \int_0^{n-r} N_l(t)e^{-st}dt = e^{-rs} \int_0^i N_l(t)e^{-st}dt = e^{-rs} e^{-l/2} \int_{-l/2}^{i-l/2} N_l(l/2+t)e^{-st}dt \quad (7.30)$$

Aplicando la propiedad de simetría de los β -splines respecto del centro del soporte y deshaciendo los cambios, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^n N_l(t-r)e^{-st}dt &= e^{-rs} e^{-l/2} \int_{-l/2}^{i-l/2} N_l(l/2-t)e^{-st}dt = e^{-(r+l)s} \int_{l-i}^l N_l(t)e^{st}dt = \\ &= e^{-(r+l)s} \left[\int_0^l N_l(t)e^{st} - \int_0^{l-i} N_l(t)e^{st}dt \right] = e^{-(r+l)s} \left[(N(-s))^l - A_{l-i}^l(-s) \right] \end{aligned} \quad (7.31)$$

como i es mayor que $[l/2]$, $l-i$ tiene que ser menor que $[l/2]$, entonces $A_{l-i}^l(s)$ ya ha sido calculado. Este desarrollo da como resultado que hay que realizar explícitamente únicamente $[l/2]$ integrales para $r>n-l$, en (7.27).

- Quedan por estudiar las integrales con $r<0$, en (7.26). Tomaremos $i=-r$, quedando las integrales:

$$\int_0^n N_l(t-r)e^{-st}dt = e^{-rs} \int_{-r}^n N_l(t)e^{-st}dt = e^{is} \int_i^n N_l(t)e^{-st}dt = e^{is} \left[(N(s))^l - A_{-r}^l(s) \right] \quad (7.32)$$

luego el resultado final es:

$$\int_0^n N_l(t-r)e^{-st}dt = e^{-rs} \left[(N(s))^l - A_{-r}^l(s) \right] \quad (7.33)$$

Con este resultado finaliza el cálculo de las integrales necesarias para construir el sistema de ecuaciones que permita obtener los coeficientes C_r . Al final del proceso, sólo es necesario calcular explícitamente $[l/2]$ integrales, salvo en el caso $l=1$, en el que no hay que calcular ninguna.

VII.4. ECUACIONES E-PULSO CON β -*SPLINES*

En el apartado anterior se han realizado la mayor parte de los cálculos necesarios para construir explícitamente las ecuaciones para un orden concreto de los β -*splines*.

La función E-pulso que se desea construir, $ep(t)$, debe cumplir las ecuaciones E-pulso, que son:

$$\int_0^T ep(t)e^{-s_p t} dt = \int_0^T ep(t)e^{-s_p^* t} dt, \text{ con } 1 \leq p \leq m \quad (7.34)$$

donde se ha tenido en cuenta que la longitud total de la función E-pulso es T .

En el apartado anterior se realizó el desarrollo en funciones β -*splines* del E-pulso para una señal con el valor de los intervalos temporales $\tau=1$. Con el fin de utilizar dicho desarrollo en el caso genérico de τ arbitrario, se va a intentar expresar las condiciones de otra forma:

$$\int_0^{T=n\tau} ep(t)e^{-s_p t} dt = \tau \int_0^n ep(t)e^{-s_p t \tau} dt = 0, \text{ con } 1 \leq p \leq m \quad (7.35)$$

haciendo $f(t) = ep(\tau t)$ y $\rho_p = s_p \tau$, para $p=1, \dots, m$, las ecuaciones E-pulso quedan:

$$\int_0^n f(t)e^{-\rho_p t} dt = \int_0^n f(t)e^{-\rho_p^* t} dt = 0, \text{ con } 1 \leq p \leq m \quad (7.36)$$

Estas ecuaciones determinarán la función $f(t)$ a partir de la cual es inmediato obtener la función E-pulso deseada, sin más que hacer el cambio $ep(t) = f(t/\tau)$.

Será esta función $f(t)$ la que se desarrollará en función de β -*splines* con intervalo temporal de la unidad, quedando el desarrollo de la forma:

$$f(t) = \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r N_r(t-r) \quad (7.37)$$

A continuación vamos a obtener los sistemas de ecuaciones para casos concretos de l .

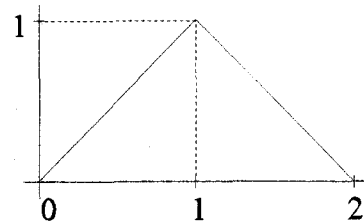
• $l=1$, β -*splines* constantes.

En este caso β -*splines* y *splines* coinciden, por lo que el desarrollo será el mismo que se realizó en la apartado VII.2.1, para *splines* constantes y que daba como resultado un sistema de Vandermonde.

• $l=2$, β -*splines* lineales.

Lo primero es construir el β -*splin* de orden dos, que resulta ser:

$$N_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (7.38)$$



Las ecuaciones E-pulso son:

$$\sum_{r=-1}^{n-1} C_r \int_0^n N_2(t-r) e^{-\rho_p t} dt = 0, \text{ con } 1 \leq p \leq 2m \quad (7.39)$$

donde se definen:

$$\begin{aligned} \rho_p &= \tau s_p \quad \text{para } 1 \leq p \leq m \\ \rho_p &= \tau s_p^* \quad \text{para } m+1 \leq p \leq 2m \end{aligned} \quad (7.40)$$

Las integrales para $r=0, \dots, n-2$, se vio que eran muy fáciles de calcular, y resultaban:

$$\int_0^{n-1} N_2(t-r) e^{-st} dt = e^{-sr} (N(s))^2 = e^{-sr} \left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^2 \quad (7.41)$$

Como se señaló en el apartado anterior, solamente habría que realizar un integral explícitamente, que en este caso será:

$$\int_0^n N_2(t-(n-1))e^{-st}dt = e^{-(n-1)s} \int_0^1 N_2(t)e^{-st}dt = e^{-(n-1)s} \int_0^1 te^{-st}dt \quad (7.42)$$

con lo que queda:

$$\int_0^n N_2(t-(n-1))e^{-st}dt = e^{-(n-1)s} \frac{1 - e^{-s}(1+s)}{s^2} \quad (7.43)$$

Con las relaciones deducidas en el apartado anterior es fácil calcular la integral para $r=1$, y esta resulta:

$$\int_0^n N_2(t+1)e^{-st}dt = e^{st} \int_1^2 N_2(t)e^{-st}dt = e^{st} \left[(N(s))^2 - A_1^2(s) \right] = \frac{e^{-s} + s - 1}{s^2} \quad (7.44)$$

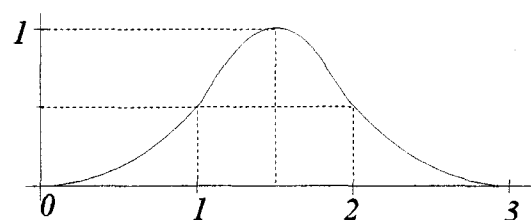
Haciendo $s=\rho_p$ y sacando factor común de $(1/\rho_p)^2$ el sistema de ecuaciones queda:

$$c_{-1} \left(e^{-\rho_p} + \rho_p - 1 \right) + \sum_{r=0}^{n-2} C_r e^{-r\rho_p} (1 - e^{-\rho_p})^2 + C_{n-1} e^{-(n-1)\rho_p} (1 - e^{-\rho_p}(1 + \rho_p)) = 0, \text{ para } 1 \leq p \leq 2m \quad (7.45)$$

Si se hace $n=2m-1$, el sistema que queda es un sistema de $2m$ ecuaciones con $2m$ incógnitas, homogéneo. Para que exista solución distinta de la trivial, hay que imponer que el determinante de la matriz de los coeficientes sea igual a cero, lo que proporciona una ecuación en τ (que está dentro de la definición de ρ_p). Esto fija los posibles valores de τ y permite la obtención de los coeficientes que determinan el sistema salvo un factor de escala, al igual que para el desarrollo en *splines* estándares, y que se resolverá imponiendo una condición de normalización sobre los E-pulsos de los distintos blancos. El resultado es la obtención de la función $f(t)$, a partir de la cual se obtiene fácilmente la función E-pulso deseada. Posteriormente se desarrollará un procedimiento par obtener explícitamente y de forma sencilla la función E-pulso a partir de los coeficientes C_r .

• $l=3$, β -*splines* cuadráticos.

$$N_3(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 3t - t^2 - \frac{3}{2} & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} & \text{si } 2 \leq t < 3 \end{cases} \quad (7.46)$$



Las condiciones E-pulso son en este caso:

$$\sum_{r=-2}^{n-1} C_r \int_0^n N_3(t-r) e^{-rpt} dt = 0, \text{ con } 1 \leq p \leq 2m \quad (7.47)$$

• Para $r=0, \dots, n-3$, las integrales quedan

$$\int_0^n N_3(t-r) e^{-st} dt = e^{-sr} \left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^3 \quad (7.48)$$

• Como ya se discutió con anterioridad sólo habrá que realizar explícitamente una integral, por ejemplo, la correspondiente a $r=n-1$:

$$\int_0^n N_3(t-(n-1)) e^{-st} dt = e^{-s(n-1)} \int_0^1 \frac{t^2}{2} e^{-st} dt = \frac{e^{-s(n-1)}}{s^3} \left(1 - e^{-s} \left(1 + s + \frac{s^2}{2} \right) \right) \quad (7.49)$$

el resto de las integrales se pueden obtener a partir de esta, utilizando las ecuaciones deducidas con anterioridad.

• $r=n-2$, utilizando las relaciones deducidas:

$$\begin{aligned} \int_0^n N_3(t-(n-2)) e^{-st} dt &= e^{-s(n-2)} \int_0^2 N_3(t) e^{-st} dt = e^{-s(n-2)} e^{-3s} \left[\left(\frac{1-e^{-s}}{-s} \right)^3 - \frac{1-e^{-s} \left(1-s+\frac{s^2}{2} \right)}{(-s)^3} \right] = \\ &= \frac{e^{-s(n-2)}}{s^3} \left(1 - 3e^{-s} + (2+s-\frac{s^2}{2}) e^{-2s} \right) \end{aligned} \quad (7.50)$$

• $r=-2$:

$$\begin{aligned} \int_0^n N_3(t+2) e^{-st} dt &= e^{2s} \int_2^3 N_3(t) e^{-st} dt = \\ &= e^{2s} \left[\left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^3 - \left(\frac{1-3e^{-s} + (2+s+\frac{s^2}{2}) e^{-2s}}{s^3} \right) \right] = \frac{1-s+\frac{s^2}{2} - e^{-2s}}{s^3} \end{aligned} \quad (7.51)$$

• $r=-1$:

$$\int_0^n N_3(t+1)e^{-s}dt = e^s \int_1^3 N_3(t)e^{-st}dt = \tag{7.52}$$

$$e^s \left[\left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^3 - \left(\frac{1-(1+s+\frac{s^2}{2})e^{-s}}{s^3} \right) \right] = \frac{\frac{s^2}{2} + s - 2 + 3e^{-s} - e^{-2s}}{s^3}$$

Con todas las integrales calculadas se puede construir el sistema de ecuaciones, sin más que hacer $s=\rho_p$ y sacando factor común de $(1/\rho_p)^3$:

$$C_{-2} \left(1 - r_p + \frac{r_p^2}{2} - e^{-r_p} \right) + C_{-1} \left(r_p - 2 + 3e^{-r_p} - e^{-2r_p} \right) + \sum_{k=0}^{n-3} C_k e^{-kr_p} (1 - e^{-r_p})^3 + \tag{7.53}$$

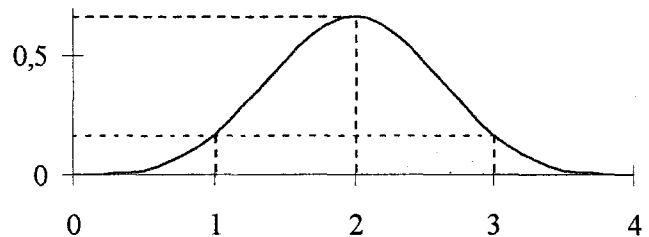
para $1 \leq p \leq$

$$_2 e^{-(n-2)r_p} \left(r_p + 2 - \frac{r_p^2}{2} \right) e^{-2r_p} - 3e^{-r_p} + 1 + C_{n-1} e^{-(n-1)r_p} \left(1 - e^{-r_p} \left(1 + r_p + \frac{r_p^2}{2} \right) \right) = 0$$

El sistema homogéneo resultante de hacer $2m=n+2$, se resuelve de la misma forma que en los casos de $r=1$ y $r=2$.

• $l=4$, β -*splines* cúbicos.

$$N_4(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -\frac{t^3}{2} + 2t^2 - 2t + \frac{2}{3} & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{t^3}{2} - 4t^2 + 10t - \frac{22}{3} & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ -\frac{t^3}{6} + 2t^2 - 8t + \frac{32}{3} & \text{si } 3 \leq t < 4 \end{cases} \tag{7.5}$$



Las condiciones E-pulso son en este caso:

$$\sum_{r=-3}^{n-1} C_r \int_0^n N_4(t-r)e^{-r_p t} dt = 0, \text{ con } 1 \leq p \leq 2m \tag{7.55}$$

• Para $k=0, \dots, n-4$, las integrales quedan

$$\int_0^n N_4(t-k)e^{-st} dt = e^{-sk} \left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^4 \quad (7.56)$$

Como ya se discutió con anterioridad sólo habrá que realizar explícitamente dos integrales, por ejemplo, las correspondiente a $r=n-1$ y $r=n-2$:

$r=n-1$:

$$\int_0^n N_4(t-(n-1))e^{-st} dt = e^{-s(n-1)} \int_0^1 \frac{t^3}{6} e^{-st} dt = \frac{e^{-s(n-1)}}{s^4} \left(1 - e^{-s} \left(1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right) \right) \quad (7.57)$$

$r=n-2$:

$$\int_0^n N_4(t-(n-2))e^{-st} dt = e^{-s(n-2)} \left[\int_0^1 \frac{t^3}{6} e^{-st} dt + \int_1^2 \left(-\frac{t^3}{2} + 2t^2 - 2t + \frac{2}{3} \right) e^{-st} dt \right] = \frac{e^{-s(n-2)}}{s^4} \left(1 - 4e^{-s} + e^{-2s} \left(3 + 2s - \frac{2}{3}s^3 \right) \right) \quad (7.58)$$

el resto de las integrales pueden obtenerse de estas utilizando las relaciones deducidas con anterioridad:

$r=n-3$:

$$\int_0^n N_4(t-(n-3))e^{-st} dt = e^{-s(n-3)} \int_0^3 N_4(t)e^{-st} dt = e^{-s(n-3)} e^{-4s} \left[\left(\frac{1-e^{-s}}{-s} \right)^4 - \frac{1-e^{-s} \left(1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right)}{(-s)^4} \right] = \frac{e^{-s(n-3)}}{s^4} \left(1 - 4e^{-s} + 6e^{-2s} - \left(3 + s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right) e^{-3s} \right) \quad (7.59)$$

$r=-3$:

$$\int_0^n N_4(t+3)e^{-s} dt = e^{3s} \int_3^4 N_4(t)e^{-st} dt = e^{3s} \left[\left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^4 - \frac{1 - 4e^{-s} + 6e^{-2s} - \left(3 + s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right) e^{-3s}}{s^4} \right] = \frac{s - 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + e^{-s}}{s^4} \quad (7.60)$$

• $r = -2$:

$$e^{2s} \left[\left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^4 - \left(\frac{1-4e^{-s} + (3+2s-3s^2-\frac{2}{3}s^3)e^{-2s}}{s^4} \right) \right] = \frac{s-3+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{6}+6e^{-s}-4e^{-2s}+e^{-3s}}{s^4} \quad (7.61)$$

• $r = -1$:

$$e^s \left[\left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^4 - \left(\frac{1-(1+s+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{6})e^{-s}}{s^4} \right) \right] = \frac{s-3+\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{6}+6e^{-s}-4e^{-2s}+e^{-3s}}{s^4} \quad (7.62)$$

Con todas las integrales calculadas se puede construir el sistema de ecuaciones, sin más que hacer $s = \rho_p$ y sacando factor común de $(1/\rho_p)^4$:

$$\begin{aligned} & C_{-3} \left(\rho_p - 1 - \frac{\rho_p^2}{2} + \frac{\rho_p^3}{6} - e^{-\rho_p} \right) + C_{-2} \left(3 - 2\rho_p + \frac{2}{3}\rho_p^3 - 4e^{-\rho_p} + e^{-2\rho_p} \right) + \\ & C_{-1} \left(\rho_p - 3 + \frac{\rho_p^2}{2} + \frac{\rho_p^3}{6} + 6e^{-\rho_p} - 4e^{-2\rho_p} + e^{-3\rho_p} \right) + \sum_{r=0}^{n-4} C_r e^{-r\rho_p} (1 - e^{-\rho_p})^4 + \\ & C_{n-3} e^{-(n-3)\rho_p} \left(1 - 4e^{-\rho_p} + 6e^{-2\rho_p} - (3 + \rho_p - \frac{\rho_p^2}{2} + \frac{\rho_p^3}{6}) e^{-3\rho_p} \right) + \\ & C_{n-2} e^{-(n-2)\rho_p} \left(1 - 4e^{-\rho_p} + (3 + 2\rho_p - \frac{2}{3}\rho_p^3) e^{-2\rho_p} \right) + C_{n-1} e^{-(n-1)\rho_p} \left(1 - e^{-\rho_p} (1 + \rho_p + \frac{\rho_p^2}{2} + \frac{\rho_p^3}{6}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.63)$$

para $1 \leq p \leq 2n$.

El sistema homogéneo resultante de hacer $2m = n+3$, se resuelve de la misma forma que en los casos.

De esta manera se pueden seguir construyendo los sistemas de ecuaciones para sucesivos ordenes en los β -*splines*, construyendo los sistemas sin más que calcular $[l/2]$ integrales polinómicas explícitamente.

A medida que se aumenta el indice polinomios, la diferencia entre el rango del sistema de ecuaciones a calcular mediante el desarrollo en *splines* y el rango del sistema que

proporciona el desarrollo en β -*splines* se va haciendo mayor. Como ya se dijo, el sistema de ecuaciones que proporciona el primer desarrollo es $(2m-k)(k+1)$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas, donde k es el índice del polinomio y m el número de frecuencias naturales. Para el desarrollo en β -*splines* el sistema es de $2m$ ecuaciones con $2m$ incógnitas. Para cinco frecuencias y polinomios cuadráticos el primer sistema posee 24 ecuaciones, mientras que el segundo sistema posee la mitad de ecuaciones. Esta diferencia será mayor si se imponen nuevas condiciones, como sucederá en el siguiente apartado.

VII.5. NUEVAS CONDICIONES E-PULSO.

Se ha visto como esta construcción de la función E-pulso en función de las los β -*splines* requiere de un menor número de ecuaciones, al no ser necesario imponer explícitamente ninguna condición de continuidad. Otra ventaja añadida es la posibilidad de imponer nuevas condiciones espectrales a las funciones E-pulso de una manera sencilla, aparte de las ya conocidas de la anulación de la transformada de Laplace en las frecuencias naturales. Un ejemplo de estas nuevas condiciones son las impuestas en este apartado, que posteriormente se estudiará su utilidad.

Las condiciones E-pulso que hemos impuesto a la señal $ep(t)$ es que la transformada de Laplace se anule en las frecuencias del blanco del que se está calculando la función E-pulso. Para llevar a cabo estas ecuaciones es necesario el conocimiento previo de las frecuencias naturales. Para blancos sencillos, como hilos o esferas, es posible una deducción teórica de tales frecuencias; sin embargo, para blancos algo más complejos las frecuencias naturales deben ser estimadas a partir de señales dispersadas por los blancos, por lo que la precisión en la determinación de las frecuencias está sujeta a la calidad de la señal y la precisión del método utilizado en la estimación. Este hecho, como la posible existencia de ruido o el desplazamiento en la frecuencia que sufren blancos en movimiento debido al efecto doppler, puede producir que la frecuencia natural del blanco para una situación concreta esté algo desplazada respecto a la teórica que se introduce en las condiciones E-pulso.

Con el fin de intentar mitigar la importancia de este efecto, se imponen unas nuevas condiciones sobre las función $e(t)$: se impone que la derivada de la transformada de Laplace se anule en las frecuencias naturales del blanco. Con ello se intenta que la transformada de Laplace se anule o sea pequeña en un entorno más amplio cercano a cada frecuencia natural, en el espacio de frecuencias. De esta manera, aunque se desplace un poco la frecuencia natural verdadera de la calculada teóricamente, la transformada de Laplace seguirá siendo nula o muy pequeña.

Estas nuevas condiciones quedarían de la forma.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dEp(s)}{ds} \Big|_{s=s_p} &= 0 \\ \frac{dEp(s)}{ds} \Big|_{s=s_p^*} &= 0 \end{aligned} \right\} 1 \leq p \leq m \tag{7.64}$$

La función $ep(t)$ se ha desarrollado en función de β -*splines* de orden l :

$$ep(t) = \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r N_l(t/\tau-r) \quad (7.65)$$

y a este desarrollo se le imponía las condiciones E-pulso, quedando:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^{\pi} N_l(t/\tau-r) e^{-s_p t} dt &= 0 \\ \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^{\pi} N_l(t/\tau-r) e^{-s_p^* t} dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

para $p=1, \dots, m$.

Para la señal $ep(t)$, su transformada de Laplace es:

$$Ep(s) = \int_0^{\infty} ep(t) e^{-st} dt \quad (7.67)$$

aplicando derivada, queda:

$$\frac{dEp(s)}{ds} = - \int_0^{\infty} ep(t) t e^{-st} dt \quad (7.68)$$

Partiendo de la expresión de $ep(t)$, se imponen las condiciones sobre la derivada de la transformadas de Laplace:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dEp(s)}{ds} \Big|_{s=s_p} &= \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^{\pi} N_l(t/\tau-r) t e^{-s_p t} dt = 0 \\ \frac{dEp(s)}{ds} \Big|_{s=s_p^*} &= \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^{\pi} N_l(t/\tau-r) t e^{-s_p^* t} dt = 0 \end{aligned} \right\} 1 \leq p \leq m \quad (7.69)$$

donde se ha tenido en cuenta que la función $ep(t)$ tiene longitud finita $T = n\tau$. Si se realiza un cambio de variable en las integrales y se saca factor común de τ^2 , las nuevas condiciones

quedan:

$$\sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \int_0^n N_r(t-r) t e^{-\rho_p t} dt = 0, \quad 1 \leq p \leq 2m \quad (7.70)$$

donde se ha hecho $\rho_p = \tau s_{p^*}$ para $p=1, \dots, m$ y $\rho_p = \tau s_{p-m}^*$ para $p=m+1, \dots, 2m$. Estas serán las expresiones que se impondrán y a partir de las que sacaremos los coeficientes, junto las condiciones E-pulso.

Estas condiciones se consiguen directamente si se define $f(t) = ep(\tau t)$ y se impone:

$$\int_0^n f(t) t e^{-\rho_p t} dt = 0, \quad \text{para } 1 \leq p \leq 2m \quad (7.71)$$

y se sustituye el desarrollo de la función $f(t)$ en función de β -splines:

$$f(t) = \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r N_r(t-r). \quad (7.72)$$

Al haber introducido nuevas condiciones, el número de coeficientes ha de aumentar para anular el mismo número de frecuencias.

Como en el caso de las condiciones E-pulso, se estudiará por separado los distintos ordenes de los β -splines, obteniéndose explícitamente los sistemas de ecuaciones. La manera de obtener los sistemas de ecuaciones no será calculando las integrales directamente, sino a partir de los sistemas de ecuaciones ya calculados. Los sistemas de ecuaciones deducidos anteriormente se obtiene igualando a cero la transformada de Laplace de $f(t)$ evaluada en las frecuencias naturales. Derivando esas ecuaciones y igualando la evaluación de estas en las frecuencias naturales a cero, lo que se está haciendo es igualar la derivada de la transformada de Laplace de la función $f(t)$ a cero, evaluada en las frecuencias naturales. Como ya se ha visto es lo mismo que igualar la derivada de la transformada de Laplace de la función $ep(t)$ a cero en las frecuencias naturales.

El resultado de este proceso, sin entrar en el cálculo explícito de las derivas es, orden por orden:

• $l=1$, *splines* constante.

Las nuevas ecuaciones son:

$$\sum_{r=0}^{n-1} e^{-r\rho_p} (\rho_p r + 1 - e^{-\rho_p(\rho_p(r+1)+1)}) = 0, \quad 1 \leq p \leq 2m \quad (7.73)$$

que junto con las ya existentes forman un total de $4m$ ecuaciones con n incógnitas. Haciendo $n=4m$ se obtiene un sistema de con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas homogéneo. La forma de trabajar es la de siempre: se iguala el determinante a cero, con el fin de obtener solución distinta de la trivial, con lo que se obtienen distintos valores para el intervalo temporal τ ; se toma el menor de los valores; se resuelve y se obtiene la función $f(t)$. A partir de esta se obtiene la función E-pulso $ep(t)$ sin más que tener en cuenta que $ep(t) = f(t/\tau)$.

• $l=2$, *splines* lineales.

Las nuevas ecuaciones son:

$$C_{-1} \left(2 - r_p - e^{-r_p(r_p+2)} \right) + \sum_{k=0}^{n-2} C_k e^{-kr_p} \left(1 - e^{-r_p} \left(-2 - r_p k + e^{-r_p(r_p(k+2)+2)} \right) \right) + C_{n-1} e^{-(n-1)r_p} \left(-2 - (n-1)r_p + e^{-r_p(2+(n+1)r_p + nr_p^2)} \right) = 0, \quad \text{para } 1 \leq p \leq 2m \quad (7.74)$$

junto con las ecuaciones que ya se tenían para *splines* lineales se forma el sistema de ecuaciones, el cual se le resuelve de la misma manera que en las ocasiones anteriores.

• $l=3$, *splines* cuadráticos.

Las nuevas ecuaciones son:

$$C_{-2} \left(2\rho_p - 3 - \frac{\rho_p^2}{2} + e^{-\rho_p(\rho_p+3)} \right) + C_{-1} \left(6 - 2\rho_p - \frac{\rho_p^2}{2} - 3e^{-\rho_p(\rho_p+3)} + e^{-2\rho_p(2\rho_p+3)} \right) + \sum_{r=0}^{n-3} C_r e^{-r\rho_p} \left(1 - e^{-\rho_p} \right)^2 \left(-3 - \rho_p r + e^{-\rho_p(\rho_p(r+3)+3)} \right) + C_{n-2} e^{-(n-2)\rho_p} \left(-3 - (n-2)\rho_p + 3e^{-\rho_p(\rho_p(n-1)+3)} + e^{-2\rho_p} \left(-6 - 2(n+1)\rho_p - (n-\frac{1}{2})\rho_p^2 + \frac{nr^3}{2} \right) \right) + C_{n-1} e^{-(n-1)\rho_p} \left(-3 - (n-1)\rho_p + e^{-\rho_p} \left(3 + (n+2)\rho_p + (n+\frac{1}{2})\rho_p^2 + n\frac{\rho_p^3}{2} \right) \right) = 0, \quad \text{para } 1 \leq p \leq 2m \quad (7.75)$$

junto con las ecuaciones que ya se tenían para *splines* cuadráticos se forma el sistema de ecuaciones, el cual se le resuelve de la misma manera que en las ocasiones anteriores.

• $l=4$, *splines* cúbicos.

Las nuevas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
 & C_{-3} \left(4 - 3\rho_p + \rho_p^2 - \frac{\rho_p^3}{6} - e^{-\rho_p}(\rho_p + 4) \right) + C_{-2} \left(6(\rho_p - 2) - \frac{2}{3}\rho_p^3 + 4e^{-\rho_p}(\rho_p + 4) - 2e^{-2\rho_p}(\rho_p + 2) \right) + \\
 & C_{-1} \left(3(4 - \rho_p) - \rho_p^2 - \frac{\rho_p^3}{6} - 6e^{-\rho_p}(\rho_p + 4) + 8e^{-2\rho_p}(\rho_p + 2) - e^{-3\rho_p}(3\rho_p + 4) \right) + \sum_{r=0}^{n-4} C_r e^{-r\rho_p} \\
 & (1 - e^{-\rho_p})^3 \left(-4 - \rho_p r + e^{-\rho_p}(\rho_p(r+4) + 4) \right) + C_{n-3} e^{-(n-3)\rho_p} \left(-4 - (n-3)\rho_p + 4e^{-\rho_p}(\rho_p(n-2) + 4) - \right. \\
 & \left. 6e^{-2\rho_p}(4 + (n-1)\rho_p) + e^{-3\rho_p} \left(3(4 + (n+1)\rho_p) + (n-1)\rho_p^2 - \frac{3n-1}{6}\rho_p^3 + n\frac{\rho_p^4}{6} \right) \right) + C_{n-2} e^{-(n-2)\rho_p} \\
 & \left(-4 - (n-2)\rho_p + 4e^{-\rho_p}(\rho_p(n-1) + 4) + e^{-2\rho_p} \left(-3(4 + (n+2)\rho_p) - 2n\rho_p^2 + 2\frac{r^3}{3} + 2n\frac{\rho_p^3}{3} \right) \right) + \\
 & C_{n-1} e^{-(n-1)\rho_p} \left(-4 - (n-1)\rho_p + e^{-\rho_p} \left(4 + (n+3)\rho_p + (n+1)\rho_p^2 + \frac{3n+1}{6}\rho_p^3 + n\frac{\rho_p^4}{6} \right) \right) = 0, \text{ para } 1 \leq p \leq 2m
 \end{aligned} \tag{7.76}$$

junto con las ecuaciones que ya se tenían para *splines* cúbicos se forma el sistema de ecuaciones, el cual se le resuelve de la misma manera que en las ocasiones anteriores.

Hasta ahora, a lo largo de todo el apartado, se ha impuesto que la deriva de la transformada de Laplace de la función E-pulsos, sea nula en todas las frecuencias naturales. En la práctica este requerimiento se puede relajar, de forma que se puede imponer la anulación de la derivada de la transformada en un conjunto concreto de frecuencias naturales, sin necesidad de que sea en todas. Esto permite obtener un mayor número de E-pulsos distintos y estudiar cuales son los idóneos cada situación. El problema es que no existen criterios teóricos que indiquen cual es la elección adecuada en la elección del conjunto de frecuencias naturales a las que se va aplicar la nuevas condiciones E-pulso. Por tanto, será necesario un estudio previo de todas las posibilidades, para cada librería, si se quiere determinar cual es el conjunto de frecuencias naturales que mejores resultados producen al imponerse la anulación de la derivada de la transformada de Laplace en ellas.

VII.6. CONSTRUCCIÓN DEL E-PULSO A PARTIR DE LOS COEFICIENTES DEL DESARROLLO EN β -*SPLINES*

Hasta este punto se han desarrollado los sistemas de ecuaciones que permiten encontrar los coeficientes lineales del desarrollo de los E-pulso en β -*splines*. Sin embargo, no se ha indicado un mecanismo a través del cual obtener la función, si no es a partir de la definición (7.19), que conlleva tediosos cálculos y sustituciones. En este apartado se describe explícitamente un mecanismo recursivo y rápido para obtener la función E-pulso para cualquier instante de tiempo.

El desarrollo que tenemos es del tipo:

$$f(t) = \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r^l N_l(t-r), \quad t \in [0, n] \quad (7.77)$$

donde $f(t)$ se relaciona con el E-pulso mediante la relación $ep(t) = f(t/\tau)$.

Lo que se supone es que se conocen los coeficientes $\{C_r\}_{r=-l+1, \dots, n-1}$ y la longitud de los intervalos de los β -*splines*, τ , como resultado de la resolución del sistema de ecuaciones para un l concreto. Lo que se desea es reconstruir la función E-pulso a partir de estos coeficientes.

Si introducimos la propiedad 2 de (7.8) en el desarrollo (7.77), se obtiene:

$$f(t) = \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r^l \left[\frac{t-r}{l-1} N_{l-1}(t-r) + \frac{l-t+r}{l-1} N_{l-1}(t-r-1) \right] \quad (7.78)$$

Si se tiene en cuenta que el soporte de $N_l(t)$ es el intervalo $[0, l]$, y se cambian los índices de las sumatorias se obtiene:

$$f(t) = \sum_{r=-m+2}^{n-1} \left[C_r^m \frac{t-r}{m-1} + C_{r-1}^m \left(1 - \frac{t-r}{m-1} \right) \right] N_{m-1}(t-r) \quad (7.79)$$

si se define para cualquier índice i , tal que $1 < i \leq l$, las funciones coeficiente $C_r^{i-1}(t)$ de la forma:

$$C_r^{i-1}(t) \equiv C_r^i(t) \frac{t-r}{i-1} + C_{r-1}^i(t) \left(1 - \frac{t-r}{i-1} \right) \quad (7.80)$$

Utilizando la propiedad recursiva de los β -*splines* las veces necesarias y utilizando las definiciones anteriores, se obtiene que, para cualquier i que cumpla $1 \leq i < l$:

$$f(t) = \sum_{r=-i+1}^{n-1} C_r^i(t) N_i(t-r) \quad (7.81)$$

En concreto se puede poner $f(t)$ en función de *splines* constantes, es decir $i=1$ en la anterior ecuación, de forma que:

$$f(t) = \sum_{r=0}^{n-1} C_r^1(t) N_1(t-r) \quad (7.82)$$

donde C_r^1 se calcula a partir de la fórmula recursiva de las funciones coeficientes dadas en (7.80).

La forma de implementar el proceso es el siguiente. Para todo $t' \in [0, n]$ se haya el número entero r que cumpla $r \leq t' < r+1$. Se toman los coeficientes iniciales $\{C_i\}_{i=r-l+1, \dots, r}$, y a partir de estos coeficientes se calcula $C_k^1(t')$ utilizando la relación recursiva (7.80). Esto se puede realizar para cualquier $t \in [0, n]$, lo que se suele hacer es fijar un periodo de muestreo T de forma que el intervalo $[0, n]$ se divide en puntos distanciados T/τ , evaluando la función $f(t)$ en esos puntos, de forma que $t=0, T/\tau, 2T/\tau, \dots, n$. A partir de la función $f(t)$ en los punto deseados se calcula la función E-pulso mediante la relación $ep(t) = f(t/\tau)$.

VII.7. CONCLUSIONES

Este capítulo se ha centrado en la construcción de los E-pulsos mediante *splines*. Las principales conclusiones que se pueden sacar son las siguientes.

Se han utilizado *splines* para formalizar la construcción de E-pulsos mediante funciones base polinómicas, especificando las ecuaciones a resolver.

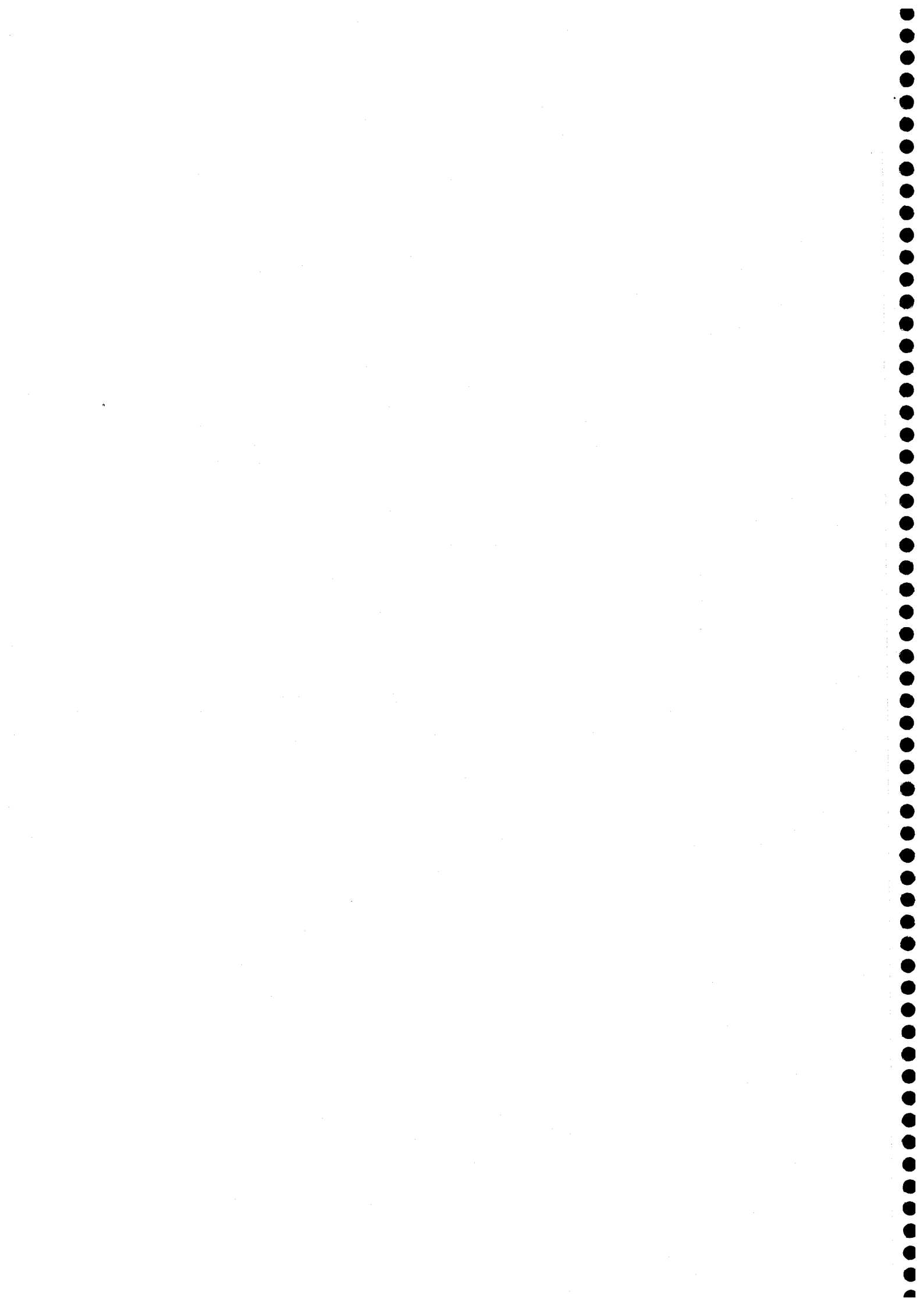
Utilizando la definición y las propiedades de los β -*splines* se ha construido un desarrollo alternativo en funciones base polinómicas. Las principales propiedades de este desarrollo son que sigue un esquema lineal, no como sucedía con el desarrollo estándar, y se reduce el orden del problema a solucionar. A su vez, debido a las propiedades de los β -*splines*, es sencillo imponer condiciones nuevas sobre la señal, especialmente sobre su transformada de Laplace, lo que es muy interesante en los E-pulsos.

Haciendo uso de lo anterior se han propuesto unas nuevas condiciones E-pulsos sobre las derivadas de las transformadas de Laplace de los E-pulsos; manteniendo el cumplimiento de las condiciones clásicas.

Por último se ha dado el mecanismo concreto de obtención de los E-pulsos a partir de los coeficientes del desarrollo en β -*splines*, lo que será necesario realizar en el desarrollo de los métodos.

CAPÍTULO VIII

NUEVO ESQUEMA DE DISCRIMINACIÓN DE BLANCOS DE RADAR BASADO EN PULSOS DE EXTINCIÓN



VIII.1. INTRODUCCIÓN

En los dos capítulos anteriores se describió el esquema de identificación de blancos de radar mediante E-pulso. Para poder llevar a cabo este esquema se necesitaba de la construcción de las señales E-pulso, lo que se realizó mediante el desarrollo lineal en β -splines. Una vez con los E-pulso, la señal dispersada por el blanco desconocido se hace pasar por cada uno de los filtros lineales que se construyen con cada uno de los E-pulso, aunque teóricamente la salida por el canal verdadero es nula, en la práctica esto no sucede nunca, de forma que se calcula la energía de las salidas de los distintos filtros y se elige como blanco verdadero aquel cuyo filtro E-pulso presente una menor energía de salida, siendo la entrada la señal dispersada por el blanco. Este esquema de identificación es el esquema de identificación que aparece en el trabajo original de Rothwell. En este capítulo se pretende un esquema de identificación de blancos basado en E-pulso distinto al esquema clásico de Rothwell. Esto se realizará aprovechando las propiedades estadísticas del ruido aditivo que se supondrá que es gaussiano blanco, estudiando el caso más genérico de un ruido coloreado en último lugar.

El desarrollo se llevará a cabo de la siguiente forma.

-En el apartado II se desarrollará explícitamente el esquema de identificación clásico, poniéndose de manifiesto como los resultados que este esquema proporciona a niveles de ruido altos no son asintóticamente correctos, y por tanto no son consistentes. Para resolver ese problema.

-En el apartado III se desarrollará un esquema de identificación distinto, mediante un doble muestreo independiente y la correlación cruzada de las series que resultan de este proceso. Se comprobará como los resultados de este esquema son asintóticamente correctos, lo que se espera que proporcione una mejora en los resultados.

-En el apartado IV se aborda la principal del nuevo esquema de identificación, que es la necesidad de que el ruido sea blanco. Se propondrá un nuevo esquema basado en HOS que propondrá resultados correctos aún en presencia de ruido coloreado.

VIII.2. E-PULSO CLÁSICO

Com ya se ha señalado en numerosas ocasiones, la respuesta dispersada por un blanco conductor se puede considerar en el dominio del tiempo como:

$$y(t) = x(t) + v(t) \quad (8.1)$$

donde $x(t)$ es la señal dispersada en ausencia de ruido y se puede modelar en el *late-time* como una superposición de sinusoidales amortiguadas, dependientes de las frecuencias naturales del blanco, tal y como se muestra en (7.2). La señal $v(t)$ es el ruido electrónico contaminante, que como primera suposición se supondrá que es una señal gaussiana blanca. Como ya se sabe, esta es una suposición restrictiva que se evita si no se impone ningún contenido espectral específico

en la señal $v(t)$, sin embargo, para estudiar el esquema clásico de identificación y proponer un esquema nuevo que supere las limitaciones que este posee, se impondrá al ruido aditivo que sea blanco, y por tanto totalmente decorrelacionado. El caso más genérico de ruido coloreado se tratará posteriormente de forma independiente, estudiando como afecta a los esquemas de identificación construidos y haciendo referencia obligada a las técnicas de alto orden. La técnica de discriminación de blancos de radar denominada E-pulso, en el dominio de recepción, utiliza la forma de la señal $x(t)$ en el *late-time* para construir un filtro para cada blancos de la librería. Estos filtros tienen la propiedad de que su salida es nula cuando la entrada sea la señal dispersada por el blanco para el cual ha sido construido el filtro. De esta manera se obtiene un conjunto de m filtros E-pulso, donde m es el número de blancos de la librería; y para identificar el blanco del que procede la señal dispersada sólo habrá que hacerla pasar por los m filtros e identificar el que proporcione una salida menor. Precisamente el blanco para el cual se ha construido ese filtro que proporciona una salida menor es el que se identifica como blanco presente, donde la salida menor será aquella cuya energía sea menor.

Si se realiza un tratamiento digital, la señal continua en el tiempo $y(t)$, pasa a ser una serie de datos $y(n)$, y los filtros E-pulso $\{ep_i(t)\}_{i=1,\dots,m}$ pasa a ser un conjunto de filtros digitales $\{ep_i(n)\}_{i=1,\dots,m}$. Una vez con la señal muestreada $y(n)$, se procede a la identificación del blanco desconocido, para lo que se hace pasar la señal por m canales, cada canal formado por un filtro digital E-pulso, obteniéndose m señales de salida, una por cada canal:

$$z_i(n) = ep_i(n) * y(n) = ep_i(n) * x(n) + ep_i(n) * v(n), \text{ con } i=1, \dots, m \quad (8.2)$$

Si el blanco presente es el blanco p , las señales de salida son de la forma

$$\begin{aligned} z_i(n) &= ep_i(n) * x(n) + ep_i(n) * v(n), \text{ para } i \neq p \\ z_p(n) &= ep_p(n) * v(n) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Se observa como para cualquier canal, es decir cualquier filtro E-pulso, la señal de salida posee un parte aleatoria que resulta de la convolución del ruido aleatorio con el filtro E-pulso y otra parte determinista que es la que lleva información sobre el blanco; concretamente para el canal correcto (que en este caso es el p) esta parte determinista es nula.

En el esquema de identificación estándar, como criterio de selección del canal correcto correspondiente al blanco p , se toma aquel cuya energía de salida en un determinado intervalo temporal sea menor. Este esquema de identificación queda representado en la figura 8.1, donde se ve claramente que el canal i consiste en un filtro E-pulso $ep_i(n)$ por el que se hace pasar la señal dispersada por el blanco desconocido $y(n)$ y el calculo de la energía E_i para la señal de salida del filtro $z_i(n)$. Al final lo que se hace es comparar todas las energías y tomar como blanco aquel cuyo canal presente menor energía. Es por esto por lo que la energía de los E-pulsos debe ser la misma, para permitir una correcta identificación del blanco. A continuación se mostrará como incluso imponiendo que todos los E-pulso tengan la misma energía, no se asegura una correcta identificación en presencia de ruido, incluso existe la posibilidad de una identificación sistemáticamente errónea del blanco presente, por supuesto para un nivel de ruido alto.

Este criterio de selección determina correctamente el blanco si la contribución de la

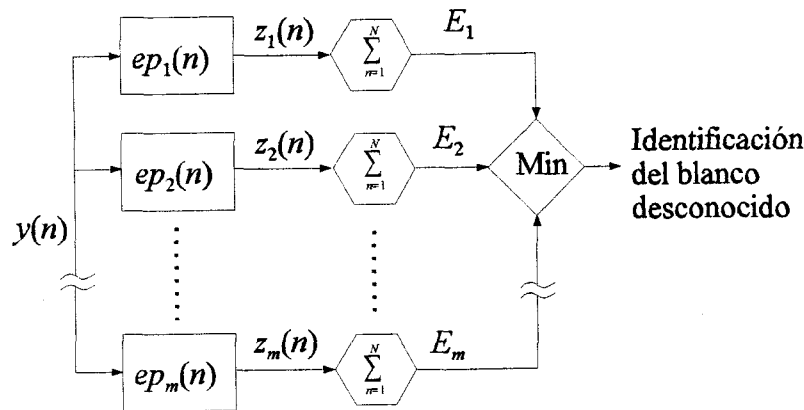


Figura 8.1. Esquema de discriminación de blancos de radar mediante E-pulsos clásico.

parte determinista domina sobre la contribución de la parte aleatoria en (8.3). Esto sucede a SNR altas e intermedias. A SNR bajas la elección del canal de menor energía como el canal verdadero no es válida en general, ya que en principio depende de la contribución de la señal dispersada $x(n)$ convolucionada dos veces con el filtro E-pulso correspondiente al canal, por la varianza del ruido.

Para ver esto basta calcular la energía E_i en un intervalo temporal de tamaño W y aplicar el teorema de la Parseval:

$$E_i = \sum_{n=n_0+1}^{n_0+W} |z_i(n)|^2 = \frac{1}{W} \sum_{k=0}^{W-1} |Z_i(k)|^2, \text{ con } Z_i(k) = \sum_{n=0}^{W-1} z_i(n+n_0+1) e^{-j2\pi nk/W} \quad (8.4)$$

donde el entero n_0 indica el comienzo del *late-time*. Desarrollando la energía y haciendo uso de que la transformada de la convolución es el producto de transformadas:

$$E_i = \frac{1}{W} \sum_{k=0}^{W-1} Z_i^*(k) Z_i(k) = \frac{1}{W} \sum_{k=0}^{W-1} (|E_{p_i}(k) X(k)|^2 + |E_{p_i}(k) V(k)|^2 + 2\text{Re}(X(k) V(k)) |E_{p_i}(k)|^2) \quad (8.5)$$

donde $E_{p_i}(k)$, $X(k)$ y $V(k)$ son las transformadas discretas de Fourier de $ep_i(n)$, $x(n)$ y $v(n)$, respectivamente. Como la transformada de Fourier de un proceso blanco es constante e igual a su varianza, la energía va a tender, para un número de datos suficiente, a:

$$E_i \approx \frac{1}{W} \sum_{k=0}^{W-1} (|E_{p_i}(k) X(k)|^2 + \gamma_v^2 |E_{p_i}(k)|^2 + 2\gamma_v \text{Re}(X(k)) |E_{p_i}(k)|^2) \quad (8.6)$$

En el caso de $i=p$ tanto el primer como el tercer término son nulos, por construcción de los E-pulsos, por lo que la energía del canal verdadero es la varianza del ruido por la energía del

filtro, una vez que se ha sumado para todas las frecuencias discretas k . En la síntesis de los filtros E-pulso, estos han de construirse todos de la misma energía para que la comparación de la energía proporcione la información deseada; por esto el segundo término, al sumarse para todas las frecuencias, será idéntico para las salidas de todos los canales. Sin embargo el valor del tercer término para un $i \neq p$ depende tanto del canal i , como de la señal de dispersión $x(n)$ y de la varianza del ruido. En concreto, puede perfectamente dar una contribución negativa a la energía, lo que podría proporcionar un valor menor en la energía para un canal falso que la obtenida para el canal verdadero, siempre que la contribución del primer término sea lo suficientemente pequeña. Si se produce este valor negativo del tercer término, al estar multiplicado por la varianza del ruido, sólo es cuestión de ir aumentando esta varianza (disminuir la SNR) para que este término anule la contribución del primer término. Se puede ver como pueden existir situaciones en las que este esquema de trabajo proporcione resultados asintóticos erróneos a niveles bajos de SNR.

En este capítulo se propone un esquema de identificación basado en E-pulso, que proporciona resultados asintóticos correctos a cualquier nivel de SNR. El desarrollo es el que se sigue a el siguiente apartado.

VIII.3. E-PULSO CON DISTINTOS PERÍODOS DE MUESTREO

En este apartado se construirá un esquema de identificación de blancos de radar que presenten resultados que no dependan asintóticamente ni de la forma concreta de los E-pulsos, ni del nivel de ruido con el que se contamina la señal. Para ello tanto la señal dispersada como los E-pulsos se muestrearán con distintos periodos de muestreo, realizando posteriormente la correlación cruzada entre las series con distintos periodos. De esta manera se intenta aprovechar las propiedades estadísticas del ruido aditivo blanco en la identificación. El desarrollo concreto del método es el siguiente.

Partiendo de la señal de entrada $y(t)$, se muestrea con K distintos periodo de muestreo no mesurables, $\{T_1, \dots, T_K\}$, obteniendose de esta forma K diferentes secuencias de datos $\{y_1(n), \dots, y_K(n)\}$. Las señales E-pulso también se muestrean con los K periodos, obteniendose un total de $m \cdot K$ filtros digitales $\{ep_{ij}(n)\}_{j=1, \dots, K}^{i=1, \dots, m}$, lo que significa K filtros digitales para cada blanco.

Si se convolucionan las secuencias $y_j(n)$ con los filtros E-pulso $ep_{ij}(n)$, para $l=j$, se obtienen $m \cdot K$ secuencias de salida:

$$z_{ij}(n) = ep_{ij}(n) * y_j(n), \text{ con } i=1, \dots, m \text{ y } j=1, \dots, K \quad (8.7)$$

La forma de estas secuencias de salida es:

$$z_{ij}(n) = d_{ij}(n) + v_{ij}(n) \quad \text{con} \quad \begin{cases} d_{ij}(n) = ep_{ij}(n) * x_j(n) \\ v_{ij}(n) = ep_{ij}(n) * v_j(n) \end{cases}, \quad i=1, \dots, m \text{ y } j=1, \dots, K \quad (8.8)$$

La primera parte de la secuencia de salida es determinista, mientras que la segunda es una secuencia gaussiana coloreada, de contenido espectral conocido e independiente para distinto j . Esto último se debe a que, al ser el ruido $v(t)$ blanco, dos instantes distintos de tiempos $v(t_1)$ y $v(t_2)$ serán estadísticamente independientes, siempre que los tiempos sean distintos, es decir, $t_1 \neq t_2$. Como se ha impuesto que los periodos de muestreos sean distintos y no mesurables, para dos j distintos $j_1 \neq j_2$ las secuencias $v_{j_1}(n_{j_1})$ y $v_{j_2}(n_{j_2})$ serán estadísticamente independientes, para cualesquiera valores de los índices n_{j_1} y n_{j_2} , ya que nunca corresponderán a instantes de tiempo idénticos. Hay que recordar que estos instantes de tiempo representan $t_{j_1} = T_{j_1} n_{j_1}$ y $t_{j_2} = T_{j_2} n_{j_2}$ y, al ser los periodos no mesurables siempre sucederá que $t_{j_1} \neq t_{j_2}$, y por tanto las secuencias serán estadísticamente independientes.

De esta forma, cada canal, que corresponde a cada blanco distinto, constará de K señales de entrada que se harán pasar por K filtros digitales y dan lugar a K señales de salida de estos filtros.

La autocorrelación de las secuencias de salida es:

$$r_{ij}(\tau) = \sum_n z_{ij}(n)z_{ij}(n+\tau) = \sum_n d_{ij}(n)d_{ij}(n+\tau) + \sum_n v_{ij}(n)v_{ij}(n+\tau), \quad i=1, \dots, m \text{ y } j=1, \dots, K \quad (8.9)$$

donde se ha utilizado que el ruido gaussiano es de media nula.

Si la señal $y(t)$ ha sido dispersada por el blanco p , la serie $d_{pj}(n)$ es nula para cualquier periodo de muestreo T_j . Las señales de salida de los distintos canales serán, por tanto:

$$\begin{cases} z_{ij}(n) = d_{ij}(n) + v_{ij}(n) & \text{para } i \neq p \\ z_{ij}(n) = v_{ij}(n) & \text{para } i = p \end{cases} \quad \text{con } i=1, \dots, m, \text{ y } j=1, \dots, K \quad (8.10)$$

A partir de estas secuencias de salida $z_{ij}(n)$ se pueden construir las correlaciones cruzadas para dos secuencias con igual i y distinto j , es decir, las correlaciones cruzadas de dos señales de salida del mismo canal pero con distinto periodo de muestreo:

$$r_{jk}^i(\tau) = \sum_n z_{ij}(n)z_{ik}(n+\tau), \quad \text{con } i=1, \dots, m; j, k=1, \dots, K \text{ y } j \neq k \quad (8.11)$$

desarrollando queda

$$\left. \begin{aligned} r_{jk}^i(\tau) &= \sum_n d_{ij}(n)d_{ij}(n+\tau) + \sum_n v_{ij}(n)v_{ik}(n+\tau) & \text{para } i \neq p \\ r_{jk}^i(\tau) &= \sum_n v_{ij}(n)v_{ik}(n+\tau) & \text{para } i = p \end{aligned} \right\} \quad i=1, \dots, m; j, k=1, \dots, K \text{ y } j \neq i \quad (8.12)$$

Como ya se ha explicado, al ser el ruido $v(t)$ blanco, las series $v_j(n)$ serán independientes para periodos de muestreos distintos, luego las correlaciones cruzadas no tendrán componente aleatoria debida al ruido aditivo gaussiano en el caso $j \neq k$, por lo que la anterior ecuación resulta:

$$\left. \begin{aligned} r_{jk}^i(\tau) &= \sum_n d_{ij}(n)d_{ij}(n+\tau) && \text{para } i \neq p \\ r_{jk}^i(\tau) &= 0 && \text{para } i = p \end{aligned} \right\} i=1, \dots, m; j, k=1, \dots, K \text{ y } j \neq k \quad (8.13)$$

A partir de estas correlaciones cruzadas se puede definir como criterio de elección del canal verdadero aquel que proporciona una menor energía de las correlaciones cruzadas, definidas anteriormente, para una cierta ventana de retardos temporales, caracterizada por el máximo de los retardos temporales en la correlación τ_0 . Es decir, se tomará como canal verdadero aquel que proporcione una menor energía de correlación definida de la forma:

$$E_i = \sum_{\tau=-\tau_0}^{\tau_0} |r_{jk}^i(\tau)|^2 \text{ para } i=1, \dots, m; j, k=1, \dots, K \text{ y } j \neq k \quad (8.14)$$

El valor teórico de estas energías de correlación no dependen del nivel de ruido que contaminen la señal, obteniéndose así un criterio de selección del canal verdadero válido y asintóticamente independiente del nivel de ruido aditivo gaussiano blanco. Por supuesto, como en todo problema que necesite estimar cantidades estadísticas a partir de datos ruidosos, al disminuir la SNR, los errores de estimación serán mayores y será más probable un error en la identificación del blanco dentro de una situación concreta. Pero estos son errores aleatorios, disminuyendo al aumentar el número de datos; no como sucede si se toma como canal verdadero el canal de mínima energía, el cuyo caso pueden aparecer errores sistemáticos que imposibilite una identificación acertada, incluso aumentando indefinidamente el número de datos. Dada la naturaleza de las señales con las que se trabaja en este problema, que decaen exponencialmente con el tiempo, el número de datos que un registro que se pueden incluir para mejorar la convergencia estadística puede tener es limitado. Efectivamente, el introducir datos donde la señal ya no es apreciable no mejora la estadística, pudiendo producir sólo un empeoramiento. Por tanto, si se quiere mejorar la estadística para un cierto ambiente ruidoso, la única posibilidad es disponer de alguna forma de registros independientes, también de una longitud finita, con los que promediar las correlaciones.

En el desarrollo del método se necesita que haya una independencia estadística entre dos secuencias para un mismo canal, por lo que se necesita como mínimo dos periodos de muestreo distintos para cada canal y por tanto para cada E-pulso, dando lugar a dos filtros digitales por blanco. Pero no se necesita independencia estadística entre las secuencias de salida para canales distintos, por lo que no es necesario imponer que los periodos de muestreo de dos canales distintos no sean mesurables. De esta forma, el número mínimo de periodos con los que hay que muestrear la señal dispersada $y(t)$ son dos.

En resumen, el esquema de identificación de blancos de radar que se consigue mediante

este procedimiento es el siguiente. Para cada uno de los m blancos de la librería se calculan sus E-pulsos, mediante el procedimiento que se siguió en el capítulo anterior, con el que se consigue las señales $ep_i(t)$ con $i=1, \dots, m$. La señal dispersada por el blanco desconocido $y(t)$ se muestrea con dos periodos distintos y no mesurables, T_1 y T_2 , obteniéndose dos secuencias de datos $y_1(n)$ y $y_2(n)$. De igual forma, las m señales E-pulso $ep_i(t)$ se muestrean con los dos periodos anteriores, obteniéndose $2m$ filtros digitales E-pulso $ep_{i1}(n)$ y $ep_{i2}(n)$ con $i=1, \dots, m$, dos para cada blanco de la librería. Se hace pasar las señales muestreadas con cada periodo por los m filtros construidos usando ese periodo. De esta forma se consiguen $2m$ secuencias de salida de los filtros $z_{i1}(n)$ y $z_{i2}(n)$ con $i=1, \dots, m$, dos para cada blanco lo que significa dos para cada canal, ya que cada blanco define un canal por los que se hacen pasar a las señales y que proporcionan una salida que se compara entre los distintos canales. Para cada canal, se calcula las correlaciones cruzadas entre las dos secuencias de salida correspondientes. Una vez con estas correlaciones cruzadas se calcula la energía de correlación tal y como se define en (8.14). Se identifica como blanco correcto aquel que proporcione menor energía de correlación en su canal. El esquema de identificación se presenta en la figura 8.2.

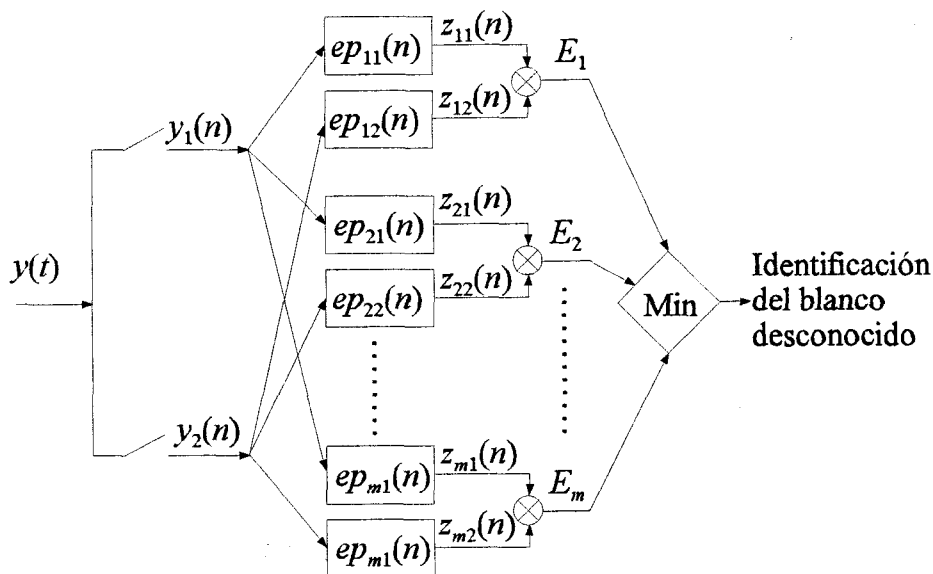


Figura 8.2. Esquema de discriminación de blancos de radar mediante E-pulsos de correlación.

Un parámetro a que habría que determinar es el número máximo de los retardos temporales en las correlaciones cruzadas τ_0 .

Tras todo el desarrollo teórico, este no será el esquema que proporcionará mejores resultados, ya que presenta deficiencias importantes en el uso de las propiedades estadísticas de las correlaciones. Por tanto se introducirán algunas modificaciones en el anterior esquema para aprovechar al máximo las propiedades estadísticas del ruido. Estas modificaciones se entenderán mejor a partir de un ejemplo.

El ejemplo que se va a desarrollar consiste en partir de la señal dispersada por un hilo conductor de longitud L , formando un ángulo de 30° con el emisor-receptor, donde se han excitado las primeras cuatro frecuencias naturales. En el siguiente capítulo se hará un desarrollo detallado de como sintetizar dicha señal analíticamente. La librería de blancos

consistirá en tres hilos conductores rectos y finos, de longitudes L , $1.1L$ y $0.9L$, cuyas frecuencias naturales se pueden calcular a partir de la tabla 9.1. Con estas frecuencias naturales se construyen los E-pulso constantes de Rothwell, es decir, E-pulsos constantes a trozos imponiendo únicamente la anulación de la transformada de Laplace en las frecuencias naturales. Por último, con estos E-pulsos se desarrollan los dos esquemas de identificación: el que se presenta en la figura 8.3., que se llamará esquema clásico y que compara las energías de las señales de salida (8.4); y el que se presenta en el esquema de la figura 8.2., que se llamará esquema de correlación-1 y que compara las energías de correlación definidas en (8.14).

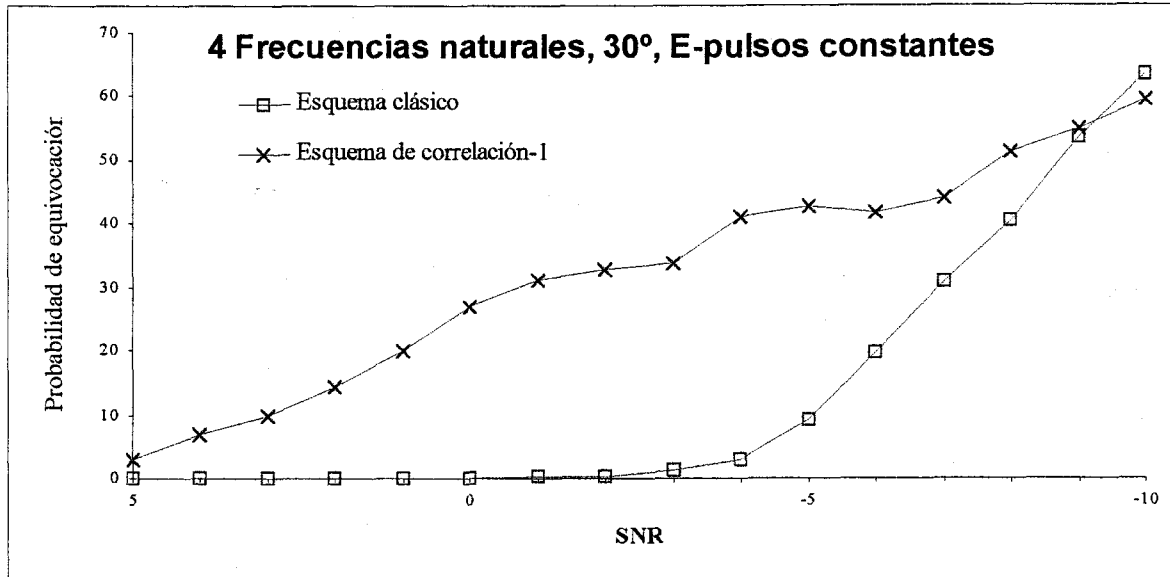


Figura 8.3. Comparación entre el esquema clásico y el de correlación-1

Lo que se va a estudiar es el número de veces que se equivoca cada esquema en 100 realizaciones, que será un estimador de la probabilidad de equivocación de cada esquema cuando el blanco presente es el hilo de longitud L , observado bajo un ángulo de 30° . Esta probabilidad de equivocación se calculará en función de la SNR de la señal, cuando se contamina con ruido aditivo blanco, de media nula. El proceso es el siguiente, se sintetizan 100 señales ruidosas distintas. Con cada una de ellas y con los E-pulsos ya calculados se desarrollan los dos esquemas de identificación. El resultado es el número de veces que se equivoca en la identificación del blanco de longitud L , que es el que se encuentra presente, y este número se tomará como la estimación de la probabilidad de equivocación.

El parámetro τ_0 de (8.14) se ha tomado igual a cero, mientras que los dos periodos de muestreo del esquema de identificación de correlación-1 han sido $T_1=0.02 L/c$ y $T_2=0.019 L/c$. En el esquema de identificación clásico el periodo de muestreo ha sido $T=0.02 L/c$. Los resultados se muestran en la siguiente figura.

En la gráfica se puede ver como en el esquema de correlación-1 se empieza a equivocar antes que el esquema clásico. Aunque la pendiente de la gráfica que proporciona el número de errores para el esquema clásico es bastante mayor que para el esquema de correlación-1, este último esquema no es mejor hasta que la probabilidad de equivocarse ronda el 40 %. Esto hace que el esquema de correlación-1 no mejore, en la práctica, al clásico, ya que a esos niveles de

error se puede considerar que el método falla. Esto no significa que el método correlación-1 no mejore al método clásico en ninguna situación, significa que para estos blancos no proporciona mejora. Como se ha mostrado en el desarrollo del esquema, los resultados asintóticos del método clásico dependen tanto de la forma concreta de los E-pulsos como de la SNR de la señal, mientras que el método correlación-1 no lo hace, lo que significa que el hecho de que el primero sea mejor al segundo en una situación concreta (una librería de blancos formada por tres hilos de longitudes L , $0.9L$ y $1.1L$, estando presente el hilo de longitud L) no implica que no lo sea para ninguno. También es cierto que asintóticamente el método correlación-1 es insesgado, luego si se estuviera en disposición de hacer media en registro independientes de las correlaciones (sensores múltiples, por ejemplo) se espera que los resultados del método mejorarían paulatinamente a medida que aumenta el número de registros independientes con los que se promedia. Sin embargo, es cierto que este fallo en una situación tan sencilla como la presentada en este ejemplo hace pensar en lo limitadas que pueden ser las situaciones en las que efectivamente los resultados del esquema clásico se vean mejorados.

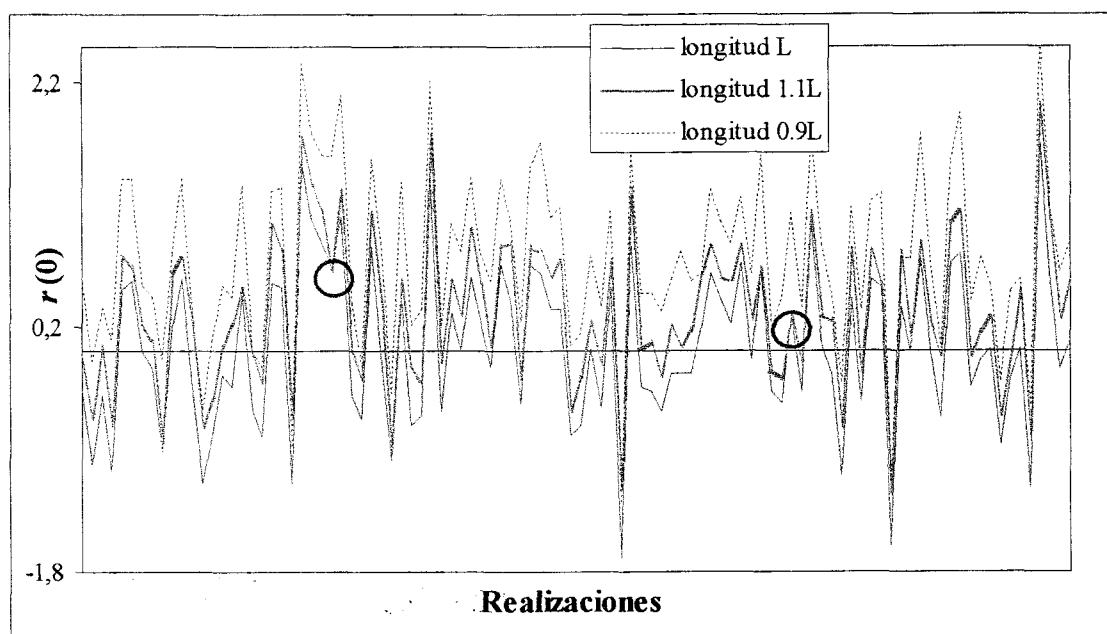


Figura 8.4. 100 correlaciones cruzadas de las salidas de cada uno de los tres canales

Es razonable esperar una mejora al introducir un mayor número de retardos temporales en la correlación, es decir, al aumentar el τ_0 . Sin embargo se ha realizado esta operación esperando una mejora efectiva de los resultados pero éstos han sido similares, cuando no peores, a los obtenidos tomando $\tau_0=0$.

¿Dónde reside el motivo de que el esquema de correlación-1 no mejore? En principio cabe esperar que los errores en la identificación se deban a que la varianza del ruido sea tan grande que enmascare la respuesta no nula a la señal dispersada sin ruido por los canales que no corresponden al blanco presente. Sin embargo la principal razón de los errores de identificación no es esta. Si se dibuja el valor de la correlación cruzada $r(\tau)$, con $\tau=0$, para 100 realizaciones, con una SNR de -4 dB, con 4 frecuencias naturales excitadas, susteniendo el hilo de longitud L un ángulo de 30° con el receptor y para la salida de los tres canales, es decir

los E-pulsos constantes contruidos para los blancos de longitud $0.9 L$, L y $1.1 L$, se obtiene la siguiente figura:

El resultado es que sólo en dos ocasión la correlación cruzada del canal del hilo de longitud L es mayor que la correlación de alguno de los otros dos canales. Sin embargo en la gráfica de la figura 8.3 se ve un número de errores superior a treinta, en 100 realizaciones, para el esquema de correlación-1. Esta aparente discordancia de resultados para el mismo esquema radica en que lo que se compara en el esquema no es la correlación cruzada, si no la energía de correlación dada en (8.14), que para este caso es igual a la correlación cruzada al cuadrado. Efectivamente, si se representan los cuadrados de las anteriores correlaciones cruzadas para las 100 realizaciones se obtiene la figura 8.5.

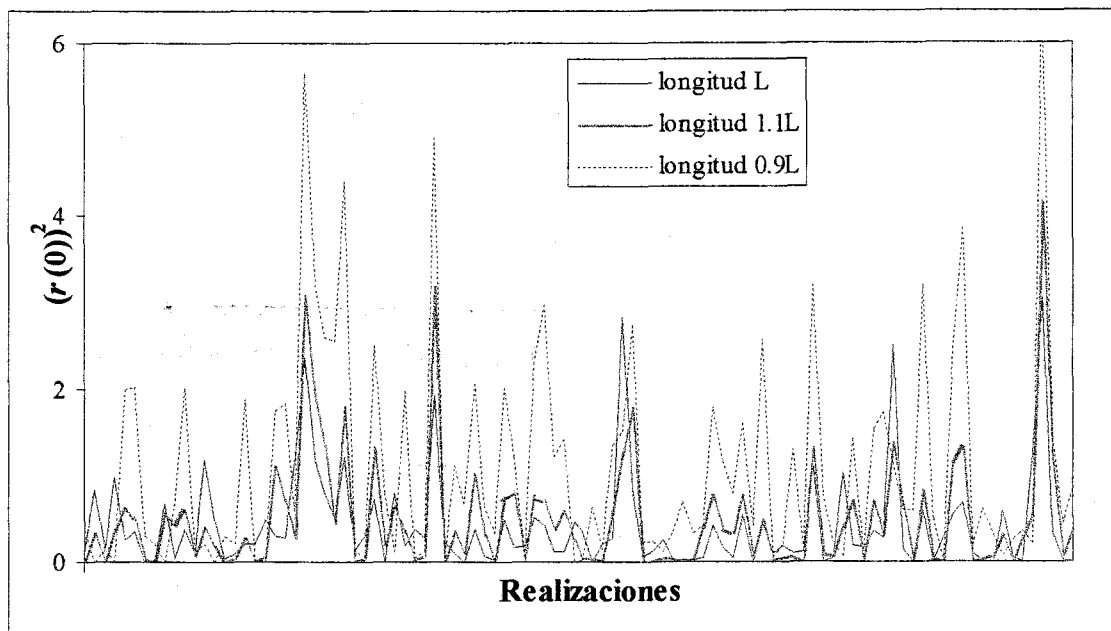


Figura 8.5. 100 Energías de correlación (8.14) de las salidas de cada uno los tres canales

En la figura se observa como el cuadrado de la autocorrelación en el canal del hilo de longitud L es mayor que en alguno de los otros dos canales hasta en 43 ocasiones.

¿Qué es lo que está sucediendo? ¿Por qué es mucho mejor tomar la correlación cruzada que el cuadrado de la correlación? La explicación se puede buscar en el hecho de que los periodos de muestreo sean muy parecidos y pequeños comparados con los tiempos mínimos de oscilación de la señal dispersada. La contribución de la parte determinista a la correlación, que poseen sólo los canales no verdaderos, será positiva. Esto se explica debido a que, para la señal dispersada en ausencia de ruido $x(t)$, al ser los periodos muy parecidos, $x_1(nT_1)$ y $x_2(nT_2)$ serán mayoritariamente del mismo signo. Sin embargo, la contribución de la parte aleatoria a la correlación puede ser positiva o negativa. En el caso de que esta última contribución sea positiva, la suma de la contribución determinista hará que los cuadrados de la correlaciones para los canales no verdaderos, que son los que poseen una parte determinista, sean mayores que para el canal verdadero, identificándose correctamente el blanco. Sin embargo, si la contribución aleatoria es negativa, al sumar la contribución determinista, que es positiva, los cuadrados de las correlaciones para los canales no verdaderos pueden ser menores que en el canal verdadero, tal y como se observa en las anteriores gráficas,

produciéndose un error en la estimación. Se observa que este error se podría evitar tomando como canal verdadero aquel que presente menor correlación cruzada, y no menor correlación al cuadrado. Para que el desarrollo anterior sea correcto se necesita que los periodos de muestreo sean muy parecidos y que sean suficientemente pequeños para que la señal oscile muy poco de un dato muestreado al siguiente. Como se conocen las frecuencias naturales que aparecen en el *late-time* y se sabe hasta que frecuencia natural del blanco se ha excitado, se puede saber cual va a ser la máxima frecuencia presente en la señal. Es cuestión de tomar los periodos de muestreo suficientemente pequeño para muestrear suficientemente una señal que oscile con esta frecuencia máxima. La contribución de la parte determinista en cada canal será tanto más positiva mientras menores sean los periodos de muestreo y más similares sean entre ellos. Es cierto que, aunque al principio los las cantidades nT_1 y nT_2 van a ser muy próximas para n bajos, la diferencia entre ellas va a ir aumentando a medida que n aumente, sin embargo, hay que recordar que es precisamente a n bajos donde la parte determinista toma valores más importantes, decayendo luego exponencialmente. Es por tanto a estos n bajos donde es necesario que los tiempos muestreados sean similares, lo que precisamente proporciona el método.

Si en el desarrollo del esquema de correlación-1 se introduce este nuevo criterio de selección del canal se puede construir un nuevo esquema de identificación, que se denominará correlación-2 y que toma como canal verdadero el que presente menor correlación cruzada. Los resultados para el mismo caso representado en la figura 8.6, se muestran en la figura 8.6.

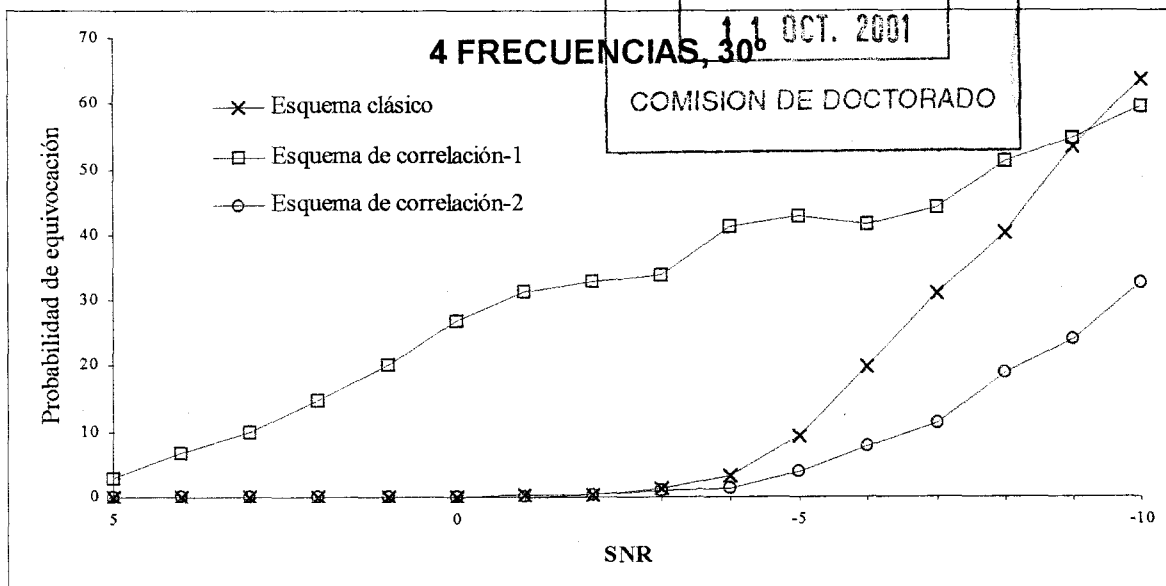


Figura 8.3. Comparación entre el esquema clásico, el de correlación-1 y el de correlación-2

Se puede observar una gran mejora del esquema de correlación-2 respecto del esquema de correlación-1, donde la única diferencia entre uno y otro es que el primero toma como canal verdadero aquel que tenga menor correlación cruzada y el segundo la toma al cuadrado. No sólo se presenta una mejora frente al esquema de correlación-1, sino también respec, y también frente al esquema clásico.

El esquema de correlación-2, teniendo en cuenta las características que deben cumplir las frecuencias de muestreo, es el que se tomará a partir de este punto como esquema de

identificación de blancos, desechando el de correlación-1. Se nombrará simplemente como esquema de correlación y se presenta en la siguiente figura:

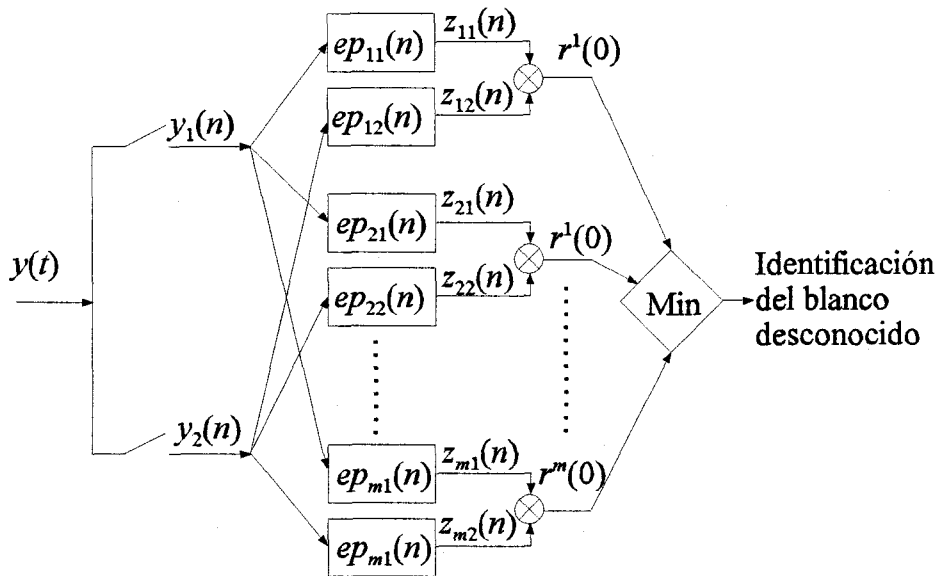


Figura 8.7. Esquema de discriminación de blancos de radar de correlación.

Se consigue así, como deseábamos, un esquema de identificación asintóticamente insesgado para cualquier SNR, que se espera que mejore los resultados obtenidos con el esquema de identificación clásico. Un estudio más profundo de los resultados obtenidos por este esquema se desarrollará en el siguiente capítulo.

VIII.4. RUIDO ADITIVO COLOREADO

La principal limitación del esquema de correlación es la necesidad teórica de que el ruido aditivo sea blanco, ya que de no ser así la suposición de independencia de las series de ruido para distintos periodos de muestreo no es válida. En caso de que el ruido aditivo no sea blanco, es decir, sea coloreado, hay que recurrir a la estadística de alto orden para conseguir un esquema de identificación que no dependa asintóticamente de la forma concreta de los E-pulsos, del nivel del ruido, ni del contenido espectral específico de este. Esto se debe a la propiedad ya conocida de que la estadística de alto orden de un proceso gaussiano es nula, sea cual sea el contenido espectral de este.

En este esquema de alto orden no será necesaria la utilización de distintos periodos de muestreo, ya que los cumulantes (correlación de alto orden) de procesos gaussianos son nulos, y no necesita de una correlación cruzada para anular la contribución del ruido. Por supuesto, este esquema también se puede seguir en el caso anterior de ruido blanco, eliminando de este modo la necesidad de muestrear con periodos distintos. Sin embargo no es aconsejable, ya que la estadística de alto orden posee errores de estimación significativamente mayores que las correlaciones, lo que hace aconsejable, siempre que sea posible, un tratamiento en términos de estadística de segundo orden.

Este esquema de alto orden será idéntico al esquema clásico, tal y como aparece en la figura 8.1., sin más que comparar en vez de la energía de las señales de salida, algún promedio de alto orden. Este promedio puede ser, por simplicidad la kurtosis o el factor de asimetría, que se definieron en el capítulo I. Es cierto que se podría definir promedios de alto orden más complicados, que involucren distintos retardos temporales en los argumento de los cumulantes, pero, al igual que sucede en el esquema de correlación, esta operación se ha comprobado que no mejora los resultados, cuando no los empeora. Aunque es fácil de comprobar como los resultados que proporciona este esquema de alto orden, la gran varianza que presenta la estadística de alto orden frente a la de orden dos hace muy posible que este esquema no proporcione resultados mejores que los anteriores esquema, más si se tiene en cuenta el número finito de datos que de los que se disponen en cada registro, lo que impide una disminución de la varianza haciendo uso de un mayor número de datos.

En el siguiente capítulo se estudiará como se comporta este esquema de alto orden en presencia de ruido aditivo coloreado, en comparación con los dos esquemas anteriores: el clásico y el de correlación.

En la siguiente figura se presenta este esquema:

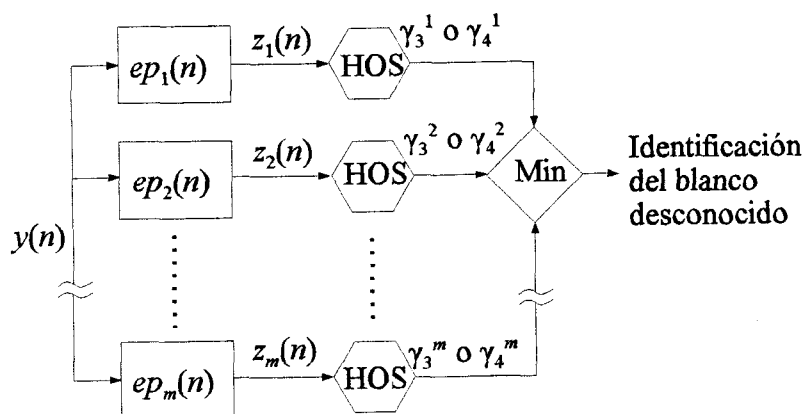


Figura 8.9. Esquema de discriminación de blancos de radar de alto orden.

donde γ_3^i y γ_4^i representan el factor de asimetría y la kurtosis de la señal de salida de canal i , respectivamente.

VIII.5. CONCLUSIONES

Las principales consecuencias que se pueden obtener a partir del desarrollo seguido en este capítulo son las siguientes.

Se ha puesto de manifiesto la incorrección de los resultados asintóticos en presencia de ruido del esquema clásico de identificación de blancos de radar mediante E-pulsos.

A través de muestreos independientes se ha construido un esquema alternativo, llamado esquema de correlación, en el que los resultados que proporciona son asintóticamente

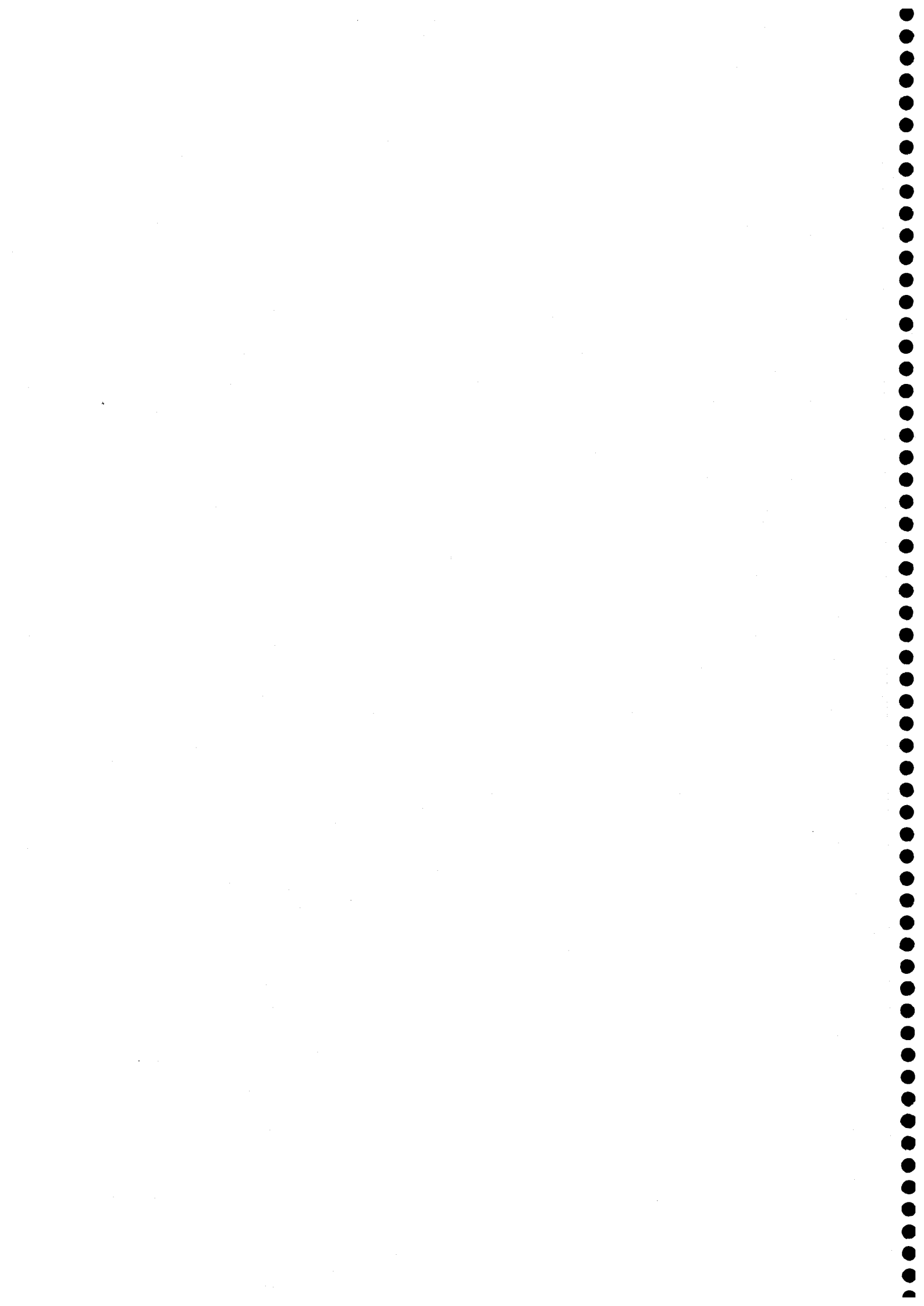
correctos. En su desarrollo se ha comparado inicialmente la denominada energía de correlación de las salidas de cada uno de los canales del esquema. Posteriormente se ha estudiado una alternativa a esta comparación que permite una gran mejora de los métodos.

Para que el esquema que resulta de la nueva comparación proporcione resultados óptimos, se han especificado las propiedades que deben cumplir los distintos periodos de muestreo.

Se ha visto como la principal limitación teórica del nuevo esquema es la necesidad de que el ruido sea blanco, ya que si el ruido es coloreado los resultados que proporciona este esquema no son asintóticamente correctos. En el último apartado se ha construido un esquema de discriminación basado en estadística de alto orden, cuyos resultados sí serán asintóticamente correctos.

CAPÍTULO IX

DISCRIMINACIÓN DE BLANCOS DE RADAR MEDIANTE PULSOS DE EXTINCIÓN: SIMULACIONES Y RESULTADOS



IX.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se persigue el estudio de los resultados obtenidos en los dos anteriores capítulos. En concreto se realizará la construcción los E-pulsos haciendo uso de los desarrollos en β -splines, tanto los resultantes de imponer las condiciones E-pulso clásicas como las nuevas condiciones introducidas en VII.5, estudiando el comportamiento de los dos conjuntos de E-pulsos en función del nivel de ruido, la orientación relativa de los blancos y el número de frecuencias naturales que se anulan. También se compararán el esquema de discriminación E-pulso clásico con el desarrollado en el capítulo VIII. Para realizar todo esto hay que trabajar con una librería de blancos, a los que calcular los E-pulsos y con cuyas señales dispersadas se puedan analizar los resultados. La librería de blancos van a ser tres hilo conductores delgados de longitudes L , $0.9L$ y $1.1L$.

La principal ventaja en la elección de esta librería radica en que la respuesta impulso de un hilo conductor es conocida analíticamente. Esto permite la construcción de la señal en función de parámetros tales como la orientación relativa del hilo, el número de frecuencias naturales o el periodo de muestreo, parámetros que serán muy interesantes en el estudio de los distintos esquemas y los distintos E-pulso que se quieren comparar en este apartado. Se evita de esta manera la utilización de complicados y costosos equipos experimentales para la obtención de las señales dispersadas por los blancos a una determinada excitación. Este tipo de librerías también posee la ventaja de que es bastante utilizado en la bibliografía, lo que permite comparar los métodos obtenidos en este trabajo con otros que aparezcan en la bibliografía.

El esquema que se va a seguir es el siguiente:

-En el apartado IX.2. se estudia el campo eléctrico dispersado por un hilo conductor recto y delgado. Este campo se puede calcular analíticamente, lo que se utilizará para realizar simulaciones sencillas, tomando hilos de distintas longitudes como librería de blancos.

-En el apartado IX.3. se construyen los E-pulsos mediante el desarrollo en β -splines desarrollado en el capítulo VII. para una librería de blancos consistentes en tres hilos conductores, delgados y rectos, de longitudes L , $0.9L$ y $1.1L$. También se construyen los E-pulsos que cumplen las nuevas condiciones E-pulso, para la misma librería de blancos. Posteriormente se compararán y analizarán los resultados que ambos conjuntos de E-pulsos presentan con el esquema de identificación clásico.

-En el apartado IX.4. se comparan los resultados que presentan los esquemas de identificación clásicos y de correlación, para los E-pulsos con condiciones clásicas construidos en el apartado IX.3. En primer lugar se estudiará el caso de señales contaminadas con ruido blanco y posteriormente se presentarán y comentarán los resultados para ruidos con diferente coloreado. En esta última comparación se añadirá el esquema de alto orden y se compararán con los otros dos.

IX.2. CAMPO ELÉCTRICO DISPERSADO POR UN HILO CONDUCTOR. RESPUESTA IMPULSO DEL HILO

Para el desarrollo de la señal dispersada, se va a considerar un hilo conductor cilíndrico y delgado, de longitud L y radio a , iluminado por una onda electromagnética plana transitoria formando un ángulo θ , tal y como se indica en la figura 9.1, y cuyo campo eléctrico asociado viene dado en el dominio del tiempo por:

$$\vec{E}^i(\vec{r},t) = \hat{p} e\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{k}}{c}\right) \tag{9.1}$$

donde $e(t)$ representa la variación temporal de la onda incidente.

La transformada de Laplace de la componente tangencial del anterior campo eléctrico, en un punto del hilo que diste z del origen de coordenadas viene dada por:

$$E_{\tan}^i(z,s) = \text{sen}\theta E(s) e^{-sz \cos\theta/c} \tag{9.2}$$

Esta componente tangencial inducirá una corriente $I(z,t)$ en el hilo, la cual a su vez generará un campo eléctrico $\vec{E}^s(\vec{r},t)$ y magnético dispersado $\vec{H}^s(\vec{r},t)$. Esta corriente, $I(z,s)$, se puede obtener como solución de la ecuación integral MFIE dada en (A.1), o su correspondiente para el campo eléctrico EFIE dada por

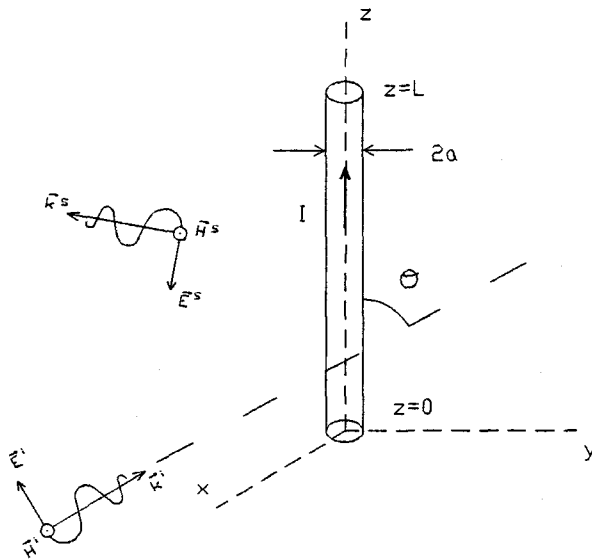


Figura 9.1. Hilo conductor iluminado por una onda electromagnética plana.

$$\int_{S'} \left[\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}',s) (\hat{t} \cdot \nabla) - \frac{s^2}{c^2} \hat{t} \cdot \vec{J}(\vec{r}',s) \right] \frac{e^{-(sR/c)}}{4\pi\epsilon_0 R} dS' = -s \hat{t} \cdot \vec{E}^i(\vec{r},s) \tag{9.3}$$

En este caso, al tratar el problema como una estructura abierta, es necesario utilizar una formulación EFIE, que para el caso de hilos conductores delgados ($L \gg a$) y ($a \ll \lambda$) se reduce a la ecuación integrodiferencial de Pocklington [TES73]:

$$\int_0^L \Gamma(z, z', s) I(z', s) dz' = S(z, s) \quad (9.4)$$

con el núcleo $\Gamma(z, z', s)$ dado por:

$$\Gamma(z, z', s) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{s^2}{c^2} \right) \frac{e^{-sR/c}}{4\pi R}; \quad R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2} \quad (9.5)$$

y la función de excitación $S(z, s)$ por:

$$S(z, s) = -\epsilon_0 \text{sen}\theta [sE(s)e^{-sz\cos\theta/c}] \quad (9.6)$$

A continuación, y de forma análoga al apéndice A, se aplica el método de expansión en singularidades. Los modos naturales serán soluciones de la ecuación de Pocklington homogénea, de forma que la solución general de dicha ecuación será una expansión de Mittag-Leffler, tal y como aparece en (A.9). Por tanto la solución SEM de la ecuación de Pocklington vendrá dada según (A.21) y (A.9) como:

$$I(z, s) = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha}(s) I_{\alpha}(z) \frac{1}{s-s_{\alpha}} \quad (9.7)$$

que se ha expresado en el dominio de la transformada de Laplace, donde I_{α} es la distribución de corriente espacial del α -ésimo modo natural y $a_{\alpha}(s)$ son los coeficientes de acoplo. En esta ecuación se ha considerado un número de modos finito N y que no existe contribución de la función entera. Se puede demostrar [CHE82b] que en este caso los coeficientes de acoplo $a_{\alpha}(s)$ vienen dados por la expresión:

$$a_{\alpha}(s) = \frac{\int_0^L S(z, s) v_{\alpha}(z) dz}{\int_0^L dz v_{\alpha}(z) \int_0^L v_{\alpha}(z') \left[\frac{\partial}{\partial s} \Gamma(z, z', s) \right]_{s=s_{\alpha}} dz'} \quad (9.8)$$

Si se representa $I_{\alpha}(z)$ por la aproximación:

$$v_{\alpha}(z) = \text{sen}\left(\frac{\alpha\pi z}{L}\right) \quad (9.9)$$

$\alpha_{\alpha}(s)$ puede ser evaluado, y llevado a la expresión (9.7), obteniendo de esta forma la siguiente expresión para la corriente inducida $I(z,s)$:

$$I(z,s) = \frac{4\pi^2 \text{sen}\theta}{\mu_0 L^2 (2\ln(L/a) - 1)} sE(s) \sum_{\alpha=1}^N \alpha \left[\frac{1 - (-1)^{\alpha} e^{-sL\cos\theta/c}}{s^2 \cos^2\theta/c^2 + \alpha^2 \pi^2/c^2} \right] \left[\frac{1}{s_{\alpha}(s-s_{\alpha})} + \frac{1}{s_{\alpha}^*(s-s_{\alpha}^*)} \right] \text{sen}\left(\frac{\alpha\pi z}{L}\right) \quad (9.10)$$

El módulo de la componente tangencial al hilo del campo eléctrico dispersado en un punto lejano se puede obtener del potencial vector como:

$$E^s(r,s) = sA(r,s) \text{sen}\theta \quad (9.11)$$

donde $A(r,s)$ es el módulo del potencial vector escalar que viene dado por:

$$A(r,s) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-sr/c} \int_0^L I(z,s) e^{-sz\cos\theta/c} dz \quad (9.12)$$

donde r es la distancia entre el hilo y un punto de observación situado en la zona de radiación del hilo.

Introduciendo la expresión de $I(z,s)$ dada por (9.10) en (9.12) se obtiene finalmente una expresión para el campo dispersado $E^s(r,s)$, esto es:

$$E^s(r,s) = k_1 \frac{e^{-sr/c}}{r} E(s) H(s,\theta) \quad (9.13)$$

donde

$$k_1 = \frac{L \text{sen}^2\theta}{(2 \ln(L/a) - 1) \pi^2} \quad (9.14)$$

y la función de transferencia $H(s,\theta)$ viene dada por:

$$H(s, \theta) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{s^2}{(\pi\alpha)^2} \left[\frac{1 - (-1)^\alpha e^{-sT}}{1 + (T/\alpha\pi)^2 s^2} \right]^2 \left[\frac{1}{s_\alpha(s-s_\alpha)} + \frac{1}{s_\alpha^*(s-s_\alpha^*)} \right] \quad (9.15)$$

donde T es el tiempo de tránsito de un impulso $\delta(t)$ por el hilo, y viene dado por:

$$T = (L/c) \cos\theta \quad (9.16)$$

La amplitud del campo eléctrico dispersado en el dominio del tiempo puede obtenerse haciendo la Transformada inversa de Laplace en (9.13), obteniéndose:

$$E^s(r, t) = \frac{\text{sen}^2\theta}{2\ln(L/a) - 1} \frac{L}{r} \sum_{\alpha=1}^N (E(s_\alpha) C_\alpha(s_\alpha) e^{s_\alpha(t-r/c)} + E(s_\alpha^*) C_\alpha(s_\alpha^*) e^{s_\alpha^*(t-r/c)}) \quad (9.17)$$

donde

$$C_\alpha(s) = \frac{1}{(\alpha\pi)^2} \frac{sL}{c} \left[\frac{1 - (-1)^\alpha e^{-sT}}{\left(\frac{sT}{\alpha\pi} \right)^2 + 1} \right]^2 \quad (9.18)$$

y teniendo en cuenta que

$$C_\alpha(s_\alpha^*) = C_\alpha^*(s_\alpha); \quad E(s_\alpha^*) = E^*(s_\alpha) \quad (9.19)$$

se obtiene una expresión final para el campo dispersado, como:

$$E^s(r, t) = \frac{L}{r} \frac{\text{sen}^2\theta}{2\ln(L/a) - 1} \sum_{\alpha=1}^N 2 |E(s_\alpha)| |C_\alpha(s_\alpha)| e^{\sigma_\alpha(t-r/c)} \cos(\omega_\alpha(t-r/c) + \xi_\alpha) \quad (9.20)$$

donde

$$\xi_\alpha = \text{arctg} \frac{\text{Im}\{E(s_\alpha) C_\alpha(s_\alpha)\}}{\text{Re}\{E(s_\alpha) C_\alpha(s_\alpha)\}} \quad (9.21)$$

Por otro lado la respuesta impulso $h(t, \theta)$ se puede obtener mediante la Transformada inversa de Laplace de (9.15), esto es:

$$h(t,\theta) = L^{-1}(H(s,\theta)) \quad (9.22)$$

obteniéndose:

$$h(t,\theta) = \sum_{\alpha=1}^N [u(t)G_{\alpha}(t) - 2(-1)^{\alpha}u(t-T)G_{\alpha}(t-T) + u(t-2T)G_{\alpha}(t-2T)] - \\ -2[B_{\omega}(s_{\alpha})f_1(t) - C_{\omega}(s_{\alpha})f_2(t)]\text{sen}(bt) - \\ -2[D_{\omega}(s_{\alpha})f_1(t) + E_{\omega}(s_{\alpha})f_2(t)]\text{cos}(bt) \quad (9.23)$$

donde los subíndices "r" e "i" denotan parte real e imaginaria, respectivamente; $u(t)$ es la función salto unidad, y A_{α} , B_{α} , C_{α} , D_{α} , E_{α} , G_{α} , $f_1(t)$ y $f_2(t)$ vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$G_{\alpha}(t) = 2e^{\sigma_{\alpha}t} [A_{\omega}(s_{\alpha})\text{cos}(\omega_{\alpha}t) - A_{\omega}(s_{\alpha})\text{sen}(\omega_{\alpha}t)] \\ A_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^4 s_{\alpha}}{\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)^2}; B_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^3 (s_{\alpha}^2 - b^2)}{2\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)^2} \\ C_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^5}{2\alpha^2 s_{\alpha} (s_{\alpha}^2 + b^2)}; D_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^4 s_{\alpha}}{\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)^2} \\ E_{\alpha}(s_{\alpha}) = \frac{b^4}{2\alpha^2 (s_{\alpha}^2 + b^2)} \\ f_1(t) = u(t) - 2u(t-T) + u(t-2T) \\ f_2(t) = tu(t) - 2(t-T)u(t-T) + (t-2T)u(t-2T) \quad (9.25)$$

donde $b = \alpha\pi/T$.

En esta expresión que nos proporciona la respuesta impulso $h(t,\theta)$, el primer término corresponde a la componente oscilatoria libre o componente natural que existe para cualquier valor de t y es una suma de modos naturales, mientras que los demás términos corresponden a la componente forzada que existen sólo en $0 < t < 2T$. Se ve que $h(t,\theta)$ se descompone en dos regiones como en (A.23), una primera llamada respuesta temprana o *early-time*, que no se puede modelar por una suma de funciones armónicas amortiguadas y que se extiende desde $t=0$ hasta $t=T_0=2T$, y otra segunda llamada *late-time* o respuesta tardía, que se extiende entre $t=2T$ y $t=\infty$, la cual se puede modelar por una suma de exponenciales complejas amortiguadas. De esta forma la expresión (9.23) de la respuesta impulso se puede poner de forma más

compacta como:

$$h(t,\theta) = \Omega(t,\theta) + \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha}(\theta) e^{\sigma_{\alpha} t} \cos(\omega_{\alpha} t + \varphi_{\alpha}(\theta)) \quad (9.26)$$

donde $\Omega(t,\theta)$ es la respuesta forzada con duración entre 0 y T_0 .

Conocida de esta forma la respuesta impulso del hilo, se puede también obtener el campo dispersado, considerado como respuesta del blanco, sin más que hacer la convolución entre la excitación $e(t)$ y la respuesta impulso como se pone de manifiesto en (9.13), esto es:

$$E^s(r,t) = \frac{\text{sen}^2 \theta}{2 \ln(L/a) - 1} \frac{L}{r} e(t) * h(t,\theta) \quad (9.27)$$

en el cual la región del *late-time* comenzará en $T_s = T_e + 2T$.

En la siguiente tabla se presentan las diez primeras resonancias del hilo obtenidas en [TES73], normalizadas por c/L , y para una relación longitud-radio L/a de 200.

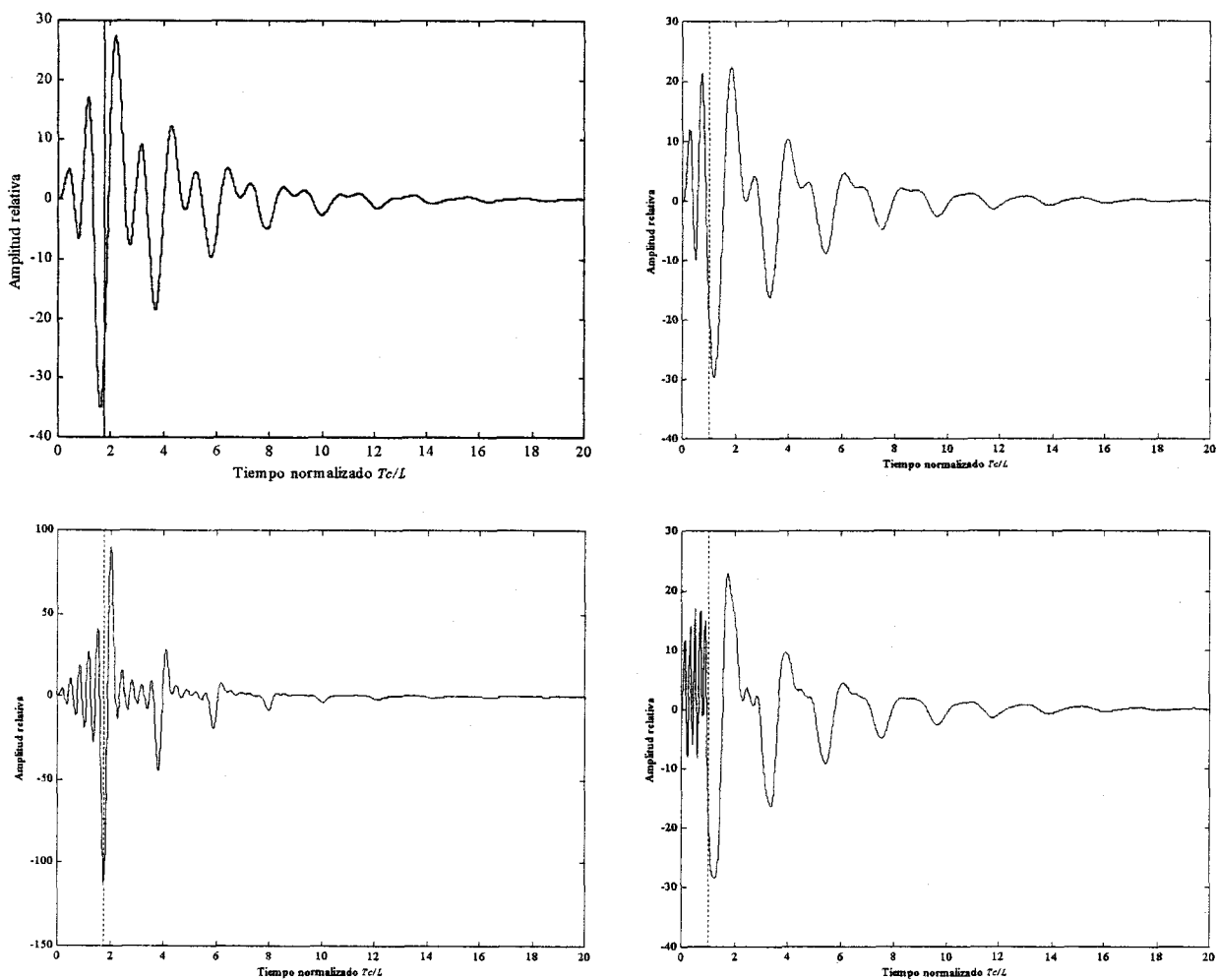
n	s_n
1	-0.2601+j 2.9062
2	-0.3808+j 6.0067
3	-0.4684+j 9.0603
4	-0.5382+j 12.1705
5	-0.5997+j 15.2493
6	-0.6535+j 18.3626
7	-0.7037+j 21.4539
8	-0.7486+j 24.5703
9	-0.7993+j 27.6680
10	-0.8319+j 30.7876

Tabla 9.1. Diez primeras resonancias naturales del hilo cilíndrico

En las figuras 9.1. y 9.3. se representa la respuesta impulso de un hilo que sustiene un ángulo de 30° y sintetizadas excitando dos y cinco resonancias naturales, respectivamente.

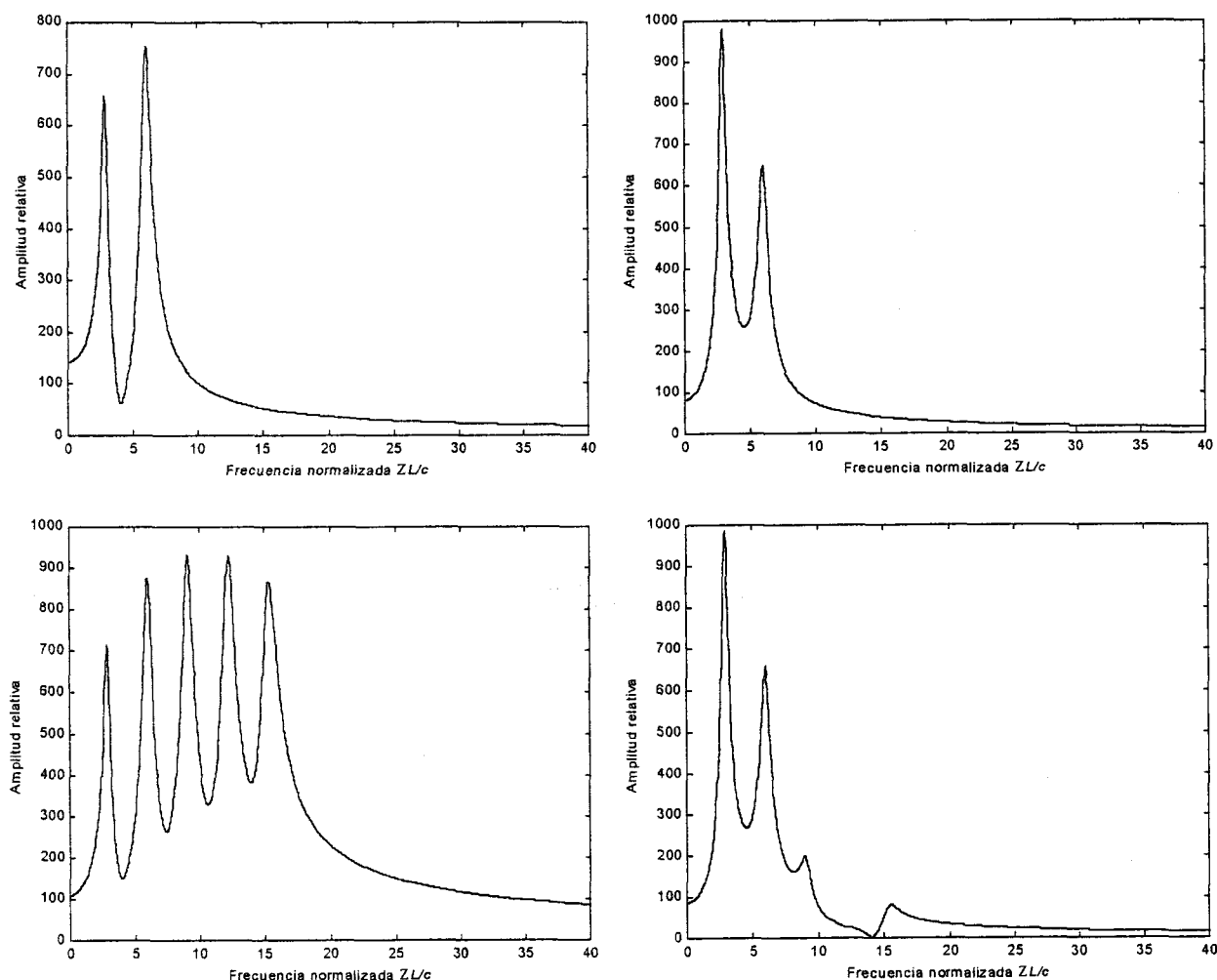
La línea discontinua representa la separación entre el *early-time* y el *late-time*, como puede comprobarse, este tiempo corresponde a dos veces el tiempo T de tránsito del pulso por el cilindro, que en este caso resulta ser $T = \cos 30$. Puede verse como la mayor diferencia que existe entre estas dos figuras se encuentra en el *early-time*, mientras que en el *late-time*, la forma es relativamente similar, compuestas por exponenciales amortiguadas. Esto mismo se observa más claramente en las figuras 9.2 y 9.3, donde se representan otra vez la respuesta impulso del hilo conductor, excitando 2 y 5 frecuencias, respectivamente; pero donde el hilo está inclinado 60° , respecto del emisor-receptor. Se puede ver como la separación entre el *early-time* y el *late-time* aparece en este caso a $2 \cos 60$. La semejanza entre las dos señales en el *late-time*, es mucho más clara para estas dos señales. A partir de la señal dispersada sintetizada haciendo uso de más de cinco frecuencias naturales, la diferencia entre las señales en el *late-time* disminuye todavía más que la aparece en las señales 9.1-4, por lo que el estudio se realizará principalmente para señales de dispersión que exciten entre dos y cinco frecuencias, aunque en algún momento se pueda introducir más frecuencias en el análisis.

Figuras 9.1-4. Señales dispersadas por un hilo. Ángulos de 30° y 60° . Excitando 2 y 5 frecuencias naturales



En las figuras 9.5-8 se representa el contenido en frecuencia del *late-time* de las señales que aparecen en 9.1-4. Se puede observar, sobre todo en las señales de con cinco frecuencias excitadas, la enorme dependencia en el ángulo que poseen las señales dispersadas, de manera que para un ángulo de 30° la señal presenta una contribución importante a todas las frecuencias que coinciden con la parte imaginaria de las frecuencias naturales, esto mismo no sucede para un ángulo de 60° . Este comportamiento se acusa a medida que va aumentando el ángulo. Por tanto, es de esperar que los resultados concretos dependan de este parámetro. Será para estudiar este comportamiento para lo que se realizarán los estudios a estos dos ángulos de orientación.

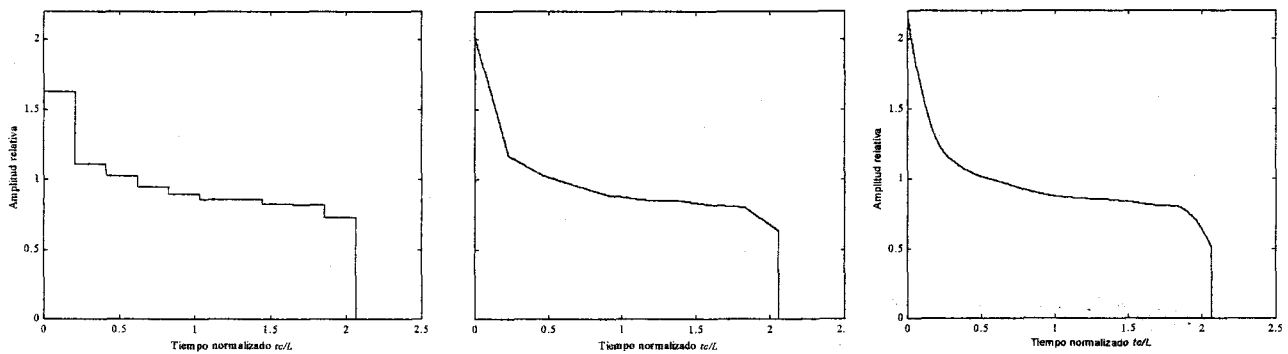
Figuras 9.5-8. Espectro de potencia de las señales de las figuras 9.1-4.



IX. 3. CONSTRUCCIÓN DE LOS E-PULSOS.

La construcción de los E-pulsos ha sido ampliamente detallada en capítulo VII, donde se recogen las ecuaciones que han de utilizarse para tal fin. En este desarrollo, el primer requisito es disponer de las frecuencias naturales de la librería de blancos, lo que en este caso se obtiene a partir de la tabla 9.1. El siguiente paso es elegir el número de frecuencias naturales de los blancos que se van a excitar, lo que vendrá dado por un determinado ancho de banda que las contenga. Concretamente, se van a construir los E-pulsos para una onda incidente que excite desde dos hasta cinco frecuencias naturales. Por último, dado que se van a tratar con E-pulsos que serán funciones polinómicas, continuas y con derivadas continuas hasta un orden menor que el orden del polinomio, será necesario fijar el índice de estos. Se van a estudiar los resultados para polinomios desde orden cero hasta orden dos.

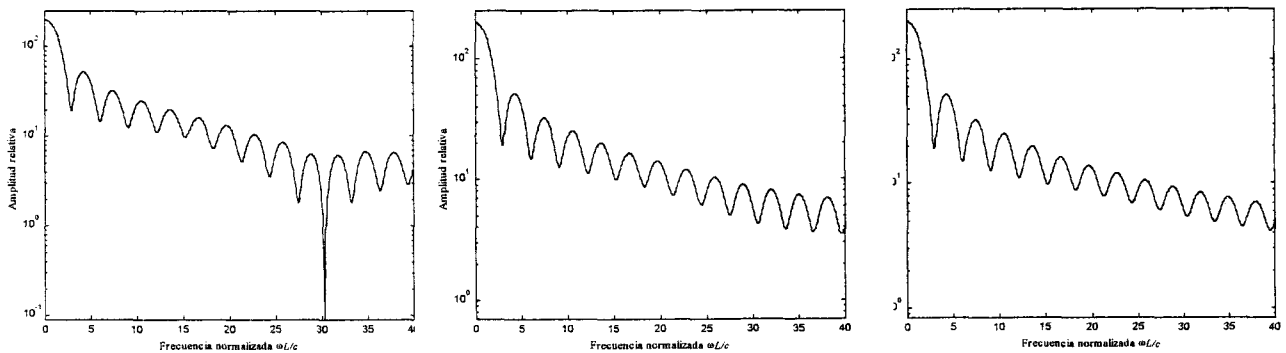
Como se vio en el capítulo VII, las condiciones E-pulsos implican la anulación de la transformada de Laplace a ciertas frecuencias. La imposición de estas condiciones al tipo de señales con las que se están trabajando se puede realizar utilizando *splines* clásicos o β -*splines*, como se detalló en las secciones 7.2 y 7.4. El resultado que se obtiene por mediante ambos procedimientos es idéntico, tal y como se esperaba del hecho de que los β -*splines* son una base dentro del tipo de funciones con las que se trabaja. Por tanto, en la construcción de las funciones E-pulso se realizará mediante el procedimiento detallado en 7.4, debido a su mayor sencillez y a la facilidad que presenta para la imposición de condiciones espectrales adicionales. En las siguientes figuras 9.9-11 se muestran los E-pulsos constantes, lineales y cuadráticos construidos para cinco frecuencias naturales, sólo se les ha impuesto a estas señales E-pulso que la transformada de Laplace se anule en las 5 primeras frecuencias naturales correspondientes



Figuras 9.9-11. E-pulsos constantes, lineales y cuadráticos para las 5 primeras frecuencias del hilo.

al hilo de longitud L , sin imponer ninguna condición extra. Se puede ver como la forma que presentan es muy parecida, sobre todo para E-pulsos lineales y cuadráticos, por lo que no se esperan grandes diferencias en los resultados. Esto mismo es lo que se espera si se observa el contenido espectral de uno E-pulsos y otros, lo que está representado en las figuras 9.12-14. Claramente se observa como la diferencia entre el espectro de potencia de los E-pulso lineales y cuadráticos es prácticamente nula, sólo existiendo cierta diferencia espectral con los E-pulsos constante. Se espera que esta característica se vea reflejada en los resultados y comparaciones que se realizarán con posterioridad.

En el capítulo 7.5 se presentaron unas nuevas condiciones E-pulso que se podían añadir a las ya existentes, con las que intentaba mejorar los resultados que proporcionan los E-pulsos clásicos y que consistía en imponer la anulación de la derivada de la transformada de Laplace en las frecuencias naturales del blanco. Como ya se señaló, estas nuevas condiciones no tenían en principio porqué imponerse sobre todas las frecuencias naturales con las que se trabaja,

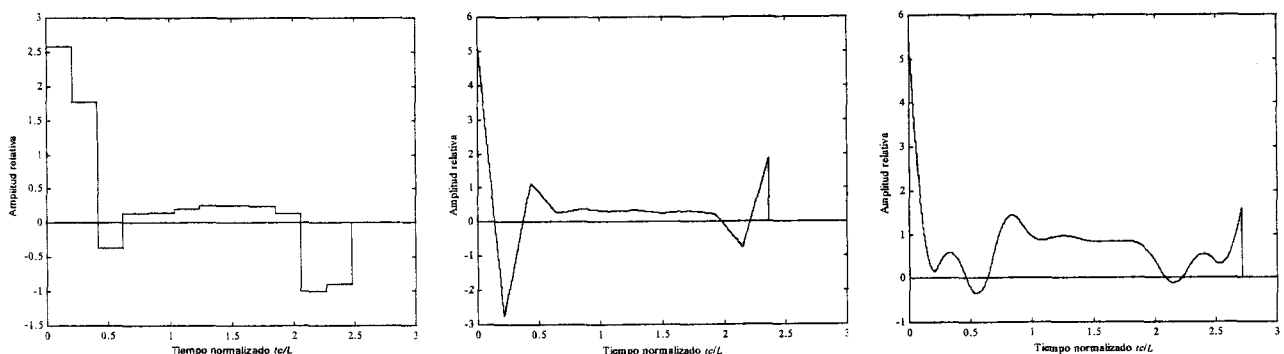


Figuras 9.12-14. Espectros de los E-pulsos constantes, lineales y cuadráticos de las figuras 9.9-11.

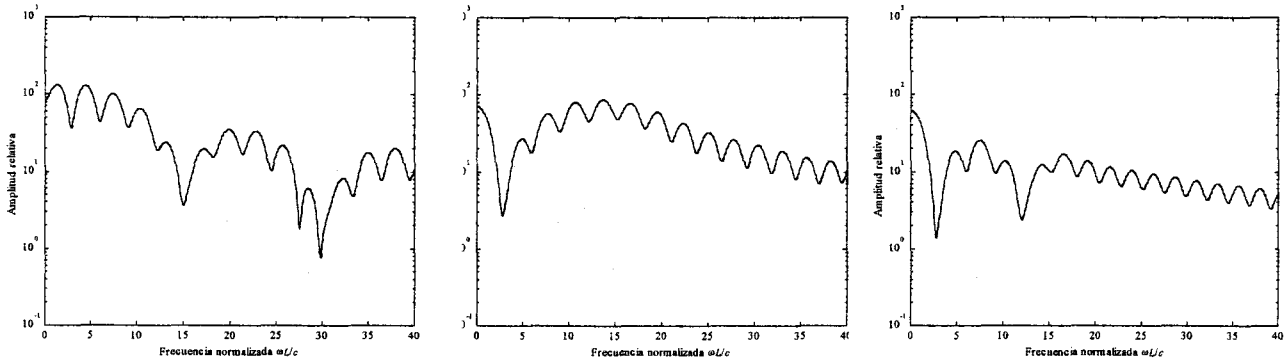
pudiendo elegirse arbitrariamente el conjunto de frecuencias donde se va anular la derivada. De esta forma, si se están trabajando con dos frecuencias naturales, se puede imponer que se anula la derivada de la transformada de la primera frecuencia, en la segunda o en las dos, consiguiendo así tres E-pulsos distintos con las nuevas condiciones. El número de posibles conjuntos de frecuencias al imponer las nuevas condiciones E-pulso aumenta rápidamente al aumentar el número de frecuencias con las que se trabaja, de forma que para tres frecuencias naturales se pueden formar siete conjuntos; con cuatro frecuencias, quince conjuntos; con cinco, 31 conjuntos,....etc. Puede verse que el número de conjuntos que se pueden formar es $2^m - 1$, donde m es el número de frecuencias con las que se trabaja.

En las siguientes figuras se muestran algunos ejemplos de los E-pulsos que se pueden construir con esas nuevas condiciones. Se han representado tanto las funciones E-pulso como el contenido espectral de estas. Todas las funciones E-pulso se han construido para anular la transformada de Fourier en las cinco frecuencias naturales correspondientes al hilo de longitud L . La primera de las funciones E-pulso se ha construido mediante *splines* constantes, anulando la transformada de Laplace en las 5 primeras frecuencias naturales del hilo y la derivada de la transformada de Laplace en la tercera frecuencia natural. La segunda de las funciones se ha construido con *splines* constantes y anulando la derivada de la transformada de la Laplace en la primera de las cinco frecuencias; mientras que la última de las funciones se ha construido haciendo uso de *splines* cuadráticos y anulando la derivada en la primera y la cuarta frecuencia natural.

Se puede ver una gran diferencia en la forma que poseen estas señales E-pulso tanto con las presentadas en las figuras 9.15-17, al introducir las nuevas condiciones en las



Figuras 9.15-17. E-pulsos constantes, lineales y cuadráticos con las nuevas condiciones en 5 frecuencias



Figuras 9.18-20. E-pulsos constantes, lineales y cuadráticos con las nuevas condiciones en 5 frecuencias.

derivadas, como entre ellas mismas; lo que también se ve reflejado en los espectros de potencia de estos E-pulsos que se recogen en las figuras 9.18-20. En un principio, sólo se le exige a las funciones E-pulso que anulen la transformada de Laplace en las frecuencias naturales del blanco y que el contenido espectral a frecuencias distintas de estas sea no nulo. En principio, el contenido espectral específico debería afectar poco al comportamiento de los E-pulsos, mientras cumplan con las condiciones impuestas. En efecto, esto es lo que sucede, siempre y cuando la señal no se encuentre contaminada con ruido. Como en la práctica todas las señales están contaminadas con ruido y este se está suponiendo que es blanco, el contenido espectral a frecuencias distintas de las naturales será importante, tanto más cuanto mayor sea el nivel de ruido que se encuentre presente.

El primer inconveniente que presenta el introducir las nuevas condiciones E-pulso es que la longitud de estos va aumentando a medida que aumenta en número de frecuencias naturales a las que se les imponen las nuevas condiciones. Como ya se dijo con anterioridad, es deseable trabajar con E-pulsos de longitud lo más corta posible, ya que esto hacía que las salidas de los canales erróneos fuesen mayores y por tanto menos sensibles al ruido. Esto hace que, aunque es posible que al imponer las nuevas condiciones E-pulsos cada vez a más

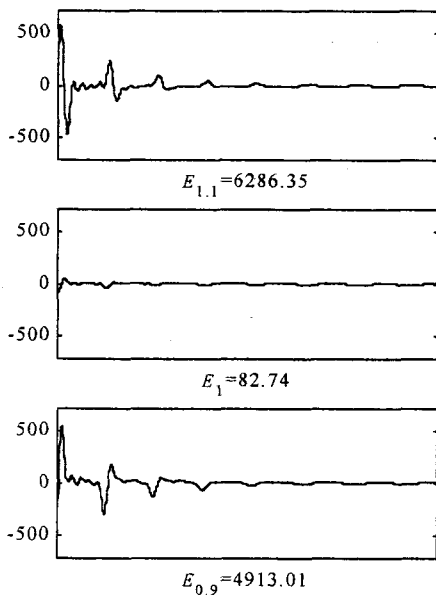


Figura 9.21.

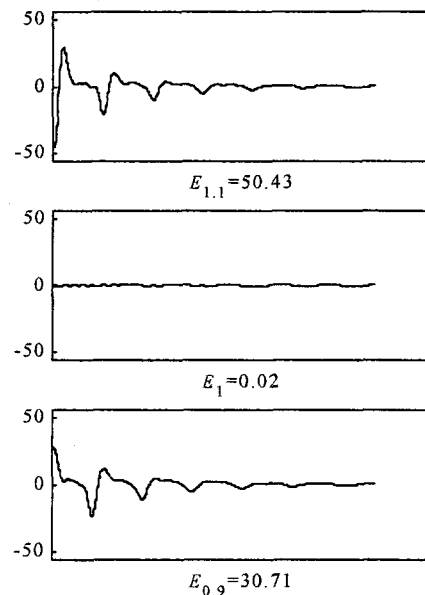


Figura 9.22.

frecuencias mejore los resultados para altos niveles de SNR, el empeoramiento al aumentar el ruido sea mayor mientras mayor sea el número de frecuencias a las que se les han impuesto las nuevas condiciones. Habrá que comprobar en cada caso como afectan los distintos factores al resultado final de la identificación.

Para ello se empezará estudiando como se comportan los distintos E-pulsos para señales sin ruido. En la figura 9.21-22. se muestra la señal dispersada por hilo de longitud L en el *late-time*, inclinado un ángulo de 30° respecto del emisor receptor, en la que se ha excitado las cinco primeras frecuencias naturales, una vez esta señal a pasado por cada uno de los filtros E-pulso sintetizado haciendo uso de las cinco primeras frecuencias naturales de cada blanco. Al sintetizar la señal se ha supuesto que carece por completo de ruido. La figura 9.22. corresponde a la salida de los E-pulsos cuadráticos construidos imponiendo la anulación de la derivada en la todas las cinco frecuencias naturales. La figura 9.21., por el contrario, a la salida de los E-pulso construidos imponiendo únicamente las condiciones E-pulso clásicas. Debajo de cada gráfica se indica la energía de la señal mostrada, así como la longitud relativa del hilo para el cual se ha construido el E-pulso cuya salida se muestra, que como ya se sabe puede tomar los valores 1.1, 0.9 y 1. Para poder comparar la diferencia que existe entre las energías de los canales falsos y el canal verdadero, que en este caso es el de longitud relativa 1, utilizando distintos tipos de E-pulsos, se construye el parámetro:

$$\alpha = \frac{E_{1.1} + E_{0.9}}{2E_1} \quad (9.28)$$

Un mayor valor de este parámetro indicará una mayor diferencia entre la energía de los canales falsos y el verdadero. Será interesante obtener la mayor diferencia posible, ya que, en principio, esto puede significar una mayor resistencia al ruido o errores en la estimación de frecuencias naturales.

En este caso, el parámetro para los E-pulsos construidos con las nuevas condiciones E-pulsos en todas las derivadas es resulta vales $\alpha_1 = 2028.5$, mientras que para el conjunto de E-pulsos clásicos se obtiene un $\alpha_2 = 67.7$, por lo que el nuevo conjunto de E-pulso proporciona mejores resultados para señales sin ruido que los que se proporciona los E-pulsos clásicos. Sin embargo, al introducir ruido, esta gran diferencia en el parámetro α para los dos conjuntos de E-pulsos disminuye rápidamente y pronto el conjunto de E-pulsos clásicos proporciona mejores resultados que el conjunto de E-pulsos con las nuevas condiciones en todas las frecuencias naturales, de forma que para SNR de 40 dB, que es un ruido realmente muy pequeño, los parámetros valen $\alpha_1 = 15.04$ y $\alpha_2 = 66.39$. Estos parámetros se han calculado tomando la media de los parámetros resultantes de 100 realizaciones distintas de la señal, es decir, se construyen 100 señales dispersadas por el hilo de longitud L , sustendiendo un ángulo de 30° y donde se han excitado las cinco primeras frecuencias naturales; estas señales se hacen pasar por los dos conjuntos de E-pulsos, dando lugar a 100 parámetros α ; tomándose finalmente la media de los 100 parámetros en cada conjunto, para obtener los valores anteriores. Se aprecia claramente como mientras los E-pulsos clásicos apenas notan la existencia de un ruido de 40 dB y apenas varían sus resultados, el conjunto de E-pulsos con las nuevas condiciones empeora drásticamente sus resultados.

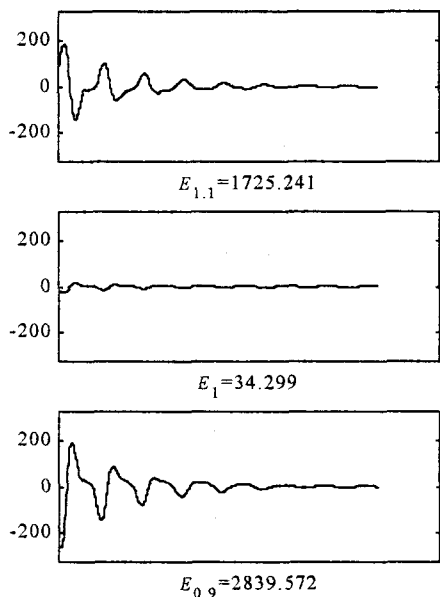


Figura 9.23.

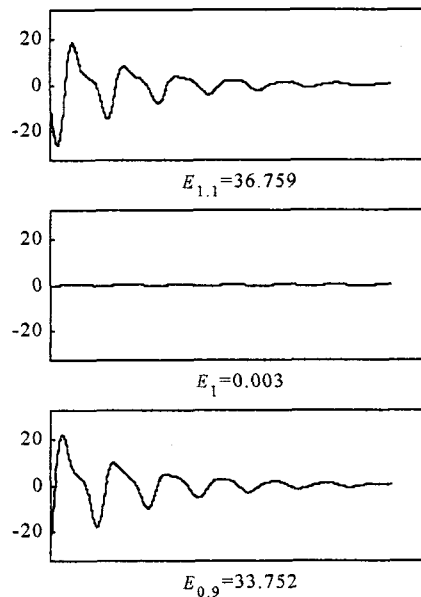


Figura 9.24.

Esto mismo sucede si se varía el ángulo de orientación del hilo de longitud L a 60° . La salida de cada uno de los E-pulsos cuando la entrada es la señal dispersada por el hilo de longitud L sin ruido, excitando las cinco primeras frecuencias naturales y sustituyendo un ángulo de 60° , es lo que se muestra en las figuras 9.23-24. Al igual que en las figuras anteriores, la figura de la izquierda corresponde a los E-pulsos clásicos y la figura de la derecha a los E-pulsos construidos anulando la derivada de la transformada de Laplace en todas las cinco frecuencias naturales. La energía de la señal de salida es lo que aparece en cada pie de gráfica. Estos conjuntos de E-pulsos proporcionan un $\alpha_1 = 11751.83$, para los E-pulsos con las nuevas condiciones, y $\alpha_2 = 66.54$, para los E-pulsos clásicos. Al igual que sucedía para la señal dispersada por el hilo a 30° , si la señal se contamina con ruido a una SNR de 40 dB, los valores del parámetro α varían mucho para los E-pulsos con condición en las derivadas, mientras que apenas si varía para los clásicos, dando un $\alpha_1 = 55.52$, para los E-pulsos con las nuevas condiciones, y $\alpha_2 = 65.86$, para los clásicos.

Se observa como, en contra de lo supuesto, un mayor α sin ruido no implica que el conjunto de E-pulsos presente resultados al aumentar el ruido. Sin embargo, sigue siendo deseable encontrar los E-pulsos que presenten mayores α , en la espera que una mayor complejidad de la librería a tratar o una peor estimación de las frecuencias naturales les afecte en menor grado.

La justificación de este comportamiento se puede buscar en dos factores distintos. El primero será un peor comportamiento de los nuevos E-pulsos a frecuencias distintas de las naturales, en concreto a altas frecuencias. En efecto, mientras que para señales sin ruido los E-pulsos que proporcionarán mejores resultados serán aquellos que anulen mejor las frecuencias naturales, en presencia de ruido, por el contrario, influirá el comportamiento de los filtros a todas las frecuencias, ya que el ruido se ha supuesto blanco y, por tanto, con contenido espectral en todas las frecuencias. Esto significa que un mayor contenido espectral a altas frecuencias implicará una amplificación de la contribución del ruido, lo que empeora los

resultados.

El segundo factor que contribuye a los peores resultados del ruido es la definición de la relación señal ruido. En el capítulo III, este parámetro se definió como 10 el logaritmo del cociente entre la potencia de la señal partido por la del ruido, tal y como apareció en (3.2). La diferencia principal entre las señales con las que se trata ahora es que en el capítulo III se suponía que son señales estacionarias, mientras que las señales con las que se trabaja ahora van decayendo en el tiempo. Por tanto, la mayor parte de la contribución a la energía total de la señal, sin ruido, estará en los primeros datos, que son los de mayor valor absoluto, y la contribución a la energía total de los datos va disminuyendo conforme avanza el tiempo; mientras que el ruido posee la misma contribución, en media, a la energía total a lo largo del

SNR	[1]	[5]	[3,5]	[1,3,5]	[2,3,4,5]	[1,2,3,4,5]	Rothwell
Inf.	38,06	269,59	1718,64	1387,44	948,02	2571,97	67,68
60	38,06	269,15	1648,63	1364,62	886,63	911,12	67,67
55	38,05	268,14	1529,29	1317,71	782,90	400,74	67,66
50	38,04	263,04	1183,24	1176,86	551,39	136,64	67,56
45	38,00	250,39	704,46	863,10	293,24	43,50	67,25
40	37,84	223,19	353,23	536,27	132,68	17,12	66,53
35	37,64	158,50	124,06	221,51	44,98	5,91	64,43
30	36,59	83,22	41,26	78,46	15,20	2,56	57,74
25	34,02	31,95	12,98	24,51	5,18	1,46	43,20
20	27,65	12,58	5,20	9,43	2,47	1,16	25,84
15	17,52	4,32	2,14	3,29	1,39	1,04	10,57
10	8,43	2,05	1,37	1,72	1,13	1,02	4,32
5	3,72	1,34	1,12	1,23	1,05	1,01	2,09
0	1,94	1,12	1,05	1,09	1,02	1,01	1,38
-5	1,32	1,04	1,02	1,03	1,01	1,00	1,13
-10	1,12	1,02	1,01	1,02	1,01	1,00	1,04

Tabla 9.2. Parámetro α en función de SNR para todos los E-pulsos con diversas condiciones

tiempo. Esto hace que la relación entre la contribución de la señal y el ruido a la energía total va decreciendo a lo largo del tiempo. Según esto, los primeros datos son menos ruidosos, ya que poseen mayor valor absoluto. Hay que recordar que al convolucionar dos señales $x(n)$ e $y(n)$ de longitudes N y M , con $M < N$, se forma una nueva señal $z(n)$ de longitud $N+M$, donde intervienen los M datos de $y(n)$ únicamente a partir del dato número M de $z(n)$, los cuales involucran datos de $x(n)$ a partir del dato M , también. Por tanto, en la convolución de la señal dispersada con el E-pulso, para que la señal de salida involucre todos los datos del E-pulso, lo que es necesario para la anulación de las frecuencias, se pierden tantos datos como la longitud del E-pulso como número de datos tenga el E-pulso. El mayor problema reside que estos son los datos que menos ruidosos, por lo que la pérdida del menor número de estos datos será un factor crítico en el estudio de los E-pulsos. Sin embargo, se ha comprobado que a medida que se aumenta el número de frecuencias a las que se les imponen las nuevas condiciones E-pulso, la longitud del E-pulso aumenta, de forma que si estas nuevas condiciones se les imponen a todas las frecuencias se consigue un E-pulso del doble de longitud, aproximadamente, que el E-pulso sin condición adicional alguna, por lo que se espera una mayor sensibilidad ante el ruido.

Este comportamiento queda recogido en la tabla 9.2, donde se representa el parámetro α en función de la SNR, para distintos conjuntos de E-pulso. En la parte superior aparecen las frecuencias a las que se les ha impuesto la nueva condición E-pulso, donde la denominación "Rothwell" hace referencia a los E-pulsos clásicos, sin imponer ninguna nueva condición.

Se puede observar como a medida que aumenta el número de frecuencias a las que se imponen las condiciones, el comportamiento del parámetro α frente al ruido empeora, lo que significa que este parámetro disminuye más rápidamente al disminuir el ruido. No todos los E-pulsos construidos a partir de imponer las nuevas condiciones sobre distintos conjuntos de frecuencias cumplen esta sistemática. Muchos de los conjuntos de E-pulsos que se pueden construir y que no están recogidos en la anterior tabla presentan pobres resultados ya sin ruido. La disminución del parámetro α al disminuir la SNR no depende sólo de los factores que se indicaron con anterioridad, como son el contenido espectral y la longitud de los E-pulsos, sino que depende también del valor de este. Efectivamente, el comportamiento de este parámetro será tender lentamente a uno a medida que disminuye la SNR, ya que un valor de uno significaría que en media todos los E-pulsos proporcionan una salida, que es lo que sucede si sólo se tiene ruido. Por tanto, valores de α muy cercanos a la unidad sentirán poco la disminución de la SNR, y es por esto por lo que no se han representado. Es interesante destacar como, aunque todos los conjuntos de E-pulso salvo el primero, presentan un mayor α sin ruido que los E-pulso de Rothwell, a una SNR de 25 dB solamente el primero de los conjuntos proporciona un mayor α .

Esto mismo se ha realizado para E-pulsos constantes, lineales y cuadrático; construidos con un número de frecuencias naturales que ha variado de dos a cinco; susteniendo ángulos de 30° y 60° el hilo de longitud L con el emisor-receptor y imponiendo las nuevas condiciones E-pulso en todos los posibles conjuntos de ecuaciones. Para señales sin ruido, no existe una sistemática clara sobre el parámetro α y los conjuntos de frecuencias a los que se les imponen las condiciones. Aún así, existen ciertos conjuntos que, al imponer las nuevas condiciones sobre ellas, presentan un parámetro α varios ordenes de magnitud mejores que el proporcionado por los E-pulsos clásicos. Sin embargo, son precisamente los E-pulsos construidos imponiendo las nuevas condiciones sobre estos conjuntos de frecuencias, los que ven más afectado su parámetro α al aumentar el ruido, produciendo una rápida disminución hacia la zona de no identificación, que es se presenta para valores de α próximos a la unidad o menor. Se aprecia también como, al aumentar el número de frecuencias naturales a las que se les aplica las condiciones E-pulso, el comportamiento del parámetro α frente al ruido empeora. Esto es precisamente lo que cabía esperar, a la luz de lo expuesto con anterioridad. Sin embargo, al depender fuertemente los resultados del contenido espectral, y no presentar este una uniformidad frente a las frecuencias a las que se imponen las nuevas condiciones, no es posible predecir a priori el comportamiento de los E-pulsos y se hace necesario un estudio de todas las posibles combinaciones de frecuencias a las que imponer las condiciones para obtener el conjunto óptimo.

A partir de cierto SNR, el parámetro α comienza a ser cercano o menor que uno, lo que indicará que la identificación no se está haciendo correctamente. Aunque hasta ahora se ha estudiado el parámetro α para comparar los resultados que proporcionan los distintos conjuntos, en realidad, lo que se persigue en la identificación de blancos de radar es precisamente la determinación del blanco desconocido, por lo que el parámetro fundamental será la probabilidad de identificación de un determinado blanco. Este parámetro indicará cual es la probabilidad de realizar una identificación correcta a partir de la señal dispersada y de los

E-pulsos de que se estén estudiando. Por supuesto, este parámetro será función del ángulo de inclinación del blanco, del número de frecuencias naturales que se exciten, de la SNR y de las condiciones concretas que se imponen para construir los E-pulsos. No se quiere decir que no posea importancia el valor concreto de α con el cual se logra una determinada probabilidad de identificación, ya que, como se ha dicho, se espera que sea un factor importante al aumentar la complejidad de la librería y los errores de estimación en las frecuencias naturales.

El resto de este apartado consiste en la comparación de la probabilidad de identificación de los distintos conjuntos de E-pulso. Para ello, lo que se ha hecho es construir 100 señales ruidosas dispersadas por el hilo de longitud L bajo ángulos de inclinación de 30° y 60° , excitando desde dos hasta cinco frecuencias naturales y contaminando la señal con ruido aditivo gaussiano blanco en un amplio rango de SNR. A partir de cada una de las señales se procede a identificar el blanco desconocido, siguiendo con el esquema con el que se está trabajando y que viene esquematizado en la figura 8.1. Se contabiliza el número de veces que se equivoca y este será un estimador de la probabilidad de equivocación que cada conjunto de E-pulsos posee cuando el blanco presente es el blanco de longitud L .

Como ejemplo, en la tabla 9.3-4. se muestra las probabilidades de equivocación obtenidas para una señal sintetizada excitando las cuatro frecuencias naturales. Se han construido tanto el E-pulso clásico, cuyos resultados se muestran en la columna de más a la derecha, y todos los posibles conjuntos de E-pulsos que resultan de aplicar la nueva condición sobre todos los posibles conjuntos de frecuencias naturales. En la cabecera de cada columna se especifica sobre cuales frecuencias se ha impuesto la nueva condición, mientras que la columna denominada "R" indica los E-pulsos clásicos y E-pulsos de Rothwell, y las probabilidades han sido calculadas, como ya se ha dicho, a partir de los resultados obtenidos para 100 realizaciones. Las probabilidades de identificación se han puesto en estas tablas en función de la SNR de la señal. De ellas se puede apreciar como los E-pulsos de Rothwell

30°, 4 frecuencias, splines lineales																
SNR	[1]	[2]	[3]	[4]	[1 2]	[1 3]	[1 4]	[2 3]	[2 4]	[3 4]	[1 2 3]	[1 2 4]	[1 3 4]	[2 3 4]	[1 2 3 4]	R
Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	3	16	7	0	0	0	10	19	0
5	0	0	10	0	0	0	7	28	58	37	0	0	19	43	64	0
4	0	0	9	0	0	0	10	36	58	50	0	0	22	51	67	0
3	0	0	19	0	0	0	21	40	67	55	1	0	29	60	73	0
2	0	1	30	0	0	0	31	60	78	71	2	0	50	74	82	0
1	0	2	41	0	0	0	40	61	81	73	3	1	51	78	85	0
0	0	0	47	0	0	0	46	74	87	82	9	1	61	83	87	0
-1	0	5	55	0	0	2	54	75	84	81	13	6	65	83	94	0
-2	0	11	62	0	0	3	64	72	83	77	23	5	67	78	87	0
-3	0	20	80	0	1	11	68	85	91	89	26	12	80	89	93	2
-4	0	31	74	3	5	13	69	87	91	84	38	26	77	86	90	4
-5	0	41	85	5	4	20	86	91	97	94	51	32	92	96	96	6
-6	0	59	90	10	12	39	85	94	97	94	66	55	90	94	97	21
-7	2	68	89	29	15	53	88	97	98	98	63	60	90	100	97	37
-8	7	67	92	25	14	52	87	95	96	94	75	55	92	94	96	35
-9	18	81	95	52	33	64	93	100	99	99	80	59	95	99	96	53
-10	18	84	98	58	34	74	96	98	98	97	89	67	93	97	99	72

Tabla 9.3. Equivocaciones en 100 identificaciones para todos los E-pulsos construidos con 4 frecuencias.

60°, 4 frecuencias, splines lineales																
SNR	[1]	[2]	[3]	[4]	[1 2]	[1 3]	[1 4]	[2 3]	[2 4]	[3 4]	[1 2 3]	[1 2 4]	[1 3 4]	[2 3 4]	[1 2 3 4]	R
Inf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	2	0
10	0	0	0	0	34	0	17	0	0	0	40	2	0	0	28	0
5	0	0	0	0	68	0	57	2	2	2	75	27	3	2	65	0
4	0	0	0	0	58	0	66	2	8	4	79	43	9	6	74	0
3	0	2	0	0	60	0	77	6	23	13	86	55	29	14	82	0
2	1	3	0	0	62	1	74	9	16	9	84	57	30	10	84	0
1	4	4	1	0	62	2	76	17	27	20	79	68	36	22	87	0
0	6	14	4	0	76	7	82	28	41	30	85	69	52	31	89	0
-1	19	21	6	0	63	14	82	41	58	42	81	70	65	48	86	1
-2	28	31	7	1	71	21	88	38	46	39	88	77	66	40	95	4
-3	34	34	16	3	76	28	83	44	55	45	87	77	76	48	92	3
-4	44	50	24	7	71	39	91	57	67	53	88	76	72	55	95	5
-5	54	51	32	9	70	56	90	63	70	62	90	82	82	64	97	15
-6	63	62	50	19	81	62	90	65	73	67	89	89	86	71	97	22
-7	54	64	56	32	70	62	93	76	81	78	86	80	94	78	99	42
-8	68	75	64	33	73	67	94	77	84	77	89	87	90	78	96	37
-9	67	89	82	49	71	80	93	87	91	86	92	89	98	88	97	55
-10	77	86	77	65	70	84	95	93	92	87	91	87	94	89	96	63

Tabla 9.4. Equivocaciones en 100 identificaciones para todos los E-pulsos construidos con 4 frecuencias.

proporcionan resultados muy buenos, en comparación con los resultados que presentan los restos de E-pulsos. El comportamiento de los E-pulsos con nuevas condiciones varía enormemente en función del conjunto de frecuencias a las que se les impone las condiciones y, en muchos casos, aparece también una acusada dependencia en el ángulo de inclinación. Aún así, el conjunto de E-pulsos que proporciona mejores resultados es el que resulta de imponer la nueva condición sobre la frecuencia natural cuatro. Se produce de esta manera una mejora en los resultados al imponer las nuevas condiciones. Sin embargo existe el problema de que no se sabe a priori cual debe ser el conjunto de frecuencias sobre las que hay que imponer las nuevas condiciones para mejorar los resultados que proporcionan los E-pulsos clásicos, ya que, como se ve de las tablas 9.3-4., la imposición de las condiciones sobre un conjunto de frecuencias inadecuado lleva a un notable empeoramiento de la probabilidad de equivocación.

Este comportamiento es general para otras señales donde se excita un número distinto de frecuencias y para E-pulso con constantes, lineales o cuadráticos. Es decir, los resultados que proporcionan los E-pulsos clásicos son muy buenos, en comparación con la mayoría de los obtenidos con E-pulsos con nuevas condiciones, sin embargo, para ciertos conjuntos de frecuencias se consigue una mejora de los resultados clásicos. Los resultados obtenidos mediante E-pulso lineales y cuadráticos, para un mismo número de frecuencias naturales, son muy parecidos, mientras los resultados de E-pulsos lineales difieren de los dos anterior; esto es lo que se esperaba de la similitud de forma que presentan los E-pulsos lineales y cuadráticos que se presenta en figuras anteriores. Aunque apenas aparece sistemática alguna en el comportamiento del los E-pulso al cambiar el conjunto de frecuencias, un hecho que se repite para las señales con frecuencias naturales excitadas que van desde dos hasta cinco, es que, cuando el ángulo que forma el hilo con el emisor -receptor es de 30°, los mejores resultados se obtienen para el conjunto de E-pulsos que resulta de imponer la nueva condición sobre la primera frecuencia natural, hecho que queda recogido en las tablas anteriores. Este hecho es

cierto para E-pulsos lineales y cuadráticos, mientras que no lo cumplen los E-pulsos lineales. Se ha realizado también los cálculos para un mayor número de frecuencias naturales presentes y este hecho ha seguido presente.

Como conclusión destacar que es posible mejorar los resultados que los E-pulsos clásicos poseen mediante la anulación de la derivada de la transformada de Laplace en un conjunto de frecuencias naturales. Desafortunadamente, el conjunto al cual hay que imponer esta nueva condición no se conoce a priori, debiendo de estudiar todas los posibles conjuntos en busca de la mejora. En la práctica, la detección de las frecuencias naturales es un trabajo previo que suele realizarse con modelos a escala de los blancos de la librería. De igual forma, la construcción de los E-pulsos es también un paso previo ya realizado cuando se procede a la identificación, por lo que la construcción o la búsqueda del conjunto idóneo de frecuencias naturales a las que hay que imponer las nuevas condiciones no tiene por qué realizarse en tiempo real, ya que la identificación supone la existencia de los E-pulsos.

IX. 4. E-PULSOS CON DISTINTAS FRECUENCIAS DE MUESTREO.

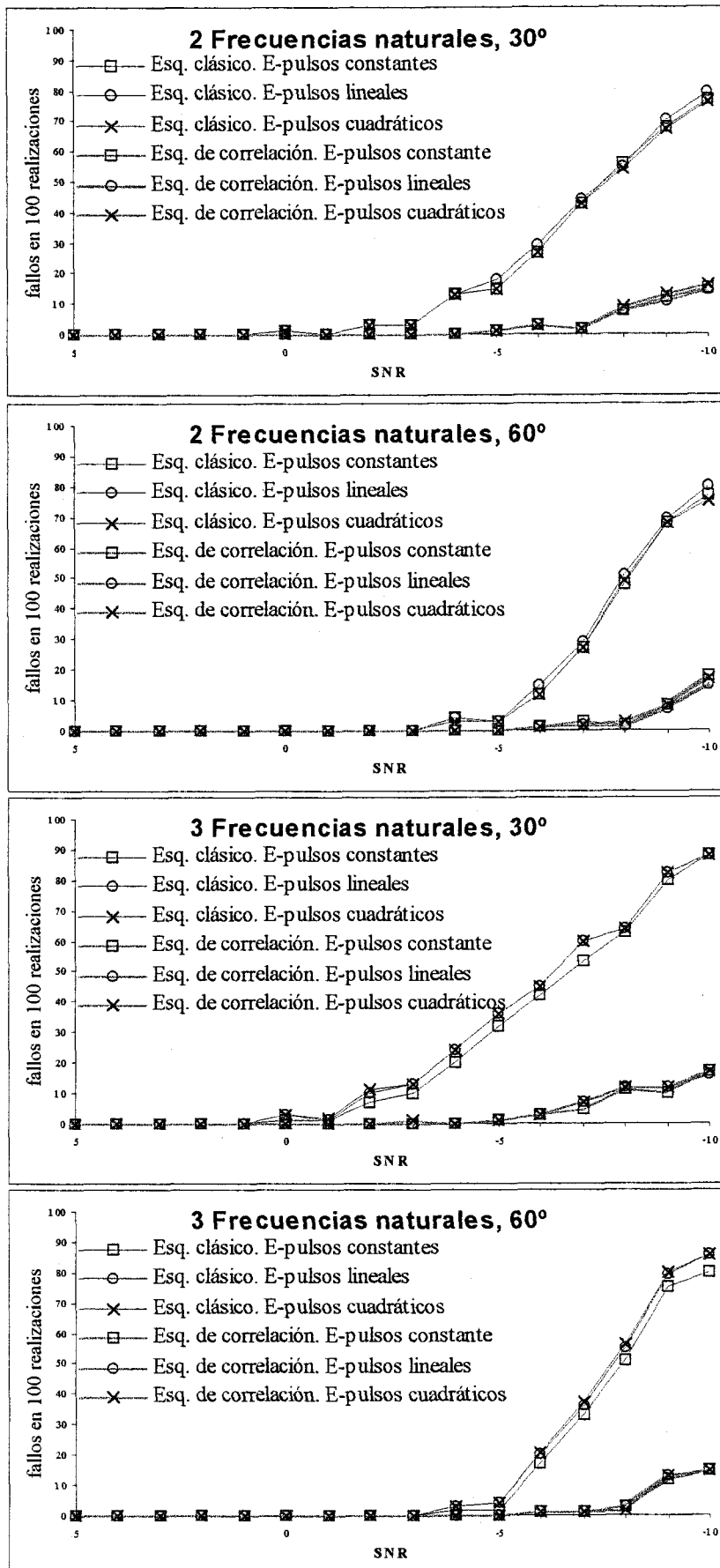
En este apartado se comparará los esquemas de identificación desarrollados en el capítulo VIII. En principio se trabajará con ruido aditivo blanco, dejando para último lugar el caso de tratar con ruido coloreado.

IX.4.1. Rudío aditivo blanco.

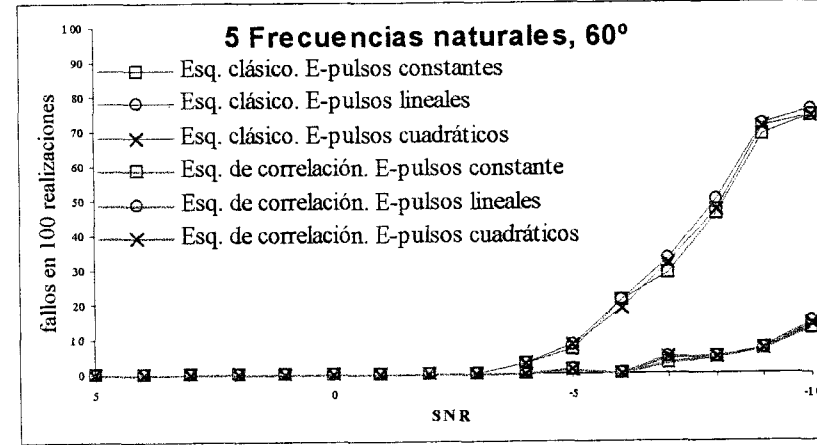
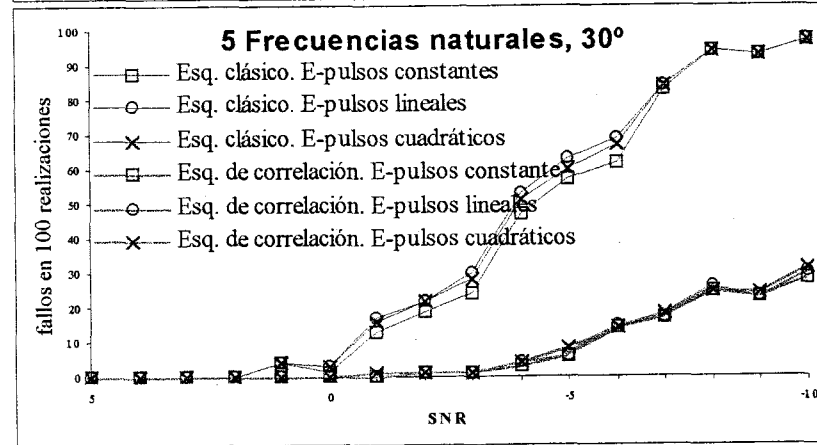
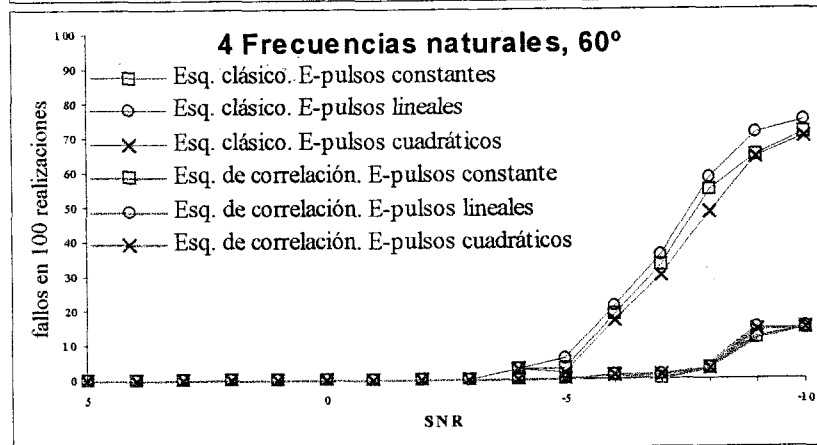
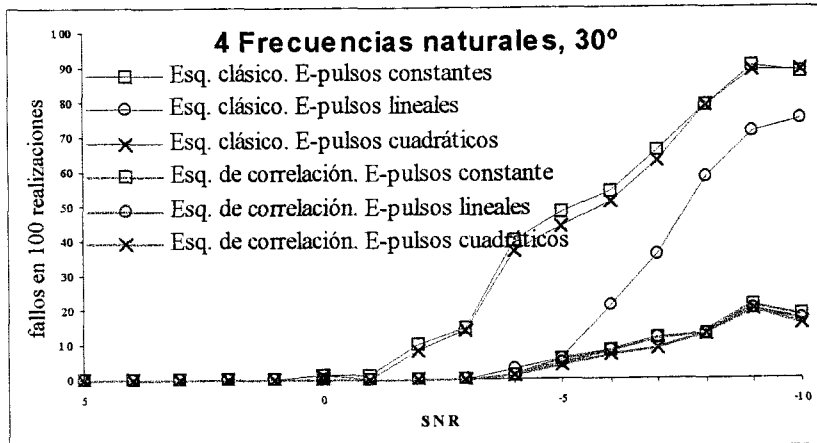
Las señales, al igual que en el apartado anterior, serán señales dispersadas por un hilo conductor, recto y fino, de longitud L , excitándose de dos a cinco frecuencias naturales y contaminada con ruido aditivo gaussiano blanco; mientras que la librería consistirá en tres hilos conductores de longitudes L , $1.1L$ y $0.9L$. Los E-pulsos para esta librería de blancos ya se han construido en el apartado anterior, tanto para E-pulsos clásicos como para E-pulsos construidos teniendo en cuenta las nuevas condiciones E-pulso. En principio se trabajará únicamente con los E-pulsos clásicos, comparando los esquemas únicamente con ellos y posteriormente se estudiará que sucede con el resto de E-pulsos que resultan de imponer las nuevas condiciones.

Los esquemas que se han comparado han sido el esquema clásico, dado en peich, y el esquema de correlación, dado en peich. Lo que se ha calculado ha sido la probabilidad de equivocación, tal y como se definió en el apartado anterior, calculandola de forma análoga. Los ambientes en los que se han comparando los esquemas han sido para señales dispersados por un hilo conductor de longitud L , con ángulos de inclinación de 30° y 60° , excitando desde las dos hasta las cinco primeras frecuencias naturales. Como ya se ha dicho, los E-pulsos con los que se va a realizar la comparación son los E-pulsos de Rothwell, sin utilizar las nuevas condiciones. Estos se construirán utilizando polinomios de orden cero, uno y dos, es decir, los E-pulsos constantes, lineales y cuadráticos. Los periodos de muestreo para el esquema de correlación se han tomado $T_1=0.02 L/c$ y $T_2=0.019 L/c$, mientras que para el esquema clásico el periodo de muestreo se ha tomado como $T=0.02 L/c$.

Figuras 9.25-28. Probabilidad de equivocación para los esquemas clásicos y de correlación.



Figuras 9.29-32. Probabilidad de equivocación para los esquemas clásicos y de correlación.



En las gráficas 9.25-32. se aprecia como el esquema de correlación mejora apreciablemente al esquema clásico, para todas las frecuencias excitadas, ángulos de orientación y ordenes de los polinomios utilizados en la construcción de los E-pulsos. Esta mejora es más acusada para ángulos de 30° que de 60° , mientras que apenas aparece diferencia con el orden de los polinomios utilizados en las síntesis de los E-pulsos.

Se confirma de esta manera lo que ya se apuntó en el desarrollo del esquema de correlación, es decir, que se ha conseguido un nuevo esquema de identificación basados en E-pulso que mejora los resultados del esquema clásico de discriminación.

El siguiente paso debería ser estudiar como se comporta este esquema para los E-pulsos con las nuevas condiciones. Sin embargo, la conclusión es que se comporta de igual forma que lo el esquema clásico, pero con los ya sabidos mejores resultados. Esto quiere decir que, para un mismo conjunto de E-pulsos, los dos esquemas se comportan tal y como lo hacen para los E-pulsos de Rothwell, lo que significa un mejor comportamiento en todas las situaciones del esquema de correlación sobre el clásico. Si se comparan los resultados para el esquema de correlación pero para distintos conjuntos de E-pulsos, productos de aplicar las nuevas condiciones en distintos conjuntos de frecuencias, el resultado es idéntico al que se tiene en el esquema clásico y que ha sido ampliamente explicado en el apartado anterior, de forma que si un conjunto de E-pulso proporciona mejores resultados que otro en el esquema de identificación clásico, también lo hará en el esquema de identificación de correlación. Debido a esto, no se ha considerado interesante incluir los resultados detallados, sino únicamente las conclusiones.

IX.4.1. Rudio aditivo coloreado.

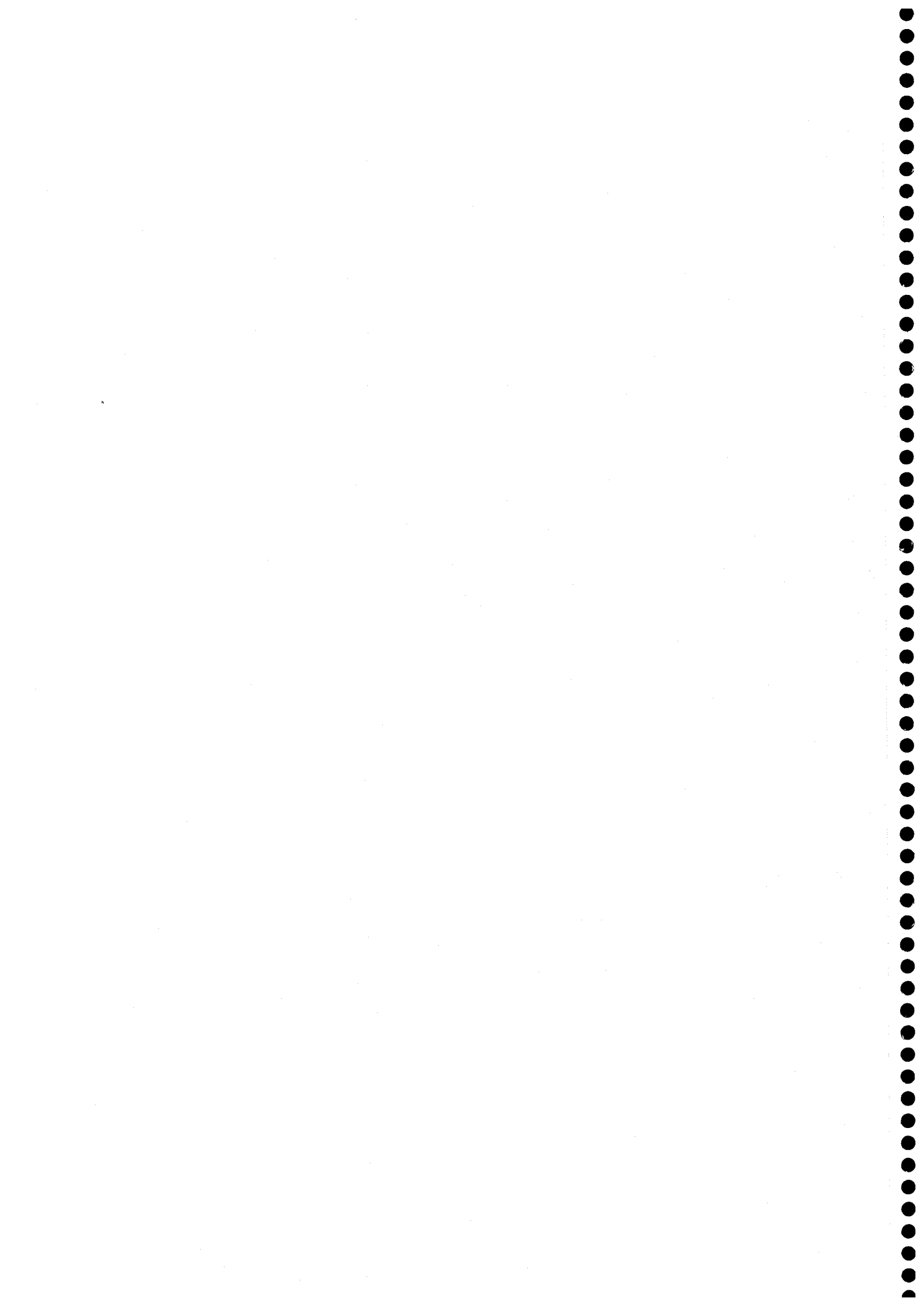
En el esquema de identificación de correlación, la principal limitación del método reside en la necesidad teórica de que el ruido sea blanco. Lo que se propone en este apartado es relajar esta limitación y estudiar qué sucede cuando el ruido presente es gaussiano pero posee un determinado contenido espectral que no es plano, es decir, un ruido no blanco o coloreado. Es de esperar que el comportamiento del esquema de correlación empeore en presencia de este tipo de ruido. Este empeoramiento dependerá, en principio, del contenido espectral de este, por lo que será necesario investigar el comportamiento de los métodos frente a ruidos aditivos con distinto contenido espectral. Habrá que comparar el esquema de correlación con el esquema clásico, ya que en estas nuevas condiciones es posible que el primero no proporcione mejores resultados que el segundo, tal y como pasaba en el caso de ruido blanco.

Al final del capítulo VII. se propone como una posible solución al caso de ruido coloreado la utilización de un nuevo esquema de identificación que utilice la estadística de alto orden de la señal. En este nuevo esquema cada canal proporciona como salida la kurtosis o el coeficiente de asimetría de la señal, que lleva información únicamente de la parte determinista de la señal de salida de los E-pulsos, ya que la kurtosis o el factor de asimetría de un proceso gaussiano son nulos. De esta manera se desarrolla un esquema de identificación que, en principio, es independiente del ruido aditivo. En una situación práctica no es así, sino que es independiente asintóticamente, poseyendo una varianza no nula en un caso no asintótico. Es precisamente esta varianza la principal dificultad que se plantea a este esquema. Efectivamente, al estar trabajando con señales finitas (la desexcitación se produce de manera exponencial), el

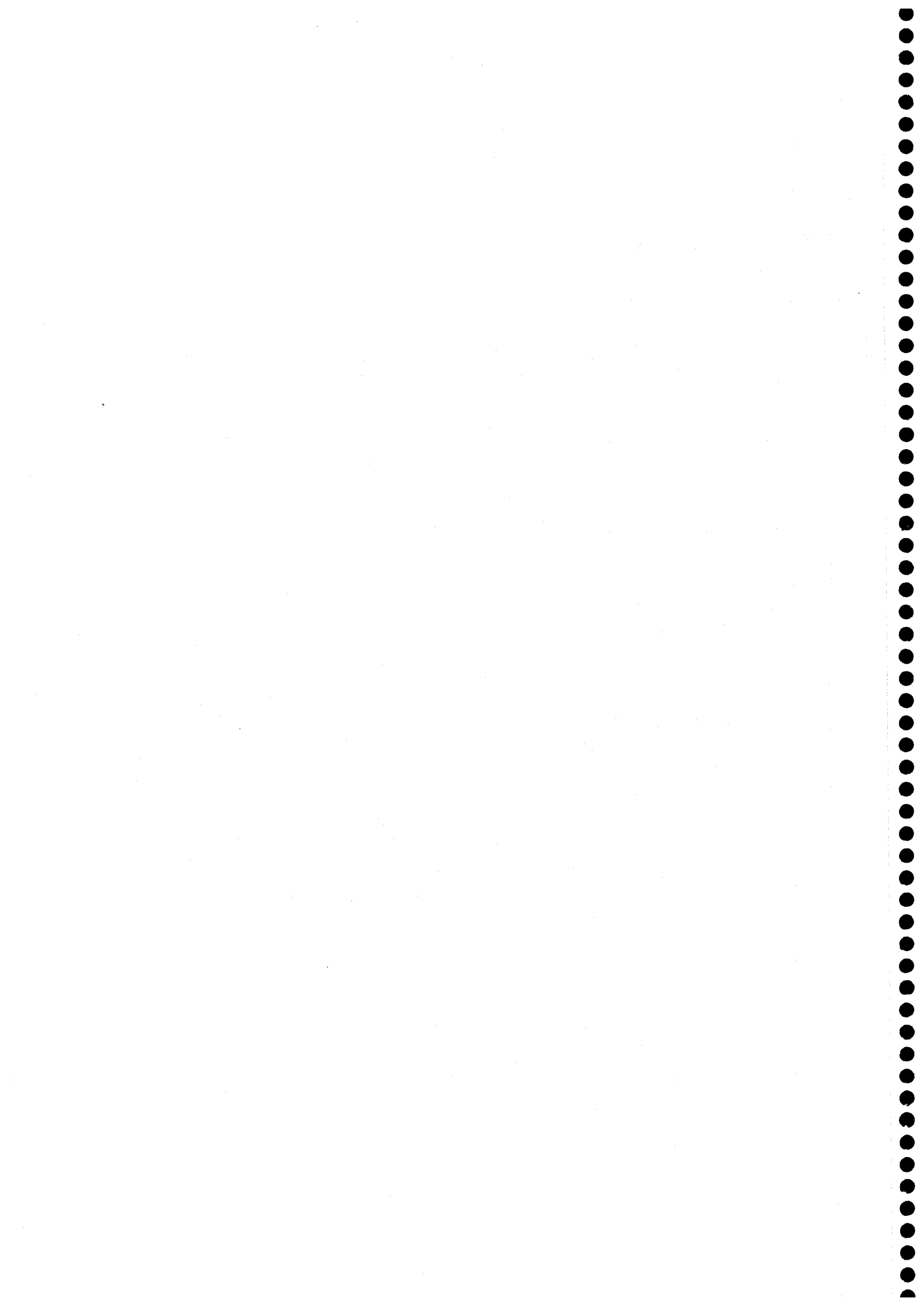
número de datos que se poseen de la señal es limitado, por lo que la varianza que puedan presentar los estimadores de las magnitudes de alto orden no es posible disminuirla indefinidamente introduciendo más datos, lo que puede conducir a situaciones en las que la varianza sea tan grande que enmascare el valor de las magnitudes de alto orden. En estas situaciones esquema de alto orden puede no proporcionar resultados correctos.

Como consecuencias de lo anterior, los resultados de este esquema pueden tener una alta dependencia de la SNR de la señal, aunque asintóticamente sean independientes de ella. La única posibilidad para disminuir la varianza es promediar en registros independientes, lo que no siempre será posible. Si estos registros independientes no están disponibles en una determinada situación práctica el esquema no será útil cuando la varianza sea demasiado alta. Todavía es necesario comparar el nivel de SNR que provoque esta situación en la que no sea útil el esquema de alto orden, y su comparación con los niveles de SNR a los que los esquemas clásicos y de correlación fallen, ya que es posible que los segundos sean mayores que el primeros (menor nivel de ruido en los segundos que en el primero).

La varianza de los métodos de alto orden es significativamente superior a los de segundo orden, por lo que será difícil que los primeros proporcionen mejores resultados, aunque habría que estudiar en cada caso la como compite por un lado el sesgo y la poca varianza de los métodos de segundo orden y por otro lado la mayor varianza de los métodos de alto orden que no están sesgados.



CONCLUSIONES



A lo largo de esta memoria se han tratado tres temas fundamentales. Los dos primeros se pueden enmarcar dentro del procesado de señal mediante estadística de cuarto orden, mientras que el último ha tratado sobre la identificación de blancos de radar a partir de la señal dispersada por estos. En concreto, estos tres temas han sido:

- A) Desarrollo de métodos de estimación paramétricos autorregresivos del triespectro.
- B) Detección y caracterización de acoplos cúbicos de fase en señales armónicas.
- C) Estudio del esquema de identificación de blancos de radar mediante pulsos de extinción.

Las conclusiones que se han podido sacar a lo largo de esta memoria han sido discutidas a lo largo de los distintos capítulos, por lo que únicamente se procede a resumir brevemente las más importantes.

A1) En este punto se han desarrollado distintos métodos de estimación paramétrica AR del triespectro, a partir de la construcción de las ecuaciones recursivas de cuarto orden, adaptando métodos clásicos ya existentes en otros ordenes y desarrollando enfoques nuevos en la construcción de otros. Se han separado los métodos en dos tipos principales: los métodos recursivos en el orden del modelo AR y los no recursivos, explicando las ventajas e inconvenientes teóricos que posee cada uno. Dentro de los primeros, se ha adaptado el método algebraico de Levinson, y se han desarrollado los métodos RCM y GM, en un intento de conseguir métodos recursivos más robustos que el primero. Entre los métodos no recursivos se ha adaptado también el método clásico de mínimos cuadrados y se han construido los nuevos métodos CFOM simple y CFOM complejo, inspirados en el método de alta resolución biespectral CTOM.

A2) Los métodos anteriores se han comparado para distintas señales en presencia de ruido aditivo gaussiano coloreado, estudiándose los factores más influyentes de los resultados. Como factor característico de las señales se ha tomado la distancia de los polos de su función de transferencia a la circunferencia unidad, distinguiendo de esta forma señales de banda ancha y de banda estrecha. En las primeras se ha podido comprobar como los métodos funcionan adecuadamente y de manera bastante similar, salvo el método CFOM complejo, siendo el método GM el que mejores resultados produce. El estudio de banda ancha refleja resultados completamente distintos, poniendo de manifiesto la gran importancia que posee la distancia de los polos a la circunferencia unidad. A su vez, el comportamiento de los métodos ha sido completamente distinto frente a la distancia relativa entre polos. El método CFOM complejo, que en señales de banda ancha no ha producido buenos resultados, se muestra como el que mejor ha estimado señales con polos cercanos entre sí, mientras que el método GM ha proporcionado resultados muy pobres, para este tipo de señales.

A3) Se ha estudiado si los métodos clásicos de estimación mejoraban los métodos de estimación triespectrales desarrollados en este capítulo, en presencia de ruido gaussiano coloreado. Se ha determinado, como, a partir de niveles de ruido que oscila entre 7dB para procesos de banda ancha y 10 dB para procesos de banda estrecha, no se puede estimar correctamente el espectro de la señal mediante métodos de segundo orden, mientras que los métodos desarrollados en esta memoria sí han proporcionado resultados adecuados.

B1) En este punto se ha estudiado el problema de acoplos cúbicos de fase en señales armónicas complejas. Como paso previo al desarrollo de métodos, se ha tratado la estadística del problema, estudiando las estrategias que son necesarias para obtener una estimación de los cumulantes de cuarto orden lo más precisa posible, para este tipo de señales, dependiendo de las características estadísticas que posean.

B2) Se han adaptado los métodos de estimación paramétrica AR desarrollados anteriormente, salvo el método GM, a las señales complejas, demostrando teóricamente como es posible utilizar este tipo de métodos en señales armónicas, como las que se tratan. También se ha desarrollado un método basado en los métodos de ESPRIT, que permite el estudio de las frecuencias y las amplitudes acopladas.

B3) Los distintos métodos se han estudiado para la determinación de un acoplo cúbico de fase y para la discriminación entre frecuencias relacionadas armónicamente y relacionadas en fase. Los métodos AR han presentado comportamientos muy distintos entre ellos y el orden del modelo AR con el que modelar, se ha presentado como un problema clave en el comportamiento de todos los métodos. Los métodos no recursivos han presentado resultados precisos y con poca varianza, pero son muy sensibles a la existencia de otras frecuencias no acopladas, presentando picos espúreos, lo que dificulta la interpretación de la señal. Los métodos recursivos han presentado resultados, que aunque correctos, poseen una mayor varianza. El método RCM se ha presentado como el menos sensible a la presencia de otras frecuencias no acopladas y se ha descrito una estrategia para aprovechar su varianza en la construcción de espectros promediados, los cuales son los que mejor reflejan la diferencia entre frecuencias acopladas y relacionadas armónicamente.

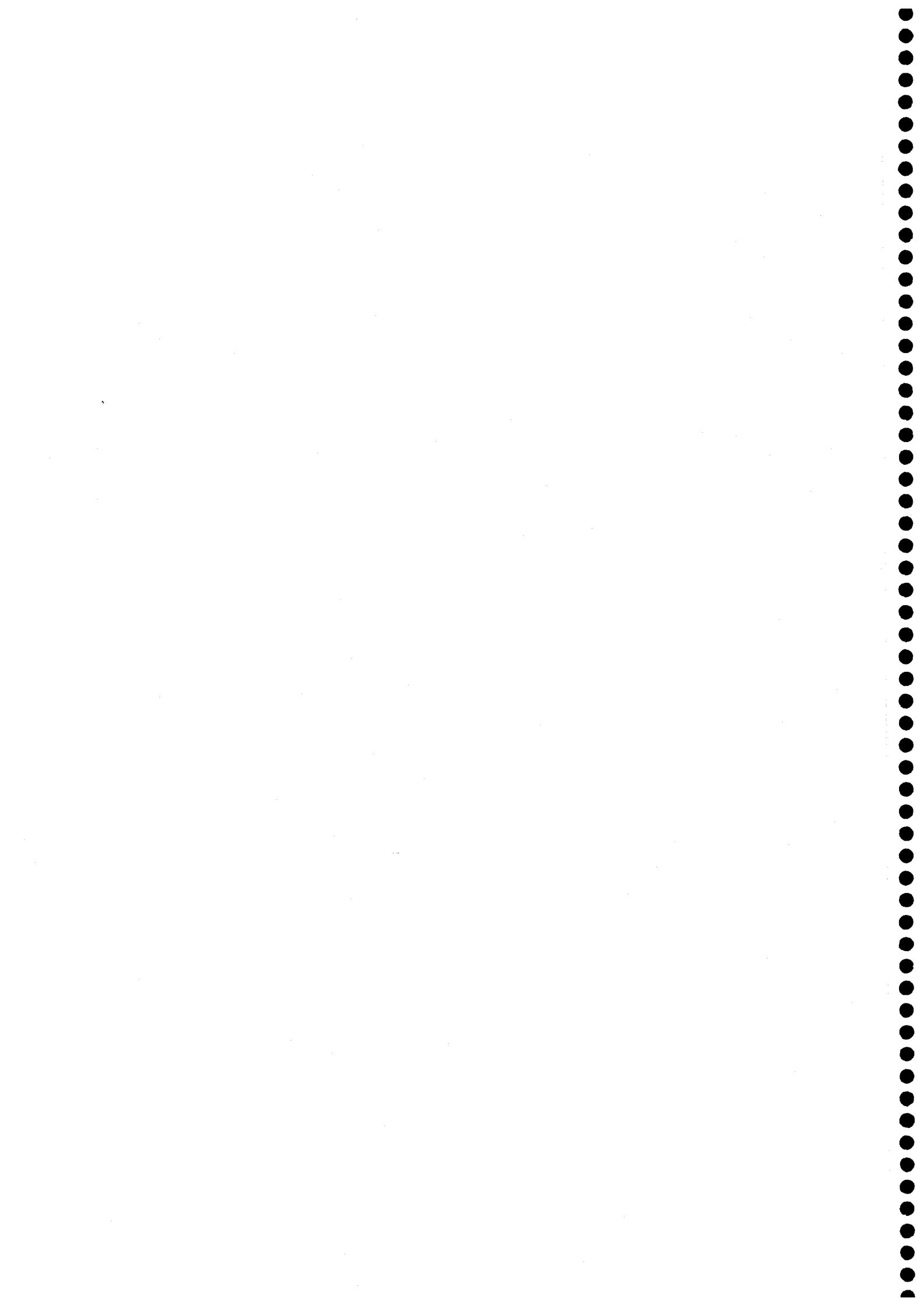
C1) Por último se ha tratado el esquema de identificación de blancos de radar mediante pulsos de extinción. El desarrollo clásico de estos pulsos en funciones base polinómicas se ha desarrollado mediante la teoría de β -splines, lo que ha permitido reducir la dimensión del problema a solucionar. También se han utilizado las propiedades de este desarrollo para imponer unas condiciones sobre los E-pulsos, con el fin de mejorar los resultados clásicos, demostrándose posteriormente la mejora práctica al imponer estas condiciones, en diversas simulaciones.

C2) Se ha estudiado el comportamiento teórico frente a ruido blanco del esquema de identificación clásico basado en E-pulsos, comprobándose como proporciona resultados asintóticamente erróneos. Esto ha dado lugar al desarrollo de un nuevo esquema de identificación de blancos de radar mediante correlaciones cruzadas, que posee la propiedad de proporcionar resultados asintóticamente correctos en presencia de ruido blanco. En las simulaciones se ha comprobado como este esquema mejora ampliamente al esquema clásico.

C3) La principal limitación del esquema de identificación de correlación, que es la necesidad de que el ruido sea blanco, se ha relajado, estudiando como se comportan los dos esquemas con ruido coloreado. También se ha propuesto un esquema de alto orden como alternativa a los otros cuando el ruido es coloreado. El resultado ha sido que el esquema de correlación sigue siendo mejor que el clásico, salvo para ruido de banda muy estrecha, en los que las correlaciones son muy importantes. El esquema de alto ha proporcionado buenos resultados en el caso de tener acceso a registros independientes con los que promediar los resultados y mejorar la estadística.

APÉNDICE A

MÉTODO DE EXPANSIÓN EN
SINGULARIDADES



A-1. INTRODUCCIÓN.

El Método de Expansión en Singularidades (SEM) es una técnica analítica formalizada por Baum [BAU76] en los comienzos de los años 70 para analizar la respuesta transitoria de antenas y dispersores conductores a excitaciones variables con el tiempo. Está basado en los resultados de muchos experimentos y análisis teóricos que revelan que la respuesta en el dominio del tiempo de tales objetos está dominada en el período del "late-time" (o respuesta tardía del blanco cuando la onda incidente de excitación ha pasado a través del objeto) por una suma de exponenciales complejas amortiguadas. Las frecuencias de estas oscilaciones sólo dependen de las propiedades físicas de los objetos, es decir, la geometría en el caso de conductores perfectos y no de la forma particular de la excitación.

A-2. EL CONCEPTO DE RESONANCIAS Y DE MODOS NATURALES

Considérese el problema transitorio que se presenta en la figura A.1, en el cual un cuerpo conductor perfecto está siendo iluminado por un campo incidente $E^i(\vec{r},t)$ y $H^i(\vec{r},t)$ en el espacio libre. Varios planteamientos particulares del problema pueden emplearse como base de la solución. Una de tales formulaciones es la ecuación integral del campo magnético en el dominio del tiempo (MFIE). La corriente inducida en la superficie del objeto por la onda transitoria satisfará [BAU76]:

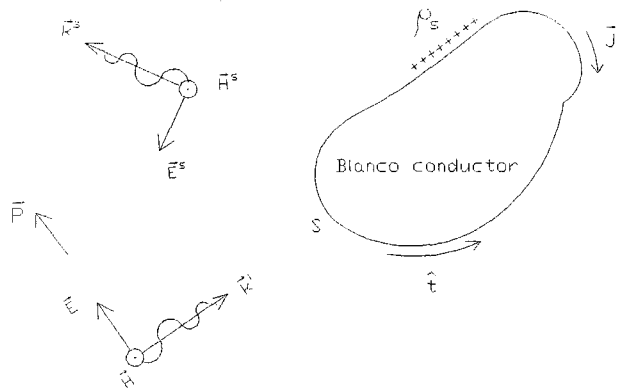


Figura (A.1): Blanco conductor iluminado por una onda electromagnética transitoria.

$$\vec{J}(\vec{r},t) = 2 \hat{n} \times \vec{H}^i(\vec{r},t) + \iint_{S_{pv}} \tilde{K}(\vec{r},\vec{r}') \vec{J}(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c) dS' \quad (A.1)$$

donde \vec{J} es la corriente superficial inducida, \tilde{K} es un kernel diádico y la integral de superficie es de valor principal que excluye el punto $\vec{r} = \vec{r}'$. En el espacio libre el operador diádico \tilde{K} viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{K} \vec{J} &= -\hat{n} \times \frac{\vec{R}}{R^2} \times \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \right\} \vec{J} \\ \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' \quad \tau = t - \frac{R}{c} \quad \text{tiempo de retardado} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En la ecuación (A.1), el producto vectorial $\hat{n} \times \vec{H}^i$ forma la porción óptica de la corriente inducida, mientras que el término de la integral de superficie proporciona la corriente de realimentación en cada punto del dispersor debido al resto de las corrientes inducidas en la superficie.

Esta ecuación MFIE o su correspondiente para el campo eléctrico EFIE se puede representar genéricamente por el operador diádico lineal:

$$\tilde{L} \cdot \vec{J}(\vec{r}', t') = \vec{d}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.3})$$

donde el vector fuente \vec{d} , relacionado con las componentes tangenciales a la superficie de campo incidente y el operador \tilde{L} vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \hat{n} \times \vec{H}^i \\ \tilde{L} &= \left\{ \frac{1}{2} \tilde{I} + \iint_{S_{pv}} \tilde{K}(\vec{r}, \vec{r}') dS' \right\} \cdot \vec{J} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Los modos naturales \vec{J}_n son soluciones de esta ecuación cuando no hay fuentes, es decir, cuando es homogénea:

$$\tilde{L} \cdot \vec{J}(\vec{r}', t') = \vec{0} \quad t' > \tau \quad (\text{A.5})$$

Para resolver esta ecuación se separa la variable temporal usando la Transformada de Laplace. Entonces el operador \tilde{L} queda:

$$\tilde{L}(s) = \frac{1}{2} \tilde{I} - \tilde{L}_1 = \frac{1}{2} \tilde{I} - \iint_{S_{pv}} dS \hat{n} \times \nabla \left(\frac{4\pi}{R} e^{-sR/c} \right) \times \quad (\text{A.6})$$

Ya que la ecuación (A.5) es una ecuación de autovalores, Marin [MAR73] demuestra, usando las propiedades espectrales del operador diádico \tilde{L}_1 y la teoría de determinantes de Fredholm que el operador inverso $\tilde{L}(s)$ existe y es una función analítica de s , excepto para ciertos valores

$s_n = \sigma_n + j\omega_n$ en los cuales posee polos. Dichos polos s_n son denominados frecuencias complejas o naturales de resonancia. Su parte real σ_n es negativa debido a la pérdida de energía por radiación desde el cuerpo. Estos polos han de ser de orden finito, y es un resultado experimental [MAR73] que son polos simples para cuerpos conductores perfectos. Por consiguiente dichos modos son de la forma:

$$\vec{J}_n(\vec{r}, t) = \vec{J}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \quad (\text{A.7})$$

en donde n es un índice discreto para cuerpos conductores perfectos y \vec{J}_n es la distribución de corriente espacial sobre la superficie, que es solución de la ecuación:

$$\tilde{L}(s_n) \vec{J}_n(\vec{r}) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Esta ecuación tendrá M soluciones linealmente independientes, \vec{J}_{nm} para cada valor de s_n , siendo M la degeneración de la solución correspondiente a dicho valor del polo.

La solución general de la ecuación (A.5) válida en el plano finito s puede obtenerse usando una expansión en modos naturales y el teorema de representación de Mittag-Leffler [MOR84]:

$$\vec{J}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M \left\{ C_{nm} \frac{1}{s - s_n} \vec{J}_{nm} \right\} + \vec{J}'(s) \quad (\text{A.9})$$

donde \vec{J} es una función entera en el plano s y los coeficientes de la expansión son C_{nm} .

Las singularidades de la corriente inducida total y por tanto del campo dispersado, pueden deberse tanto a las singularidades del campo incidente como a este tipo de singularidades que están determinadas completamente por el dispersor.

A-3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL MEDIANTE EXPANSIÓN EN FUNCIONES DE GREEN CAUSALES.

Para resolver la ecuación (A.3) eliminamos la dependencia en la configuración de la fuente por medio de la función diádica de Green causal \tilde{g} , que representa la corriente inducida en el punto (\vec{r}', t') de la superficie del cuerpo debido a una fuente impulsiva en (\vec{r}'', t'') :

$$\tilde{L} \tilde{g}(\vec{r}', t' | \vec{r}'' t'') = \tilde{I} \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') \delta(t' - t'') \quad (\text{A.10})$$

La función \tilde{g} ha de cumplir la condición de causalidad:

$$\tilde{g}(\vec{r}' t' | \vec{r}'' t'') = \tilde{0} \quad t' < t'' + \frac{|\vec{r}' - \vec{r}''|}{c} \quad (\text{A.11})$$

La solución de la ecuación (A.10) es de la forma:

$$\tilde{g}(\vec{r}', t' | \vec{r}'' t'') = \tilde{I} \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') \delta(t' - t'') + u(t' - t_0) \tilde{g}_0(\vec{r}', t' | \vec{r}'' t'') \quad (\text{A.12})$$

en donde \tilde{g}_0 es la solución libre de fuentes de (A.10), la cual para excluir el punto fuente $\vec{r}'' = \vec{r}'$ en el tiempo $t' = t''$ debe tomarse a partir del intervalo temporal $t_0 > t''$. Esta solución puede expandirse en modos naturales de forma análoga a (A.9) donde los coeficientes pueden obtenerse a partir de los modos \vec{a}_n del operador autoadjunto normalizado de \tilde{L} [MOR84]:

$$\tilde{g}_0(\vec{r}', t' | \vec{r}'' t'') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^M \vec{a}_{nm}(\vec{r}'', t'') \vec{J}_{nm}(\vec{r}') e^{s_n t'} \quad (\text{A.13})$$

Conocida \tilde{g} , la corriente inducida para una excitación específica $\vec{d} = \hat{n} \times \vec{H}$ está dada en términos de la convolución espacio-temporal:

$$\vec{J}(\vec{r}', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{g}(\vec{r}', t' | \vec{r}'', t'') \cdot \vec{d}(\vec{r}'', t'') \rangle dt'' \quad (\text{A.14})$$

en donde $\langle \rangle$ indica la integración sobre la superficie en la variable \vec{r}' .

Una vez calculada la corriente inducida pueden obtenerse los campos eléctrico y magnético a partir de la teoría del potencial. Usando los potenciales escalar y vectorial, relacionados a través de la condición o gauge de Lorentz, podemos expresar el campo dispersado $\vec{E}^s(\vec{r}, t)$ como:

$$\vec{E}^s(\vec{r}, t) = -\nabla \phi^s(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}^s(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{A.15})$$

y el campo magnético como:

$$\vec{H}^s(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}^s(\vec{r},t) \quad (\text{A.16})$$

donde los potenciales escalar y vector vienen dados respectivamente por:

$$\varphi_s(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}',t-R/c)}{R} dS' \quad ; \quad \vec{A}^s(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)}{R} dS' \quad (\text{A.17})$$

siendo $\rho_s(\vec{r},t)$ la densidad superficial de carga inducida sobre la superficie del blanco. Utilizando las ecuaciones (A.15), (A.16) y la ecuación de continuidad, el campo eléctrico y magnético dispersado puede obtenerse como [BAU76]:

$$\begin{aligned} \vec{E}^s(\vec{r},t) = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{R^2} \nabla R(\vec{r}',\tau) \rho(\vec{r}',\tau) dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\vec{r}',\tau) dS' + \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{J}(\vec{r}',\tau) dS' \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\vec{H}^s(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{R^2} \vec{J}(\vec{r}',\tau) + \frac{1}{Rc} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{J}(\vec{r}',\tau) \right] \times \frac{\vec{R}}{R} dS'$$

Generalmente el problema de la respuesta de blancos a ondas de radar consiste en estudiar la respuesta a una onda plana. En el siguiente apartado se obtendrá el campo dispersado por un conductor cuando esté iluminado por una onda electromagnética plana transitoria.

A-4. RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN DE ONDA PLANA

Consideremos como en el apartado anterior un conductor perfecto sobre el que incide una onda electromagnética plana transitoria linealmente polarizada:

$$\vec{H}^i = \hat{l} f(t - \vec{r} \cdot \hat{p}/c) \quad (\text{A.19})$$

en donde \vec{r} es el vector de posición del punto campo, \hat{l} es el vector de polarización de la onda y \hat{p} es el vector unitario en la dirección de propagación. Para este caso es posible llevar a cabo las integraciones espaciales y temporales para calcular la densidad de corriente inducida. Para ello vamos a calcular, basándonos en la linealidad del problema, la respuesta a una onda plana impulsiva o respuesta impulso del blanco. Posteriormente podemos calcular la respuesta a cualquier excitación de onda plana sin más que convolucionar dicha excitación con la respuesta impulso del blanco.

A.4.1. Respuesta a una onda plana impulsiva

Si calculamos primeramente la respuesta a una onda plana impulsiva, la densidad de corriente inducida en el blanco dispersor vendrá dada, según (A.14):

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \langle \tilde{g}(\vec{r}', t' | \vec{r}'', \vec{r}''\hat{p}/c) \cdot \hat{n}(\vec{r}'') \times \hat{l} \rangle \quad (\text{A.20})$$

y si utilizamos el desarrollo en serie (A.13) y la expresión de \tilde{g} dada en (A.12):

El término \vec{J}^{PO} es la porción óptica de la corriente inducida y a A_n , los coeficientes del

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}', t') &= \vec{J}^{PO}(\vec{r}', t') + \sum_n A_n(\vec{r}', t') \vec{J}_n(\vec{r}', t') \\ \vec{J}^{PO}(\vec{r}', t') &\equiv \hat{n} \times \vec{H}^i(\vec{r}', t') \\ A_n(\vec{r}', t') &\equiv \langle u(t' - t_0) \vec{a}_n(\vec{r}'', \vec{r}''\hat{p}/c) \cdot \hat{n} \times \hat{l} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

desarrollo en serie en modos naturales, se les denomina coeficientes de acoplo de la corriente inducida.

El campo magnético dispersado puede obtenerse de la expresión (A.18). Sin embargo generalmente en problemas de blancos de radar se mide el campo electromagnético a una gran distancia del blanco. En estos casos se puede aproximar R por \vec{r} por lo que la expresión del campo magnético lejano dispersado queda:

$$\vec{H}^s(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \times \hat{r} \, dS' \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo el valor de \vec{J} dado por (A.21) en la ecuación (A.22) se obtiene para el campo magnético lejano dispersado:

$$\vec{H}^s(\vec{r}, t) = \vec{H}^{PO}(\vec{r}, t) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\vec{r}, t) \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \quad (\text{A.23})$$

en donde \vec{H}_n son la parte espacial de los modos naturales del campo magnético, obtenidos a partir de las modos naturales de corriente a través de los potenciales. Los coeficientes de acoplo de dicho campo B_n vienen dados por la expresión:

$$B_n(\vec{r}, t) = \langle u(t - \vec{r}''\hat{p}/c - |\vec{r} - \vec{r}''|/c) \vec{a}_n(\vec{r}'', \vec{r}''\hat{p}/c) \cdot \hat{n} \times \hat{l} \rangle \quad (\text{A.24})$$

donde la función escalón hace cumplir los requisitos de causalidad que imponen que en un punto de observación (\vec{r}, t) los coeficientes de expansión serán debidos a integraciones en puntos fuente del cuerpo \vec{r}'' tales que:

$$\vec{r}''\hat{p} + |\vec{r} - \vec{r}''| < ct \quad (\text{A.25})$$

La integración en los coeficientes de acoplo presente en (A.24) incluirá solamente aquellos puntos dados por (A.25) que permanecen dentro del paraboloide de revolución centrado en r y plano directriz coincidente con la onda incidente en un tiempo t .

En la ecuación (A.23) podemos distinguir dos términos distintos:

(a) $\vec{H}^{PO}(\vec{r}, t)$ es la parte óptica del campo magnético generado por la corriente inducida. El intervalo temporal en el cual esta porción alcanza un punto campo \vec{r} será:

$$t^{PO} = [\hat{p}\vec{r}' + |\vec{r} - \vec{r}'|] / c \quad (\text{A.26})$$

Permitiendo a \vec{r} variar sobre la superficie puede definirse un máximo y un mínimo valor de t^{PO} que nos da la duración temporal de la componente óptica. Dichos límites vienen dados por:

$$\begin{aligned} t_{\text{inicial}} &= \min(t^{PO}) = r/c \\ t_{\text{final}} &= \max(t^{PO}) = 2D/c \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

donde D es la dimensión del objeto dispersor en la dirección de \hat{p} .

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{H}_n(\vec{r}, t) e^{s_n t}$ que representa el campo dispersado generado por la corriente que

surge detrás de la onda plana incidente.

El término óptico (a) es directamente proporcional a la segunda derivada temporal del área de la silueta del dispersor proyectada en la dirección incidente de la excitación \hat{p} , y por lo tanto depende fuertemente de ella. El resto del campo dispersado (b) se debe a la distribución local de corriente libre de fuentes en la porción variable de la superficie, por ello el vector de residuos H_n depende del tiempo, ya que el área de la superficie donde la integración tiene lugar está cambiando en el transcurso del tiempo. Esta forma de expansión con coeficientes variables con el tiempo se denomina en el SEM "expansión de clase 2". El vector de residuos H_n llega a ser constante pasado un cierto periodo de tiempo, como puede observarse de la expresión de los coeficientes de acoplo dados por (A.24), precisamente en un tiempo $T_0 = 2D/c$ medido en el punto campo \vec{r} a partir de la llegada de la onda incidente, intervalo de tiempo que es idéntico a la duración de la componente óptica del campo dispersado.

La ecuación (A.23) es una expansión de clase 2 con coeficientes variables temporalmente. Sin embargo como se ha puesto de manifiesto pasado un cierto tiempo los coeficientes de acoplo pasan a ser constantes. Separando dichos intervalos temporales obtenemos una representación alternativa de (A.23):

$$\vec{H}^s(\vec{r}, t) = u(t - |\vec{r}|/c) \sum_n C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t} + \vec{H}^e(\vec{r}, t) + \vec{H}^{PO}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.28})$$

donde la función escalón tiene en cuenta el tiempo que tarda en llegar la onda al punto campo y el resto de las variables vienen dadas por:

$$C_n(\vec{r}) = A_n(\vec{r}, t) \quad \text{para} \quad t > T_0 \quad (\text{A.29})$$

$$\vec{H}^e(\vec{r}, t) = [u(t - |\vec{r}|/c) - u(t - T_0)] \sum_n [A_n(\vec{r}, t) - C_n(\vec{r})] \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t}$$

La función \vec{H}^e es la cubre la parte con coeficientes temporalmente variables de la expansión en modos naturales. Es, como puede observarse de (A.29) una función limitada temporalmente en el mismo intervalo que la componente óptica del campo magnético.

La transformada de Laplace del campo dispersado dado por (A.28) nos dará la función de transferencia del blanco dispersor, al ser dicho campo la respuesta a una onda plana impulsiva. Cambiando el origen temporal en $|\vec{r}|/c$ tendremos en el dominio de la transformada de Laplace:

$$\vec{H}^s(\vec{r},s) = \sum_n \frac{C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r})}{s-s_n} + \vec{H}^e(\vec{r},s) + \vec{H}^{PO}(\vec{r},s) \quad (\text{A.30})$$

La representación en el plano de la variable s consta, pues, de una expansión en un conjunto numerable de funciones con un polo simple, polos que hemos denominado resonancias naturales del objeto $s_n = \sigma_n + j\omega_n$ seguido de una función entera en el plano s producida por la transformada de Laplace de las funciones limitadas temporalmente H^e y H^{PO} . Esta representación es la de una función meromorfa expandida en polos simples como implica el Teorema de Mittag-Leffler [MOR84].

A.4.2. Respuesta temprana y tardía del blanco ("early-time" y "late-time")

De lo dicho anteriormente, la distribución temporal del campo transitorio dispersado tendrá la forma genérica:

$$\vec{H}^s(t) = \vec{H}_E(t) [u(t)-u(t-T_0)] + \vec{H}_L(t) u(t-T_0) \quad (\text{A.31})$$

siendo $T_0 = 2D/c$ el tiempo de transición que transcurre en un punto campo \vec{r} desde la llegada de la onda incidente hasta que los coeficientes de la expansión en modos naturales son constantes en el tiempo como se ha puesto de manifiesto en el apartado anterior. Esta representación temporal permite distinguir dos intervalos, antes y después del tiempo de transición T_0 . Estos intervalos los denominaremos:

1.- Respuesta temprana o "early-time", donde el campo dispersado está compuesto de un término óptico y una expansión en singularidades de clase 2 con coeficientes variables con el tiempo. Este periodo se corresponde con el intervalo temporal en que la onda está iluminando el objeto.

2.- Respuesta tardía o "late-time", donde el campo dispersado puede representarse por una expansión en singularidades con coeficientes constantes en el tiempo, expansión que se denomina de clase 1. Esta se corresponde en la ecuación (A.28) con el intervalo posterior a T_0 cuando la porción óptica y el campo H^e se han anulado y solamente permanece la expansión en coeficientes constantes:

$$\vec{H}_L^s(\vec{r},t) = \sum_n C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \quad t > T_0 \quad (\text{A.32})$$

expresión que podemos reescribir como:

$$\vec{H}_l^s(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{R}_n(\vec{r}) e^{s_n t} \quad t > T_0 \quad (\text{A.33})$$

en donde el vector de residuos \vec{R}_n es simplemente:

$$\vec{R}_n(\vec{r}) = C_n(\vec{r}) \vec{H}_n(\vec{r}) \quad (\text{A.34})$$

La importancia del "late-time" proviene de su característica de poseer unos coeficientes en la expansión constantes en el tiempo, lo que lo convierte en sumamente útil para caracterizar temporalmente a un blanco simplemente por una suma de exponenciales complejas amortiguadas en dicho intervalo.

Como el campo dispersado es real, los polos aparecen en pares complejos conjugados, por lo que la expresión (A.33) puede reescribirse usando sinusoides amortiguadas:

$$\vec{H}_l^s(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{R}_n'(\vec{r}) e^{\sigma_n t} \cos(\omega_n t) \quad t > T_0 \quad (\text{A.35})$$

la cual, descomponiendo el vector residuos en su forma módulo-argumento y refiriéndonos a una dirección cualquiera η , la componente η de dicho campo queda de la forma:

$$H_l^s(\vec{r}, t, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(\vec{r}, \eta) e^{\sigma_n t} \cos(\omega_n t + \varphi_n(\vec{r}, \eta)) \quad t > T_0 \quad (\text{A.36})$$

donde φ_n es la fase del vector complejo de residuos \vec{R}_n' . Esta ecuación es muy útil y será ampliamente utilizada en el proceso de caracterizar la respuesta transitoria de un blanco en el "late-time".

En la ecuación (A.36) se ha de hacer notar que el vector de residuos \vec{R}_n' depende de la dirección η del campo y en consecuencia tanto su módulo R_n' como su fase φ_n dependen de la orientación relativa del blanco respecto a la excitación. Por ello algunos modos pueden ser fuertemente excitados en algunas orientaciones y ser casi nulos en otras, obteniéndose en el "late-time" campos dispersados diferentes según unos modos contribuyan más o menos a la respuesta impulso del blanco.

A.4.3. Respuesta a una onda plana arbitraria.

Una vez que hemos calculado la respuesta a una onda plana impulsiva podemos calcular la respuesta a una onda plana arbitraria dada por la ecuación:

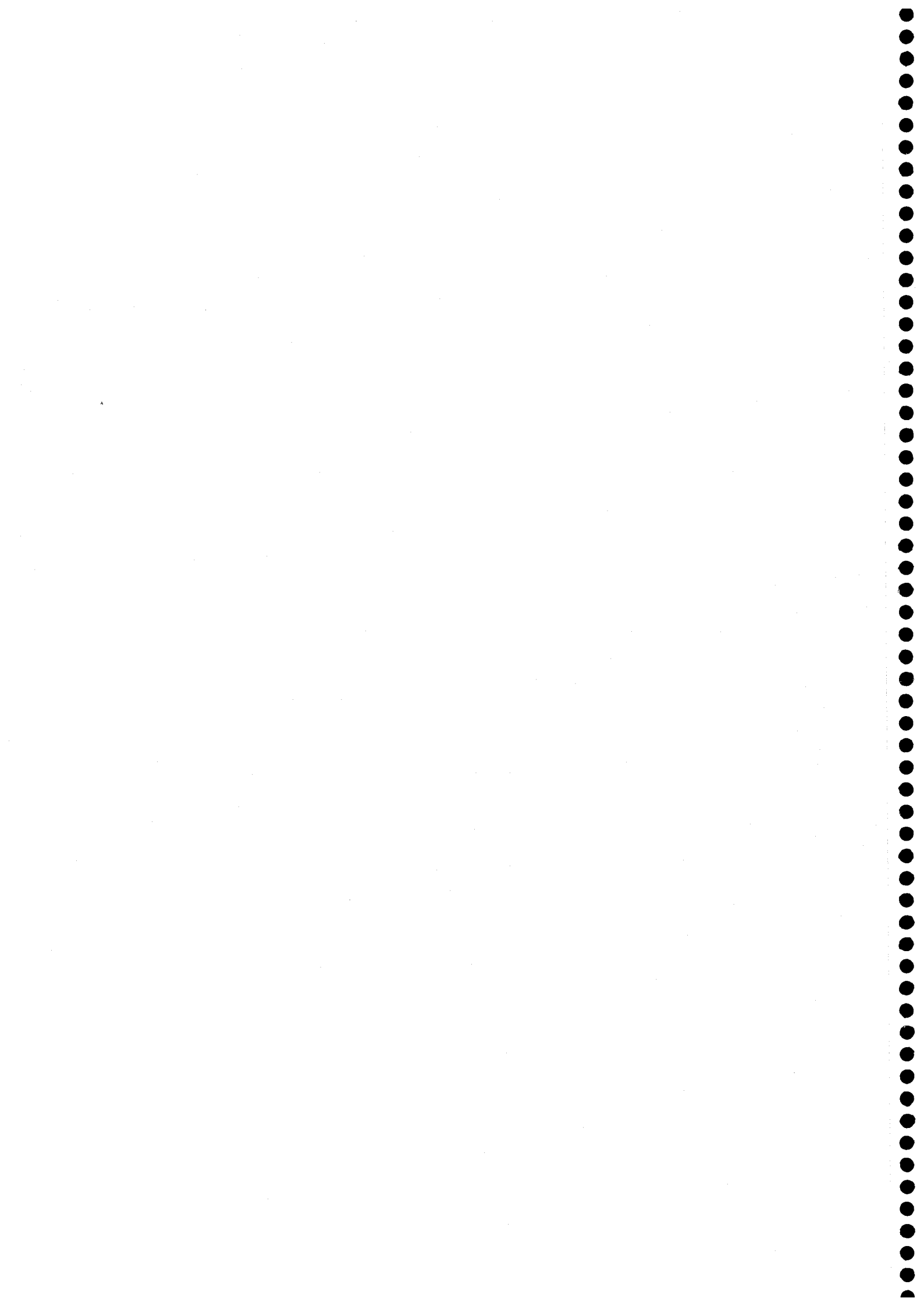
$$\vec{H}^i = \hat{l} f(t - \vec{r} \hat{p}/c) \quad (\text{A.37})$$

en donde \vec{r} es el vector de posición del punto campo, \hat{l} es el vector de polarización de la onda, \hat{p} es el vector unitario en la dirección de propagación de la onda y $f(t)$ es una función de modulación arbitraria. La respuesta a dicha excitación puede calcularse usando la convolución temporal de la respuesta impulso con $f(t)$ gracias a la linealidad del problema. En el dominio de la transformada de Laplace quedaría simplemente el producto de la transformada de la función de modulación por la función de transferencia del sistema:

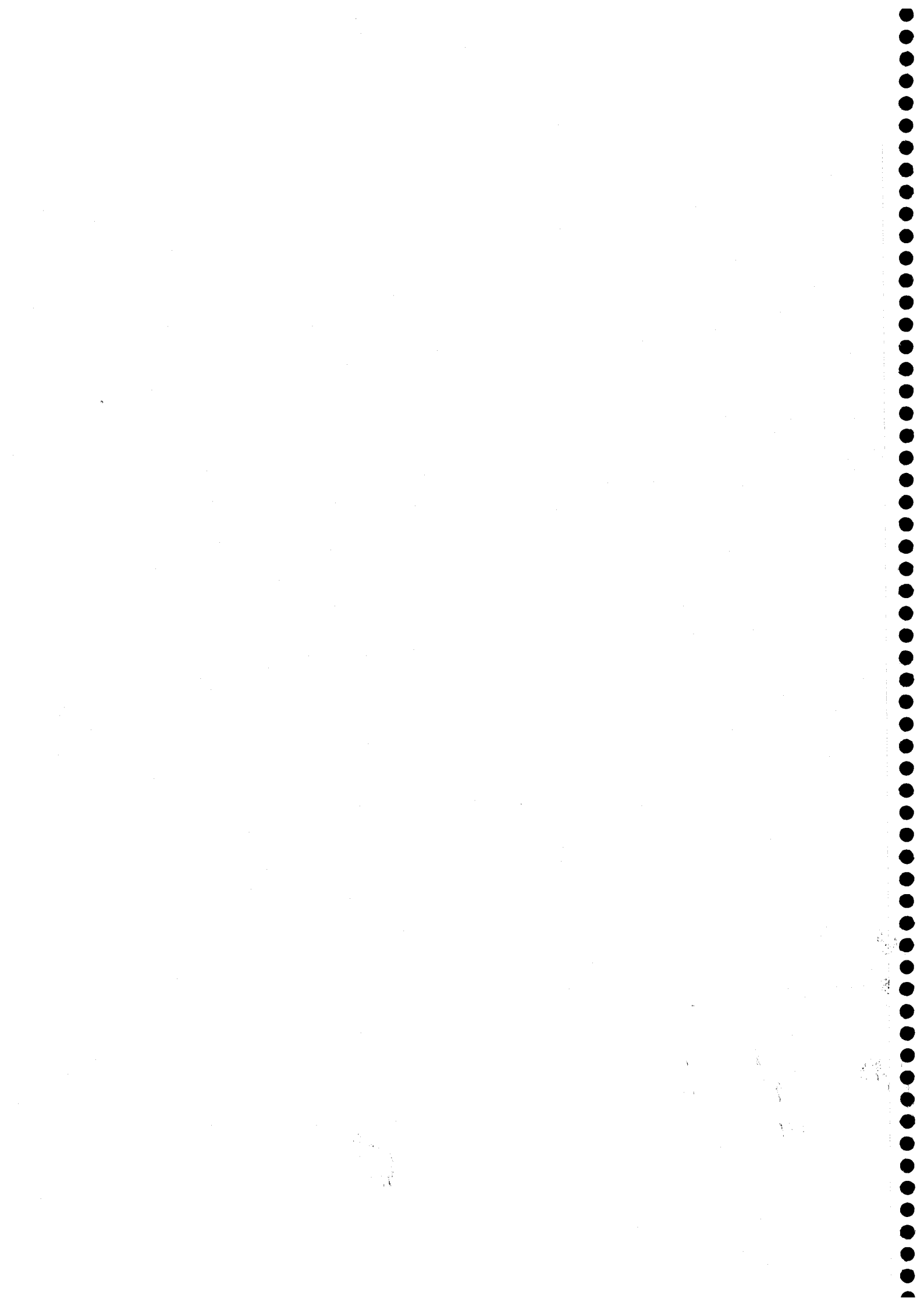
$$\vec{H}_t^s(\vec{r}, s) = F(s) \vec{H}^s(\vec{r}, s) \quad (\text{A.38})$$

donde la función de transferencia $\vec{H}^s(\vec{r}, s)$ viene dado por la ecuación (A.29) y $\vec{H}_t^s(\vec{r}, s)$ es el campo magnético dispersado por el blanco al ser excitado por la onda plana.

Una cuestión práctica importante a la hora de simular en el computador la respuesta impulso de los blancos es el número de modos que hay que incluir en la ecuación (A.36) que nos da el "late-time" del blanco. En teoría intervienen un conjunto numerable de modos pero en la práctica sólo contribuyen significativamente un número finito de ellos, aquellos con factores de amortiguamiento σ_n de magnitud menor en valor absoluto, ya que conforme éste aumenta la contribución del modo, al ir afectada por una exponencial decreciente como se pone de manifiesto en (A.36), se extingue rápidamente, no teniendo una contribución importante en el intervalo de análisis en el "late-time".



BIBLOGRAFÍA



- [ABA85] T.J. Abatzoglou, "A Fast Maximum Likelihood Algorithm for Frequency Estimation of a Sinusoid Based on Newton's Method", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-33, pp. 77-89, Feb. 1985.
- [ALS93] S.A. Alshebeili, A.N. Venetsanopoulos and A.E. Cetin, "Cumulant based identification approaches for nonminimum phase FIR systems", IEEE Trans on Signal Processing, Vol. 41, No. 4, pp. 1576-1588, AP. 1993.
- [AKA66] H. Akaike, "Note on Higher-Order Spectra", Ann. Ins. Statist. Math. , No. 18, pp. 123-126, 1966.
- [AND74] R.A. Anderson, J.A. Landt, F.J. Deadrick and E. K. Miller, "The LLL Transient Electromagnetic Measurement Facility: A Brief Description", Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, CA, Rep. UCRL-51933, Aug 1974.
- [BAK91] S. Bakamidis, M. Dendrinis, and G. Carayannis, "SVD Analysis by Synthesis of Harmonic Signals", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., Vol. 39, No 2, February 1991.
- [BAL89] C.A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics", Ed. New York: Wiley, Chap. 11, 1989.
- [BAR55] M.S. Bartlett, "An Introduction to Stochastic Processes", London U.K.: Cambridge Univ. Press, 1955.
- [BAU71] C.E. Baum, "On the Singularity Expansion Method for the Solution of Electromagnetic Interaction Problems", Interaction Note 88, December 1971.
- [BAU76] C.E. Baum, "The Singularity Expansion Method" in Transient Electromagnetic Fields, L.B. Felson, Ed. New York: Springer-Verlag, ch.3, pp. 129-179, 1976.
- [BAU91] C.E. Baum, E.J. Rothwell, K.M. Chen and D.P. Nyquist, "The Singularity Expansion Method and its Application to Target Identification", Proc. IEEE, Vol.79, No. 10, pp. 1481-1492, October 1991.
- [BAY90] J. P. R. Bayard and D. Schaubert, "Target Identification Using Optimizations Techniques", IEEE Trans Antennas and Propagat., Vol 38, No. 4, April 1990.
- [BAY91] J. P. R. Bayard, D. H. Schaubert, E. J. Rothwell, K. M. Chen and D. M. Nyquist, "Optimization Method versus E-pulse Method in the context of Target Discrimination", IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol 39, No. 1, Jan. 1991.
- [BEN82] J.S. Bendat and A.G. Piersol, "Spectral Analysis of Nonlinear Systems Involving Square-Law Operations", J. Sound Vibr., Vol.81, pp. 199-212, 1982.
- [BLA53] A. Blanc-Lapierre and R. Forter, "Theorie des Fonctions Aleatoires". Paris, France: Masson, 1953.

- [BLAR75] M.L. VanBlaricum and R. Mitra, "A Technique for Extracting the Poles and Residues of a System Directly from its Transient Response", IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. AP-23, pp. 777-781, Nov. 1975.
- [BLAR78] M.L. Van Blaricum and R. Mitra, "Problems and Solutions Associated with Prony's Method for Processing Transient Data", IEEE Trans. Antennas Propagation, Vol. AP-26, pp. 174-182, January 1978.
- [BEN80] A. Benveniste, M. Goursat and G. Ruget, "Robust Identification of Nonminimum Phase System: Blind Adjustment of Linear Equalizer in Data Communications", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-25, pp. 385-398, June 1980.
- [BRI65] D.R. Brillinger, "An Introduction to Polyspectra", Ann. Math. Statist., Vol. 36, pp. 1351-1374, 1965.
- [BRI67a] D.R. Brillinger and M. Rosenblatt, "Computation and Interpretation of k -th Order Spectra", in Spectral Analysis of Time Series, B. Harris, Ed. New York, NY:Wiley, pp. 189-232, 1967.
- [BRI67b] D.R. Brillinger and M. Rosenblatt, "Asymptotical Theory of Estimates of k -th Order Spectra", Spectral Analysis of Time Series, B. Harris, Ed. New York, NY:Wiley, pp. 153-188, 1967.
- [BRI70] D.R. Brillinger, "The Identification of Polynomial Systems by Means of Higher Order Spectra", J. Sound Vibr., Vol.12, pp. 301-313, 1970.
- [BRI77] D.R. Brillinger, "The Identification of a Particular Nonlinear Time Series System", Biometrika, Vol. 65, pp. 509-515, 1977.
- [BRO83] R. G. Brown, "Random Signal Analysis and Kalman Filtering", Ed. John Wiley & Sons, 1983.
- [CAD87] J.A. Cadzow and M.-M Wu, "Analysis of Transient Data in Noise", IEE Proceedings, Vol 134, Pt F, No 1, February 1987.
- [CAD88] J. A. Cadzow, "Signal Enhancement. A Composite Property Mapping Algorithm", IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, Vol ASSP-36, No. 1, Jan. 1988.
- [CAD91] J. A. Cadzow and D. M. Wilkes, "Enhanced Rational Signal Modeling", Signal Processing, Vol. 25, No. 2, November 1991.
- [CAR86] M.C. Carrión, "Análisis Espectral por Modelación Paramétrica de Señales Electromagnéticas Dispersadas por Blancos de Radar", Tesis Doctoral, Univ. de Granada, 1986.
- [CAR93] M.C. Carrión, A. Gallego, J. Portí and D.P. Ruiz, "Subsectional-Polynomial E-pulse Synthesis and Application to Radar Target Discrimination", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-41, No. 9, pp. 1204-1211, Sept. 1993.

- [CAR94] M.C. Carrión, Diego P. Ruiz, A. Gallego, A. Medouri, "Comparación entre las Técnicas FAR y E-pulso para la Discriminación de Blancos de Radar", IX Simposium Nacional de la URSI, Vol 1, pp 283-287, Gran Canaria, Septiembre 1994.
- [CAR95a] M.C. Carrión, D.P. Ruiz, A. Gallego and J.A. Morente, "FIR system identification using third- and fourth-order cumulants", IEE Electronics Letters, Vol. 31, No. 8, pp. 612-614, April 1995.
- [CAR95b] M.C. Carrión, A. Gallego, D.P. Ruiz, J.A. Morente and G. Giménez, "A Block-Data Recursive-in-Order Method Based on Reflection Coefficients for Bispectrum Estimation Using AR-Modeling", Signal Processing 47, November 1995.
- [CHE82a] K.M. Chen and D. Westmoreland, "Radar Waveform Synthesis for Exciting Single-Mode Backscatters from a Sphere and Application for Target Discrimination", Radio Science, Vol. 17, No. 3, pp. 574-588, May-June 1982.
- [CHE82b] K.M. Chen, D. Nyquist, D. Westmoreland, C. Changs and B. Drachman, "Radar Waveform Syntesis for Single-Mode Scattering by a Thin Cylinder and Application for Target Discrimination", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol AP-30, No. 5, Sept 1982.
- [CHE86] K.M. Chen, D.P. Nyquist, E.J. Rothwell, L.L. Webb and B. Drachman, "Radar Target Discrimination by Convolution of Radar Returns with Extinction-Pulses and Single-Mode Extraction Signals", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-34, No. 7, pp. 896-904, July 1986.
- [CHU76] C.W. Chuang and D.L. Moffat, "Natural Resonances of Radar Targets via Prony Method and Target Discrimination", IEEE Trans. Aerospace Electronic System, Vol. AES-12, No. 5, pp.583-589, Sept. 1976.
- [COR65] M. Corrington, "Simplified Calculation of Transient Response", Proc. IEEE, Vol. 53, pp. 287-292, March 1965
- [CRA46] H. Cramer, "Mathematical Methods of Statistics", Princenton, NJ. Princenton Univ. Press, 1946.
- [DAL89] J.W. Dalle Molle and M.J. Hinich, "The Trispectrum" in Proc. Workshop on Higher-Order Spectral Analysis, Vail, CO, pp. 68-72, 1989.
- [FOK87] F.Y.S. Fok and D.L. Moffat, "The K-pulse and E-pulse", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-35, No. 11, pp. 1325-1326, Nov.1987.
- [FON93] J.A.R. Fonollosa and J. Vidal, "System Identification using a Linear Combination of Cumulant Slices", IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 41, No 7, pp. 2405-2412, July 1993.
- [FOU77] P.F. Fougere, "A Solution to the Problem of Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power, Spectrum Analysis", J. Geophysical Res., Vol. 82, pp. 1051-

1054, March 1977.

[FRI89] **B. Friedlander and B. Porat**, "*Adaptive IIR Algorithms Based on High-order Statistics*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 37, pp. 485-495, 1989.

[FRI90] **B. Friedlander and B. Porat**, "*Asymptotically Optimal Estimation of MA and ARMA Parameters of Non-Gaussian Processes from High-order Moments*", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 35, pp. 27-35, 1990.

[GAL92] **A. Gallego, A. Medouri, D.P. Ruiz and M.C. Carrión**, "*Estimation of the Number of Natural Resonances Contained in the Radar Target Response Using E-pulse Technique*", Int. Wroclaw Symposium on Electromagnetic Compatibility, Wroclaw (Poland), pp. 15-18, Sept. 1992.

[GAL93a] **A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri**, "*Prewindowed and Postwindowed Methods for Bispectrum Estimation Via AR Modelling*". IEE Electronics Letters, Vol. 29, No. 2, pp. 181-182, January 1993.

[GAL93b] **A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri**, "*Extended E-pulse Technique for Discrimination of Conducting Spheres*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-41, No. 10, pp. 1460-1462, Oct. 1993.

[GAL94a] **A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz, and A. Medouri**, "*The Relationship Between AR-Modelling Bispectral Estimation and The Theory of Linear Prediction*", Signal Processing, Vol. 37, No. 3, April 1994.

[GAL94b] **A. Gallego**, "*Métodos de Modelación AR del Biespectro. Aplicación de la Técnica E-pulso a la Discriminación de Blancos de Radar*". Tesis Doctoral, Granada, Junio 1994.

[GAL94c] **A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz, and J. Portí**, "*AR-Modelling bispectrum estimation using data segmentation into coupled records*", IEE Electronics Letters, Vol. 30, No. 25, pp. 2096-2098, Dec. 1994.

[GAL95a] **A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri**, "*A "Constrained Third-Order Mean"-type Estimator to Calculate the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids Using Third-Order Statistic*", Signal Processing Vol. 42, pp 59-69, March 1995.

[GAL95b] **A. Gallego, M.C. Carrión, D.P. Ruiz and A. Medouri**, "*Improved S-pulse Automated Scheme Using Subsectional-Polynomial Basis-Functions*", aceptado para su publicación a IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Aug. 1995.

[GER77] **W. Gersch and J. Yonemoto**, "*Automatic Classification of EEG's: A parametric model new features for classification approach*", Proc. Joint Automatic Control Conf. (San Francisco, CA), June 22-24, 1977.

[GIA87] **G.B. Giannakis**, "*Cumulants: A Powerful Tool in Signal Processing*", Proc. IEEE, Vol. 75, pp. 1333-1334, 1987.

[GIA89a] **G.B. Giannakis and J.M. Mendel**, "*Identification of Non-Minimum Phase Systems Using Higher-Order Statistics*", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 37, pp. 360-377, March 1989.

[GIA89b] **G.B. Giannakis**, "*Signal reconstruction from multiple correlations: frequency- and time-domain approaches*", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 6, No. 5, pp. 682-697, May 1989.

[GIA90a] **G.B. Giannakis and A. Swami**, "*On estimating non-causal nonminimum phase ARMA models on non-Gaussian processes*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 38, pp. 478-495, 1990.

[GIA90b] **G. B. Giannakis and J. M. Mendel**, "*Cumulant-based order determination of non-Gaussian ARMA models*", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 38, No. 8, pp. 1411-1423, 1990.

[GIA92] **G.B. Giannakis and A. Swami**, "*Identifiability of General ARMA Processes Using Linear Cumulant-based Estimators*", Automatica, Vol. 28, No. 4, pp. 771-779, 1992.

[GOD81] **M.D. Godfrey and F. Rocca**, "*Zero-memory Nonlinear Deconvolution*", Geophys. Prospect., Vol. 29, pp. 189-228, 1981.

[GOL83] **G.H. Golub and C.F. Van Loan**, "*Matrix Computations*", The Johns Hopkins University Press, 1983.

[GOM86] **R. Gómez and M.C. Carrión**, "*Extended Prony Method Applied to Noisy Data*", IEE Electronics Letters, Vol. 22, No. 11, pp. 613-614, May 1986.

[HAN93] **P. Händel**, "*High-order Yule-Walker estimation of the parameters of exponentially damped cisoids in noise*", Signal Processing, Vol 32, No. 3, pp. 315-328, June 1993.

[HAR68] **R. F. Harrington**, "*Field Computations by Moment Methods*", Macmillan, New York, 1968.

[HAR78] **F. J. Harris**, "*On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*", Proc. of the IEEE, Vol.66, No. 1, Jan. 1978.

[HAS63] **K. Hasselman, W. Munk and G. MacDonald**, "*Bispectra of Ocean Waves*" in Time Series Analysis, New York: Wiley, pp. 125-130, 1963.

[HAY79] **S. Haykin**, "*Nonlinear Methods of Spectral Analysis*", New York, NY: Springer-Verlag, 1979.

[HAY85] **S. Haykin**, "*Radar Signal Processing*", IEEE ASSP Magazine, Vol. 2, No. 2, pp. 2-18, April 1985.

[HIN68] **M.J. Hinich and C.S. Clay**, "*The Application of the Discrete Fourier*

Transform in the Estimation of Power Spectra Coherence and Bispectra of Geophysical Data", Rev. Geophys., Vol. 6, No. 3, pp. 347-363, 1968.

[HIN82] M.J. Hinich, "Testing for Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series", J. Time Series Analysis 3, pp. 169-176, 1982.

[HIN85a] M.J. Hinich and D.M. Patterson, "Evidence of Nonlinearity in Daily Stock Returns". J. Bus. Econ. Stat., Vol. 3, No. 1, pp. 69-77, 1985.

[HIN85b] M.J. Hinich and D.M. Patterson, "Identification of the Coefficients in a Non-Linear Time Series of the Quadratic Type", J. of Economics, No. 30, pp. 269-288, 1985.

[HIN88] M.J. Hinich and M.A. Wolinsky, "A Test for Aliasing Using Bispectral Analysis", J. American Statistical Association, Vol. 83(402), pp. 499-502, 1988.

[HUA90] Y. Hua and T.K. Sarkar, "Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoids in Noise", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-38, No. 5, pp. 814-824, May 1990.

[HUA91] Y. Hua, "Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using Higher Order Statistics and Matrix Pencil", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. 39, No. 7, pp. 1691-1692, July 1991.

[HUA92] Y. Hua and T.K. Sarkar, "Parameter Estimation of Multiple Transient Signals", Signal Processing, Vol. 28, pp. 109-115, 1992.

[HUA93] Y. Hua, F. Baqai, Y. Zhu, and D. Heilbronn, "Imaging of Point Scatterers from Step Frequency ISAR Data", IEEE Trans. on Aerosp. and Electronics Systems, Vol. 29, pp. 195-205, Jan 1993.

[HUA94] Y. Hua, "High Resolution Imaging of Continuously Moving Object Using Stepped Frequency Radar", Signal Processing, Vol. 35, pp. 33-40, Jan 1994.

[HUB81] P.J. Huber, B. Kleiner, T. Gasser and G. Dumermuth, "Statistical Methods for Investigating Phase Relations in Stationary Stochastic Processes", IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-19, pp. 78-86, 1981.

[HUR87] M.P. Hurst and R. Mittra, "Scattering Center Analysis via Prony's Method", IEEE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. AP-35, pp. 986-988, Aug. 1987.

[IMS84] IMSL User's Manual, Edition 9.2, "International Mathematical and Statistical Libraries", Inc., Houston, Texas, 1984.

[JOU90] I.I. Jouny, "Bispectral Analysis of Radar Signals with Application to Target Classification", Ph.D. dissertation, Univ. Ohio State, 1990.

[KAH93] M. Kharizi, T.K. Sarkar and Z.A. Maricevic, "Analysis of Wide Radiating Slot in the Ground Plane of a Microstrip Line", IEEE Trans. Microwave Theory &

Techniques, Vol 42, pp. 29-37, Jan 1993.

[KAH94] M. Kharizi, T.K. Sarkar and Z.A. Maricevic, "Dynamic Analysis of a Microstrip Line Over a Perforated Ground Plane", IEEE Trans. Microwave Theory & Techniques, Vol 42, No. 5, pp. 820-825, May 1994.

[KAY81] S.M. Kay and S.L. Marple, "Spectrum Analysis-A Modern Perspective", Proc. IEEE, Vol. 69, No. 11, pp. 1380-1419, November 1981.

[KAY84] S. M. Kay, "Accurate Frequency Estimation at Low Signal-to-Noise Ratio", IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, Vol ASSP-32, No. 3, June 1984.

[KAY88] S.M. Kay, "Modern Spectral Estimation". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.

[KEN52] E. Kennaugh, "Polarization Properties of Radar Reflections", Ohio State Univ., Project Rep. Contract No. RADCF-AF28(009)-90, Rep. 389-12 (AD2494), March 1952.

[KEN65] E.M. Kennaugh and D.L. Moffatt, "Transient and Impulse Response Approximations", Proc. IEEE pp.893-901, August 1965.

[KEN81] E.M. Kennaugh, "The K-pulse Concept" IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-29, No. 2, pp. 327-331, Mar 1981.

[KES86] S.B. Kesler, "Modern Spectrum Analysis II", New York, NY: IEEE Press, 1986.

[KHO89] S. Al Khouri, R. Gómez, F.J. Muñoz and V. Ramirez, "Extraction of the Poles of Noisy Rational Signals by Continuation Method", Proc. Inst. Elect. Eng., pt. F, pp. 57-62, Feb 1989.

[KIM80] Y.C. Kim, J.M. Beall, E.J. Powers and R.W. Miksad, "Bispectrum and Nonlinear Wave Coupling", Phys. Fluids, Vol.23, No. 2, pp. 258-263, February 1980.

[KIM85] H.T. Kim, N. Wang and D.L. Moffat, "K-pulse for Thin Circular Loop", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-33, No. 12, pp. 1403-1407, Dec. 1985.

[KON88] R. Konstantinides and K. Yao, "Statistical Analysis of Effective Singular Values in Matrix Rank Determination", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 757-763, May 1988.

[KOR68] J. Korein, L.J. Tick, R.A. Zeitlin and C.T. Randt, "Linear and Nonlinear Spectral Analytic Techniques Applied to the Human Electroencephalogram", Corr. Sci. Health Re. Council, Vol. 4, pp. 1126-1128, 1968.

[KUM82] R. Kumaresan and D.W. Tufts, "Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids and Pole-Zero Modeling in Noise", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, pp. 833-840, Dec. 1982.

[KUM83] R. Kumaresan, "On the Zeros of the Linear Prediction-Error Filter for

Deterministic Signals", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-31, pp. 217-220, Feb. 1983.

[KUM86] R. Kumaresan, L.L. Scharf and A.K. Shaw, "An Algorithm for Pole-Zero Modeling and Spectral Analysis", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-34, pp. 637-640, Jun. 1986.

[LAW74] C.L. Lawson and R.J. Hanson, "Solving Least Squares Problems", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.

[LEO59] V. P. Leonov and A. N. Shiryaev, "On the Technique of Computing Semi-Invariants", Theory Probl. Appl., No. 4, pp. 319-329, 1959.

[LII76] K.S. Lii, M. Rosenblatt and C. Van Atta, "Bispectral Measurements in Turbulence", J. Fluid Mech., Vol. 77, pp. 45-62, 1976.

[LII81] K.S. Lii and K.N. Helland, "Cross-Bispectrum Computation and Variance Estimation", ACM Trans. Math. Software, Vol. 7, pp. 284-294, 1981.

[LII82] K.S. Lii, M. Rosenblatt, "Deconvolution and Estimation of Transfer Function Phase and Coefficients for Non-Gaussian Linear Processes", Ann. Statist., Vol. 10, pp. 1195-1208, 1982.

[LII84] K.S. Lii, M. Rosenblatt, "Non-Gaussian Linear Processes, Phase, and Deconvolution", in Statistical Signal Processing, E.J. Wegman and J.G. Smith, Eds, pp. 51-58, 1984.

[LIN81] H. Lin and A. Ksienski, "Optimum Frequencies for Aircraft Classification", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-17, pp. 656-665, Sept. 81.

[MAK75] J. Makhoul, "Linear Prediction: A Tutorial Review", Proc. IEEE, Vol. 63, No. 4, pp. 561-580, April 1975.

[MAG54] T.A. Magness, "Spectral Response of a Quadratic Device to Non-Gaussian Noise". J. Appl. Phys., Vol. 25, pp. 1357-1365, 1954.

[MAI74] R.K. Mains and D.L. Moffatt, "Complex Natural Resonances of an Object in Detection and Discrimination", TR-3424-1, Ohio State University, Electroscience Laboratory, Columbus, June 1974.

[MAR73] L. Marin, "Natural-Mode Representation of Transient Scattered Fields", IEEE Trans Antennas and Propagat., vol 21, No. 6, November 1973.

[MAR87] S.L. Marple, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, Chaps. 8-9, pp.206-284, 1987.

- [MED95] A. Medouri, D.P. Ruiz, A. Gallego and M.C. Carrión, "Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using Matrix Pencil Method and Fourth Order Statistic", IEEE Signal Processing Athos Workshop on Higher-order Statistics, pp. 347-351, June 1995.
- [MEN91] J.M. Mendel, "Tutorial on Higher-Order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory: Theoretical Results and Some Applications", Proc. IEEE, Vol. 79, No. 3, pp. 278-305. March 1991.
- [MES84] E. Mese, et. al., "Target Identifications by Means of Radar", Microwave Journal, pp. 85-102, Dec. 1984.
- [MIE83] H. Mieras, "Optimal Polarizations of Simple Compound Targets", IEEE Trans. Ant. Propagat., vol AP-31, pp.996-999- November 1983.
- [MIL73] E.K. Miller, A.J. Poggio and G.J. Burke, "An Integro-Differential Equation Technique for the Time-Domain Analysis of Thin-Wire Structures. Part I. Numerical Results", J. Comput. Phys., Vol.12, pp. 210-233, 1973.
- [MIL80] E.K. Miller and J.A. Landt, "Direct Time-Domain Techniques for Transient Radiation and Scattering from Wires", Proc. IEEE, Vol. 68, pp. 1396-1423, 1980.
- [MIL91] E.K. Miller and G.J. Burke, "Using Model Based Parameter Estimation to Increase the Physical Interpretability and Numerical Efficiency of Computational Electromagnetics", Computer Physics Communications, Vol.68, pp. 43-75, 1991.
- [MOF75] D.L. Moffat and R. K. Mains, "Detection and Discrimination of Radar Targets", IEEE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. Ap-23, No. 3, May 1975.
- [MOR84] M. A. Morgan, "Singularity Expansion Representations of Fields and Currents in Transient Scattering", IEEE Trans. Antennas and Propagat., vol 32, No. 5, May 1984.
- [MOR88] M.A. Morgan, "Scatterer Discrimination Based Upon Natural Resonance Annihilation", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 2, No. 5/6, pp. 481-502, 1988.
- [NAN94] A.K. Nandi, "Blind identification of FIR systems using third order cumulants", Signal Processing, vol 39, pp 131-147, September 1994.
- [NIC72] A.M. Nicolson, C.L. Bennett, D. Lamensdorf and L. Susman, "Applications of Time-Domain Metrology to the Automation of Broadband Microwave Measurements", IEEE Trans. Microwave Theory Tech. Vol. MTT-20, Jan. 1972.
- [NIK85] C.L. Nikias, A.N. Venetsanopoulos and B. Paramasivaiah, "Mixed-Phase

Wavelet Estimation Via Autoregressive Bispectrum", in Proc. 1985 Int. Geosc. Remote Sensing Symp., Vol. 1, Amherst, MA: U. Mass Press, pp. 66-71, Oct. 1985.

[NIK86a] C.L. Nikias, A.N. Venetsanopoulos and B. Paramasivaiah, "Identification of Nonminimum Phase Communication Channels Via Parametric Modeling of Third Moments", in Proc. Int. Conf. Communications (Toronto, Ont., Canada), June 1986.

[NIK86b] C.L. Nikias, "ARMA Bispectrum Approach to Nonminimum Phase System Identification", Tech Rep. CDSP-86-102, Dept. Electrical and Computer Eng., Northeastern Univ., Boston, MA, Aug. 1986.

[NIK87] C.L. Nikias and M.R. Raghuvver, "Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework", Proc. IEEE, Vol. 75, No. 7, pp. 869-891, July 1987.

[NIK93a] C.L. Nikias and J.M. Mendel, "Signal Processing with Higher-Order Spectra", IEEE Signal Processing Magazine, pp. 10-37, July 1993.

[NIK93b] C.L. Nikias and A.P. Petropulu, "Higher-Order Spectra Analysis. A Nonlinear Signal Processing Framework", Ed. Prentice Hall, 1993.

[OPP75] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[OUI88] H. Ouibrahim, D.D. Weiner, and T.K. Sarkar, "Matrix Pencil Approach to Direction Finding", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 610-612, April 1988.

[PAN88] R. Pan and C.L. Nikias, "The Complex Cepstrum of Higher-order Moments", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-36, pp. 186-205, 1988.

[PAPA90] C.K. Papadopoulos and C.L. Nikias, "Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using Higher Order Statistics", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-38, No. 8, pp. 1424-1436, Aug. 1990.

[PAPO77] A. Papoulis, "Signal Analysis", McGraw-Hill, New York, 1977.

[PAPO84] A. Papoulis, "Probability Random Variables and Stochastic Processes", New York: McGraw-Hill, 1984.

[PEA80] L.W. Pearson and D.R. Roberson, "The Extraction of the Singularity Expansion Description of a Scatterer from Sampled Transient Surface Current Response", IEEE Trans. on Antennas and Propagat., Vol. Ap-28, pp. 182-190, Mar 1980.

[PET94] L. Peters, Jr., J.J. Daniels and J.D. Daniels, "Ground Penetrating Radar as a Subsurface Environmental Sensing Tool", Proceeding of the IEEE, Vol. 82, No.

12, pp. 1802-1822, Dec 1994.

[PFU92] A.L. Pflug, G.E. Ioup, J.W. Ioup and R.L. Field, "Properties of Higher-Order Correlations and Spectra for Band Limited, Deterministic Transients", J. Acoust. Soc. Am., No. 91(2), pp. 975-988, February 1992.

[PIZ84] R. Pizer and J. Moore, "Moment Methods in Electromagnetics. Techniques and Applications". Research Studies Press, London, 1984.

[POR89] B. Porat and B. Friedlander, "Performance Analysis of Parameter Estimation Algorithms Based on High-order Moments", Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing, Vol. 3, pp. 191-229, 1989.

[PRO795] R. Prony, "Essai Experimental et Analytique", Paris J. de l'Ecole Polytechnique, Vol. 1, pp. 24-76, 1795.

[RAG84] M.R. Raghuveer, "Bispectrum and Multidimensional Power Spectrum Estimation Algorithms Based on Parametric Models with Applications to the Analysis of ECG data", Ph.D. Dissertation, Univ. of Connecticut, Storrs, Dec. 1984.

[RAG85] M.R. Raghuveer and C.L. Nikias, "Bispectrum Estimation: A parametric Approach" IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-33, No. 5, pp. 1213-1230, October 1985.

[RAG86] M.R. Raghuveer and C.L. Nikias, "Bispectrum Estimation Via AR Modelling", Signal Processing, Vol. 9, No. 1, pp. 35-48, January 1986.

[RAO88] B. D. Rao, "Perturbation Analysis of an SVD-Based Linear Prediction Method for Estimating the Frequencies of Multiple Sinusoids", IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, vol ASSP-36, No. 7, July 1988.

[REI83] J. G. Reid, "Linear System Fundamentals", McGraw-Hill, New York, 1983.

[REP75] A. Repjar, A. Ksienski, and L. White, "Object Identification from Multi-frequency Radar Returns", The Radio and Electronic Engineer, Vol. 45, pp. 161-167, April 1975.

[ROB80] E. A. Robinson and S. Treitel, "Geophysical Signal Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

[ROD73] G.I. Roden and D.J. Bendiner, "Bispectra and Cross-Bispectra of Temperature, Salinity, Sound Velocity and Density Fluctuations with Depth off Northeastern Japan", J. Phys. Ocean, Vol.3, No. 3, pp. 308-317, 1973.

[ROS80] M. Rosenblatt, "Linar Processes and Bispectra", J. Appl. Proba., Vol. 17, pp. 265-270, 1980.

[ROS83] M. Rosenblatt, "Cumulants and Cumulants Spectra" in Time Series in Frequency Domain, D. Brillinger and P. Krishnaiah, Eds. Amsterdam, The

Netherlands:North-Holland, pp. 369-382, 1983.

[ROS85] M. Rosenblatt, "*Stationary Sequences and Random Fields*", Boston: Birkhauser, 1985.

[ROT85a] E.J. Rothwell, D.P. Nyquist, K.M. Chen and B. Drachman, "*Radar Target Discrimination Using the Extinction-Pulse Technique*" IEEE Trans. on Ant. and Propagat., vol AP-33, No. 9, pp. 929-936, Sept. 1985.

[ROT85b] E.J. Rothwell, "*Radar Target Discrimination Using the Extinction-Pulse Technique*", Ph. D. dissertation, Michigan State University, 1985.

[ROT87] E.J. Rothwell, K.M. Chen, D.P. Nyquist and W. Sun, "*Frequency Domain E-pulse Synthesis and Target Discrimination*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-35, No. 4, April 1987.

[ROT87] E.Rothwell, K.M. Chen, and D.P. Nyquist, "*Extraction of the Natural Frequencies of a Radar Target from a Measured Response Using E-pulse Technique*", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-35, pp. 715-720, June 1987.

[ROT88] E.J. Rothwell and K.M. Chen, "*A Hibrid E-pulse/Least Squares Technique for Natural Resonance Extraction*", IEEE Trans. on Ant. and Propagat., Vol. AP-76, No. 3, pp. 296-298, March 1988.

[RUI92] Diego P. Ruiz, A. Medouri, A. Gallego, M. C. Carrión, "*Identificación de Blancos de Radar mediante Filtros de Aniquilación de Resonancias*", VII Simposium Nacional de la URSI, vol 2, pp 598-602, Málaga 1992.

[RUI93] Diego P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego , A. Medouri, "*Discriminación de Estructuras Poligonales Conductoras mediante Filtros de Aniquilación de Resonancias*", VIII Simposium Nacional de la URSI, vol 2, pp 834-838, Valencia 1993.

[RUI94] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego and A. Medouri, "*Horizontal-slice Cumulant Matrices for Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids*", in Proc. EUSIPCO-94, VII European Signal Processing Conference, Edinburg, Scotland, U.K. September 1994.

[RUI95a] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego and A. Medouri, "*Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using a Higher-order Correlation-Based Approach*", IEEE Trans. Signal Processing, vol 43, November 1995.

[RUI95b] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, A. Gallego and J.A. Morente, "*Identification of MA Processes Using Cumulants: Several Sets of Linear Equations*", submitted to IEE Proc. Vision, Image and Signal Processing, July 1995.

[RUI95c] D.P. Ruiz, M.C. Carrión, and A. Gallego, "*Damped Sinusoidal Signal Reconstruction Using Higher-Order Correlations*", submitted to VIII European Signal Processing Conference (EUSIPCO-96), September 1996.

- [RUI95d] **D.P. Ruiz, M.C. Carrión, and A. Gallego**, "*Blind Identification of FIR Systems Using Fourth-Order Cumulants*", submitted to VIII European Signal Processing Conference (EUSIPCO-96), September 1996.
- [SAR92] **T.K. Sarkar, Z. Maricevic, and M. Kahrizi**, "*An accurate Deembedding Procedure for Characterizing Discontinuities*", International Journal of Microwave and Millimeter Wave Computer Aided Engineering, vol 2, No. 2, pp. 168-178, 1992.
- [SAR94] **T.K. Sarkar, M. Salazar**, "*An Alternate Interpretation of Complex Modes in Closed Perfectly Conducting (Lossless) Structures*", AEU, vol 48, pp. 123-129, May 1994.
- [SAR95] **T.K. Sarkar, O. Pereira**, "*Using the Matrix Pencil Method to Estimate the Parameters of a Sum of Complex Exponentials*", IEEE Trans Antennas and Propagat. Magazine, vol 37, No. 1, pp. 48-55, February 1995.
- [SCA92] **G. Scarano, F. Corina, A. Neri and G. Jacovitti**, "*Gaussian noise insensitive FIR system identification*", Proc. EUSIPCO-92, vol II, pp 735-738, 1992.
- [SCH80] **M. Schetzen**, "*The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*", New York, NY: Wiley, 1980.
- [SHI60] **A.N. Shiryaev**, "*Some Problems in the Spectral Theory of Higher-Order Moments I*", Theory Probl. Appl., No. 5, pp. 265-284, 1960.
- [SHI63] **A.N. Shiryaev**, "*On Conditions for Ergodicity of Stationary Processes in Terms of Higher-order Moments*", Theory Probl. Appl., No. 8, pp. 463-439, 1963.
- [SHU93] **R.M. Shubair, Y.L. Chow**, "*Efficient Computation of the Periodic Green's Function in Layered Dielectric Media*", IEEE Trans Microwave Theory & Techniques, vol 41, pp. 498-592, March 1993.
- [SIN63] **Y.G. Sinai**, "*On Higher-Order Spectral Measures of Ergodic Stationary Processes*", Theory Probl. Appl., No. 8, pp. 429-436, 1963.
- [SKO85] **Merril I. Skolnik**, "*Fifty Years of Radar*", Proceedings of the IEEE, Vol. 73. No. 2, Feb. 1985.
- [SUB80] **T.Subba Rao and M.M. Gabr**, "*A Test for Linearity of Stationary Time Series*", J. Time Series Analysis (GB), Vol. 1, No. 2, pp. 145-158, 1980.
- [SWA89] **A. Swami, J.M. Mendel**, "*Closed-form Recursive Estimation of MA coefficient using Autocorrelations and Third-order Cumulants*", IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-37, pp. 1794-1795, Nov 1989.
- [SWA91] **A. Swami, J.M. Mendel**, "*Cumulant-based Approach to the Harmonic Retrieval and Related Problems*", IEEE Trans. Signal Processing, vol 39, No.5, pp. 1099-1109, May 1991.
- [SWA92] **A. Swami, J.M. Mendel**, "*Identifiability of the AR Parameters of an ARMA*

Process Using Cumulants", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 37, No. 2, pp. 268-273, February 1992.

[TES73] F. M. Tesche, "On the Analysis of Scattering and Antenna Problems Using the Syngularity Expansion Technique", IEEE Trans. on Ant. and Propagat. Vol. AP-21, No.1, January 1973.

[TIC82] L.J. Tick, "The Estimation on Transfer Functions of Quadratic Systems", Technometrics, Vol. 3, pp. 1055-1096, 1982.

[TUF80] D.W. Tufts and R. Kumaresan, "Improved Spectral Resolution", Proc. IEEE, Vol. 68, pp. 419-420. Mar. 1980.

[TUF82a] D.W. Tufts and R. Kumaresan, "Singular Value Decomposition and Improved Frequency Estimation Using Linear Prediction", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-30, pp. 671-675, Aug. 1982.

[TUF82b] D. Tufts and R. Kumaresan, "Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood", Proceedins of the IEEE, vol 70, No. 9, Sep. 1982.

[TUF86] D.W. Tufts and C.D. Melissinos, "Simple, Effective Computation of Principle Eigenvectors and Their Eigenvalues and Application to High-Resolution Estimation of Frequencies", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-34, pp. 1064-1053, Oct. 1986.

[TUG90] J.K. Tugnait, "Approaches to FIR System Identification with Noisy Data Using Higher Order Statistics", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-38, pp. 1307-1317, July 1990.

[TUG91] J.K. Tugnait, "New results on FIR System Identification Using Higher Order Statistics", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 39, pp. 2216-2221, October 1991.

[WEL85] B. Wells, "Voiced/Unvoiced Decision Based on the Bispectrum", in Proc. ICASSP'85, pp. 1589-1592 (Tampa, FL, Mar. 1985).

[WHI74] E.C. Whitman, "The Spectral Analysis of Discrete Time Series in Terms of Linear Regressive Models", Naval Ordnance Labs Rep. NOLTR-70-109, White Oak, M.D., June 1974.

[YOU76] J.D. Young, "Radar Imaging from Ramp Response Signatures", IEEE Trans. on Antennas and Propagat. Vol. AP-24, No. 3, May. 76.

[ZHA93] X.-D Zhang, Y.-S Zhang, "Singular Value Decomposition-based MA Order Determination of Non-Gaussian ARMA Models", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 41, No. 8, pp. 2657-2664, Aug. 1993.

[ZHA94] X.-D Zhang, Y.-S Zhang, "FIR System Identification Using Higher Order Statistics Alone", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 42, No. 10, pp. 2854-2858,

Oct. 1994.

[ZHE93] F.-C. Zheng, S. McLaughlin and B. Mulgrew, "*Blind Equalization of Multilevel PAM Data for Nonminimum Phase Channels via Second- and Fourth-order Cumulants*", *Signal Processing*, Vol. 31, pp 313-327, 1993.