

TESIS DOCTORAL

SUPERFICIES WILLMORE CON BORDE
Y
SIGMA MODELOS NO LINEALES

Magdalena Caballero Campos



Universidad de Granada

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Magdalena Caballero Campos
D.L.: GR.1600-2008
ISBN: 978-84-691-4890-7

SUPERFICIES WILLMORE CON BORDE
Y SIGMA MODELOS NO LINEALES

Memoria presentada por la Licenciada en Matemáticas Magdalena Caballero Campos, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección del catedrático Manuel Barros Díaz, y la codirección del profesor doctor Miguel Ortega Titos, con el objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas con mención de “Doctor Europeus”.

Granada, 20 de Mayo de 2008

El director:
Manuel Barros Díaz

El codirector:
Miguel Ortega Titos

La aspirante al grado de doctor:
Magdalena Caballero Campos

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Agradecimientos y dedicatorias

Son muchas las personas a las que quiero dar las gracias. A algunas por haber hecho de mí una mejor matemática y haberme ayudado a dar los primeros pasos en el camino de la investigación. Y a otras porque han estado siempre apoyándome, a pesar de no entender una sola palabra de mi trabajo.

Al equipo de casa

Porque es una suerte haber estado aquí, con gente que investiga y que cede su tiempo de forma gratuita para formar a jóvenes investigadores.

En primer lugar le quiero dar las gracias a Manolo, porque sin él nada de esto habría sido posible. Muchas gracias por tus ideas, por tu tiempo, por tu dedicación y por haberme enseñado qué es investigar en matemáticas.

A Miguel Ortega, no solo por lo que has contribuido a mi formación y a esta tesis, sino también porque siempre has estado ahí para escuchar mis ideas, mis lloros, mis dudas, etc. Cuando me vaya de aquí voy a echar mucho de menos esos cafés y esas comidas en las que Paco y tú me ilustrais con vuestros conocimientos frikis, o en las que simplemente nos contamos nuestras vidas.

A Alfonso, Miguel Sánchez y Ceferino. Por vuestros consejos, por haberme acogido y porque casi siempre que llamo a alguna de vuestras puertas es para pedir algo. Muchas gracias por todo.

A Paco, porque al final era verdad eso de “Dios te recompensará con un buen compañero de despacho”. Mil gracias por todas las veces en las que me has salvado de una catástrofe informática. Han sido muchos los momentos buenos que he pasado en el despacho contigo, con Miguel Ortega y con Manzano. Esté donde esté el año que viene, espero vuestra visita.

A Oihane, por haberme transmitido fuerzas en el último tramo.

A los compañeros de comidas y de cafés que faltan, Manzano y Juan, por todas esas historias inverosímiles de las que hablamos en los descansos, y que fuera de la facultad no puedo mencionar sin que me miren con cara rara.

A Andrés, por preocuparte por mí.

Al equipo belga

A Steffan, Leopold y Franki, por vuestra hospitalidad y por haberme enseñado otra forma distinta y muy bonita de contar matemáticas.

A los que me han acompañado en este camino

A Alberto, por muchas cosas que no hace falta que te diga aquí. Aún así, quiero especialmente darte las gracias por toda la paciencia que has tenido conmigo durante este último curso y porque siempre has sido capaz de arrancarme una sonrisa.

A mis padres, también por muchísimas cosas. Sobre todo por quererme tanto y porque vosotros fuisteis los que me inculcasteis la importancia de tener un espíritu crítico, y esa es la base del camino que me ha traído hasta aquí.

A mis hermanas, porque habéis sufrido algunas ausencias provocadas por mi amor a las matemáticas, y siempre os he sentido a mi lado.

A Aza. No sé qué hubiese hecho sin esas llamadas de “necesito terapia”, y tampoco sin todas esas historias divertidas que me cuentas por teléfono. Yo confío mucho en tí y estoy segura de que ya te queda muy poco, así que mucho ánimo, dentro de nada tú jueza y yo profesora.

A Miguel Ángel. Porque eres un sol y me has regalado un montón de momentos inolvidables que han aliviado los baches del camino.

A Oli, por todo el apoyo que me diste en esos comienzos duros como matemática. Me alegro un montón de que sigamos siendo amigas. Y también a Juan Diego, por los ratos que hemos compartido juntos y los que quedan por llegar.

Por último al de resto de gente de Córdoba, especialmente a Didi y a Nieves, porque me lo paso en grande con vosotros y porque sois una fuente inagotable de historias divertidas e inesperadas.

Ad astra per aspera.

Índice general

Introducción, presentación de resultados y problemas abiertos	III
Introduction, main results and open problems	XV
1. Solitones del $O(3)$ σ-modelo no lineal de dimensión 2 foliados por circunferencias de Villarceau	1
1.1. Preliminares	1
1.1.1. Circunferencias de Villarceau	1
1.1.2. Paralelismo de Clifford	2
1.1.3. Circunferencias de Villarceau como órbitas	4
1.2. Invarianza conforme del sigma modelo	6
1.3. Soluciones y solitones foliados por circ. de Villarceau	11
1.3.1. Condiciones de frontera admisibles	11
1.3.2. $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2]$	13
1.3.3. $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	17
1.3.4. Elásticas en $\mathbb{S}^2(1/2)$ con parámetro 4	17
1.3.5. M no compacta	19
1.4. La carga de los solitones	22
2. Superficies rotacionales en \mathbb{L}^3	29
2.1. Inmersiones no degeneradas en \mathbb{L}^3	29
2.2. Rotaciones en \mathbb{L}^3	30
2.3. El problema principal	34
2.4. Superficies rotacionales con eje temporal (\mathbf{A}_1 -invariantes)	34
2.5. Superficies rotacionales con eje espacial (\mathbf{A}_2 -invariantes)	35
2.5.1. Regiones fundamentales y superficies fundamentales	36
2.5.2. Superficies rotacionales Riemannianas	39

2.5.3.	Superficies fundamentales Lorentzianas y ejemplos de no fundamentales	40
2.5.4.	Diseción de una superficie Lorentziana \mathbf{A}_2 -invariante	43
2.5.5.	Caracterización del pegado de superficies rotacionales	51
2.5.6.	Clasificación en el caso Lorentziano	57
2.5.7.	Un algoritmo de construcción	58
2.6.	Superficies rotacionales con eje luminoso (\mathbf{A}_3 -invariantes) . .	60
2.6.1.	Regiones fundamentales	61
2.6.2.	Clasificación	62
3.	Soluciones del $O^1(3)$ σ-modelo no lineal de dimensión 2 que son superficies rotacionales en \mathbb{L}^3	67
3.1.	El $O^1(3)$ σ -modelo no lineal de dimensión 2	67
3.1.1.	Planteamiento del problema variacional	68
3.1.2.	Invarianza conforme	70
3.2.	Soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes	73
3.3.	1 ^a variación de \mathfrak{W} en ambiente semi-Riemanniano	78
3.3.1.	Preliminares y notación	78
3.3.2.	Cálculo de la primera variación	80
3.4.	Soluciones y solitones Riemannianos \mathbf{A}_2 -invariantes	85
3.4.1.	Uso de la invarianza conforme	86
3.4.2.	Cálculo del término $\bar{N}_\alpha(\bar{\mathbf{R}}^V)$	87
3.4.3.	Reducción al estudio de elásticas en un de Sitter . . .	89
3.5.	Soluciones Lorentzianas \mathbf{A}_2 -invariantes	92
3.5.1.	Caso 1: soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes fundamentales . . .	93
3.5.2.	Caso 2: soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes no fundamentales .	95
3.6.	Soluciones \mathbf{A}_3 -invariantes	99
	Apéndices	101
	A. El Principio de Criticalidad Simétrica	103
	B. Elásticas	105
	C. Demostración del Teorema 2.5.20	109
	D. Gauss-Bonnet para polígonos no nulos	113
	Bibliografía	117

Introducción, presentación de resultados y problemas abiertos

Introducción

Tal y como indica el título de esta memoria, el trabajo que en ella se presenta versa sobre superficies de Willmore con borde y sigma modelos no lineales. Las superficies de Willmore son conocidas, en mayor o menor medida, por aquellos que nos dedicamos al estudio de la geometría diferencial, no es ese el caso de los sigma modelos no lineales. Comencemos esta introducción presentándolos y motivando su estudio desde el punto de vista de sus aplicaciones a la física y su interés matemático.

Sigma modelos no lineales

Un *sigma modelo* (ó σ -modelo) *no lineal* es una teoría de campos en la que las variables dinámicas son aplicaciones diferenciables de una variedad diferenciable conexa, M , en otra variedad diferenciable conexa con métrica no degenerada, (E, g) , y cuya densidad lagrangiana viene dada por

$$\mathcal{L}(N) = \frac{1}{2} \sum_i g(\partial_i N, \partial_i N) - V(N),$$

para $N : M \rightarrow E$ diferenciable; siendo V un potencial y $\{\partial_1, \partial_2, \dots\}$ una referencia en M . El funcional que gobierna este modelo mide la energía de las aplicaciones de M en E .

El espacio M recibe el nombre de *espacio base* y su dimensión dota de dimensión al sigma modelo. El segundo espacio, (E, g) , se llama *espacio objetivo* (target space), y su grupo de isometrías es el grupo de simetrías

del sigma modelo. Las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange asociada a \mathcal{L} , reciben el nombre de *soluciones del sigma modelo*. Éstas se dicen *Lorentzianas* cuando existe una métrica Lorentziana definida sobre M , y *Riemannianas* si la métrica en M es Riemanniana.

En algunos casos, las soluciones del sigma modelo reciben nombres especiales, entre los que destacamos los siguientes:

- Cuando g es Riemanniana, $M = \mathbb{L}^n$ y $V \equiv 0$, la ecuación de Euler-Lagrange es una generalización de la ecuación clásica de ondas, motivo por el cual las soluciones reciben el nombre de *wave maps*.
- Cuando M y E son variedades Riemannianas y $V \equiv 0$, las soluciones del modelo reciben el nombre de *aplicaciones armónicas* de M en E .

A lo largo de esta memoria, nuestra atención se va a centrar en el estudio de dos sigma modelos no lineales particulares:

- El $O(3)$ σ -modelo no lineal de dimensión 2 con potencial nulo, al que llamaremos simplemente $O(3)$ σ -modelo u $O(3)$ sigma modelo, que es aquel en el que M es una superficie, $E = \mathbb{S}^2$ (con la métrica usual) y $V \equiv 0$.
- El $O^1(3)$ σ -modelo no lineal de dimensión 2 con potencial nulo, que abreviaremos como $O^1(3)$ σ -modelo u $O^1(3)$ sigma modelo. Bajo este nombre se engloban dos problemas distintos que están estrechamente relacionados: en ambos M es una superficie, $V \equiv 0$ y el grupo de simetrías de E es $O^1(3)$. El primero de ellos se obtiene al tomar $E = \mathbb{S}_1^2$, mientras que en el segundo E es el plano hiperbólico, \mathbb{H}_2 .

Las soluciones del $O(3)$ σ -modelo que vamos a describir son Riemannianas, mientras que en el caso del $O^1(3)$ σ -modelo, encontraremos soluciones tanto Riemannianas como Lorentzianas.

Además de en teoría cuántica de campos, los sigma modelos no lineales, especialmente aquellos de dimensión 2 y con grupo de simetrías $O(3)$ y $O^1(3)$, tienen aplicaciones en distintas ramas de la física. Éstas comprenden desde la física de la materia condensada, a la física de las altas energías, pasando por la teoría de cuerdas. En algunos casos, los sigma modelos no lineales son utilizados a modo de “toy model”, por ser “simplificaciones” de los modelos reales, que siguen conservando las propiedades fundamentales. En los siguientes trabajos, así como en las referencias que en ellos se incluyen,

se puede obtener información sobre las citadas aplicaciones, [1], [2], [9], [15], [26], [32], [38], [39], [43], [48], [50], [55], [60].

Más allá de sus aplicaciones físicas, los sigma modelos no lineales son interesantes desde un punto de vista meramente matemático. Su estudio puede ser abordado desde la óptica del análisis no lineal y la geometría ([19], [21], [24] y [41]), incluso tratándolos como un problema variacional con condiciones de frontera prefijadas, sin ningún tipo de terminología proveniente de la física, [3], [4]. Además, como más tarde demostraremos, el estudio de los σ -modelos $O(3)$ y $O^1(3)$ es equivalente al estudio de las superficies de Willmore en \mathbb{R}^3 y \mathbb{L}^3 .

La estrategia que nosotros hemos elegido para abordar el estudio de estos sigma modelos, fue propuesta por M. S. Ody y L. H. Ryder, [41], para estudiar el $O(3)$ σ -modelo. La idea que en dicho artículo se presenta, consiste en identificar cada variable del sigma modelo con la aplicación de Gauss de una inmersión de M en \mathbb{R}^3 , lo cual es posible gracias a que $E = \mathbb{S}^2$. Si hacemos dicha identificación, el lagrangiano que gobierna la dinámica del modelo adopta la siguiente forma

$$\mathcal{S}(\phi) = \frac{1}{2} \|dN_\phi\|^2,$$

donde dN_ϕ es el opuesto del operador forma (o de Weingarten) de la inmersión ϕ . La anterior expresión recibe en geometría el nombre de *curvatura de Casorati* de la inmersión y es igual a la media de los cuadrados de las curvaturas principales. Esta curvatura fue introducida por F. Casorati en [25], motivado por la necesidad de encontrar una definición que se acercase a la noción intuitiva de curvatura que tiene cualquier persona ajena al mundo de la geometría.

Utilizando teoría de superficies, Ody y Ryder convirtieron el estudio del $O(3)$ σ -modelo, en el problema variacional gobernado por el funcional que mide la energía total de la aplicación de Gauss de cada inmersión, también llamado curvatura total de Casorati. Estos autores encontraron una amplia familia de soluciones sin frontera, provenientes de la teoría de superficies de curvatura media constante. Además, probaron que las soluciones clásicas de Belavin y Polyakov, [15], son aquellas que tienen aplicación de Gauss conforme (esferas redondas y superficies minimales), y las soluciones encontradas previamente por Purkait y Ray, [47], se corresponden con la familia de helicoides de curvatura media contante estudiados por M. P. Do Carmo y M. Dajzer, [29].

En el caso del $O^1(3)$ σ -modelo, hemos identificado cada variable con la aplicación de Gauss de una inmersión (Riemanniana o Lorentziana) de la superficie base en \mathbb{L}^3 (según E sea \mathbb{S}_1^2 o \mathbb{H}_2). De esta forma, hemos transformado el estudio de nuestro sigma modelo, en el problema variacional asociado a la energía total de la aplicación de Gauss de cada inmersión, definido esta vez sobre un espacio de inmersiones no degeneradas en \mathbb{L}^3 .

Solitones e instantones

A lo largo de esta memoria, no solo nos hemos dedicado al estudio de las soluciones de los citados sigma modelos, en algunos casos particulares también hemos fijado nuestra atención sobre los solitones Riemannianos o instantones. A continuación vamos a exponer de forma breve qué es un solitón, y bajo qué condiciones hemos abordado su estudio.

Dado que la literatura que hemos encontrado sobre el tema corresponde a las ramas de la física y el análisis, vamos a realizar un cambio momentáneo de ambiente y notación. Consideremos una teoría de campos gobernada por una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_{n-1}}, \phi_t, x, t),$$

donde las variables del modelo son aplicaciones diferenciable $\phi : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, a las que notamos por $\phi = \phi(t, x)$. Supongamos que \mathcal{L} es invariante por el grupo de traslaciones temporales de \mathbb{L}^n . Entonces, el teorema de Noether nos asegura la existencia de una integral primera del sistema lagrangiano, que recibe el nombre de *energía del sistema* y se define como

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \cdot \phi_t - \mathcal{L} \right) dx,$$

donde ϕ es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange. Véase [20].

En este contexto, se llaman solitones a aquellas soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange para las cuales la energía del sistema “viaja en el tiempo como un paquete localizado”. Algunos autores exigen además que las soluciones presenten “alguna forma de estabilidad”. En este sentido, los solitones se comportan como partículas. La forma de concretar este concepto depende del autor al que leamos, véanse por ejemplo [9], [21] y [48]. Lo que es común a todos ellos es que, en el caso en el que las soluciones no dependen de la variable t , la densidad del funcional energía es constante (respecto a t) y coincide con $-\mathcal{L}$.

La última afirmación nos permite trasladar el concepto de solitón a los sigma modelos no lineales, siempre y cuando tomemos en M una métrica Riemanniana. Así, definimos los *solitones Riemannianos o instantones*, como aquellas soluciones Riemannianas para las cuales el funcional toma un valor finito. Entonces es claro que cuando M es compacta (con o sin frontera) y Riemanniana, toda solución es automáticamente un solitón.

En el caso en el que M sea una variedad Lorentziana, no vamos a hablar del concepto de solitón, ya que ni siquiera se conoce una forma de definir la energía sin que dependa de un observador previamente fijado.

En vista de toda la exposición anterior, queda justificado el hecho de que a lo largo de esta memoria, tan sólo hayamos estudiado los solitones del $O(3)$ σ -modelo y los solitones Riemannianos del $O^1(3)$ σ -modelo.

El funcional de Willmore

El funcional de Willmore se define como

$$\mathfrak{W}(\phi) = \int_M H_\phi^2 dA_\phi,$$

donde $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión diferenciable de una superficie diferenciable, conexa, compacta y sin frontera, H_ϕ es la curvatura media de la inmersión y dA_ϕ el elemento de área inducido en M . Es fácil probar que $\mathfrak{W} \geq 4\pi$ y que el mínimo se alcanza si, y solo si, M es una esfera y ϕ la embebe en \mathbb{R}^3 como una esfera redonda.

En 1965, T. J. Willmore propuso el estudio del anterior funcional, [58]. En dicho artículo probó que el valor de \mathfrak{W} para cualquier toro de Clifford (toro que se obtiene al girar una circunferencia de radio r , cuyo centro dista del eje $\sqrt{2}r$) es $2\pi^2$, demostró que $\mathfrak{W} \geq 2\pi^2$ para todo toro de revolución y conjeturó que en el caso en el que M tiene género 1, el mínimo del funcional es $2\pi^2$ y dicho mínimo sólo es alcanzado por los toros de Clifford. Conjeturas similares para género arbitrario fueron propuestas posteriormente por Kusner, [34].

Una de las propiedades más importantes del funcional de Willmore es su invarianza frente a cambios conformes de la métrica. Dicha propiedad era ya conocida por W. Blaschke y G. Thomsen, autores que en los años 20 desarrollaron, de forma independiente, un importante estudio sobre invariantes conformes, [18] y [53]. El trabajo de estos autores cayó en el olvido, y la invarianza conforme del funcional de Willmore no fue redescubierta hasta

1973, por J. H. White, [57]. Obligando así a la reformulación de la conjetura de Willmore, cuyo enunciado dice desde entonces que para género 1, $\mathfrak{W} \geq 2\pi^2$ y el mínimo se alcanza si, y solo si, la inmersión es conforme a un toro de Clifford.

La búsqueda de una prueba de la conjetura de Willmore, ha motivado el estudio en profundidad de los puntos críticos de \mathfrak{W} , los cuales reciben el nombre de *superficies de Willmore*. Dichas superficies son las soluciones de la siguiente ecuación

$$\Delta H_\phi + 2H_\phi(H_\phi^2 - G_\phi) = 0,$$

donde G_ϕ denota a la curvatura de Gauss. Los ejemplos más sencillos de superficies de Willmore, ya conocidos por Blaschke y Thomsen, son los obtenidos mediante proyección estereográfica de superficies mínimas en \mathbb{S}^3 . En 1970, H. B. Lawson probó que toda superficie compacta y orientable puede ser embebida minimalmente en \mathbb{S}^3 , [37], por lo que sabemos que existen superficies de Willmore de cualquier género. En 1985, U. Pinkal encontró una familia de superficies de Willmore embebidas que no son proyección estereográfica de superficies mínimas en \mathbb{S}^3 . Éstas se obtienen como proyección estereográfica de tubos de Hopf sobre ciertas elásticas cerradas en \mathbb{S}^2 , véase [46].

Hoy en día, la conjetura de Willmore continúa sin ser resuelta, [59], (aunque puede que no por mucho tiempo, [49]). Por otro lado, el estudio de las superficies de Willmore ha adquirido importancia por sí mismo, siendo extendido a casos y ambientes que nada tienen que ver con la conjetura de Willmore, como son el caso de superficies con frontera (véase por ejemplo [11], [45] y [56]) y el estudio del problema en ambiente semi-Riemanniano (como por ejemplo [5]).

Presentación de resultados

Antes de comenzar con la exposición de los resultados, vamos a hacer algunos comentarios sobre el ambiente de trabajo. Todos los objetos geométricos con los que vamos a trabajar son diferenciables (de clase \mathcal{C}^∞). Además, vamos a tomar siempre superficies conexas a las que vamos a permitir que tengan frontera (a la cual nos referiremos a veces como borde). Por tanto, a partir de ahora, cuando se hable de superficies compactas no se excluirán a las superficies con frontera. Por último, siempre que nos refiramos a las condiciones de frontera, estaremos considerando una pareja (Γ, N_o) , donde

Γ es una familia numerable de curvas diferenciables disjuntas dos a dos, y N_o es un campo diferenciable unitario definido a lo largo de Γ y ortogonal a Γ' .

El trabajo expuesto en esta memoria es la respuesta a dos cuestiones motivadas por la lectura de [11]. En dicho artículo, el autor obtiene las soluciones compactas y con frontera del $O(3)$ σ -modelo que admiten una simetría rotacional (el caso sin frontera es estudiado como un caso particular del caso con frontera). Además, demuestra que éstas coinciden con las superficies de Willmore de revolución en \mathbb{R}^3 , hasta entonces desconocidas. Para ello utiliza el procedimiento ideado por Ody y Ryder, por el cuál se identifican las variables del $O(3)$ σ -modelo con la aplicación de Gauss de inmersiones de M en \mathbb{R}^3 .

El funcional que mide la energía total de la aplicación de Gauss de una inmersión, pertenece a la familia de funcionales cuya densidad lagrangiana es una función del operador de Weingarten. El más sencillo de estos funcionales es el funcional área. El problema variacional con condiciones de frontera asociado al funcional área, recibe el nombre de problema de Plateau y sus soluciones se llaman superficies mínimas. Las soluciones del problema de Plateau con condiciones de frontera dos circunferencias paralelas, eran ya conocidas por Riemann. Más tarde, Enneper demostró que éstas son las únicas superficies mínimas foliadas por circunferencias, al no existir superficies mínimas foliadas por circunferencias contenidas en planos no paralelos, [30].

Motivados por estos resultados, nos preguntamos por la existencia de soluciones del $O(3)$ σ -modelo con frontera (de nuevo el caso sin frontera puede ser visto como un caso particular), foliadas por circunferencias que no están contenidas en planos paralelos. Esta cuestión queda resuelta en el Capítulo 1. En él presentamos dos familias clásicas de circunferencias que no están contenidas en planos paralelos, las circunferencias de Villarceau de primera y segunda especie, y obtenemos las soluciones del sigma modelo foliadas por este tipo de circunferencias. La imagen por la inversa de la proyección estereográfica de las circunferencias de Villarceau, da lugar a dos familias de circunferencias en \mathbb{S}^3 , relacionadas por una isometría. Este hecho nos va a permitir trabajar tan solo con las circunferencias de Villarceau de primera especie, y poder exportar los resultados obtenidos al caso de las circunferencias de Villarceau de segunda especie.

Resumimos a continuación los principales logros del capítulo. En primer lugar se demuestra que, una vez fijadas unas condiciones de frontera, las soluciones del sigma modelo y las superficies de Willmore coinciden. Tras

lo cuál se resuelve el caso compacto con frontera, esto es, aquél en el que $M = [a, b] \times \mathbb{S}^1$. Los pasos a seguir para ello son

- Establecer unas condiciones de frontera admisibles.
- Utilizar la simetría de los solitones para simplificar el problema (aplicación del Principio de Criticalidad Simétrica de Palais [44]).
- Usar la invarianza conforme del funcional de Willmore.

Lo que obtenemos es que las soluciones son la imagen por la proyección estereográfica de tubos de Hopf sobre elásticas clavadas en la esfera punteada de dimensión dos y radio $1/2$, con multiplicador de Lagrange igual a 4. De donde se deduce que las soluciones foliadas por circunferencias de Villarceau de segunda especie, son la imagen por la proyección estereográfica de levantamientos, vía la aplicación

$$\Pi_- : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2), \quad \Pi_-(z_1, z_2) = (z_1 z_2, \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2)),$$

de elásticas clavadas en la esfera punteada de dimensión 2 y radio $1/2$, con multiplicador de Lagrange igual a 4.

A partir del caso compacto se obtienen el resto de soluciones (no compactas y compactas sin frontera) foliadas por circunferencias de Villarceau, las cuales están también generadas por elásticas en la esfera punteada de dimensión 2 y radio $1/2$, con multiplicador de Lagrange igual a 4, y cuyas condiciones de frontera dependen de la topología de M . Además, se demuestra que todos los solitones foliados por circunferencias de Villarceau son compactos.

El capítulo se cierra con el estudio de la *carga* de los solitones, que no es sino el funcional curvatura de Gauss total. Se demuestra que ésta está determinada exclusivamente por las condiciones de frontera. Para ello es necesario calcular la curvatura geodésica de una circunferencia de Villarceau en un solitón. De su expresión deducimos que ninguna circunferencia de Villarceau es una geodésica de un solitón del sigma modelo, hecho que no impide la anulación del funcional carga.

Motivados de nuevo por [11], decidimos abordar el estudio de las soluciones del $O^1(3)$ σ -modelo con simetría rotacional, esto es, aquellas soluciones que son invariantes bajo el grupo de transformaciones de Lorentz propias y ortocronas que fijan una dirección de \mathbb{L}^3 . Para ello es necesario conocer una clasificación de las superficies rotacionales de \mathbb{L}^3 . Tras consultar la

literatura existente sobre el tema, nos dimos cuenta que dicho estudio no había sido abordado nunca, por lo que dejamos temporalmente postpuesto el estudio del $O^1(3)$ σ -modelo, para embarcarnos en la obtención de dicha clasificación. Trabajo que queda recogido en el Capítulo 2 de esta memoria y que a continuación resumimos.

El Capítulo 2 se divide en tres bloques, correspondientes a los casos de eje temporal, eje espacial y eje luminoso.

- **Eje temporal.** Salvo un cambio de coordenadas, las superficies de revolución inmersas en \mathbb{L}^3 con eje temporal coinciden con las superficies de revolución inmersas en el espacio Euclídeo, \mathbb{R}^3 . Tan solo hay que tener en cuenta que, para obtener inmersiones no degeneradas, hemos de tomar una curva generatriz no degenerada.
- **Eje espacial.** Éste es el caso más complejo. Las órbitas de la acción del grupo de transformaciones de Lorentz propias y ortocronas que fijan un eje espacial, son ramas de hipérbolas espaciales, ramas de hipérbolas temporales y semirectas luminosas, todas ellas contenidas en planos perpendiculares al eje de revolución. Salvo un cambio de coordenadas, se puede asumir que el eje de rotación es el *eje* x . Consideramos entonces los planos degenerados $y = z$ e $y = -z$, los cuales contienen a todas las órbitas luminosas y dividen a \mathbb{L}^3 en cuatro regiones abiertas, a las que llamaremos *regiones fundamentales*. Antes de comenzar nuestro estudio, se conocían cuatro familias de superficies rotacionales, contenidas cada una de ellas en una región fundamental distinta. Estas familias se obtienen “rotando” curvas inmersas en un semiplano contenido en una región fundamental (véase por ejemplo [31]). Sólo en dos de las regiones fundamentales existen este tipo de superficies rotacionales Riemannianas, mientras que en todas ellas se pueden encontrar superficies rotacionales Lorentzianas. En esta memoria se prueba que, en el caso Riemanniano, las superficies rotacionales previamente conocidas son todas las superficies rotacionales existentes. Por el contrario, en el caso Lorentziano se demuestra la existencia de una nueva clase de superficies rotacionales que intersecan a más de una región fundamental. Dicha clase incluye superficies muy conocidas, como son el paraboloides hiperbólico y el hiperboloides de una hoja con eje el *eje* z . En cierto sentido, estas superficies se obtienen pegando superficies de las contenidas en una región fundamental. En 2.5.4 diseccionaremos este tipo de superficies, para poder comprender así el mecanismo de pegado, el cuál queda descrito en 2.5.5. Finalmente, en

el apartado 2.5.6 clasificaremos la familia de superficies rotacionales Lorentzianas con eje espacial, y en el siguiente apartado mostraremos un algoritmo para obtener ejemplos sencillos del nuevo tipo de superficies encontradas. Además, tras dicho algoritmo, se enuncia un teorema (cuya demostración se encuentra en el Apéndice C) que nos asegura que, localmente, toda superficie analítica rotacional Lorentziana con eje espacial es una de las superficies conocidas previamente, o una de las superficies construidas mediante el algoritmo proporcionado.

- **Eje luminoso.** En este caso las órbitas de la acción son o bien parábolas espaciales, o bien rectas luminosas. Las superficies rotacionales conocidas en la literatura están contenidas en dos semiespacios abiertos, a los que también llamamos *regiones fundamentales*. Al contrario de lo que ocurría en el caso de eje espacial, se demuestra que no existen superficies rotacionales que intersequen a ambas regiones fundamentales.

El último capítulo se centra en proporcionar una descripción completa de las soluciones rotacionales del $O^1(3)$ σ -modelo, así como de los solitones rotacionales Riemannianos.

Se demuestra de nuevo que las soluciones de este modelo coinciden con las superficies de Willmore con frontera en \mathbb{L}^3 . Para lo cual se necesita obtener una versión más general de la Fórmula de Gauss-Bonnet para superficies Lorentzianas con frontera temporal, dada en [17]. En concreto, en el Lema 3.1.2 se enuncia un teorema de Gauss-Bonnet para superficies Lorentzianas con frontera diferenciable a trozos y formada por curvas no degeneradas (la demostración de este lema está en el Apéndice D).

Para obtener las soluciones rotacionales con eje temporal, se sigue el mismo tipo de desarrollo que en el Capítulo 1. Las soluciones en este caso están generadas por elásticas libres clavadas en un plano anti de Sitter al que llamamos **AdS₂**. La principal novedad de esta sección es que, gracias a la forma que tiene la curvatura de las elásticas, somos capaces de afirmar que las superficies de Willmore de revolución en \mathbb{L}^3 con eje temporal y simplemente conexas, están contenidas en planos perpendiculares al eje de revolución y en hiperboloides de dos hojas con eje el de revolución.

Si deseamos aplicar el esquema de trabajo utilizado hasta ahora, al estudio de las soluciones con eje espacial y eje luminoso, necesitamos una versión modificada del Principio de Criticalidad Simétrica de Palais. El motivo es que el grupo de transformaciones de Lorentz que fijan el eje de rotación

no es compacto en ninguno de estos casos. En lugar de elegir este camino, hemos optado por calcular la primera variación del funcional de Willmore en ambiente semi-Riemanniano, véase 3.3.

En el caso del eje espacial, se demuestra que las soluciones rotacionales Riemannianas están generadas por curvas que son elásticas libres clavadas en dos planos de de Sitter y además se halla una caracterización de los solitones en términos de las condiciones de frontera del problema. El estudio de las superficies Lorentzianas es más complejo, debido a la riqueza de la familia de superficies rotacionales Lorentzianas. Esta riqueza se traduce en una mayor variedad de soluciones rotacionales Lorentzianas, en concreto se prueba que estas soluciones son:

- superficies rotacionales generadas por elásticas libres temporales clavadas en dos planos de de Sitter disjuntos,
- superficies rotacionales generadas por elásticas libres espaciales clavadas en dos planos hiperbólicos disjuntos,
- planos Lorentzianos ortogonales al eje, e
- hiperboloides de una hoja con eje una dirección temporal ortogonal al eje de revolución.

Finalmente, el capítulo acaba con el estudio de las soluciones rotacionales con eje luminoso. Éstas están generadas por elásticas libres no degeneradas clavadas en dos planos anti de Sitter disjuntos. Además, del mismo modo que ocurría con los solitones Riemannianos rotacionales con eje espacial, es posible obtener una caracterización de los solitones Riemannianos rotacionales con eje luminoso, en términos de las condiciones de frontera del problema.

Todos estos resultados se encuentran recogidos en [12] y [13].

Problemas abiertos

- En el segundo capítulo de esta memoria, se clasifican las superficies Lorentzianas inmersas en \mathbb{L}^3 que son invariantes por el grupo de transformaciones de Lorentz que fijan una dirección espacial (a la que llamamos eje). Los únicos ejemplos conocidos previamente eran superficies obtenidas al “rotar” o bien una curva temporal inmersa en un plano de Lorentz que contiene al eje, o bien una curva espacial inmersa en

un plano Riemanniano que contiene al eje. En la citada clasificación, se muestra la existencia de una tercera familia de superficies, que es mucho más rica que las dos conocidas previamente. En vista de este comentario, parece necesario hacer una revisión de aquellos resultados en los que se clasifican superficies Lorentzianas de revolución en \mathbb{L}^3 con eje espacial, cumpliendo una propiedad adicional, ya que dichas clasificaciones pueden estar incompletas.

- Sería interesante hacer un estudio de la estabilidad de las soluciones encontradas, especialmente si tenemos en cuenta que para algunos autores la estabilidad es condición necesaria para ser solitón.
- Dentro de la familia de soluciones Lorentzianas del $O^1(3)$ σ -modelo que hemos hallado, aquellas que están generadas por una sola curva temporal, son superficies globalmente hiperbólicas inmersas en \mathbb{L}^3 en las que además existe un observador privilegiado (la curva generadora). Tiene entonces sentido hablar de energía, y por tanto de solitones. Por otro lado, sería interesante estudiar el funcional energía del sistema, para aquellas soluciones Lorentzianas generadas por una curva espacial, tomando como observador privilegiado una órbita temporal cualquiera.
- Las soluciones del $O(3)$ σ -modelo foliadas por circunferencias de Villarceau de primera especie, se corresponden con tubos de Hopf sobre elásticas en la esfera punteada de dimensión 2 y radio $1/2$. Las soluciones foliadas por circunferencias de Villarceau de segunda especie, se obtienen de nuevo a partir de tubos de Hopf sobre elásticas en $\mathbb{S}^2(1/2)$ salvo un punto, a los que se ha aplicado una determinada isometría de \mathbb{S}^3 .

Sobre el espacio anti de Sitter de dimensión 3, se pueden construir dos aplicaciones con propiedades análogas a las de la aplicación de Hopf. Una de ellas se llama proyección de Hopf estándar sobre el anti de Sitter, y tiene por codominio al plano hiperbólico de curvatura -4 , mientras que la otra recibe el nombre de proyección de Hopf Lorentziana y tiene por codominio al plano anti de Sitter de curvatura -4 .

La pregunta natural que surge es ¿podemos construir a partir de cada una de estas aplicaciones nuevas familias de soluciones del $O^1(3)$ σ -modelo?

Introduction, main results and open problems

Introduction

As the title states, the results presented in this report deal with Willmore surfaces with boundary and nonlinear sigma models. While Willmore surfaces are widely known among those who study Differential Geometry, this is not the case for nonlinear sigma models. Thus, let us start by introducing them and motivating its study from both physical and mathematical points of view.

Nonlinear sigma models

A *nonlinear sigma model* is a field theory whose elementary fields, or dynamical variables, are differential maps, N , from a connected differentiable manifold, M , to another connected differentiable manifold, (E, g) , endowed with a nondegenerate metric. The Lagrangian density governing the dynamics of the model is defined as follows

$$\mathcal{L}(N) = \frac{1}{2} \sum_i g(\partial_i N, \partial_i N) - V(N),$$

where V is the potential energy of the system and $\{\partial_1, \partial_2, \dots\}$ is a frame in M . The associated functional measures the total energy of those maps.

The first manifold, M , is called the *source space*, while the second, E , is the *target space*. The dimension of the source space is called the dimension of the model, as well as the isometry group of the target space is the symmetry of the model. The *solutions of the model* are defined as the solutions of the

corresponding Euler-Lagrange equation. They are said to be *Lorentzian* if there is a Lorentzian metric defined on M and *Riemannian* if M is endowed with a Riemannian metric.

In many special cases, the solutions of the sigma model receives an additional name, for example:

- If g is Riemannian, $E = \mathbb{L}^n$ and $V \equiv 0$, then the Euler-Lagrange equation is a generalization of the classical wave equation, and so, the solutions of the sigma model are called *wave maps*.
- If M and E are Riemannian manifolds and $V \equiv 0$, then the solutions are called *harmonic maps* from M to E .

Along this report, we will focus on the study of two particular nonlinear sigma models:

- The 2-dimensional $O(3)$ nonlinear σ -model with null potential energy, that is, the one such that M is a surface, $E = \mathbb{S}^2$ (with the usual metric) and $V \equiv 0$. We will refer to it as $O(3)$ σ -model or $O(3)$ sigma model.
- The 2-dimensional $O^1(3)$ nonlinear σ -model with null potential energy, which will be abbreviated as $O^1(3)$ σ -model or $O^1(3)$ sigma model. That name comprehends two different closely related models. In both of them, M is a surface, the group of isometries of E is $O^1(3)$ and $V \equiv 0$. But, in the first one E is equal to \mathbb{S}_1^2 , while in the second E is the hyperbolic plane, \mathbb{H}_2 .

Two dimensional nonlinear sigma models, in particular those with symmetry $O(3)$ and $O^1(3)$ are ubiquitous in Physics, with applications going from Condensed-matter Physics to High-energy Physics and, of course, Quantum Field Theory . They are specially important in String Theories where the model description is applicable. In many cases, sigma models are used as toy model, because they show similarities with other more complicated models. These applications can be consulted in [1], [2], [9], [15], [26], [32], [38], [39], [43], [48], [50], [55], [60],and references therein.

This kind of universality is strongly related to the fact that those sigma models, and equations governing their dynamics, have a deep underlying mathematical meaning. This provides a powerful reason to explain the great interest of those models in Linear Analysis and in Differential Geometry (see,

for example, [19, 21, 24, 41] and references therein) even without mention any physical terminology, simply as a kind of variational problem with well established boundary conditions, [3, 4].

Also, as we will show later, the study of the $O(3)$ and $O^1(3)$ sigma models, is equivalent to the study of Willmore surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{L}^3 .

We have chosen an approach to these sigma models which was first proposed by M. S. Ody and L. H. Ryder, [41], to study the $O(3)$ sigma model. The main idea of that paper consists in identifying the dynamical variables of the model with the Gauss map of surfaces immersed in the Euclidean three space. After that identification, the Lagrangian density governing the model is the following one

$$\mathcal{S}(\phi) = \frac{1}{2} \|dN_\phi\|^2,$$

where dN_ϕ is the opposite of the shape (or Weingarten) operator of the immersion ϕ . That expression is just the *Casorati curvature* of the immersion, and it is equal to the average of the squares of the principal curvatures. That notion of curvature was introduced by F. Casorati in [25], motivated by the necessity of finding a suitable definition to the intuitive concept of curvature.

By using theory of surfaces, Ody and Ryder transformed the study of the $O(3)$ sigma model, into the variational problem governed by the functional measuring the total energy of the Gauss map of each immersion, also called total Casorati curvature. They found a wide family of (boundary free) solutions coming from the theory of constant mean curvature surfaces. Also, they proved:

- The classical solutions given by Belavin and Polyakov, [15], are those with conformal Gauss map (round spheres and minimal surfaces);
- The solutions previously found by Purkait and Ray, [47], correspond to the family of constant mean curvature helicoids studied by M. P. Do Carmo and M. Dajzer, [29].

In the case of the $O^1(3)$ sigma model, it seems natural to use a geometrical approach in which the dynamical variables of this model can be identified with the Gauss map of non-degenerate surfaces in the three dimensional Lorentz-Minkowski space, \mathbb{L}^3 . This way, we obtain Riemannian immersions in the case $E = \mathbb{S}_1^2$ and Lorentzian ones if $E = \mathbb{H}_2$.

Solitons and instantons

Along this report, not only we have studied solutions of the $O(3)$ and $O^1(3)$ sigma models, but also Riemannian solitons or instantons. Let us explain briefly what a soliton is, and under which conditions we have focused on their study.

As the literature about this topic comes from Physics and Analysis, we have momentarily changed the notation and the setting. Let us consider a field theory governed by the Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_{n-1}}, \phi_t, x, t),$$

where the dynamical variables of the model are differential maps, $\phi : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, notated by $\phi = \phi(t, x)$. Suppose \mathcal{L} is invariant under the group of time-like translations in \mathbb{L}^n . Then, the theorem of Noether assures the existence of a first integral of the Lagrangian, called the Energy of the system, and defined as follows

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \cdot \phi_t - \mathcal{L} \right) dx,$$

ϕ being a solution of the Euler-Lagrange equation, see [20].

In this framework, we define a soliton as a solution of the field equation, whose energy “travels as a localized packet in time”. Many authors also ask them to “exhibit some form of stability”. In some sense, solitons have a particle-like behavior. The way in which this concept is rigorously defined, depends on the author, see for example [9], [21] and [48]. Anyway, they all agree in saying that, in the case in which solutions does not depend on t , the density of the energy functional is constant (with respect to t) and equal to $-\mathcal{L}$.

The last statement allows us to transfer the notion of soliton to the setting of nonlinear sigma models, as long as M is endowed with a Riemannian metric. So, we define a *Riemannian soliton or instanton*, as a Riemannian solution whose image under the functional governing the model is finite. Clearly, in case M is compact (with or without boundary) and Riemannian, all solutions are solitons.

In the case M is a Lorentzian manifold, we are not going to study solitons, because we do not even know a way of defining the energy of the system without depending on a previously fixed observer.

In conclusion, it has been justified the fact that we have only studied the solitons of the $O(3)$ σ -model and the Riemannian solitons of the $O^1(3)$ σ -model.

The Willmore functional

The Willmore functional is defined as follows

$$\mathfrak{W}(\phi) = \int_M H_\phi^2 dA_\phi,$$

where $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a differential immersion from a differential, compact, boundary free and conected surface, H_ϕ is the mean curvature of the immersion and dA_ϕ is the element of area induced on M . It is easy to prove that $\mathfrak{W} \geq 4\pi$ and the minimum is reached if, and only if, M is a embedded round sphere in \mathbb{R}^3 .

In 1965, T. J. Willmore proposed the study of the above functional, [58]. In that paper, he proved that the image by \mathfrak{W} of any Clifford torus (that is, a revolution torus obtained by rotating a circle of radius r , whose center is at a distance of $\sqrt{2}r$ from the axis) is $2\pi^2$, and also that for any revolution torus $\mathfrak{W} \geq 2\pi^2$. Finally, he conjectured that if the genus of M is equal to 1, the minimum of the Willmore functional is $2\pi^2$ and it is only attained by the Clifford torus. Similar conjectures for arbitrary genus where later proposed by Kusner, [34].

One of the main properties of the Willmore functional is its invariance under conformal transformations of the metric. This property was already known by W. Blaschke and G. Thomsen, authors who independently developed a deep study of the conformal invariants of submanifolds, in the 1920's ([18] and [53]). This work lapsed into obscurity, and the conformal invariance of the Willmore functional was rediscovered in 1973, by J. H. White, [57]. The conformal invariance of the functional forces to reformulate the Willmore conjecture in the following way: for genus 1, $\mathfrak{W} \geq 2\pi^2$ and the minimum is only reached by the Clifford torus and immersions conformal to it.

The attempts to find a proof of the Willmore conjecture involve the study of the critical points of \mathfrak{W} , which have been named *Willmore surfaces*. These surfaces are characterized as the compact solutions of the equation

$$\Delta H_\phi + 2H_\phi(H_\phi^2 - G_\phi) = 0,$$

where G_ϕ denotes the Gauss curvature. The most simple examples of Willmore surfaces, known to Blaschke and Thomsen, are those obtained by stereographic projection of minimal surfaces in \mathbb{S}^3 . In 1970, H. B. Lawson proved that every compact orientable surface can be minimally embedded in \mathbb{S}^3 , [37]. As a consequence, the existence of Willmore surfaces of any genus is assured. In 1985, U. Pinkal found a family of Willmore surfaces embedded in \mathbb{R}^3 which can not be obtained by stereographic projection of a minimal surface in \mathbb{S}^3 . They are obtained as stereographic projection of Hopf tubes over certain closed elastic curves in \mathbb{S}^2 , [46].

Nowadays, the Willmore conjecture is still open, [59], (maybe not for so long, [49]). On the other hand, the theory of Willmore surfaces has become independent from the Willmore conjecture, being extended to other settings such as surfaces with boundary (see for example [11], [45] and [56]) and semi-Riemannian manifolds (see [5]).

Main results

Before starting the exposition of results, we would like to make some general remarks. All the objects that will appear in this report, unless otherwise stated, are differentiable (that is, \mathcal{C}^∞). All the surfaces will be connected and will be allowed to have boundary, so every time we work with compact surfaces, we are not excluding those with boundary. As a last remark, the boundary conditions we will work with are pairs, (Γ, N_o) , where Γ is a countable family of disjoint differentiable curves and N_o is a unitary differential vector field along Γ , orthogonal to Γ' .

The results shown in this report are the answer to two questions motivated by [11]. In this paper, the author obtained the compact solutions of the $O(3)$ σ -model with boundary admitting a rotational symmetry (the boundary free case is studied as a particular case of that with boundary). Even more, he proved that those solutions coincide with the Willmore surfaces of revolution in \mathbb{R}^3 , not known before. The technique used in that paper is the one proposed by Ody and Ryder, of identifying the variables of the $O(3)$ σ -model with the Gauss map of immersions of M in \mathbb{R}^3 .

The functional measuring the total energy of the Gauss map of an immersion, belongs to a wide family of functionals whose Lagrangian density is a function of the shape operator. The simplest one of those functionals is the area one. The associated variational problem is the Plateau one with boundary Γ , and its solutions are minimal surfaces bounded by Γ . When

Γ consist of two parallel circles (circles in two parallel planes) in \mathbb{R}^3 , the problem is classical in the theory of minimal surfaces. The moduli space of solutions was described in a posthumous manuscript of B. Riemann. Later, Enneper showed the non existence of minimal surfaces foliated by non parallel circles, [30]. Consequently, we know the complete moduli space of minimal surfaces that are foliated by circles.

Motivated by these results, we focused on the study of the existence of solutions of the $O(3)$ σ -model with boundary (the boundary free case is again treated as a particular case) foliated by circles not contained in parallel planes. This question is solved in Chapter 1. We start the chapter by introducing two classical families of circles that are not contained in parallel planes: first and second kind Villarceau circles. The moduli space of solutions of the sigma model foliated by these families of circles is obtained. The image by the stereographic projection of Villarceau circles are two families of circles in \mathbb{S}^3 , related by an isometry. This fact allows us to obtain results only for first kind Villarceau circles, and then, export them to second kind Villarceau circles.

Next, we summarize the main achievements of the chapter. First, given fixed boundary conditions, it is proved that the solutions of the sigma model coincide with the Willmore surfaces. After that, we solve the problem in the compact case ($M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2]$) with a geometric argument that involves the following steps

- Establishing admissible boundary conditions.
- Using the symmetry to simplify the problem (by applying the Principle of Symmetric Criticality, [44]).
- Using the conformal invariance of the Willmore functional.

Finally, the solutions are the stereographic projection of Hopf tubes over clamped elastic curves in the once punctured 2-dimensional sphere with radio $1/2$, and Lagrangian multiplier equal to 4. From that result, we obtain that the solutions foliated by second kind Villarceau circles are the stereographic projection of liftings, via the map

$$\Pi_- : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2), \quad \Pi_-(z_1, z_2) = (z_1 z_2, \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2)),$$

of campled elastic curves in the once punctured 2-dimensional sphere with radio $1/2$, and Lagrangian multiplier equal to 4.

The compact case is the key to obtain results for the other cases (non compact and compact without boundary). The solutions are again obtained from elastic curves in the once punctured 2-dimensional sphere with radio $1/2$, and Lagrangian multiplier equal to 4. The only difference is that the boundary conditions of the elastic curves depend on the topology of M . Also, by using the compact case, it can be proved that all the solitons foliated by Villarceau circles are compact.

The chapter ends by studying the *charge* of the solitons, that is, the functional measuring the total Gauss curvature. It can be proved that the charge is exclusively determined by the boundary conditions. To do so, it is necessary to obtain the geodesic curvature of a Villarceau circle in a soliton. From the obtained expression it can be deduced that a Villarceau circle is never a geodesic of a soliton. Despite of that, the charge of a soliton can be null.

Motivated again by [11], we decided to study the solutions of the $O^1(3)$ σ -model with rotational symmetry, that is, those solutions that are invariant under the group of proper and orthochronal Lorentz transformations that fix a direction in \mathbb{L}^3 . The first step consists in finding a classification of the surfaces that are invariant under the group of proper and orthochronal Lorentz transformations that fix a direction in \mathbb{L}^3 . After looking for it in the existing literature, we realized that such study had been avoided. So, before starting the study of the $O^1(3)$ sigma model, we solved that problem. The solution is given in Chapter 2, next we summarize it.

Chapter 2 is divided in three parts, corresponding to the cases in which the fixed direction is time-like, space-like and light-like.

- **Time-like axis.** Up to a change of coordinates, the rotational surfaces immersed in \mathbb{L}^3 with time-like axis essentially coincide with the surfaces of revolution in the Euclidean space, \mathbb{R}^3 . The only different detail is that, in order to obtain nondegenerate immersions, we ask the generating curves not to be degenerate.
- **Space-like axis.** This one is the most complicated and subtle case. There are three different types of orbits (under the action of the group of transformations that fix the axis): branches of space-like hyperbolas, branches of time-like hyperbolas and light-like rays; all of them contained in planes perpendicular to the axis. Up to a change of coordinates, we can suppose the axis is just the x axis. We consider the degenerate planes given by $y = z$ and $y = -z$. These planes con-

tain all the light-like orbits and they divide \mathbb{L}^3 into four open regions, that we will refer to as “fundamental regions”. In the literature, four different families of rotational surfaces can be found, each of them contained in a different fundamental region. These surfaces are obtained by rotating curves that are immersed in a semiplane contained in a fundamental region, see for example [31]. Only two of the fundamental regions contain Riemannian rotational surfaces, while Lorentzian rotational surfaces can be found in all the fundamental regions. In the Riemannian case, it is easy to prove that all rotational surfaces are those found in the literature. In contrast, in the Lorentzian case it is proved the existence of rotational surfaces intersecting more than one fundamental region. This family contains classical surfaces, such as the hyperbolic paraboloid and the one sheet hyperboloid with axis the z axis. These new surfaces are obtained by gluing, if possible, surfaces contained in different fundamental regions. In Section 2.5.4 we dissect this type of surfaces, in order to understand the gluing mechanism, which is described in 2.5.5. After that, in Section 2.5.6, the classification of Lorentzian rotational surfaces with space-like axis is obtained. Finally, it is shown an algorithm to obtain, in a simple way, examples of the family of surfaces intersecting more than one fundamental region. Also, a theorem is given (whose proof can be found in Appendix C), stating that, locally, all the analytical Lorentzian rotational surfaces with space-like axis are among the well-known ones in the literature, or can be constructed by using the given algorithm.

- **Light-like axis.** In this case, the orbits are either space-like parabolas or time-like lines. The rotational surfaces that can be found in the literature, are immersed in two open semispaces, that are also named *fundamental regions*. In contrast with the previous case, it can be proved that there are not rotational surfaces intersecting both fundamental regions.

Last chapter is devoted to describing the rotational solutions of the $O^1(3)$ σ -model, as well as the rotational Riemannian solitons.

As in the first chapter, it is proved that the solutions of the model coincide with the Willmore surfaces with boundary in \mathbb{L}^3 . As a tool to obtain this result, we need to prove a generalization of the Gauss-Bonnet Formula for Lorentzian surfaces with time-like boundary, given in [17]. In particular, Lemma 3.1.2 gives a Gauss-Bonnet Theorem for Lorentzian surfaces with

piecewise smooth boundary consisting of nondegenerate curves (the proof of this result can be found in Appendix D).

The steps followed to obtain the rotational solutions with time-like axis, are the same as in the first chapter. Such solutions are generated by free clamped elastic curves in an anti de Sitter plane, notated as \mathbf{AdS}_2 . The main new idea in this section is that, thanks to the expression of the geodesic curvature of the elastic curves, we are able to show that the simply connected revolution Willmore surfaces with time-like axis in \mathbb{L}^3 , are embedded in planes orthogonal to the axis and in two sheet hyperboloids whose axis is that of revolution.

In the case of space-like and light-like axis, if we want to follow the same steps as in Chapter 1, we need a modified version of the Symmetric Criticality Principle given by Palais, [44]. The reason is that, in both cases, the group of Lorentz transformations that fix the axis is not compact. Instead of choosing this method, we decided to obtain the first variation of the Willmore functional in semi-Riemannian setting, see 3.3.

In the space-like axis case, it is proved that the rotational Riemannian solutions are generated by clamped space-like free elastic curves immersed in two different de Sitter planes. Moreover, it is obtained a characterization of the Riemannian solitons in terms of the boundary conditions. The study of the Lorentzian rotational solutions is more complex due to the richness of the family of rotational Lorentzian surfaces. That complexness turns into a bigger family of rotational solutions:

- rotational surfaces generated by clamped time-like free elastic curves immersed in two different de Sitter planes,
- rotational surfaces generated by clamped space-like free elastic curves immersed in two different hyperbolic planes,
- Lorentzian planes orthogonal to the axis, and
- one sheet hyperboloid with time-like axis orthogonal to the axis of revolution.

Finally, the chapter ends with the study of rotational solutions with light-like axis. These solutions are generated by nondegenerate clamped free elastic curves immersed in two different anti de Sitter planes. Also, in the same way as for the space-like axis case, the rotational Riemannian solitons are characterized in terms of the boundary conditions of the problem.

The results appearing in this report can be consulted in [12] and [13].

Open problems

- In the second chapter, it is obtained the classification of immersed Lorentzian surfaces in \mathbb{L}^3 which are invariant by the Lorentz transformation group fixing a space-like direction. Until now, the only known examples were surfaces obtained by “rotating” either a time-like curve immersed in a Lorentzian plane containing the axis, or a space-like curve immersed in a Riemannian plane containing the axis. In the classification given in this report, it is shown the existence of a third family of surfaces which, in addition, is much more complex than the previously known. Bearing in mind this comment, it seems necessary to make a revision of all those results studying rotational Lorentzian surfaces with space-like axis in \mathbb{L}^3 , satisfying some additional conditions, because such classification results might be not complete.
- It would be interesting to study the stability of the given solutions, specially if we recall that for some authors, stability is a necessary condition to be a soliton.
- Within the family of Lorentzian solutions of the $O^1(3)$ σ -model that we found, those whose profile curve is time-like, are globally hyperbolic surfaces immersed in \mathbb{L}^3 , on which there exists a privileged observer, namely, the profile curve. This way, it makes sense to consider the energy of the system, and thus, the solitons. On the other hand, it would be interesting to study the energy functional of the system for those Lorentzian solutions generated by just one space-like curve, by considering as a privileged observer any time-like orbit.
- The solutions of the $O(3)$ σ -model which are foliated by first kind Villarceau circles are nothing but Hopf tubes over certain elastic curves in the once punctured 2-dimensional sphere of radius $1/2$. The solutions foliated by second kind Villarceau circles are also obtained as Hopf tubes over elastic curves in the once punctured 2-dimensional sphere of radius $1/2$, but applying a specific isometry of \mathbb{S}^3 .

On the 3-dimensional anti de Sitter space, it is possible to construct two maps with similar properties to the classical Hopf map. The first one is called indeed the standard Hopf projection on the anti de Sitter space, with image the hyperbolic plane of curvature -4 , whereas the

second one is the Lorentzian Hopf projection with image the anti de Sitter plane with curvature -4 .

The natural arising question is whether it is possible to construct new solutions of the $O^1(3)$ σ -model from these two new maps.

Solitones del $O(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2, foliados por circunferencias de Villarceau

1.1 Preliminares

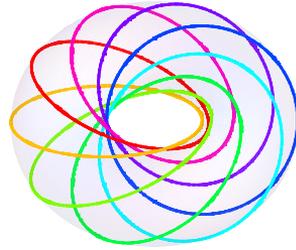
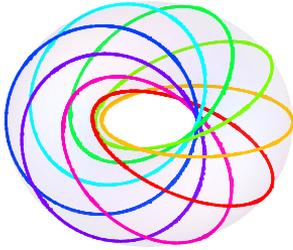
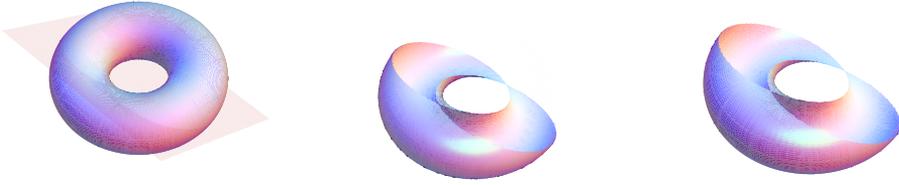
En esta sección haremos una introducción al paralelismo de Clifford en la esfera de dimensión tres. También estudiaremos las principales propiedades de las circunferencias de Villarceau. Los detalles se pueden consultar en [16].

1.1.1 Circunferencias de Villarceau

Es bien conocido que un toro, \mathbf{T} , de revolución en \mathbb{R}^3 , contiene dos familias de circunferencias formadas por los paralelos y los meridianos, respectivamente. Menos conocido es el hecho de que en \mathbf{T} se pueden encontrar otras circunferencias. Cortando al toro por planos bitangentes con él, se obtienen otras dos familias de circunferencias conocidas como circunferencias de Villarceau de primera y segunda especie, respectivamente. Éstas poseen las siguientes propiedades:

1. Dos circunferencias de distinta especie se intersecan en dos puntos, mientras que dos de la misma especie no sólo no se intersecan, sino que se encuentran entrelazadas.
2. Las circunferencias de Villarceau cortan a los meridianos bajo un ángulo constante y así son líneas de rumbo, loxodromas de \mathbf{T} . En particular son hélices en \mathbb{R}^3 con eje un campo de Killing rotacional, ver [14] para más detalles.

3. Dos circunferencias cualesquiera de la misma especie forman un *paratactic annulus*, lo que quiere decir que existe una constante, α , dependiendo de ambas circunferencias, de modo que cualquier esfera en \mathbb{R}^3 conteniendo a una de las dos circunferencias, es intersecada por la otra circunferencia con ángulo α .
4. Cada una de las dos familias de circunferencias de Villarceau constituye una foliación de \mathbf{T} .



Villarceau de primera especie

Villarceau de segunda especie

1.1.2 Paralelismo de Clifford

Consideremos la esfera unidad de dimensión tres vista en \mathbb{C}^2

$$\mathbb{S}^3 = \{\zeta = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |\zeta|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

y sobre ella la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ (e^{it}, \zeta) &\mapsto e^{it} \cdot \zeta = (e^{it} z_1, e^{it} z_2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Las órbitas generadas por esta acción son circunferencias máximas en \mathbb{S}^3 . Si \mathbf{C} y \mathbf{C}' son dos de dichas órbitas, entonces

$$d(\zeta, \mathbf{C}') = d(\eta, \mathbf{C}') \quad \forall \zeta, \eta \in \mathbf{C},$$

donde d es la distancia asociada a la métrica usual en \mathbb{S}^3 . Además, de esta propiedad se deduce que si $\zeta \in \mathbf{C}$, $\zeta' \in \mathbf{C}'$ satisfacen $d(\zeta, \zeta') = d(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$, entonces cualquier circunferencia máxima que contenga a ζ y ζ' interseca a ambas órbitas perpendicularmente. Este comportamiento nos recuerda al de las rectas paralelas en el espacio Euclídeo y motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.1 *Dos circunferencias máximas, \mathbf{C} y \mathbf{C}' , en \mathbb{S}^3 se dicen Clifford paralelas si $d(\zeta, \mathbf{C}')$ no depende de $\zeta \in \mathbf{C}$. En tal caso escribimos $\mathbf{C} \parallel \mathbf{C}'$.*

Estudiemos ahora la relación que acabamos de definir. Para ello necesitamos algo de notación y algunos conceptos previos. Dada una circunferencia máxima, \mathbf{C} , en \mathbb{S}^3 y $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, definimos

$$\mathbf{C}_\theta = \{\zeta \in \mathbb{S}^3 : d(\zeta, \mathbf{C}) = \theta\}.$$

Sea \mathbf{P} el plano vectorial en \mathbb{R}^4 que contiene a \mathbf{C} , \mathbf{P}^\perp el plano vectorial ortogonal a \mathbf{P} y \mathbf{C}^\perp la circunferencia máxima obtenida al intersecar \mathbb{S}^3 con \mathbf{P}^\perp . Es claro que $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}$ y que $\mathbf{C}_{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{C}^\perp$. Si $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ entonces \mathbf{C}_θ tiene las siguientes propiedades:

1. Tomando un sistema adecuado de coordenadas en $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$, se observa fácilmente que \mathbf{C}_θ es el toro definido por

$$\mathbf{C}_\theta = \{\zeta = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = \cos \theta, |z_2| = \sin \theta\}.$$

Así, \mathbf{C}_θ es la intersección de \mathbb{S}^3 con el siguiente cono

$$\{\zeta = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 \sin^2 \theta - |z_2|^2 \cos^2 \theta = 0\}.$$

2. Usando la propiedad anterior, se prueba que para cada $\zeta \in \mathbf{C}_\theta$, existen exactamente dos circunferencias máximas que son Clifford paralelas a \mathbf{C} y contienen a ζ .

Como consecuencia, el paralelismo de Clifford no es una relación de equivalencia. Lo que vamos a hacer a continuación es ver que esta relación se puede descomponer en dos relaciones de equivalencia.

Es evidente que $\mathbf{P} \oplus \mathbf{P}^\perp = \mathbb{R}^4$. Fijamos orientaciones en \mathbf{P} y \mathbf{P}^\perp de modo que obtengamos la orientación canónica en \mathbb{R}^4 . Notamos por $O^+(\cdot)$ al subgrupo del grupo ortogonal cuyos elementos tienen determinante positivo y definimos los dos siguientes subgrupos de $O^+(\mathbf{P}) \times O^+(\mathbf{P}^\perp)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\mathbf{C}^+ &= \{(\omega, f_+ \circ \omega \circ f_+^{-1}) : \omega \in O^+(\mathbf{P})\} \quad \text{y} \\ \mathbf{G}_\mathbf{C}^- &= \{(\omega, f_- \circ \omega \circ f_-^{-1}) : \omega \in O^+(\mathbf{P})\}, \end{aligned}$$

donde $f_+ \in \mathbf{Iso}^+(\mathbf{P}, \mathbf{P}^\perp)$ (respectivamente $f_- \in \mathbf{Iso}^-(\mathbf{P}, \mathbf{P}^\perp)$) es una isometría que preserva (respectivamente invierte) la orientación. Notemos que esta construcción no depende de la elección de f_+ (o f_-) ya que $O^+(\mathbf{P})$ es abeliano.

Definición 1.1.2 *En este contexto, a las órbitas bajo la acción de $\mathbf{G}_\mathbf{C}^+$, que son circunferencias máximas, las llamaremos circunferencias Clifford paralelas a \mathbf{C} de primera especie. Mientras que las órbitas bajo la acción de $\mathbf{G}_\mathbf{C}^-$, que también son circunferencias máximas, serán llamadas circunferencias Clifford paralelas a \mathbf{C} de segunda especie. Notemos por \parallel^+ a la relación ser Clifford paralela a \mathbf{C} de primera especie y por \parallel^- a la relación ser Clifford paralela a \mathbf{C} de segunda especie.*

Para dichas relaciones, las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. \parallel^+ y \parallel^- son relaciones de equivalencia.
2. Dos circunferencias máximas \mathbf{C} y \mathbf{C}' cumplen $\mathbf{C} \parallel \mathbf{C}'$ si, y solo si, ocurre que o bien $\mathbf{C} \parallel^+ \mathbf{C}'$ o bien $\mathbf{C} \parallel^- \tilde{\mathbf{C}}$.
3. Para cada $\zeta \in \mathbb{S}^3 \setminus (\mathbf{C} \cup \mathbf{C}^\perp)$ existen dos circunferencias máximas que pasan por ζ y que son Clifford paralelas a \mathbf{C} , una de primera especie y la otra de segunda especie.

1.1.3 Las circunferencias de Villarceau como órbitas de la acción de un grupo de transformaciones conformes en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$

Las circunferencias Clifford paralelas y las circunferencias de Villarceau están relacionadas a través de una proyección estereográfica adecuada.

Tomemos $\zeta_o \in \mathbb{S}^3$, una circunferencia máxima en \mathbb{S}^3 que pase por ζ_o , \mathbf{C} , y consideremos la proyección estereográfica con polo ζ_o que lleva \mathbf{C} al eje z , E_o . Es fácil ver que para cualquier $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\mathbf{T}_\theta = E_o(\mathbf{C}_\theta)$ es un toro de revolución en \mathbb{R}^3 en torno al eje z con radios $\frac{1}{\cos\theta}$ y $\tan\theta$. Es más, la familia formada por todos estos toros es una foliación de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$. Y, salvo traslaciones y homotecias, todo toro de revolución en torno al eje z en \mathbb{R}^3 es de la forma \mathbf{T}_θ para un adecuado valor de $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

En este contexto, las dos familias de circunferencia de Villarceau en \mathbf{T}_θ , se obtienen como imágenes por E_o de las dos familias de circunferencias máximas en \mathbf{C}_θ que son Clifford paralelas a \mathbf{C} .

A partir de ahora utilizaremos la siguiente notación

$$\mathcal{F}_1 = \{E_o(\mathbf{C}') : \mathbf{C}' \parallel^+ \mathbf{C}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2 = \{E_o(\mathbf{C}'') : \mathbf{C}'' \parallel^- \mathbf{C}\}.$$

Cada una de estas familias constituye una foliación de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$ y además vamos a ver que cada una de ellas es el espacio de órbitas de la acción de un grupo de aplicaciones conformes en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$.

En un sistema de coordenadas apropiado, la acción de $\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^+$ en \mathbb{S}^3 es la acción que motivó la definición del paralelismo de Clifford, (1.1). Por lo tanto, las circunferencias Clifford paralelas a \mathbf{C} de primera especie no son sino las fibras de la aplicación de Hopf (salvo cambio de coordenadas),

$$\Pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2)$$

$$\Pi(z_1, z_2) = (z_1 \bar{z}_2, \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2)),$$

donde \bar{z}_2 es el complejo conjugado de z_2 .

Ahora hacemos uso de E_o para obtener a partir de $\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^+$ el siguiente grupo de aplicaciones conformes en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$

$$\mathbf{H}^+ = \{E_o \circ \varphi \circ E_o^{-1} : \varphi \in \mathbf{G}_{\mathbf{C}}^+\} = \{\varphi_t : t \in [0, 2\pi[\}.$$

Notemos que esta construcción no depende de \mathbf{C} , por la elección que hicimos de E_o . La familia de órbitas de la acción del grupo \mathbf{H}^+ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$ es \mathcal{F}_1 .

A continuación tratamos con las circunferencias de Villarceau de segunda especie. En un sistema de coordenadas adecuado la acción de $\mathbf{G}_{\mathbf{C}}^-$ en \mathbb{S}^3 queda descrita del siguiente modo

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad (e^{it}, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{it} z_1, e^{-it} z_2).$$

En este caso, la proyección al cociente es (salvo cambio de coordenadas) una aplicación similar a la de Hopf

$$\Pi_- : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2), \quad \Pi_-(z_1, z_2) = (z_1 z_2, \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2)).$$

Las fibras de esta proyección son las circunferencias Clifford paralelas a \mathbf{C} de segunda especie.

De nuevo usamos la proyección estereográfica para pasar a \mathbb{R}^3 . El siguiente grupo de aplicaciones conformes en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$ deja invariantes las circunferencias de Villarceau de segunda especie

$$\mathbf{H}^- = \{E_o \circ \chi \circ E_o^{-1} : \chi \in \mathbf{G}_{\mathbf{C}}^-\} = \{\chi_t : t \in [0, 2\pi[\}.$$

Esto es, \mathcal{F}_2 es la familia de órbitas de la acción de \mathbf{H}^- en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$.

Para cerrar los preliminares vamos a justificar por qué en este capítulo vamos a trabajar casi exclusivamente con la familia \mathcal{F}_1 . Para ello definimos la siguiente isometría en \mathbb{S}^3

$$J : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 \\ J(z_1, z_2) = (z_1, \bar{z}_2).$$

Esta isometría hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{J} & \mathbb{S}^3 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi_- \\ \mathbb{S}^2(1/2) & \xrightarrow{Id} & \mathbb{S}^2(1/2). \end{array}$$

Este hecho nos va a permitir trasladar los resultados obtenidos al trabajar con \mathcal{F}_1 a resultados sobre \mathcal{F}_2 usando la isometría J .

1.2 El $\mathbf{O}(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2 y su invarianza conforme

Recordemos que el $\mathbf{O}(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2 es una teoría de campos cuyas variables dinámicas son aplicaciones de una superficie conexa, M , en la esfera redonda de dimensión 2. La densidad Lagrangiana que gobierna su dinámica es

$$\mathcal{S}(N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} N^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)(\partial_i, \partial_i),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la métrica usual en \mathbb{R}^3 , $*$ denota al pull-back y $\{\partial_1, \partial_2\}$ es una referencia ortonormal de M . Véase la introducción.

Recordemos también que, utilizando teoría de superficies, este sigma modelo se transforma en el problema variacional definido en el espacio de inmersiones de M en \mathbb{R}^3 , que está gobernado por el funcional que mide la energía total de la aplicación de Gauss de cada inmersión, o lo que es lo mismo, la curvatura total de Casorati de cada inmersión. Se llaman *soluciones del sigma modelo* a los puntos críticos del problema variacional. Se llaman *solitones* a aquellos puntos críticos que cumplen que el valor del funcional energía sobre ellos es finito. Recordemos por último que, en nuestro caso, el funcional que gobierna el sigma modelo y el funcional energía coinciden salvo el signo.

A partir de ahora, y tan sólo en este capítulo, nos referiremos al $O(\mathbf{3})$ sigma modelo no lineal de dimensión 2 simplemente como modelo o sigma modelo.

El objetivo de este capítulo es describir el espacio moduli de las soluciones del sigma modelo que están foliadas por circunferencias de Villarceau y satisfacen ciertas condiciones de frontera. Y determinar después, de todas ellas, cuáles son solitones. Para ello, lo primero que vamos a hacer es fijar la notación con la que vamos a trabajar a lo largo del capítulo.

Condiciones de frontera

Llamemos (Γ, N_o) a las condiciones de frontera de primer orden, donde

- $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ es un conjunto numerable de curvas regulares en \mathbb{R}^3 que son disjuntas dos a dos.
- N_o es un campo definido a lo largo de Γ que es unitario y ortogonal a Γ , esto es, $\langle N_o, \Gamma' \rangle = 0$ donde Γ' es el campo tangente a lo largo de cada $\gamma_i \in \Gamma$.

Las condiciones de frontera fijadas definen un tercer campo, ν , a lo largo de Γ , que está determinado por $\Gamma' \wedge \nu = N_o$, donde Γ' es el campo tangente a lo largo de Γ .

Sea M una superficie diferenciable (y por diferenciable a partir de ahora vamos a entender de clase C^∞), conexa y con frontera formada por la unión numerable de una familia de curvas diferenciables (tantas como forman parte de Γ), esto es, $\partial M = c_1 \cup c_2 \dots$.

El espacio de variables dinámicas o campos elementales

Definimos $I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$ como el espacio de inmersiones, $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, que satisfacen las siguientes condiciones de frontera

1. $\phi(e_j) = \gamma_j, \forall j$, lo cual abreviamos por $\phi(\partial M) = \Gamma$, y
2. $d\phi_p(T_p M)$ es ortogonal a $N_o(\phi(p)), \forall p \in \partial M$.

Para cada $\phi \in I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$, representamos por $N_\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ a su aplicación de Gauss. dN_ϕ denota entonces al opuesto del operador forma u operador de Weingarten de ϕ .

El funcional

En este ambiente, el funcional que gobierna el problema variacional es

$$\mathfrak{S} : I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \mathfrak{S}(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \|dN_\phi\|^2 dA_\phi,$$

siendo dA_ϕ el elemento de área de $(M, \phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $\|\cdot\|$ la norma asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Una vez conocido el funcional, nuestro problema consiste en encontrar de entre todas las superficies en \mathbb{R}^3 con frontera Γ y aplicación de Gauss a lo largo de dicha frontera N_o , aquellas que son puntos críticos de \mathfrak{S} y, de entre ellas, determinar cuáles son solitones del sigma modelo, esto es, aquellas cuya imagen por \mathfrak{S} pertenece a \mathbb{R} .

Los puntos críticos: caso compacto

Si M es compacta, los solitones del sigma modelo y los puntos críticos de \mathfrak{S} coinciden, siendo aquellas inmersiones que anulan la primera variación del funcional para cualquier campo variacional.

Los puntos críticos: caso no compacto

El caso no compacto se diferencia en que a priori no coinciden solitones y puntos críticos. La no compacidad obliga a tomar variaciones de soporte compacto, lo cual equivale a decir que $\phi \in I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$ es un punto crítico de \mathfrak{S} si, y solo si, la restricción de ϕ a K , $\phi|_K$, es punto crítico de

$$\mathfrak{S} : I_{\phi(\partial K)}(K, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}, \quad \mathfrak{S}(\psi) = \frac{1}{2} \int_K \|dN_\psi\|^2 dA_\psi,$$

para todo $K \subseteq M$ polígono, donde por polígono vamos a entender un subconjunto de M que es compacto, conexo, simplemente conexo, con interior no vacío y frontera diferenciable a trozos, formada por curvas regulares.

Una vez planteado el problema, vamos a trabajar con el funcional \mathfrak{S} para convertirlo en otro funcional que es invariante bajo cambios conformes de la métrica. En todo el desarrollo que sigue a continuación, el caso en el que $\partial M = \emptyset$ puede ser considerado un caso particular del caso con frontera.

Dada una inmersión, $\phi \in I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$, llamemos H_ϕ a su función curvatura media y llamemos $G_\phi = \det(dN_\phi)$ a la curvatura de Gauss de $(M, \phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle)$. La siguiente relación entre ambas curvaturas es clásica,

$$\|dN_\phi\|^2 = 4H_\phi^2 - 2G_\phi.$$

Combinándola con el Teorema de Gauss-Bonnet para superficies Riemannianas, obtenemos el siguiente resultado

Teorema 1.2.1 $\phi \in I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$ es una solución del sigma modelo con condiciones de frontera (Γ, N_o) si, y solo si, (M, ϕ) es una superficie de Willmore con condiciones de frontera (Γ, N_o) .

Donde las superficies de Willmore con condiciones de frontera (Γ, N_o) , se definen como aquellas inmersiones, $\phi \in \mathbf{I}_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$, que cumplen que para todo polígono $K \subseteq M$, la restricción de ϕ a K , $\phi|_K$, es punto crítico de $(\mathbf{I}_{\phi(\partial K)}(K, \mathbb{R}^3); \mathfrak{W})$, donde

$$\mathfrak{W} : \mathbf{I}_{\phi(\partial K)}(K, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{W}(\psi) = \int_K H_\psi^2 dA_\psi + \int_{\phi(\partial K)} k^\psi ds,$$

siendo H_ψ la curvatura media de la inmersión y k^ψ la curvatura geodésica de $\phi(\partial\mathbf{K})$ en $\psi(\mathbf{K})$ (donde la curva está orientada de modo que su normal “apunta hacia” $\psi(\mathbf{K})$).

Demostración: En el caso en el que M es compacta, utilizando la relación clásica anterior, junto con el Teorema de Gauss-Bonnet para superficies Riemannianas, el funcional que gobierna el sigma modelo se puede escribir del siguiente modo

$$\mathfrak{S}(\phi) = 2 \int_M H_\phi^2 dA_\phi + \int_\Gamma k^\phi ds - 2\pi\chi(M),$$

donde s es el parámetro arco y $\chi(M)$ es la característica de Euler de M . Consideremos ahora el funcional $\mathfrak{L} : I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definido como

$$\mathfrak{L}(\phi) = \int_\Gamma k^\phi ds.$$

Si probamos que \mathfrak{L} es constante en el espacio $I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$, el teorema queda probado cuando M es compacta. Para ello, lo único que hay que hacer es darse cuenta de que las condiciones de frontera fijadas implican no solo que todas las superficies del espacio anterior tienen la misma frontera, sino también que en cada punto de dicha frontera el plano tangente a todas ellas es el mismo. Entonces k^ϕ no depende de la inmersión y por tanto \mathfrak{L} es constante.

Cuando M no es compacta se razona igual que antes, pero sustituyendo M por un polígono $\mathbf{K} \subseteq M$ arbitrario.

■

Nota 1.2.2 *En el caso compacto sin frontera, el término de frontera del funcional de Willmore desaparece y la demostración del teorema se reduce al uso de la relación entre las curvaturas y el Teorema de Gauss-Bonnet. En este caso el resultado nos proporciona una gran variedad de ejemplos de solitones del sigma modelo, véanse las superficies de Willmore sin frontera descritas en [6, 10, 36, 37, 46].*

Como corolario inmediato obtenemos el siguiente resultado

Corolario 1.2.3 *El sigma modelo es invariante frente a cambios conformes de la métrica en \mathbb{R}^3 .*

1.3 Soluciones y solitones foliados por circunferencias de Villarceau

El objetivo de esta sección es el de resolver el siguiente problema

Obtener todas las soluciones y todos los solitones del sigma modelo que son invariantes por el grupo \mathbf{H}^+ , esto es, que están foliados por circunferencias de Villarceau de primera especie.

Los pasos a seguir para resolverlo son:

- Establecer unas condiciones de frontera admisibles.
- Utilizar la simetría de los solitones para simplificar el problema.
- Usar la invarianza conforme del funcional de Willmore.
- Estudiar las elásticas clavadas en la esfera punteada de dimensión dos y radio $1/2$.

Una vez obtenidos los solitones que buscamos, haciendo uso de la isometría J que presentamos en los preliminares de este capítulo, obtendremos los solitones del sigma modelo foliados por circunferencias de Villarceau de segunda especie.

A partir de ahora, llamaremos *puntos simétricos* a las superficies en \mathbb{R}^3 invariantes por \mathbf{H}^+ y *soluciones simétricas* a los puntos críticos del sigma modelo invariantes por dicho grupo.

Antes de comenzar el estudio de las condiciones de frontera, notemos que los puntos del eje z no pertenecen a ninguna circunferencia de Villarceau de primera especie, por lo tanto la imagen de las soluciones simétricas estará inmersa en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$. Como $I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$ es un abierto de $I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$, no supone pérdida de generalidad restringir el espacio de inmersiones a $I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$.

1.3.1 Condiciones de frontera admisibles

Para obtener soluciones simétricas, las condiciones de frontera han de ser invariantes por \mathbf{H}^+ . Esto último ocurre si, y solo si, se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. Todas las curvas que forman parte de Γ son circunferencias de Villarceau de primera especie. Las notamos por $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. En particular,

cada una de dichas curvas se puede parametrizar del siguiente modo: $\gamma_i(t) = \varphi_t(p_i)$, donde p_i es un punto arbitrario de la curva.

2. N_o es un campo a lo largo de Γ que es unitario, ortogonal a Γ y que cumple lo siguiente: dados $p_i \in \gamma_i$, para $i = 1, 2, \dots$,

$$N_o(\gamma_i(t)) = \frac{(d\varphi_t)_{p_i}(n_i)}{\|(d\varphi_t)_{p_i}(n_i)\|},$$

donde $n_i := N_o(p_i)$.

Nota 1.3.1 *Obsérvese que si N_o cumple 2, entonces está totalmente determinado por su valor en un punto de cada una de las curvas que componen Γ . Además, notemos que cuando (Γ, N_o) cumple las dos propiedades anteriores, el campo ν es también \mathbf{H}^+ -invariante.*

El hecho de que las condiciones de frontera sean \mathbf{H}^+ -invariantes no garantiza la existencia de soluciones simétricas. Para obtener más información acerca de las condiciones de frontera, fijémonos en el espacio de órbitas de la acción del grupo \mathbf{H}^+ . Como estamos trabajando con inmersiones conexas en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$, en caso de que exista una solución simétrica, su imagen en el espacio de órbitas debe ser una curva diferenciable, conexas e inmersa. En otras palabras, la subvariedad transversal a la foliación de cada solución simétrica es una curva diferenciable conexas. La naturaleza de la curva determinará el número de curvas que forman parte de Γ , así como la topología de la superficie M .

1. Si la curva es cerrada, entonces $\Gamma = \emptyset$ y $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
2. En el caso en que la curva no es cerrada y no tiene frontera, de nuevo $\Gamma = \emptyset$, pero ahora $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
3. Cuando la curva no es cerrada y tiene un único punto en su frontera, el número de curvas que forman parte de Γ es $n = 1$ y $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, \infty[$.
4. Por último si la curva no es cerrada y tiene dos puntos en su frontera, entonces $n = 2$ y $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2]$.

Vamos a comenzar estudiando qué ocurre cuando $n = 2$ y $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2]$. A continuación seguiremos con el estudio del caso compacto sin frontera. Para estudiar los dos siguientes casos será necesario un conocimiento del espacio de las elásticas con parámetro $\lambda = 4$ en la esfera punteada de dimensión 2 y radio 1/2. Cerraremos la sección con los resultados de los casos segundo y tercero.

1.3.2 $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2]$

$I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$ es el espacio de inmersiones $\phi : \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$, que satisfacen las siguientes condiciones de frontera

1. $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{a_1\}) = \gamma_1$, $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{a_2\}) = \gamma_2$ y
2. $d\phi_p(T_p M) \perp N_o(\phi(p))$, para todo $p \in \partial M$.

Como M es compacta, todo punto crítico de \mathfrak{S} va a ser un solitón del sigma modelo. Centrémonos, pues, en la búsqueda de los puntos críticos del problema variacional $(I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}); \mathfrak{W})$ que conservan la simetría que tiene la frontera.

Utilizamos la simetría de los solitones para simplificar el problema

El grupo \mathbf{H}^+ actúa de forma natural sobre $I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$, siendo la acción

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+ \times I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}) &\rightarrow I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}) \\ (f, \phi) &\mapsto f \circ \phi. \end{aligned}$$

Además, como los elementos del grupo \mathbf{H}^+ son aplicaciones conformes en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$, tenemos que el funcional de Willmore es \mathbf{H}^+ -invariante, esto es,

$$\mathfrak{W}(f \circ \phi) = \mathfrak{W}(\phi), \quad \forall f \in \mathbf{H}^+, \forall \phi \in I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}).$$

Llamemos Σ al espacio de puntos simétricos con condiciones de frontera (Γ, N_o) , es decir, al espacio de las inmersiones $\phi \in I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$ que cumplen $\text{Im}(f \circ \phi) = \text{Im}(\phi)$, $\forall f \in \mathbf{H}^+$. Las soluciones simétricas del sigma modelo son aquellos elementos de Σ que son puntos críticos de $(I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}), \mathfrak{W})$. En este ambiente estamos en condiciones de aplicar el Principio de Criticalidad Simétrica de Palais (véase el Apéndice A), en concreto el corolario que nos asegura que, al ser \mathbf{H}^+ compacto, podemos restringir primero el funcional \mathfrak{W} al espacio de puntos simétricos y luego calcular los puntos críticos. Todo esto queda recogido en el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2 $\phi \in \Sigma$ es una solución simétrica del sigma modelo si, y solo si, ϕ es un punto crítico del funcional obtenido al restringir \mathfrak{W} al espacio Σ , esto es, $\mathfrak{W}_\Sigma : \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Como a partir de ahora vamos a trabajar en Σ , vamos a centrarnos en estudiar cómo son las inmersiones que pertenecen a este espacio. Consideremos para ello la siguiente aplicación

$$\Phi = \Pi \circ E_o^{-1} : \mathbb{R}^3 \setminus (\text{eje } z) \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\},$$

donde $m \in \mathbb{S}^2(1/2)$ es la imagen por la aplicación de Hopf del polo de la aplicación estereográfica. Recordemos que al tomar la dos esfera de radio $1/2$, Π es una submersión Riemanniana, obteniendo así que Φ es una submersión conforme. $\Phi(\Gamma) = \{m_1, m_2\}$ es un par de puntos en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$. Por otro lado,

$$\left\{ u_i = \frac{d\Phi_{p_i}(\nu(p_i))}{\|d\Phi_{p_i}(\nu(p_i))\|}, w_i = \frac{d\Phi_{p_i}(N_o(p_i))}{\|d\Phi_{p_i}(N_o(p_i))\|} \right\} \quad (1.2)$$

es una base ortonormal de $T_{m_i}\mathbb{S}^2(1/2)$ que no depende de la elección de $p_i \in \gamma_i$, para $i = 1, 2$.

Proposición 1.3.3 *Salvo identificación de cada inmersión con su imagen en \mathbb{R}^3 , $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, donde*

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{M_\alpha := \Phi^{-1}(\alpha) / \alpha : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\} \text{ es regular} \\ &\quad \text{y } \alpha(s_i) = m_i, \alpha'(s_i) = u_i, \text{ para } i = 1, 2\}, \\ \Sigma_2 &= \{M_\alpha := \Phi^{-1}(\alpha) / \alpha : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\} \text{ es regular} \\ &\quad \text{y } \alpha(s_1) = m_1, \alpha(s_2) = m_2, \alpha'(s_1) = u_1, \alpha'(s_2) = -u_2\}. \end{aligned}$$

Demostración: Sea $\alpha : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ una curva regular con $\alpha(s_i) = m_i$ y $\alpha'(s_i) = u_i$, para $i = 1, 2$. Entonces $M_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ es la proyección estereográfica a \mathbb{R}^3 del tubo de Hopf sobre α . En particular, M_α está foliada por circunferencias de Villarceau de primera especie, luego es invariante bajo la acción de \mathbf{H}^+ . Además $\Phi^{-1}(m_i) = \gamma_i$ para $i = 1, 2$ y por ser Φ submersión conforme, podemos asegurar que el normal a M_α a lo largo de Γ es N_o . Por lo tanto, la inmersión $\phi \in I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$ cuya imagen es M_α , pertenece a Σ . De igual forma se prueba que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma$.

Probemos ahora el recíproco. Dada $\phi \in \Sigma$, su imagen es una superficie foliada por circunferencias de Villarceau de primera especie y por tanto $E_o(\phi(M))$ es un tubo de Hopf sobre alguna curva regular. Las condiciones de frontera nos dicen que la proyección de dicha curva a $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ tiene

extremos $\{m_1, m_2\}$ y en cada extremo tiene tangente $\pm u_i$. En principio existen cuatro espacios de curvas en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ satisfaciendo lo anterior, pero como estamos identificando inmersiones e imágenes de las mismas, tan solo dos de dichos espacios son significativos.

■

Usamos la invarianza conforme del funcional de Willmore

La siguiente idea a explotar es la invarianza conforme del funcional de Willmore. $E_o : \mathbb{S}^3 \setminus \{\zeta_o\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación conforme, lo que implica que

$$\mathfrak{W}(M_\alpha) = \bar{\mathfrak{W}}(\Pi^{-1}(\alpha)) = \int_{\Pi^{-1}(\alpha)} (\bar{H}_\alpha^2 + \bar{R}_\alpha) d\bar{A}_\alpha + \int_{\Pi^{-1}(\{\alpha(s_1), \alpha(s_2)\})} \bar{k}^\alpha ds,$$

siendo $\bar{\mathfrak{W}}$ el funcional de Willmore asociado a la métrica usual en \mathbb{S}^3 , \bar{R}_α la curvatura seccional a lo largo de $\Pi^{-1}(\alpha)$ en \mathbb{S}^3 , \bar{H}_α la curvatura media de $\Pi^{-1}(\alpha)$ en \mathbb{S}^3 , \bar{k}^α la curvatura geodésica de $\Pi^{-1}(\{\alpha(s_1), \alpha(s_2)\})$ en $(\Pi^{-1}(\alpha), \tilde{g})$ y $d\bar{A}_\alpha$ el elemento de volumen métrico.

Recordemos que \mathbb{S}^3 tiene curvatura seccional constante igual a 1, luego $\bar{R}_\alpha = 1$. Por otra parte, la frontera de cualquier tubo de Hopf en \mathbb{S}^3 es un par de fibras de Hopf. Las fibras de la aplicación de Hopf son circunferencias máximas en \mathbb{S}^3 , esto es, geodésicas en \mathbb{S}^3 y por tanto también geodésicas en el tubo de Hopf, de donde concluimos que $\bar{k}^\alpha = 0$. Lo que nos queda entonces es

$$\mathfrak{W}(M_\alpha) = \bar{\mathfrak{W}}(\Pi^{-1}(\alpha)) = \int_{\Pi^{-1}(\alpha)} (\bar{H}_\alpha^2 + 1) d\bar{A}_\alpha.$$

Sabemos que la aplicación de Hopf es una submersión Riemanniana y que sus fibras son geodésicas en \mathbb{S}^3 . Utilizando esto es fácil probar que

$$\bar{H}_\alpha = \frac{1}{2}k,$$

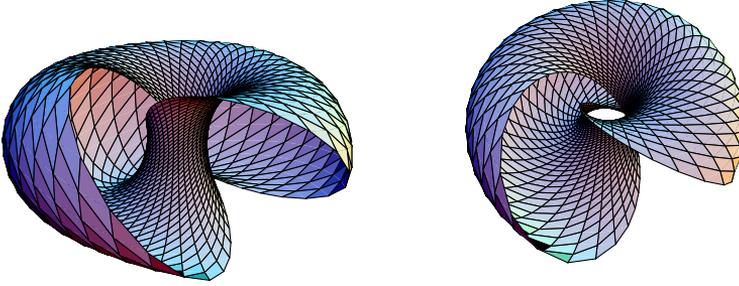
donde k es la función curvatura de la curva α en $\mathbb{S}^2(1/2)$. Con lo que concluimos que

$$\mathfrak{W}(M_\alpha) = \bar{\mathfrak{W}}(\Pi^{-1}(\alpha)) = \frac{\pi}{2} \int_\alpha (k^2 + 4) ds.$$

Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.4 Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ una pareja de circunferencias de Villarceau de primera especie y sea N_o un campo normal unitario a lo largo de Γ que es \mathbf{H}^+ -invariante (mirar 1.3.1). Entonces $\phi \in I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$ es un solitón del sigma modelo que está foliado por circunferencias de Villarceau de primera especie si, y solo si, $\phi(M)$ es la proyección estereográfica de un tubo de Hopf sobre una curva elástica clavada en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ (siendo el parámetro de la elástica 4), con condiciones de frontera $(\{\Phi(\gamma_1), \Phi(\gamma_2)\}, \{u_1, \pm u_2\})$ (véase (1.2)).

A continuación mostramos desde dos puntos de vista distintos la imagen en \mathbb{R}^3 de uno de los solitones del sigma modelo.



Utilizando la isometría de \mathbb{S}^3 , J , es fácil probar el resultado análogo para las circunferencias de Villarceau de segunda especie.

Corolario 1.3.5 Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ un par de circunferencias de Villarceau de segunda especie y sea N_o un campo normal unitario a lo largo de Γ que es \mathbf{H}^- -invariante. Entonces $\phi \in I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$ es un solitón del sigma modelo que está foliado por circunferencias de Villarceau de segunda especie si, y solo si, $\phi(M)$ es la proyección estereográfica de un levantamiento completo, vía la aplicación $\Pi_- : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2)$, de una curva elástica clavada en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ (con parámetro 4), con las condiciones de frontera inducidas por (Γ, N_o) y por $\Pi_- \circ E_o^{-1}$.

Nota 1.3.6 *Las condiciones que ha de cumplir N_o para ser \mathbf{H}^- -invariante no han sido estudiadas, pero son análogas a las de la \mathbf{H}^+ -invarianza.*

1.3.3 $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

El desarrollo de este apartado es similar al del anterior, tan solo hay que tener en cuenta que ahora no hay términos de frontera y que el espacio de puntos simétricos se identifica con el siguiente espacio

$$\{\Phi^{-1}(\alpha) : \alpha \text{ es una curva regular cerrada inmersa en } \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}\}.$$

Lo que obtenemos en este caso es el siguiente teorema.

Teorema 1.3.7 *Los solitones compactos y sin frontera del sigma modelo que están foliados por circunferencias de Villarceau de primera especie son la proyección estereográfica de un tubo de Hopf sobre una curva elástica cerrada en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ (siendo el parámetro de la elástica 4).*

Nota 1.3.8 *Utilizando la isometría J se obtienen resultados análogos para el caso de las circunferencias de Villarceau de segunda especie.*

1.3.4 Elásticas en la esfera de dimensión dos con parámetro 4

Hemos transformado el problema de encontrar la soluciones simétricas del sigma modelo en el de obtener elásticas con $\lambda = 4$ en la esfera punteada de dimensión 2 y radio 1/2.

Particularizamos ahora lo hecho en el Apéndice B a nuestro caso, esto es, en (B.1) tomamos $\lambda = 4$, $\mathbf{C} = 4$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Tenemos entonces que:

Una curva α en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ es punto crítico de \mathfrak{E}^4 si, y solo si, su función curvatura, k , es solución de la siguiente ecuación

$$2 \frac{d^2 k}{ds^2} + 4k + k^3 = 0. \tag{1.3}$$

Sabemos que la función constante $k = 0$ es solución de la ecuación. Recordemos que las geodésicas de $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ proporcionan, vía la aplicación de Hopf, tubos de Clifford en \mathbb{S}^3 . Sus imágenes por la proyección

estereográfica son tubos con frontera sobre toros de Clifford en \mathbb{R}^3 . En vista de los últimos teoremas, los citados tubos son solitones del sigma modelo con frontera.

Sabemos también que la solución general de (1.3) es

$$k(s) = C \operatorname{cn}(a(s - s_0), \rho),$$

siendo $a \in \mathbb{C}$ y $s_0 \in \mathbb{R}$ constante arbitrarias, mientras que ρ y C están determinadas por las siguientes expresiones:

$$\rho^2 = \frac{a^2 - 2}{2a^2}, \quad C^2 = 2(a^2 - 2).$$

Nos queda ahora determinar para qué valores de ρ y C la imagen de la solución está contenida en \mathbb{R} . Ésto se obtiene haciendo uso de las propiedades del coseno elíptico de Jacobi, véase [23].

Proposición 1.3.9 *k tiene imagen real si, y solo si, a es un número real perteneciente a $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$.*

Nota 1.3.10 *En los próximos capítulos tendremos que realizar varios razonamientos similares al que necesitamos hacer aquí para determinar qué valores de a nos dan una solución de la ecuación con imagen contenida en \mathbb{R} . Por ser la primera vez, vamos a mostrar el razonamiento. En ocasiones posteriores mostraremos la solución y remitiremos a esta parte.*

Demostración: Sean $a = x + iy$ y $C = A + iB$, donde $x, y, A, B \in \mathbb{R}$. Haciendo uso de la fórmula que expresa el coseno elíptico de Jacobi de un número complejo en términos de funciones elípticas de Jacobi con argumento real, tenemos que k tiene imagen real si, y solo si,

$$-A \operatorname{sn}(x(s - s_0), \rho) \operatorname{dn}(x(s - s_0), \rho) \operatorname{sn}(y(s - s_0), \sqrt{1 - \rho^2}) \\ \operatorname{dn}(y(s - s_0), \sqrt{1 - \rho^2}) + B \operatorname{cn}(x(s - s_0), \rho) \operatorname{cn}(y(s - s_0), \sqrt{1 - \rho^2}) = 0$$

para todo s , donde $\operatorname{sn}(\cdot, \cdot)$ es el seno elíptico de Jacobi y $\operatorname{dn}(\cdot, \cdot)$ es el denominador de la densidad de la integral elíptica de Jacobi de primera clase.

Veamos la implicación hacia la derecha. Si tomamos $s = s_0$ en la anterior igualdad tenemos que B ha de ser igual a 0. Utilizando la relación existente entre a y C , obtenemos que $B = 0$ implica que $xy = 0$. De donde a es o bien imaginario puro o bien real. En ambos casos $\operatorname{cn}(a(s - s_0), \rho) \in \mathbb{R}$. Solo

nos queda ver qué le ocurre a C en estos casos. $C^2 = 2(x^2 - y^2 - 2)$, por lo tanto C es real si, y solo si, $a \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$.

La condición suficiente es inmediata.

■

Cuando a recorre el intervalo $] -\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$, C se mueve por toda la recta real. Este hecho nos lleva a expresar las soluciones en función de C .

Finalmente, las curvas elásticas clavadas en la esfera punteada de dimensión 2 y radio $1/2$ son aquellas curvas con curvatura

$$k(s) = C \operatorname{cn} \left(\sqrt{2 + \frac{C^2}{2}} (s - s_0), \rho \right),$$

donde $s_0, C \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias y $\rho^2 = \frac{C^2}{2C^2+8}$.

Para obtener la anterior expresión se ha tenido en cuenta que el coseno elíptico de Jacobi es par y que, cuando el argumento del mismo es real, la función se encuentra bien definida en \mathbb{R} .

Esta familia de elásticas pertenece a la clase de las elásticas ondulatorias, que son aquellas cuya curvatura toma tanto valores negativos como positivos. Cada una de estas curvas oscila en torno a una geodésica en la esfera de dimensión dos. Véase [35].

1.3.5 M no compacta

Este apartado recoge los casos en los que $M = \mathbb{S}^1 \times]a_1, \infty[$ y $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. En ninguno de ellos podemos asegurar que toda solución sea un solitón del sigma modelo, por lo que tras obtener los puntos críticos de \mathfrak{S} , vamos a tener que estudiar cuál es el valor del funcional sobre cada uno de ellos.

Tenemos que prestar una especial atención a los puntos simétricos. Para ello hemos de recordar que siempre que una superficie tenga frontera, nosotros estamos considerando la frontera como parte de la superficie. Este comentario cobra sentido a la luz del siguiente estudio. Sea α una curva diferenciable en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$, cuya traza en $\mathbb{S}^2(1/2)$ tiene como frontera a $\{m\}$. Tenemos entonces dos posibilidades:

- Si α no es una curva cerrada en $\mathbb{S}^2(1/2)$, entonces $\Phi^{-1}(\alpha)$ es una superficie en \mathbb{R}^3 que tiene al eje z como parte de su frontera. El interior

de la superficie está foliado por circunferencias de Villarceau de primera especie, sin embargo el eje z no es una circunferencia de Villarceau. Teniendo en cuenta el comentario hecho al principio del párrafo, afirmamos que no estamos interesados en este tipo de superficies.

- Si α es una curva cerrada en $\mathbb{S}^2(1/2)$, entonces $E_o \circ \Pi^{-1}(\alpha)$ es una superficie sin frontera en \mathbb{R}^3 que contiene al eje z . Por lo tanto tampoco nos interesan este tipo de superficies.

Estamos ya en disposición de hablar del espacio de puntos simétricos. Las demostraciones de las dos siguientes afirmaciones son similares a la hecha en el caso en el que $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2]$, por lo que vamos a omitirlas. Cuando $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, \infty[$ el espacio de puntos simétricos se identifica con

$$\Sigma_{\mathbb{S}^1 \times [a_1, \infty[} = \{M_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) / \alpha : [a_1, \infty[\longrightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\} \text{ p.p.a.,}$$

$$\text{no cerrada, con } \alpha(a_1) = \Phi(\Gamma) \text{ y } \alpha'(a_1) = \pm \frac{d\Phi_p(\nu(p))}{\|d\Phi_p(\nu(p))\|},$$

donde p es un punto cualquiera de Γ . Cuando $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ el espacio de puntos simétricos se puede identificar fácilmente con

$$\Sigma_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} = \{M_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) / \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\} \text{ p.p.a. y no cerrada}\}.$$

Si miramos la definición de punto crítico en el caso en el que M no es compacta y tenemos en cuenta el desarrollo hecho para $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2]$, obtenemos el siguiente corolario del Teorema 1.3.4.

Corolario 1.3.11 ▪ *Las soluciones del problema variacional $(I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, \infty[, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}); \mathfrak{S})$ que están foliadas por circunferencias de Villarceau de primera especie, se corresponden con las superficies M_α pertenecientes a $\Sigma_{\mathbb{S}^1 \times [a_1, \infty[}$ tales que α es una elástica en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ (siendo el parámetro de la elástica 4).*

- *Las soluciones de $(I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}); \mathfrak{S})$ que están foliadas por circunferencias de Villarceau de primera especie, se corresponden con las superficies $M_\alpha \in \Sigma_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}}$ cuya curva generatriz, α , es una elástica en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ (siendo el parámetro 4).*

A continuación vamos a ver que, usando Gauss-Bonnet, es fácil probar que ninguno de dichos puntos críticos es un solitón de nuestro sigma modelo.

Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ una curva elástica (con parámetro $\lambda = 4$) que no es cerrada y está parametrizada por su longitud de arco. Y sea M_α la superficie en \mathbb{R}^3 que es proyección estereográfica del tubo de Hopf sobre α . Entonces, dada $\phi \in I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$ tal que $\text{Im}(\phi) = M_\alpha$, tenemos que

$$\mathfrak{S}(M_\alpha) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \|dN_\phi\|^2 dA_\phi = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{S}^1 \times [n, n+1]} \|dN_\phi\|^2 dA_\phi.$$

Aplicando Gauss-Bonnet a cada trozo y teniendo en cuenta la orientación de la frontera de cada trozo, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(M_\alpha) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(2\mathfrak{W}(M_{\alpha|_{[n, n+1]}}) - \int_{\partial M_{\alpha|_{[n, n+1]}}} k^\alpha ds \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\mathfrak{W}(M_{\alpha|_{[-n, n]}}) - \int_{\partial M_{\alpha|_{[-n, n]}}} k^\alpha ds \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado que por ser la serie de términos positivos, podemos sumarla. En la próxima sección probaremos que

$$\left| \int_{\Phi^{-1}(s_o)} k^\alpha ds \right| < 2\pi,$$

para cualquier $s_o \in \mathbb{R}$. Utilizando este hecho y basándonos en el desarrollo del caso compacto con borde, concluimos que

$$\mathfrak{S}(M_\alpha) > \pi \int_{\mathbb{R}} (k^2 + 4) ds - 4\pi.$$

Por lo tanto M_α no es un solitón del sigma modelo.

En el caso en el que $M = \mathbb{S}^1 \times [a_1, \infty[$ hemos de tomar una curva elástica (con parámetro $\lambda = 4$), parametrizada por su longitud de arco, que no sea cerrada y definida en $[a_1, \infty[$. Se puede seguir un razonamiento similar al del caso anterior, que tan solo se diferencia de éste en que nos aparece la integral de la curvatura de la frontera de M_α .

Todo el desarrollo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.12 *No existen solitones del sigma modelo foliados por circunferencias de Villarceau de primera especie, cuya imagen en \mathbb{R}^3 sea no compacta.*

Nota 1.3.13 *Hemos de volver a recordar que estamos trabajando con superficies con frontera, en el sentido de que si una superficie tiene frontera, siempre vamos a considerar que ésta forma parte de la superficie.*

Nota 1.3.14 *Notemos que el mismo resultado es válido para las circunferencias de Villarceau de segunda especie.*

1.4 La carga de los solitones

Cuando M no tiene frontera y es un plano topológico, los solitones del sigma modelo pueden ser clasificados en sectores homotópicos caracterizados por un número que recibe el nombre de carga topológica, véanse [41] y [48]. Cuando tratamos este sigma modelo usando teoría de superficies, esto es, identificando las variables dinámicas con la aplicación de Gauss de inmersiones en \mathbb{R}^3 , la carga topológica no es sino $\frac{1}{4\pi}$ por la curvatura de Gauss total. El anterior funcional definido en el caso en el que M es una superficie cualquiera, recibe el nombre de funcional carga. El objetivo de esta sección es calcular la imagen de dicho funcional para los solitones foliados por circunferencias de Villarceau. Vamos a trabajar tan solo con circunferencias de Villarceau de primera especie; el desarrollo para las de segunda especie es análogo al que vamos a hacer.

El funcional carga

Sea $\phi \in I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3)$ y sea $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ su aplicación de Gauss. Llamamos $d\sigma^2$ al elemento de volumen métrico de \mathbb{S}^2 con la métrica usual. Recordemos que estamos notando por dA_ϕ al elemento de volumen métrico de $(M, \phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle)$ y por G_ϕ a su curvatura de Gauss. En este ambiente se tiene que el funcional carga es

$$\Omega : I_\Gamma(M, \mathbb{R}^3) \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \Omega(\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_M G_\phi dA_\phi.$$

$G_\phi dA_\phi = N^*(d\sigma^2)$, por lo tanto este funcional compara el área de la imagen esférica de $\phi(M)$, vía su aplicación de Gauss, con el área total de la esfera. En particular, cuando ϕ es un solitón y $\Gamma = \emptyset$, ya hemos comentado que la carga del mismo es interpretada físicamente como la carga topológica del solitón.

Los solitones que hemos obtenido en la sección anterior portan cargas que pueden ser holográficamente determinadas, vía la Fórmula de Gauss-Bonnet, a partir de las condiciones de frontera. El caso de los solitones compactos sin frontera foliados por circunferencias de Villarceau es muy sencillo. Al ser $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, el Teorema de Gauss-Bonnet nos asegura que para todo solitón ϕ se tiene que

$$\Omega(\phi) = 0.$$

Veamos qué es lo que ocurre con el caso compacto con frontera. Dado $\phi \in I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [s_1, s_2], \mathbb{R}^3)$ un solitón del sigma modelo foliado por circunferencias de Villarceau de primera especie y con condiciones de frontera ($\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}, N_o$), su carga viene dada por

$$\Omega(\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_M G_\phi dA_\phi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} k_i ds,$$

donde las curvas γ_i están orientadas de modo que su normal apunta a $\phi(M)$. Calculemos cuánto vale el lado derecho de la anterior expresión.

Es claro que toda circunferencia de Villarceau de primera especie en \mathbb{R}^3 interseca al semiplano abierto $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ en tan solo un punto. Además, sabemos que dos circunferencias cualesquiera de Villarceau de la misma clase no se intersecan. Entonces todo punto del anterior semiplano determina de forma única una circunferencia de Villarceau de primera especie. Dado $p = (x, 0, z)$ con $x > 0$, llamemos γ_p a la circunferencia de Villarceau de primera especie que pasa por p . Tomemos a partir de ahora $\zeta_o = (0, 0, 0, 1)$. Si

$$E_o^{-1}(x, 0, z) = (x_1, 0, x_2, y_2) = \left(\frac{2x}{x^2 + z^2 + 1}, 0, \frac{2z}{x^2 + z^2 + 1}, \frac{x^2 + z^2 - 1}{x^2 + z^2 + 1} \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \gamma_p(t) &= E_o(e^{it}x_1, e^{it}(x_2 + iy_2)) = \\ &= \frac{(x_1 \cos t, x_1 \sin t, x_2 \cos t - y_2 \sin t)}{1 - x_2 \sin t - y_2 \cos t}, \quad \text{para } t \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

La velocidad de γ_p viene dada por

$$\|\gamma'_p(t)\| = \frac{1}{1 - x_2 \sin t - y_2 \cos t},$$

y por tanto la longitud y el radio de la circunferencia de Villarceau que pasa por p son, respectivamente,

$$L_p = \int_{-\pi}^{\pi} \|\gamma'_p(t)\| dt = \pi \frac{1 + \|p\|^2}{x} \quad \text{y} \quad r_p = \frac{1 + \|p\|^2}{2x}.$$

Veamos ahora que a pesar de que γ_p tiene curvatura constante en \mathbb{R}^3 , en general su función curvatura en $\phi(M)$ no es constante.

Lema 1.4.1 *Sea $E_o(\mathcal{T})$ la proyección estereográfica de un tubo de Hopf y sea $\gamma = E_o(\mathbf{C}')$ una circunferencia de Villarceau en \mathbf{N} . La curvatura geodésica de γ en \mathbf{N} es*

$$k(s) = \frac{-2}{1 + \|\gamma(s)\|^2} \langle \gamma(s), \nu(s) \rangle,$$

donde recordemos que $\nu(s)$ es el campo determinado por $N(s) = \gamma'(s) \wedge \nu(s)$, siendo N la aplicación de Gauss de $E_o(\mathcal{T})$.

Demostración: Denotemos por \tilde{g} a la métrica en \mathcal{T} inducida por la métrica usual en la esfera de dimensión tres y consideremos esta otra métrica en \mathcal{T} , $\hat{g} = E_o^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. \tilde{g} y \hat{g} son conformes, en concreto, $\hat{g} = \mathfrak{f} \tilde{g}$ donde \mathfrak{f} es la restricción a \mathcal{T} del factor conforme asociado a E_o .

La función curvatura de γ en $E_o(\mathcal{T})$ es justamente la de \mathbf{C}' en (\mathcal{T}, \hat{g}) y puede ser obtenida de una forma sencilla en términos de la función curvatura de \mathbf{C}' en (\mathcal{T}, \tilde{g}) y de la variación normal del factor conforme. Si además tenemos en cuenta que \mathbf{C}' es una geodésica en (\mathcal{T}, \tilde{g}) , obtenemos que la curvatura es

$$k(s) = -\frac{1}{2(\mathfrak{f} \circ E_o^{-1})(\gamma(s))} \langle \nabla(\mathfrak{f} \circ E_o^{-1})(\gamma(s)), \nu(s) \rangle,$$

donde ∇ es el $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -gradiente. Ahora recordamos que el factor conforme compuesto con la inversa de la proyección estereográfica vale

$$(\mathfrak{f} \circ E_o^{-1})(p) = \left(\frac{1 + \|p\|^2}{2} \right)^2,$$

y por tanto

$$\nabla(f \circ E_o^{-1})(\gamma(s)) = (1 + \|\gamma(s)\|^2) \gamma(s),$$

lo que concluye la prueba del lema.

■

Nota 1.4.2 Hemos de resaltar que todos los cálculos en la demostración de este lema son válidos para el caso en el que \mathcal{T} es un levantamiento de una curva en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ vía la aplicación Π_- , y en consecuencia, para las circunferencias de Villarceau de segunda especie.

La curvatura total de una circunferencia de Villarceau de primera especie en un solitón, se puede calcular usando el lema anterior y la velocidad que hemos obtenido.

$$\int_{\gamma} k(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} k(t) \|\gamma'(t)\| dt = - \int_{-\pi}^{\pi} \langle \gamma(t), \nu(t) \rangle dt.$$

De acuerdo con las condiciones de frontera admisibles (véase el apartado 1.3.1) el campo normal unitario a lo largo de $\gamma(t)$ se puede obtener a partir de $\nu(0) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ de la siguiente forma

$$\nu(t) = \frac{d\varphi_t(\nu(0))}{\|d\varphi_t(\nu(0))\|} = \frac{dE_o(e^{it} dE_o^{-1}(\nu(0)))}{\|dE_o(e^{it} dE_o^{-1}(\nu(0)))\|}.$$

El integrando de la expresión de la curvatura total se puede obtener haciendo un largo cálculo que involucra la naturaleza conforme de E_o , en términos de los siguientes datos

$$E_o^{-1}(\gamma(0)) = (x_1, 0, x_2, y_2) \quad \text{y} \quad dE_o^{-1}(\nu(0)) = (u_1, v_1, u_2, v_2),$$

con $x_1 u_1 + x_2 u_2 + y_2 v_2 = x_1 v_1 - y_2 u_2 + x_2 v_2 = 0$, ya que $(u_1, v_1, u_2, v_2) \in T_{(x_1, 0, x_2, y_2)} \mathbb{S}^3$ y es además un vector horizontal. El resultado es

$$\langle \gamma(t), \nu(t) \rangle = \frac{u_2 \sin t + v_2 \cos t}{(1 - y_2)(1 - y_2 \cos t - x_2 \sin t)}.$$

Como consecuencia directa de esta expresión y de la fórmula de la curvatura de una circunferencia de Villarceau en un solitón, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.4.3 *Dado un solitón del sigma modelo foliado por circunferencias de Villarceau, ninguna de dichas circunferencias es una geodésica en el solitón.*

Nota 1.4.4 *A pesar de lo que afirma la anterior proposición, la curvatura total de una circunferencia de Villarceau en un solitón foliado por dicho tipo de circunferencias sí que puede anularse. Veamos un ejemplo: tomemos la circunferencia de Villarceau que pasa por el punto $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y un campo N_o cualquiera a lo largo de la curva, su curvatura total es*

$$\int_{\gamma} k(s) ds = - \int_{-\pi}^{\pi} \langle \gamma(t), \nu(t) \rangle dt = - \int_{-\pi}^{\pi} (u_2 \sin t + v_2 \cos t) dt = 0.$$

Calculemos por fin la curvatura total de cualquier circunferencia de Villarceau en un solitón foliado por dicho tipo de circunferencias. En la nota anterior hemos visto lo que ocurre cuando $x_1 = 1$, asumamos ahora que $x_1 < 1$ (y por tanto $x_2^2 + y_2^2 > 0$) y hagamos el cambio $\tau = \tan \frac{t}{2}$ para obtener

$$\int_{-\pi}^{\pi} \langle \gamma(t), \nu(t) \rangle ds = \frac{2}{1 - y_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-v_2 \tau^2 + 2u_2 \tau + v_2}{((1 + y_2)\tau^2 - 2x_2 \tau + 1 - y_2)(1 + \tau^2)} d\tau.$$

Recordemos que y_2 nunca vale 1, ya que $(0, 0, 0, 1)$ es el polo de la proyección estereográfica con la que estamos trabajando. Ésta es una integral racional que es fácilmente calculable

$$\int_{\gamma} k(s) ds = 2\pi \frac{u_1}{(1 - y_2)(1 + x_1)}.$$

La anterior fórmula ha sido calculada para el caso en el que $x_1 < 1$, pero puede comprobarse que funciona también para el caso en el que $x_1 = 1$. La parte derecha de la misma puede ser transformada en términos de $p = (x, 0, z)$ y $\nu(0) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ usando que

$$x_1 = \frac{1}{r}, \quad y_2 = \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1}, \quad u_1 = \frac{2\nu_1(\|p\|^2 + 1) - 4x\langle p, \nu(0) \rangle}{(\|p\|^2 + 1)^2},$$

para llegar a la siguiente expresión

$$\int_{\gamma} k(s) ds = -\frac{2\pi}{1 + r} \langle p - \tilde{p}, \nu(0) \rangle,$$

donde $\tilde{p} = (r, 0, 0)$.

Veamos ahora las consecuencias de los cálculos realizados. La primera de ellas es que ahora podemos controlar la curvatura total de una circunferencia de Villarceau embebida en la proyección estereográfica de un tubo de Hopf.

Teorema 1.4.5 *Sea $E_o(\mathcal{T})$ la proyección estereográfica de un tubo de Hopf y sea $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow E_o(\mathcal{T})$ la circunferencia de Villarceau determinada por el punto $p \in \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$; llamemos r a su radio. En estas condiciones, la curvatura total de esta curva en $E_o(\mathcal{T})$ cumple*

$$\int_{\gamma} k(s) ds \in \left[-2\pi \sqrt{\frac{r-1}{r+1}}, 2\pi \sqrt{\frac{r-1}{r+1}} \right].$$

Además, la curvatura total de γ alcanza su máximo si, y solo si, la aplicación de Gauss de $E_o(\mathcal{T})$ a lo largo de γ es

$$N_o(\gamma(t)) = - \frac{d\varphi_t \left(\gamma'(0) \wedge \frac{p-\tilde{p}}{\|p-\tilde{p}\|} \right)}{\|d\varphi_t \left(\gamma'(0) \wedge \frac{p-\tilde{p}}{\|p-\tilde{p}\|} \right)\|},$$

y alcanza su mínimo si, y solo si,

$$N_o(\gamma(t)) = + \frac{d\varphi_t \left(\gamma'(0) \wedge \frac{p-\tilde{p}}{\|p-\tilde{p}\|} \right)}{\|d\varphi_t \left(\gamma'(0) \wedge \frac{p-\tilde{p}}{\|p-\tilde{p}\|} \right)\|},$$

donde $\tilde{p} = (r, 0, 0)$.

Demostración: La demostración del teorema es una consecuencia directa de expresar el producto que aparece en la fórmula de la curvatura total como el producto del módulo del primero, por el módulo del segundo, por el ángulo que forman ambos vectores.

■

Nota 1.4.6 *La primera parte de este teorema sigue siendo cierto cuando \mathcal{T} es el levantamiento de una curva en $\mathbb{S}^2(1/2) \setminus \{m\}$ vía la aplicación Π_- . En este caso, la curvatura total de γ alcanza su máximo y su mínimo si, y*

solo si, la aplicación de Gauss de $E_o(\mathcal{T})$ a lo largo de γ es respectivamente

$$N_o(\gamma(t)) = \mp \frac{d\chi_t \left(\gamma'(0) \wedge \frac{p-\tilde{p}}{\|p-\tilde{p}\|} \right)}{\|d\chi_t \left(\gamma'(0) \wedge \frac{p-\tilde{p}}{\|p-\tilde{p}\|} \right)\|},$$

donde $\tilde{p} = (r, 0, 0)$.

Corolario 1.4.7 *Dada una circunferencia de Villarceau γ en \mathbb{R}^3 de radio r , y dado cualquier valor $\varrho \in \left[-2\pi\sqrt{\frac{r-1}{r+1}}, 2\pi\sqrt{\frac{r-1}{r+1}}\right]$, existe un único campo N_o a lo largo de γ y un solitón $\phi \in I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$ con condiciones de frontera que incluyan a (γ, N_o) , tal que la curvatura total de γ en $\phi(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2])$ toma el valor ϱ .*

La segunda de las consecuencias obtenidas de los cálculos de este apartado es que la carga de cualquier solitón puede ser calculada.

Teorema 1.4.8 *Sea $\phi \in I_\Gamma(\mathbb{S}^1 \times [a_1, a_2], \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\})$ un solitón del sigma modelo con condiciones de frontera $(\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}, N_o)$. ϕ porta una carga dada por*

$$\Omega(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\langle p_i - \tilde{p}_i, N_o \wedge \gamma'_i(0) \rangle}{1 + r_i},$$

donde r_i es el radio de γ_i y $\tilde{p}_i = (r_i, 0, 0)$.

Ciertamente, podemos fijar un par de circunferencias de Villarceau $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ y mover luego la aplicación de Gauss a lo largo de ellas para obtener, de acuerdo con el Teorema 1.4.5 y la nota 1.4.6, el máximo y el mínimo de la carga.

Superficies rotacionales en \mathbb{L}^3

2.1 Inmersiones no degeneradas en \mathbb{L}^3

Considerando en \mathbb{R}^3 la métrica $g = dx^2 + dy^2 - dz^2$ se obtiene el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski de dimensión tres, \mathbb{L}^3 . Sus elementos se notarán con una flecha cuando sean considerados como vectores, es decir, un punto y su vector de posición serán representados por la misma letra y serán distinguidos por una flecha.

Fijadas una orientación y otra temporal en \mathbb{L}^3 , se puede definir el cono causal como $\mathbf{C} = \{\vec{v} \neq 0 : g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0\}$. Éste tiene dos componentes conexas, el cono futuro al que representamos por \mathbf{C}^\uparrow y el cono pasado que será notado por \mathbf{C}^\downarrow .

Sea M una superficie diferenciable (recordemos que, en todos los contextos, por diferenciable entendemos de clase \mathcal{C}^∞). Una inmersión, $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$, se dice que es *no degenerada* si la métrica que induce en M , a partir de g , es no degenerada, es decir, si $d\varphi_p(T_p M)$ es un plano no degenerado en \mathbb{L}^3 para todo $p \in M$. Toda inmersión no degenerada puede ser orientada al menos localmente. Las inmersiones no degeneradas pueden ser agrupadas en dos clases según el carácter causal, $\varepsilon_\varphi = g(N_\varphi, N_\varphi)$, de su campo normal unitario, N_φ .

Inmersiones Lorentzianas (también llamadas temporales): aquellas en las que $\varepsilon_\varphi = 1$. En este caso (M, φ^*g) es una superficie Lorentziana y el normal a la inmersión puede ser visto como una aplicación de la superficie M en el espacio de de Sitter de dimensión 2, la aplicación de Gauss

$$N_\varphi : M \rightarrow \mathbb{S}_1^2 = \{p \in \mathbb{L}^3 : g(\vec{p}, \vec{p}) = 1\},$$

siendo \vec{p} el vector de posición de p .

Inmersiones Riemannianas (también conocidas como espaciales):

son las que tienen $\varepsilon_\varphi = -1$. En este caso (M, φ^*g) es una superficie Riemanniana cuya aplicación de Gauss toma valores en el plano hiperbólico

$$N_\varphi : M \longrightarrow \mathbb{H}^2 = \{p \in \mathbf{C}^\dagger \subset \mathbb{L}^3 : g(\vec{p}, \vec{p}) = -1\}.$$

Realmente la imagen de N_φ está en una de las dos componentes conexas de \mathbb{H}^2 .

Para más detalles consúltese [42].

2.2 Rotaciones en \mathbb{L}^3

Las isometrías vectoriales de \mathbb{L}^3 son las transformaciones de Lorentz. Éstas forman un grupo, $\text{Iso}(\mathbb{L}^3)$, cuya representación matricial será notada por $O^1(3)$. Obsérvese que $\text{Iso}(\mathbb{L}^3)$ es el grupo de isometrías de ambas superficies \mathbb{S}_1^2 y \mathbb{H}^2 .

Una transformación de Lorentz se dice *propia y ortocrona* si conserva la orientación y la orientación temporal. Estas transformaciones forman un subgrupo de $\text{Iso}(\mathbb{L}^3)$

$$\text{Iso}^{+\uparrow}(\mathbb{L}^3) = \{f \in \text{Iso}(\mathbb{L}^3) : \det(f) = 1, f(\mathbf{C}^\dagger) = \mathbf{C}^\dagger\}.$$

Su representación matricial es un subgrupo de $O^1(3)$ al que notaremos por $(O^1(3))^{+\uparrow}$.

Es conocido que toda transformación de Lorentz admite un vector propio con valor propio 1 ó -1 . Así, dado $\vec{x} \in \mathbb{L}^3$, parece natural preguntar por las transformaciones de Lorentz propias y ortocronas que dejan fijo a dicho vector. Éstas forman un subgrupo de $\text{Iso}^{+\uparrow}(\mathbb{L}^3)$ al que notaremos por $A_{\vec{x}}$, y llamaremos *grupo de rotaciones con eje* $\langle \vec{x} \rangle = \text{Span}\{\vec{x}\}$. Este grupo actúa de manera natural sobre \mathbb{L}^3 . Las órbitas de dicha acción dependen fuertemente del carácter causal del eje de rotación.

(1) Eje temporal. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que \vec{x} es unitario. Ampliamos $\{\vec{x}\}$ hasta obtener una base ortonormal positivamente orientada, $\mathcal{B} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, de \mathbb{L}^3 y trabajamos en coordenadas

con respecto a dicha base. En este caso la representación matricial del grupo $A_{\vec{x}}$ es

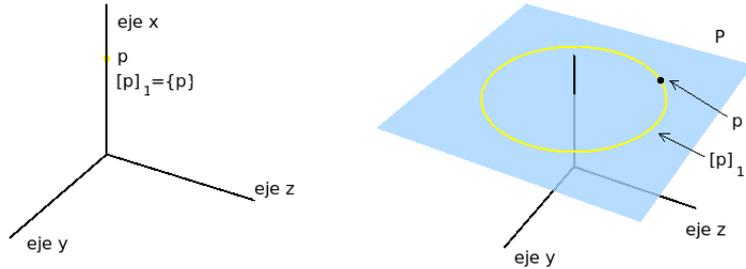
$$\mathbf{A}_1 = \{1\} \times O^+(2) = \left\{ \mu_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Estudiemos las órbitas de la acción de este grupo sobre \mathbb{L}^3 . Dado un punto $p = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{L}^3$, denotemos por P al plano Riemanniano ortogonal a $\langle \vec{x} \rangle$ que pasa por el punto p . La órbita de p bajo la acción de \mathbf{A}_1 es

$$[p]_1 = \{(a_1, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 + z^2 = a_2^2 + a_3^2\},$$

esto es, la circunferencia en P con centro $(a_1, 0, 0)$ y que pasa por p . En el caso en el que $a_2 = a_3 = 0$ dicha circunferencia degenera en un punto. Debido al tipo de órbitas que produce la acción de \mathbf{A}_1 , a los elementos de este grupo se les llama *movimientos elípticos* o *rotaciones puras*.

Los siguientes dibujos ilustran los dos casos anteriores, en ellos hemos tomado $\vec{x} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$, $\vec{y} = \overrightarrow{(1, 0, 0)}$ y $\vec{z} = \overrightarrow{(0, 1, 0)}$, donde (a, b, c) son coordenadas respecto de la base usual de \mathbb{L}^3 .



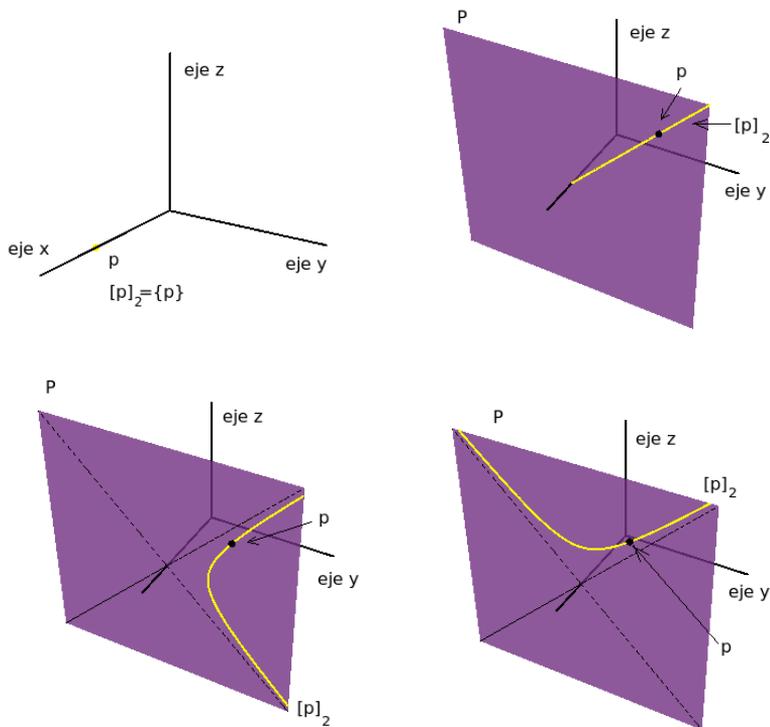
- (2) **Eje espacial.** De nuevo podemos suponer que \vec{x} es unitario. Tomamos una base ortonormal positivamente orientada en \mathbb{L}^3 cuyo primer vector sea \vec{x} , $\mathcal{B} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ (habitualmente supondremos que \vec{z} es temporal). Si trabajamos en coordenadas con respecto a dicha base el grupo $A_{\vec{x}}$ se identifica con el siguiente subgrupo de $O_1^{+\uparrow}(3)$

$$\mathbf{A}_2 = \{1\} \times O_1^{+\uparrow}(2) = \left\{ \xi_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dado $p = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{L}^3$, de nuevo llamamos P al plano Lorentziano que pasa por p y es ortogonal a \vec{x} . Es claro que la órbita de p , $[p]_2$, está contenida en P .

- Si $a_2 = a_3 = 0$, entonces $[p]_2 = \{p\}$.
- En el caso en el que $a_2^2 = a_3^2 \neq 0$, la órbita de p es la semirrecta abierta que parte de $(a_1, 0, 0)$ y pasa por p , esto es, $[p]_2 = \{(a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) : 0 < \lambda\}$, la cual es una curva luminosa en \mathbb{L}^3 .
- Si $a_2^2 \neq a_3^2$, entonces la órbita de p es la rama de la hipérbola $\{(a_1, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 - z^2 = a_2^2 - a_3^2\}$ que pasa por él. Si el vector de posición de $(0, a_2, a_3)$ es temporal, entonces $[p]_2$ es una curva espacial en \mathbb{L}^3 , y si $(0, a_2, a_3)$ tiene vector de posición espacial, obtendremos una órbita temporal; distinguiendo así dos tipos de órbitas distintas dentro de este caso.

Las transformaciones de \mathbf{A}_2 se conocen como *movimientos hiperbólicos* o *rotaciones hiperbólicas*.



Los dibujos anteriores ilustran los cuatro tipos de órbitas posibles en el caso en el que el eje es espacial. En ellos hemos tomado $\vec{x} = \overrightarrow{(1, 0, 0)}$, $\vec{y} = \overrightarrow{(0, 1, 0)}$ y $\vec{z} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$, donde (a, b, c) son coordenadas respecto de la base usual de \mathbb{L}^3 .

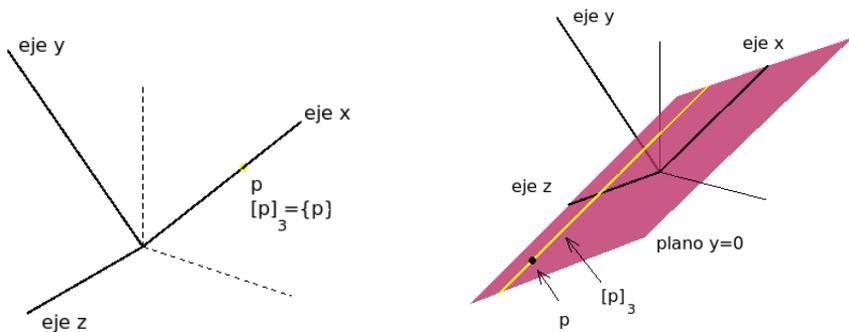
- (3) **Eje luminoso.** Si \vec{x} es un vector luminoso, elegimos una base de \mathbb{L}^3 , $\mathcal{B} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, tal que \vec{y} es un vector luminoso que satisface $g(\vec{x}, \vec{y}) = -1$ y \vec{z} es un vector espacial unitario que es ortogonal al plano generado por \vec{x} e \vec{y} . Así, en coordenadas con respecto a esta base, es fácil ver que $A_{\vec{x}}$ se identifica con el siguiente subgrupo de $O_1^{+\uparrow}(3)$

$$A_3 = \left\{ \varsigma_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}t^2 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

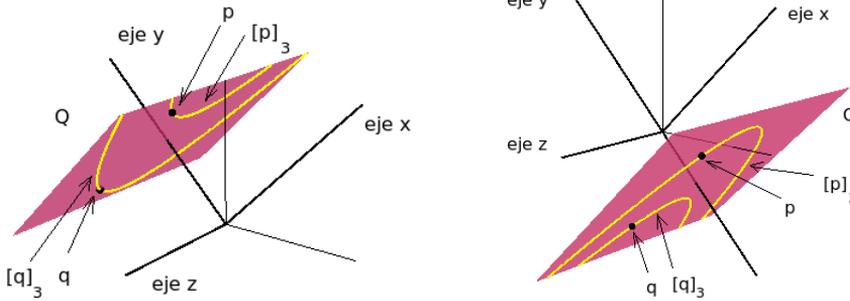
En el análisis de órbitas consideramos varios casos. Sea $p = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{L}^3$.

- Si $a_2 = a_3 = 0$, entonces $[p]_3 = \{p\}$.
- Cuando $a_2 = 0$ y $a_3 \neq 0$, la órbita de p es la recta luminosa $[p]_3 = \{(t, 0, a_3) : t \in \mathbb{R}\}$.
- Si $a_2 \neq 0$, entonces $[p]_3$ es una parábola espacial que está contenida en el plano degenerado $Q = \{(x, a_2, z) \in \mathbb{L}^3 : x, z \in \mathbb{R}\}$. En concreto, $[p]_3 = \{(x, a_2, z) \in \mathbb{L}^3 : x = \frac{1}{2a_2}z^2 + a_1 - \frac{a_3^2}{2a_2}\}$.

A las transformaciones de Lorentz de este grupo se les llama *movimientos parabólicos* o *rotaciones parabólicas*.



Las imágenes anteriores, junto con las dos siguientes, muestran los cuatro tipos de órbitas que existen en el caso en el que el eje es luminoso. En ellas hemos tomado $\vec{x} = (0, 1, 1)$, $\vec{y} = (0, -1, 1)$ y $\vec{z} = (1, 0, 0)$, donde (a, b, c) son coordenadas respecto de la base usual de \mathbb{L}^3 .



2.3 El problema principal

El objetivo de este capítulo es el de resolver el siguiente problema.

Dado $\vec{x} \in \mathbb{L}^3$, ¿qué superficies no degeneradas inmersas en \mathbb{L}^3 son invariantes por la acción de $A_{\vec{x}}$?

Puesto que la acción de $A_{\vec{x}}$ sobre \mathbb{L}^3 depende exclusivamente del carácter causal de \vec{x} , vamos a dividir el capítulo en tres secciones que se corresponden con los casos en que \vec{x} es temporal, espacial y luminoso, respectivamente.

A partir de ahora siempre que hablemos de superficies en \mathbb{L}^3 estaremos tratando con superficies conexas, de clase C^∞ e inmersas. Además, utilizaremos las palabras rotación y revolución indistintamente.

2.4 Superficies de rotación en \mathbb{L}^3 con eje temporal (A_1 -invariantes)

Salvo un cambio de coordenadas, las superficies de revolución inmersas en \mathbb{L}^3 con eje temporal coinciden con las superficies de revolución inmersas en el espacio Euclídeo, \mathbb{R}^3 . Lo único que tenemos que tener en cuenta ahora es que la curva generatriz ha de ser no degenerada. Como las órbitas bajo la

acción de \mathbf{A}_1 son espaciales, concluimos que cuando la curva generatriz es espacial, obtenemos una superficie espacial, mientras que curvas generatrices temporales dan lugar a superficies temporales.

2.5 Superficies rotacionales en \mathbb{L}^3 con eje espacial (\mathbf{A}_2 -invariantes)

Dado un vector espacial unitario \vec{x} , tomemos una base ortonormal, $\mathcal{B} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, que lo contenga como primer vector y cuyo tercer vector sea temporal. Vamos a trabajar en coordenadas respecto a dicha base, siendo entonces el eje de revolución $\langle \vec{x} \rangle \equiv \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, al cual notaremos por *eje x*. El objetivo de esta sección es obtener las superficies de revolución inmersas en \mathbb{L}^3 con el *eje x* como eje de revolución, o lo que es lo mismo, salvo movimientos, las inmersiones \mathbf{A}_2 -invariantes.

Los planos $\{(x, y, y) \in \mathbb{L}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$ y $\{(x, y, -y) \in \mathbb{L}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$ son los dos únicos planos degenerados que contienen al *eje x*. Entonces, \mathbb{L}^3 menos estos dos planos queda dividido en cuatro regiones abiertas a las que llamaremos *regiones fundamentales*. A las superficies \mathbf{A}_2 -invariantes inmersas en una de estas regiones las llamaremos *superficies fundamentales de revolución con eje espacial* (a veces nos referiremos a ellas como superficies fundamentales).

Es ampliamente sabido que si tomamos una curva diferenciable no degenerada, γ , inmersa bien en $\text{Span}\{\vec{x}, \vec{y}\}$ o en $\text{Span}\{\vec{x}, \vec{z}\}$, la superficie parametrizada como

$$X(s, t) = \xi_t(\gamma(s)),$$

es \mathbf{A}_2 -invariante. Este tipo de superficies son las que han sido llamadas a lo largo de la literatura superficies de revolución con eje espacial (véase por ejemplo [31]) y veremos que coinciden con aquellas a las que nosotros les hemos puesto el apellido de fundamentales.

La pregunta que nos planteamos ahora es la siguiente:

¿existen superficies de revolución con eje espacial que intersequen a más de una región fundamental?

La respuesta es afirmativa. En cierto sentido, estas superficies de revolución con eje espacial se obtienen pegando superficies fundamentales. Se pueden encontrar ejemplos de ellas entre las superficies clásicas embebidas en \mathbb{R}^3 , por ejemplo el paraboloides hiperbólico y el hiperboloide de revolución en

\mathbb{R}^3 . A pesar de ello, esta clase de superficies no había sido estudiada hasta el momento. En esta sección vamos a proceder a su estudio, describiendo así la clase completa de superficies inmersas en \mathbb{L}^3 que son invariantes por la acción de A_2 . Dividiremos dicho estudio en varias subsecciones.

Antes de comenzar, necesitamos una definición que juega un papel importante a lo largo de esta sección.

Definición 2.5.1 *Dada una curva no degenerada, γ , inmersa en un plano no degenerado de \mathbb{L}^3 que contenga al eje x , llamamos superficie de revolución (o de rotación, o rotacional) con eje espacial generada por γ a $\Sigma_\gamma := \{\xi_t(\text{Traza}(\gamma)) : t \in \mathbb{R}\}$.*

Nota 2.5.2 Σ_γ puede no ser una superficie topológica, ya que cada vez que la curva cruza el eje de revolución, ningún punto de dicha intersección admite un entorno homeomorfo a un abierto de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.

2.5.1 Regiones fundamentales y superficies fundamentales

Recordemos que hemos tomado una base ortonormal en \mathbb{L}^3 con respecto a la cual estamos trabajando.

Regiones fundamentales

En $\mathbb{L}^3 \setminus \text{eje } x$ distinguimos las siguientes regiones, a las que llamaremos **regiones fundamentales**

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z^2 - y^2 > 0, z > 0\}, \\ \mathcal{R}^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z^2 - y^2 > 0, z < 0\}, \\ \mathcal{Q}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z^2 - y^2 < 0, y > 0\}, \text{ y} \\ \mathcal{Q}^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z^2 - y^2 < 0, y < 0\}. \end{aligned}$$

Definición 2.5.3 *Decimos que una superficie en \mathbb{L}^3 es una superficie fundamental de revolución con eje espacial eje x , si es invariante bajo la acción de A_2 y está contenida en una sola de las cuatro regiones fundamentales.*

Si consideramos $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y = 0\}$ y $\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z = 0\}$, podemos definir los siguientes semiplanos abiertos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}^+ &= \mathcal{R}^+ \cap \mathcal{R} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{L}^3 : z > 0\}, \\ \tilde{\mathcal{R}}^- &= \mathcal{R}^- \cap \mathcal{R} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{L}^3 : z < 0\}, \\ \tilde{\mathcal{Q}}^+ &= \mathcal{Q}^+ \cap \mathcal{Q} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\}, \\ \tilde{\mathcal{Q}}^- &= \mathcal{Q}^- \cap \mathcal{Q} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{L}^3 : y < 0\}, \\ \mathcal{P}^{++} &= (\partial\mathcal{R}^+ \cap \partial\mathcal{Q}^+) \setminus eje\ x = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y = z > 0\}, \\ \mathcal{P}^{+-} &= (\partial\mathcal{R}^+ \cap \partial\mathcal{Q}^-) \setminus eje\ x = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : -y = z > 0\}, \\ \mathcal{P}^{-+} &= (\partial\mathcal{R}^- \cap \partial\mathcal{Q}^+) \setminus eje\ x = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : -y = z < 0\}, \text{ y} \\ \mathcal{P}^{--} &= (\partial\mathcal{R}^- \cap \partial\mathcal{Q}^-) \setminus eje\ x = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y = z < 0\}.\end{aligned}$$

También vamos a trabajar con las siguientes ramas de hipérbolas, a las que llamaremos circunferencias unitarias en el plano de Lorentz $x \equiv 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^+ &= \{(0, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z^2 - y^2 = 1, z > 0\}, \\ \mathcal{H}^- &= \{(0, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z^2 - y^2 = 1, z < 0\}, \\ \mathcal{J}^+ &= \{(0, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 - z^2 = 1, y > 0\}, \text{ y} \\ \mathcal{J}^- &= \{(0, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 - z^2 = 1, y < 0\}.\end{aligned}$$

Notemos que mientras que \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- son espaciales y heredan de \mathbb{L}^3 la métrica dt^2 , \mathcal{J}^+ y \mathcal{J}^- son temporales y su métrica inducida es $-dt^2$.

A continuación definimos las siguientes funciones positivas

$$\begin{aligned}f_+ : \tilde{\mathcal{R}}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_+(x, 0, z) &= z, \\ f_- : \tilde{\mathcal{R}}^- &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_-(x, 0, z) &= -z, \\ h_+ : \tilde{\mathcal{Q}}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}, & h_+(x, y, 0) &= y, \text{ y} \\ h_- : \tilde{\mathcal{Q}}^- &\longrightarrow \mathbb{R}, & h_-(x, y, 0) &= -y.\end{aligned}$$

En este contexto, es fácil ver que las siguientes descomposiciones como productos alabeados son ciertas

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}^+, g) &= (\tilde{\mathcal{R}}^+, g) \times_{f_+} (\mathcal{H}^+, dt^2), \\ (\mathcal{R}^-, g) &= (\tilde{\mathcal{R}}^-, g) \times_{f_-} (\mathcal{H}^-, dt^2), \\ (\mathcal{Q}^+, g) &= (\tilde{\mathcal{Q}}^+, g) \times_{h_+} (\mathcal{J}^+, -dt^2), \text{ y} \\ (\mathcal{Q}^-, g) &= (\tilde{\mathcal{Q}}^-, g) \times_{h_-} (\mathcal{J}^-, -dt^2).\end{aligned}$$

Es más, cuando hacemos los cambios conformes obvios, obtenemos que:

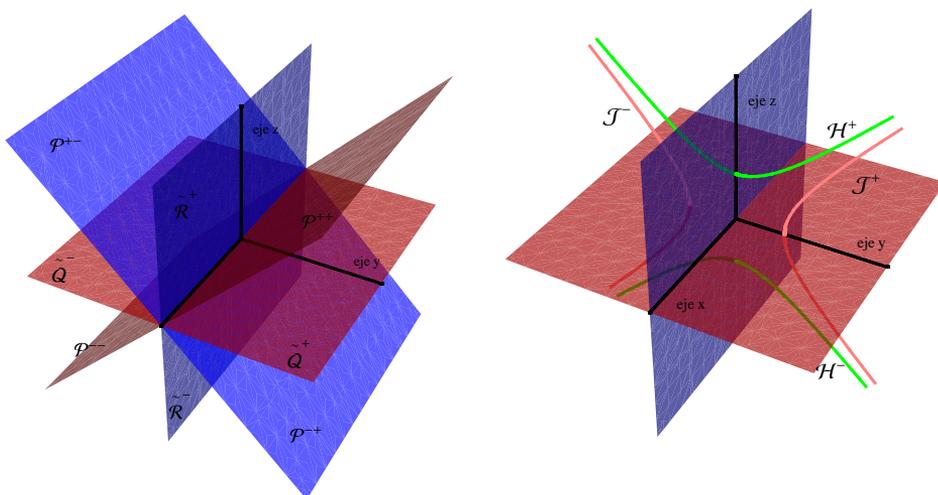
- $\left(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g\right)$ y $\left(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g\right)$ son planos de de Sitter (esto es, superficies Lorentzianas con curvatura constante positiva) con curvatura 1, y
- $\left(\tilde{\mathcal{Q}}^+, \frac{1}{h_+^2}g\right)$ y $\left(\tilde{\mathcal{Q}}^-, \frac{1}{h_-^2}g\right)$ son planos hiperbólicos con curvatura -1 .

Como consecuencia podemos enunciar el siguiente resultado.

Lema 2.5.4 1. $\left(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g\right)$ y $\left(\mathcal{R}^-, \frac{1}{f_-^2}g\right)$ son productos semi-Riemannianos de un plano de de Sitter y una circunferencia unitaria espacial en un plano de Lorentz perpendicular al eje de revolución.

2. $\left(\mathcal{Q}^+, \frac{1}{h_+^2}g\right)$ y $\left(\mathcal{Q}^-, \frac{1}{h_-^2}g\right)$ son productos semi-Riemannianos de un plano hiperbólico y una circunferencia unitaria temporal en un plano de Lorentz perpendicular al eje de revolución.

Los dos siguientes dibujos ilustran la notación introducida en este apartado. En ellos, así como en el resto de los dibujos de la Sección 2.5, hemos tomado $\vec{x} = (1, 0, 0)$, $\vec{y} = (0, 1, 0)$ y $\vec{z} = (0, 0, 1)$, donde (a, b, c) son coordenadas en la base usual de \mathbb{L}^3 .



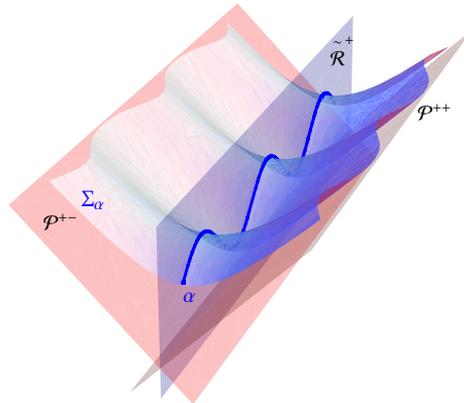
2.5.2 Superficies Riemannianas de revolución con eje espacial

Parece lógico comenzar el estudio de las superficies \mathbf{A}_2 -invariantes centrándonos en las superficies fundamentales. Primero afrontaremos el caso Riemanniano y a continuación el Lorentziano. En el primer caso vamos a ver que no existen más superficies Riemannianas de revolución con eje espacial que las fundamentales.

Teorema 2.5.5 *Sea M una superficie C^∞ conexa (con o sin frontera) y sea $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ una inmersión C^∞ . Entonces $\varphi(M)$ es una superficie Riemanniana y \mathbf{A}_2 -invariante si, y solo si, existe una curva espacial, α , inmersa bien en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ o en $\tilde{\mathcal{R}}^-$, tal que $\varphi(M) = \Sigma_\alpha$. En particular dichas superficies están inmersas en \mathcal{R}^+ o \mathcal{R}^- , respectivamente.*

Demostración: La condición suficiente es conocida. Para probar la otra implicación, asumamos que $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ es una inmersión Riemanniana y \mathbf{A}_2 -invariante, por lo que $\varphi(M)$ está entonces foliada por órbitas espaciales. Si tenemos en cuenta que las órbitas en $\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-$ son temporales y las contenidas en $\mathcal{P}^{++} \cup \mathcal{P}^{+-} \cup \mathcal{P}^{-+} \cup \mathcal{P}^{--}$ son luminosas, tenemos que $\varphi(M) \subset \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^- \cup \text{eje } x$. Por lo tanto, existe una curva espacial, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$, tal que $\varphi(M) = \{\xi_t(\alpha(s)) : s \in I, t \in \mathbb{R}\}$. Usando la nota 2.5.2 concluimos que si $\alpha(I) \cap \tilde{\mathcal{R}}^+ \neq \emptyset$, entonces $\alpha(I) \subset \tilde{\mathcal{R}}^+$.

■



En el anterior dibujo podemos observar una superficie fundamental Rie-

manniana generada por una curva espacial en $\tilde{\mathcal{R}}^+$, junto con los planos que delimitan la región \mathcal{R}^+ .

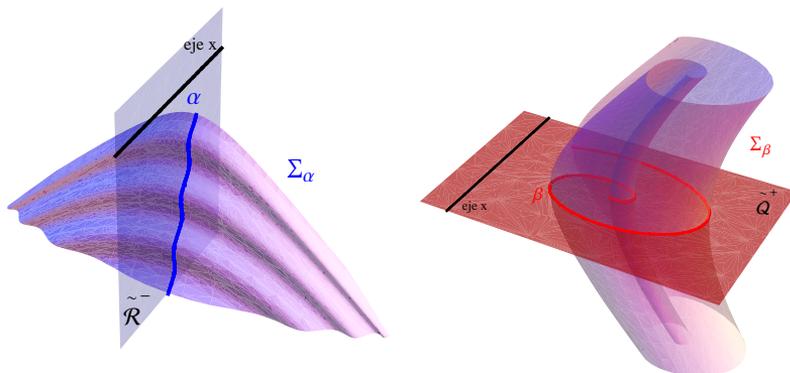
2.5.3 Superficies fundamentales Lorentzianas y ejemplos de superficies Lorentzianas de revolución no fundamentales

En el caso Lorentziano, el comportamiento es muy diferente, comenzando por el hecho de que es posible encontrar superficies A_2 -invariantes Lorentzianas en cada una de las cuatro regiones fundamentales. Esto es lo que nos dice el resultado que viene a continuación, cuya prueba es trivial.

Teorema 2.5.6 *Sea M una superficie C^∞ conexa (con o sin frontera) y sea $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ una inmersión C^∞ cuya imagen está contenida en una región fundamental. Entonces φ es Lorentziana y A_2 -invariante si, y solo si, se da uno de los siguientes cuatro casos:*

- *Existe una curva temporal, $\alpha : I \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}^+$, tal que $\varphi(M) = \Sigma_\alpha$;*
- *Existe una curva temporal, $\alpha : I \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}^-$, tal que $\varphi(M) = \Sigma_\alpha$;*
- *Existe una curva espacial, $\beta : J \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}^+$, tal que $\varphi(M) = \Sigma_\beta$;*
- *Existe una curva espacial, $\beta : J \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}^-$, tal que $\varphi(M) = \Sigma_\beta$.*

Nota 2.5.7 *Notemos que pedir a una curva en \mathcal{Q}^+ o en \mathcal{Q}^- que sea espacial es redundante, ya que ambos semi-planos son Riemannianos.*



Los casos segundo y cuarto del teorema quedan ilustrados en los dibujos anteriores.

Nos planteamos ahora la cuestión de la existencia de más superficies de revolución con eje espacial y Lorentzianas aparte de las descritas en el teorema anterior. Para responder afirmativamente a esta cuestión y para dar una idea de cómo vamos a abordar el estudio de estas nuevas superficies, mostramos los dos siguientes ejemplos de superficies \mathbf{A}_2 -invariantes Lorentzianas que intersecan más de una región fundamental.

Ejemplo 2.5.8 La silla de montar o paraboloides hiperbólico

En \mathbb{L}^3 consideramos la superficie,

$$\mathbf{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x = y^2 - z^2 > -\frac{1}{4} \right\},$$

la cual admite la siguiente parametrización como grafo sobre un abierto del plano $x \equiv 0$

$$X : \{(y, z) : z^2 - y^2 < \frac{1}{4}\} \longrightarrow \mathbf{S} \subset \mathbb{L}^3, \quad X(y, z) = (y^2 - z^2, y, z).$$

\mathbf{S} es una superficie Lorentziana inmersa en \mathbb{L}^3 , de hecho, hemos tomado solo el abierto del paraboloides hiperbólico en el que la métrica inducida es Lorentziana. Esta superficie es además invariante bajo la acción de \mathbf{A}_2 y es claro que interseca a las cuatro regiones fundamentales, siendo la intersección con cada una de dichas regiones una superficie fundamental Lorentziana, concretamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cap \mathcal{R}^+ &= \Sigma_{\alpha^+}, & \text{donde } \alpha^+ : (0, 1/2) &\rightarrow \tilde{\mathcal{R}}^+, \quad \alpha^+(s) = (-s^2, 0, s), \\ \mathbf{S} \cap \mathcal{R}^- &= \Sigma_{\alpha^-}, & \text{donde } \alpha^- : (-1/2, 0) &\rightarrow \tilde{\mathcal{R}}^-, \quad \alpha^-(s) = (-s^2, 0, s), \\ \mathbf{S} \cap \mathcal{Q}^+ &= \Sigma_{\beta^+}, & \text{donde } \beta^+ : (0, +\infty) &\rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}^+, \quad \beta^+(s) = (s^2, s, 0), \text{ y} \\ \mathbf{S} \cap \mathcal{Q}^- &= \Sigma_{\beta^-}, & \text{donde } \beta^- : (-\infty, 0) &\rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}^-, \quad \beta^-(s) = (s^2, s, 0). \end{aligned}$$

Es evidente que estas cuatro superficies pueden ser pegadas a lo largo de su frontera para obtener \mathbf{S} . A pesar de que el mecanismo de pegado es trivial en este caso, vamos a describirlo para motivar la posterior extensión de este procedimiento. Trabajamos en un entorno de la frontera de las cuatro piezas. En primer lugar notemos que realmente tenemos dos curvas diferenciables:

- una temporal inmersa en \mathcal{R} : $\alpha(s) = (f_\alpha(s), 0, s) = (-s^2, 0, s)$,

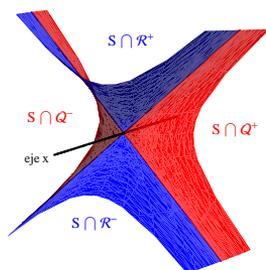
- y una (espacial) en $\mathcal{Q}: \beta(s) = (f_\beta(s), s, 0) = (s^2, s, 0)$,

definidas ambas en $(-\delta, \delta)$, con $\delta \in (0, 1/2)$. Entonces, en términos de las funciones f_α y f_β , se puede definir una función de pegado de las cuatro piezas en un entorno de sus fronteras. En efecto

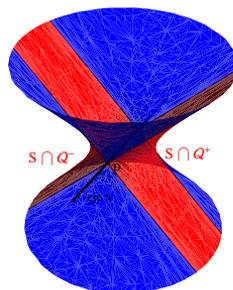
$$\mathbf{F}: \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |z^2 - y^2| < \delta^2\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbf{F}(y, z) = \left\{ \begin{array}{ll} f_\alpha \left(\text{sign}(z) \sqrt{z^2 - y^2} \right) = y^2 - z^2 & \text{si } z^2 \geq y^2, \\ f_\beta \left(\text{sign}(y) \sqrt{y^2 - z^2} \right) = y^2 - z^2 & \text{si } y^2 \geq z^2, \end{array} \right\} = y^2 - z^2.$$

\mathbf{F} es la función grafo con la que construimos la parametrización X de \mathbf{S} .



Paraboloide hiperbólico



Hiperboloide de una hoja

Ejemplo 2.5.9 Un hiperboloide de una hoja o de revolución en \mathbb{R}^3

En \mathbb{L}^3 consideramos el siguiente hiperboloide de una hoja

$$\mathbf{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Es fácil ver que ésta es una superficie A_2 -invariante y Lorentziana. Es también claro que esta superficie no está contenida en ninguna de las cuatro regiones fundamentales y que las interseca a todas ellas. Esta vez tenemos seis piezas en lugar de cuatro, tal y como se puede apreciar en la imagen. Si llamamos $p = (1, 0, 0)$ y $q = (-1, 0, 0)$ a los puntos de intersección de \mathbf{H} con el eje x , se puede ver que la frontera de estas seis piezas son las cuatro órbitas luminosas que confluyen en p y las cuatro que confluyen en q . Por lo tanto esta vez tenemos que pegar dos veces.

Primero trabajamos alrededor de p , para ello tomamos δ en el intervalo $]0, 1[$ y definimos:

- una curva temporal inmersa en \mathcal{R} :

$$\alpha_p : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{R}, \quad \alpha_p(s) = (f_{\alpha_p}(s), 0, s) = (+\sqrt{1+s^2}, 0, s),$$

- y una curva (espacial) en \mathcal{Q} :

$$\beta_p : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{Q}, \quad \beta_p(s) = (f_{\beta_p}(s), s, 0) = (+\sqrt{1-s^2}, s, 0).$$

Notemos que dichas curvas satisfacen $\alpha_p(0) = \beta_p(0) = p$. Tal y como hicimos en el ejemplo anterior, definimos una función de pegado usando las funciones f_{α_p} y f_{α_q} :

$$\mathbf{F}_p : \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |z^2 - y^2| < \delta^2\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbf{F}_p(y, z) = \left\{ \begin{array}{ll} f_{\alpha_p} \left(\text{sign}(z) \sqrt{z^2 - y^2} \right) = +\sqrt{1 - y^2 + z^2} & \text{si } z^2 \geq y^2, \\ f_{\beta_p} \left(\text{sign}(y) \sqrt{y^2 - z^2} \right) = +\sqrt{1 - y^2 + z^2} & \text{si } y^2 \geq z^2. \end{array} \right\}$$

En términos de esta función podemos definir una parametrización de \mathbf{H} en un entorno de las órbitas luminosas que confluyen en p :

$$\mathbf{X}_p : \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |z^2 - y^2| < \delta^2\} \longrightarrow \mathbf{H} \subset \mathbb{L}^3,$$

$$\mathbf{X}_p(y, z) = (\mathbf{F}_p(y, z), y, z) = \left(+\sqrt{1 - y^2 + z^2}, y, z \right).$$

Si en lugar de utilizar la raíz positiva tomamos la negativa, podemos pegar las piezas de \mathbf{H} alrededor de q .

2.5.4 Disección de una superficie Lorentziana de revolución con eje espacial

A lo largo de esta sección M va a ser una superficie \mathcal{C}^∞ conexa (con o sin frontera) y $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{L}^3$ una inmersión \mathcal{C}^∞ Lorentziana, tal que $\varphi(M)$ es \mathbf{A}_2 -invariante. Vamos a utilizar cirugía para estudiar la intersección de esta superficie con cada una de las regiones fundamentales y también con $\mathcal{P}^{++} \cup \mathcal{P}^{+-} \cup \mathcal{P}^{-+} \cup \mathcal{P}^{--}$. Las siguientes afirmaciones son fáciles de comprobar.

1. La intersección $\varphi(M) \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-)$ es o bien vacía, o bien una unión numerable de superficies fundamentales Lorentzianas que están generadas por curvas temporales inmersas en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ o en $\tilde{\mathcal{R}}^-$, esto es,

$$\varphi(M) \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-) = \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}} \Sigma_{\alpha_e} \right) \cup \left(\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \Sigma_{\alpha_f} \right),$$

donde $\{\alpha_e : e \in \mathcal{E}\}$ y $\{\alpha_f : f \in \mathcal{F}\}$ son familias numerables de curvas temporales en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ y $\tilde{\mathcal{R}}^-$, respectivamente.

2. La intersección $\varphi(M) \cap (\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-)$ es o bien vacía, o bien una unión numerable de superficies fundamentales Lorentzianas con curvas generadoras inmersas en $\tilde{\mathcal{Q}}^+$ o en $\tilde{\mathcal{Q}}^-$, esto es,

$$\varphi(M) \cap (\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Sigma_{\beta_\lambda} \right) \cup \left(\bigcup_{\theta \in \Theta} \Sigma_{\beta_\theta} \right),$$

donde $\{\beta_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ y $\{\beta_\theta : \theta \in \Theta\}$ son familias numerables de curvas inmersas en $\tilde{\mathcal{Q}}^+$ y $\tilde{\mathcal{Q}}^-$, respectivamente.

3. El conjunto $\varphi(M) \cap (\mathcal{P}^{++} \cup \mathcal{P}^{+-} \cup \mathcal{P}^{-+} \cup \mathcal{P}^{--})$ es vacío o es una familia numerable de semi-rectas luminosas que son órbitas bajo la acción de \mathbf{A}_2 y que forman parte de la frontera de las superficies \mathbf{A}_2 -invariantes Lorentzianas mencionadas en los dos puntos anteriores.

Las superficies de revolución fundamentales ya las conocemos, así que nos vamos a centrar en el estudio de las no fundamentales. Teniendo en cuenta esto, junto con la nota 2.5.2, suponemos que $\varphi(M) \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-) \neq \emptyset$ y $\varphi(M) \cap (\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-) \neq \emptyset$.

Una vez diseccionada la superficie, estudiemos primero las curvas inmersas en \mathcal{R} , luego las curvas en \mathcal{Q} y por último cómo se conectan ambos tipos de curvas.

Estudio de las curvas generatrices inmersas en \mathcal{R}

Usando un argumento de conexión, así como el carácter Lorentziano de \mathcal{R} y el hecho de que φ es una inmersión, podemos afirmar que las curvas generatrices inmersas en \mathcal{R} cumplen:

- [R1] Para cada $\alpha \in \{\alpha_e : e \in \mathcal{E}\} \cup \{\alpha_f : f \in \mathcal{F}\}$, existe $U_\alpha \subseteq M$ subvariedad conexa tal que $\varphi(U_\alpha) = \Sigma_\alpha$. Además, si existe más de una subvariedad cumpliendo lo anterior, consideramos en $\{\alpha_e : e \in \mathcal{E}\} \cup \{\alpha_f : f \in \mathcal{F}\}$ tantas copias de α como subvariedades haya, y las nombramos con subíndices distintos.
- [R2] Si $\alpha \in \{\alpha_e : e \in \mathcal{E}\} \cup \{\alpha_f : f \in \mathcal{F}\}$, entonces α es maximal en el sentido de que no existe ninguna subvariedad conexa, $V \subseteq M$, tal que $U_\alpha \subseteq V$ y $\varphi(V)$ no interseque al eje x .

[R3] Algunas curvas de $\{\alpha_e : e \in \mathcal{E}\} \cup \{\alpha_f : f \in \mathcal{F}\}$ pueden ser pegadas para obtener curvas temporales \mathcal{C}^∞ o \mathcal{C}^∞ a trozos en \mathcal{R} . Veamos cómo. Dado un punto en el eje de revolución, p , si existen $e \in \mathcal{E}$ y $f \in \mathcal{F}$ tales que:

- a) p pertenece a la frontera de las curvas α_e y α_f , y
- b) existe $U \subseteq M$ abierto y conexo, tal que $U \cap \varphi^{-1}(\mathcal{R}^+) = U_{\alpha_e}$ y $U \cap \varphi^{-1}(\mathcal{R}^-) = U_{\alpha_f}$,

entonces dichas curvas se pueden pegar dando lugar a una curva temporal en \mathcal{R} , que será \mathcal{C}^∞ si $p \in \varphi(M)$. En el caso en el que $p \notin \varphi(M)$, podemos asegurar la diferenciabilidad en todo punto salvo en p , donde solo tenemos continuidad.

[R4] Veamos que el procedimiento anterior no se puede seguir con dos curvas pertenecientes a la misma familia. Supongamos que dos curvas $\alpha_1, \alpha_2 \in \{\alpha_e : e \in \mathcal{E}\}$ cumplen las condiciones para ser pegadas. Entonces $\Sigma_{\alpha_1} \cup \Sigma_{\alpha_2}$ es una superficie diferenciable Lorentziana que interseca a \mathcal{P}_+^+ a lo largo de una órbita luminosa y además está contenida en uno de los subespacios cerrados determinados por \mathcal{P}_+^+ . De aquí concluimos que \mathcal{P}_+^+ es el plano tangente a $\Sigma_{\alpha_1} \cup \Sigma_{\alpha_2}$ a lo largo de la citada órbita luminosa. Y esto constituye una contradicción ya que \mathcal{P}_+^+ es un plano degenerado. La demostración para la otra familia de curvas es análoga.

[R5] Tras llevar a cabo todos los procesos de pegado, obtenemos una familia numerable de curvas en \mathcal{R} que son temporales y \mathcal{C}^∞ a trozos (los puntos en los que no podemos asegurar la diferenciabilidad son aquellos que cumplen $p \notin \varphi(M)$ y $p \in \text{eje } x$). Notaremos por $\{\alpha_i : i \in \mathcal{I}\}$ a esta familia, y por $J_i \subseteq \mathbb{R}$ al intervalo de definición de cada α_i .

[R6] Por ser \mathcal{R} un plano Lorentziano, deducimos que para cada $i \in \mathcal{I}$ existe un único $s_i \in \text{Clausura}(J_i)$ tal que $p_i = \lim_{s \rightarrow s_i} \alpha(s)$ pertenece al *eje* x . Si s_i no pertenece a la frontera de J_i , entonces en p_i la curva cambia de región fundamental.

Finalmente podemos afirmar que

$$\varphi(M) \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Sigma_{\alpha_i},$$

donde $\Sigma_{\alpha_i} = \{\xi_t(\alpha_i(s)) : t \in \mathbb{R}, \alpha_i(s) \notin \text{eje } x\}$.

Nota 2.5.10 *Notemos que Σ_{α_i} se corresponde con la definición 2.5, excepto en el hecho de que hemos quitado los puntos del eje. De ahora en adelante quitaremos o incluiremos los puntos del eje libremente.*

Estudio de las curvas generatrices inmersas en \mathcal{Q}

Las siguientes afirmaciones son ciertas.

[Q1] Haciendo los cambios pertinentes, [R1], [R2], [R3] y [R4] son ciertas para la familia $\{\beta_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{\beta_\theta : \theta \in \Theta\}$, salvo por un pequeño detalle: [R3] b) ha de ser sustituida por “*existe $U \subseteq M$ abierto y conexo tal que:*

- $\varphi(U) \cap \mathcal{Q}^+$ está generada por un abierto de β_λ cuya frontera está formada por p y un punto de $\tilde{\mathcal{Q}}^+$ y
- $\varphi(U) \cap \mathcal{Q}^-$ está generada por un abierto de β_θ cuya frontera está formada por p y un punto de $\tilde{\mathcal{Q}}^-$ ”.

[Q2] Tras llevar a cabo todos los procesos de pegado posibles, obtenemos una única curva continua en \mathcal{Q} que es \mathcal{C}^∞ a trozos (los puntos en los que no podemos asegurar la diferenciabilidad son aquellos que pertenecen a $eje\ x \setminus \varphi(M)$). Llamaremos a dicha curva β . Esta afirmación es consecuencia de la conexión de M y de que las curvas de la familia $\{\alpha_i : i \in \mathcal{I}\}$ solo intersecan al *eje x* una vez.

[Q3] Estudiamos ahora el dominio de definición de β , éste juega un papel determinante a la hora de explicar la relación entre β y las curvas generatrices inmersas en \mathcal{R} . Llamemos m al cardinal de $\Lambda \cup \Theta$. Si $m = 1$, por un razonamiento análogo al mostrado en [R4], concluimos que el dominio natural de definición de β es un intervalo, que es abierto en los extremos cuya imagen pertenezca al *eje x* . Supongamos ahora que $m > 1$.

- a) Si la traza de β es una curva abierta, entonces el dominio natural de definición de β es un intervalo, que es de nuevo abierto en aquellos extremos cuya imagen pertenezca al *eje x* .
- b) Si la traza de β es una curva cerrada y cada curva de $\{\beta_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{\beta_\theta : \theta \in \Theta\}$ ha sufrido un proceso de pegado en cada extremo, entonces el dominio natural de definición de β es \mathbb{S}^1 .

c) Si la traza de β es una curva cerrada y todas las curvas de $\{\beta_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{\beta_\theta : \theta \in \Theta\}$ han sufrido procesos de pegado en cada uno de sus extremos, a excepción de dos de ellas, entonces tenemos que hacer una nueva distinción de casos. Llamemos γ_1 y γ_2 a dichas curvas y p al punto en el cual no se ha podido pegar. En esta situación pueden ocurrir dos cosas:

- 1) Existen dos dominios de M disjuntos, U y V , tales que
 - $\varphi(U) \cup \varphi(V)$ es una superficie diferenciable conexa embebida en \mathbb{L}^3 ,
 - $(\varphi(U) \cup \varphi(V)) \cap \mathcal{Q}^+$ está generada por un abierto de γ_1 a cuya frontera pertenece p y
 - $(\varphi(U) \cup \varphi(V)) \cap \mathcal{Q}^-$ está generada por un abierto de γ_2 a cuya frontera pertenece p .

En este caso β sufre un nuevo proceso de pegado en p y su dominio es \mathbb{S}^1 .

- 2) Si no ocurre lo anterior, entonces el dominio natural de definición de β es un intervalo abierto.

En todos los casos llamaremos J al dominio de β .

[Q4] Cada vez que β toca al *eje x*, o bien la curva cambia de región fundamental, o bien el punto del eje es un extremo de β , o bien el punto del eje es del tipo descrito en el apartado c) 2) de la anterior propiedad.

Concluimos que

$$\varphi(M) \cap (\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-) = \Sigma_\beta.$$

Cómo están conectadas las curvas en \mathcal{R} con la curva en \mathcal{Q}

Hemos visto que $\varphi(M)$ está generado por $\{\alpha_i : J_i \rightarrow \mathcal{R} : i \in \mathcal{I}\}$ y $\beta : J \rightarrow \mathcal{Q}$. Recordemos que, para cada $i \in \mathcal{I}$, hemos llamado s_i al único elemento de la clausura de J_i en el que la curva α_i toca al *eje x*. Gracias a que M es conexa, a la nota 2.5.2 y a las propiedades que hemos visto, es fácil comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas.

P1. $\forall s_o \in J$ tal que $\beta(s_o) \in \text{eje } x$, existen $\varepsilon > 0$ e $i \in \mathcal{I}$, cumpliendo

- $\beta(s_o) \in \text{Clausura}(\text{Traza}(\alpha_i))$, y

- $\Sigma_{\beta|_{J_0}} \cup \Sigma_{\alpha_i}$ es una superficie \mathcal{C}^∞ , donde $J_0 =]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[\cap J$.

O lo que es lo mismo, para cada $s_0 \in J$ tal que $\beta(s_0) \in \text{eje } x$, existe una curva α_i que “pega bien” con β en un entorno de s_0 .

P2. $\forall i \in \mathcal{I}$, existen $\varepsilon > 0$ y $s_0 \in \text{Clausura}(J)$, tales que

- $\lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s) = \lim_{s \rightarrow s_i} \alpha(s)$, y
- $\Sigma_{\beta|_{J_0}} \cup \Sigma_{\alpha_i}$ es una superficie \mathcal{C}^∞ , donde $J_0 =]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[\cap J$.

Esto es, para cada α_i , existe $s_0 \in \text{Clausura}(J)$ de modo que β y α_i “pegan bien” en un entorno de s_0 .

Además, si en **P1** exigimos que $U_{\alpha_i^+} \cup U_{\alpha_i^-} \cup U_{\beta_i^+} \cup U_{\beta_i^-}$ sea conexo, donde $\alpha_i^\pm = \alpha_i|_{J_i \cap \mathbb{R}^\pm}$ y $\beta^\pm = \beta|_{J_0 \cap \mathbb{R}^\pm}$, entonces i es único. De igual forma garantizamos la unicidad de s_0 en **P2**.

Nota 2.5.11 *Tanto en P1 como en P2, ε es cualquier positivo menor que el mínimo de $\{|\tilde{s} - s_0| : \tilde{s} \in \text{Clausura}(J) \setminus \{s_0\}\}$ y $\lim_{s \rightarrow \tilde{s}} \beta(s) \in \text{eje } x\}$, donde $|\cdot|$ denota al valor absoluto.*

Nota 2.5.12 *Cuando consideramos la unión de $\Sigma_{\beta|_{J_0}}$ y Σ_{α_i} , estamos añadiendo además las órbitas luminosas que pertenecen a la frontera de las dos superficies y a $\varphi(M)$ (sin ellas dicha unión no es conexa).*

Gracias a **P1** y a **P2** podemos establecer dos correspondencias inyectivas,

$$\begin{aligned} & \{s_0 \in J : \beta(s_0) \in \text{eje } x\} \xrightarrow{\mathbf{P1}} \mathcal{I}, \\ \mathcal{I} & \xrightarrow{\mathbf{P2}} \{s_0 \in \text{Clausura}(J) : \lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s) \in \text{eje } x\}, \end{aligned}$$

de modo que la segunda sea la inversa por la izquierda de la primera.

En el caso en el que β tiene como dominio a \mathbb{S}^1 y en el caso en el que J es un intervalo tal que la imagen de su frontera no interseca al *eje* x , ambas correspondencias son biyectivas. En otro caso:

1. La primera de las correspondencia es biyectiva si, y solo si, para cada s en la frontera de J , no existe ninguna α_i que “pegue bien” con β en un entorno de s .
2. La segunda correspondencia es biyectiva si, y solo si, para cada uno de los dos puntos de la frontera de J cuya imagen pertenezca al *eje* x , existe una curva α_i que “pega bien” con β en dicho punto.

Estudio de las órbitas luminosas que pegan las piezas

Definición 2.5.13 Dado un punto $p = (x_o, 0, 0)$, definimos el orbital luminoso en p , \mathbf{O}_p , como el conjunto formado por p y por las cuatro órbitas luminosas que confluyen en el punto, esto es,

$$\mathbf{O}_p = \{(x_o, y, z) : y^2 = z^2\}.$$

Definición 2.5.14 Para cada $s_o \in \text{Clausura}(\mathcal{J})$ tal que $\lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s)$ pertenece al eje x , definimos el parche luminoso en s_o como

$$B_{s_o} = \mathbf{O}_{p_o} \cap \varphi(U),$$

donde $p_o = \lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s)$ y $U \subseteq M$ es un dominio que cumple:

- $\varphi(U) \cap (\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-) = \Sigma_{\beta_{\mathcal{J}_o}}, y$
- si $\exists i \in \mathcal{I}$ tal que $\mathbf{P2}(i) = s_o$, entonces $\varphi(U) \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-) = \Sigma_{\alpha_i}$.

Recordemos que $\varphi(M)$ es \mathbf{A}_2 -invariante, lo cual se traduce en que para cualquier $s_o \in \text{Clausura}(\beta)$ tal que $\lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s) \in \text{eje } x$, B_{s_o} está formado por la unión de hasta 5 de los siguientes conjuntos: $\{p_o\}$, $\{(x_o, a, a) : a > 0\}$, $\{(x_o, a, a) : a < 0\}$, $\{(x_o, -a, a) : a > 0\}$ y $\{(x_o, -a, a) : a < 0\}$, donde $p_o = (x_o, 0, 0) = \lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s)$.

RESUMEN DE LA DISECCIÓN

Dada una inmersión, $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$, Lorentziana y \mathbf{A}_2 -invariante, existen una familia de curvas temporales en \mathcal{R} , $\{\alpha_i : J_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R} : i \in \mathcal{I}\}$, y una curva en \mathcal{Q} , $\beta : J \rightarrow \mathcal{Q}$, que cumplen:

- Todas ellas son diferenciables a trozos. Los puntos en los que la diferenciablez no está asegurada son aquellos que pertenecen a $\text{eje } x \setminus \varphi(M)$.
- Para cada $i \in \mathcal{I}$, J_i es un intervalo, además, existe un único $s_i \in \text{Clausura}(J_i)$ tal que $p_i = \lim_{s \rightarrow s_i} \alpha(s)$ pertenece al eje x . Si s_i no pertenece a la frontera de J_i , entonces en p_i la curva cambia de región fundamental.

- El dominio de β , J , puede ser un intervalo, o bien \mathbb{S}^1 , véase [Q3].
- Cada vez que β toca al *eje x*, o bien la curva cambia de región fundamental, o bien dicho punto pertenece a $\{\lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s) / s_0 \in \partial J\}$.
- **P1** y **P2** son ciertas.

Además, para cada $s_0 \in \text{Clausura}(J)$ tal que $\lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s) \in \text{eje } x$, existe un conjunto, B_{s_0} , al cuál hemos llamado parche luminoso, que está formado por la unión de hasta cinco de los siguientes conjuntos: $\{p_0\}$, $\{(x_0, a, a) : a > 0\}$, $\{(x_0, a, a) : a < 0\}$, $\{(x_0, -a, a) : a > 0\}$ y $\{(x_0, -a, a) : a < 0\}$ (donde $p_0 = (x_0, 0, 0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s)$).

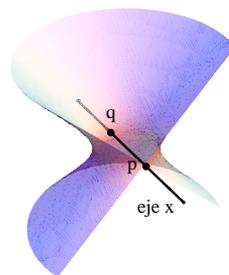
A partir de todos estos elementos, $\varphi(M)$ se recupera como

$$\varphi(M) = \Sigma_{\beta} \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Sigma_{\alpha_i} \right) \cup \left(\bigcup \{B_{s_0} : \lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s) \in \text{eje } x\} \right).$$

Ejemplo ilustrativo

Para aclarar lo que hemos hecho en este apartado, volvamos al ejemplo del hiperboloide de una hoja, **H**. Consideramos el siguiente trozo de **H**:

$$\hat{H} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1, x < 1\}$$



Esta superficie es A_2 -invariante. Si la diseccionamos, obtenemos cuatro superficies de revolución fundamentales, cada una inmersa en una región fundamental distinta.

- **Curvas generatrices inmersas en \mathcal{R} .**

$$\alpha_q^+(s) = (-\sqrt{1+s^2}, 0, s) \quad \text{y} \quad \alpha_q^-(s) = (-\sqrt{1+s^2}, 0, -s),$$

para $s > 0$, generan las superficies inmersas en \mathcal{R}^+ y \mathcal{R}^- , respectivamente. Estas curvas cumplen las condiciones para ser pegadas, dando lugar a la curva diferenciable α_q . Por lo tanto $\hat{\mathbf{H}} \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-) = \Sigma_{\alpha_q}$.

- **Curva generatriz inmersa en \mathcal{Q} .** $\hat{\mathbf{H}} \cap \mathcal{Q}^+$ está generado por la siguiente curva en $\tilde{\mathcal{Q}}^+$:

$$\beta^+ : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}^+, \quad \beta^+(s) = (\cos(s), \text{sen}(s), 0),$$

mientras que $\hat{\mathbf{H}} \cap \mathcal{Q}^-$ está generado por

$$\beta^- : (-3\pi/2, -\pi/2) \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}^-, \quad \beta^-(s) = (\cos(s), \text{sen}(s), 0).$$

Estas curvas cumplen las condiciones necesarias para ser pegadas en torno a $q = (-1, 0, 0)$. Veamos qué ocurre en torno a $p = (1, 0, 0)$. No existe ningún dominio $U \subseteq \hat{\mathbf{H}}$ de modo que $U \cap \mathcal{Q}^+$ esté generada por un abierto de β^+ que solo toque al *eje x* en p . Por lo tanto, las curvas no pueden ser pegadas en un entorno de p . A la curva resultante la llamamos β . La traza de β , incluyendo a p , es una circunferencia, sin embargo es fácil ver que no existen dos dominios de $\hat{\mathbf{H}}$ disjuntos, U_1 y U_2 , tales que $U_1 \cup U_2$ sea una superficie conexa embebida en \mathbb{L}^3 en un entorno de p . Por lo tanto tratamos a β (sin incluir p) como una curva abierta, siendo su dominio de definición $J = (-3\pi/2, \pi/2)$.

- **Cómo están conectadas las curvas en \mathcal{R} con la curva en \mathcal{Q} .** Las curvas α y β cumplen las propiedades **P1** y **P2**. Notemos que la elección correcta de J es determinante para realizar esta afirmación.
- **Órbitas luminosas que pegan las piezas.** Existen dos puntos de la clausura del dominio de β cuya imagen pertenece al *eje x*: $p = \lim_{s \rightarrow \pi/2} \beta(s)$ y $q = \beta(-\pi/2)$. Es fácil ver que $B_{\pi/2} = \emptyset$ y $B_{-\pi/2} = \mathbf{O}_q$.

Finalmente podemos decir que $\hat{\mathbf{H}} = \Sigma_{\alpha_q} \cup \Sigma_{\beta} \cup \mathbf{O}_p \cup \mathbf{O}_q$.

2.5.5 Caracterización del pegado de dos superficies de revolución fundamentales

Ya sabemos que una superficie Lorentziana, \mathbf{A}_2 -invariante, es la unión de superficies Lorentzianas de revolución generadas por curvas en \mathcal{R} y una curva en \mathcal{Q} , junto con una familia de órbitas luminosas. Lo que ahora queremos saber es cuándo la unión de dos superficies Lorentzianas de revolución, da lugar a una superficie diferenciable Lorentziana \mathbf{A}_2 -invariante. Esto es,

dadas una curva temporal, α , inmersa en \mathcal{R} y una curva, β , inmersa en \mathcal{Q} , ¿qué condiciones han de cumplir estas curvas para que la unión de Σ_α y Σ_β sea una superficie diferenciable Lorentziana, conexa y \mathbf{A}_2 -invariante?

Lo primero que hemos de exigir a α y a β es que las clausuras de sus trazas tengan al menos un punto en común. Si utilizamos que dicha intersección está contenida en el *eje x*, junto con el hecho de que α es temporal, concluimos que esta intersección tiene cardinal 1. Llamemos p_o a su único elemento.

Sea s_o un elemento en la clausura del dominio de β , que cumple $p_o = \lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s)$. Vamos a restringir el dominio de β a un entorno de s_o en el que $\lim_{s \rightarrow \tilde{s}} \beta(s) \notin \text{eje } x$, para $\tilde{s} \neq s_o$. Esta restricción no supone ninguna pérdida de generalidad, ya que sólo dicho entorno es relevante en el proceso de pegado de Σ_β y Σ_α .

El tercer paso a seguir es elegir un subconjunto del orbital de p_o que haga el papel de parche luminoso, esto es, un conjunto que sea \mathbf{A}_2 -invariante y que cumpla que $\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup B_o$ sea una superficie topológica conexa.

En este contexto, el siguiente resultado nos da las condiciones necesarias y suficientes para que $\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup B_o$ sea diferenciable y Lorentziana.

Teorema 2.5.15 (Teorema de pegado local) *En el contexto de esta sección, Σ_α y Σ_β pegan de forma diferenciable a lo largo de B_o y la métrica a lo largo de B_o es Lorentziana, esto es, $\Sigma = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup B_o$ es una superficie diferenciable Lorentziana, si, y solo si, existen funciones diferenciables f_α y f_β cumpliendo las siguientes afirmaciones:*

LG1. $(f_\alpha(u), 0, u)$ es una parametrización de α en un entorno de p_o .

LG2. $(f_\beta(u), u, 0)$ es una parametrización de β en un entorno de p_o .

LG3. La siguiente función definida en un entorno de $\{(y, z) : (x_o, y, z) \in B_o\}$, donde $(x_o, 0, 0) = p_o$,

$$F(y, z) = \left\{ \begin{array}{ll} f_\alpha \left(\text{sign}(z) \sqrt{z^2 - y^2} \right) & \text{si } z^2 \geq y^2, \\ f_\beta \left(\text{sign}(y) \sqrt{y^2 - z^2} \right) & \text{si } y^2 \geq z^2, \end{array} \right\}$$

*es diferenciable. F se llama **función de pegado**.*

Demostración: Asumamos que Σ es una superficie diferenciable Lorentziana en un entorno de B_o y probemos *LG1*, *LG2* y *LG3*. Dividimos la prueba de las condiciones necesarias en dos casos:

Caso 1: Supongamos que ninguna de las dos curvas cruza el eje *eje x*. Entonces cada una de ellas está inmersa en una región fundamental a la que hay que unirle el eje. En este caso podemos considerar sin pérdida de generalidad que $\text{Traza}(\alpha) \subseteq \tilde{\mathcal{R}}^+ \cup \text{eje } x$ y $\text{Traza}(\beta) \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}^+ \cup \text{eje } x$, ya que la prueba para los otros casos es análoga.

Probamos *LG1*.

Tomemos una parametrización por la longitud de arco de la curva α , $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s))$, que cumpla que $p_o = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha(s)$. Entonces tenemos que $\alpha_3'(s)^2 = \alpha_1'(s)^2 + 1 > 0$, lo que nos permite aplicar el Teorema de la Función Inversa a α_3 . Este teorema nos asegura la existencia de $\rho > 0$ tal que $\alpha_3 :]0, \rho[\rightarrow \alpha_3(]0, \rho[)$ es un difeomorfismo. Por otro lado sabemos que $\lim_{s \rightarrow 0} \alpha_3(s) = 0$ y que $\alpha_3 > 0$, es entonces inmediata la existencia de $\varrho_\alpha > 0$ tal que $\alpha_3(]0, \rho[) =]0, \varrho_\alpha[$. Tomando $f_\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_3^{-1}$, tenemos que *LG1* es cierto.

Probamos *LG2*.

Trabajemos ahora con la curva β . Tomamos una parametrización de la curva por su longitud de arco, $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), 0)$, que además cumpla que $\lim_{s \rightarrow 0} \beta(s) = p_o$. Consideramos ahora la siguiente parametrización de la superficie Σ_β ,

$$X_\beta(s, t) := \xi_t(\beta(s)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(s) \\ \beta_2(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nuestro objetivo es probar que $\lim_{s \rightarrow 0} \beta_2'(s) \neq 0$, para poder así utilizar el mismo razonamiento usado con α . Supongamos que no es cierto, y lleguemos a una contradicción. Démonos cuenta de que, independientemente de la elección que hagamos de B_o , la órbita luminosa $\{(x_o, y, y) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\}$ está siempre contenida en B_o . Dado un punto en dicha órbita, $q = (x_o, a, a)$ con $a > 0$, sea

$$\gamma_q(\tau) = X_\beta(s_q(\tau), t_q(\tau)) =$$

$$(\beta_1(s_q(\tau)), \beta_2(s_q(\tau)) \cosh(t_q(\tau)), \beta_2(s_q(\tau)) \sinh(t_q(\tau)))$$

una curva diferenciable que cumple $\lim_{\tau \rightarrow 0} \gamma_q(\tau) = q$.

Supongamos que $\lim_{\tau \rightarrow 0} s_q(\tau) = b \neq 0$, entonces $q = \lim_{\tau \rightarrow 0} \gamma_q(\tau) \in \{(\beta_1(b), y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 - z^2 = (\beta_2(b))^2 \neq 0\}$, lo cual contradice el hecho de que q pertenezca a la órbita luminosa $\{(x_o, y, y) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\}$. De aquí deducimos que $\lim_{\tau \rightarrow 0} s_q(\tau) = 0$. Como $\beta_2(0) = 0$, tenemos que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \cosh(t_q(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sinh(t_q(\tau)) = +\infty. \quad (2.1)$$

Por otro lado, es fácil comprobar que el normal Riemanniano a la superficie, N_R , a lo largo de la curva γ_q es:

$$N_R(\gamma_q(\tau)) = \frac{(\beta'_2(s_q(\tau)), -\beta'_1(s_q(\tau)) \cosh(t_q(\tau)), \beta'_1(s_q(\tau)) \sinh(t_q(\tau)))}{\sqrt{\beta'_2(s_q(\tau))^2 + \beta'_1(s_q(\tau))^2 (\cosh^2(t_q(\tau)) + \sinh^2(t_q(\tau)))}}$$

donde por normal Riemanniano entendemos el normal a la superficie cuando la consideramos inmersa en \mathbb{R}^3 . Si ahora utilizamos que $\lim_{s \rightarrow 0} \beta'_2(s) = 0$, junto con (2.1), obtenemos que

$$N_R(q) = \lim_{\tau \rightarrow 0} N_R(\gamma_q(\tau)) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Esto implica que $T_q \Sigma$ es un plano degenerado, lo que nos lleva a contradicción. Por lo tanto, $\lim_{s \rightarrow 0} \beta'_2(s) \neq 0$ y ahora podemos razonar tal y como hicimos con α , para llegar a la conclusión de que $LG2$ es cierto.

Probamos $LG3$.

Definamos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |z^2 - y^2| < \varrho^2, (x_o, y, z) \in \mathcal{R}^+ \cup \mathcal{Q}^+ \cup B_o\}, \\ \Omega_\alpha &= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |z^2 - y^2| < \varrho^2, (x_o, y, z) \in \mathcal{R}^+\}, \\ \Omega_\beta &= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : |z^2 - y^2| < \varrho^2, (x_o, y, z) \in \mathcal{Q}^+\}, \end{aligned}$$

siendo ϱ el mínimo de $\{\varrho_\alpha, \varrho_\beta\}$. Es claro que $F|_{\Omega_\alpha}$ y $F|_{\Omega_\beta}$ son diferenciables. Solo nos queda ver qué es lo que pasa en los puntos (y, z) tales que $(x_o, y, z) \in B_o$. Definamos $\Sigma' = \Sigma_{\alpha|]0, \varrho[} \cup \Sigma_{\beta|]0, \varrho[} \cup B_o$ y la aplicación $\Pi_{\alpha\beta} : \Sigma' \rightarrow \Omega$, $\Pi_{\alpha\beta}(x, y, z) = (y, z)$. $\Pi_{\alpha\beta}$ es diferenciable y biyectiva, siendo su inversa $\Pi_{\alpha\beta}^{-1}(y, z) = (F(y, z), y, z)$. Si probamos que $d\Pi_{\alpha\beta}(q)$ es biyectiva $\forall q \in B_o$, entonces el Teorema de la Función Inversa nos asegura la diferenciability de F . Es suficiente probar que $\partial_x(q) \notin T_q \Sigma' \forall q \in B_o$. Para ello distinguimos tres casos:

- Si $q = p_o$, entonces $\{(x_o, y, -y) \in \mathbb{L}^3 : y \in \mathbb{R}\} \subseteq B_o$, y por tanto, $T_q \Sigma' = \text{Span}\{\partial_y(q) + \partial_z(q), \partial_y(q) - \partial_z(q)\}$.

- En el caso en el que $q \in \{(x_o, y, y) \in \mathbb{L}^3 : y \neq 0\}$, es claro que $\partial_y(q) + \partial_z(q) \in T_q \Sigma'$. Como $T_q \Sigma'$ es un plano de Lorentz, y $\text{Span}\{\partial_x(q), \partial_y(q) + \partial_z(q)\}$ es un plano degenerado, obtenemos que $\partial_x(q) \notin T_q \Sigma'$.
- Si $q \in \{(x_o, y, -y) \in \mathbb{L}^3 : y \neq 0\}$, el razonamiento es análogo al del punto anterior.

Esto concluye la prueba del caso 1.

Caso 2: Al menos una de las dos curvas cruza el *eje* x .

Gracias al caso 1, podemos afirmar que las condiciones *LG1* y *LG2* se cumplen salvo por la diferenciabilidad de f_α y f_β en $u = 0$ (cuando esto tenga sentido). Centrémonos en probar la diferenciabilidad de α . La de β se demuestra análogamente.

Si $\Sigma_\alpha \cap \mathcal{R}^+ = \emptyset$ o $\Sigma_\alpha \cap \mathcal{R}^- = \emptyset$ la prueba es trivial. Supongamos entonces que ambas intersecciones son no vacías. En tal caso, o bien $\Sigma_\beta \cap \mathcal{Q}^+ \neq \emptyset$, o bien $\Sigma_\beta \cap \mathcal{Q}^- \neq \emptyset$, o bien ocurren ambas cosas. Sin pérdida de generalidad asumimos que $\Sigma_\beta \cap \mathcal{Q}^+ \neq \emptyset$. Dado $a > 0$, tomamos las siguientes curvas

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (F(a - \frac{t}{4a}, a + \frac{t}{4a}), a - \frac{t}{4a}, a + \frac{t}{4a}) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (f_\alpha(\sqrt{t}), a - \frac{t}{4a}, a + \frac{t}{4a}) \text{ si } t \geq 0 \\ (f_\beta(\sqrt{-t}), a - \frac{t}{4a}, a + \frac{t}{4a}) \text{ si } t \leq 0 \end{array} \right\}, \\ \gamma_2(t) &= (F(a - \frac{t}{4a}, -a - \frac{t}{4a}), a - \frac{t}{4a}, -a - \frac{t}{4a}) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (f_\alpha(-\sqrt{t}), a - \frac{t}{4a}, -a - \frac{t}{4a}) \text{ si } t \geq 0 \\ (f_\beta(\sqrt{-t}), a - \frac{t}{4a}, -a - \frac{t}{4a}) \text{ si } t \leq 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

La diferenciabilidad de estas curvas está asegurada por el caso 1. Tenemos entonces que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{d^n}{dt^n} (f_\alpha(\sqrt{t})) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{d^n}{dt^n} (f_\beta(\sqrt{-t})) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{d^n}{dt^n} (f_\alpha(-\sqrt{t}))$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, y consecuentemente

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{d^n}{du^n} f_\alpha(u) = \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u < 0}} \frac{d^n}{du^n} f_\alpha(u) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De nuevo gracias al caso 1, podemos afirmar que la función de pegado es diferenciable en todo punto salvo en el $(0, 0)$ (en el caso en el que $p_o \in B_o$).

La prueba de que \mathbf{F} es diferenciable en p_o consiste en aplicar el Teorema de la Función Inversa a $\Pi_{\alpha\beta}$ en p_o .

Hemos probado la condición necesaria, ahora tenemos que probar la suficiente. Supongamos entonces que $LG1$, $LG2$ y $LG3$ son ciertos. Lo que tenemos que probar es que Σ es una superficie diferenciable Lorentziana en un entorno de B_o . Usamos ahora la función de pegado para definir una parametrización de Σ en un entorno de B_o . Por ser F diferenciable tenemos asegurada la diferenciabilidad de Σ . Veamos ahora qué ocurre con la métrica a lo largo de B_o .

Primero hemos de probar que $f'_\alpha(0) = f'_\beta(0) = 0$. Si $p_o \in \Sigma$ es trivial. En otro caso, lo único que hay que ver es que si $f'_\alpha(0) = f'_\beta(0) = 0$ no se cumple, entonces la función F no es diferenciable. Sabemos que B_o contiene al menos una de las órbitas luminosas que pertenecen al orbital de p_o , \mathbf{O}_{p_o} . Supongamos que esta órbita es $\{(x_o, y, y) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\}$ y consideremos $\{(y, y) : y > 0\}$. Calculamos el gradiente de la función de pegado y vemos que si no ocurre $f'_\alpha(0) = f'_\beta(0) = 0$, entonces el gradiente de F no es continuo a lo largo de dicha semirrecta, lo cual contradice el que F sea diferenciable.

Ahora que sabemos que $f'_\alpha(0) = f'_\beta(0) = 0$, estamos en condiciones de probar el carácter Lorentziano de la superficie a lo largo de B_o . En el caso en el que $p_o \in \Sigma$ el carácter Lorentziano de la métrica en p_o es inmediato. Centrémonos entonces en ver qué ocurre en las órbitas luminosas. La prueba en todas ellas es igual, por este motivo solo la vamos a hacer para una de dichas órbitas. Supongamos que $\{(x_o, y, y) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\} \subseteq B_o$, entonces o bien $\Sigma_\alpha \cap \mathcal{R}^+ \neq \emptyset$, o bien $\Sigma_\beta \cap \mathcal{Q}^+ \neq \emptyset$, o bien ocurren ambas cosas a la vez. Supongamos que $\Sigma_\alpha \cap \mathcal{R}^+ \neq \emptyset$ y tomemos (x_o, a, a) con $a > 0$. Tomemos ahora la curva $\omega(t) = (F(at, a), at, a)$ para $t \leq 1$. El valor de la curva en 1 es $\omega(1) = (x_o, a, a)$, usando que $f'_\alpha(0) = 0$, obtenemos que su derivada vale $\omega'(1) = (-a^2 f''_\alpha(0), a, 0)$. El vector

$$\frac{-2}{a(1 + a^2(f''_\alpha(0))^2)}\omega'(1) + (0, 1, 1)$$

es luminoso, pertenece a $T_q\Sigma$ y no es proporcional a $(0, 1, 1)$, de donde concluimos que $T_q\Sigma$ es un plano de Lorentz.

■

Nota 2.5.16 *Notemos que en la demostración que acabamos de hacer hemos probado que si la función de pegado es \mathbf{C}^∞ , entonces $f'_\alpha(0) = f'_\beta(0) = 0$,*

y por tanto α y β son perpendiculares al eje x , lo cual implica que no puede existir una singularidad en p . Como conclusión de esto, para cualquier $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ diferenciable Lorentziana y \mathbf{A}_2 -invariante, tenemos asegurada la diferenciabilidad de las curvas obtenidas al diseccionar $\varphi(M)$.

2.5.6 Clasificación de las superficies Lorentzianas de revolución con eje espacial

A modo de resumen de los resultados obtenidos en la sección anterior, exponemos aquí la clasificación de las superficies Lorentzianas inmersas en \mathbb{L}^3 que son \mathbf{A}_2 -invariantes. Antes de la cual necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.5.17 Dada una familia numerable de curvas \mathcal{C}^∞ ,

$$\{\beta : J \rightarrow \mathcal{Q}\} \cup \{\alpha_i : J_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R} : i \in \mathcal{I}\},$$

tales que α_i es temporal $\forall i \in \mathcal{I}$ y J es un intervalo o bien \mathbb{S}^1 ; diremos que estas curvas están en posición general si satisfacen las siguientes condiciones:

P1. $\forall s \in J$ tal que $\beta(s) \in$ eje x , existen $\varepsilon > 0$ y un único $i \in \mathcal{I}$ cumpliendo

- $\beta(s) \in \text{Clausura}(\text{Traza}(\alpha_i))$, y
- $\Sigma_{\beta|_{J_0}} \cup \Sigma_{\alpha_i}$ es una superficie \mathcal{C}^∞ , donde $J_0 =]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[\cap J$.

P2. $\forall i \in \mathcal{I}$, existen $\varepsilon > 0$ y un único $s_0 \in \text{Clausura}(J)$ tales que

- $\lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s) \in \text{Clausura}(\text{Traza}(\alpha_i))$, y
- $\Sigma_{\beta|_{J_0}} \cup \Sigma_{\alpha_i}$ es \mathcal{C}^∞ , donde $J_0 =]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[\cap J$.

Nota 2.5.18 En la anterior definición, cuando afirmamos que $\Sigma_{\beta|_{J_0}} \cup \Sigma_{\alpha_i}$ es \mathcal{C}^∞ , estamos considerando $\Sigma_{\beta|_{J_0}} \cup \Sigma_{\alpha_i}$ junto con un subconjunto adecuado de $\mathbf{O}_{\beta(s)}$. Lo mismo se aplica a $\Sigma_{\beta|_{J_0}} \cup \Sigma_{\alpha_i}$.

Teorema 2.5.19 Sea M una superficie C^∞ conexa y sea $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ una inmersión. (M, φ^*g) es Lorentziana y A_2 -invariante si, y solo si, ocurre una de las siguientes cosas

1. $\varphi(M)$ es una superficie de revolución Lorentziana fundamental (descritas en el Teorema 2.5.6), o la unión de una de estas superficies con órbitas luminosas que pertenezcan a su frontera.
2. $\varphi(M)$ es la unión de las superficies de revolución generadas por una familia de curvas en posición general,

$$\{\beta : J \rightarrow \mathcal{Q}\} \cup \{\alpha_i : J_i \rightarrow \mathcal{R} : i \in \mathcal{I}\},$$

junto con la correspondiente familia de parches luminosos,

$$\{B_{s_o} : \lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s) \in \text{eje } x\},$$

esto es

$$\varphi(M) = \Sigma_\beta \cup \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Sigma_{\alpha_i} \right) \cup \left(\bigcup \{B_{s_o} : \lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s) \in \text{eje } x\} \right).$$

2.5.7 Un algoritmo para construir superficies Lorentzianas A_2 -invariantes no fundamentales.

Para terminar el estudio de las superficies Lorentzianas A_2 -invariantes, mostramos un algoritmo para construir ejemplos de las mismas que no están contenidos en una sola región fundamental.

1. Dado $\delta > 0$, tomamos una función C^∞ , $f : (-\delta^2, \delta^2) \rightarrow \mathbb{R}$.
2. A continuación consideramos las siguientes funciones $f_\alpha : J_\alpha \subseteq (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\beta : J_\beta \subseteq (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$f_\alpha(s) = f(s^2) \quad \text{y} \quad f_\beta(s) = f(-s^2),$$

donde J_α y J_β son intervalos que contienen al 0 y además $(f'_\alpha(s))^2 < 1$ $\forall s \in J_\alpha$.

3. Consideremos las siguientes curvas $\alpha : J_\alpha \rightarrow \mathcal{R}$ y $\beta : J_\beta \rightarrow \mathcal{Q}$ dadas por

$$\alpha(s) = (f_\alpha(s), 0, s) \quad \text{y} \quad \beta(s) = (f_\beta(s), s, 0).$$

4. Por último elegimos un conjunto, $B_o \subset \{(f(0), y, z) \in \mathbb{L}^3 : y^2 = z^2\}$, que sea \mathbf{A}_2 -invariante y tal que $\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup B_o$ sea una superficie topológica.

Gracias al Teorema 2.5.15, podemos afirmar que $\Sigma = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup B_o$ es una superficie C^∞ Lorentziana y \mathbf{A}_2 -invariante. La función de pegado es $F(y, z) = f(z^2 - y^2)$.

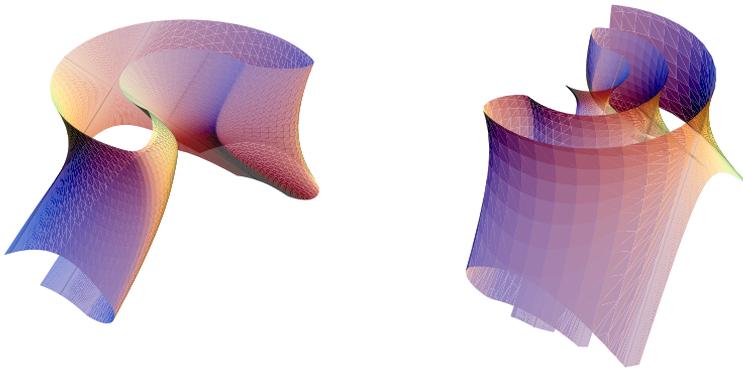
Además, tenemos un resultado que constituye un recíproco del algoritmo cuando partimos de funciones analíticas en el origen.

Teorema 2.5.20 Sean $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{R}$ una curva C^∞ temporal y $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathcal{Q}$ una curva C^∞ , tales que $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \beta(s)$ y existen funciones diferenciables f_α y f_β cumpliendo **LG1**, **LG2** y **LG3**. Si además f_α y f_β son analíticas en 0, entonces entonces existe una función f de clase C^∞ tal que

$$\alpha(s) = (f(s^2), 0, s) \quad \text{y} \quad \beta(s) = (f(-s^2), s, 0).$$

Nota 2.5.21 La demostración de este teorema es muy técnica y no aporta ideas nuevas sobre el comportamiento de las superficies que estamos estudiando. Por estos dos motivos la hemos sacado de este capítulo y la hemos situado en la parte de los apéndices.

Para terminar esta sección, mostramos algunos ejemplos de superficies Lorentzianas \mathbf{A}_2 -invariantes que hemos creado haciendo uso del algoritmo expuesto en este apartado. En ninguna de las imágenes aparece el *eje x*. En las dos primeras, éste ocupa una posición similar a la que tiene en la imagen de $\hat{\mathbf{H}}$, mientras que en la tercera de las imágenes, el *eje x* está en posición vertical (para facilitar la observación de la superficie).



En las dos imágenes anteriores se ha realizado un corte de las superficies para que se observen de forma clara la familia de curvas en posición general que genera a cada una de ellas.



2.6 Superficies rotacionales en \mathbb{L}^3 con eje luminoso

En esta sección obtenemos la clase completa de superficies de revolución, no degeneradas y con eje luminoso inmersas en \mathbb{L}^3 .

Sea $\vec{x} \in \mathbb{L}^3$ un vector luminoso. Llamaremos eje de revolución a la recta vectorial generada por \vec{x} , y la notaremos por *eje x*. Existe un único plano degenerado que contiene al eje de revolución. \mathbb{L}^3 menos dicho plano consta de dos regiones abiertas, a las que llamaremos *regiones fundamentales*.

Es ampliamente sabido que si tomamos una curva no degenerada inmersa en cualquier plano Lorentziano que contenga al eje de revolución, de modo

que ésta no interseque al eje, la superficie obtenida al aplicar a dicha curva todos los elementos de $A_{\vec{x}}$ es una superficie de revolución no degenerada con eje luminoso, véase [31]. Dichas superficies están inmersas en una región fundamental.

En vista de lo anterior, nos planteamos la siguiente pregunta ¿existen superficies de revolución con eje luminoso que intersequen a las dos regiones fundamentales? Motivados por lo que ocurre en el caso del eje espacial, nos preguntamos también lo siguiente ¿es posible pegar de algún modo dos superficies (generada cada una por una curva no degenerada que no interseca al eje de revolución) de modo que la unión sea una superficie C^∞ , no degenerada e invariante bajo la acción de $A_{\vec{x}}$? Veremos que la respuesta a las dos preguntas anteriores es negativa, por lo que en este caso las superficies invariantes por la acción de $A_{\vec{x}}$ coinciden con las generadas por una curva no degenerada que no interseca al eje de revolución y que está inmersa en un plano de Lorentz que contenga a \vec{x} .

2.6.1 Regiones fundamentales

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ una base de \mathbb{L}^3 tal que \vec{y} es un vector luminoso con $g(\vec{x}, \vec{y}) = -1$, y \vec{z} es un vector unitario espacial que es ortogonal al plano $\text{Span}\{\vec{x}, \vec{y}\}$. De ahora en adelante vamos a trabajar en coordenadas con respecto a la anterior base, siendo entonces la métrica de \mathbb{L}^3 $g = -2dx dy + dz^2$. Al grupo $A_{\vec{x}}$ lo llamaremos \mathbf{A}_3 .

En $\mathbb{L}^3 \setminus \text{eje } x$ vamos a distinguir las siguientes *regiones fundamentales*:

$$\mathcal{S}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y < 0\}.$$

Sea $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : z = 0\}$ y $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : y = 0\}$. Definamos los siguientes semiplanos abiertos:

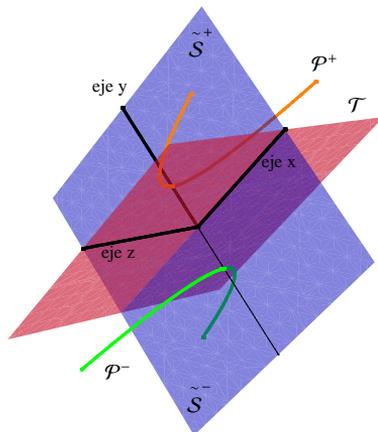
$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}^+ &= \mathcal{S}^+ \cap \mathcal{S} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\} \quad \text{y} \\ \tilde{\mathcal{S}}^- &= \mathcal{S}^- \cap \mathcal{S} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{L}^3 : y < 0\}. \end{aligned}$$

Consideramos también las siguientes parábolas espaciales, las cuales son órbitas de la acción asociada a \mathbf{A}_3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+ &= \{(x, 1, z) \in \mathbb{L}^3 : -2x + z^2 = 0\} = \{(t^2/2, 1, t) \in \mathbb{L}^3 : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \\ \mathcal{P}^- &= \{(x, -1, z) \in \mathbb{L}^3 : 2x + z^2 = 0\} = \{(-t^2/2, -1, t) \in \mathbb{L}^3 : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Notemos a la métrica inducida en \mathcal{P}^+ y \mathcal{P}^- como dt^2 .

El dibujo de la derecha ilustra la notación introducida hasta ahora. En él (y en el resto de dibujos de esta sección) hemos tomado $\vec{x} = \overrightarrow{(0, 1, 1)}$, $\vec{y} = \overrightarrow{(0, -1, 1)}$ y $\vec{z} = \overrightarrow{(1, 0, 0)}$, siendo (a, b, c) coordenadas respecto de la base usual de \mathbb{L}^3 .



A continuación definimos las siguientes funciones positivas:

$$l_+ : \tilde{\mathcal{S}}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l_+(x, y, 0) = y \quad y$$

$$l_- : \tilde{\mathcal{S}}^- \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l_-(x, y, 0) = -y.$$

En este ambiente no es difícil comprobar que las siguientes descomposiciones como productos torcidos son ciertas

$$(\mathcal{S}^+, g) = (\tilde{\mathcal{S}}^+, g) \times_{l_+} (\mathcal{P}^+, dt^2) \quad y$$

$$(\mathcal{S}^-, g) = (\tilde{\mathcal{S}}^-, g) \times_{l_-} (\mathcal{P}^-, dt^2).$$

Además, si hacemos los cambios conformes naturales, obtenemos que las superficies $(\tilde{\mathcal{S}}^+, \frac{1}{l_+^2}g)$ y $(\tilde{\mathcal{S}}^-, \frac{1}{l_-^2}g)$ son planos anti de Sitter (esto es, superficies Lorentzianas con curvatura constante negativa) con curvatura -1 . Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.6.1 $(\mathcal{S}^+, \frac{1}{l_+^2}g)$ y $(\mathcal{S}^-, \frac{1}{l_-^2}g)$ son productos semi-Riemannianos de un plano anti de Sitter y una parábola espacial.

2.6.2 Clasificación de las superficies de revolución con eje luminoso

Una vez que hemos introducido toda la notación necesaria, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente resultado, el cual clasifica

las superficies \mathbf{A}_3 -invariantes. En particular, este resultado nos dice que todas estas superficies intersecan tan solo una región fundamental.

Teorema 2.6.2 *Sea M una superficie diferenciable conexa y \mathcal{C}^∞ , y sea $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ una inmersión \mathcal{C}^∞ no degenerada. (M, φ^*g) es \mathbf{A}_3 -invariante si, y solo si, ocurre una de las siguientes cosas:*

1. (M, φ^*g) es Riemanniana y existe una curva \mathcal{C}^∞ espacial, α , inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^+$ o $\tilde{\mathcal{S}}^-$, cumpliendo $\varphi(M) = \{\varsigma_t(\text{Traza}(\alpha)) : t \in \mathbb{R}\}$.
2. (M, φ^*g) es Lorentziana y existe una curva \mathcal{C}^∞ temporal, α , inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^+$ o $\tilde{\mathcal{S}}^-$, cumpliendo $\varphi(M) = \{\varsigma_t(\text{Traza}(\alpha)) : t \in \mathbb{R}\}$.

Demostración: Es claro que dada una curva \mathcal{C}^∞ no degenerada, α , inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^+$ o en $\tilde{\mathcal{S}}^-$, la superficie parametrizada como $X(s, t) = \varsigma_t(\alpha(s))$ es \mathbf{A}_3 -invariante. Si α es espacial, entonces la superficie es Riemanniana, mientras que si α es temporal, la superficie es Lorentziana. Es claro que el resultado recíproco es cierto, esto es, dada una superficies \mathbf{A}_3 -invariante inmersa en \mathcal{S}^+ o en \mathcal{S}^- , existe una curva no degenerada, α , inmersa bien en $\tilde{\mathcal{S}}^+$ o en $\tilde{\mathcal{S}}^-$, tal que $X(s, t) = \varsigma_t(\alpha(s))$ es una parametrización de la superficie y por la tanto ésta es \mathbf{A}_3 -invariante.

En vista de lo anterior, solo tenemos que comprobar que no existen superficies \mathbf{A}_3 -invariantes que intersequen al plano \mathcal{T} .

Primero, notemos que las órbitas contenidas en \mathcal{T} tienen todas ellas carácter causal luminoso, de donde se deduce que las superficies Riemannianas \mathbf{A}_3 -invariantes no intersecan a \mathcal{T} .

Centrémonos en las superficies Lorentzianas. Supongamos que existe una superficie Lorentziana \mathbf{A}_3 -invariante inmersa en \mathbb{L}^3 , $\varphi(M)$, cuya intersección con el plano \mathcal{T} es no vacía. Entonces $\varphi(M) \cap \mathcal{S}^+$ es la unión de una familia numerable de superficies \mathbf{A}_3 -invariantes generadas cada una por una curva temporal inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^+$; lo mismo ocurre para $\varphi(M) \cap \mathcal{S}^-$ cambiando $\tilde{\mathcal{S}}^+$ por $\tilde{\mathcal{S}}^-$. Si ahora recordamos que \mathcal{S} es un plano de Lorentz, deducimos que cada una de las curvas generadoras no puede ser cerrada y además un punto de su frontera, y solo uno, pertenece al eje de revolución. Por lo tanto, haciendo uso de que M es conexa, podemos afirmar que cada una de las anteriores intersecciones está formada, a lo más, por dos superficies. Veamos todas las posibilidades y comprobemos a continuación que ninguna de ellas es viable.

1. Existen dos curvas temporales, $\alpha^+ :]0, \delta[\longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}^+$ y $\alpha^- :]-\delta, 0[\longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}^-$ (con δ un real positivo), tales que
 - a) $\lim_{s \rightarrow 0} \alpha^+(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^-(s)$ es un punto del *eje x*, y
 - b) $\varphi(M) = \Sigma_{\alpha^+} \cup \Sigma_{\alpha^-}$ (junto con una familia adecuada de órbitas luminosas).
2. Existen dos curvas temporales inmersas ambas en $\tilde{\mathcal{S}}^+$, o bien en $\tilde{\mathcal{S}}^-$, cumpliendo (a) y (b).
3. Existe una curva temporal inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^+$ o $\tilde{\mathcal{S}}^-$, que genera una superficie \mathbf{A}_3 -invariante que pega de forma \mathcal{C}^∞ con el eje de revolución (o parte de él,) siendo la unión de ambos $\varphi(M)$.

Para probar que ninguno de los casos anteriores son posibles, estudiamos el comportamiento de las superficies generadas por una curva inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^+$ y de las superficies generadas por una curva inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^-$, en un entorno del *eje x*.

Sea $\alpha^+ :]0, \delta[\longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}^+$ una curva temporal tal que $\lim_{s \rightarrow 0} \alpha^+(s) \in \text{eje } x$. Definimos r^+ como

$$r^+ = \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \varsigma_t(\alpha^+(s)) : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^+(s) + \lambda \vec{x} : \lambda > 0 \right\}.$$

Sea $\alpha^- :]-\delta, 0[\longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}^-$ una curva temporal tal que $\lim_{s \rightarrow 0} \alpha^-(s) \in \text{eje } x$. Definimos r^- como

$$r^- = \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \varsigma_t(\alpha^-(s)) : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^-(s) + \lambda \vec{x} : \lambda < 0 \right\}.$$

Los casos 1 y 2 no son posibles, ya que en ambos la superficie obtenida después de pegar no es una superficie \mathcal{C}^∞ (falla en el punto en el que las dos curvas se pegan).

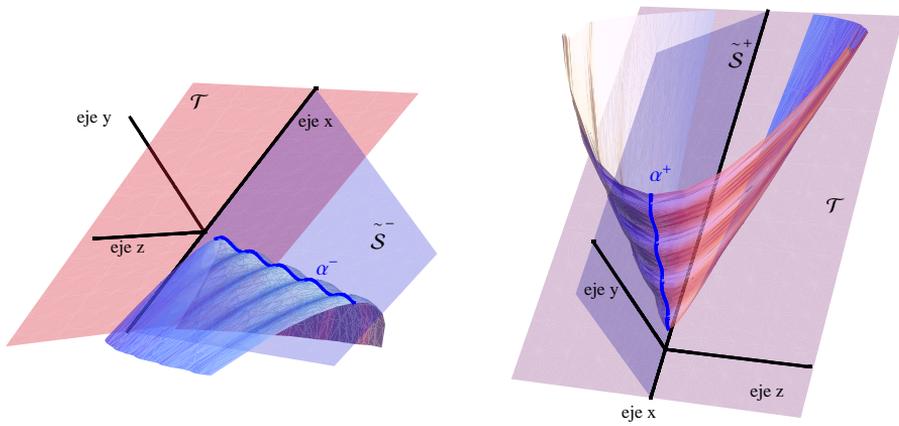
Una condición necesaria para que ocurra el caso 3 es que la curva obtenida al pegar α y r^+ o r^- (dependiendo de si α está inmersa en $\tilde{\mathcal{S}}^+$ o en $\tilde{\mathcal{S}}^-$, respectivamente) debe ser \mathcal{C}^∞ . Pero en tal caso, el plano tangente a la superficie a lo largo de r^+ o r^- sería $\{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$, y por lo tanto la métrica inducida a lo largo de la unión no sería Lorentziana.

Con lo que la demostración queda terminada.

■

Para terminar la sección introducimos dos dibujos de superficies \mathbf{A}_3 -invariantes, el primero de ellos Riemanniano e inmerso en \mathcal{S}^- , y el segundo

Lorentziano e immerso en \mathcal{S}^+ .



Soluciones del $O^1(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2 que son superficies rotacionales en \mathbb{L}^3

3.1 El $O^1(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2 y su invarianza conforme

Como se dijo en la introducción, el $O^1(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2, es una teoría de campos cuyas variables dinámicas (o campos elementales) son aplicaciones con dominio una superficie diferenciable conexa, M , y codominio el espacio de de Sitter de dimensión 2, \mathbb{S}_1^2 , o el espacio hiperbólico de dimensión 2, \mathbb{H}^2 . La densidad Lagrangiana del modelo viene dada por

$$\mathcal{S}(N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} g(\partial_i N, \partial_i N),$$

donde estamos viendo a \mathbb{S}_1^2 y a \mathbb{H}^2 embebidos en \mathbb{L}^3 .

Recordemos que, identificando cada variable con la aplicación de Gauss de una inmersión de M en \mathbb{L}^3 , convertimos el anterior sigma modelo en el problema variacional asociado al funcional que mide la energía total de la aplicación de Gauss de cada inmersión, también llamada curvatura total de Casorati. Cuando el codominio de las variables es \mathbb{S}_1^2 , el problema variacional está definido en un espacio de inmersiones Lorentzianas, mientras que en el caso de \mathbb{H}^2 , las inmersiones son Riemannianas. En ambos casos vamos a exigir que las inmersiones cumplan ciertas condiciones de frontera que especificaremos más tarde.

En este capítulo nos vamos a centrar en el estudio de las soluciones del sigma modelo que son invariantes bajo la acción de un grupo de transformaciones de Lorentz que deja fija una dirección en \mathbb{L}^3 . Va a ser esencial en el desarrollo, la descripción de los distintos grupos de transformaciones de Lorentz en \mathbb{L}^3 que fijan una dirección (véase el Capítulo 2).

Cuando trabajamos con inmersiones Riemannianas, la única condición extra que hay que pedirle a una solución de nuestro sigma modelo para que sea solitón, es que su imagen por el funcional sea finita. Las condiciones que se han de cumplir en el caso Lorentziano son más complejas.

De ahora en adelante, cada vez que nos refiramos al *sigma modelo*, estaremos hablando del $O^1(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2.

3.1.1 Planteamiento del problema variacional

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera del problema variacional son (Γ, N_o) , donde

- $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ es una familia numerable de curvas regulares no degeneradas y regulares en \mathbb{L}^3 , que son disjuntas dos a dos;
- N_o es un campo unitario definido a lo largo de Γ que es ortogonal a Γ y tiene carácter causal constante, al que notaremos por ε .

Notemos que si $\varepsilon = -1$, todas las curvas en Γ han de ser espaciales, mientras que si $\varepsilon = 1$, cada una de ellas puede ser espacial o temporal.

Las condiciones de frontera fijadas determinan un tercer campo vectorial, ν , definido a lo largo de Γ , que viene dado por

$$N_o = \Gamma' \wedge \nu,$$

siendo Γ' el campo tangente a lo largo de Γ .

En todo este capítulo, M va a ser una superficie diferenciable, conexa y con frontera, ∂M , formada por una cantidad numerable (igual al cardinal de Γ) de curvas regulares y disjuntas, a las que notaremos por c_1, c_2, \dots . El caso en el que M no tiene frontera puede ser visto como un caso particular del que vamos a estudiar.

Espacio de variables dinámicas

Llamaremos $\mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \mathbb{L}^3)$ al espacio de inmersiones con signatura ε , que aplican ∂M en Γ y cuyo normal lo largo de Γ es N_o , esto es, aquellas inmersiones, $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$, que cumplen

$$g(N_\varphi, N_\varphi) = \varepsilon, \quad \varphi(c_j) = \gamma_j, \quad \forall j, \quad \text{y} \quad d\varphi_p(T_p M) \perp N_o(\varphi(p)) \quad \forall p \in \partial M,$$

donde N_φ es la aplicación de Gauss de φ .

Si identificamos cada inmersión con su imagen en \mathbb{L}^3 , el espacio anterior no es sino la familia de superficies en \mathbb{L}^3 con carácter causal ε , que tienen como frontera a Γ y como normal a lo largo de la frontera común a N_o .

Notemos que no hemos exigido que M sea compacta, y que al estar trabajando en \mathbb{L}^3 , tenemos que tener cuidado con el carácter causal de las curvas. En vista de estas observaciones hacemos la siguiente definición.

Definición 3.1.1 *Sea (S, g) una superficie Riemanniana o Lorentziana. Un subconjunto K de S se dice que es un polígono no nulo si es conexo, simplemente conexo, compacto, tiene interior no vacío y su frontera, ∂K , es diferenciable a trozos y está formada por un número finito de curvas regulares no degeneradas (esta última condición es redundante cuando g es Riemanniana). Dada $\varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \mathbb{L}^3)$, definimos un polígono no nulo asociado a φ como un polígono no nulo en (M, φ^*g) .*

En este ambiente consideramos el problema variacional asociado a la Curvatura total de Casorati, o lo que es lo mismo, el funcional que mide la energía total de la aplicación de Gauss.

Soluciones del $O^1(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2

Una inmersión, $\varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \mathbb{L}^3)$, se llama solución del $O^1(3)$ sigma modelo no lineal de dimensión 2, si para todo polígono no nulo asociado a φ , K , la restricción de φ a K , $\varphi|_K$, es punto crítico de $(\mathbf{I}_{\varphi(\partial K)}^\varepsilon(K, \mathbb{L}^3); \mathfrak{S})$, donde

$$\mathfrak{S} : \mathbf{I}_{\varphi(\partial K)}^\varepsilon(K, \mathbb{L}^3) \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathfrak{S}(\psi) = \frac{1}{2} \int_K \|dN_\psi\|^2 dA_\psi,$$

siendo

- $\mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^\varepsilon(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3)$ el espacio de las inmersiones de \mathbb{K} en \mathbb{L}^3 , $\psi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}^3$, que satisfacen $\psi|_{\partial\mathbb{K}} = \varphi|_{\partial\mathbb{K}}$, $N_\psi|_{\partial\mathbb{K}} = N_\varphi|_{\partial\mathbb{K}}$ y $g(N_\psi, N_\psi) = \varepsilon$;
- dA_ψ el elemento de área de (\mathbb{K}, ψ^*g) y dN_ψ denota al opuesto del operador forma u operador de Weingarten de la inmersión.

Recordemos que en el caso Riemanniano, esto es, el caso $\varepsilon = -1$, se cumple que $\|dN_\varphi\|^2 > 0$ para toda inmersión $\varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^{-1}(M, \mathbb{L}^3)$. Tiene entonces sentido definir el funcional que mide la energía total de la aplicación de Gauss de cada inmersión de dicho espacio,

$$\mathfrak{S} : \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \mathbb{L}^3) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty, \quad \mathfrak{S}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \|dN_\varphi\|^2 dA_\varphi,$$

donde dA_φ denota el elemento de área de (M, φ^*g) y dN_φ denota al opuesto del operador forma u operador de Weingarten de la inmersión. En este contexto, diremos que una solución del sigma modelo, φ , es un solitón, si $\mathfrak{S}(\varphi) < \infty$.

En el caso Lorentziano, $\|dN_\varphi\|^2$ puede tomar cualquier valor real, por lo que no está asegurada la existencia de la integral sobre M , salvo en el caso en el que M sea compacta.

3.1.2 Invarianza conforme

Superficies de Willmore en \mathbb{L}^3

En el ambiente en el que estamos trabajando, se definen las *superficies de Willmore* (con frontera y aplicación de Gauss a lo largo de la misma fijos) como aquellas inmersiones, $\varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \mathbb{L}^3)$, que cumplen que para todo polígono no nulo asociado a φ , \mathbb{K} , la restricción de φ a \mathbb{K} , $\varphi|_{\mathbb{K}}$, es punto crítico de $(\mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^\varepsilon(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3); \mathfrak{W})$, donde

$$\mathfrak{W} : \mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^\varepsilon(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathfrak{W}(\psi) = \int_{\mathbb{K}} H_\psi^2 dA_\psi + \int_{\varphi(\partial\mathbb{K})} k^\psi ds,$$

siendo H_ψ la curvatura media de la inmersión y k^ψ la curvatura geodésica de $\varphi(\partial\mathbb{K})$ en $\psi(\mathbb{K})$ con la métrica inducida de \mathbb{L}^3 (donde la curva está orientada de modo que su normal “apunta hacia” $\psi(\mathbb{K})$).

Esta acción define un problema variacional que es invariante frente a cambios conformes de la métrica de \mathbb{L}^3 .

En esta sección vamos a demostrar que el estudio de las soluciones del sigma modelo es equivalente al estudio de las superficies de Willmore con frontera y normal a lo largo de la misma fijos. Un resultado similar al que buscamos fue probado en el Capítulo 1, siendo la pieza clave de la demostración el uso del Teorema de Gauss-Bonnet para superficies Riemannianas. De nuevo vamos a utilizar el Teorema de Gauss-Bonnet, pero en el caso Lorentziano, se necesitará la siguiente versión, cuya prueba, por ser muy técnica, se dará en el Apéndice D.

Lema 3.1.2 (Gauss-Bonnet para polígonos no nulos) *Sea (S, g) una superficie Lorentziana y $K \subset S$ un polígono no nulo. Entonces,*

$$-\int_K G dA + \int_{\partial K} k ds + \sum_{j=1}^r \theta_j = 0,$$

donde G es la curvatura de Gauss de (S, g) , k es la curvatura geodésica a lo largo de ∂K y $\theta_1, \dots, \theta_r$ son los ángulos exteriores en los vértices de ∂K , en caso de que dichos vértices existan.

Nota 3.1.3 *La definición de ángulo exterior entre dos vectores no nulos cualesquiera puede ser consultada en el Apéndice D. En este momento, lo único que nos interesa saber es que dicha definición depende exclusivamente de la frontera del polígono no nulo y del plano tangente a lo largo de la misma.*

Nota 3.1.4 *Aunque hemos incluido este resultado como un lema técnico, su importancia es independiente del teorema al cual precede. A partir de él, es fácil probar una versión para el caso en el que la topología de K no es la de un disco de \mathbb{R}^2 .*

Teorema 3.1.5 *En el espacio $I_{\Gamma}^{\varepsilon}(M, \mathbb{L}^3)$ el problema variacional asociado a la curvatura total de Casorati y el problema variacional de Willmore son equivalentes, es decir, las soluciones de nuestro sigma modelo y las superficies de Willmore coinciden.*

Nota 3.1.6 *En particular, nuestro sigma modelo es invariante frente a cambios conformes de la métrica de \mathbb{L}^3 .*

Demostración: Tenemos que probar que los problemas variacionales $(\mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^\varepsilon(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3); \mathfrak{S})$ y $(\mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^\varepsilon(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3); \mathfrak{W})$ son equivalentes para una inmersión cualquiera, $\varphi \in I_\Gamma^\varepsilon(M, \mathbb{L}^3)$, y para cualquier polígono no nulo asociado a φ , \mathbb{K} .

- En el caso en el que $\varepsilon = -1$, estamos trabajando en un espacio de inmersiones Riemannianas en \mathbb{L}^3 . Gracias a esto podemos reproducir, salvo pequeños cambios, la prueba del Teorema 1.2.1 del Capítulo 1. Lo único a tener en cuenta es que dada una inmersión perteneciente a $\mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^{-1}(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3)$, ψ , la relación clásica existente entre el módulo de su segunda forma fundamental, su curvatura media y su curvatura de Gauss es

$$\|dN_\psi\|^2 = 4H_\psi^2 + 2G_\psi.$$

- En el caso en el que $\varepsilon = 1$, estamos trabajando en un espacio de inmersiones Lorentzianas en \mathbb{L}^3 . La idea es seguir el mismo esquema de demostración que en el Teorema 1.2.1, pero adaptando los pasos al caso Lorentziano. Dada $\psi \in \mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^\varepsilon(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3)$, el módulo al cuadrado de la segunda forma fundamental de ψ se puede expresar del siguiente modo

$$\|dN_\psi\|^2 = 4H_\psi^2 - 2G_\psi.$$

Si utilizamos esta relación junto con la Fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos no nulos, obtenemos que

$$\mathfrak{S}(\psi) = 2\mathfrak{W}(\psi) - 3 \int_{\psi(\partial\mathbb{K})} k^\psi ds - \sum_{j=1}^r \theta_j.$$

La demostración acaba utilizando las condiciones de frontera, para asegurar que los dos últimos términos de la parte derecha de la igualdad son constantes sobre el espacio de inmersiones $\mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbb{K})}^1(\mathbb{K}, \mathbb{L}^3)$.

■

Nota 3.1.7 *En [17] se puede encontrar una fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos no nulos con frontera temporal. Teniendo en cuenta este hecho, es fácil caer en la tentación de pensar que, en el caso en el que $\varepsilon = 1$, podemos trabajar exclusivamente con polígonos no nulos con frontera temporal (con*

lo que no sería necesaria la nueva versión de Gauss-Bonnet). Cuando todas las curvas de Γ son temporales, esto es cierto, ya que todo polígono no nulo está contenido en otro polígono no nulo con frontera temporal. Sin embargo, cuando Γ contiene alguna curva espacial, el anterior razonamiento no es válido.

3.2 Soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes o superficies de Willmore de rotación en \mathbb{L}^3 con eje temporal

Dada una recta vectorial temporal en \mathbb{L}^3 , llamemos $\vec{x} \in \mathbb{L}^3$ a uno de los vectores unitarios de \mathbb{L}^3 que la generan. A partir de ahora notaremos por *eje x* a la recta generada por \vec{x} . El objetivo de esta sección es determinar el espacio moduli de soluciones del sigma modelo, que son invariantes bajo la acción del grupo de rotaciones en \mathbb{L}^3 con eje de rotación el *eje x* , esto es, las soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes. Para ello, el primer paso a dar consiste en determinar las condiciones necesarias para la existencia de soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes.

Topológicamente, las superficies \mathbf{A}_1 -invariantes de \mathbb{L}^3 son un cilindro, un plano o un disco de \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, tenemos que distinguir cinco casos: $M = [a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1$, $M = [a_1, \infty[\times \mathbb{S}^1$, $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, $M = \mathbb{R}^2$ y $M = D(0, 1)$. De ellos, tan solo el estudio del primero es relevante. Los resultados que vamos a mostrar para los otros casos se obtienen sin problemas a partir del desarrollo que vamos a hacer para el caso $M = [a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1$.

Es necesario para la existencia de soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes, que las condiciones de frontera sean \mathbf{A}_1 -invariantes. Esto ocurre si, y solo si:

1. Γ consiste de un par de circunferencias, γ_1, γ_2 , contenidas en planos Riemannianos ortogonales al eje y centradas en puntos del eje.
2. $g(N_o, \vec{x})$ es constante a lo largo de cada curva de Γ .

Una vez tomadas una superficie y unas condiciones de frontera adecuadas, extendemos la acción del grupo \mathbf{A}_1 al espacio de inmersiones $\mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{L}^3)$, del siguiente modo

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{L}^3) \longrightarrow \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{L}^3), \quad (\mu_t, \varphi) \mapsto \mu_t \circ \varphi.$$

Es obvio que \mathfrak{W} es invariante bajo la acción de \mathbf{A}_1 , esto es,

$$\mathfrak{W}(\mu_t \circ \varphi) = \mathfrak{W}(\varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{L}^3).$$

Entonces, como el grupo \mathbf{A}_1 es compacto, estamos en condiciones de aplicar el Principio de Criticalidad Simétrica de Palais, véase el Apéndice A. Definimos para ello el conjunto de las inmersiones que son invariantes bajo la acción de \mathbf{A}_1 , también llamadas puntos simétricos, como

$$\Sigma^\varepsilon = \{\varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{L}^3) : \mu_t(\varphi([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1)) = \varphi([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1), \forall t\}.$$

Un corolario del citado Principio de Criticalidad Simétrica, véase de nuevo el Apéndice A, nos asegura que las superficies de Willmore que pertenecen a Σ^ε , coinciden con los puntos críticos de $\mathfrak{W} : \Sigma^\varepsilon \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$. Notemos que el anterior funcional está bien definido, gracias a la compacidad de M .

En vista de lo anterior, necesitamos estudiar el espacio Σ^ε . Para ello nos apoyamos en lo visto en el Capítulo 2. Completamos $\{\vec{x}\}$ hasta obtener una base, $\mathcal{B} = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, ortonormal en \mathbb{L}^3 y trabajamos en coordenadas con respecto a ella. Tomamos el semi plano Lorentziano

$$\mathbf{AdS}_2 = \left(\{(x, y, 0) \in \mathbb{L}^3 : y > 0\}, \bar{g} = \frac{1}{y^2}g \right).$$

Esta superficie tiene curvatura seccional -1 , siendo por tanto un plano anti de Sitter. Definimos a continuación \mathbf{C}^ε como el espacio de curvas diferenciables, $\alpha : [s_1, s_2] \longrightarrow \mathbf{AdS}_2$, con signatura $-\varepsilon$ y que satisfacen las siguientes condiciones

$$\alpha(s_i) = \text{Traza}(\gamma_i) \cap \mathbf{AdS}_2 \quad \text{y} \quad \alpha'(s_i) = \pm\nu(\alpha(s_i)), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

A cada $\alpha \in \mathbf{C}^\varepsilon$ podemos asociarle una inmersión, $\varphi_\alpha \in \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{L}^3)$, definida como $\varphi_\alpha(s, e^{it}) = \mu_t(\alpha(s))$. Es claro que $\varphi_\alpha \in \Sigma^\varepsilon$. Además, es fácil probar que dada $\varphi \in \Sigma^\varepsilon$, existe una única (salvo reparametrización) $\alpha \in \mathbf{C}^\varepsilon$ tal que $\varphi([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1) = \varphi_\alpha([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1)$.

El siguiente resultado, junto con el desarrollo previo, nos proporciona todas las soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes del sigma modelo.

Teorema 3.2.1 *En el ambiente de esta sección, φ_α es una solución del sigma modelo, o lo que es lo mismo, una superficie de Willmore, si, y solo si, la curva α es una elástica libre clavada en \mathbf{AdS}_2 .*

Nota 3.2.2 *Notemos que al ser $[a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1$ compacta, en el caso Riemanniano todas las soluciones del sigma modelo son solitones.*

Demostración: En primer lugar, expresemos \mathbb{L}^3 como el siguiente producto torcido:

$$(\mathbb{L}^3 \setminus eje x, g) = (\mathbf{AdS}_2, g) \times_h (\mathbb{S}^1, dt^2),$$

donde $h : \mathbf{AdS}_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ se define como $h(p) = g(\vec{p}, \vec{y})$. A continuación hacemos el cambio conforme natural, obteniendo el siguiente producto semi-Riemanniano

$$\left(\mathbb{L}^3 \setminus eje x, \bar{g} = \frac{1}{h^2} g \right) = (\mathbf{AdS}_2, \bar{g}) \times (\mathbb{S}^1, dt^2).$$

Recordemos ahora que el funcional de Willmore es invariante frente a cambios conformes de la métrica. Por tanto

$$\mathfrak{W}(\varphi_\alpha) = \overline{\mathfrak{W}}(\varphi_\alpha) = \int_{[a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1} \left(\overline{H}_\alpha^2 + \overline{R}_\alpha \right) d\overline{A}_\alpha + \int_\Gamma \overline{k} ds,$$

donde $\overline{\mathfrak{W}}$ es el funcional de Willmore asociado a la métrica \bar{g} , y \overline{R}_α es la curvatura seccional de $(\mathbb{L}^3 \setminus eje x, \bar{g})$ a lo largo de $d\varphi(T[a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1)$. Notemos que en nuestro caso $\overline{R}_\alpha = 0$, ya que $d\varphi(T[a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1)$ es una sección mixta en un producto semi-Riemanniano. Además, la curvatura geodésica de Γ también se anula, dado que γ_1 y γ_2 son geodésicas en $(\varphi([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1), \bar{g})$. Por último, la curvatura media de $\varphi([a_1, a_2] \times \mathbb{S}^1)$ en $(\mathbb{L}^3 \setminus eje x, \bar{g})$ es

$$\overline{H}_\alpha^2 = \frac{1}{4} \overline{k}_\alpha^2,$$

siendo \overline{k}_α la función curvatura de α en \mathbf{AdS}_2 . Como consecuencia, el funcional de Willmore aplicado a φ_α queda como sigue

$$\mathfrak{W}(\varphi_\alpha) = \frac{1}{4} \int_{[s_1, s_2] \times \mathbb{S}^1} \overline{k}_\alpha^2 ds dt = \frac{\pi}{2} \int_{[s_1, s_2]} \overline{k}_\alpha^2 ds.$$

La integral que aparece en la expresión de la derecha no es sino la energía elástica de la curva α .

■

El resultado anterior reduce la búsqueda de las soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes del sigma modelo, a la búsqueda de elásticas libres clavadas y con signatura

$-\varepsilon$ del semi-plano \mathbf{AdS}_2 . Si hacemos uso del desarrollo hecho en el apéndice B, obtenemos que la ecuación que caracteriza a estas curvas es

$$2\bar{k}_\alpha'' - \bar{k}_\alpha^3 + 2\varepsilon\bar{k}_\alpha = 0.$$

Esta ecuación se integra obteniendo

$$\bar{k}_\alpha(s) = C \mathbf{cn} \left(\sqrt{\varepsilon - \frac{C^2}{2}} (s - a_o), \tilde{C} \right),$$

$$\text{para } s \in J \subseteq \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ a_o + \frac{2n+1}{\sqrt{\frac{C^2}{2} - \varepsilon}} E' \right\} & \text{si } \varepsilon - \frac{C^2}{2} < 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } \varepsilon - \frac{C^2}{2} > 0 \end{array} \right\},$$

donde $C \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2\varepsilon}, \sqrt{2\varepsilon}\}$ y $a_o \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias, $\tilde{C}^2 = \frac{C^2}{2C^2 - 4\varepsilon}$ y E' es la integral elíptica de primera clase con módulo $\sqrt{1 - \tilde{C}^2}$.

Tal y como avanzamos al principio de esta sección, a partir del teorema anterior se obtiene la clasificación de las soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes del sigma modelo para $M = [a_1, \infty[\times \mathbb{S}^1$, $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, $M = \mathbb{R}^2$ y $M = D(0, 1)$.

Corolario 3.2.3 Sea $M \in \{[s_1, \infty[\times \mathbb{S}^1, \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2, D(0, 1)\}$.

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbf{AdS}_2 \cup \{e_j e_x\}$ una curva diferenciable tal que la imagen de $\varphi_\alpha : I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{L}^3$ (definida como $\varphi_\alpha(s, e^{it}) = \mu_t(\alpha(s))$) es una inmersión diferenciable de M en \mathbb{L}^3 . Entonces, la superficie generada por α es una solución del sigma modelo si, y solo si, $\alpha|_{\alpha^{-1}(\mathbf{AdS}_2)}$ es una elástica libre en \mathbf{AdS}_2 , que está clavada en los puntos de su frontera en \mathbf{AdS}_2 (en caso de que dicha frontera sea no vacía).

En los casos en los que $M \in \{\mathbb{R}^2, D(0, 1)\}$, la naturaleza del dominio de definición de las elásticas libres de \mathbf{AdS}_2 , nos asegura que las únicas soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes vienen dadas por las geodésicas que parten del $e_j e_x$.

Corolario 3.2.4 *Las únicas superficies de Willmore de revolución en \mathbb{L}^3 con eje temporal y simplemente conexas son:*

- *componente conexas de un hiperboloide de dos hojas con eje el eje x y radio arbitrario,*
- *planos perpendiculares al eje x ,*
- *cualquier superficie \mathbf{A}_1 -invariante que sea subvariedad de alguna de las anteriores y sea topológicamente un disco.*

De éstas, sólo las superficies de los dos últimos apartados son solitones del sigma modelo.

Demostración: En primer lugar, démonos cuenta de que las superficies \mathbf{A}_1 -invariantes que son topológicamente un disco o un plano, son Riemannianas. Además, dichas superficies están generadas por curvas en \mathbf{AdS}_2 que tocan al *eje x* , por lo que su longitud es infinita. Si ahora nos fijamos en la expresión del intervalo de definición de las elásticas libres espaciales en \mathbf{AdS}_2 , observamos que, de estas curvas, las únicas que tienen longitud infinita son las geodésicas. Por último utilizamos que las geodésicas espaciales en \mathbf{AdS}_2 son rectas perpendiculares al *eje x* y medias ramas de hipérbolas espaciales, de radio arbitrario y centradas en el *eje x* .

Las superficies que son topológicamente un disco, son compactas, de donde se deduce inmediatamente que son solitones.

En el caso de un plano perpendicular al *eje x* es claro que $\|dN\|^2 \equiv 0$, por lo que también es solitón.

Por último, si tomamos una de las dos hojas de un hiperboloide con eje el *eje x* y radio $r > 0$, se calcula fácilmente que $\|dN\|^2 = 2/r^2$, con lo que quedaría probado que la superficie no es un solitón.

■

Los siguientes dibujos muestran dos soluciones \mathbf{A}_1 -invariantes del sigma modelo (en coordenadas respecto de la base usual de \mathbb{L}^3), tomando como el *eje x* el generado por un vector temporal distinto de $(0, 0, 1)$.



Solitón Riemanniano \mathbf{A}_1 -invariante Solución Lorentziana \mathbf{A}_1 -invariante

3.3 Primera variación del funcional de Willmore en una variedad semi-Riemanniana

En los dos casos que nos quedan por estudiar, esto es, los correspondientes a las soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes y \mathbf{A}_3 -invariantes, respectivamente, el grupo de rotaciones de cada uno de ellos no es compacto, lo cual nos impide utilizar el corolario del Principio de Criticalidad Simétrica usado en el Capítulo 1 y en la Sección 3.2 de este capítulo. Además, como la superficie M no es compacta, no tenemos asegurado que la imagen del funcional de Willmore esté en \mathbb{R} , por lo que tampoco podemos aplicar el Principio de Criticalidad Simétrica tal y como lo hemos usado.

En vista de esto, el camino a seguir pasa por el cálculo de la primera variación del funcional de Willmore. Como tenemos que trabajar con polígonos no nulos de M , podemos suponer que el dominio de las inmersiones es una superficie compacta. En un ambiente Riemanniano con curvatura seccional constante, estos cálculos se encuentran en [56]. Nosotros nos vamos a apoyar en dicho artículo para obtener la primera variación del funcional de Willmore en ambiente semi-Riemanniano y sin ningún tipo de restricción sobre la curvatura. El motivo por el cual no suponemos que la curvatura seccional es constante, es que en el desarrollo que vamos a llevar a cabo para obtener las citadas soluciones, vamos a realizar algunos cambios conformes sobre la métrica de \mathbb{L}^3 .

3.3.1 Preliminares y notación

Comencemos introduciendo algunos preliminares. La notación que vamos a usar es la de [56].

Sea M una superficie diferenciable orientable compacta con o sin frontera. Sea (\bar{M}, \bar{g}) una variedad semi-Riemanniana de dimensión 3. Sea $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ una inmersión diferenciable no degenerada. Solamente en esta sección, $\mathbf{I}^{\varphi(\partial M)}(M, \bar{M})$ va a denotar al espacio de inmersiones no degeneradas

con frontera fija $\varphi(\partial M)$ (no imponemos ninguna condición sobre el normal a lo largo de dicha frontera).

Una variación de φ en $\mathbf{I}^{\varphi(\partial M)}(M, \bar{M})$ es una aplicación diferenciable, $\Phi : M \times (-\delta, \delta) \rightarrow \bar{M}$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\varphi_0 = \varphi$ y
2. para cada $v \in (-\delta, \delta)$, la siguiente aplicación pertenece a $\mathbf{I}^{\varphi(\partial M)}(M, \bar{M})$

$$\varphi_v : M \rightarrow \bar{M}, \quad \varphi_v(m) = \Phi(m, v).$$

Notemos que, como consecuencia, $\Phi(m, v) = \varphi(m)$ para todo $m \in \partial M$.

Estamos en condiciones de usar toda la parafernalia de objetos geométricos a lo largo de una aplicación. En particular, podemos hablar de campos de vectores a lo largo de Φ , o lo que es lo mismo, de secciones del fibrado vectorial $\Phi^*(T\bar{M})$ sobre $M \times (-\delta, \delta)$. En concreto, vamos a considerar el siguiente campo vectorial a lo largo de Φ

$$\mathbf{V}(m, v) = \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v}(m, v) \right).$$

Este campo cumple que $\mathbf{V}(m, v) = 0 \forall m \in \partial M$. Además, cuando tomamos $v = 0$, no es sino el llamado campo variacional asociado a Φ

$$\mathbf{V}(m, 0) = \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v}(m, 0) \right).$$

En vista de lo anterior, es claro que el espacio tangente $T_\varphi(\mathbf{I}^{\varphi(\partial M)}(M, \bar{M}))$ está formado por aquellos campos vectoriales a lo largo de φ que se anulan en ∂M .

Una vez introducida toda la notación necesaria, vamos a considerar el problema variacional asociado al funcional de Willmore

$$\mathfrak{W} : \mathbf{I}^{\varphi(\partial M)}(M, \bar{M}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

$$\mathfrak{W}(\psi) = \int_M (H_\psi^2 + R_\psi) dA_\psi + \int_{\psi(\partial M)} k^\psi ds,$$

donde H_ψ denota la curvatura media de (M, ψ) , R_ψ es la curvatura seccional de $d\psi(TM)$ en (\bar{M}, \bar{g}) y k^ψ es la curvatura geodésica de $\psi(\partial M)$ en (M, \bar{g}) .

3.3.2 Cálculo de la primera variación

Procedamos ya al cálculo de la primera variación del funcional definido anteriormente. Dado $\mathbf{V} \in \mathcal{T}_\varphi(\mathbf{I}^{\varphi(\partial\mathbb{M})}(\mathbb{M}, \bar{\mathbb{M}}))$, tomamos la variación que lo tiene como campo variacional asociado, esto es

$$\Phi : \mathbb{M} \times (-\delta, \delta) \longrightarrow \bar{\mathbb{M}} \quad \text{tal que} \quad \mathbf{V}(m) = \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v}(m, 0) \right), \quad \forall m \in \mathbb{M}.$$

Para simplificar, cuando $v \neq 0$ notamos $\mathbb{M}_v = (\mathbb{M}, \varphi_v^* \bar{\mathbf{g}})$, $H_v = H_{\varphi_v}$, $\mathbb{R}_v = \mathbb{R}_{\varphi_v}$, $k^v = k^{\varphi_v}$ y $dA_v = dA_{\varphi_v}$. Además, a partir de ahora, vamos a notar también por \mathbf{V} a $\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial v}(m, v) \right)$.

En este ambiente

$$\delta \mathfrak{W}(\varphi)[\mathbf{V}] = \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[\int_{\mathbb{M}} (H_v^2 + \mathbb{R}_v) dA_v + \int_{\varphi(\partial\mathbb{M})} k^v ds \right] \right\}_{v=0}. \quad (3.1)$$

Calculemos paso a paso a qué es igual esta expresión.

Sea $\{\nu, T\}$ una referencia ortonormal positivamente orientada de $\partial\mathbb{M}$ en $(\mathbb{M}, \varphi^* \bar{\mathbf{g}})$, en la que T es el tangente unitario a $\partial\mathbb{M}$ y ν es el normal unitario a $\partial\mathbb{M}$ que apunta hacia fuera (ésta orientación es la considerada en el teorema de Stokes). Definimos $T_v = \varphi_{v*}(T) = \Phi_*(T, 0)$ y $\nu_v = \varphi_{v*}(\nu) = \Phi_*(\nu, 0)$. En el caso en el que $v = 0$, utilizaremos de nuevo las letras T y ν para notar a T_0 y ν_0 , respectivamente.

Debido a que la frontera es fija, $T_v = T$ para todo v , y por lo tanto el vector curvatura principal en $(\bar{\mathbb{M}}, \bar{\mathbf{g}})$, $\eta = \bar{\nabla}_T T$, tampoco depende de v . Si además usamos que $\bar{\mathbf{g}}(\eta, T)$ y $\bar{\mathbf{g}}(\nu, \bar{\nabla}_{\mathbf{V}} \nu_v)$ se anulan, obtenemos que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v} \int_{\varphi(\partial\mathbb{M})} k^v ds \right\}_{v=0} = - \int_{\partial\mathbb{M}} \bar{\mathbf{g}}(\eta, \bar{\nabla}_{\mathbf{V}} \nu_v) ds = - \int_{\partial\mathbb{M}} \bar{\mathbf{g}}(\eta^\perp, D_{\mathbf{V}} \nu_v) ds,$$

donde \perp indica la componente normal y D es la conexión normal de (\mathbb{M}, φ) en $(\bar{\mathbb{M}}, \bar{\mathbf{g}})$.

El lema de Schwarz nos asegura que $D_{\mathbf{V}} \nu_v = D_\nu \mathbf{V}$, además $D_\nu \mathbf{V}^\top = B(\nu, \mathbf{V}^\top)$ donde B denota a la segunda forma fundamental de φ . Como estamos trabajando en $\partial\mathbb{M}$ y ahí \mathbf{V} se anula idénticamente, tenemos que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v} \int_{\varphi(\partial\mathbb{M})} k^v ds \right\}_{v=0} = - \int_{\varphi(\partial\mathbb{M})} \bar{\mathbf{g}}(\eta^\perp, D_\nu \mathbf{V}^\perp) ds. \quad (3.2)$$

Nota 3.3.1 *Bajo las condiciones de frontera tomadas en el resto de secciones de este capítulo (frontera y normal a lo largo de la misma fijos) $D_\nu \mathbf{V}^\perp = 0$ y por lo tanto*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v} \int_{\varphi(\partial M)} k^v ds \right\}_{v=0} = 0.$$

Lo cual no es nada sorprendente, ya que bajo dichas condiciones de frontera la curvatura total de la frontera es constante.

Para obtener la variación de la primera integral que aparece en (3.1), necesitamos llevar a cabo algunos cálculos previos que recogemos en el siguiente lema.

Lema 3.3.2 *Las siguientes afirmaciones son ciertas.*

1. *Sea el campo vectorial a lo largo de Φ tal que $\mathbf{H}(m, v)$ es el vector curvatura media de (M, φ_v) en m , entonces*

$$\left\{ D_{\frac{\partial}{\partial v}} \mathbf{H} \right\}_{v=0} = \frac{1}{2} \left[\Delta \mathbf{V}^\perp + \tilde{A}(\mathbf{V}^\perp) + \varepsilon \text{Ric}(N_\varphi, N_\varphi) \mathbf{V}^\perp \right] + D_{\mathbf{V}^\top} \mathbf{H},$$

donde Δ es el Laplaciano relativo a la conexión normal, D , \tilde{A} es el operador de Simons ([51]), Ric es el tensor de Ricci de (\bar{M}, \bar{g}) y $\varepsilon = \bar{g}(N_\varphi, N_\varphi)$.

2. *La variación del elemento de volumen viene dada por la siguiente fórmula*

$$\left\{ \frac{d}{dv} (dA_v) \right\}_{v=0} = -2\bar{g}(\mathbf{H}, \mathbf{V}) dA + d\theta,$$

donde $dA = dA_0$ y θ es la uno-forma definida como $\theta(Z) = dA(\mathbf{V}^\top, Z)$.

Nota 3.3.3 *No vamos a incluir la prueba de este lema. La demostración de 1 es análoga a la que se encuentra en [56] para el caso Riemanniano. La prueba de 2 es de nuevo muy parecida a la del caso Riemanniano, ésta puede ser consultada en [52]*

Nota 3.3.4 *Dada una referencia ortonormal en \bar{M} , $\{E_1, E_2, E_3\}$, tenemos*

$$\varepsilon \text{Ric}(N_\varphi, N_\varphi) \mathbf{V}^\perp = \sum_i \varepsilon_i \left(\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{V}^\perp, E_i, E_i) \right)^\perp,$$

donde $\varepsilon_i = \bar{\mathbf{g}}(E_i, E_i)$. Si en el apartado 1 del lema anterior hacemos uso de esta igualdad, de modo que N_φ desaparezca, el resultado de este apartado (y la demostración del mismo) sigue siendo cierto cuando $\dim(\mathbf{M}) = d < n = \dim(\bar{\mathbf{M}})$.

A continuación usamos el lema anterior, junto con el hecho de que $H_v^2 = \varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$, para obtener

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v} [(H_v^2 + R_v) dA_v] \right\}_{v=0} = [\varepsilon \bar{\mathbf{g}}(\Delta \mathbf{V}^\perp, \mathbf{H}) + \mathbf{V}^\top (H_\varphi^2) + \left(\frac{\partial R_v}{\partial v} \right)_{v=0}] dA \\ + \bar{\mathbf{g}} \left(\varepsilon \tilde{A}(\mathbf{H}) + \text{Ric}(N_\varphi, N_\varphi) \mathbf{H} - 2(H_\varphi^2 + R_\varphi) \mathbf{H}, \mathbf{V}^\perp \right) dA + (H_\varphi^2 + R_\varphi) d\theta.$$

Por otro lado, $(H_\varphi^2 + R_\varphi) d\theta = d((H_\varphi^2 + R_\varphi) \theta) - (\mathbf{V}^\top (H_\varphi^2 + R_\varphi)) dA$. Como θ se anula sobre $\partial \mathbf{M}$, tenemos que

$$\int_{\mathbf{M}} (H_\varphi^2 + R_\varphi) d\theta = - \int_{\mathbf{M}} (\mathbf{V}^\top (H_\varphi^2 + R_\varphi)) dA.$$

Es fácil comprobar que la proposición (1.2) de [56] es cierta también en ambiente semi-Riemanniano. Podemos entonces hacer uso de ella para llegar a

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v} \int_{M_v} (H_v^2 + R_v) dA_v \right\}_{v=0} = \int_{\mathbf{M}} \left[\bar{\mathbf{g}}(\mathfrak{R}(\mathbf{H}), \mathbf{V}^\perp) + \mathbf{V}^\perp(\mathbf{R}^\mathbf{V}) \right] dA \\ + \varepsilon \int_{\partial \mathbf{M}} \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{H}, D_\nu \mathbf{V}^\perp) ds,$$

donde $\mathfrak{R} = \varepsilon(\Delta + \tilde{A}) + (\text{Ric}(N_\varphi, N_\varphi) - 2(H_\varphi^2 + R_\varphi)) \mathbf{I}$ es un operador tipo Schrödinger, \mathbf{I} es la identidad y $\mathbf{R}^\mathbf{V}(\Phi(m, v)) = R_v(m)$. Finalmente, combinamos esta última fórmula con (3.2) para obtener

$$\delta \mathfrak{W}(\varphi)[\mathbf{V}] = \int_{\mathbf{M}} \left[\bar{\mathbf{g}}(\mathfrak{R}(\mathbf{H}) + (\nabla \mathbf{R}^\mathbf{V})^\perp, \mathbf{V}^\perp) \right] dA + \int_{\partial \mathbf{M}} \bar{\mathbf{g}}(\varepsilon \mathbf{H} - \eta^\perp, D_\nu \mathbf{V}^\perp) ds,$$

siendo $(\nabla \mathbf{R}^\mathbf{V})^\perp = \varepsilon N_\varphi(\mathbf{R}^\mathbf{V}) N_\varphi$ la componente normal del gradiente de $\mathbf{R}^\mathbf{V}$.

En el siguiente teorema resumimos los cálculos que hemos llevado a cabo.

Teorema 3.3.5 *En el ambiente de esta sección, (M, φ) es una superficie de Willmore en (\bar{M}, \bar{g}) con frontera fija $\varphi(\partial M)$, si, y solo si,*

$$\int_M \left[\bar{g}(\mathfrak{R}(\mathbf{H}) + \varepsilon N_\varphi(\mathbf{R}^{\mathbf{V}})N_\varphi, \mathbf{V}^\perp) \right] dA + \int_{\partial M} \bar{g}(\varepsilon \mathbf{H} - \eta^\perp, D_\nu \mathbf{V}^\perp) ds = 0, \quad (3.3)$$

para todo campo $\mathbf{V} \in \mathbf{T}_\varphi(\mathbf{I}^{\varphi(\partial M)}(M, \bar{M}))$.

De ahora en adelante, tomamos como condiciones de frontera las que hemos considerado en todo el capítulo excepto en esta sección. Esto es, sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ una familia numerable de curvas regulares no degeneradas en \bar{M} , que son disjuntas dos a dos; y sea N_o un campo unitario definido a lo largo de Γ , que es ortogonal a Γ y tiene carácter causal constante igual a ε . Consideremos el espacio de inmersiones $\mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \bar{M})$, que consiste de aquellas inmersiones $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ que cumplen

$$\varphi(\partial M) = \Gamma, \quad N_\varphi = N_o \circ \varphi \quad \text{a lo largo de } \partial M \quad \text{y} \quad \bar{g}(N_\varphi, N_\varphi) = \varepsilon.$$

En este ambiente $D_\nu(\mathbf{V})^\perp = 0$, y por lo tanto el término de frontera se anula. Como consecuencia, las superficies de Willmore en (\bar{M}, \bar{g}) que tienen frontera fija y normal a lo largo de dicha frontera también fijo, están caracterizadas como aquellas para las que se cumple

$$\int_M \left[\bar{g}(\mathfrak{R}(\mathbf{H}) + \varepsilon N_\varphi(\mathbf{R}^{\mathbf{V}})N_\varphi, \mathbf{V}^\perp) \right] dA = 0, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{T}_\varphi(\mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \bar{M})). \quad (3.4)$$

Calculemos el término $(\Delta + \tilde{A})(\mathbf{H})$ en términos de H_φ . Para ello vamos a necesitar construir una referencia ortonormal especial a lo largo de la inmersión, además del siguiente resultado sobre el laplaciano.

Lema 3.3.6 *Dada una inmersión $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ y dado $m \in M$, sea $\{E_1, E_2\}$ una referencia ortonormal a lo largo de φ , definida en un entorno de m , que cumple $E_i^\perp = 0$ y $\nabla_{E_i} E_j = 0$ para $i, j \in \{1, 2\}$. Llamemos $\varepsilon_i = \bar{g}(E_i, E_i)$ para $i = 1, 2$. Si X es un campo a lo largo de φ que es normal a $\varphi(M)$, entonces*

$$\Delta X(m) = \sum_{i=1,2} \varepsilon_i D_{E_i} D_{E_i} X.$$

Demostración: El laplaciano de X en un entorno de m es igual a

$$\Delta X = \sum_{i=1,2} \varepsilon_i [D_{E_i}(D_{E_i}X) - X(\nabla_{E_i}E_i)] = \sum_{i=1,2} \varepsilon_i D_{E_i}(D_{E_i}X).$$

■

Proposición 3.3.7 $\Delta \mathbf{H} = (\Delta H)N_\varphi$ y $\tilde{A}(\mathbf{H}) = \varepsilon H_\varphi(4H_\varphi^2 - 2\varepsilon(G_\varphi - R_\varphi))N_\varphi$, donde G_φ es la curvatura de Gauss de $(M, \varphi^*\bar{g})$.

Demostración: Dada $\varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(M, \bar{M})$ tomemos $m \in M$ y una base, $\{e_1, e_2\}$, ortonormal y positivamente orientada de $(T_{\varphi(m)}\bar{M})^\top$. Trasladamos esta base a lo largo de geodésicas de M , paralelamente con respecto a la conexión tangente, ∇ , obteniendo la referencia $\{E_1, E_2\}$. Traslademos a lo largo de geodésicas en M y paralelamente con respecto a la conexión normal, D , el vector $N_\varphi(m)$, obteniendo el campo E_3 . Gracias a que $\nabla_{E_i}E_j(m) = 0$ para $i, j \in \{1, 2\}$ y a que \mathbf{H} es una sección del fibrado normal a la inmersión, podemos asegurar que en m

$$\Delta \mathbf{H} = \sum_{i=1,2} \varepsilon_i D_{E_i} D_{E_i} \mathbf{H} = \left[\sum_{i=1,2} \varepsilon_i E_i(E_i(H_\varphi)) \right] N_\varphi = (\Delta H_\varphi)N_\varphi.$$

En la segunda igualdad hemos utilizado que $D_{E_i}N_\varphi(m) = 0$ para $i = 1, 2$.

Pasemos ahora a calcular $\tilde{A}(\mathbf{H})$.

$$\tilde{A}(\mathbf{H}) = \varepsilon \bar{g}(\tilde{A}(\mathbf{H}), N_\varphi)N_\varphi = \varepsilon \bar{g}(A(\mathbf{H}), A(N_\varphi))N_\varphi,$$

donde $A(X)$ es el endomorfismo de Weingarten asociado al campo normal X . Por tanto,

$$\tilde{A}(\mathbf{H}) = \varepsilon H_\varphi \bar{g}(A(N_\varphi), A(N_\varphi))N_\varphi = \varepsilon H_\varphi \|dN_\varphi\|^2 N_\varphi.$$

Utilizamos ahora la relación clásica existente entre la norma de la segunda forma fundamental, la curvatura media de la inmersión y su curvatura de Gauss-Kronecker ($\|dN_\varphi\|^2 = 4H_\varphi^2 - 2\det(dN_\varphi)$), y obtenemos que

$$\tilde{A}(\mathbf{H}) = \varepsilon H_\varphi(4H_\varphi^2 - 2\det(dN_\varphi))N_\varphi = \varepsilon H_\varphi(4H_\varphi^2 - 2\varepsilon(G_\varphi - R_\varphi))N_\varphi.$$

■

Aplicando esta proposición, (3.4) queda reducida a

$$\int_{\mathbb{M}} [\varepsilon \Delta H_\varphi + H_\varphi (2H_\varphi^2 - 2\varepsilon G_\varphi + \text{Ric}(N_\varphi, N_\varphi) + 2R_\varphi(\varepsilon - 1)) + \varepsilon N_\varphi(\mathbb{R}^{\mathbf{V}})] \bar{g}(N_\varphi, \mathbf{V}^\perp) dA = 0, \quad \forall \mathbf{V} \in T_\varphi(\mathbf{I}_\Gamma^\varepsilon(\mathbb{M}, \bar{\mathbb{M}})). \quad (3.5)$$

Nota 3.3.8 El término $\mathbb{R}^{\mathbf{V}}$ depende del campo variacional tomado.

Nota 3.3.9 En el caso en el que la curvatura seccional del ambiente es constante, $N_\varphi(\mathbb{R}^{\mathbf{V}}) = 0$ y $\text{Ric}(N_\varphi, N_\varphi) = 2\varepsilon R$. Por lo tanto, las superficies de Willmore con frontera y normal a lo largo de la misma fijos, están caracterizadas por la ecuación

$$\Delta H_\varphi + 2H_\varphi(\varepsilon H_\varphi^2 - 2G_\varphi + 2(2 - \varepsilon)R) = 0. \quad (3.6)$$

3.4 Soluciones Riemannianas \mathbf{A}_2 -invariantes o superficies de Willmore Riemannianas de rotación en \mathbb{L}^3 con eje espacial

Las superficies \mathbf{A}_2 -invariantes inmersas en \mathbb{L}^3 fueron clasificadas en el Capítulo 2. A partir de ahora adoptamos la notación de dicho capítulo y llamamos *eje* x al eje de revolución. Vamos a comenzar considerando el caso Riemanniano. Recordemos que, en el caso Riemanniano, las superficies \mathbf{A}_2 -invariantes solo pueden existir en dos de las cuatro regiones fundamentales, \mathcal{R}^+ y \mathcal{R}^- . Cada una de dichas superficies está generada por una curva espacial, α , inmersa en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ o $\tilde{\mathcal{R}}^-$,

$$\Sigma_\alpha = \{\xi_t(\alpha(s)) : s \in I, t \in \mathbb{R}\}.$$

Como estamos considerando la frontera de las superficies como parte de las mismas, es necesario exigir que α no toque al eje de revolución para que la superficie sea diferenciable.

El objetivo de esta sección es encontrar las curvas que generan superficies que son soluciones del sigma modelo. Como nuestro sigma modelo es

equivalente al problema variacional de Willmore en $\mathbf{I}_{\partial\Sigma_\alpha}^{-1}(M, \mathbb{L}^3)$, el problema anterior se reduce a encontrar aquellas curvas α que generan superficies de Willmore Riemannianas en \mathbb{L}^3 con frontera fija y normal a lo largo de la misma también fijo. Posteriormente, estudiaremos cuáles de estas superficies hacen que \mathfrak{S} tome un valor real.

Para afrontar el próximo resultado, es necesario recordar que el lema 2.5.4 nos proporciona cambios conformes de la métrica en \mathcal{R}^+ y \mathcal{R}^- que convierten a ambas regiones en productos semi-Riemannianos de un plano de de Sitter y una circunferencia unitaria espacial en un plano Lorentziano perpendicular al eje de revolución.

Teorema 3.4.1 *Sea α una curva espacial inmersa en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ o $\tilde{\mathcal{R}}^-$, que no tiene ningún punto de su frontera en el eje de revolución. Σ_α es una superficie de Willmore con frontera y normal a lo largo de ella fijos, si, y solo si, α es una elástica libre clavada (en el caso en el que su frontera en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ o $\tilde{\mathcal{R}}^-$, respectivamente, sea no vacía) en el plano de de Sitter $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ o en el plano de de Sitter $(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g)$, respectivamente.*

Demostración: Vamos a considerar exclusivamente el caso en el que α está inmersa en $\tilde{\mathcal{R}}^+$, ya que el otro caso es análogo. La prueba se divide en los siguientes pasos:

- Uso de la invarianza conforme del funcional de Willmore.
- Cálculo del término $N_{\Sigma_\alpha}(\mathbb{R}^V)$.
- Reducción del problema al de las elásticas libres clavadas en el semi plano de de Sitter $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$.

3.4.1 Uso de la invarianza conforme del funcional de Willmore

En el ambiente del enunciado, las condiciones de frontera del problema variacional vienen dadas por $\Gamma = \partial\Sigma_\alpha$ y $N_o = N_{\Sigma_\alpha}$. La topología de las superficies generadas por una curva en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ es la de una banda, un semiplano o un plano. Por lo que M puede ser $[a_1, a_2] \times \mathbb{R}$, $[a_1, \infty[\times \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^2 . Tal y como ocurría con las superficies de revolución con eje temporal, una vez probado

el resultado para el caso $M = [a_1, a_2] \times \mathbb{R}$, la demostración de los otros casos es trivial. Tomemos entonces $M = [a_1, a_2] \times \mathbb{R}$.

Notemos que $\mathbf{I}_{\partial\Sigma_\alpha}^{-1}(M, \mathcal{R}^+)$ es un abierto de $\mathbf{I}_{\partial\Sigma_\alpha}^{-1}(M, \mathbb{L}^3)$. Usando este hecho, así como la invarianza conforme del funcional de Willmore, concluimos que Σ_α es una superficie de Willmore Riemanniana en \mathbb{L}^3 si, y solo si, Σ_α es una superficie de Willmore Riemanniana en $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$, esto es, para todo polígono no nulo asociado en $(M, \varphi_\alpha^* \frac{1}{f_+^2}g)$, K , la restricción de φ_α a K , $\varphi_\alpha|_K$, es punto crítico de $(\mathbf{I}_{\varphi_\alpha(\partial K)}^{-1}(K, \mathcal{R}^+); \overline{\mathfrak{W}})$, donde $\varphi_\alpha(s, t) = \xi_t(\alpha(s))$, $\overline{\mathfrak{W}}$ es el funcional de Willmore de $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$.

De ahora en adelante vamos a notar con una barra a todos los elementos de $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$. Y para simplificar la notación vamos a llamar $\bar{N}_\alpha = \bar{N}_{\Sigma_\alpha}$ y $\bar{H}_\alpha = \bar{H}_{\Sigma_\alpha}$. Denotemos por \bar{R}_α a la curvatura seccional de $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ a lo largo de Σ_α , y por \bar{G}_α a la curvatura de Gauss de Σ_α con la métrica inducida por $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$.

3.4.2 Cálculo del término $\bar{N}_\alpha(\bar{R}^V)$

La superficie Σ_α es un punto crítico del problema $(\mathbf{I}_{\partial\Sigma_\alpha}^{-1}(M, \mathcal{R}^+); \overline{\mathfrak{W}})$ si, y solo si, (3.5) es cierta cuando tomamos $\varepsilon = -1$, $(\bar{M}, \bar{g}) = (\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ y como M cualquier polígono no nulo contenido en Σ_α . Lo que a nosotros nos interesa es obtener una caracterización de dichos puntos críticos como la solución de una ecuación diferencial, cuyos términos dependan exclusivamente de Σ_α . En esta dirección, observemos cómo es la integral que aparece en (3.5). Tenemos una expresión que multiplica a $\bar{g}(\bar{N}_\alpha, \mathbf{V}^\perp)$ y que depende del campo variacional \mathbf{V} . Si dicha dependencia no existiese, podríamos asegurar que la expresión igualada a 0 es la ecuación diferencial que estamos buscando. Existe un único término en la citada expresión que depende del campo variacional, $\bar{N}_\alpha(\bar{R}^V)$. Éste es el motivo por el cual en este apartado nos vamos a centrar en su estudio.

Tomemos un punto, $p \in \Sigma_\alpha$, y calculemos \bar{R}^V a lo largo de una curva, γ , que cumpla $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \bar{N}_\alpha(p)$. Sea $\varphi_\alpha : [a_1, a_2] \times \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ una parametrización de Σ_α definida como $\varphi_\alpha(s, t) = \xi_t(\alpha(s))$. Escribamos $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s))$, de modo que $\frac{1}{f_+^2}g(\alpha', \alpha') = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\bar{N}_\alpha(\varphi_\alpha(s, t)) &= \bar{N}_\alpha(s, t) = \xi_t((\alpha'_3(s), 0, \alpha'_1(s)) = \\ &= (\alpha'_3(s), \alpha'_1(s) \sinh t, \alpha'_1(s) \cosh t).\end{aligned}$$

Dado $\mathbf{V} \in \mathbf{T}_{\varphi_\alpha}(\mathbf{I}_{\partial\Sigma_\alpha}^{-1}(M, \mathcal{R}^+))$ con soporte compacto (recordemos que estamos trabajando con polígonos no nulos en Σ_α), una variación de φ_α asociada a \mathbf{V} es

$$\Phi : (-\delta, \delta) \times [a_1, a_2] \times \mathbb{R} \rightarrow \left(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2} g \right), \quad \Phi(v, s, t) = \varphi_\alpha(s, t) + v\mathbf{V}(\varphi_\alpha(s, t)).$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\mathbf{V}^\top = 0$ (miremos para ello de nuevo (3.5)). En este caso, existe una función, $f : [a_1, a_2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto, tal que $\mathbf{V} = f\bar{N}_\alpha$, y por tanto

$$\Phi(v, s, t) = \varphi_\alpha(s, t) + vf(s, t)\bar{N}_\alpha(s, t).$$

Dado un punto $\Phi(v_o, s_o, t_o)$, entonces $\bar{\mathbf{R}}^\mathbf{V}(\Phi(v_o, s_o, t_o))$ es la curvatura seccional del plano generado por $\{(\partial_s\Phi)(v_o, s_o, t_o), (\partial_t\Phi)(v_o, s_o, t_o)\}$. Recordemos que $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2} g) = (\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{\tilde{f}_+^2} g) \times (\mathbb{H}^+, dt^2)$ y denotemos por

$$\Pi^1 : \left(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2} g \right) \longrightarrow \left(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{\tilde{f}_+^2} g \right) \quad \text{y} \quad \Pi^2 : \left(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2} g \right) \longrightarrow (\mathbb{H}^+, dt^2)$$

a las proyecciones canónicas. Es claro que

$$\bar{\mathcal{R}}(\Phi_s, \Phi_t, \Phi_t, \Phi_s) = \tilde{\mathcal{R}}(E_s, E_t, E_t, E_s),$$

donde $\bar{\mathcal{R}}$ es el tensor curvatura de $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2} g)$, $\tilde{\mathcal{R}}$ es el tensor curvatura de $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{\tilde{f}_+^2} g)$, $E_s = d\Pi^1(\partial_s\Phi)$ y $E_t = d\Pi^1(\partial_t\Phi)$. Por tanto

$$\bar{\mathbf{R}}^\mathbf{V}(\Phi(v_o, s_o, t_o)) = \frac{\tilde{\mathcal{R}}(E_s, E_t, E_t, E_s)}{\frac{1}{f_+^2} g(\partial_s\Phi, \partial_s\Phi) \frac{1}{\tilde{f}_+^2} g(\partial_t\Phi, \partial_t\Phi) - (\frac{1}{f_+^2} g(\partial_s\Phi, \partial_t\Phi))^2}.$$

Observemos que el vector normal en $\varphi_\alpha(s_o, t_o)$ es $\bar{N}_\alpha(s_o, t_o) = \gamma'(0)$, donde

$$\gamma(\tau) = \varphi_\alpha(s_o, t_o) + \tau\bar{N}_\alpha(s_o, t_o) = \Phi\left(\frac{\tau}{f(s_o, t_o)}, s_o, t_o\right).$$

Para calcular el valor $\bar{\mathbf{R}}^{\mathbf{V}}$ a lo largo de γ , utilizamos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(E_s, E_t, E_t, E_s) &= \tau^2 \left(\frac{\partial_t f}{f} \right)^2 [\tilde{\mathcal{R}}(U_o, V_1, V_1, U_o) + \\ &+ 2\tau \tilde{\mathcal{R}}(U_o, V_1, V_1, U_1) + \tau^2 \tilde{\mathcal{R}}(U_1, V_1, V_1, U_1)], \end{aligned}$$

siendo $U_o = (\alpha'_1, 0, \alpha'_3)$, $U_1 = (\frac{\partial_s f}{f} \alpha'_3 + \alpha''_3, 0, \frac{\partial_s f}{f} \alpha'_1 + \alpha''_1)$ y $V_1 = (\alpha'_3, 0, \alpha'_1)$. Además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_+^2} g(\partial_s \Phi, \partial_s \Phi) \frac{1}{f_+^2} g(\partial_t \Phi, \partial_t \Phi) - \left(\frac{1}{f_+^2} g(\partial_s \Phi, \partial_t \Phi) \right)^2 &= \\ = \frac{\alpha_3^4 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + b_4 \tau^4}{(\alpha_3 + \tau \alpha'_1)^4}, \end{aligned}$$

donde b_1, b_2, b_3 y b_4 son funciones que no dependen de τ . Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}^{\mathbf{V}} \left(\Phi \left(\frac{\tau}{f(s_o, t_o)}, s_o, t_o \right) \right) &= \tau^2 \left(\frac{\partial_t f}{f} \right)^2 \frac{(\alpha_3 + \tau \alpha'_1)^4}{\alpha_3^4 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + b_4 \tau^4} \cdot \\ &\cdot \left[\tilde{\mathcal{R}}(U_o, V_1, V_1, U_o) + 2\tau \tilde{\mathcal{R}}(U_o, V_1, V_1, U_1) + \tau^2 \tilde{\mathcal{R}}(U_1, V_1, V_1, U_1) \right]. \end{aligned}$$

Como $\alpha_3 > 0$, finalmente obtenemos que

$$\bar{N}_\alpha(\bar{\mathbf{R}}^{\mathbf{V}})(\varphi(s_o, t_o)) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \left(\bar{\mathbf{R}}^{\mathbf{V}} \left(\Phi \left(\frac{\tau}{f(s_o, t_o)}, s_o, t_o \right) \right) \right) = 0.$$

3.4.3 Reducción del problema al de las elásticas libres clavadas en el plano de de Sitter $\left(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2} g \right)$

El resultado del apartado anterior nos permite caracterizar los puntos críticos de $(\mathbf{I}_{\partial \Sigma_\alpha}^{-1}([a_1, a_2] \times \mathbb{R}, \mathcal{R}^+); \bar{\mathfrak{M}})$ como las soluciones de la siguiente ecuación de Euler-Lagrange

$$-\Delta \bar{H}_\alpha + \bar{H}_\alpha (\|d\bar{N}_\alpha\|^2 + \text{Ric}(\bar{N}_\alpha, \bar{N}_\alpha) - 2(\bar{H}_\alpha^2 + \bar{\mathbf{R}}_\alpha)) = 0 \quad \text{en } \Sigma_\alpha.$$

Usando $\|d\bar{N}_\alpha\|^2 = 4\bar{H}_\alpha^2 - 2 \det(-d\bar{N}_\alpha)$ y $\bar{G}_\alpha = \bar{\mathbf{R}}_\alpha - \det(-d\bar{N}_\alpha)$, la anterior ecuación es equivalente a

$$-\Delta \bar{H}_\alpha + \bar{H}_\alpha (2\bar{H}_\alpha^2 + 2\bar{G}_\alpha - 4\bar{\mathbf{R}}_\alpha + \text{Ric}(\bar{N}_\alpha, \bar{N}_\alpha)) = 0.$$

Podemos simplificar aún más esta ecuación, utilizando que $\bar{R}_\alpha = 0$. Ésto último se debe a que es una curvatura seccional mixta en el siguiente producto semi-Riemanniano $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g) = (\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g) \times (\mathbb{H}^+, dt^2)$. Además, $\Sigma_\alpha = (\text{Traza}(\alpha), \frac{1}{f_+^2}g) \times (\mathbb{H}^+, dt^2)$ es también un producto semi-Riemanniano, y por lo tanto $\bar{G}_\alpha = 0$. Recordemos que $d\Pi^1(\partial_s\varphi) = \alpha'$, $d\Pi^1(\partial_t\varphi) = d\Pi^2(\bar{N}_\alpha) = 0$ y $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ tiene curvatura seccional 1, por lo que llegamos a que $\text{Ric}(\bar{N}_\alpha, \bar{N}_\alpha) = -1$. Teniendo en cuenta que $d\Pi^2(\partial_s\varphi) = 0$, calculamos la curvatura media,

$$\bar{H}_\alpha = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_{\partial_s\varphi}\partial_s\varphi)^\perp + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_{\partial_t\varphi}\partial_t\varphi)^\perp = \frac{1}{2}((d\Pi^1)^{-1}(\tilde{\nabla}_{\alpha'}\alpha'))^\perp = -\frac{1}{2}\tilde{k}_\alpha\bar{N}_\alpha,$$

donde $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de $(\mathcal{R}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$, $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ y \tilde{k}_α es la curvatura de α en $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$. Como consecuencia obtenemos que $\bar{H}_\alpha = -\frac{1}{2}\tilde{k}_\alpha$ y $\Delta\bar{H}_\alpha = -\frac{1}{2}\tilde{k}_\alpha''$. Usando todos estos cálculos, concluimos que Σ_α es un punto crítico de $(\mathbf{I}_{\partial\Sigma_\alpha}^{-1}([a_1, a_2] \times \mathbb{R}, \mathcal{R}^+); \bar{\mathfrak{M}})$ si, y solo si,

$$2\tilde{k}_\alpha'' - \tilde{k}_\alpha^3 + 2\tilde{k}_\alpha = 0. \quad (3.7)$$

Si consultamos el Apéndice B del capítulo dedicado a los apéndices, es fácil ver que esta ecuación caracteriza a las elásticas libres en $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$. Y con ello terminamos la demostración del teorema.

■

Las soluciones de la ecuación (3.7) con imagen contenida en \mathbb{R} , vienen dadas por la siguiente expresión. Ésta ha sido obtenida teniendo en cuenta el apéndice citado anteriormente, y razonando de forma similar a como se hizo en 1.3.9.

$$\tilde{k}_\alpha(s) = C \mathbf{cn} \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{2}} (s - a_o), \tilde{C} \right), \quad \text{para}$$

$$s \in \mathbb{J} \subseteq \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \text{si } C^2 < 2, \\ \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ a_o + \frac{(2n+1)E'}{\sqrt{\frac{C^2}{2} - 1}} \right\} & \text{si } C^2 > 2, \end{array} \right\},$$

donde $C \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ y $a_o \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias, $\tilde{C}^2 = \frac{C^2}{2C^2 - 4}$, s es el parámetro arco y E' la integral elíptica de primera clase con módulo $\sqrt{1 - \tilde{C}^2}$.

El cálculo de los solitones Riemannianos del sigma modelo pasa por hallar una expresión de $\mathfrak{S}(\varphi_\alpha)$ en términos de la curvatura elástica de α , para cualquier curva elástica libre clavada en $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ o en $(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g)$. Nos vamos a centrar en las curvas del primer espacio, el otro caso es análogo.

Sea $\alpha : [a_1, a_2] \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}^+$ una curva espacial, que es una elástica libre clavada en $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$. Reparametricémosla por su longitud de arco. La superficie que genera, Σ_α , es Riemanniana, y por tanto tiene sentido considerar la siguiente integral,

$$\int_{[a_1, a_2] \times \mathbb{R}} \|dN_\alpha\|^2 dA_\alpha.$$

Esta integral puede valer $+\infty$. Nuestro objetivo es estudiar bajo qué condiciones no ocurre esto.

Descomponemos $[a_1, a_2] \times \mathbb{R}$ como la unión en $n \in \mathbb{Z}$ de $C_n = [a_1, a_2] \times [n, n + 1]$. Fijamos $n \in \mathbb{Z}$ y estudiamos la integral de $\|dN_\alpha\|^2$ en C_n . Al ser C_n compacto, podemos combinar la relación $\|dN_\alpha\|^2 = 4H_\alpha^2 + 2G_\alpha$, con el uso del Teorema clásico de Gauss-Bonnet. Además, la suma de los ángulos de C_n es 2π , por lo que obtenemos que

$$\int_{C_n} \|dN_\alpha\|^2 dA_\alpha = 4\mathfrak{W}(\varphi_\alpha|_{C_n}) - 6 \int_{\varphi_\alpha(\partial C_n)} k^\alpha ds,$$

recordemos que k^α es la curvatura geodésica en Σ_α con la métrica inducida de \mathbb{L}^3 . Si además tenemos en cuenta que los elementos de \mathbf{A}_2 son isometrías y que la frontera de $\varphi_\alpha(C_n)$ está orientada de modo que su normal apunte hacia el interior, concluimos que

$$\int_{C_n} \|dN_\alpha\|^2 dA_\alpha = 4\mathfrak{W}(\varphi_\alpha|_{C_n}) - 6 \int_{\varphi_\alpha(\{a_1, a_2\} \times [n, n+1])} k^\alpha ds.$$

Usando el mismo tipo de razonamiento que en la demostración del Teorema 3.2.1, podemos afirmar que

$$\mathfrak{W}(\varphi_\alpha|_{C_n}) = \frac{1}{4} \int_{[a_1, a_2]} \tilde{k}_\alpha^2 ds.$$

Por otra parte, la curvatura geodésica a lo largo de $\varphi_\alpha(\{a_i\} \times [n, n+1])$ es constante, y vale $(-1)^i \frac{\alpha'_3(a_i)}{\alpha_3(a_i)}$, para $i = 1, 2$, donde α_3 es la tercera coordenada de α . Con lo que

$$\int_{\varphi_\alpha(\{a_1, a_2\} \times [n, n+1])} k^\alpha ds = \frac{\alpha'_3(a_2)}{\alpha_3(a_2)} - \frac{\alpha'_3(a_1)}{\alpha_3(a_1)}.$$

Luego

$$\int_{C_n} \|dN_\alpha\|^2 dA_\alpha = \int_{[a_1, a_2]} \tilde{k}_\alpha^2 ds - 6 \left(\frac{\alpha'_3(a_2)}{\alpha_3(a_2)} - \frac{\alpha'_3(a_1)}{\alpha_3(a_1)} \right).$$

En vista de la anterior expresión, y teniendo en cuenta que $\|dN_\alpha\|^2 \geq 0$, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 3.4.2 *Sea $\alpha : [a_1, a_2] \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}}^+$ una curva espacial parametrizada por su longitud de arco, $\alpha = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$, que es una elástica libre clavada en $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$. Entonces, φ_α es un solitón del sigma modelo si, y solo si,*

$$\int_{[a_1, a_2]} \tilde{k}_\alpha^2 ds = 6 \left(\frac{\alpha'_3(a_2)}{\alpha_3(a_2)} - \frac{\alpha'_3(a_1)}{\alpha_3(a_1)} \right).$$

En cuyo caso, $\mathfrak{S}(\varphi_\alpha) = 0$.

Este resultado sigue siendo cierto cuando cambiamos $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ por $(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g)$. Además, a partir de él se pueden obtener resultados de caracterización de los solitones cuando $M = [a_1, +\infty[\times \mathbb{R}$ y cuando $M = \mathbb{R}^2$.

3.5 Soluciones Lorentzianas \mathbf{A}_2 -invariantes o superficies de Willmore Lorentzianas de rotación en \mathbb{L}^3 con eje espacial

En esta sección nos vamos a centrar en encontrar una descripción de la clase de soluciones del sigma modelo que son Lorentzianas y \mathbf{A}_2 -invariantes.

Este caso es más complejo que el de las soluciones Riemannianas, debido a que tenemos dos tipos distintos de superficies Lorentzianas fundamentales \mathbf{A}_2 -invariantes, y además, hemos estudiado que existen superficies Lorentzianas \mathbf{A}_2 -invariantes que intersecan a más de una región fundamental. Vamos a comenzar estudiando qué ocurre con las superficies fundamentales y, apoyándonos en dicho estudio, terminaremos viendo que las únicas soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes que intersecan más de una región fundamental son planos perpendiculares al eje de revolución e hiperboloides de una hoja, cuyo eje sea la dirección temporal perpendicular al eje de revolución.

3.5.1 Caso 1: soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes fundamentales

Vamos a obtener dos teoremas de clasificación correspondiendo con los dos tipos de superficies \mathbf{A}_2 -invariantes fundamentales que existen. Por un lado obtendremos soluciones Lorentzianas, Σ_α , inmersas en \mathcal{R}^+ o \mathcal{R}^- , cada una de las cuales estará generada por una curva temporal que es una elástica libre clavada en un plano de de Sitter. Y por otro lado, tendremos soluciones Lorentzianas \mathbf{A}_2 -invariantes inmersas en \mathcal{Q}^+ o \mathcal{Q}^- , provenientes de curvas elásticas libres clavadas en un plano hiperbólico.

Planteemos los dos problemas de una forma rigurosa y presentemos los teoremas que les dan respuesta: sea γ una curva temporal inmersa en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ o $\tilde{\mathcal{R}}^-$, o una curva (espacial) inmersa bien en $\tilde{\mathcal{Q}}^+$ o bien en $\tilde{\mathcal{Q}}^-$. *¿Qué tiene que cumplir esta curva para que Σ_γ sea una solución del sigma modelo? o equivalentemente, ¿cómo tiene que ser γ para que Σ_γ sea una superficie de Willmore con condiciones de frontera fijas?*

La respuesta viene dada en los siguientes teoremas, cuyas pruebas vamos a omitir debido a que son muy similares a la del Teorema 3.4.1, variando tan solo en pequeños detalles técnicos.

Teorema 3.5.1 *Sea α una curva temporal inmersa en $\tilde{\mathcal{R}}^+$ o $\tilde{\mathcal{R}}^-$. Entonces, Σ_α es una solución \mathbf{A}_2 -invariante del sigma modelo, o lo que es lo mismo, una superficie de Willmore en \mathbb{L}^3 con condiciones de frontera fijas, si, y solo si, α es una elástica libre clavada en el plano de de Sitter $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ o $(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g)$, respectivamente.*

Teorema 3.5.2 *Sea β una curva inmersa en $\tilde{\mathcal{Q}}^+$ o $\tilde{\mathcal{Q}}^-$. Entonces, Σ_β es una solución \mathbf{A}_2 -invariante del sigma modelo, o lo que es lo mismo, una superficie de Willmore en \mathbb{L}^3 con condiciones de frontera fijas, si, y solo si, β es una elástica libre clavada en el plano hiperbólico $(\tilde{\mathcal{Q}}^+, \frac{1}{h_+^2}g)$ o $(\tilde{\mathcal{Q}}^-, \frac{1}{h_-^2}g)$, respectivamente.*

A continuación mostramos la expresión de la curvatura de los dos tipos de generatrices de soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes fundamentales.

Elásticas libres temporales clavadas en $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g)$ y $(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g)$

La curvatura de dichas curvas viene dada por la siguiente expresión

$$\tilde{k}(s) = C \mathbf{cn} \left(i \sqrt{1 + \frac{C^2}{2}} (s - a_o), \tilde{C} \right), \quad (3.8)$$

para $s \in J \subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ a_o + \frac{(2n+1)}{\sqrt{1 + \frac{C^2}{2}}} \mathbf{E}' \right\}$; donde $C, a_o \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias, $\tilde{C}^2 = \frac{C^2}{2C^2 + 4}$, \mathbf{E}' es la integral elíptica completa de primera clase con módulo $\sqrt{1 - \tilde{C}^2}$ y s es el parámetro arco de la curva.

Elásticas libres clavadas en $(\tilde{\mathcal{Q}}^+, \frac{1}{h_+^2}g)$ y $(\tilde{\mathcal{Q}}^-, \frac{1}{h_-^2}g)$

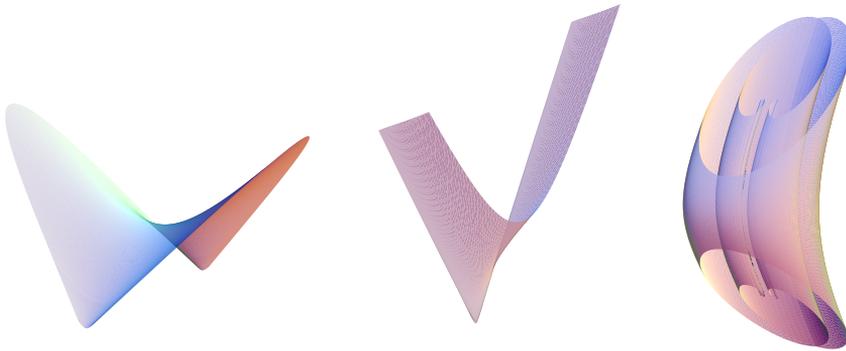
Estas curvas son aquellas cuya curvatura es

$$\tilde{k}(s) = C \mathbf{cn} \left(\sqrt{\frac{C^2}{2} - 1} (s - a_o), \tilde{C} \right), \quad (3.9)$$

para $s \in J$ donde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ a_o + \frac{2n+1}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{2}}} \mathbf{E}' \right\}$ si $C^2 < 2$ y $J \subseteq \mathbb{R}$ si $C^2 > 2$;

donde $C \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ y $a_o \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias, $\tilde{C}^2 = \frac{C^2}{2C^2-4}$, E' es la integral elíptica completa de primera clase con módulo $\sqrt{1 - \tilde{C}^2}$ y s es el parámetro arco.

Mostramos aquí tres dibujos que ilustran ejemplos de soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes del sigma modelo (en coordenadas respecto de la base usual de \mathbb{L}^3 y con distintos puntos de vista). Debajo de cada uno de ellos hemos indicado su carácter.



Solución Riemanniana

Soluciones Lorentzianas en \mathcal{R}^+ y en \mathcal{Q}^+

3.5.2 Caso 2: soluciones \mathbf{A}_2 -invariantes no fundamentales

Sabemos que existe una amplia familia de superficies Lorentzianas \mathbf{A}_2 -invariantes que no están contenidas en una única región fundamental. Sabemos también que éstas se obtienen pegando superficies Lorentzianas \mathbf{A}_2 -invariantes fundamentales, generadas por una familia de curvas en posición general.

El siguiente resultado nos dice cuáles de dichas superficies son soluciones del sigma modelo.

Teorema 3.5.3 *Dada una superficie conexa, M , sea $\varphi \in \mathbf{I}_\Gamma^1(M, \mathbb{L}^3)$ una inmersión \mathbf{A}_2 -invariante cuya imagen interseca al menos dos regiones fundamentales distintas. Entonces (M, φ) es una solución del sigma modelo, o lo que es lo mismo, una superficie de Willmore en \mathbb{L}^3 con frontera y normal a lo largo de la misma fijos, si, y solo si, $\varphi(M)$ es una superficie conexa \mathbf{A}_2 -invariante (con frontera) contenida en una de las siguientes superficies:*

- *Un plano Lorentziano ortogonal al eje.*
- *Un hiperboloide de una hoja con radio arbitrario, centrado en un punto cualquiera del eje de revolución, p , y cuyo eje es $p + \langle \vec{z} \rangle$ (véase 2.5.3).*

Demostración: Sabemos que $\varphi(M)$ está generada por una curva, β , inmersa en \mathcal{Q} y una familia numerable de curvas temporales, α_i , inmersas en \mathcal{R} , que están en posición general. Teniendo en cuentas los teoremas 3.5.1 y 3.5.2 podemos asegurar que φ es una superficie de Willmore si, y solo si, las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $\text{traza}(\beta) \cap \tilde{\mathcal{Q}}^+$ consiste de elásticas libres clavadas en $(\tilde{\mathcal{Q}}^+, \frac{1}{h_+^2}g)$,
2. $\text{traza}(\beta) \cap \tilde{\mathcal{Q}}^-$ consiste de elásticas libres clavadas en $(\tilde{\mathcal{Q}}^-, \frac{1}{h_-^2}g)$,
3. $\text{traza}(\alpha_i) \cap \tilde{\mathcal{R}}^+$ consiste de elásticas libres clavadas en $(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g) \forall i$,
4. $\text{traza}(\alpha_i) \cap \tilde{\mathcal{R}}^-$ es una familia de elásticas libres clavadas en $(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g) \forall i$, y
5. $\varphi|_{\mathbf{K}}$ es un punto crítico de $(\mathbf{I}_{\varphi(\partial\mathbf{K})}^1(\mathbf{K}, \mathbb{L}^3); \mathfrak{W})$, para todo polígono no nulo $\mathbf{K} \subseteq M$ tal que $\mathbf{K} \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-) \neq \emptyset$ y $\mathbf{K} \cap (\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-) \neq \emptyset$.

Sabemos que la condición suficiente es cierta. Centrémonos en la condición necesaria.

Estudiamos en primer lugar la última de las afirmaciones anteriores. Como estamos trabajando en un ambiente con curvatura seccional constante, esta condición equivale a que la ecuación (3.6) sea cierta en todo

polígono no nulo K tal que $K \cap (\mathcal{R}^+ \cup \mathcal{R}^-) \neq \emptyset$ y $K \cap (\mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-) \neq \emptyset$. Esto nos asegura que si φ satisface las cuatro primeras condiciones, entonces satisface la quinta también.

A continuación nos centramos en controlar cómo son las curvas α_i . Sabemos que para cada α_i existe una función, $f_i :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\alpha_i(t) = (f_i(t), 0, t)$ es una parametrización de la curva en un entorno de $\text{traza}(\alpha_i) \cap \text{eje } x$. Es más, sabemos que $f'_i(0) = 0$ (véase la nota 2.5.16) y que cuando α_i toca al *eje* x , o bien dicho punto pertenece a la frontera de la curva, o bien la curva cambia de región fundamental (véase 2.5.4). Calculamos ahora la función curvatura de $\alpha_i :]0, \varepsilon[\rightarrow \left(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g\right)$,

$$k_i(t) := \frac{-f'_i(t) + t f''_i(t) + (f'_i(t))^3}{(1 - (f'_i(t))^2)^{3/2}}.$$

Como $f'_i(0) = 0$, se cumple que $\lim_{t \rightarrow 0} k_i(t) = 0$. Por otro lado, conocemos la expresión de la curvatura de las elásticas libres temporales clavadas en $\left(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g\right)$ (3.8). Si usamos las propiedades del coseno elíptico de Jacobi, es fácil comprobar que el valor absoluto de (3.8) es mayor o igual que $|C|$. Por tanto, una condición necesaria y suficiente para que la afirmación 3 sea cierta, es que $\alpha_i :]0, \varepsilon[\rightarrow \left(\tilde{\mathcal{R}}^+, \frac{1}{f_+^2}g\right)$ sea una geodésica para todo i . Un razonamiento similar nos permite afirmar que 4 es cierta si, y solo si, $\alpha_i :]-\varepsilon, 0[\rightarrow \left(\tilde{\mathcal{R}}^-, \frac{1}{f_-^2}g\right)$ es una geodésica para todo i .

En este punto, utilizamos cómo son las geodésicas temporales del plano de de Sitter de dimensión 2 en el modelo del semi-plano. Éstas son las curvas parametrizadas por el arco cuya traza está contenida en un rayo perpendicular a la frontera del semi-plano, o media rama de una hipérbola temporal centrada en cualquier punto del *eje* x . Si utilizamos que las curvas α_i son de clase \mathcal{C}^∞ , podemos asegurar que las afirmaciones 3 y 4 del principio de la demostración son ciertas si, y solo si, cada α_i tiene como traza a una de las dos siguientes opciones

- un segmento de (\mathcal{R}, g) perpendicular al *eje* x y que lo interseca, o
- un arco de una de las componentes conexas de una hipérbola temporal centrada en un punto del *eje* x y que lo interseca.

Trabajemos ahora con la curva β . Por la propiedad **P2** del anterior capítulo, junto con el teorema de pegado local (Teorema 2.5.15), para cada i , existe s_o en la clausura del dominio de β tal que $\lim_{s \rightarrow s_o} \beta(s) \in \text{eje } x$ y

existe una función diferenciable, $f_{\{\beta, s_o\}}$, definida en un intervalo $] - \varepsilon, \varepsilon[$, tal que $\beta(t) = (f_{\{\beta, s_o\}}(t), t, 0)$ es una parametrización de la curva en un entorno de s_o . Fijado i , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\beta(]0, \varepsilon[) \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}^+$. Calculemos la función curvatura de $\beta :]0, \varepsilon[\rightarrow \left(\tilde{\mathcal{Q}}^+, \frac{1}{h_+^2}g\right)$,

$$k(t) := \frac{f'_{\{\beta, s_o\}}(t) - t f''_{\{\beta, s_o\}}(t) + (f'_{\{\beta, s_o\}}(t))^3}{(1 + (f'_{\{\beta, s_o\}}(t))^2)^{3/2}}.$$

Usamos ahora que $f'_{\{\beta, s_o\}}(0) = 0$, (recordar la nota 2.5.16) para obtener que $\lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 0$. Comparamos esta expresión con la de la curvatura de una elástica libre clavada en $\left(\tilde{\mathcal{Q}}^+, \frac{1}{h_+^2}g\right)$, véase (3.9). Si $C^2 < 2$, entonces el valor absoluto de la curvatura es mayor o igual que $|C|$, en este caso, por ser $\lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 0$, tenemos que C ha de valer 0, y por tanto $k \equiv 0$. Cuando $C^2 > 2$, si s denota al parámetro arco, entonces $k(s)$ es una función periódica que toma el valor 0 en $s = a_o + (2n + 1)E/\sqrt{\frac{C^2}{2} - 1}$, y el valor C en $s = a_o + 4nE/\sqrt{\frac{C^2}{2} - 1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ahora combinamos esto con el hecho de que $\lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) \in \text{eje } x$, para concluir que C^2 no puede ser menor que 2. Finalmente concluimos que la afirmación 1 del principio de la demostración es cierta si, y solo si, β es una geodésica en $\left(\tilde{\mathcal{Q}}^+, \frac{1}{h_+^2}g\right)$. Un argumento similar puede ser usado para ver que la condición 2 es cierta si, y solo si, β es una geodésica en $\left(\tilde{\mathcal{Q}}^-, \frac{1}{h_-^2}g\right)$.

Las geodésicas del plano hiperbólico, en el modelo del semi-plano, son aquellas curvas parametrizadas por el arco cuya traza está contenida en un rayo perpendicular a la frontera del semi-plano o un arco de circunferencia centrado en la frontera del semi-plano. En vista de lo anterior, y de que β es una curva de clase \mathcal{C}^∞ , las condiciones 1 y 2 son ciertas si, y solo si, la traza de β es:

- un segmento perpendicular al *eje* x , o bien
- un arco de circunferencia centrada en un punto del *eje* x y que interseca al citado eje.

El único detalle que nos queda por ver es qué combinaciones de β y α_i son posibles de modo que las superficies que generan peguen bien. Es muy fácil comprobar que las combinaciones son las siguientes.

1. Si la traza de β está contenida en la recta que pasa por $(A, 0, 0)$, con $A \in \mathbb{R}$, y es perpendicular al eje, entonces la única curva α posible es

la que admite como parametrización a $\alpha(t) = (A, 0, t)$. En este caso, la superficie generada por ambas curvas está contenida en el plano $\{(A, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}$.

2. Si la traza de β es un arco de circunferencia en (\mathcal{Q}, g) , con radio $\rho > 0$ y centro $(A, 0, 0)$, entonces
 - a) si $(A + \rho, 0, 0) \in \text{traza}(\alpha_i)$, la traza de ésta ha de ser un conexo de la hipérbola temporal con radio ρ y centro $(A, 0, 0)$, que contiene a $(A + \rho, 0, 0)$.
 - b) si $(A - \rho, 0, 0) \in \text{traza}(\alpha_i)$, la traza α_i ha de ser un arco de la hipérbola temporal con radio ρ y centro $(A, 0, 0)$, que contiene a $(A - \rho, 0, 0)$.

El resultado es que la superficie generada por $\{\beta\} \cup \{\alpha_i : i \in \mathcal{I}\}$ está contenida en el hiperboloide de una hoja con centro $p \in \text{eje } x$, y eje $p + \langle \vec{z} \rangle$.

■

3.6 Soluciones \mathbf{A}_3 -invariantes o superficies de Willmore de rotación en \mathbb{L}^3 con eje luminoso

Nos dedicamos ahora al estudio de las soluciones del sigma modelo que son \mathbf{A}_3 -invariantes. Recordemos que, en el Capítulo 2, clasificamos las superficies de \mathbb{L}^3 que son \mathbf{A}_3 -invariantes. En concreto, vimos que son aquellas que estén generadas por un curva inmersa en un semiplano Lorentziano con frontera el eje de revolución luminoso, al que volvemos a llamar *eje x* .

El siguiente resultado clasifica las soluciones que estamos buscando.

Teorema 3.6.1 *Sea α una curva no degenerada inmersa en \mathcal{S} que no interseca al eje x . $\Sigma_\alpha = \{\zeta_t(\text{traza}(\alpha))/t \in \mathbb{R}\}$ es una solución del sigma modelo, o lo que es equivalente, una superficie de Willmore en \mathbb{L}^3 con frontera y normal a lo largo de la misma fijos, si, y solo si, α es una elástica libre clavada (y no degenerada) en uno de los dos siguientes planos de anti de Sitter: $(\tilde{\mathcal{S}}^+, \frac{1}{l^2_+} g)$ o $(\tilde{\mathcal{S}}^-, \frac{1}{l^2_-} g)$.*

Nota 3.6.2 Como las órbitas de la acción de \mathbf{A}_3 en \mathbb{L}^3 son parábolas espaciales, las elásticas espaciales dan lugar a soluciones Riemannianas, mientras que las temporales dan lugar a soluciones Lorentzianas.

Nota 3.6.3 La prueba de este resultado es similar a la del Teorema 3.4.1, por lo que no la vamos a hacer aquí. Además, en la Sección 3.2 dimos la expresión de la curvatura de las elásticas libres clavadas en un plano de anti de Sitter.

Recordemos ahora el teorema en el que caracterizamos los solitones Riemannianos \mathbf{A}_2 -invariantes, el Teorema 3.4.2. La demostración del mismo, que se llevó a cabo en un desarrollo previo al enunciado, puede ser adaptada para obtener una caracterización de los solitones Riemannianos \mathbf{A}_3 -invariantes. De hecho, todo funciona igual salvo por un pequeño detalle. Dada una curva espacial α en $\tilde{\mathcal{S}}^+$, consideremos la superficie \mathbf{A}_3 -invariante generada por α . En este caso la curvatura geodésica de las curvas de la frontera vale

$$(-1)^{i+1} \frac{\alpha'_2(a_i)}{\|\alpha'(a_i)\| \alpha_2(a_i)}, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

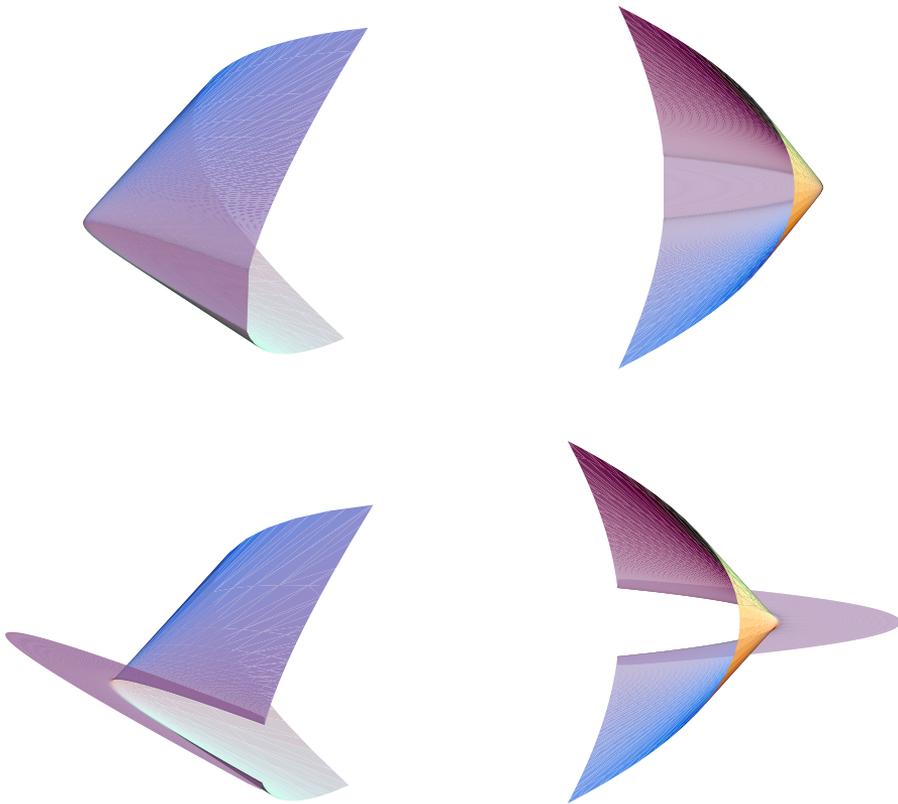
Teorema 3.6.4 Sea $\alpha : [a_1, a_2] \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}^+$ una curva espacial parametrizada por su longitud de arco, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$, que es una elástica libre clavada en $(\tilde{\mathcal{S}}^+, \frac{1}{l^2}g)$. Entonces, φ_α (definida como $\varphi_\alpha(s, t) = \varsigma_t(\alpha(s))$) es un solitón del sigma modelo si, y solo si,

$$\int_{[a_1, a_2]} \tilde{k}_\alpha^2 ds = 6 \left(\frac{\alpha'_2(a_1)}{\alpha_2(a_1)} - \frac{\alpha'_2(a_2)}{\alpha_2(a_2)} \right).$$

En cuyo caso, $\mathfrak{S}(\varphi_\alpha) = 0$.

Cerramos esta sección, y el capítulo, con dos ejemplos de soluciones \mathbf{A}_3 -invariantes del sigma modelo. Los dos primeros dibujos muestran la misma solución Riemanniana \mathbf{A}_3 -invariante. Mientras que los dos siguientes

muestran una Lorentziana.



El Principio de Criticalidad Simétrica de Palais

En el Capítulo 1 y en la Sección 3.2 del Capítulo 3, una de las piezas claves para obtener las soluciones buscadas consiste en explotar la simetría de las mismas. Para ello es necesaria la utilización de la versión del Principio de Criticalidad Simétrica dada por Palais.

La resolución de problemas utilizando la existencia de simetrías en los mismos, es una idea de uso frecuente en distintos problemas de física y matemáticas, que no siempre ha sido utilizada de forma correcta. Planteemos el problema de cuándo puede usarse esta herramienta y mostremos la respuesta dada por Palais.

Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable sobre la que actúa por difeomorfismos un grupo, G . Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que es G -invariante, esto es

$$F(g \cdot p) = F(p),$$

para todo $p \in \mathcal{M}$ y para todo $g \in G$. Definimos a continuación el conjunto de *puntos simétricos* como

$$\Sigma = \{p \in \mathcal{M} / g \cdot p = p, \forall g \in G\},$$

y notamos por $F|_{\Sigma}$ a la restricción de F al anterior conjunto. Las preguntas que nos planteamos son las siguientes

¿bajo qué condiciones Σ es una subvariedad de \mathcal{M} ? En el caso en que Σ es subvariedad, ¿cuándo coinciden los puntos críticos de F que pertenecen a Σ , con los puntos críticos de $F|_{\Sigma}$?

La respuesta no es trivial. Piénsese en el ejemplo que se obtiene al tomar $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, G el grupo generado por la simetría con respecto a la recta $y \equiv 1$ y $F(x, y) = y^2 + 1$. En este caso Σ es precisamente igual a la recta $y \equiv 1$, por lo que $F|_{\Sigma}$ es constante y todos los puntos son críticos. Por otro lado, los puntos críticos de F son aquellos en los que $y \equiv 0$. Entonces no hay ningún punto crítico de F en Σ .

La respuesta que aquí vamos a ofrecer se ajusta a las condiciones de trabajo del Capítulo 1 y de la Sección 3.2. Este resultado no es el citado Principio de Criticalidad Simétrica, sino un corolario del mismo. Para ver el resultado más general consúltese [44].

Si \mathcal{M} es una variedad de Banach y G es un grupo de Lie compacto que actúa de forma diferenciable sobre \mathcal{M} , entonces

- 1. Σ es una subvariedad diferenciable de \mathcal{M} , y*
 - 2. para cualquier $F \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, los puntos críticos de F que pertenecen a Σ coinciden con los puntos críticos de $F|_{\Sigma}$.*
-

Elásticas clavadas en una superficie no degenerada con curvatura seccional constante

Las curvas elásticas en superficies con curvatura seccional constante, tanto Riemannianas como Lorentzianas, juegan un papel importante en los Capítulos 1 y 3. Es por eso que vamos a dar algunos detalles sobre ellas y vamos a exponer algunos resultados que han sido utilizados a lo largo de los citados capítulos.

El estudio de este tipo de curvas nació en el siglo XVII de manos de Jakob Bernoulli. Grandes matemáticos han hecho aportaciones al desarrollo de esta teoría, para más detalles sobre la historia de su desarrollo véase [54].

En la actualidad, distintos autores han considerado generalizaciones del problema en variedades Riemannianas y Semi-Riemannianas. Entre ellos es importante destacar los trabajos de R. Bryant y P. Griffiths, [22], J. Langer y D. Singer, [35] y [36], y V. Jurdjevic, [33], así como la bibliografía sobre el tema debida a los siguientes autores: M. Barros, O. Garay, H. Koiso y A. Linner.

Estudio de las elásticas clavadas

Sea (S, g) una superficie no degenerada (Riemanniana o Lorentziana) con curvatura seccional constante C . Tomemos dos puntos $m_1, m_2 \in S$, y dos vectores $v_i \in T_{m_i}S$, que en el caso en que S sea Lorentziana van a ser no nulos y con el mismo carácter causal. Llamamos Λ al espacio de curvas diferenciables (esto es, de clase \mathcal{C}^∞), regulares (su derivada no se

anula en ningún punto) y clavadas, que tienen como condiciones de frontera de primer orden a $(\{m_1, m_2\}, \{v_1, v_2\})$. En este ambiente, consideramos la familia uno-paramétrica de funcionales:

$$\mathfrak{E}^\lambda : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathfrak{E}^\lambda(\alpha) = \int_\alpha (k^2 + \lambda),$$

donde k es la curvatura de α en (S, \mathfrak{g}) y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Las elásticas clavadas son aquellas curvas pertenecientes a Λ que son puntos críticos de \mathfrak{E}^λ para algún valor de λ no nulo, mientras que las elásticas clavadas libres son aquellas que son punto crítico de \mathfrak{E}^0 .

Para obtener los puntos críticos de los que hemos hablado, hemos de calcular la primera variación del funcional. El caso Riemanniano puede ser consultado en [35], y el Lorentziano es fácil de obtener a partir de éste.

Sea $\alpha \in \Lambda$ parametrizada por su longitud de arco. Llamemos $\varepsilon_1 = \mathfrak{g}(T, T)$ y $\varepsilon_2 = \mathfrak{g}(N, N)$, siendo T y N el campo tangente y el campo normal a α , respectivamente. Entonces

$$\delta \mathfrak{E}^\lambda(\alpha)[W] = \int_{s_1}^{s_2} \mathfrak{g}(\Omega^\lambda(\alpha), W) ds + [\mathcal{R}^\lambda(\alpha, W)]_{s_1}^{s_2},$$

donde $\Omega^\lambda(\alpha)$ es el operador de Euler-Langrange y $\mathcal{R}^\lambda(\alpha, W)$ es el operador de frontera, los cuales están definidos como sigue

$$\Omega^\lambda(\alpha) = 2\varepsilon_2 \nabla_T^3 T - \varepsilon_1 \nabla_T(\lambda - 3k^2)T + 2C\varepsilon_1 k N \quad y$$

$$\mathcal{B}^\lambda(\alpha, W) = 2\varepsilon_2 \mathfrak{g}(\nabla_T W, \nabla_T T) - \mathfrak{g}(W, 2\varepsilon_2 \nabla_T^2 T + \varepsilon_1(\lambda - 3k^2)T),$$

siendo ∇ la conexión de Levi-Civita de S y $W \in T_\alpha \Lambda$.

Al ser Λ un espacio de curvas con extremos fijos, W se anula en s_1 y en s_2 . Además, si tomamos una variación de α con campo variacional W , $\Gamma(s, u)$, y llamamos $V = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}$, tenemos que

$$\nabla_{T(s_i)} W = \nabla_{V(s_i, 0)} W = \nabla_{W(s_i)} V = 0, \quad i = 1, 2,$$

donde la penúltima igualdad se debe a que el corchete de Lie de W y V se anula. De estas dos igualdades se obtiene como consecuencia inmediata la

anulación del operador de frontera. Notemos que no hemos utilizado el que las curvas tienen tangente fijo en la frontera.

Entonces, $\alpha \in \Lambda$ es un punto crítico del problema variacional asociado a \mathfrak{E}^λ si, y solo si, $\Omega^\lambda(\alpha) = 0$ y esto ocurre si, y solo si, la función curvatura de α es solución de la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$2\varepsilon_1 \frac{d^2 k}{ds^2} + (2C - \varepsilon_2 \lambda)k + \varepsilon_2 k^3 = 0. \quad (\text{B.1})$$

Estudiemos cómo son las soluciones de (B.1). Notemos que la función constante $k = 0$ es solución obvia de la ecuación para todo λ , luego toda geodésica en (\mathbb{S}, \mathbf{g}) es una elástica clavada. Vamos a encontrar todas las soluciones de esta ecuación expresadas en términos de las funciones elípticas de Jacobi ¹, en concreto nosotros vamos a expresarlas utilizando el coseno elíptico de Jacobi, para ver cómo utilizar expresiones que involucren a otras de dichas funciones elípticas véase [28]. La siguiente identidad es cierta y es fácil de comprobar utilizando propiedades básicas de las funciones elípticas de Jacobi,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \text{cn}(u, \rho) = -2\rho^2 \text{cn}^3(u, \rho) + (2\rho^2 - 1) \text{cn}(u, \rho),$$

donde $\text{cn}(u, \rho)$ es el coseno elíptico de Jacobi. Si reemplazamos u por $a(s - s_0)$ y hacemos una identificación de constantes adecuada, obtenemos que la solución general de la ecuación se escribe de la siguiente forma:

$$k(s) = C \text{cn}(a(s - s_0), \rho),$$

siendo $a \in \mathbb{C}$ y $s_0 \in \mathbb{R}$ constante arbitrarias, mientras que ρ y C están determinadas por las siguientes expresiones:

$$\rho^2 = \frac{2a^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda - 2\varepsilon_1 C}{4a^2}, \quad C^2 = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 a^2 + \lambda - 2\varepsilon_2 C.$$

¹Las funciones elípticas de Jacobi se definen en términos de la inversa de la integral elíptica de Jacobi de primera clase tal y como sigue:

$$\text{si } u(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}},$$

entonces se definen $\text{sn}(u, k) = \sin \theta$, $\text{cn}(u, k) = \cos \theta$, $\text{tn}(u, k) = \tan \theta$, $\text{am}(u, k) = \theta$ y $\text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$. Para más información sobre estas funciones véase [23].

Como ρ y C son funciones de a , es claro que podemos elegir arbitrariamente una, y solo una, de las dos.

Ya tenemos las soluciones de la ecuación. Sin embargo, no todas ellas pueden ser la curvatura de una curva en (S, g) . El motivo es que el coseno elíptico de Jacobi es una función cuya imagen toma valores complejos, mientras que la curvatura de una curva es una función con imagen real. Las soluciones de la ecuación cuya imagen está contenida en \mathbb{R} , así como el intervalo de definición de la función curvatura en dichos casos, se obtienen haciendo uso de las propiedades del coseno elíptico de Jacobi, según los valores de C , λ , ε_1 y ε_2 .

Otros tipos de elásticas

En el caso en el que tomamos como dominio de \mathfrak{C}^λ el espacio de curvas cerradas en (S, g) , todo funciona igual, esto es, el operador de frontera que nos sale en la primera variación se anula y la ecuación de las elásticas que obtenemos es la misma. Estas curvas reciben el nombre de elásticas cerradas.

Otra opción es tomar en (S, g) curvas definidas en $[s_1, \infty[$ y que estén clavadas en s_1 , o bien curvas definidas en \mathbb{R} sobre las que no se imponen ninguna condición. En ambos casos diremos que una de estas curvas es una elástica clavada si, y solo si, para cada subintervalo de su dominio de definición, $[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$, la curva obtenida al restringir a dicho subintervalo es una elástica clavada. Lo anterior equivale a decir que las curvas elásticas en ambos casos son aquellas que cumplen la ecuación (B.1).

Demostración del Teorema 2.5.20

El Teorema 2.5.20, expuesto en el Capítulo 2, es un caso especial del siguiente enunciado.

Sean $\alpha(u) = (f_\alpha(u), 0, u)$ y $\beta(u) = (f_\beta(u), u, 0)$ dos curvas C^∞ definidas en un entorno (abierto o cerrado) de 0 y siendo la primera de ellas temporal. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones

- $f_\alpha(0) = f_\beta(0)$,
- f_α y f_β son analíticas en 0 y
- la siguiente función es diferenciable,

$$F(y, z) = \left\{ \begin{array}{ll} f_\alpha \left(\text{sign}(z) \sqrt{z^2 - y^2} \right) & \text{si } z^2 \geq y^2, \\ f_\beta \left(\text{sign}(y) \sqrt{y^2 - z^2} \right) & \text{si } y^2 \geq z^2, \end{array} \right\} ,$$

definida en un entorno de los puntos (a, b) tales que $a^2 = b^2$, en el que las expresiones anteriores tengan sentido.

Entonces existe una función, f , de clase C^∞ tal que

$$\alpha(s) = (f(s^2), 0, s) \quad \text{y} \quad \beta(s) = (f(-s^2), s, 0).$$

Demostración: Donde tengan sentido, se consideran las funciones

$$\tilde{f}_\alpha^+(u) = f_\alpha(\sqrt{u}), \quad \tilde{f}_\alpha^-(u) = f_\alpha(-\sqrt{u}), \quad \text{para } u \geq 0;$$

$$\tilde{f}_\beta^+(u) = f_\beta(\sqrt{-u}), \quad \tilde{f}_\beta^-(u) = f_\beta(-\sqrt{-u}), \quad \text{para } u \leq 0.$$

En términos de ellas, la función de pegado se escribe como:

$$F(y, z) = \begin{cases} \tilde{f}_\alpha^+(z^2 - y^2) & \text{si } z^2 \geq y^2, \quad z \geq 0 \\ \tilde{f}_\alpha^-(z^2 - y^2) & \text{si } z^2 \geq y^2, \quad z \leq 0 \\ \tilde{f}_\beta^+(z^2 - y^2) & \text{si } y^2 \geq z^2, \quad y \geq 0 \\ \tilde{f}_\beta^-(z^2 - y^2) & \text{si } y^2 \geq z^2, \quad y \leq 0 \end{cases}$$

(siempre que tenga sentido según el dominio de α y el de β).

La diferenciabilidad de F equivale a que existan y sean iguales las derivadas n -ésimas de las funciones \tilde{f}_α^+ , \tilde{f}_α^- , \tilde{f}_β^+ y \tilde{f}_β^- , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es claro que

$$\begin{aligned} f_\alpha(u) &= \tilde{f}_\alpha^+(u^2), \quad \text{para } u \geq 0, \\ f_\alpha(u) &= \tilde{f}_\alpha^-(u^2), \quad \text{para } u \leq 0, \\ f_\beta(u) &= \tilde{f}_\beta^+(u^2), \quad \text{para } u \geq 0 \quad \text{y} \\ f_\beta(u) &= \tilde{f}_\beta^-(u^2), \quad \text{para } u \leq 0. \end{aligned}$$

Necesitamos ahora saber cuánto vale la derivada n -ésima de la composición de una función cualquiera con la función “elevar al cuadrado”. Por inducción sobre el orden de la derivada, es fácil comprobar que, dada una función diferenciable, h , si definimos $g(u) = h(u^2)$, la derivada n -ésima de g tiene la siguiente expresión

$$\frac{d^n g}{du^n}(u) = \sum_{i=0}^{E(n/2)} a_{n,n-i} \frac{d^{n-i} h}{du^{n-i}}(u^2) u^{n-2i},$$

donde E denota a la función “parte entera”, y los coeficientes $a_{n,n}, \dots, a_{n,n-E(n/2)}$ son números reales positivos definidos recurrentemente tal y como sigue:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 2, \quad a_{1,0} = a_{1,2} = 0, \\ a_{n,n-i} &= (n+1-2i) a_{n-1,n-i} + 2 a_{n-1,n-1-i} \quad \text{para } 0 \leq i \leq E(n/2), \\ a_{n,n-i} &= 0 \quad \text{en otro caso; } \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Si tomamos en la anterior expresión $n = 2m + 1$ obtenemos que

$$\frac{d^{(2m+1)}}{du^{(2m+1)}} g(u) = \sum_{i=0}^m a_{2m+1,2m+1-i} \frac{d^{2m+1-i} h}{du^{2m+1-i}}(u^2) u^{2m+1-2i} =$$

$$= u \left(\sum_{i=0}^{m} a_{2m+1, 2m+1-i} \frac{d^{2m+1-i} h}{du^{2m+1-i}}(u^2) u^{2m-2i} \right),$$

de donde se deduce que al evaluar en $u = 0$, la expresión se anula. En particular, se obtiene que $f_{\alpha}^{2n-1}(0) = f_{\beta}^{2n-1}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es, las derivadas impares de ambas funciones, en 0, se anulan.

Hasta ahora hemos probado que por ser la función de pegado, F , de clase \mathcal{C}^{∞} , $f_{\alpha}^{2n-1}(0) = f_{\beta}^{2n-1}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si ahora utilizamos la analiticidad de f_{α} y f_{β} en 0, podemos afirmar que en un entorno de 0

$$f_{\alpha}(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f_{\alpha}^{2i}(0)}{(2i)!} u^{2i} \quad \text{y} \quad f_{\beta}(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f_{\beta}^{2i}(0)}{(2i)!} u^{2i}.$$

Usando un resultado clásico sobre convergencia de series de potencias (véase el teorema 9.20. de [7]), se concluye que las series

$$\sum_{i \geq 0} \frac{f_{\alpha}^{2i}(0)}{(2i)!} u^i \quad \text{y} \quad \sum_{i \geq 0} \frac{f_{\beta}^{2i}(0)}{(2i)!} u^i$$

son convergentes en un entorno de 0. Llamemos F_{α} y F_{β} a las funciones analíticas definidas mediante la suma de las anteriores series. Es claro que

$$f_{\alpha}(u) = F_{\alpha}(u^2) \quad \text{y} \quad f_{\beta}(u) = F_{\beta}(u^2).$$

Entonces podemos escribir F del siguiente modo

$$F(y, z) = \left\{ \begin{array}{ll} F_{\alpha}(z^2 - y^2) & \text{si } z^2 \geq y^2 \\ F_{\beta}(y^2 - z^2) & \text{si } y^2 \geq z^2 \end{array} \right\}.$$

Por ser la función de pegado \mathcal{C}^{∞} y por ser F_{α} y F_{β} analíticas en 0, se deduce que $F_{\alpha}(u) = F_{\beta}(-u)$ en un entorno de 0 y por tanto, si llamamos $f = F_{\alpha}$,

$$f_{\alpha}(u) = f(u^2) \quad \text{y} \quad f_{\beta}(u) = f(-u^2).$$

Lo que concluye la demostración.



Gauss-Bonnet para superficies Lorentzianas con frontera no degenerada

El Teorema local de Gauss-Bonnet asegura que, dada una superficie embebida en \mathbb{R}^3 y dado un dominio suyo, homeomorfo a un disco abierto y con frontera \mathcal{C}^∞ a trozos, la suma de la integral de la curvatura de Gauss en dicho dominio, de la integral de la curvatura geodésica a lo largo de la frontera y la suma de los ángulos de la misma, vale 2π . Por otro lado, el teorema global nos asegura que la integral de la curvatura de Gauss de una superficie compacta y sin frontera en \mathbb{R}^3 , vale 2π veces la característica de Euler de la misma. También es clásica su extensión a superficies Riemannianas.

En cuanto al contexto semi-Riemanniano, Avez [8] y Chern [27] probaron (de forma independiente y distinta) una fórmula de Gauss-Bonnet para variedades semi-Riemannianas compactas, sin frontera y de dimensión arbitraria. Posteriormente, Birman y Nomizu extendieron el caso de dimensión 2 de dicha fórmula, a superficies Lorentzianas que son homeomorfas a un disco abierto y cuya frontera es temporal y \mathcal{C}^∞ a trozos, véase [17].

En este anexo, vamos a ampliar la fórmula dada por Birman y Nomizu al caso en el que la frontera es una curva \mathcal{C}^∞ a trozos, formada por una familia de curvas no degeneradas. En concreto, generalizaremos la noción de ángulo hiperbólico dada por ellos y veremos que su demostración sigue siendo cierta, salvo modificación de pequeños detalles. A partir de él, es fácil probar una versión de Gauss-Bonnet para superficies Lorentzianas compactas, con frontera no degenerada y topología arbitraria.

Ángulo hiperbólico entre dos vectores no nulos

Sea (S, g) una superficie Lorentziana (orientable y temporalmente orientable). Fijamos una orientación y una orientación temporal en S . Para cada vector unitario $\vec{w} \in T_p S$, denotamos por $\vec{w}^\perp \in T_p S$ al único vector unitario tal que $\langle \vec{w}, \vec{w}^\perp \rangle = 0$ y la siguiente base ordenada está positivamente orientada $\{\vec{w}, \vec{w}^\perp\}$. Fijado $p \in S$ y una base en $T_p S$ positivamente orientada, podemos definir el concepto de ángulo hiperbólico entre dos vectores temporales unitarios, tal y como viene hecho en [17], esto es, dados dos vectores temporales unitarios, \vec{u}, \vec{v} , si ambos apuntan al futuro (o al pasado), el ángulo hiperbólico de \vec{u} a \vec{v} se define como el único número, θ , tal que

$$A_\theta \cdot \vec{u} = \vec{v}, \quad \text{siendo} \quad A_\theta = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix},$$

y lo vamos a notar por $\angle[\vec{u}, \vec{v}]$.

Una vez definido el ángulo entre dos vectores unitarios con la misma orientación temporal, extendemos la definición de ángulo hiperbólico a dos vectores unitarios arbitrarios, de acuerdo con los siguientes casos:

1. si \vec{u} apunta al futuro y \vec{v} apunta al pasado (o viceversa) definimos

$$\angle[\vec{u}, \vec{v}] = \angle[\vec{u}, -\vec{v}]$$

(esta definición también viene en [17]);

2. si \vec{u} y \vec{v} son vectores unitarios espaciales, entonces \vec{u}^\perp y \vec{v}^\perp son vectores unitarios temporales; definimos

$$\angle[\vec{u}, \vec{v}] = \angle[\vec{u}^\perp, \vec{v}^\perp];$$

3. por último, si \vec{u} es temporal y \vec{v} espacial, definimos

$$\angle[\vec{u}, \vec{v}] = \angle[\vec{u}, \vec{v}^\perp]; \quad \angle[\vec{v}, \vec{u}] = \angle[\vec{v}^\perp, \vec{u}].$$

El ángulo entre dos vectores no nulos cualesquiera se define como el ángulo de los vectores obtenidos al normalizar.

Lo que nos motivó a dar esta definición es el hecho de que, dado que las transformaciones de Lorentz respetan el carácter causal de los vectores, no podíamos utilizarlas directamente para comparar un vector temporal con uno espacial. Debíamos entonces asignar a cada vector espacial, un vector

temporal que sirviese para hacer las comparaciones. La elección más natural era la de su ortogonal. Posteriormente, descubrimos que no habíamos sido los únicos en pensar de esta forma, ya que la definición de ángulo hiperbólico entre dos vectores unitarios cualesquiera puede ser encontrada también en [40].

Con esta definición el Lema 1 de [17] sigue siendo cierto.

Estudio de la curvatura geodésica de una curva no degenerada en una superficie Lorentziana

Sea $\delta(s)$ una curva no degenerada en S . Vamos a obtener una expresión de la curvatura de δ , que va a ser clave en la obtención de la Fórmula de Gauss-Bonnet que estamos buscando. Además, dicha expresión nos va a proporcionar otra forma de demostrar que para todo polígono no nulo, K , y para toda inmersión $\phi : K \rightarrow \mathbb{L}^3$, la acción que mide la curvatura total de la frontera es constante en el espacio $\mathbf{I}_{\phi(\partial K)}^1(K, \mathbb{L}^3)$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\delta(s)$ está parametrizada por el arco. $\{T(s) = \delta'(s), T^\perp(s)\}$ es el aparato de Frenet de la curva, k es su función curvatura y

$$\nabla_T T = \varepsilon_2 k T^\perp, \quad \nabla_T T^\perp = -\varepsilon_1 k T,$$

son las ecuaciones de Frenet, donde ∇ denota a la conexión de Levi-Civita de (S, \mathbf{g}) , $\varepsilon_1 = \mathbf{g}(T, T)$ y $\varepsilon_2 = \mathbf{g}(T^\perp, T^\perp)$.

Por otro lado, sea $Z(s)$ un campo paralelo unitario temporal a lo largo de $\delta(s)$. Si escogemos Z de modo que $Z(0)$ apunte al futuro, entonces Z apunta al futuro a lo largo de δ , ya que el transporte paralelo conserva la orientación temporal. Notemos que $Z^\perp(s)$ es también paralelo a lo largo de $\delta(s)$. Si definimos $\varphi(s) = \angle[T(s), Z(s)]$, podemos concluir que

$$\varphi'(s) = -k(s). \tag{D.1}$$

Para comprobar esta fórmula, distinguimos dos casos.

1. Si $\delta(s)$ es temporal, la prueba puede ser encontrada en [17].
2. Si $\delta(s)$ es espacial, entonces tenemos que

$$A_{-\varphi(s)} \cdot Z(s) = \pm T^\perp(s), \tag{D.2}$$

$$A_{-\varphi(s)} \cdot Z^\perp(s) = \mp T(s), \tag{D.3}$$

de acuerdo a que T^\perp apunte al futuro o al pasado, respectivamente. Si derivamos con respecto al parámetro s la expresión (D.2) y la comparamos con las ecuaciones de Frenet, obtenemos que

$$-\varphi'(s)A_{-\varphi(s)}Z^\perp(s) = \mp k(s)T(s).$$

Finalmente combinamos la expresión obtenida con (D.3) y probamos así (D.1).

Fórmula de Gauss-Bonnet

A partir de aquí podemos seguir paso a paso el desarrollo hecho en el artículo [17], obteniendo que el siguiente teorema es cierto.

Fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos no nulos

Sea (S, \mathbf{g}) una superficie Lorentziana y sea $K \subset S$ un polígono no nulo. Notemos por $\delta_j(s)$, $1 \leq j \leq r$, a las curvas que forman la frontera de K . Supongamos que δ_j empieza en el punto $p_j \in S$, con tangente en dicho punto \vec{t}_j , y termina en el punto $p_{j+1} \in S$, con tangente \vec{u}_j , siendo $p_{r+1} = p_1$. Denotemos a los ángulos exteriores en los vértices p_1, \dots, p_r como sigue

$$\theta_1 = \angle[\vec{u}_1, \vec{t}_2], \theta_2 = \angle[\vec{u}_2, \vec{t}_3], \dots, \theta_{r-1} = \angle[\vec{u}_{r-1}, \vec{t}_r] \text{ y } \theta_r = \angle[\vec{u}_r, \vec{t}_1].$$

Entonces,

$$-\int_K G dA + \int_{\partial K} k ds + \sum_{j=1}^r \theta_j = 0,$$

donde G es la curvatura de Gauss de (S, \mathbf{g}) y k denota a la curvatura geodésica a lo largo de ∂K .

Bibliografía

- [1] C. Albertsson, U. Lindstrom y M. Zabzine. *$N = 1$ supersymmetric sigma model with boundaries, I.* Comm.Math.Phys. **233** (2003), 403–421.
- [2] C. Albertsson, U. Lindstrom y M. Zabzine. *$N = 1$ supersymmetric sigma model with boundaries. II.* Nuclear Physics B **678** (2004), 295–316.
- [3] G. Anzellotti, R. Serapioni y I. Tamanini. *Curvatures, functionals, currents.* Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 617–669.
- [4] G. Anzellotti y S. Delladio. *Minimization of functionals of curvatures and the Willmore problem.* Advances in geometric analysis and continuum mechanics (Stanford, CA, 1993), 33–43, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [5] L. Alías y B. Palmer. *Conformal Geometry of Surfaces in Lorentzian Space Forms.* Geometriae Dedicata **60** (1996), 301–315.
- [6] J. Arroyo, M. Barros y O. J. Garay. *Willmore-Chen tubes on homogeneous spaces in warped product spaces.* Pacific J. Math. **188** (1999), 201–207.
- [7] T. M. Apostol. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté, S.A. Barcelona, 1981.
- [8] A. Avez. *Formule de Gauss-Bonnet-Chern en métrique de signature quelconque.* Rev. Un. Mat. Argentina **21** (1963), 191–197.
- [9] A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam y A. Stern. *Classical Topology and Quantum States.* World Scientific, Singapore, 1991.

- [10] M. Barros. *Willmore tori in non-standard 3-spheres*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **121** (1997), 321–324.
- [11] M. Barros. *A geometric algorithm to construct new solitons in the $O(3)$ nonlinear sigma model*. Physics Letters B **553** (2003), 325–331.
- [12] M. Barros, M. Caballero y M. Ortega. *Villarceau foliated solitons in the two-dimensional $O(3)$ nonlinear sigma model*. Journal of Geometry and Physics **57** (2006), 177–192.
- [13] M. Barros, M. Caballero y M. Ortega. *Rotational Surfaces in \mathbb{L}^3 and Solitons in the Nonlinear Sigma Model*. arXiv:0705.2206.
- [14] M. Barros y A. Ferrández. *Hélices in Nature*. En preparación.
- [15] A. A. Belavin y A. M. Polyakov. *Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets*. JETP Lett. **22** (1975), 245–247.
- [16] M. Berger. *Geometry I y II*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [17] G. S. Birman y K. Nomizu. *The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional spacetimes*. Michigan Math. J. **31** (1984), 77–81.
- [18] W. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie, III*. Springer-Verlag, Berlin, 1929.
- [19] P. Bracken. *The generalized Weierstrass system for nonconstant mean curvature surfaces and the nonlinear sigma model*. J. Comput. Appl. Math. **202** (2007), 122–132.
- [20] V. Benci y D. Fortunato. *Solitary waves in classical field theory*, en *Nonlinear Analysis and Applications to Physical Sciences*. Springer-Verlag Italia. Milano, 2004.
- [21] V. Benci y D. Fortunato. *Solitary waves in the nonlinear wave equation and in gauge theories*. Journal of Fixed Point Theory and Applications **1** (2007), 61–86.
- [22] R. Bryant y P. Griffiths. *Reduction for constrained variational problems and $\int \frac{\kappa^2}{2} ds$* . American Journal of Mathematics **108** (1986), 525–570.
- [23] P. F. Byrd y M. D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, 1971.

- [24] R. Capovilla y J. Guven. *Helfrich-Canham bending energy as a constrained nonlinear sigma model*. J. Phys. A **38** (2005), 2593–2597.
- [25] F. Casorati. *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune*. Acta mathematica **14** (1890), 95–110.
- [26] F. S. A. Cavalcante, M. S. Cunha y C. A. S. Almeida. *Vortices in a nonminimal Maxwell-Chern-Simons $O(3)$ sigma model*. Phys.Lett. B **475** (2000), 315–323.
- [27] S. Chern. *Pseudo-Riemannian geometry and the Gauss-Bonnet formula*. An. Acad. Brasil. Cil **35** (1963), 17–26.
- [28] H. T. Davis. *Introduction to nonlinear differential y integral equations*. Dover Publications Inc., 1962.
- [29] M. P. Do Carmo y M. Dajzer. *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*. Tôhoku Math. J. **34** (1982), 425–435.
- [30] A. Enneper. *Die cyrklichen flachen*. Z. Math. und Phys. **14** (1869), 393–421.
- [31] J. Hano y K. Nomizu. *Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space*. Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), 427–437.
- [32] P. S. Howe, U. Lindstrom y V. Stojevic. *Special holonomy sigma models with boundaries*. J. High Energy Phys. (2006), 159, 20 pp. (electronic).
- [33] V. Jurdjevic. *Non-Euclidean Elastica*. American Journal of Mathematics, **117** (1995), 93–124
- [34] R. Kusner. *Conformal geometry and complete minimal surfaces*. Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 291–295.
- [35] J. Langer y D. A. Singer. *The total squared curvature of closed curves*. J. Diff. Geom. **20** (1984), 1–22.
- [36] J. Langer y D. A. Singer. *Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space*. Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 531–534.
- [37] H. B. Lawson. *Complete minimal surfaces in S^3* . Ann. of Math. (2) **92** (1970), 335–374.

- [38] B. Mieck. *Nonlinear sigma model for a condensate composed of fermionic atoms*. Physica A **358** (2005), 347–365.
- [39] Y. Mishchenko y Chueng-Ryong Ji. *A novel variational approach for Quantum Field Theory: example of study of the ground state and phase transition in Nonlinear Sigma Model* Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005), 3488–3494.
- [40] E. Nešović, M. Petrović-Torgašev y L. Verstraelen. *Curves in Lorentzian spaces*. Bolletino U. M. I. (8) **8-B** (2005), 685–696.
- [41] M. S. Ody y L. H. Ryder. *Time-independent solutions to the two-dimensional nonlinear $O(3)$ sigma model and surfaces of constant mean curvature*. Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995), 337–364.
- [42] B. O' Neill. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [43] H. Otsu, T. Sato, H. Ikemori y S. Kitakado. *Solitons of sigma model on noncommutative space as solitons of electron system*. J. High Energy Phys. (2005), 52, 11 pp. (electronic).
- [44] R. S. Palais. *The principle of symmetric criticality*. Commun. Math. Phys. **69** (1979), 19–30.
- [45] B. Palmer. *Uniqueness Theorems for Willmore Surfaces with Fixed and Free Boundaries*. Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 1581–1601.
- [46] U. Pinkall. *Hopf tori in S^3* . Invent. Math. **81** (1985), 379–386.
- [47] S. Purkait y D. Ray. *A class of solutions in the $O(3)$ σ -model*. Phys.Lett. A **116** (1986), 247–250.
- [48] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons*. Elsevier Science Publishers B.V., 1989.
- [49] M. Schmidt. *A proof of the Willmore conjecture*. arXiv: math.DG/0203224.
- [50] R. Schützhold y S. Mostame. *Quantum simulator for the $O(3)$ nonlinear sigma model*. JETP Lett. **82** (2005), 248–252.
- [51] J. Simons. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics, **88** (1968), 62–105.

-
- [52] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Boston. Perish, Inc. 1999.
- [53] G. Thomsen. *Über Konforme Geometrie, I: Grundlagen der Konformen Flächentheorie*. Abh. Math. Sem. Hamburg **3** (1923), 31–56.
- [54] C. Truesdell. *The influence of elasticity on analysis: the classic heritage*. Bulletin of the American Mathematical Society **9** (1983), 293-310.
- [55] T. Tsurumaru y I. Tsutsui. *On topological terms in the $O(3)$ nonlinear sigma model*. Phys. Lett. B **460** (1999), 94–102.
- [56] J. L. Weiner. *On a problem of Chen, Willmore, et al.* Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 19–35.
- [57] J. H. White. *A global invariant of conformal mappings in space*. Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 162–164.
- [58] T. J. Willmore. *Note on embedded surfaces*. Ann. Stiint. Univ. Al. I. Cuza, Iași, Sect. I a Mat. (N.S.) 11B (1965), 493–496.
- [59] T. J. Willmore. *Surfaces in Conformal Geometry*. Annals of Global Analysis and Geometry **18** (2000), 255-264.
- [60] W. J. Zakrzewski. *Low-Dimensional Sigma Models*. Adam Hilger. Bristol, 1989.